Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Izvodi i kinematički problemi u srednjoškolskoj nastavi

Nataša Kovač

Mentor:
prof. dr. Miloš Arsenović

Beograd,
2016.

Sadržaj

1 Predgovor

Strategijom razvoja obrazovanja u Srbiji do 2020. godine (Službeni glasnik Republike Srbije broj 107/2012) očekuje se da će četvorogodišnje srednje skole (gimnazije i srednje stručne skole) upisivati 89% svršenih osnovaca. Takođe se očekuje da će Republika Srbija imati 38.5% visokoobrazovanih građana sa strukturnom kvalifikacijom koja je usaglašena sa potrebama privrede i društva u Republici Srbiji.

Najtraženija zanimanja sa sedmim stepenom stručne spreme su u poljima prirodnih i tehničkih nauka kao i u oblasti bankarstva, što naravno zahteva od učenika da nakon završenog srednjeg obrazovanja nastave obrazovanje u odgovarajućim poljima. Zajedničko za sve ove struke je što zahtevaju vičnost u oblasti matematike. Naime, sve visoke škole i fakulteti iz ovih oblasti imaju u planu i programu matematike izvode. Samim tim, učenici, budući studenti moraju dobro savladati pojam izvoda, kao i njegove primene.

Međutim, nije samo zbog učenika koji nameravaju nastaviti obrazovanje neophodno obratiti posebnu pažnju na ovu oblast[1]. Sama oblast diferencijalnog računa ostavlja dosta prostora za koleraciju sa ostalim naukama (pogotovo tehničke i mašinske prirode) što nam predstavlja dodatnu motivaciju da tokom nastave posvetimo više vremena i paženje ovoj oblasti nego što je to određeno planom i programom.

Izvodima se u proseku posvećuje 20% godišnjih časova, između 17 i 26 časova u zavisnosti od tipa škole i usmerenja. Sam izbor načina obrade gradiva je naravno u rukama nastavnika koji mora prilagoditi plan i program odeljenju, a opet ostati u u granicama plana i programa.

Direktan uticaj na izbor teme je imalo radno mesto autora, Tehnička škola GSP, a kriterijum pri izboru uvrštenog materijala je bio plan i program za učenike srednjih škola što je i uslovilo način izlaganja. Sam rad je nastao tokom tri godine rada sa učenicima i u njega su uvrštena zapazanja samog autora vezana za primerenost gradiva, kao i način obrade datog gradiva sa učenicima koji se obrazuju za rad u polju tehničkih nauka i mašinstva.

[1] integralnim računom se nećemo baviti u ovom radu, ali je svakako neodvojiv deo matematičke analize

2 Uvod

2.1 Istorija diferencijalnog računa

Pojam izvoda je veoma star i blizak starogrčkim matematičarima, poput Euklida[2] i Arhimeda[3]. Arhimed je zapravo uveo pojam beskonačno malih veličina, mada su one prvobitno korišćene radi proučavanja površina i zapremina, a ne izvoda i tangenti.

Moderni razvoj analize se uglavnom pripisuje Isaku Njutnu[4] i Gotfridu Lajbnicu[5] koji su nezavisno jedan od drugog razvili diferencijalni i integralni račun. Ključni momenat, koji im je doneo priznanje, je fundamentalna teorema analize, koja je povezala diferencijaciju i integraciju i samim time obezvredila prethodne metode računanja površine i zapremine.

Od XVII veka pa na dalje mnogi matematičari doprinose daljem razvoju teorije izvoda. U XIX veku analiza upada u mnogo rigoroznije okvire zahvaljujući radovima Augustina Luj Košija[6], Bernharda Rimana[7] i Karla Vajerštrasa[8]. U ovom periodu takođe se izvodi generalizacija u Euklidovom prostoru i Kompleksnoj ravni.

2.2 Notacija

Notacija koju je uveo Lajbnic su bila jedna od prvih. I dalje je u upotrebi kada jednačinu $y = f(x)$ posmatramo kao funkcionalnu vezu između zavisne i nezavisne promenljive.

Prvi izvod obeležavamo sa: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$ ili $\frac{d}{dx}f(x)$.

n-ti izvod obeležavamo sa: $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$ ili $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$.

Njutnova obeležja takođe nazivamo i "označavanje tačkom". Čini ga tačka iznad funkcije i obeležava izvod po vremenu. Ako je $y = f(t)$ tada $\dot{y}$ i $\ddot{y}$ obeležavaju redom prvi i drugi izvod funkcije y po promenljivoj t. Ovo obeležje se ekskluzivno koristi za izvod po vremenu, što znači da nezavisno promenljiva t predstavlja vreme. Zapis je vrlo zastupljen u fizici i matematičkim disciplinama povezanim sa fizikom, poput diferencijalnih jednačina. Iako ovo obeležje gubi funkcionalnost za izvode višeg reda, u praksi su nam potrebni samo prvih nekoliko izvoda.

Lajbnicova notacija, koju takođe nazivamo "prim notacija" je najzastupljenija notacija izvoda, gde je izvod funkcije $f(x)$ predstavljen jednostavno sa $f'(x)$ ili f'. Na sličan način, drugi i treći izvod su f'' i f''', dok je viši izvod obeležen sa $f^{(n)}(x)$ ili $f^{(n)}$.

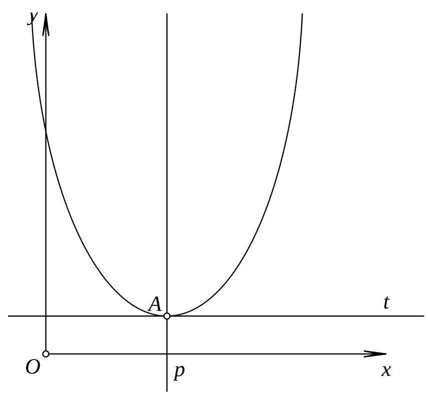
[2]Euklid iz Aleksandrije (IV v. pre n.e.), strogrčki matematičar
[3]Arhimed iz Sirakuze (III v. pre n.e.), starogrčki matematičar
[4]Isaac Newton (1642-1726), engleski matematičar
[5]G.W. Leibniz (1646-1716), nemački matematičar
[6]A.L. Cauchy (1789-1857), francuski matematičar
[7]B. Riemann (1826-1866), nemački matematičar
[8]K.T.W. Weierstras (1815-1897), nemački matematičar

3 Uvođenje izvoda

Da bismo definisali izvod neke funkcije moramo objasniti dve stvari koje okružuju izvod, a to su:
Tangenta i konstrukcija tangente
Srednja i trenutna brzina

3.1 Tangenta i konstrukcija tangente (geometrijska interpretacija prvog izvoda)

Definicija tangente u elementarnoj geometriji, koja se radi u osnovnoj školi, definiše tangentu kao jedinu pravu koja ima samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom.
Tačno je da se radi o jednoj tački i tačno je da se radi o jednoj pravoj. Međutim, kada pogledamo sliku 1 vidimo kako jedna prava p seče parabolu samo u jednoj tački, ali ova prava nije tangenta date parabole u toj tački. Prava tangenta u toj tački je prava t koja je normalna na pravu p i prolazi tačkom A.

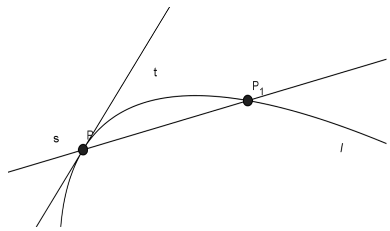


Slika 1: Parabola i tangenta

Da bismo došli do valjane definicije tangente, uočimo sliku 2 i sve što je na njoj nacrtano.

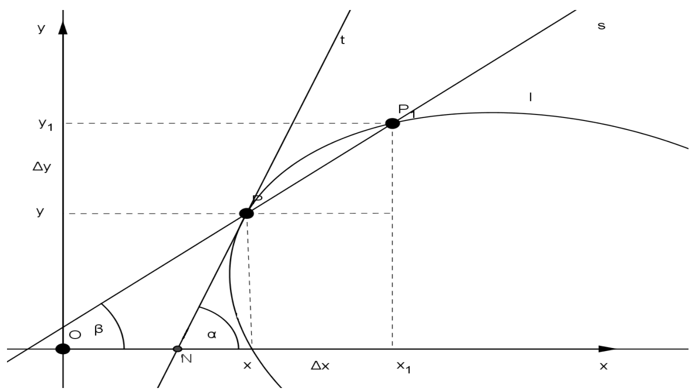
Slika 2 sadrži jednu krivu l i dve tačke P i P_1, te pravu s koja spaja ove dve tačke. Vidimo da prava $s(P, P_1)$ seče krivu pa ćemo je nazvati **sečica** s. Kada hoćemo da "odsečemo" što manji luk mi ćemo postupiti tako da tačku P_1 približavamo tački P krivom. Ako se tačka P_1 približava tački P luk će se sve više smanjivati. Sečica će se menjati u odnosu na početni položaj, i kada tačka P_1 teži tački P, ona teži jednom graničnom položaju. Granični položaj sečice s upravo će biti **tangenta** t.

Definicija 1. *Tangenta krive u datoj tački P je granični položaj sečice $s = s(P, P_1)$ kada tačka P_1 ove krive teži po krivoj tački P.*



Slika 2: Tangenta i sečica

Sve prethodno rečeno iskažimo matematičkim jezikom:
Posmatrajmo Sliku 3.



