



UNIVERZITET U BEOGRADU  
Matematički fakultet

MASTER RAD

---

***Izravnavanje vremenskih serija i njegova  
primena pri prognoziranju***

---



MENTOR:

*dr Jelena Jocković*

AUTOR:

*Sofija Čarkilović*

*1041/2015*

*Beograd, septembar 2016. godine*

## **PREDGOVOR**

Ljudi su od davnina imali potrebu da na osnovu pređašnjih događaja predvide neke buduće događaje, kako bi sebe pripremili na neke moguće situacije. Predviđali su određene pojave, kao što su uspeh u lovu, količina ubranih plodova ili promena vremena. Ova neobjašnjiva potreba da se predvide događaji i situacije koje slede ne bi li čovek bio spreman da odreaguje na njih, dovela je i do razvoja ljudskih sposobnosti maštanja i logičkog i iskustvenog učenja. Krenuvši od nekadašnjeg predviđanja budućih prilika na osnovu poznatih pojava, ovaj metod se i danas koristi i unapređuje u raznim sferama života moderne civilizacije. U novije vreme prognoziranje dobija novu ulogu, počevši od mogućnosti izrade masovnih prognoza koje su dostupne svima (sportska prognoza, loto, itd.), pa do prognoza koje se rade za vojne i političke svrhe, a dostupne su samo ograničenom broju korisnika.

U preduzećima čest je slučaj da se u svrhe planiranja proizvodnje i kontrole zaliha, zahteva formiranje prognoza buduće prodaje za stotine proizvoda ili rezervnih delova na zalihama. Pri tome je uobičajena situacija da se raspolaže sa relativno kratkim mesečnim vremenskim serijama, a prognoze je potrebno formirati za jedan do četiri kvartala unapred. Zahtev da se to odradi u relativno kratkom vremenskom periodu za veliki broj vremenskih serija podstakao je istraživače da konstruišu postupke koji će biti relativno jeftiniji, brži i dovoljno pouzdani. Upravo postupci tzv. *izravnavanja* vremenske serije ispunjavaju postavljene zahteve. Oni polaze od pretpostavke da u serijama postoji izvesna zakonitost ponašanja opservacija zajedno sa uobičajenim fluktuacijama, tj. da se pri prikupljanju podataka tokom vremena pojavila određena inherentnost, neka vrsta slučajne varijacije. Cilj je da se korišćenjem ovih postupaka na osnovu podataka dobije izravnjana serija sa prigušenim slučajnim fluktuacijama. Ova izravnjana serija ukazuje upravo na osnovnu, dugoročnu tendenciju prisutnu u vremenskoj seriji, a zatim se ista koristi za prognoziranje budućih vrednosti vremenske serije.

„AKO NE MISLIŠ NA BUDUČNOST, NE MOŽEŠ  
JE NI IMATI.“

*John Glasworthy*

## **SADRŽAJ:**

<b>1. UVOD</b> .....	- 4 -
<b>2. STOHAŠTIČKI PROCESI I VREMENSKE SERIJE</b> .....	- 5 -
2.1. Stohastički ili slučajni procesi .....	- 5 -
2.2. Definicija i osnovne komponente vremenske serije .....	- 8 -
2.3. Klasifikacija vremenskih serija .....	- 13 -
2.4. Analiza vremenskih serija .....	- 14 -
<b>3. IZRAVNAVANJE VREMENSKIH SERIJA</b> .....	- 16 -
3.1. Istorija postupka izravnavanja vremenskih serija .....	- 16 -
3.2. Metode izravnavanja pomoću pokretnih proseka i pokretnih medijana.....	- 17 -
3.2.1 Izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih proseka .....	- 20 -
3.2.2 Izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih proseka .....	- 20 -
3.2.3 Izravnavanje pomoću ponderisanih pokretnih proseka .....	- 20 -
3.3. Eksponencijalno izravnavanje.....	- 21 -
3.3.1 Jednostavno eksponencijalno izravnavanje .....	- 22 -
3.3.2 Dvostruko eksponencijalno izravnavanje .....	- 24 -
3.3.3 Trostruko eksponencijalno izravnavanje .....	- 26 -
<b>4. PRIMENA IZRAVNAVANJA VREMENSKIH SERIJA</b> .....	- 28 -
<b>5. ZAKLJUČAK</b> .....	- 50 -
<b>LITERATURA</b> .....	- 52 -

## 1. UVOD

Predmet ovog master rada jeste definisanje i opisivanje postupka izravnavanja vremenskih serija, kao i definisanje i prikazivanje metoda izravnavanja koje se najčešće koriste pri analizi vremenskih serija. Takođe, biće i prikazana povezanost izravnavanja i prognoziranja budućih vrednosti u vremenskim serijama, kao i kvalitet prognoze. Osim teorijskog uvođenja u izravnavanje vremenskih serija, ovaj rad ima zadatak da pokaže i praktičnu primenu teorijskih pojmova na konkretnim podacima. Za sve postupke analize i izvođenja metoda koristiće se programski jezik *R*. Ovaj programski jezik nudi širok spektar statističkih paketa i funkcija u njima, koje omogućavaju transformaciju posmatranih podataka i njihovu analizu.

Rad je podeljen na tri celine. Prvu celinu čini poglavlje **2.** u kojem je predstavljeno definisanje pojma vremenska serija. Prvi deo ovog poglavlja posvećen je definisanju stohastičkog procesa, kao osnove za definisanje vremenske serije. Drugi deo poglavlja sadrži formalnu definiciju vremenske serije, kao i opise glavnih komponenata vremenske serije. Treći deo poglavlja prikazuje klasifikaciju vremenskih serija, dok poslednji deo definiše šta predstavlja analiza vremenske serije.

Drugu celinu ovog rada čini poglavlje **3.** u kojem su predstavljene metode izravnavanja vremenskih serija. Prvi deo poglavlja sadrži istorijski pregled razvoja analize vremenskih serija i nastanka postupka izravnavanja istih. Drugi i treći deo poglavlja posvećeni su, redom, metodama izravnavanja pomoću pokretnih proseka i pokretnih medijana i eksponencijalnom izravnavanju, kao najčešće korišćenim metodama izravnavanja.

Treća celina je zapravo poglavlje **4.** u kojem je prikazana praktična primena metoda izravnavanja na konkretnim podacima, a u okviru programskog jezika *R*. Isprogramirani kod koji se koristi pri analizi biće predstavljen u posebnom fontu, obojen ljubičastom bojom, dok su rezultati izvršavanja kodova osenčeni sivom bojom.

## 2. STOHAŠTIČKI PROCESI I VREMENSKE SERIJE

Pod vremenskom serijom, slobodno rečeno, podrazumeva se uređeni niz opservacija, gde se uređenje vrši u odnosu na vreme, najčešće u jednakim vremenskim intervalima. Vremenske serije su zastupljene u svakodnevnom životu savremenog čoveka, kao posledica uslovljenosti mnogih pojava sa vremenom. Pojavljuju se gotovo u svim naukama, od ekonomije, demografije, geofizike, preko medicine, meteorologije ili biologije, itd.

U cilju formulisanja konkretne definicije pojma vremenska serija, potrebno je prvo uvesti jedan opštiji pojam, tj. pojam stohastičkog ili slučajnog procesa.

### 2.1. Stohastički ili slučajni procesi

**Definicija 2.1.1:** [1] Skup ishoda jednog eksperimenta označava se sa  $\Omega$ . Elementi ovog skupa označavaju se sa  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  i nazivaju se *elementarni događaji*.

**Definicija 2.1.2:** [1] Podskup  $\mathcal{F}$  partitivnog skupa  $\mathcal{P}(\Omega)$  je *algebra* događaja nad  $\Omega$  ako važe sledeća svojstva:

- (A1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- (A2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- (A3)  $A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ .

**Definicija 2.1.3:** [1] Podskup  $\mathcal{F}$  partitivnog skupa  $\mathcal{P}(\Omega)$  je  $\sigma$ -*algebra* događaja nad  $\Omega$  ako važe sledeća svojstva:

- (A1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- (A2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- (A3)  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$ .

**Definicija 2.1.4:** [1] Neka je  $\mathcal{K}$  kolekcija podskupova skupa ishoda  $\Omega$ , pri čemu sama kolekcija  $\mathcal{K}$  nije  $\sigma$ -algebra. Presek svih  $\sigma$ -algebri koje sadrže kolekciju  $\mathcal{K}$  je jedna  $\sigma$ -algebra i ona se naziva *minimalna  $\sigma$ -algebra* generisana kolekcijom  $\mathcal{K}$  i označava se sa  $\sigma[\mathcal{K}]$ . Analogno se definiše i *minimalna algebra* koja sadrži sve skupove date kolekcije.

**Definicija 2.1.5:** [1] Neka je skup ishoda  $\Omega$  jednak skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  i neka je kolekcija  $\mathcal{K}$  data sa  $\mathcal{K} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ . Minimalna algebra koja sadrži kolekciju  $\mathcal{K}$  označava se sa  $\mathcal{B}_0$ . Minimalna  $\sigma$ -algebra koja sadrži kolekciju  $\mathcal{K}$  zove se *Borelova  $\sigma$ -algebra* podskupova realne prave. Označava se sa  $\mathcal{B}$ . Njeni elementi se nazivaju *Borelovi skupovi* na realnoj pravoj.

**Definicija 2.1.6:** [1] Neka je  $\Omega$  skup ishoda slučajnog eksperimenta i  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra događaja nad  $\Omega$ . Uređeni par  $(\Omega, \mathcal{F})$  se zove *merljiv prostor*.

**Definicija 2.1.7:** [1] Neka je  $\Omega$  skup ishoda svih elementarnih događaja i  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra događaja nad  $\Omega$ . Funkcija  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  zove se *verovatnoća* (ili verovatnosna mera) na merljivom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F})$ , ako ima sledeća svojstva:

- (1) svojstvo normiranosti:  $P(\Omega) = 1$ ;
- (2) svojstvo nenegativnosti:  $P(A) \geq 0$ , za svaki događaj  $A \in \mathcal{F}$ ;
- (3) svojstvo  $\sigma$ -aditivnosti verovatnoće: ako  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , onda  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

**Definicija 2.1.8:** [1] Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se zove *prostor verovatnoća* ili verovatnosni model posmatranog eksperimenta.

**Definicija 2.1.9:** [1] Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i neka je  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  par čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova  $\sigma$ -algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zove se *slučajna promenljiva*, ako je merljiva u odnosu na  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{B}$ , tj. ako za svaki Borelov skup  $B \in \mathcal{B}$  važi:

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

**Definicija 2.1.10:** [1] Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  prostor verovatnoća i  $(S, \mathcal{B})$  merljiv prostor. Tada se funkcija  $X: \Omega \rightarrow S$ , koja je merljiva u odnosu na  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{B}$ , u smislu da za svaki skup  $B \in \mathcal{B}$  važi:

$$X^{-1}(B) = \{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

zove *slučajni element* u prostoru  $S$ . Prostor  $(S, \mathcal{B})$  naziva se *prostor vrednosti* slučajnog elementa  $X$  ili *fazni prostor*. Ako je  $S = \mathbb{R}$  i ako je  $\mathcal{B}$  Borelova  $\sigma$ -algebra podskupova skupa  $\mathbb{R}$ , onda je funkcija  $X$  upravo slučajna promenljiva.

Do pojma slučajnog procesa dolazi se proširivanjem pojma slučajnog elementa. Slučajni element je funkcija koja kao rezultat daje moguće ishode slučajnog eksperimenta. Ako se slučajni element posmatra u zavisnosti od vremena, onda on postaje i funkcija vremena. U opštem slučaju, slučajni element ne zavisi od vremena, međutim mnoge pojave i događaji, čiji su ishodi neizvesni, a koje se odvijaju u vremenu zahtevaju da se pojam slučajnog elementa uopšti tako da se uključi i vremenska komponenta  $t$ . Posmatrajući familiju slučajnih elemenata koji zavise od vremena, dolazi se do definicije stohastičkog ili slučajnog procesa.

**Definicija 2.1.11:** [1] Familija slučajnih elemenata

$$\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\} = \{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\},$$

definisanih nad istim prostorom verovatnoće  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , gde je  $T$  beskonačan skup naziva se *stohastički* ili *slučajni proces*. Skup  $T$  naziva se *parametarski (indeksni) skup*.

Promenljiva  $\omega$  se često izostavlja iz zapisa, stoga se slučajni proces označava sa  $\{X_t, t \in T\}$  ili sa  $\{X(t), t \in T\}$ . Kao što se može zaključiti, sam slučajni proces zavisi od dve promenljive –  $t$  i  $\omega$ . Za fiksirano  $t_0 \in T$ , funkcija  $X_{t_0}(\omega)$  je jedna slučajna promenljiva, koja se naziva *zasek*. Za fiksirano  $\omega_0 \in \Omega$ , funkcija  $X_t(\omega_0)$  je funkcija definisana na skupu  $T$ , koja se naziva *realizacija* ili *trajektorija* slučajnog procesa. Za fiksirane obe vrednosti  $t_0 \in T$  i  $\omega_0 \in \Omega$ , funkcija  $X_{t_0}(\omega_0)$  je realan broj ili jedna realizacija slučajnog procesa. Skup  $T$  iz prethodne definicije određuje tip slučajnog procesa. Ako je skup  $T$  neki interval iz skupa  $\mathbb{R}$ , onda se parametar  $t \in T$  najčešće interpretira kao vreme, pa je slučajni proces  $\{X_t, t \in T\}$  *slučajni proces sa neprekidnim vremenom*. Ako je skup  $T$  neki podskup skupa celih brojeva  $\mathbb{Z}$ , onda je slučajni proces  $\{X_t, t \in T\}$  *slučajni proces sa diskretnim vremenom* ili *slučajni niz*. [1]

Svaka slučajna promenljiva  $X_t$  ima svoj zakon raspodele, koji je određen odgovarajućom funkcijom raspodele:

$$F_{X_t}(x) = P\{X_t < x\} = P\{\omega \in \Omega: X_t(\omega) < x\}.$$

U opštem slučaju, neophodno je znati i raspodele višedimenzionalnih slučajnih promenljivih, odnosno slučajnog vektora. Neka je fiksirano  $n$  vremenskih trenutaka  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Svakom od tih trenutaka odgovara po jedna slučajna promenljiva. Tako se dobija  $n$  slučajnih promenljivih  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  koje se mogu posmatrati kao koordinate nekog konačno-dimenzionalnog slučajnog vektora  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ . Raspodelu konačno-dimenzionalnog vektora definiše naredna definicija.

**Definicija 2.1.12:** [1] Za svaki prirodan broj  $n$  i proizvoljne elemente  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n$ , familija konačno-dimenzionalnih raspodela slučajnog vektora  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  je familija funkcija raspodela definisanih sa:

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}.$$

Familija konačno-dimenzionalnih raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

- (1) uslov simetrije: ako je  $i_1, i_2, \dots, i_n$  jedna permutacija brojeva od 1 do  $n$ , tada važi:

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- (2) uslov saglasnosti: ako je  $m < n$  za proizvoljne  $t_{m+1}, \dots, t_n \in T$ , tada važi:

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

**Teorema 2.1.1:** (Kolmogorov) Za svaku familiju funkcija raspodele koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti postoji prostor verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  i slučajni proces  $\{X_t, t \in T\}$  definisan na njemu, koji ima date raspodele kao svoje konačno-dimenzionalne raspodele.

Neka je  $\{X_t, t \in T\}$  slučajni proces. Tada važe sledeća svojstva:

- (1) srednja vrednost slučajnog procesa je funkcija sredine procesa, tj. :

$$E(X_t) = \mu_t, t \in T;$$

- (2) varijansa slučajnog procesa je funkcija varijanse procesa, tj.:

$$D(X_t) = \sigma_t^2, t \in T;$$

- (3) kovarijansa slučajnog procesa iznosi:

$$\gamma_X(t, s) = \text{cov}(X_t, X_s) = E\left((X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))\right), t, s \in T;$$

- (4) korelacija slučajnog procesa iznosi:

$$\rho_X(t, s) = \frac{\text{cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{D(X_t)D(X_s)}}, t, s \in T.$$

**Definicija 2.1.13:** [3] Slučajni proces  $\{X_t, t \in T\}$  je *strogo stacionaran* ako su njegove konačno-dimenzionalne funkcije raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, odnosno ako za sve  $t_i, t_i + t \in T, i = 1, 2, \dots, n$  važi:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+t, \dots, t_n+t}(x_1, \dots, x_n).$$

Ako je slučajni proces strogo stacionaran, funkcija raspodele slučajne promenljive  $X_t$  je ista u svakoj tački indeksnog skupa. Ako je  $\{X_t, t \in T\}$  strogo stacionaran slučajni proces sa  $E(|X_t|) < \infty$ , tada je očekivana vrednost od  $X_t$  konstantna za svako  $t \in T$ , pošto je funkcija raspodele ista za svako  $t \in T$ . Slično, ako je  $E(X_t^2) < \infty$ , tada je varijansa od  $X_t$  konstanta za svako  $t \in T$ .



**Definicija 2.1.14:** [3] Slučajan proces  $\{X_t, t \in T\}$  je *slabo stacionaran* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- (1)  $E(X_t) = m = \text{const}, \forall t \in T;$
- (2)  $E(X_t^2) < \infty, \forall t \in T;$
- (3)  $\text{cov}(X_t, X_s) = \text{cov}(X_{t+r}, X_{s+r}) = E[(X_{t+r} - m)(X_{s+r} - m)], \forall t, s, r \in T.$

Poslednji uslov podrazumeva da je kovarijansa slabo stacionarnog slučajnog procesa funkcija vremenske udaljenosti slučajnih promenljivih, tj. ona ne zavisi od trenutka u kojem se posmatraju slučajne veličine, već zavisi samo do njihovog međusobnog rastojanja u vremenu.

Očigledno je da iz stroge stacionarnosti uvek sledi slaba stacionarnost slučajnog procesa. Stroga stacionarnost nekog slučajnog procesa podrazumeva da raspodela verovatnoća proizvoljno izabranog slučajnog vektora sa određenim brojem komponenata ne zavisi od pomeranja na vremenskoj osi. Taj uslov je prilično strog i teško se ispituje, pa se pri analizi slučajnih procesa ispituje samo slaba stacionarnost. U nastavku će se koristiti termin stacionarnost kada se govori o slaboj stacionarnosti.

## 2.2. Definicija i osnovne komponente vremenske serije

U literaturi ne postoji jedinstvena formulacija definicije pojma *vremenska serija*. Izdvajaju se sledeća dva dominantna mišljenja [3]:

1. Vremenska serija predstavlja jednu realizaciju slučajnog procesa. U tom smislu odnos vremenske serije i slučajnog procesa odgovara odnosu uzorka i osnovnog skupa u standardnoj teoriji statističkog zaključivanja. Kao što uzorak predstavlja deo osnovnog skupa na osnovu koga se izvode zaključci o svojstvima osnovnog skupa, tako i analiza konkretne vremenske serije treba da omogući sagledavanje karakteristika procesa.
2. Ne postoji razlika između slučajnog procesa i vremenske serije. To znači da se može smatrati da vremenska serija predstavlja niz slučajnih veličina koje su uređene u odnosu na vreme. Drugim rečima, termini slučajan proces i vremenska serija su sinonimi.

Na osnovu svega navedenog, može se navesti jedna formalna definicija vremenskih serija koja obuhvata oba shvatanja tog pojma.

**Definicija 2.2.1:** *Vremenska serija* predstavlja uređeni niz vrednosti neke pojave, tj. niz vrednosti procesa koji generiše neku pojavu u vremenu, a koje su složene u hronološkom redosledu u sukcesivnim, jednakim vremenskim intervalima.

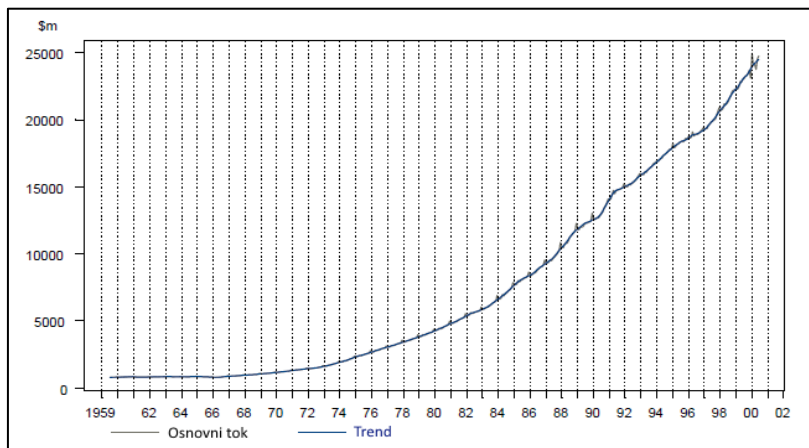
Svaka vremenska serija se može razložiti na određeni broj komponenti. Postoji četiri osnovne komponente koje se mogu javiti pri razlaganju vremenskih serija. To su:

- **Trend**  $f(t)$
- **Sezonska komponenta**  $s(t)$
- **Ciklična komponenta**  $c(t)$
- **Slučajna komponenta**  $\varepsilon(t)$ .

*Trend* predstavlja dugoročnu pravilnost u kretanju vremenske serije. U zavisnosti od toga da li vrednosti vremenske serije tokom vremena sistematski opadaju ili rastu trend može biti opadajući ili rastući. Takođe, trend može biti deterministički ili stohastički, u zavisnosti od toga da li se promene

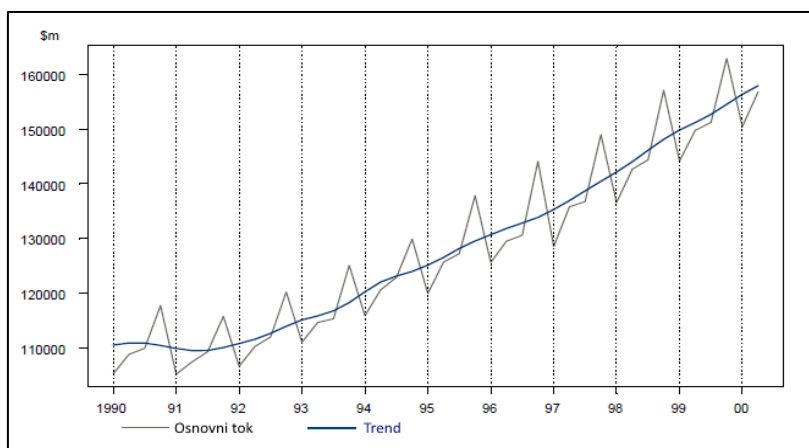
serije tokom vremena mogu predvideti ili ne, odnosno da li se promene serije mogu aproksimirati nekom determinističkom funkcijom ili se one dešavaju slučajno. Neki karakteristični tipovi trenda prikazani su na slikama **2.1.**, **2.2.**, **2.3.** i **2.4.** [2, 3, 7]

- (1) Na slici **2.1.** prikazani su podaci koji odgovaraju količinama novca u opticaju u periodu od 1959. do 2002. godine, pri čemu je merenje vršeno mesečno. Može se primetiti da se tokom poslednjih 40 godina nivo novca u opticaju postepeno povećava, pa se i trend postepeno povećava. Na grafiku su podaci iz vremenske serije i trend skoro pa identični, pa se može zaključiti da je uticaj nekih fluktuacija vrlo mali. [7]



**Slika 2.1.** – Primer vremenske serije sa trendom [7]

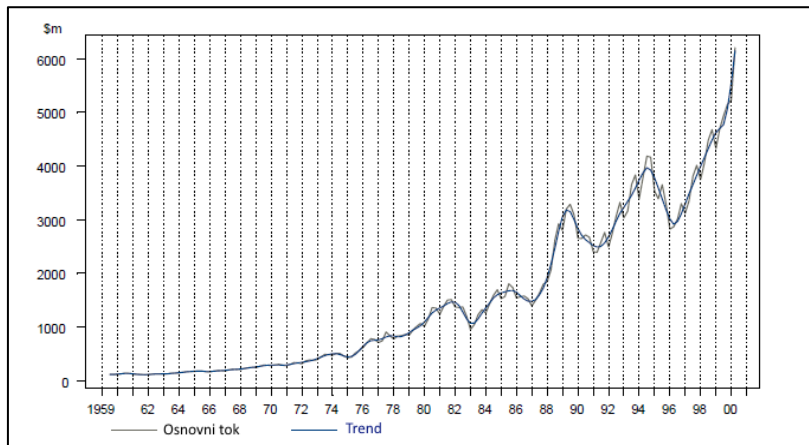
- (2) Grafik na slici **2.2.** prikazuje podatke koji su mereni kvartalno, a koji odgovaraju vrednostima bruto domaćeg proizvoda u periodu od 1990. do sredine 2001. godine. Može se primetiti da je vrednost bruto domaćeg proizvoda u stalnom porastu, osim primećenog malog opadanja tokom 1990. godine, pa se i sam trend postepeno povećava. Podaci iz vremenske serije stalno osciluju, što je prikazano izlomljenom linijom na grafiku, dok je trend prikazan plavom linijom i prilično odgovara pravolinijskom kretanju. [7]