Slika 3: Geometrijska interpretacija izvoda

Kriva l zadata je grafikom neprekidne funkcije $y = f(x)$. Prava PP_1, gde su P i P_1 tačke krive l je sečica krive l. Tačka P ima koordinate $P(x, y)$ a tačka P_1 ima koordinate $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Koordinate tačke P_1 se lako prepoznaju ako znamo da je $\Delta x = x_1 - x$, odnosno $\Delta y = y_1 - y$ što se sa slike može videti. Nadalje, znamo da je koeficijent pravca sečice dat izrazom:

$$tg\beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.1.1)$$

Dakle, koeficijent pravca tangente t krive $y = f(x)$ u tački $P(x, y)$ jednak je graničnoj vrednosti količnika $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ priraštaja funkcije Δy i priraštaja argumenta Δx kada on teži nuli, osnosno:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.1.2)$$

Formula 2.1.2. nam služi kao motivacija za uvođenje prvog izvoda.

Dakle prvim izvodom funkcije zovemo:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2.1.3)$$

Na ovaj način smo definisali koeficijent pravca tangente u tački, odnosno koeficijent pravca krive u tački, odnosno videli smo jednostavan postupak konstruisanja tangente krive u tački.

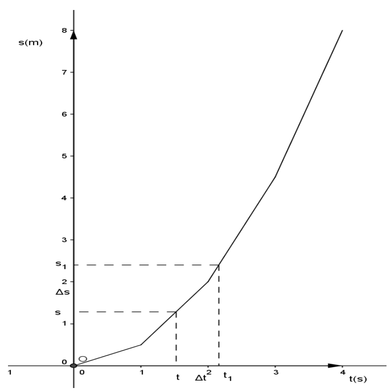
Ovaj način uvođenja pojma izvoda generalno odgovara učenicima koji nisu spremni da istupe iz parametara jednog predmeta. Koleracija postoji sa prethodno savladanim gradivom, mada je to moguće prevazići korišcenjem animacija tokom časova obrade ove olasti. Time se polako postiže koleracija sa drugim predmetima i učenik se lakše uvodi u samu oblast.

3.2 Srednja i trenutna brzina (Mehanička interpretacija prvog izvoda)

Iz fizike nam je dosta stvari jasno kada spomenemo srednju i trenutnu brzinu. Tokom školovanja srednju brzinu smo definisali kao količnik priraštaja puta $s_1 - s = \Delta s$ i vremenskog intervala $t_1 - t = \Delta t$, tj. priraštaja vremena za koje je telo prešlo put Δs, odnostno $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Znamo da je pređeni put uvek povežan sa vremenom t, pa je: $s = f(t)$. Ako posmatramo priraštaj puta Δs koje je telo prešlo za vreme Δt možemo pisati: $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$, pa nam je srednja brzina jednaka:

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (2.2.1)$$



Slika 4: Srednja i trenutna brzina

Izrazom (2.2.1) uvek se može izračunati neka srednja brzina koja se u toku nekog vremenskog intervala Δt promenila više puta. Međutim, ako posmatramo vremenski interval Δt što manji, promene brzine za dati vremeneski interval će biti sve manje. Kada "pustimo" da Δt teži nuli srednja brzina će postati trenutna.

Na ovaj način (preko srednje i trenutne brzine) je Njutn definisao izvod funkcije, pa se čak može reći da je originalana definicija izvoda upravo preko srednje i trenutne brzine. Možemo s pravom kazati: Izvod je brzina promene dužine puta po vremenu.

Primer 1. *Kretanje pri slobodnom padu dato je jednačinom* $s = \frac{1}{2}gt^2$. *Odredi srednju brzinu tela na vremenskom intervalu* $[t_1, t_2]$ *i trenutnu brzinu tela u trenutku* t_0.

Zakon kretanja tela dat je funkcijom: $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$
Srednju brzinu smo definisali kao priraštaj puta po vremenu:

$$\begin{aligned} v_{sr} &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{1}{2}g\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{1}{2}g\frac{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{1}{2}g(t_2 + t_1) \end{aligned}$$

Sa druge strane, trenutnu brzinu možemo da nađemo kao izvod po vremenu:

$$\begin{aligned} v_{tr} = f'(t_0) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_0^2 + 2t^2\Delta t + \Delta t^2 - t_0^2}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{2}g \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + \Delta t) \\ &= \frac{1}{2}g2t_0 = gt_0 \end{aligned}$$

Primer 2. *Projektil se izpaljuje vertikalno u vis brzinom* v_0. *Kretanje projektila dato je jednačinom* $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. *Odredi srednju brzinu projektila u vremenskom intervalu* $[t_1, t_2]$ *i trenutnu brzinu u trenutku* t_0.

Kao u prethodnom primeru imamo:

$$\begin{aligned}
v_{sr} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} &= \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 - (v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2)}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 - v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2}{t_2 - t_1} \\
&= \frac{v_0 (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{1}{2} g \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} \\
&= v_0 - \frac{1}{2} g (t_2 + t_1)
\end{aligned}$$

Ponovo trenutnu brzinu nalazimo kao izvod po vremenu:

$$\begin{aligned}
v_{tr} = h'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 (t_0 + \Delta t) - \frac{1}{2} g (t_0 + \Delta t)^2 - (v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 t_0 + v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g (t_0 + \Delta t)^2 - v_0 t_0 + \frac{1}{2} g t_0^2}{\Delta t} \\
&= v_0 - \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} \frac{t_0^2 + 2 t_0 \Delta t + \Delta t^2 - t_0^2}{\Delta t} \\
&= v_0 - \frac{1}{2} g \lim_{\Delta t \to 0} (2 t_0 + \Delta t) = v_0 - g t_0
\end{aligned}$$

Sa mehaničkom interpretacijom prvog izvoda već polako počinjemo da uočavamo jasnu vezu između matematike i fizike. Ovo je izuzetno važno za učenike srednjih stučnih škola. Potrebno je insistirati na stalnom utvrđivanju prethodno savladanog gradiva. Izvodi nam kao oblast ostavljaju dovoljno prostora da izvršimo koleraciju sa gradivom fizike iz prvog razreda srednje škole, čime učenici utvrđuju prethodno stečena znanja.

3.3 Pojam izvoda funkcije

Namernim raspravljanjem o tangenti i srednjoj i trenutnoj brzini došli smo do pojma izvoda. Kao i kod definisanja trenutne brzine, ukoliko je poznat zakon puta $s = f(t)$, do pojma izvoda možemo doći bilo kakvim izračunavanjem brzine promene neke veličine u toku vremena ako je poznat zakon zavisnosti te veličine od vremena.

Definicija 2. *Izvod funkcije $y = f(x)$ po argumentu x je granična vrednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta kad priraštaj teži nuli, tj:*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2.3.1)$$

Kada govorimo o izvodima često spominjemo i **diferenciranje**. Diferenciranje nije ništa drugo do granični proces kojim se dolazi do izvoda y' funkcije y. Za funkciju $y = f(x)$ koja ima izvod u tački x kažemo da je diferencijabilna u toj tački. Kada kažemo da je funkcija diferencijabilna na nekom intervalu (a, b) ta znači da je ista diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.

Razmotrimo vezu između diferencijabilnosti i neprekidnosti funkcije.

Teorema 1. *Ako je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u tački x, ona je tada i neprekidna u toj tački.*

Dokaz. Pretpostavka teoreme je da je funkcija diferencijabilna u tački x tj. postoji $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Ako nam je $\Delta x \neq 0$, tada možemo pisati:

$$\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

Sada imamo, ako primenimo graničnu vrednost na prethodni izraz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

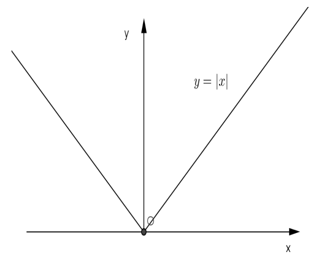
Dakle, kada $\Delta x \to 0$, tada $\Delta y \to 0$. To znači da je diferencijabilna funkcija $y = f(x)$ istovremeno i neprekidna u datoj tački. □

Primetimo da neprekidna funkcija u tački x ne mora u toj tački biti diferencijabilna. Na primer, funkcija $y = |x|$. Ta funkcija je neprekidna na celom intervalu realnih brojeva.

Grafik te funkcije dat je na slici 5. Lako se pokaže da je:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Iz zadnjih izraza vidimo da je granična vrenost količnika $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za levu i desnu graničnu vrednost po argumentu Δx različita, što znači da funkcija $y = |x|$ u koordinatnom početku nema jedinstven izvod. Drugim rečima, funkcija $y = |x|$ u tački $x = 0$ nije diferencijabilna.



Slika 5: Grafik funkcije $y = |x|$

Na osnovu prethodnog, zaključujemo: Svaka diferencijabilna funkcija ujedno je i neprekidna, dok svaka neprekidna funkcija nije uvek i diferencijabilna. Pojam diferencijabilnosti je uži od pojma neprekidnosti.

4 Izvod elementarnih funkcija

Izračunajmo u obliku teorema izvode nekih elementarnih funkcija, koje se pri rešavanju složenih zadataka koriste kao standardne formule.Za sledeće dokaze ćemo se oslanjati na sledeće primere iz graničnih vrednosti funkcija:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

kao i saglasnost operacije limes sa algebarskim operacijama.