**Slika 2.2.** - Primer vremenske serije sa trendom [7]

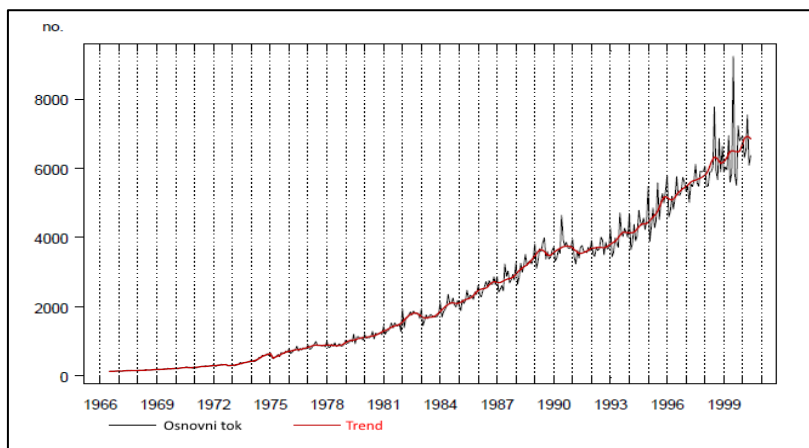
- (3) Slika **2.3.** prikazuje bruto potrošnje osnovnog kapitala u domaćinstvu u periodu od 1959. do 2000. godine. Podaci iz vremenske serije prikazani su izlomljenom linijom što sugeriše na postojanje fluktuacija slučajnih ili nastalih pod uticajem perioda merenja podataka. Trend je prikazan plavom linijom i može se uočiti nekoliko tačaka zaokreta

u poslednjih 20-tak godina. Ali svakako, trend je tokom celog perioda u postepenom porastu. [7]



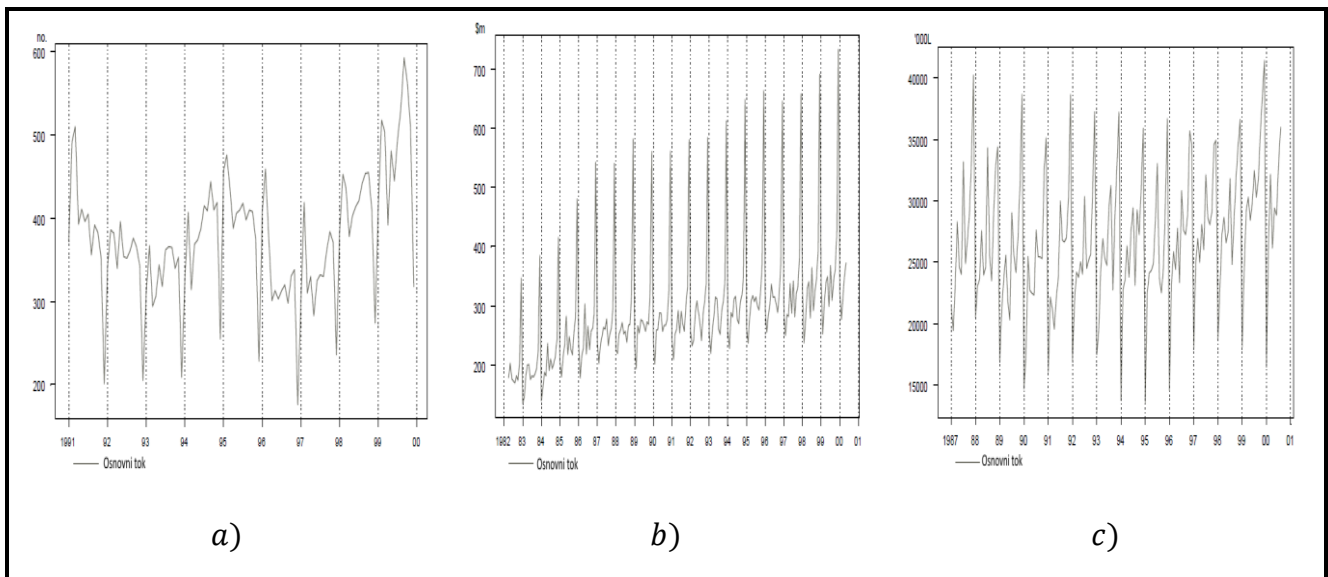
**Slika 2.3.** - Primer vremenske serije sa trendom [7]

- (4) Na slici **2.4.** prikazana je situacija kada je u vremenskoj seriji prisutna ogromna količina fluktuacija, koje trend prate u sredini. Podaci iz vremenske serije odgovaraju prosečnim mesečnim taksama za zaradu u periodu od sredine 1960. do sredine 2001. godine. I u ovom primeru, trend ima tendenciju rasta tokom vremena. [7]



**Slika 2.4.** - Primer vremenske serije sa trendom [7]

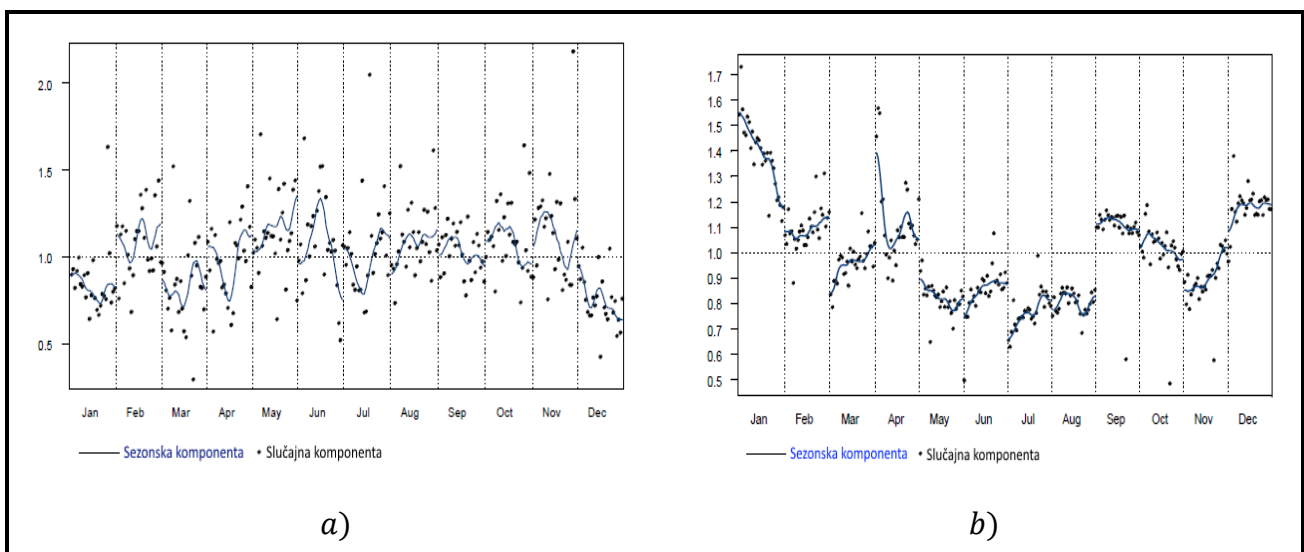
*Sezonska komponenta* vremenske serije predstavlja pravilnost u kretanju serije, koja se pojavljuje u toku jedne kalendarske godine. Prisustvo sezonske komponente utiče na to da postoji veći stepen korelacije između podataka dobijenih u istim mesecima u različitim godinama nego između onih dobijenih u susjednim mesecima u okviru iste kalendarske godine. U okviru jedne kalendarske godine mogu biti izraženi sezonski padovi u određenom periodu (**Slika 2.5. a**)), ili sezonski usponi u određenom periodu (**Slika 2.5. b**)), ili i padovi i usponi u određenim periodima u godini (**Slika 2.5. c**)), koji se u istim periodima pojavljuju i u drugim godinama u kojima se beleže podaci. [2, 3, 7]



Slika 2.5. - Primeri vremenskih serija sa sezonskom komponentom [7]

Ciklična komponenta vremenske serije predstavlja pravilnost u kretanju serije koja se pojavljuje u određenim, često nejednakim, periodima različitim od jedne godine. Takve vremenske serije imaju svoj period, odnosno ciklus.

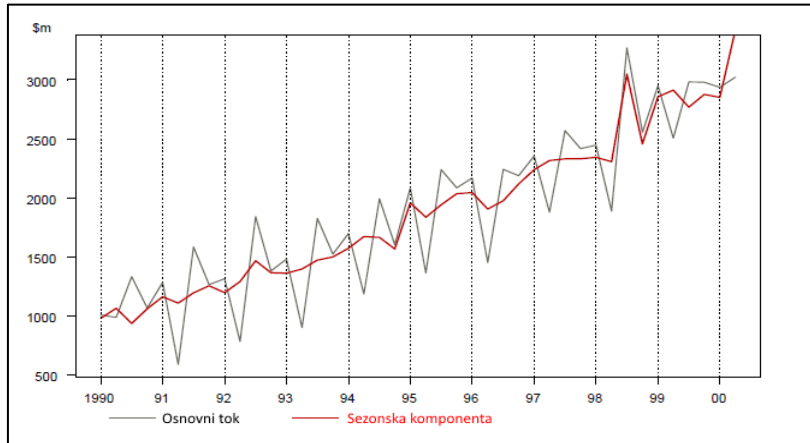
Prethodne tri komponente su neslučajnog karaktera i njihovo prisustvo u vremenskim serijama nije obavezno. Jedina komponenta koja mora biti prisutna u vremenskim serijama je slučajna komponenta. Slučajna komponenta vremenske serije predstavlja promene u kretanju vremenske serije koje su slučajnog karaktera. To su fluktuacije koje ne pripadaju ni sezonskim, ni cikličnim komponentama, a ni trendu. Vrednosti u različitim vremenskim trenucima moraju biti međusobno nezavisne, pa se tako kretanje ove komponente u vremenu ne može predvideti. Izgled slučajne komponente u određenim vremenskim serijama koje imaju prisutnu i sezonsku komponentu prikazan je na narednoj slici 2.6.. Tačkama su prikazani slučajni faktori u seriji, dok su linijom predstavljeni sezonski faktori. U prvom slučaju (Slika 2.6. a)) prikazano je veliko variranje slučajnih faktora oko sezonskih faktora, pa je uticaj slučajne komponente veliki, dok je u drugom slučaju (Slika 2.6. b)) prikazano grupisanje slučajnih faktora oko sezonskih faktora, pa se može reći da ova serija nije naročito sezonska. [2, 3, 7]



Slika 2.6. - Primeri vremenskih serija sa izraženim slučajnim komponentama [7]

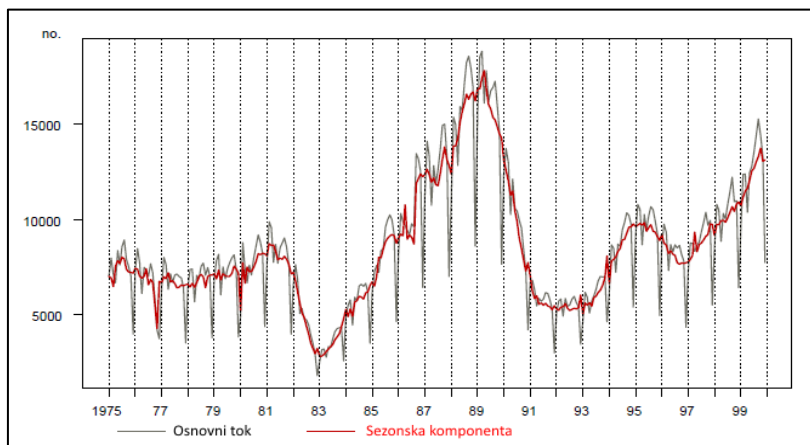
U slučaju da vremenska serija sadrži sve četiri navedene komponente, postoje tri opšta modela koja opisuju vremenske serije.

1. **Aditivni model** -  $X_t = f(t) + s(t) + c(t) + \varepsilon(t)$ : Ovaj model pretpostavlja da se sve komponente ponašaju nezavisno jedna od druge. Pa tako povećanje neke od komponenti ne izaziva povećanje ili smanjenje neke druge komponente. Aditivni model se koristi ako su sezonska, ciklična i slučajna komponenta nezavisne od kretanja trenda. Jedan od osnovnih primera aditivnog modela prikazan je na slici 2.7..