Teorema 2. *Izvod konstante je jednak nuli.* $(c)'=0$

Dokaz. Pretpostavimo da nam je zadata funkcija $y=c$, gde za svaki argument x vrednost funkcije je $y=f(x)=c$. Izračunajmo priraštaje:

$$\Delta y=y_1-y=c-c=0$$
$$\Delta x=x_1-x$$

Izračunajmo količnik i graničnu vrednost priraštaja shodno definiciji izvoda:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

□

Teorema 3. *Izvod linearne funkcije jednak je konstanti.* $(ax+b)'=a;a,b\in R$

Dokaz. Pretpostavimo da je linearna funkcija zadata u obliku: $y=f(x)=ax+b;a,b\in R$. Izračunajmo priraštaje:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\
&= a(x+\Delta x)+b-(ax+b)\\
&= ax+a\Delta x+b-ax-b\\
&= a\Delta x\\
\Delta x &= x_1-x\\
y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}\\
&= a
\end{aligned}$$

□

Teorema 4. *Izvod kvadratne funkcije je linearna funkcija.* $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$

Dokaz. Pretpostavimo da je kvadratna funkcija zadata u obliku: $y = f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in R$. Izračunajmo priraštaje:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c) \\
&= ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c \\
&= 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x \\
&= \Delta x(2ax + a\Delta x + b) \\
\Delta x &= x_1 - x \\
y' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2ax + a\Delta x + b)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x + b) \\
&= 2ax + b
\end{aligned}$$

□

Teorema 5. *Izvod funkcije $y = \sin x$, jednak je $y' = (\sin x)' = \cos x$*

Dokaz. Izračunajmo priraštaje:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= x_1 - x \\
x_1 &= x + \Delta x \\
\Delta y &= y_1 - y \\
\Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\
\Delta y &= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \\
\Delta y &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}
\end{aligned}$$

Zadnje dve jednakosti dobijaju se iz trigonometrijskih jednakosti razlike uglova:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Sada imamo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Potražimo li graničnu vrednost gornjeg izraza dobićemo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Razmotrimo dobijenu graničnu vrednost. Uočimo da je $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$. S toga imamo:

$$y' = \cos x$$

□

Teorema 6. *Izvod* $y = \cos x$, *jednak je* $y' = (\cos x)' = -\sin x$.

Dokaz. Izračunajmo priraštaje:

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & x_1 - x = \Delta x \\ x_1 & = & x + \Delta x \\ \Delta y & = & y_1 - y \\ \Delta y & = & \cos(x + \Delta x) - \cos x \\ \Delta y & = & -2\sin\dfrac{x + \Delta x + x}{2}\sin\dfrac{x + \Delta x - x}{2} \\ \Delta y & = & -2\sin\dfrac{2x + \Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2} \end{array}$$

Zadnje dve jednakosti dobijaju se iz trigonometrijskih jednakosti razlike uglova:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Sada imamo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Potražimo li graničnu vrednost gornjeg izraza dobićemo:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Razmotrimo dobijenu graničnu vrednost. Uočimo da je $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$. S toga imamo:

$$y' = -\sin x$$

□

Teorema 7. *Izvod* $y = e^x$, *jednak je* $y' = (e^x)' = e^x$.

Dokaz. Izračunajmo priraštaje:

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & x_1 - x = \Delta x \\ x_1 & = & x + \Delta x \\ \Delta y & = & y_1 - y \\ & = & e^{x+\Delta x} - e^x \\ & = & e^x e^{\Delta x} - e^x \\ & = & e^x(e^{\Delta x} - 1) \end{array}$$

Sada imamo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Potražimo li graničnu vrednost gornjeg izraza dobićemo:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

Razmotrimo dobijenu graničnu vrednost. Uočimo da je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$. S toga imamo:

$$y' = e^x$$

□

Korišćenjem definicije za nalaženje prvog izvoda, lako možemo naći izvode elementarnih funkcija. Svi izvodi elementarnih funkcija predstavljeni su u sledećoj tabeli.

4.1 Tabela izvoda elementarnih funkcija

	Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za:
1.	c-konstanta	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x^a	ax^{a-1}	$x > 0$ za $a \in \mathbb{R}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
4.	e^x	e^x	
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
6.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
7.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
9.	$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
10.	$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
11.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
12.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
13.	$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Određivanje izvoda funkcije po definiciji je dobar način da učenici utvrde prethodno savladane granične vrednosti funkcije, kao i celokupno gradivo matematike savladano tokom školovanja. To je i dobro mesto da se "zastane" u gradivu sa izlaganjem i da se dopusti učenicima da uz pomoć nastavnika nađu ove izvode, barem prvih deset iz tabele.

5 Osnovne teoreme o izvodu

5.1 Izvod zbira, razlike, proizvoda i količnika funkcija

Teorema 8. *Ako su f i g diferencijabilne funkcije u tački x i c-konstanta, tada važi:*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$
5. $(cf)'(x) = cf'(x)$

Dokaz. 1. Označimo $y = f + g$. Tada je:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Poslednja dva koraka su moguća zato što su funkcije f i g diferencijabilne u tački x pa limesi oba sabirka postoje.

2. Označimo $y = f - g$. Tada je:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - g(x+\Delta x) - f(x) + g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x) - g'(x)
\end{aligned}$$

3. Označimo $y = fg$. Tada je:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x+\Delta x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

4. Označimo sa $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Kako je po pretpostavci, $g(x) \neq 0$, važi i $g(x+\Delta x) \neq 0$. Zato je:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left[g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \left[g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \right] \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

5. Označimo sa $y = (cf)(x), c \in R$. Funkciju y posmatrajmo kao proizvod dve funkcije: $c = const.$ i f. Primenimo stav o izvodu proizvoda i dobijamo:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= c'f(x) + cf'(x) \\
&= 0 \cdot f(x) + cf'(x) \\
&= cf'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

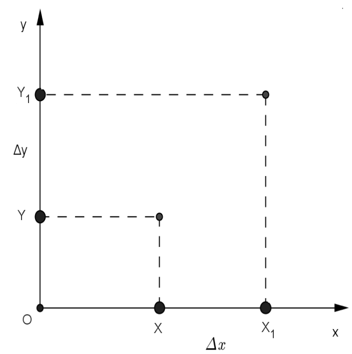
Broj dokaza urađenih tokom časa treba da zavisi od samog sastava odeljenja. Ali ipak treba insistirati da se barem dokazi za izvod zbira i razlike funkcije savladaju.

5.2 Izvod složene funkcije

Teorema 9. *Neka je $y = f(x)$ diferencijabilna u tački x i $z = g(y)$ diferencijabilna u tački $y = f(x)$. Tada je funkcija $z = (g \circ f)(x)$ diferencijabilna u tački x i pri tome važi:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Dokaz. Neka je Δx priraštaj funkcije f i Δy priraštaj funkcije y.



Slika 6: Priraštaji Δx i Δy i njihova zavisnost

Za njih važi: $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$ i ako $\Delta x \to 0$, tada i $\Delta y \to 0$, što se lako može uočiti sa gornje slike.

Napišimo izvod funkcije $z = g(y)$ u nekoj tački y:

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \qquad (\Delta z = g(y + \Delta y) - g(y))$$

Ako posmatramo izraze $g'(y)$ i $\dfrac{\Delta z}{\Delta y} = \dfrac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$ oni se razlikuju za vrednost beskonačno male funkcije[9] $\alpha(\Delta y) \to 0$ kada $\Delta y \to 0$, tako da možemo zapisati:

$$g'(y) + \alpha(\Delta y) = \frac{\Delta z}{\Delta y}$$

odnosno:

$$\Delta z = g'(y) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta y) \cdot \Delta y, \qquad \alpha(\Delta y) \to 0, \Delta y \to 0$$

Funkciju α koja je bila definisana za $\Delta y \neq 0$ dodefinišimo pomoću $\alpha(0) = 0$ pa prethodna relacija ostaje na snazi.
Podelimo tu relaciju sa Δy i dobijemo:

[9]funkcija čija je granična vrednost 0 kada x teži nekoj vrednosti a

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ako $\Delta x \to 0$ onda će (zbog neprekidnosti funkcije u y) $\Delta y \to 0$ i $\alpha(\Delta y) \to 0$ pa prelaskom na limes dobijamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} &= \lim_{\Delta x \to 0} g'(y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta y) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= g'(y) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= g'(y) \cdot f'(x) \\
&= g'(f(x)) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Kod izvoda složene funkcije učenici prvi put zaista osete otpor prema gradivu. Na dokazu teoreme ne treba insistirati, daleko je važnije da učenici znaju da je primene.

5.3 Diferencijal funkcije

Pretpostavimo da nam je data funkcije $y = f(x)$ i da ona ima izvod u tački x. Možemo pisati:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Uzimajući u obzir pojam beskonačno male veličine vidimo da je razlika između y' i $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ beskonačno mala, kada $\Delta x \to 0$. Tu beskonačno malu veličinu označimo sa ε. Možemo pisati da je:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \varepsilon,$$

pri čemu ε zavisi od Δx, odnosno $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$.

Množeći gornji izraz sa $\Delta x \neq 0$ imamo:

$$\Delta y - y'\Delta x = \varepsilon \Delta x$$

Poznato je da y zavisi od x, a y' se ne menja kad $\Delta x \to 0$, pa imamo:

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

Zadnji izraz izražava priraštaj funkcije Δy. Vidimo da je taj priraštaj jednak zbiru $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x$. Kada $\Delta x \to 0$ tada $\varepsilon \Delta x$ teži nuli brže od Δx, jer je $\dfrac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \varepsilon \to 0$, dok se sabirak $\Delta y = y'\Delta x$ zove glavni deo priraštaja funkcije. Druga važna osobina izraza $\Delta y = y'\Delta x$ je da je linearan po Δx. Preko zadnjih relacija došli smo do pojma diferencijala.

Definicija 3. *Diferencijal funkcije $y = f(x)$ zove se proizvod izvoda $y' = f'(x)$ funkcije i priraštaja nezavisno pomenjive:*

$$y'\Delta x \qquad \textit{ili} \qquad f'(x)\Delta x$$

Prethodnu definiciju možemo kazati i tako da je diferencijal funkcije glavni deo priraštaja te funkcije. Označavamo ga sa $\mathrm{d}y$ ili $\mathrm{d}f(x)$.
Ako namerno uzmemo funkciju $y = x$ i potražimo diferencijal, dobićemo $\mathrm{d}y = 1\mathrm{d}x$, odnosno. $\mathrm{d}y = \Delta x$. Kada stavimo umesto y promenljivu x imamo da je $\mathrm{d}x = \Delta x$. Sada dolazimo do zaključka da je diferencijal nezavisno promenljive jednak njegovom priraštaju. Zato diferencijal $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$ ili $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ pa je:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' \qquad \text{ili} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) \qquad \text{ili} \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

Zadnje jednakosti dokazuju nam neposrednu posledicu izračunavanja diferencijala funkcije sa diferenciranjem. Mozemo zaključiti da izvod funkcije predstavlja količnik diferencijala funkcije i diferencijala nezavisno promenljive, odnosno izvod funkcije predstavlja diferencijalni količnik funkcije.

Zbog prethodnog u mnogim literaturama, ne samo matematičkim, nego i tehničkim, nalazimo upravo ovako opisani izvod funkcije, odnosno nalazimo upotrebu simbola $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ za izvod funkcije, tj.

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Razmotrimo još jednom sledeću jednakost:

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

kako je: $\Delta x = \mathrm{d}x$, možemo pisati:

$$\Delta y = y'\mathrm{d}x + \varepsilon \mathrm{d}x$$

Kada $\Delta x \to 0$ tada $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x \to 0$. Kada uporedimo beskonačno male vrednosti Δy i $\mathrm{d}y$, uz raniju pretpostavku $\Delta x \to 0$ imamo:

$$\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} = \frac{y'\mathrm{d}x + \varepsilon \mathrm{d}x}{y'\mathrm{d}x} = 1 + \frac{\varepsilon}{y'},$$

pri čemu pretpostavljamo da je $\mathrm{d}y \neq 0$.

Pošto je $\mathrm{d}x \to 0$ tada će $\frac{\varepsilon}{y'} \to 0$, pa ostaje samo $\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y} \to 1$ kad $\mathrm{d}x \to 0$. Iz zadnjih izraza zaključujemo da je priraštaj funkcije približno jednak diferencijalu funkcije za dovoljno malo Δx. Relacija $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1$ vrlo je značajna u praksi kada se umesto priraštaja uzima diferencijal koji je ponekad jednostavnije izračunati od priraštaja. Diferencijal može poslužiti za približno izračunavanje vrednosti funkcija, mađutim postoje metode koje daju veću tačnost pri aproksimaciji.

6 Drugi izvod. Izvodi višeg reda

Ako diferenciranjem funkcije $y = f(x)$, dobijemo funkciju $f'(x)$ i ako je ona diferencijabilna u nekoj tački x tada prvi izvod funkcije $f'(x)$ zovemo drugim izvodom funkcije $f(x)$, a obeležavamo ga sa $f''(x)$.
Ako funkcija $f''(x)$ ima izvod za vrednost argumenta x koji pripada nekom skupu, tada se ovaj izvod zove izvod trećeg reda, ili treći izvod i označava se sa y'''.
Na osnovu izloženog, induktivno možemo definisati n-ti izvod.

Definicija 4. *Izvod n-tog reda (n-ti izvod) funkcije $f(x)$ je izvod od (n-1)-vog izvoda funkcije $f(x)$.*

6.1 Mehanička interpretacija drugog izvoda

Kazali smo da nam mehanička interpretacija prvog izvoda označava brzinu kretanja neke tačke, tj. $v = f'(t)$, gde je $f(t) = s$ - zakon puta. Uočimo da je brzina v, takođe funkcija vremena t. Ako izračunamo drugi izvod puta s po vremenu t dobićemo brzinu promene brzine tačke ili kraće **ubrzanje**. Dakle, ako merimo promenu brzine, imamo: $a = \dfrac{dv}{dt} = f''(t)$.
Ubrzanje tačke je drugi izvod puta po vremenu. Sve ovo naravno, vredi za pravolinisjko kretanje tačke, dok, uopšte za bilo koje kretanje, krivolinijsko ili drugo, ono označava smo jednu komponentu kretanja - tangentnu komponentu.

Primer 3. *Ako je zakon puta dat izrazom $s(t) = 5t^2 + 6t + 7$ potrebno je naći brzinu i ubrzanje.*

$$v(t) = s'(t) = 10t + 6$$
$$a(t) = s''(t) = 10$$

7 Ispitivanje funkcija

7.1 Ispitivanje monotonosti funkcije.

Interval (a, b) na kojem je funkcija bilo rastuća bilo opadajuća nazivamo interval monotonosti funkcije f. Intervale rasta i opadanja možemo ispitivati pomoću izvoda funkcije.

Ako za svako x iz intervala (a, b) važi $f'(x) > 0$, onda funkcija f strogo raste na intervalu (a, b).

Ako za svako x iz intervala (a, b) važi $f'(x) < 0$, onda funkcija f strogo opada na intervalu (a, b).

Prema tome, intervale rasta i opadanja određivaćemo pomoću prvog izvoda funkcije.

Intervale monotonosti funkcije f nalazimo sledećim postupkom:

1. Izračunamo izvod funkcije f
2. Rešimo jednačinu $f'(x) = 0$. Rešenja ove jednačine nazivamo *stacionarnim tačkama*
3. Stacionarnim tačkama domen funkcije delimo na intervale monotonosti. Proverom znaka izvoda određujemo da li su to intervali opadanja ili intervali rasta funkcije.

Primer 4. *Odredimo intervale monotonosti za funkciju:*

$$f(x) = x^3 - 12x + 1$$

Izvod funkcije je

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Tačke -2 i 2 su nule izvoda ove funkcije i samim time i stacionarne tačke funkcije f. Funkcija raste na onim intervalima na kojima je $f'(x) \geqslant 0$:

$$3x^2 - 12 \geqslant 0 \iff 3(x+2)(x-2) \geqslant 0$$

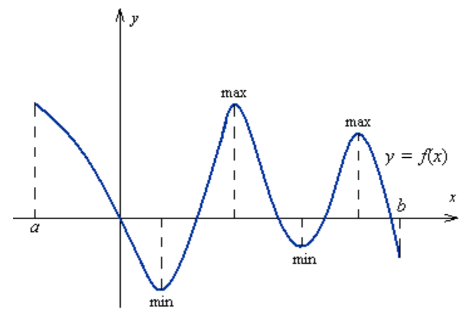
Ova nejednakost ispunjena je za

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

Po definiciji rasta i opadanja funkcije vidimo da ona raste na intervalu $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, a opada na intervalu $x \in (-2, 2)$.

7.2 Ekstremne vrednosti funkcije

Funcija f ima u x_0 lokalni minimum ako postoji interval (a, b) koji sadrži x_0 tako da važi: $f(x_0) \leqslant f(x)$, za svaki $x \in (a, b)$.
Funcija f ima u x_0 lokalni maksimum ako postoji interval (a, b) koji sadrži x_0 tako da važi: $f(x_0) \geqslant f(x)$, za svaki $x \in (a, b)$.



Slika 7: Lokalni ekstremumi funkcije

Prikazani su ekstremumi funkcije. Reč "lokalni" označava da je vrednost funkcije u toj tački veća (ili manja) od vrednosti u svim susednim tačkama, ali to ne mora biti najveća (najmanja) vrednost funkcije na celoj oblasti definisanosti.

Teorema 10. *(Fermaova teorema) Ako funkcija f dostiže u x_0 lokalni ekstremum i ako f ima izvod u toj tački, tada važi $f'(x) = 0$*

Dokaz. Prema pretpostavci, funkcija f ima izvod u tački x_0, pa postoji:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Za $x \neq x_0$, označimo $\Delta x = x - x_0$.
Pretpostavimo da funkcija ima maksimum u x_0. Onda levo od tačke x_0 važi $f(x) < f(x_0), x < x_0$.

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

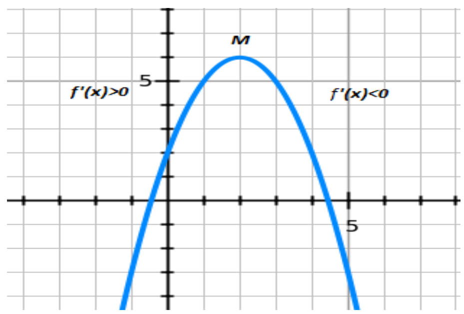
Kad $x \to x_0$ sleva, ovaj količnik teži izvodu u tački x_0 pa je $f'(x_0) \geqslant 0$. Desno od tačke x_0 važi $f(x) < f(x_0), x > x_0$ pa je:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Kad $x \to x_0$ sdesna, dobijamo $f'(x_0) \leqslant 0$. Zato mora biti $f'(x_0) = 0$. $\square$

Primer 5. *Odredimo ekstremne vrednosti funkcije* $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

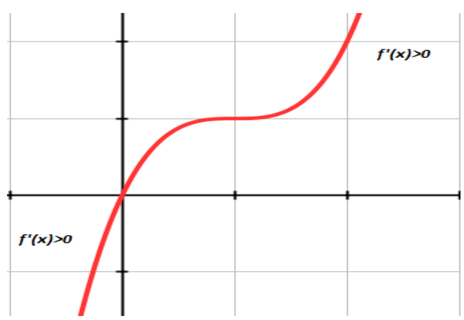
Izračunajmo izvod: $f'(x) = -2x + 4$
Ona je jednaka nuli za $x_0 = 2$. U intervalu $(-\infty, 2)$ izvod je pozitivan, dakle to je interval rasta. U intervalu $(2, \infty)$ izvod je negativan, dakle, to je interval pada. Stoga, funkcija raste levo od tačke x_0, a pada desno od nje, pa je x_0 maksimum funkcije.