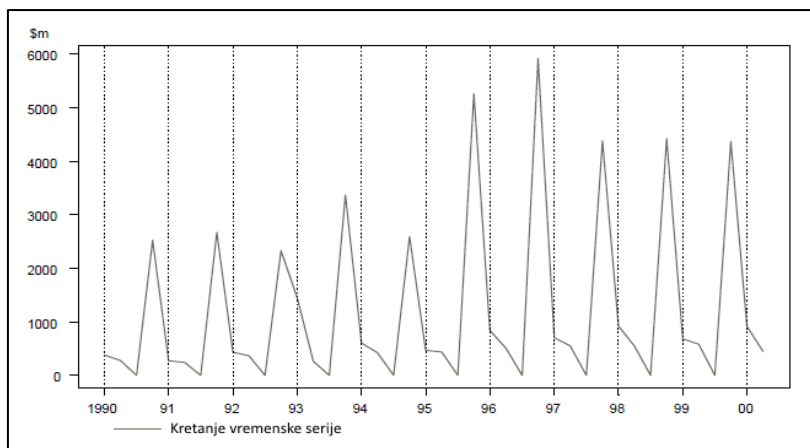
Slika 2.7. - Primer vremenske serije koja odgovara aditivnom modelu [7]

2. **Multiplikativni model** -  $X_t = f(t) \cdot s(t) \cdot c(t) \cdot \varepsilon(t)$ : Ovaj model pretpostavlja da sve komponente međusobno zavise jedna od druge. Pa tako, ako trend serije raste, fluktuacije izazvane sezonom, ciklusom ili slučajnim kretanjem će takođe rasti. Jedan od osnovnih primera multiplikativnog modela prikazan je na narednoj slici 2.8..



Slika 2.8. - Primer vremenske serije koja odgovara multiplikativnom modelu [7]

3. **Mešoviti model** -  $X_t = f(t) \cdot c(t) \cdot (s(t) + \varepsilon(t) - 1)$ : Ovaj model predstavlja kombinaciju aditivnog i multiplikativnog modela. U njemu se pretpostavlja da su sezonska i slučajna komponenta zavisne od trenda i ciklične komponente, ali da su one međusobno nezavisne. Jedan od osnovnih primera mešovitog modela prikazan je na narednoj slici 2.9..



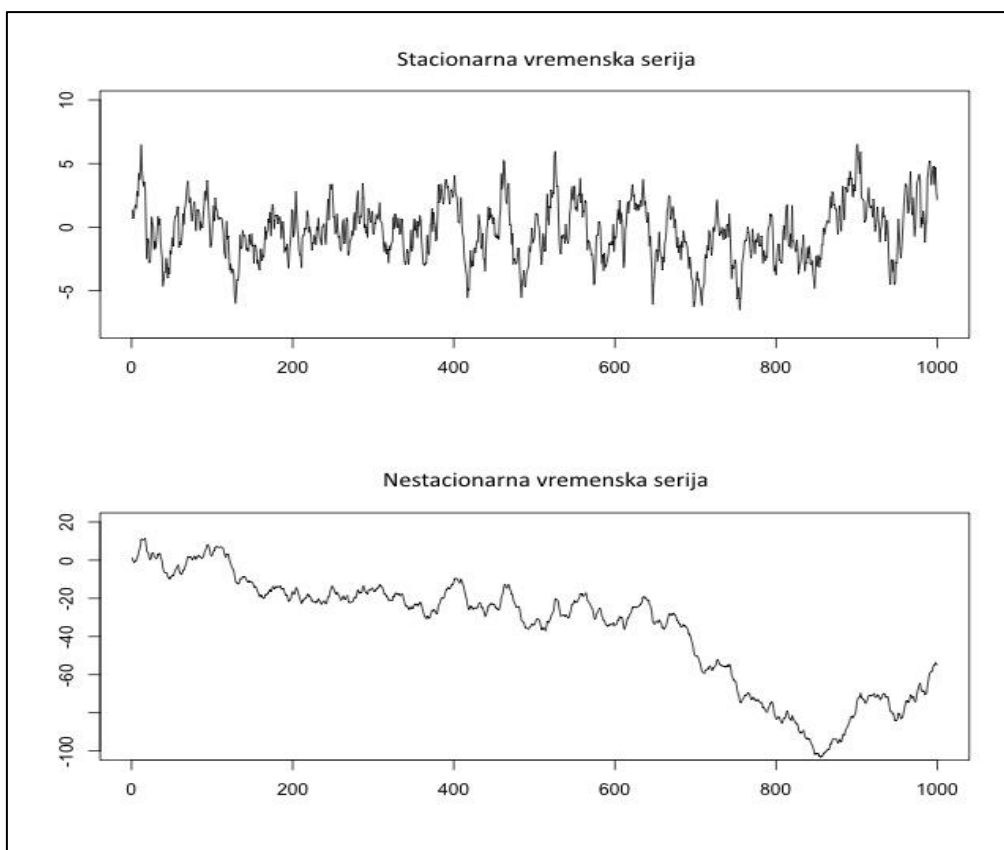
**Slika 2.9.** - Primer vremenske serije koja odgovara mešovitom modelu [7]

### 2.3. Klasifikacija vremenskih serija

Klasifikacija vremenskih serija se može izvršiti u odnosu na različite kriterijume.

U zavisnosti od toga kako se registruju vrednosti u vremenskim serijama razlikuju se *neprekidne* i *diskrente* (prekidne) vremenske serije. Vremenska serija je neprekidna ako se njene vrednosti mogu registrovati u bilo kom vremenskom intervalu. Diskretna vremenska serija je ona čije se vrednosti beleže u istim, jednakim vremenskim intervalima (sat, dan, nedelja, mesec, godina, itd.). Do diskretne vremenske serije može se doći i na osnovu neprekidne vremenske serije, tako što će se kod neprekidne beleženje podataka vršiti samo u određenim (jednakim) vremenskim intervalima (sistemskim uzorkom).

Vremenske serije se još mogu podeliti i na *stacionarne* i *nestacionarne* vremenske serije, u zavisnosti od stacionarnosti (**Slika 2.10.**). Vremenska serija će biti stacionarna ukoliko se njeno kretanje tokom vremena odvija po unapred utvrđenom obrascu, tj. ukoliko je njeno kretanje predvidivo tokom vremena. Međutim, najveći broj vremenskih serija ne zadovoljava uslov stacionarnosti, tj. menjaju se tokom vremena. Vremenske serije čije se kretanje može modelovati nekom funkcijom vremenskog trenutka jesu nestacionarne vremenske serije. [2, 3]



**Slika 2.10.** – Primer stacionarne i nestacionarne vremenske serije

## 2.4. Analiza vremenskih serija

Analiza vremenskih serija ima svoja četiri osnovna cilja, koji zajedno čine jedan osnovni cilj koji podrazumeva dobijanje željenog odgovora na osnovu svih poznatih podataka koji su zabeleženi pri posmatranju neke pojavi. Dakle, analiza se može podeliti u četiri faze sa četiri osnovna cilja. [2, 3]

- **Opisivanje (deskripcija).** Ono predstavlja osnovnu i prvu fazu u procesu analize vremenskih serija. Samo opisivanje vremenske serije predstavlja određivanje informacija o prirodi vremenske serije i o tome da li je potrebno izvršiti neku transformaciju vremenske serije pre nastavka same analize. Pri opisivanju vremenske serije koriste se brojne metode koje se mogu grupisati na sledeći način:
  - Grafičko prikazivanje vremenske serije;
  - Sumarni pokazatelji (statistike);
  - Metode transformacije vremenske serije;
  - Metode izravnavanja vremenske serije.
- **Objašnjenje.** U ovoj fazi analize vremenskih serija cilj je izabrati odgovarajući statistički model koji opisuje proces generisanja podataka u seriji, tj. kretanje serije na zadovoljavajući način. Izbor modela zavisi od toga da li je u pitanju jednodimenzionalna ili višedimenzionalna analiza. Kod jednodimenzionalne analize se za određivanje modela koriste samo prethodne vrednosti vremenske serije, dok kod se višedimenzionalne analize pored prethodnih vrednosti jedne vremenske serije, u

cilju objašnjenja varijacija, koriste i sadašnje i prethodne vrednosti drugih (prediktorskih) serija.

- *Predviđanje (prognoziranje)*. Prema izabranom i ocenjenom modelu iz druge faze analize vremenskih serija potrebno je, na osnovu poznatih opservacija, prognozirati buduće kretanje vremenske serije.
- *Kontrola*. Dobre prognoze omogućavaju formiranje modela funkcije prenosa vremenske serije, u cilju kontrolisanja samog posmatranog procesa. Potrebno je formirati zadovoljavajući model funkcije u smislu da rezultujući proces bude što bliži željenom cilju.



### 3. IZRAVNAVANJE VREMENSKIH SERIJA

U velikom broju vremenskih serija prisutna su kolebanja individualnih vrednosti frekvencija. Ta kolebanja mogu znatno otežati uočavanja osnovnih tendencija razvoja posmatrane pojave, zato ih je potrebno svesti na što je moguće manju meru. Svođenje pomenutih kolebanja na što manju meru se odvija po principu da se starim podacima ne dodeljuje jednaka važnost u vremenskoj seriji kao novijim podacima. Dugu tradiciju u analizi vremenskih serija ima pristup prema kome se do glatkog kretanja serije dolazi prilagođavanjem linije trenda svim opservacijama serije (*izravnavanjem* vremenske serije). Ta prilagođena linija trenda predstavlja ocenu glatkog kretanja serije, a razlike između opservacija vremenske serije i ocenjenog trenda su reziduali.

Postoje dve osnovne grupe metoda izravnavanja vremenskih serija: *metode izravnavanja pomoću pokretnih proseka i pokretnih medijana* i *eksponencijalno izravnavanje*. U nastavku biće detaljnije opisane obe grupe metoda, kao i podele koje se u njima javljaju.

#### 3.1. Istorija postupka izravnavanja vremenskih serija

Vremenske serije su imale veliku ulogu u ranom razvoju prirodnih nauka. Prvo se analiza vremenskih serija svodila na analizu vremenskih serija koje su se pojavljivale u astronomiji, geologiji i meteorologiji. Poznato je da su još vavilonski astronomi koristili vremenske serije koje su sadržale podatke o relativnim položajima zvezda i planeta za predviđanje budućih astronomskih događaja. Od davnina pomoću analize vremenskih serija dolazilo se do otkrivanja nekih pravilnosti među vrednostima u vremenskoj seriji i do donošenja zaključaka ili zakonitosti. Te zakonitosti omogućavale su izvođenje prognoza za neke buduće događaje. Jedan od primera jeste da je uočeno relativno glatko kretanje vremenskih serija sa ciklusom od 11 godina koje sadrže podatke o sunčanim pegama ili vremenskih serija sa ciklusom od jedne godine, koje sadrže meteorološke podatke. Još u XVII veku astronomi su koristili ideju da se svaka vremenska serija može raščlaniti na konačan broj nezavisnih komponenti i da se te komponente mogu i unapred izračunati.

Krajem XIX i početkom XX veka glavni doprinos u pogledu analize skrivenih perioda daje *Sir Arthur Schuster* (1898.) definisanjem tzv. periodograma. U savremenoj analizi prvobitna namena periodograma, da se koristi za otkrivanje perioda, je uglavnom napuštena, pa se koristi kao polazno sredstvo za ocenu spektralne funkcije gustine. Sredinom devetnaestog veka *Warren M. Persons* (1919.) definisao je vremensku seriju kao kompoziciju četiri tipa fluktuacija (trend, ciklična komponenta, sezonska komponenta i slučajna komponenta).

Međutim, od sedamdesetih godina XX veka, analiza vremenskih serija pomoću deskriptivnih metoda zamenjena je analizom dobijenom pomoću verovatnosnih i statističkih postupaka. Tada je prihvaćeno mišljenje da se zakon kretanja cele vremenske serije odnosi na slučajni proces, a da je analiza vremenske serije samo jedna realizacija slučajnog procesa. Prve primene ovakvog mišljenja napravili su *Evgeny Evgenievich Slutsky*, ruski statističar, i *George Udny Yule*, britanski statističar. 1927. godine *Yule* je definisao modele vremenske serije koji iskazuju zavisnost tekuće vrednosti od svojih sopstvenih prošlih vrednosti i slučajne greške, tzv. modele autoregresivnih procesa. Naime, u to vreme, pri detektovanju cikličnog kretanja u vremenskoj seriji počeli su da se koriste postupci

izravnavanja vremenskih serija, pomoću kojih se dolazilo do osnovne tendencije u seriji. To izravnavanje se vršilo pomoću ponderisanih pokretnih proseka, tj. svaka od vrednosti u seriji dobijena je pomoću ponderisanih proseka. Iz tog razloga, *Slutsky* je prvi definisao alternativni model vremenske serije koji iskazuje tekuću vrednost serije kao ponderisanu sumu slučajnih grešaka, tzv. model pokretnih proseka. On je pokazao da postupak izravnavanja generiše ciklus u seriji u kojoj on nije postojao. Taj fenomen nazvan je *efekat Sluckog*.

Pored spomenutih istraživanja u analizi vremenskih serija i ekonometriji istraživači u okviru operacionih istraživanja početkom šezdesetih godina prošlog veka, bave se formiranjem jednostavnih metoda prognoziranja zasnovanih na pojmu lokalnog trenda i nivoa serije. Autori kao što su *Holt* (1960.), *Winters* (1960.) i *Brown* (1963.) razvijaju metod poznat pod imenom eksponencijalno izravnavanje. [2]

### 3.2. Metode izravnavanja pomoću pokretnih proseka i pokretnih medijana

Metode izravnavanja pomoću *pokretnih proseka* i *pokretnih medijana* spadaju u grupu najpopularnijih i najjednostavnijih metoda kojima se koriste analitičari. Drugačije se nazivaju i *metode koje prate trend*. U analizi vremenskih serija čest je slučaj da su u njihovim kretanjima prisutna neka slučajna kolebanja (fluktuacije). Osnovni cilj ovih metoda jeste da se, odstranivanjem tih slučajnih fluktuacija, tj. smanjivanjem uspona i padova, istakne osnovni tok vremenske serije. Pod osnovnim tokom serije podrazumeva se njena dugoročna tendencija (trend), tj. njeno karakteristično ponašanja.

Ove metode izravnavanja su neparametraske metode i one se mogu podeliti u dve grupe. Prvu grupu metoda izravnavanja sačinjavaju oni postupci koji koriste aritmetičku sredinu (tzv. „prosek“), a drugu oni koji koriste medijanu. Prednost druge grupe metoda jeste osobina neosetljivosti medijane na prisustvo nestandardnih vrednosti u vremenskoj seriji. U takvim situacijama se korišćenjem metoda izravnavanja zasnovanih na medijani dobijaju bolji rezultati od rezultata dobijenih primenom metoda zasnovanih na aritmetičkoj sredini. Pošto ni jedna od metoda izravnavanja nije bazirana na bilo kakvom statističkom modelu, nema potrebe za ocenom nepoznatih parametara.

Metode izravnavanja koje su bazirane na aritmetičkoj sredini nazivaju se *metode izravnavanja pomoću pokretnih proseka*. Termin „pokretni prosek“ je uzet iz razloga što se svakim formiranjem nove vrednosti serije menja i stara vrednost u njenoj jednačini i računa se nova vrednost aritmetičke sredine, tako da se kao rezultat, srednja vrednost („prosek“) uvek menja, tj. „pokreće“.

Neka je data vremenska serija  $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ , zadata sa  $X_t = f(t) + \varepsilon_t$ , gde je  $f(t)$  neslučajna, dugoročna komponenta u kojoj nema cikličnih i sezonskih varijacija (trend), a  $\varepsilon_t$  slučajna komponenta za koju važe sledeći uslovi:

- $E(\varepsilon_t) = 0$ ;
- $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$  za svako  $t$ ;
- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$  za svako  $t \neq s$ .

Vrednost serije u trenutku  $t$  se pri primeni metode izravnavanja pomoću pokretnih proseka ocenjuje sa:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=-m}^m a_i X_{t+i}, \quad t = m + 1, m + 2, \dots, n - m,$$

pri čemu je  $\{a_i\}$  skup *pondera* (težina) za koje važi da je  $a_i > 0$  za  $i = -m, \dots, m$  i  $\sum_{i=-m}^m a_i = 1$ . Tada je sa  $\tilde{X}_t$ , za  $t = m + 1, m + 2, \dots, n - m$ , označen niz klizećih sredina, tj. pokretnih proseka, za niz  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i taj niz predstavlja transformisanu, izravnjanu vremensku seriju. Takođe, kaže se i da je  $\tilde{X}_t$  obrazovan na osnovu „prozora“ širine  $2m + 1$ . Menjajući izraz za  $X_t$  u izrazu za  $\tilde{X}_t$ , uočava se da je izravnavanjem polazne serije dobijena serija oblika:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=-m}^m a_i f(t+i) + \sum_{i=-m}^m a_i \varepsilon_{t+i},$$

pri čemu je sa prvom sumom označen deterministički deo serije, a sa drugom sumom njen slučajni deo.

*Osobine pokretnih proseka:*

- \* Transformisana (izravnjana) serija,  $\tilde{X}_t$ , ima približno istu sredinu kao i originalna serija:

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}_t) &= E(\sum_{i=-m}^m a_i X_{t+i}) \\ E(\tilde{X}_t) &= E(\sum_{i=-m}^m a_i f(t+i)) + \frac{E(\sum_{i=-m}^m a_i \varepsilon_{t+i})}{\sum_{i=-m}^m a_i E(\varepsilon_{t+i})=0} \\ E(\tilde{X}_t) &= \sum_{i=-m}^m a_i f(t+i) \approx f(t) = E(X_t); \end{aligned}$$

- \* Transformisana serija  $\tilde{X}_t$  ima manju disperziju od disperzije početne serije:

$$\begin{aligned} D(\tilde{X}_t) &= D(\sum_{i=-m}^m a_i X_{t+i}) \\ D(\tilde{X}_t) &= \frac{D(\sum_{i=-m}^m a_i f(t+i))}{=D(const)=0} + D(\sum_{i=-m}^m a_i \varepsilon_{t+i}) \\ D(\tilde{X}_t) &= E(\sum_{i=-m}^m a_i \varepsilon_{t+i})^2 - (E(\sum_{i=-m}^m a_i \varepsilon_{t+i}))^2 \\ D(\tilde{X}_t) &= \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m a_i a_j \frac{E(\varepsilon_{t+i} \varepsilon_{t+j})}{=cov(\varepsilon_{t+i}, \varepsilon_{t+j})=0 \text{ za } i \neq j} \\ D(\tilde{X}_t) &= \sum_{i=-m}^m a_i^2 D(\varepsilon_{t+i}) \\ D(\tilde{X}_t) &= \sum_{i=-m}^m a_i^2 \sigma^2 < \sigma^2 = D(X_t). \end{aligned}$$

Problem sa pokretnim prosecima se javlja onda kad treba odlučiti koliko je perioda potrebno pri prognoziranju. Uslov koji treba da se ispuni kako bi se koristila metoda pokretnih proseka jeste da je potrebno znati broj dostupnih vrednosti vremenske serije. Ukoliko se samo noviji podaci u vremenskoj seriji smatraju relevantnim, onda se za broj perioda  $m$  uzima što manja vrednost. Međutim, što je više starijih podataka u vremenskoj seriji koji se smatraju relevantnim, samim tim je broj  $m$  sve veći.

U zavisnosti od konkretne definicije skupa pondera razlikuju se posebni slučajevi izravnavanja pomoću pokretnih proseka: *izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih proseka*, *izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih proseka* i *izravnavanje pomoću ponderisanih pokretnih proseka*. Nešto kasnije biće reči o svakom od njih.

Drugu grupu metoda izravnavanja čine one metode koje su bazirane na medijani i one se nazivaju *metode izravnavanja pomoću pokretnih medijana*. Termin „pokretna medijana“ je uzet iz razloga što se svakim formiranjem nove vrednosti serije računa nova vrednost medijane, tako da se kao rezultat, „medijana“ uvek menja, tj. „pokreće“. Najčešće se koriste tročlane i petočlane pokretne medijane. Ukoliko se koriste pokretne medijane sa tri člana tada se svaka trenutna vrednost serije

zamenjuje sa medijanom tri vrednosti, prošle, trenutne i buduće vrednosti, a ukoliko se koriste petočlane pokretne medijane tada se svaka trenutna vrednost serije zamenjuje sa medijanom pet vrednosti, dve prošle, jedne trenutne i dve buduće vrednosti. Pri prisustvu nekih nestandardnih i odstupajućih vrednosti u vremenskoj seriji korisno je koristiti tročlane pokretne medijane, ali ukoliko se u nizu od tri vrednosti nađu dve vrednosti koje su nestandardne, poželjno je koristiti ipak petočlane pokretne medijane, jer tročlane pokretne medijane ne eliminišu uticaj nestandardnih vrednosti.

Kod petočlanih pokretnih medijana retko dolazi do pojave parova istih vrednosti u izravnjanoj seriji. Međutim, u slučaju tročlanih pokretnih medijana to se može desiti. Takva izravnjana serija će na svom grafiku imati ravnine na svakom mestu gde se pojavi par istih vrednosti, pa će kretanje serije biti izlomljeno. Ovakva pojava se može modifikovati pomoću tzv. *deobe* (eng. *splitting*), pri kojoj se izravnjana serija deli na tri dela. Neka su  $X_{t-1}$  i  $X_t$  iste vrednosti u nekoj izravnjanoj seriji i neka one čine pomenuti par. Tada se deoba serije vrši na sledeći način: prvi deo izravnjane serije činiće samo pomenuti par vrednosti, drugi deo izravnjane serije činiće vrednosti serije koje se nalaze levo od pomenutog para, tj. vrednosti  $\dots, X_{t-4}, X_{t-3}, X_{t-2}$ , dok će treći deo izravnjane serije činiti vrednosti serije koje se nalaze desno od pomenutog para, tj. vrednosti  $X_{t+1}, X_{t+2}, X_{t+3}, \dots$ . Nakon deobe, vrednosti para  $X_{t-1}, X_t$  treba zameniti sa sledećim vrednostima:

$$X_{t-1} = \text{medijana}\{X_{t-2}, X_{t-1}, 3X_{t-2} - 2X_{t-3}\}, X_t = \text{medijana}\{3X_{t+1} - 2X_{t+2}, X_t, X_{t+1}\}.$$

Izravnjana serija formirana nakon ove deobe imaće glatkije kretanje, u odnosu na kretanje dobijeno samo primenom tročlanih pokretnih medijana. Dobijena serija će moći ponovo da se podvrgne postupku izravnavanja, tj. moći će da se primeni ponovno izravnavanje (eng. *resmoothing*). Ovaj postupak moći će da se primenjuje sve dok neka izravnjana serija pri ponovnom izravnavanju ne dobije identične vrednosti. Takođe, na izravnjanoj vremenskoj seriji moći će da se primeni i tzv. *hanning* postupak, koji svaku vrednost  $X_t$  krajnje izravnjane vremenske serije menja sa ponderisanim pokretnim prosekom te vrednosti i dve njoj susedne vrednosti, po formuli:

$$X_t = \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{2}X_t + \frac{1}{4}X_{t+1}.$$

Ovaj postupak se može primeniti samo ukoliko u izravnjanoj vremenskoj seriji ne postoje nestandardne, odstupajuće vrednosti.

Jedna od prednosti metoda izravnavanja pomoću pokretnih medijana jeste to što ne dolazi do smanjenja broja članova početne vremenske serije. To obezbeđuje postupak koji se primenjuje u finalnom koraku izravnavanja, a više o njemu se može pročitati u [8]. Sve do finalnog koraka prve i poslednje vrednosti (kod tročlanih medijana to su prva i poslednja vrednost, kod petočlanih to su prve dve i poslednje dve vrednosti) početne vremenske serije ostaće neizmenjene i u svim ostalim dobijenim izravnanim vremenskim serijama.

Pri određivanju naziva metode izravnavanja pomoću pokretnih medijana koja je primenjena na neku vremensku seriju koriste se sledeće oznake:

**3** ili **5** – primenjene su tročlane ili petočlane pokretne medijane

**S** – primenjen je postupak deobe

**R** – primenjen je postupak ponovnog izravnavanja

**H** – primenjen je *hanning* postupak.

Uobičajno je da se u nazivu metode na prvom mestu nađu broj 3 ili broj 5 i da se na poslednjem mestu nađe slovo *H*, ukoliko je pri izravnavanju primenjen *hanning* postupak. Slova *S* i *R* se mogu pojavljivati

veći broj puta i u proizvoljnom redosledu na ostalim pozicijama u nazivu metode. Primeri naziva nekih metoda su *3RSS*, *5SRSH*, *3SSH*, *5RSS*, itd. [2]

### 3.2.1 Izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih proseka

U slučaju kada za skup pondera  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  važi da je  $a_j = a_{-j}$ , tada se koristi *izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih proseka*. U opštem slučaju, pri korišćenju simetričnih pokretnih proseka, uz korak pokretnog proseka od  $2m + 1$  opservacija, na početku i kraju serije, nedostaje  $m$  opservacija. Ovo skraćivanje izravnjane serije predstavlja jedan od osnovnih nedostataka izravnavanja pomoću simetričnih pokretnih proseka i razlog za definisanje i korišćenje nekih drugih metoda izravnavanja.