Slika 8: $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

Primer 6. *Odredimo ekstremne vrednosti funkcije* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Izračunajmo izvod: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$
Ona je jednak nuli za $x_0 = 1$. U intervalu $(-\infty, 1)$ izvod je pozitivan, što znači da je to interval rašta. U intervalu $(1, \infty)$ izvod je ponovo pozitivan, što znači da je i to interval rasta. Funkcija raste i levo i desno od tačke x_0, pa x_0 nije ekstremna vrednost funkcije.



Slika 9: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

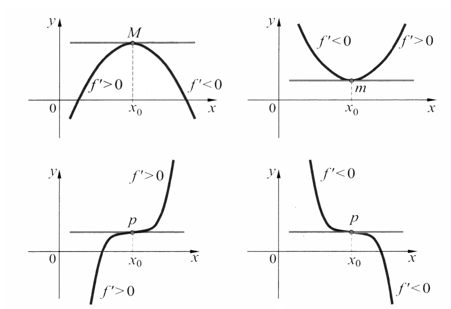
7.3 Nalaženje lokalnih ekstremuma

Pretpostavimo da funkcija f im izvod u svakoj tački oblasti definisanoti. Lokalne ekstremume funkcije f nalazimo na sledeći način:

1. odredimo stacionarne tačke
2. odredimo intervale monotonosti
3. ako je x_0 stacionarna tačka, tada njen karakter utvrđujemo na osnovu rasta i opadanja funkcije levo i desno od te tačke, što je dato predznacima izvoda.

	levo od x_0	desno od x_0	karakter tačke
izvod	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	maksimum
izvod	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	minimum
izvod	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	nije ekstremna vrednost
izvod	$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	nije ekstremna vrednost

Sledeća slika opisuje sve četiri situacije:

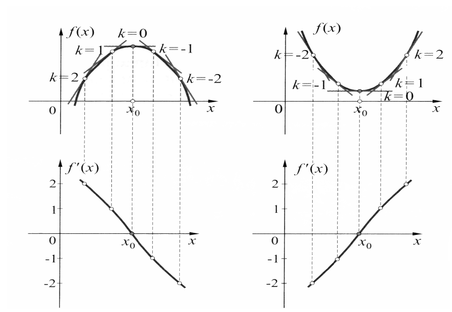


Slika 10: Prikazano je ponašanje funkcije u okolini stacionarne tačke. Ekstremna vrednost se javlja samo kada je izvod funkcije levo i desno od stacionarne tačke različitog znaka.

7.4 Drugi izvod i ekstremne vrednosti

Znak prvog izvoda u okolini stacionarne tačke nije uvek jednostavno odrediti. Zato je korisno utvrditi još jedan kriterijum za određivanje karaktera stacionarne tačke, pomoću drugog izvoda.

Posmatrajmo situaciju kada f ima maksimum u tački x_0. Levo od tačke x_0 vrednost izvoda je pozitivna, a desno od x_0 je negativna. Pogledom na sliku vidimo da nagib tangente opada od pozitivnih vrednosti prema negativnim. Zato je vrednost drugog izvoda u okolini tačke x_0 negativna.



Slika 11: Karakter ekstremne vrednosti funkcije može se utvrditi pomoću predznaka drugog izvoda. Reč je o tome da pri prelazu kroz tačku maksimuma prvi izvod opada, pa je drugi izvod tu negativan. Obrnuto važi za tačku minimuma.

Ako f ima minimum u tački x_0, onda se nagibi tangenti pri prolazu kroz tačku x_0 povećavaju. Dakle, prvi izvod u okolini tačke x_0 raste, pa je drugi izvod pozitivan.

Ispitivanje karaktera ekstremne vrednosti pomoću drugog izvoda:

1. Izračunamo izvode $f'(x)$ i $f''(x)$.

2. Rešimo jednačinu $f'(x) = 0$. Njena rešenja su stacione tačke.

3a. Ako je $f''(x) > 0$, onda je x_0 minimum.

3b. Ako je $f''(x) < 0$, onda je x_0 maksimum.

3c. Ako je $f''(x) = 0$, onda karakter tačke istražujemo pomoću predznaka prvog izvoda.

Primer 7. *Odredimo ekstremnu vrednost funkcije* $f(x) = x^4 - 2x^2$

1. Prvi i drugi izvod ove funkcije su:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$$

2. Imamo tri stacionarne tačke: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

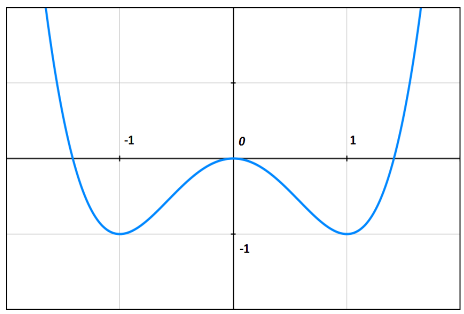
3. Znaci drugog izvoda u stacionarnim tačkama određuju vrstu ekstremuma:

   $f''(x_1) = f''(-1) = 8 > 0,$ x_1 je lokalni minimum,

   $f''(x_2) = f''(0) = -4 < 0,$ x_2 je lokalni maksimum,

   $f''(x_3) = f''(1) = 8 > 0,$ x_3 je lokalni minimum,

Vrednosti funkcije u ovim tačkama su $y_1 = f(x_1) = f(-1) = -1, y_2 = f(x_2) = f(0) = 0, y_3 = f(x_3) = f(1) = -1$. Grafik funkcije je predstavljen donjom slikom.



Slika 12: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Primer 8. *Za pravolinijsko kretanje tačke zakon kretanja je* $s(t) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{18}t^3$*. Odredi brzinu i ubrzanje u funkciji vremena i odredi položaj, brzinu i ubrzanje u trenucima* $t_0 = 0s$,$t_1 = 6s$ *i* $t_2 = 9s$*. Odredi u kom trenutku* $\bar{t}$ *i na kom mestu* $s(\bar{t})$ *tačka menja smer kretanja.*

položaj: $s(t) = t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{18}t^3$
brzina: $v = s'(t) = 1 + t - \frac{1}{6}t$
ubrzanje: $a = s''(t) = 1 - \frac{1}{3}t$
$t_0 = 0$:
$s(0) = 0m \quad v = s'(0) = 1m/s \quad a = s''(0) = 1m/s^2$, kretanje je ubrzano
$t_1 = 6s$:
$s(6) = 12m \quad v = s'(6) = 1m/s \quad a = s''(6) = -1m/s^2$, kretanje je usporeno
$t_2 = 9s$:
$s(9) = 9m \quad v = s'(9) = -3,5m/s \quad a = s''(9) = -2m/s^2$, kretanje je ubrzano, ali se tačka kreće u suprotnom smeru.

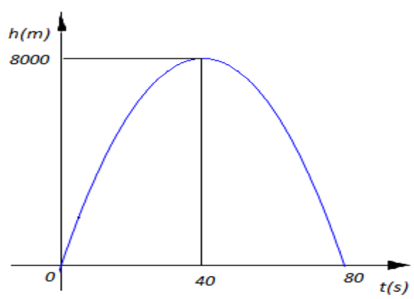
Tačka menja smer kretanja kada je $v = 0$.

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ s'(t) &= 0 \\ 1 + t - \frac{1}{6}t^2 &= 0 \\ t^2 - 6t - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Približne vrednosti rešenja ove kvadratne jednačine su: $t_1 \approx 6,973s$ ili u $t_2 \approx -1.873s$. Jasno je da tačka menja smer u $\bar{t} \approx 6,973s$. Mesto na kojem tačka menja smer je: $s(\bar{t}) = 12,455m$.

Primer 9. *Projektil se ispaljuje vertikalno u vis brzinom $400m/s$. Opisati njegovo kretanje tokom vremena. Naći maksimalnu visinu, koliko vremena je projektilu bilo potrebno da je dostigne i kada je pao na zemlju. Smatrati da je $g = 10m/s^2$. Zakon kretanja ovog tela dat je izrazom: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.*

Pređeni put u zavisnosti od vremena dat je formulom: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, odnosno $h(t) = 400t - 5t^2$, što u suštini predstavlja kvadratnu funkciju po promenljivoj t čiji je grafik sledeća parabola:



Slika 13: $h(t) = 400t - t^2$

Nule ove parabole su:

$$h(t) = 0$$

$$400t - 5t^2 = 0$$

$$5t(80 - t) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \text{i} \quad t_2 = 80$$

Prva vrednost predstavlja trenutak lansiranja, a druga odgovara trenutku vraćanja na zemlju.

Brzina projektila je:

$$v = h'(t) = 400 - 10t$$

Maksimalna dostignuta visina je trenutak kada se projektil zaustavi, odnosno trenutak za koji važi:

$$v = 0$$

$$h'(t) = 0$$

$$400 - 10t = 0$$

$$t = 40s,$$

i iznosi:

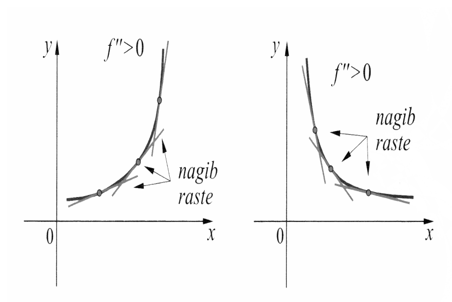
$$h(40) = 8000m$$

Uočimo da je $v(80) = -400m/s$, što znači da je brzina povratka po intenzitetu jednaka brzini lansiranja (što je posledica zakona održanja energije).

7.5 Koveksnost i konkavnost funkcije

Znak prvog izvoda nam određuje pad, odnosno rast funkcije. Ispitajmo kakvu nam informaciju o funkciji daje znak drugog izvoda funkcije.