### 3.2.2 Izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih proseka

Ako su svi ponderi kod simetričnih pokretnih proseka međusobno jednaki, tada se koristi metoda *izravnavanja pomoću jednostavnih pokretnih proseka* [2, 3, 9, 11]. U finansijama jednostavni pokretni proseci su aritmetičke sredine  $m$  uzastopnih numeričkih vrednosti posmatranog obeležja. Međutim, u nauci i inženjerstvu, to su aritmetičke sredine jednakog broja ravnomerno uzetih numeričkih vrednosti sa obe strane odgovarajuće centralne srednje vrednosti. Ovako posmatranje jednostavnih pokretnih proseka zahteva neparan broj članova posmatrane serije podataka. Dakle, dobija se model koji predstavlja aritmetičku sredinu  $2m + 1$  uzastopnih numeričkih vrednosti posmatranog obeležja. Ako je data serija  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , pomoću jednostavnih pokretnih proseka vrednost serije u trenutku  $t$  se ocenjuje sa sledećom vrednošću:

$$\tilde{X}_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m X_{t+i}, t = m + 1, m + 2, \dots, n - m.$$

Pošto se izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih proseka koristi upravo za predviđanje, u statistici se za pokretni prosek uzima aritmetička sredina  $m$  uzastopnih numeričkih vrednosti posmatranog obeležja za koje se i vrši predviđanje. Dakle, ako je  $X_t$  data vremenska serija sa jednakim intervalima, vrednost prognoze za period  $t + 1$  određuje se pomoću  $m$  prethodnih, poslednjih perioda:

$$\tilde{X}_{t+1} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X_{t-i}.$$

### 3.2.3 Izravnavanje pomoću ponderisanih pokretnih proseka

Kada je u određenoj vremenskoj seriji prisutan trend ili neka zakonitost, mogu se koristiti težinski faktori (*ponderi*) kako bi se stavio jači naglasak na novije podatke (tj. kako bi se stariji podaci učinili manje važnim). Tada se pristupa primeni *izravnavanja pomoću ponderisanih pokretnih proseka* [2, 3, 9, 11]. Izbor pondera  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  je proizvoljan i nema nekih gotovih formula za njihovo formiranje. Jedini uslovi koje ponderi moraju da zadovoljavaju jeste da njihova suma bude jednaka 1, tj. da važi  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i = 1$ , kao i da budu simetrični, tj. da važi  $a_j = a_{-j}$ , za svako  $j \in \mathbb{N}_0$ . Odluka o njihovom izboru traži određeno iskustvo i intuiciju. Da bi se koristilo izravnavanje pomoću ponderisanih pokretnih

proseka prvo se mora izabrati broj podataka koji će biti uključeni u ponderisane pokretne proseke, a zatim istim izabrati odgovarajuće težine. U principu, ako se smatra da je nedavna prošlost bolji prediktor budućnosti od daleke prošlosti, veće težine treba dodeliti novijim podacima. Međutim, kad je vremenska serija vrlo promenljiva biranje približno jednakih težina za podatke je najbolje rešenje.

Ponderisani pokretni proseci se dobijaju uzastopnom primenom jednostavnih pokretnih proseka. Upravo zbog uzastopne primene jednostavnih pokretnih proseka vremenska serija se svakim ponavljanjem bolje izravnavaju, pa ovaj tip izravnavanja daje zadovoljavajuće rezultate. Pojedine grupe pondera koje se koriste za ponderisane pokretne proseke imaju veliku upotrebu. To su, na primer, Spencerovi (*Spencer's Moving Average*) i Hendersonovi (*Henderson's Moving Average*) pokretni proseci. Neke od često korišćenih grupa pondera predstavljene su u tabeli 3.1.

Name	a <sub>0</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>	a <sub>9</sub>	a <sub>10</sub>	a <sub>11</sub>
3-MA	.333	.333										
5 MA	.200	.200	.200									
2x12-MA	.083	.083	.083	.083	.083	.083	.042					
3x3-MA	.333	.222	.111									
3x5-MA	.200	.200	.133	.067								
S15-MA	.231	.209	.144	.066	.009	-.016	-.019	-.009				
S21-MA	.171	.163	.134	.037	.051	.017	-.006	-.014	-.014	-.009	-.003	
H5-MA	.558	.294	-.073									
H9-MA	.330	.267	.119	-.010	-.041							
H13-MA	.240	.214	.147	.066	.000	-.028	-.019					
H23-MA	.148	.138	.122	.097	.068	.039	.013	-.005	-.015	-.016	-.011	-.004
<i>S = Spencer's weighted moving average</i>												
<i>H = Henderson's weighted moving average</i>												

**Tabela 3.1.** – Najčešće korišćene grupe pondera

### 3.3. Eksponecijalno izravnavanje

*Eksponecijalno izravnavanje* je jedna od prvih metoda korišćenih pri prognoziranju. U ovoj metodi polazi se od pretpostavke da je važnost podataka u seriji obrnuto proporcionalna sa njihovom starošću, dakle što su podaci stariji to su manje pouzdani, relevantni, pa im je potrebno pridružiti i manju važnost. Stepem važnosti i pouzdanosti podataka meri se odgovarajućim ponderom. Razlog za ovakav pristup utvrđivanja pondera leži u činjenici da najnoviji podaci sadrže najverodostojnije informacije o onome što je realno očekivati da će se dogoditi u budućnosti. Eksponecijalno izravnavanje, u najjednostavnijem slučaju, jeste specijalan slučaj metode izravnavanja sa ponderisanim pokretnim prosecima, u kojoj su podaci ponderisani sa jednom eksponecijalnom funkcijom. U nastavku će biti reči o tri tipa eksponecijalnog izravnavanja: *jednostavno*, *dvostruko* i *trostruko eksponecijalno izravnavanje*.

### 3.3.1 Jednostavno eksponencijalno izravnavanje

Jednostavno (jednostruko) eksponencijalno izravnavanje pokazuje dobre rezultate kada se koristi kod vremenskih serija koje nemaju trend ni komponente sezonskih ili cikličnih fluktuacija. Upravo za ovakve serije karakteristične su slučajne fluktuacije oko prosečnog nivoa koji se tokom vremena menja veoma sporo ili je konstantan. [2, 9, 11]

Neka je data vremenska serija  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , koja ne sadrži sezonsku komponentu, ni trend i neka je ona zadata sledećim modelom:

$$X_t = \mu + \varepsilon_t,$$

gde je sa  $\mu$  označen prosečni nivo oko kog se kreću slučajne fluktuacije, a  $\varepsilon_t$  slučajna komponenta za koju važe sledeći uslovi:

- $E(\varepsilon_t) = 0$ ;
- $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , za svako  $t$ ;
- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ , za svako  $t \neq s$ .

Neka je još sa  $F_t$  označena prognozirana vrednost serije za period  $t$  ili, prirodnije, ocenjena (prognozirana) vrednost prosečnog nivoa  $\mu$  za period  $t$ . Jednostavno eksponencijalno izravnavanje predstavljeno je sledećom formulom:

$$F_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_{t-1},$$

gde je sa  $X_t$  označena vrednost serije za period  $t$ , tj. tekuća vrednost vremenske serije, sa ponderom  $\alpha$  broj iz intervala  $(0, 1)$ , koji se naziva *konstanta izravnavanja*, a sa  $F_{t-1}$  prethodna prognozirana vrednost. Ova formula je zapravo jedna rekurzivna jednačina i ona pokazuje da je prognozirana vrednost za period  $t$  zapravo ponderisani prosek tekuće vrednosti serije za period  $t$  i prognozirane vrednosti za period  $t - 1$ , tj. da je to linearna kombinacija svih prošlih opservacija, pri čemu je zbir koeficijenata linearne kombinacije jednak jedinici. Dobijena rekurzivna jednačina koja definiše jednostavno eksponencijalno izravnavanje može se pokazati korišćenjem indukcije.

#### (baza indukcije)

Neka početna prognozirana vrednost  $F_0$  ima vrednost  $f_0$ .

Za  $t = 1$  se dobija:

$$F_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)F_0$$

$$F_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)f_0.$$

Za  $t = 2$  se dobija:

$$F_2 = \alpha X_2 + (1 - \alpha)F_1$$

$$F_2 = \alpha X_2 + (1 - \alpha)(\alpha X_1 + (1 - \alpha)f_0)$$

$$F_2 = \alpha X_2 + \alpha(1 - \alpha)X_1 + (1 - \alpha)^2 f_0.$$

#### (induktivna hipoteza)

Pretpostavlja se da za  $t = n$  važi relacija:

$$F_n = \alpha X_n + \alpha(1 - \alpha)X_{n-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{n-1}X_1 + (1 - \alpha)^n f_0.$$

Računa se prognozirana vrednost serije za period  $t = n + 1$ :

$$F_{n+1} = \alpha X_{n+1} + (1 - \alpha)F_n$$

$$F_{n+1} = \alpha X_{n+1} + (1 - \alpha)(\alpha X_n + \alpha(1 - \alpha)X_{n-1} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{n-1}X_1 + (1 - \alpha)^n f_0)$$

$$F_{n+1} = \alpha X_{n+1} + \alpha(1 - \alpha)X_n + \dots + \alpha(1 - \alpha)^n X_1 + (1 - \alpha)^{n+1} f_0.$$

Dakle, na osnovu dokaza pomoću indukcije, dobija se da je prognozirana vrednost serije za period  $t = n$  linearna kombinacija svih prošlih opservacija:

$$F_n = \alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j X_{n-j} + (1 - \alpha)^n f_0,$$

gde je sa  $f_0$  označena početna prognozirana vrednost. Kako važi:

$$\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j = \alpha \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{1 - (1 - \alpha)} = 1 - (1 - \alpha)^n,$$

onda se dobija da je zbir koeficijenata linearne kombinacije jednak jedinici:

$$\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j + (1 - \alpha)^n = 1.$$

Zbog uslova da je  $\alpha$  konstanta iz intervala  $(0, 1)$ , očigledno je da ponderi  $\alpha, \alpha(1 - \alpha), \alpha(1 - \alpha)^2, \dots$  imaju opadajuće vrednosti.

Samo ponašanje i efekti eksponencijalnog izravnavanja određeni su vrednostima za konstantu izravnavanja i početnu prognoziranu vrednost. U literaturi se obično pretpostavlja da konstanta izravnavanja uzima vrednosti iz interval  $(0, 1)$ , mada se preporučuje još uži interval, npr.  $(0.01, 0.3)$ . Što je manja vrednost konstante izravnavanja, izravnjane vrednosti serije imaće glatko kretanje, dok će za veće vrednosti konstante izravnavanja izravnjane vrednosti brže reagovati na slučajne promene. Metodom pokušaja različitih vrednosti konstante izravnavanja iz navedenog intervala bira se ona vrednost koja minimizuje vrednost srednje kvadratne greške (ili vrednost prosečne apsolutne devijacije, ili srednje apsolutne greške). Ukoliko se pokaže tokom primene ovog postupka da je izabrana vrednost  $\alpha > 0.3$ , tada se sugeriše korišćenje složenijih modela izravnavanja (primer takvog modela je dvostruko eksponencijalno izravnavanje o kome će biti reči u nastavku).

Što se tiče početne prognozirane vrednosti, obično se koristi neka od sledećih opcija:

- \* Uzima se prvi element originalne serije, tj.  $F_0 = X_1$ . Ukoliko je serija dovoljno dugačka uticaj početne vrednosti postaje sve manji s udaljavanjem od početnog perioda, pa se kao početna prognozirana vrednost može uzeti i nula;
- \* Uzima se aritmetička sredina nekoliko prvih opservacija serije;
- \* Uzima se aritmetička sredina svih opservacija serije (sredina vremenske serije).