Neka na nekom intervalu (a, b) važi $f''(x) > 0$. To znači da na tom intervalu prvi izvod raste, tj. raste nagib tangente, odnosno raste ugao koji ona zaklapa s pozitivnim delom x-ose.

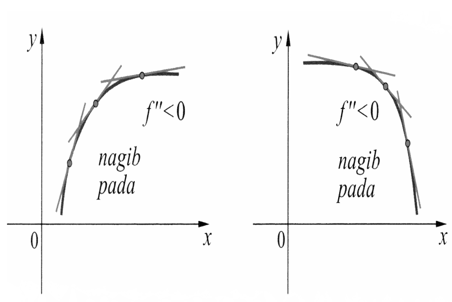


Slika 14: Na slici raste nagib tangente. Na tim intervalima je drugi izvod pozitivan. Primetimo da se grafik funkcije nalazi iznad tangenti.

Za funkciju f kažemo da je konveksna na intervalu (a, b).

Konveksnost funkcije može se opisati jednostavnim geometrijskim svojstvom: f je konveksna na intervalu (a, b) ako se njen grafik nalazi iznad tangente u proizvoljno izabranoj tački tog intervala.

Ako je $f''(x) < 0$ tada prvi izvod opada. Dakle, opada nagib tantente i ugao koji ona zahvata sa pozitivnim delom x-ose.



Slika 15: Na slici opada nagib tangente. Na tim intervalima je drugi izvod negativan. Grafik funkcije se nalazi ispod tangenti.

Za ovakvu funkciju kažemo da je konkavna na intervalu (a, b). Grafik konkavne funkcije leži ispod tangente povučene u proizvoljnoj tački intervala.

Primer 10. *Odredi da li je funkcije $f(x) = x^2$ konveksna ili konkavna.*

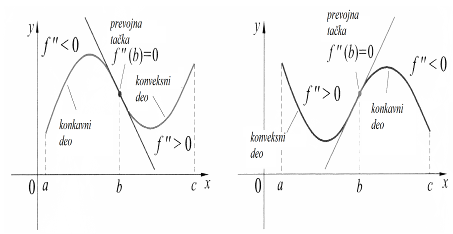
Drugi izvod ove funkcije je $f''(x) = 2$ koja je svuda pozitivna, pa je funkcije koveksna na $\mathbb{R}$.

Primer 11. *Odredi da li je funkcije $f(x) = -x^2$ konveksna ili konkavna.*

Drugi izvod ove funkcije je $f''(x) = -2$ koja je svuda negativna, pa je funkcije konkavna na $\mathbb{R}$

7.6 Prevojne tačke

Ako je na intervalima $(a, b), (b, c)$ drugi izvod funkcije f različitih predznaka, tada funkcija u tački b prelazi iy konveksne u konkavnu ili obratno. Tačku b nazivamo prevojnom tačkom funkcije f.



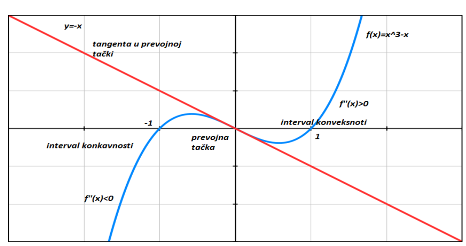
Slika 16: Prevojne tačke

Intervale konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke nalazimo na sledeći na’v cin:

1. izračunajmo $f''(x)$
2. rešimo jednačinu $f''(x) = 0$. Njena rešenja su moguće prevojne tačke.
3. na onim intervalima na kojima je $f''(x) > 0$ funkcije je konveksna, a na ostalima je konkavna. Na granici između intervala konveksnosti i konkavnosti nalazi se prevojna tačka.

Primer 12. *Odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti za funkciju* $f(x) = x^3 - x$

Izvodi funkcije su: $f'(x) = 3x^2 - 1$ i $f''(x) = 6x$. Zato je:
$f''(x) > 0$ za $x > 0$, na $(0, \infty)$ f je konveksna,
$f''(x) < 0$ za $x < 0$, na $(-\infty, 0)$ f je konkavna,



Slika 17: $f(x) = x^3 - x$

U tački x_0 važi $f''(x_0) = 0$. To je prevojna tačka, jer grafik prelazi iz konkavne u konveksnu granu.

Primer 13. *Telo se kreće pravolinijski, a udaljenost od početne tačke data je zakonom puta $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, gde je vreme t dato u sekundama, a put s u metrima.*

a) Odredi vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja povećava i vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja smanjuje.

b) Odredi vremenski interval u kome se brzina v povećava i vremenski interval u kome se brzina v smanjuje.

c) Odredi razdaljinu tela od početnne tačke posle $7s$

$$\begin{aligned} s(t) &= t^3 - 12t^2 + 36t \\ v(t) &= s'(t) = 3t^2 - 24t + 36 \\ a(t) &= a(t) = s''(t) = 6t - 24 \end{aligned}$$

a) Udaljenost s od početnog položaja se povećava ako je $v > 0$.

$$\begin{aligned} v &> 0 \\ s'(t) &> 0 \\ 3t^2 - 24t + 36 &> 0 \\ 3(t-2)(t-6) &> 0 \end{aligned}$$

		2	6
t-2	---	+++	+++
t-6	---	---	+++
(t-2)(t-6)	+++	---	+++

Za $t \in (0,2) \cup (6,+\infty)$ telo se udaljava od svog početnog položaja. U trenucima $t = 2s$ i $t =$ brzina kretanja je $v = 0m/s$ i telo menja smer kretanja. Na intervalu $t \in (2,6)$ telo se približava početnom položaju.

b) Brzina kretanja se povećava ako je $a > 0$

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ s''(t) &> 0 \\ 6t - 24 &> 0 \\ t &> 4 \end{aligned}$$

Znači telo čije kretanje posmatramo usporava za $t \in (0,4)$, a ubrzava za $t > 4$.
c) $s(7) = 7m$

Uočimo sledeće: Svaki put kada određujemo intervale monotonosti i konveksnosti funkcije, mi zapravo ispitujemo ponašanje brzine i ubrzanja tela čiji je zakon puta dat tom funkcijom. Ovaj primer je lako mogao biti predstavljen na sledeći način: Odredi intervale monotonosti i konveksnoti ove funcije. Postupak i rešenje zadatka bi bili identični.

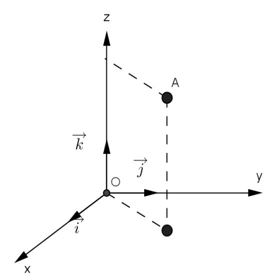
Takođe možemo zaključiti i sledeće: Za zakon kretanja tela $s(t)$ lokalni ekstremum predstavlja trenutak kada telo tokom kretanja postigne brzinu $v = 0m/s$ i promeni smer kretanja, dok, prevojna tačka predstavlja trenutak kada telo prestane da ubrzava i krene da usporava (ili obratno, prestane da usporava i krene da ubrzava).

Povezanost novog gradiva sa već savladanim gradivom je svakako dobar način da se znanje utvrdi. Učenici svakako više zainteresovanosti pokazuju za "konkretne zadatke" nago za zadatke tipa: Odredi intervale monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije. Zadaci usko povezani sa fizikom, poput prethodnih primera, svakako upadaju u prvu kategoriju zadataka. Pozitivno je što većinu zadataka iz široko korištenih zbirki zadataka možemo preformulisati da se uklapaju u parametre problema fizike.

8 Kinematika materijalne tačke.

8.1 Kretanje materijalne tačke. Brzina kretanja

Određivanje položaja materijalne tačke u prostoru moguće je samo u odnosu na neko drugo telo, uzeto kao referentno. U proizvoljnoj tački O, referentnog tela mogu se povući tri orijentisana pravca određena odgovarajućim jediničnim vektorima - ortovima $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$. Pravce ova tri vektora nazivamo koordinatnim osama (x, y, z)-ose i u opštem slučaju oni zajedno sa tačkom O predstavljaju **koordinatni sistem**. U kinematici se najčešće upotrebljava Dekartov koordinatni sistem, prikazan na slici 7.



Slika 18: Referentni sistem

Položaj tačke A u prostoru, u ovom sistemu, određen je skupom njenih koordinata (x, y, z), odnosno pomoću vektora položaja:

$$\overrightarrow{r} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$$

Kretanje se može definisati kao neprekidna promena položaja. Opisivanje kretanja znači određivanje položaja materijalne tačke (ili tela) u proizvoljnom trenutku vremena u odnosu na dati koordinatni sistem. Neka se materijalna tačka A kreće preko položaja A_1, A_2, A_3,... Geometrijsko mesto ili skup tačaka uzastopnih položaja tela naziva se putanja ili trajektorija. Slika 8.

Položaj tačke A pri kretanju određen je tekućim vektorom položaja r:

$$\overrightarrow{r} = x(t) \cdot \overrightarrow{i} + y(t) \cdot \overrightarrow{j} + z(t) \cdot \overrightarrow{k}$$

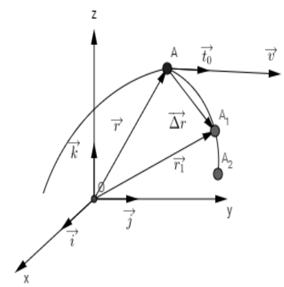
Ovoj vektorskoj jednačini odgovara skup od tri skalarne veličine:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

Bilo vektorska jednačina, bilo skup od tri skalarne jednačine predstavljaju takozvane konačne jednačine kretanja.

Posmatrajmo kretanje tačke A sa prethodne slike. Neka se tačka iz ovog položaja premesti u vremenskom intervalu Δt u tačku A_1 sa vektorom položaja $\overrightarrow{r_1}$. Prema slici je:

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r} + \Delta \overrightarrow{r}$$



Slika 19: Trajektorija

Vektor $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{AA_1}$ predstavlja priraštaj (promenu) vektora položaja $\overrightarrow{r}$ u intervalu vremena Δt, dakle $\overrightarrow{\Delta r}$ je funkcija vremenskog intervala Δt i naziva se i vektor pomeraja tačke A. Ovaj vektor je mera pomeraja i njegov intenzitet se razlikuje od pređenog puta materijalne tačke, Δs, koji predstavlja dužinu luka trajektorije od tačke A do A_1. Količnik priraštaja vektora položaja. $\overrightarrow{\Delta r}$, i intervala vremena Δt, u kome je priraštaj nastao, naziva se vektor srednje brzine u tom intervalu vremena:

$$\frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \langle \overrightarrow{v} \rangle$$

Uobičajno je da se srednja vrednost neke veličine označava uglastim zagradama, kao u ovom primeru. Vektora $\langle \overrightarrow{v} \rangle$ daje srednju promenu vektora položaja u intervalu Δt i ako kretanje nije uniformno, a Δt relativno veliko, ne opisuje dobro kretanje. Da bi se kretanje bolje opisalo promene treba posmatrati u veoma malim intervalima vremena, dakle tako da $\Delta t \to 0$. Granična vrednost gornjeg odnosa kada $\Delta t \to 0$ naziva se trenutna brzina u vremenskom trenutku t i može se pisati kao:

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \dot{\overrightarrow{r}}$$

Matematički, trenutna brzina je jednaka prvom izvodu vekora položaja tačke po vremenu.

Prema slici 18, kada se Δt smanjuje $\Delta \overrightarrow{r}$ postaje sve kraća tetiva luka koja u graničnom slučaju prelazi u tangentu na trajektoriju u posmatranoj tački. Pravac tangente je određen njenim vektorom pravca $\overrightarrow{t_0}$. Pri tome se intenzitet vektora priraštaja izjednačuje sa pređenim putem, postaje $dr = ds$, pa se vektor brzine može izraziti na sledeći način:

$$\overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{t_0} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{t_0} = v\overrightarrow{t_0}$$

gde je $\overrightarrow{t_0}$ vektor pravca tangente, a $v = \dfrac{ds}{dt}$ intenzitet brzine u datoj tački.

U pravouglom koordinatnom sistemu vektor $\overrightarrow{v}$ ima tri komponente duž x,y i z-ose. Diferenciranjem vektora položaja $\overrightarrow{r} = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j} + z \cdot \overrightarrow{k}$ po vremenu sledi:

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

Kako je kao i za svaki drugi vektor $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{i} + v_y\overrightarrow{j} + v_z\overrightarrow{k}$, sledi da su komponente brzine date sa:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Dakle, brzina je vektor određen svojim projekcijama na koordinatne ose. Modul ili intenzitet brzine je određen sa:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Pravci vektora brzine u odnosu na koordinatne ose određeni su preko kosinusa uglova koje zaklapa sa njima:

$$\cos(\overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{i}) = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

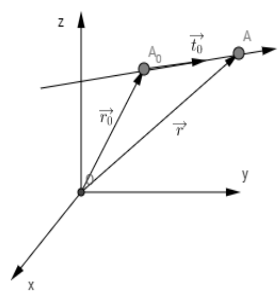
$$\cos(\overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{j}) = \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{k}) = \frac{\dot{z}}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

8.2 Ravnomerno pravolinijsko kretanje

Za opisivanje kretanja je potrebno poznavati konačnu jednačinu putanje $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ ili jednačinu brzine $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t)$ (takođe je dovoljno poznavati ubrzanje $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}(t)$, što ćemo uskoro videti). Poznavanjem jedne od funkcija, zbog njihove povezanosti, moguće je odrediti i ostale.

Kada je putanja prava, kretanje je pravolinijsko. Za opisivanje takvog kretanja potrebno je poznavati položaj te prave u prostoru u odnosu na izabrani koordinatni sistem i odrediti zakon puta $s = s(t)$. Položaj prave može se odrediti položajem jedne njene tačke,A_0, i vektorom pravca $\overrightarrow{t_0}$, kao na slici 9.



Slika 20: Putanja kod pravolinijskog kretanja

Ako za određeni vremenski interval materijalna tačka pređe iz položaja A_0 u položaj A, rastojanje A_0A predstavlja pređeni put s, u datom vremenskom intervalu. U tom slučaju vektor pomeraja je $\Delta\overrightarrow{r} = s\overrightarrow{t_0}$, pa možemo pisati na osnovu slike 9, da je:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s\overrightarrow{t_0}$$

Ovo je vektorska jednačina pravolinijskog kretanja, a brzina će biti data sa:

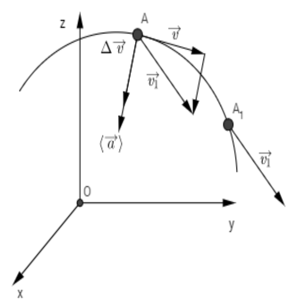
$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{t_0} = v\overrightarrow{t_0}$$

pošto su vektori $\overrightarrow{r_0}$ i $\overrightarrow{t_0}$ konstntni.

8.3 Ubrzanje. Krivolinijsko kretanje

Pri neravnomernom kretanju materijalne tačke njen vektor brzine se menja sa vremenom i to u opštem slučaju i po intenzitetu i pravcu (ovo poslednje važi samo za krivolinijsko kretanje).

Razmotrićemo opštiji slučaj kretanja po krivoj liniji kada se brzina menja i po pravcu i po intenzitetu.



Slika 21: Promena brzine

Prema priloženom grafiku, slika 20, vektor promene brzine od trenutka t do $t + \Delta t$ će biti:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v_1} - \vec{v}$$

Odnos vektora priraštaja brzine $\Delta\vec{v}$ i vremenskog intervala Δt, u kome je taj priraštaj nastao, naziva se vektor srednjeg ubrzanja materijalne tačke i definisan je sledećim izrazom:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \langle\vec{a}\rangle$$

Pošto je Δt skalar, i to pozitivan, $\langle\vec{a}\rangle$ ima isti pravac i smer kao i $\Delta\vec{v}$. Granična vrednost ovog izraza, kada $\Delta t \to 0$, naziva se vektor ubrzanja materijalne tačke, u tački A, u trenutku vremena t:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}$$

Pošto je, kako smo već videli, $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, sledi:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

odnosno, vektor ubrzanja jednak je drugom izvodu vektora položaja pokretne tačke po vremenu.

U parvougaonom koordinatnom sistemu i ubrzanje će imati tri komponente, duž Ox, Oy, i Oz-osa. Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja po vremenu sledi:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

obzirom da su ortovi $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nepromenljivi i po pravcu i po intenzitetu. Sa druge strane i vektor $\vec{a}$ se može izraziti preko komponenata a_x, a_y i a_z, odakle seldi da je:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{y} \quad \text{i} \quad a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{z}$$

Iz ovi jednačina se za intenzitet vektora ubrzanja dobija:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

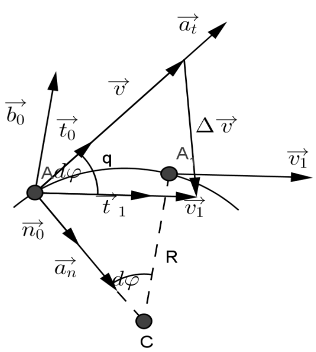
a njegov pravac u odnosu na koordinatne ose biće određen preko kosinusa uglova u odnosu na ose:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

U opštem slučaju ubrzanje ne mora biti konstantno tokom kretanja. Može da se menja po intenzitetu i/ili po pravcu i smeru. U tom slučaju za opisivanje kretanja potrebno je poznavati ubrzanje kao funkciju vremena.



Slika 22: Tangencijalno i normalno ubrzanje

Razmotrimo odnos vektora ubrzanja, $\vec{a}$ prema putanji posmatrane tačke u slučaju krivolinijskog kretanja, slika11. U tački A putanje povucimo tangentu jediničnog orta $\vec{t}_0$, i vektor brzine $v\vec{t}_0$. Ravan normalna na $\vec{t}_0$ naziva se normalna ravan putanje u tački A. U tački A_1, bliskoj tački A , može se povući novi ort $\vec{t}_1$ i vektor brzine $v\vec{t}_1$.

Ako prenesemo translacijom vektor $\vec{t}_1$ u tačku A, ortovi $\vec{t}_0$ i $\vec{t}_1$ u tom slučaju definišu oskulatornu ravan trajektorije u tački A. Linija preseka normalne i oskulatorne ravni naziva se glavna normala i njen pravac je određen ortom $\vec{n_0}$. Ort $\vec{n}_0$ je usmeren od A ka centru krivine C. Centar krivine trajektorije je tačka u kojoj se seku normale iz dve veoma bliske tačke tački A.

Normala na trajektoriju u tački A, koja leži u normalnoj ravni i normalna je na oskulatornu ravan naziva se binormala $\vec{b}_0$. Ravan određena vektorima $\vec{t}_0$ i $\vec{b}_0$ naziva se tangentna ravan.

Ort - vektori $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ obrazuju u tački A desni triedar, koji se naziva "prirodni koordinatni triedar". Ovaj triedar, ili koordinatni sistem, se kreće zajedno sa tačkom A i pravci i smerovi njegovih osa se menjaju sa vremenom u zavisnosti od zakona puta tačke A na njenoj trajektoriji.