Prognozirana vrednost prosečnog nivoa  $\mu$  na osnovu jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja je asimptotski nepristrasna ocena nivoa  $\mu$  vremenske serije, što se može videti iz sledećeg:

$$E(F_t) = E\left(\alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha)^j X_{t-j} + (1 - \alpha)^t f_0\right)$$

$$E(F_t) = E\left(\alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j X_{t-j}\right) + E((1 - \alpha)^t f_0)$$

$$E(F_t) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j E(X_{t-j}) + (1 - \alpha)^t f_0$$

$$E(F_t) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j \mu + (1 - \alpha)^t f_0$$

$$E(F_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha)^j \mu,$$



jer kada  $t$  konvergira ka  $\infty$ , tada izraz  $(1 - \alpha)^t f_0$  konvergira ka nuli, pa se iz osobine pondera da je njihova suma jednaka 1 dobija potrebna asimptotska nepristrasnost:

$$E(F_t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu.$$

Na osnovu ove osobine o asimptotskoj nepristrasnosti ocene nivoa, ocena nepoznatog nivoa u periodu  $t$  iznosiće upravo  $F_t$ . Tada će prognoza vrednosti vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija biti:

$$\tilde{X}_t(h) = F_t.$$

U slučaju vremenskih serija sa sezonskom komponentom  $s_t$ , sa periodom  $d$ , metod jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja ima nešto drugačiji oblik. Zbog postojanja aditivnog i multiplikativnog modela vremenske serije, razlikuju se jednostavno eksponencijalno izravnavanje u aditivnom modelu:

$$F_t = \alpha(X_t - s_{t-d}) + (1 - \alpha)F_{t-1},$$

i jednostavno eksponencijalno izravnavanje u multiplikativnom modelu:

$$F_t = \alpha(X_t/s_{t-d}) + (1 - \alpha)F_{t-1}.$$

Ovim izrazima dodeljuju se, redom, jednačine

$$s_t = \beta(X_t - F_t) + (1 - \beta)s_{t-d},$$

$$s_t = \beta(X_t/F_t) + (1 - \beta)s_{t-d},$$

kojima se vrši izravnavanje sezonske komponente korišćenjem konstante izravnavanja  $\beta$ . Kod ovih izravnavanja važe prethodno izložena razmatranja izbora konstanti izravnavanja. Isto važi i za izbor početne prognozirane vrednosti. Što se tiče prognoze vrednosti vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovane na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, one su predstavljene, redom, sledećim izrazima:

$$\tilde{X}_t(h) = F_t + s_{t-d+h}$$

$$\tilde{X}_t(h) = F_t \cdot s_{t-d+h}.$$

### 3.3.2 Dvostruko eksponencijalno izravnavanje

Jednostavno eksponencijalno izravnavanje ne pokazuje dobre rezultate kada je reč o serijama koje imaju trend. Štaviše, primenom jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja za prognoziranje ovakve serije dobijaju se negativno pristrasne prognoze. U takvim situacijama pogodno je koristiti metode koje se jednim imenom nazivaju *dvostruko eksponencijalno izravnavanje* ili eksponencijalno izravnavanje drugog reda. [2, 9, 11] Za seriju je tada primereniji model linearnog trenda:

$$X_t = \mu + f_t + \varepsilon_t,$$

gde je sa  $\mu$  označen srednji nivo oko kog se kreću slučajne fluktuacije, sa  $f_t$  trend koji se javlja u seriji, a sa  $\varepsilon_t$  slučajna komponenta za koju važe sledeći uslovi:

- $E(\varepsilon_t) = 0$ ;
- $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$ , za svako  $t$ ;
- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ , za svako  $t \neq s$ .

Prvi metod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja jeste *Brown-ov metod izravnavanja*. Ovaj metod koristi se kod serija sa trendom koje nemaju sezonsku komponentu. Postoje dva alternativna načina iskazivanja Brown-ovog metoda izravnavanja u rekurzivnom obliku. Prvi oblik je:

$$F_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_{t-1}$$

$$f_t = \alpha(F_t - F_{t-1}) + (1 - \alpha)f_{t-1},$$

gde je prvim izrazom predstavljeno izravnavanje vrednosti vremenske serije, a drugim izrazom izravnavanje trenda serije, kojim se tekuća vrednost trenda određuje na osnovu ponderisane sredine prethodne vrednosti trenda i nove informacije o trendu sadržane u razlici tekuće i prošle izravnjane vrednosti. Prognozirana vrednost vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, tada će iznositi:

$$\tilde{X}_t(h) = F_t + (h + \frac{1-\alpha}{\alpha})f_t.$$

Drugi oblik je:

$$F_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_{t-1}$$

$$\tilde{F}_t = \alpha F_t + (1 - \alpha)\tilde{F}_{t-1},$$

gde se uočava zbog čega se ovaj postupak naziva dvostruko eksponencijalno izravnavanje. Dakle, prvo se primenjuje jednostavno eksponencijalno izravnavanje na vrednosti vremenske serije, a zatim se sa serijom  $F_t$  ponavlja postupak jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja, što rezultira dvostruko izravnanju statistiku  $\tilde{F}_t$ . Prognozirana vrednost vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, za ovaj oblik iznosiće:

$$\tilde{X}_t(h) = a_t + hb_t,$$

gde je sa  $a_t$  prognozirani nivo u trenutku  $t$ , tj.  $a_t = 2F_t - \tilde{F}_t$ , a sa  $b_t$  prognozirani trend u trenutku  $t$ , tj.  $b_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}(F_t - \tilde{F}_t)$ .

Korišćenje iste konstante izravnavanja kod izravnavanja serije i izravnavanja trenda jeste jedna od bitnijih odlika, ali i istovremeno i mana ovog metoda. Što se tiče izbora konstante izravnavanja kod Brown-ove metode, najčešće se uzima vrednost 0.2 ili manja. Pristupi određivanja početnih vrednosti za primenu Brown-ove metode iste su kao kod jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja, osim što je potrebno još odrediti početnu vrednost za ocenu trenda. Sugerise se korišćenje metode najmanjih kvadrata radi ocene početnog nivoa i trenda serije. Zato je potrebno oceniti koeficijente linearnog trenda, pri čemu je slobodni član ocena nivoa, a koeficijent uz vreme ocena početne vrednosti trenda. Za sezonske vremenske serije sa trendom nije definisan postupak Brown-ovog izravnavanja u rekurzivnom obliku. U tom slučaju je potrebno prethodno izvršiti desezoniranje vremenske serije, pa potom promeniti gore izloženi postupak Brown-ove metode.

Drugi metod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja jeste *Holt-Winters-ov metod izravnavanja*. Za razliku od Brown-ovog metoda izravnavanja, u ovom metodu pojavljuju se dve konstante izravnavanja,  $\alpha_{HW}$  i  $\beta_{HW}$ . Prva konstanta izravnavanja predstavlja ocenu nivoa izravnavanja u trenutnoj vrednosti serije, dok druga konstanta izravnavanja predstavlja ocenu nagiba trenda u trenutnoj vrednosti vremenske serije. U slučaju nesezonskih vremenskih serija, Holt-Winters-ov metod ekvivalentan je Brown-ovom metodu za određene vrednosti konstanti izravnavanja ( $\alpha_{HW} = \alpha_B(1 - \alpha_B)$ ,  $\beta_{HW} = \alpha_B/(2 - \alpha_B)$ ). Za nesezonske vremenske serije, rekurzivni oblik modela je:

$$F_t = \alpha_{HW}X_t + (1 - \alpha_{HW})(F_{t-1} + f_{t-1})$$

$$f_t = \beta_{HW}(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta_{HW})f_{t-1},$$

pri čemu je prvim izrazom predstavljeno izravnavanje vrednosti vremenske serije, a sa drugim izrazom izravnavanje trenda. Prognozirana vrednost vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, tada će iznositi:

$$\tilde{X}_t(h) = F_t + hf_t.$$

Pri izboru konstanti izravnavanja kod Holt-Winters-ovog metoda koriste se isti načini kao i kod prethodno pokazanih metoda eksponencijalnog izravnavanja. Uglavnom, preporučuju se vrednosti od 0.01 do 0.3 za obe komponente koje se podležu izravnavanju. Takođe, preporučuje se i ocenjivanje obe konstante na osnovu vremenske serije korišćenjem jednog od statističkih kriterijuma, npr. srednje kvadratne greške prognoze. Početne vrednosti nivoa i trenda mogu se odrediti na osnovu ranije pokazanih metoda.

Postavlja se pitanje, da li je Holt-Winters-ov metod u odnosu na Brown-ov metod, zbog opštosti, pouzdaniji pri formiranju prognoza. Iako to u mnogome zavisi od procesa koji je generisao vremensku seriju, pokazano je da Holt-Winters-ov metod ima veću pouzdanost. To se može uočiti i pri ocenjivanju konstante izravnavanja kod serija bez trenda, jer primenom Holt-Winters-ovog metoda izravnavanja dobija se konstanta izravnavanja za trend koja je bliska nuli, dok primenom Brown-ovog metoda izravnavanja utvrdiće se postojanje nekog trenda, upravo zato što se koristi ista konstanta izravnavanja i za trend i za prognoziranu vrednost. [2]

### 3.3.3 Trostruko eksponencijalno izravnavanje

*Trostruko eksponencijalno izravnavanje* koristi se kod vremenskih serija koje imaju i trend i određenu sezonsku komponentu. Zbog istih autora kao kod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja, ovaj metod se naziva još i *Holt-Winters-ovo trostruko eksponencijalno izravnavanje*. U zavisnosti od tipa sezonske komponente, razlikuju se sledeća dva rekurzivna oblika ove metode. [2, 9, 11]

Za vremenske serije sa aditivnom sezonskom komponentom  $s_t$ , koja ima period  $d$ , rekurzivni oblik je:

$$F_t = \alpha_{HW}(X_t - s_{t-d}) + (1 - \alpha_{HW})(F_{t-1} + f_{t-1})$$

$$f_t = \beta_{HW}(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta_{HW})f_{t-1}$$

$$s_t = \gamma_{HW}(X_t - F_t) + (1 - \gamma_{HW})s_{t-d},$$

gde su prva dva izraza ista kao kod Holt-Winters-ovog dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja, a poslednji izraz predstavlja reviziju sezonske komponente korišćenjem konstante izravnavanja  $\gamma_{HW}$ . Prognozirana vrednost vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, tada će iznositi:

$$\tilde{X}_t(h) = F_t + hf_t + s_{t-d+h}.$$

Za vremenske serije sa multiplikativnom sezonskom komponentom  $s_t$ , koja ima period  $d$ , rekurzivni oblik je:

$$F_t = \alpha_{HW}(X_t/s_{t-d}) + (1 - \alpha_{HW})(F_{t-1} + f_{t-1})$$

$$f_t = \beta_{HW}(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta_{HW})f_{t-1}$$

$$s_t = \gamma_{HW}(X_t/F_t) + (1 - \gamma_{HW})s_{t-d},$$

gde su prva dva izraza ista kao kod Holt-Winters-ovog dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja, a poslednji izraz predstavlja reviziju sezonske komponente korišćenjem konstante izravnavanja  $\gamma_{HW}$ . Prognozirana vrednost vremenske serije za  $h$  perioda unapred, zasnovana na  $t$  prethodnih raspoloživih opservacija, tada će iznositi:

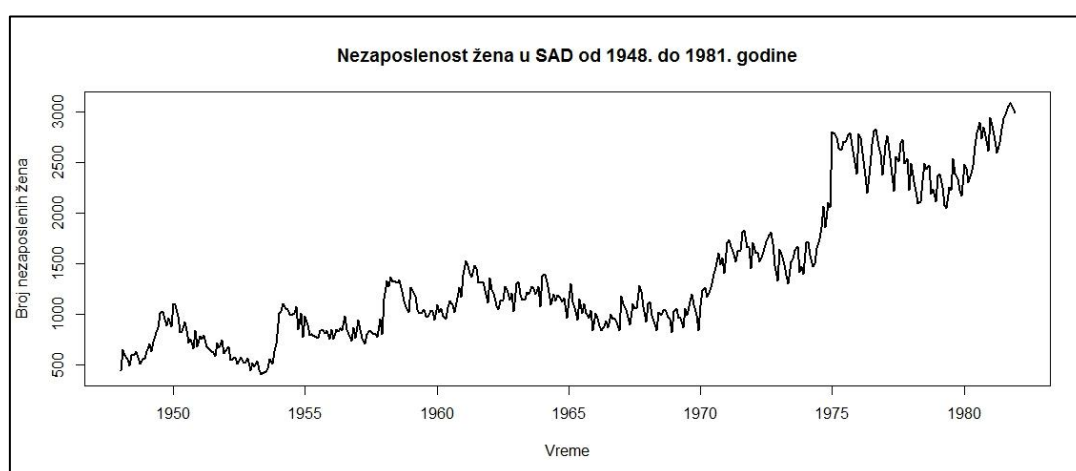
$$\tilde{X}_t(h) = (F_t + hf_t) \cdot s_{(t-d+h) \bmod d}.$$

Pri izboru konstanti izravnavanja kod Holt-Winters-ovog trostrukog eksponencijalnog izravnavanja koriste se isti načini kao i kod prethodno pokazanih metoda eksponencijalnog izravnavanja. Uglavnom, preporučuju se vrednosti od 0.01 do 0.3 za sve tri komponente koje se podležu izravnavanju. Takođe, preporučuje se i ocenjivanje sve tri konstante na osnovu vremenske serije korišćenjem jednog od statističkih kriterijuma, npr. srednje kvadratne greške prognoze. Početne vrednosti nivoa i trenda mogu se odrediti na osnovu ranije pokazanih metoda. [2]

## 4. PRIMENA IZRAVNAVANJA VREMENSKIH SERIJA

U ovom poglavlju biće prikazana primena metoda izravnavanja vremenskih serija na konkretnom skupu podataka koji odgovaraju jednoj vremenskoj seriji. Za sve postupke analize i izvođenja metoda koristi se programski jezik *R*.