Odredimo projekcije vektora ubrzanja $\vec{a}$ na ose prirodnog triedra $\vec{t}_0$, $\vec{n}_0$ i $\vec{b}_0$ uz pomoć slike 11. Podsećajući se definicije brzine i ubrzanja možemo u ovom slučaju pisati za ubrzanje:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\vec{t_0})$$

Ovde su i$\vec{v}$ i $\vec{t}_0$ promenljive veličine ($\vec{t}_0$ po pravcu i smeru) pa je:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{dt}\vec{t}_0 + v\frac{\mathrm{d}\vec{t_0}}{\mathrm{d}t}$$

Izvod $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t_0}}{dt}$ ćemo transformisati na sledeći način:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{t_0}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{t_0}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\vec{t_0}}{\mathrm{d}s}$$

U ovom izrazu $\mathrm{d}\vec{t_0}$ kao granični položaj vektora $\Delta\vec{t_0}$, kada $A_1 \to A$, imaće u stvari pravac normalan na $\vec{t_0}$, kao njegov priraštaj koji izaziva samo promenu pravca. Ovaj pravac na osnovu činjenice da spaja vrhove ortova $\vec{t_0}$ i $\vec{t_1}$ leži u oskultornoj ravni, te se poklapa sa pravcem i smerom glavne normale $\vec{n_0}$.

Intenzitet vektora $\mathrm{d}\vec{t_0}$ je srazmeran uglu između $\vec{t_0}$ i $\vec{t_1}$, dakle uglu $\Delta\varphi$ odnosno u graničnom slučaju $\mathrm{d}\varphi$. Stoga možemo pisati da je:

$$\mathrm{d}\vec{t_0} = \mathrm{d}\varphi\vec{n_0}$$

Takođe treba odrediti element puta $\mathrm{d}s$. Radi toga povucimo normale na trajektoriju u tačkama A i A_1, u čijem preseku se nalazi centar krivine trajektorije - C. Luk krive $\mathrm{d}s = AA_1$ se može smatrati lukom kruga prečnika $R = AC$. Krug čiji se element luka poklapa sa elementom trajektorije u datoj tački naziva se krugom krivine, njegov poluprečnik poluprečnikom krivine, a centar, kao što smo već istakli, centrom krivine u datoj tački.

Sa slike 11 će sada očigledno element luka biti krive biti dat izrazom:

$$\mathrm{d}s = AA_1 = R\mathrm{d}\varphi$$

Dakle, vektor ubrzanja se zamenom izraza za $\mathrm{d}\overrightarrow{t_0}$ i $\mathrm{d}s$ može pisati kao:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{t_0} + v^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{R}\frac{\overrightarrow{n_0}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{t_0} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_0}$$

Znači da vektor ubrzanja ima dve komponente u odnosu na prirodni triedar. Komponenta u pravcu tangente na trajektoriju naziva se tangenciono ubrzanje i data je sa:

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{t_0} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{t_0}$$

Druga komponenta u pravcu i smeru glavne normale naziva se normalno ubrzanje i data je izrazom:

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_0}$$

Ova komponenta, obzirom da je usmerena ka centru krivine, naziva se i centripetalno ubrzanje. Kao što smo videli vektor ubrzanja nema komponentu u pravcu binormale:

$$\overrightarrow{a_b} = 0$$

što znači da ubrzanje uvek leži u oskulatornoj ravni trajektorije. Tangenciona komponenta ubrzanja karakteriše promenu brzine po intenzitetu a normala po pravcu. Imamo, dakle, da je:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$

Intenzitet vektora ubrzanja je:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

Ovaj izraz predstavlja zavisnost intenziteta ubrzanja od $\dot{v}$, v i R.

U zavisnosti od toga koja komponenta ubrzanja je zastupljena pri kretanju materijalne tačke, razlikuju se sledeći slučajevi ubrzanog kretanja:

1. $a_t = 0$, $a_n = 0$ - kretanje je ravnomerno pravolinijsko;

2. $a_t \neq 0$, $a_n = 0$ - kretanje je neravnomerno pravolinijsko;

3. $a_t = 0$, $a_n \neq 0$ - kretanje je ravnomerno kružno;

4. $a_t \neq 0$, $a_n \neq 0$ - kretanje je neravnomerno krivolinijsko, složeno kretanje

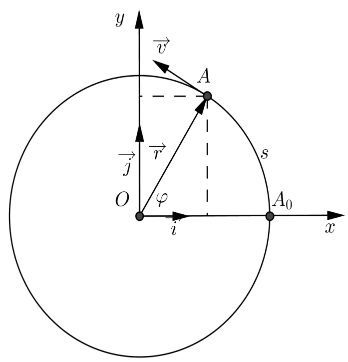
8.4 Ravnomerno kružno kretanje

Ravnomerno kružno kretanje je kretanje materijalne tačke po kružnoj putanji sa vektorom brzine konstantnim po intenzitetu. Ako se koordinatni sistem postavi u centar kruga kao na slici 12, vektorska jednačina kretanja tačke A će biti:

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$$

sa

$$x(t) = r \cdot \cos\varphi \qquad \text{i} \qquad y(t) = r \cdot \sin\varphi$$



Slika 23: Kružno kretanje

Pri ravnomernom kretanju, ugao φ se ravnomerno menja sa vremenom, osnosno može se prikazati kao linearna funkcija vremena: $\varphi = \omega t$, gde je sa ω označena konstanta proporcionalnosti. Prema tome, prethodne izraze možemo pisati na sledeći način:

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega t) \qquad \text{i} \qquad y(t) = r \cdot \sin(\omega t)$$

Ovo su prametarske jednačine kretanja, a njihovim kvadriranjem i eliminisanjem vremena t kao parametra dobija se jednačina trajektorije oblika:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

što je jednačina kruga. Po njoj se tačka kreće sa sledećim zakonom puta:

$$s = r \cdot \varphi = r \cdot \omega \cdot t$$

Brzina ovog kretanja se dobija diferenciranjem vektorske jednačine kretanja po vremenu, pri čemu su ortovi stalni. Dobija se:

$$\overrightarrow{v} = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)\overrightarrow{i} + r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\overrightarrow{j}$$

Intenzitet ove brzine je:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = r\omega$$

Dakle, intenzitet brzine je stalan, jer su i r i ω konstantni. Da bi odredili odnos pravaca vektora $\overrightarrow{r}$ i $\overrightarrow{v}$, pomnožimo ih skalarno:

$$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{v} = (r\cos(\omega t)\overrightarrow{i} + r\sin(\omega t)\overrightarrow{j}) \cdot (-r\omega\sin(\omega t)\overrightarrow{i} + r\omega\cos\omega t\overrightarrow{j}) = 0$$

jer je $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1$. $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$ i $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = 0$. Znači. vektor brzine je normalan na radijus vektor ili vektor položaja tačke odnosno brzina je kao normala na radijus usmerena duž tangente kruga u svakoj tački. Smer brzine je u smeru obrtanja, od A_0 do A.

Iako je ovo kretanje ravnomerno, postoji ubrzanje i to je njegova normalna komponenta. Vektor ubrzanja dobijamo dvostrukim diferenciranjem vektora položaja, odnosno:

$$\overrightarrow{a} = -r\omega^2\cos(\omega t)\overrightarrow{i} - r\omega^2\sin(\omega t)\overrightarrow{j} = -\omega^2(r\cos(\omega t)\overrightarrow{i} + r\sin(\omega t)\overrightarrow{j}) = -\omega^2\overrightarrow{r}$$

Vektor $\overrightarrow{a}$ je usmeren duž $-\overrightarrow{r}$, to je u stvari normalna komponenta $\overrightarrow{a}_n$. Intenzitet vektora ubrzanja je:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{r^2\omega^4\cos^2(\omega t) + r^2\omega^4\sin^2(\omega t)} = r\omega^2$$

Dakle, $a = a_n = r\omega^2 = \text{const.}$ jer su i r i ω konstantni. Imajući iz definicije normalne komponente ubrzanja da je $a_n = \dfrac{v^2}{r}$ i upoređivanjem sa poslednjim izrazom dobijamo da je konstanta ω jednaka $\omega = \dfrac{v}{r}$

Oblast kinematika materijalne tačke, kako je obrađena u ovom radu, se više uklapa u gradivo viših škola i fakulteta. Međutim za ambicioznije učenike je i te kako dostupna. Pogodna je za obradu na dodatnoj nastavi i sekciji i učenici koji se rano opredele za tehničke nauke (pogotovo za učenike koji tokom školovanja imaju predmet mehanika) rado i sa radoznalošću pristupaju iznesenoj materiji. Iako je takvih učenika u generaciji malo, posao nastavnika je da razvija učeničke sposobnosti i da ga aktivno usmerava i vodi kroz polja interesovanja.

Literatura

[1] Kečkić J. Matematička sinteza srednjoškolskog gradiva, samostalna izdavačka agencija "Kečkić", Beograd, 2007

[2] Baranenkov G. S., Demidovič B. P., Jefimenko V. A., Kogan S. M., Lunc G. L., Poršneva E. F., Sičeva E. P., Frolov S. V., Šostak R. J., Janpoljskij A.R. Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke, Tehnička knjiga, Zagreb, 1978

[3] Apsen B. Repetitorij više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972

[4] Raspopović M., Bobić T. Fizika za prvi razred četvorogodišnjih srednjih stručnih skola, zavod za udžbenike, Beograd, 2012

[5] Adnađević D., Kadelburg Z., Matematička analiza I, Matematički fakultet, Beograd, 2004

[6] Ivanović Z., Ognjanović S., Matematika zbirka zadataka i testova za IV razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd, 2010

[7] Dakić B., Elezović N., Matematika 4 udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred tehničkih škola 2. dio, Element, Zagreb, 2014