Posmatra se vremenska serija koja sadrži podatke o mesečnoj stopi nezaposlenosti žena, starosti 20 godina i više, u Sjedinjenim Američkim Državama, u periodu od 1948. godine do 1981. godine, koja je preuzeta sa stranice: <https://datamarket.com/data/>. Podaci su se beležili mesečno, od januara 1948. godine do decembra 1981. godine i predstavljeni su u broju jedinica od 1000 žena. Slika 4.1. predstavlja grafički prikaz posmatranih podataka iz vremenske serije.



Slika 4.1. – Grafički prikaz posmatrane vremenske serije

Prikaz vremenske serije na slici 4.1. ukazuje na postojanje trenda, koji generalno ima tendenciju rasta, sa nekoliko blagih padova, jer prati podatke u sredini. Međutim, pojavljuju se i određene nepravilnosti u seriji, koje se mogu shvatiti kao slučajna kretanja oko trenda. I te nepravilnosti takođe rastu tokom vremena i prate liniju trenda. Dakle, ovoj seriji može odgovarati multiplikativni model vremenske serije. Potrebno je samo odrediti koje komponente učestvuju u tom modelu.

Za početak, prvo se proverava da li je data serija stacionarna ili ne. Za tu proveru koristi se test jediničnog korena, koji se dobija primenom funkcije `adf.test()` iz *R*-ovog paketa *tseries*, u programskom delu. Njena definicija glasi:

```
adf.test(x, alternative = c("stationary", "explosive"), k = trunc((length(x) - 1)^(1/3))),
```

gde je  $x$  označena vremenska serija koja se analizira, sa *alternative* alternativna hipoteza pri testiranju, koja može biti definisana kao stacionarna ili eksplozivna, a sa  $k$  red zaostatka pri računanju test statistike. U definiciji funkcije `adf.test()` data je podrazumevana vrednost za argument  $k$ .

Pomenuta funkcija se primenjuje na vremensku seriju *vs* koja sadrži podatke iz posmatrane vremenske serije, a koja se dobija učitavanjem podataka iz fajla *monthly-SAD-female.xlsx*.

```
> MUF <- read.xlsx("monthly-SAD-female.xlsx", sheetName="Sheet1")
> vs <- ts(MUF[,2], start=1948, freq=12)
> adf.test(vs, alternative="stationary")
```

```
Augmented Dickey-Fuller Test
data: vs
Dickey-Fuller = -2.4899, Lag order = 7, p-value = 0.3704
alternative hypothesis: stationary
```

Alternativna hipoteza u ovom testu glasi da je vremenska serija stacionarna, dok nulta tvrdi nestacionarnost. Primenom navedenog testa dobijena je  $p$ -vrednost testa koja iznosi 0.3704, što je veće od nivoa značajnosti, koji u podrazumevanom slučaju iznosi 0.05, pa se alternativna hipoteza ovog testa odbacuje. Dakle, donosi se zaključak da je posmatrana serija nestacionarna.

Dalje je potrebno proveriti prisustvo sezonske komponente u posmatranoj seriji. Posmatanjem grafika date vremenske serije može se zaključiti da sezonska komponenta postoji, posebno iz razloga što se podaci beleže svakog meseca u posmatranim godinama, od 1948. do 1981. godine. Takođe, provera postojanja sezonske komponente može se proveriti utvrđivanjem postojanja linearne veze između vrednosti serije i vremena. Vremenska serija će sadržati sezonsku komponentu ako pomenuta linearna veza postoji, u suprotnom neće sadržati sezonsku komponentu. Dakle, formira se linearni model sa jednim prediktorom i sa dva nepoznata parametra. Ukoliko ne postoji linearna veza između vrednosti u seriji i vremena, ocenjeni nepoznati parametri imaće vrednosti koje se nalaze u bliskoj okolini nule. Za sve ostale vrednosti linearna veza će postojati.

U linearnom modelu zavisna promenljiva će biti vreme, označena sa *time*, koje se broji od 1 do 408, sa korakom jedan, jer toliko ima zabeleženih vremenskih trenutaka pri merenju u vremenskoj seriji. Zavisna promenljiva sadržaće vrednosti iz vremenske serije, tj. broj jedinica 1000 nezaposlenih žena u SAD i biće označena sa *UF*, dok će nezavisna promenljiva biti promenljiva *time* koja sadrži jedinice vremena. Linearni model sa posmatranim elementima se u *R*-u dobija pomoću funkcije *lm()*. Njena definicija je sledeća:

$$lm(\text{formula}, \text{data}, \dots),$$

gde je sa *formula* označena formula koja definiše linearni model, a koja se piše u obliku *zavisna promenljiva ~ nezavisna promenljiva*, a sa *data* je označen skup podataka koji se posmatra, i stavlja se opciono. Postoje još neki argumenti koji se pojavljuju u definiciji funkcije *lm()*, ali oni nisu od velike važnosti pri ovoj analizi vremenske serije. Ocenjeni nepoznati parametri dobijaju se pozivom funkcije *summary(object)*, koja za prosleđeni *object* daje rezultate u vidu sumarne analize. U ovom slučaju funkciji *summary()* biće prosleđen formirani linearni model *lin.model*.

```
> lin.model <- lm(UF ~ time)
> summary(lin.model)
```

```
Call:
lm(formula = UF ~ time)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-831.8 -211.5  -16.8   239.9   831.1

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 347.1195    34.4859   10.07  <2e-16 ***
time         5.0176     0.1461   34.34  <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 347.7 on 406 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7438, Adjusted R-squared:  0.7432
F-statistic: 1179 on 1 and 406 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Dobijeni model je oblika:

$$UF = 5.0176 \cdot time + 347.1195.$$

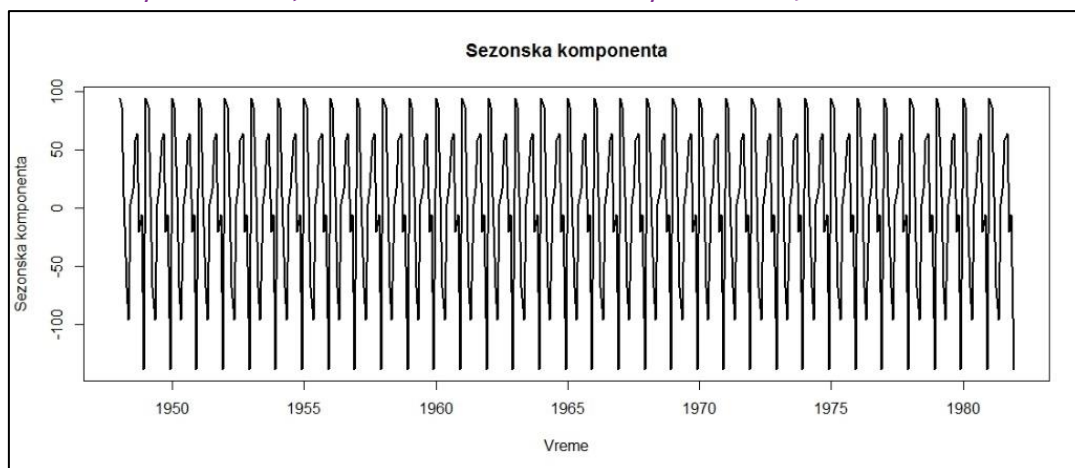
Dakle, uočava se da su ocenjeni nepoznati parametri dosta veći od nule, pa linearna veza između vrednosti serije i vremena postoji. Dakle, posmatrana vremenska serija ima sezonsku komponentu.

Pomoću funkcije `stl()` iz *R*-ovog paketa *stats* moguće je odrediti izgled svake od komponenata u posmatranoj seriji. Osnovna definicija ove funkcije je oblika:

$$stl(x, s.window, \dots),$$

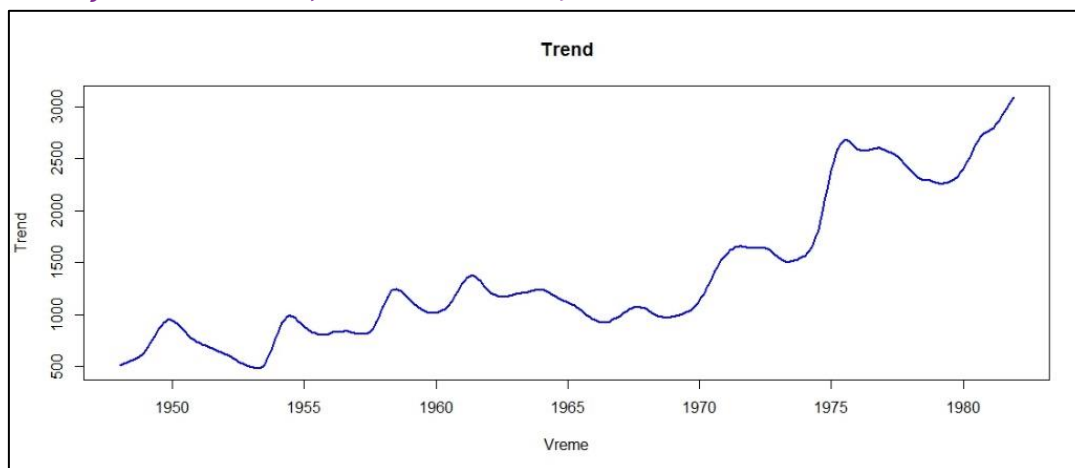
u kojoj je sa  $x$  označena vremenska serija na koju je potrebno primeniti dekompoziciju, a sa  $s.window$  red zaostatka pri izdvajanju sezonske komponente. Pomenutoj funkciji se kao argument prosleđuje vremenska serija  $vs$  koja sadrži željene podatke, a vrednost argumenta  $s.window$  biće "periodic". Naredni kod ilustruje odvajanje komponenata i formiranje njihovih grafika (slike 4.2., 4.3., 4.4.).

```
> vs.decompose <- stl(vs, s.window="periodic")
> season <- vs.decompose$time.series[,1]
> plot(season, type="l", lwd=2, xlab="Vreme", ylab="Sezonska
+   komponenta", main="Sezonska komponenta")
```



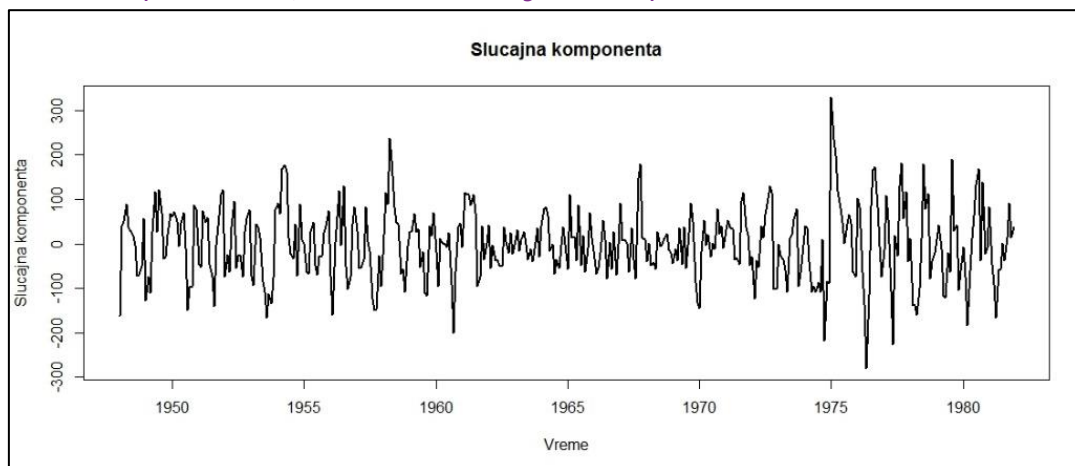
**Slika 4.2.** – Grafički prikaz sezonske komponente izdvojene iz posmatrane vremenske serije

```
> trend <- vs.decompose$time.series[,2]
> plot(trend, type="l", lwd=2, col="blue", xlab="Vreme",
+   ylab="Trend", main="Trend")
```



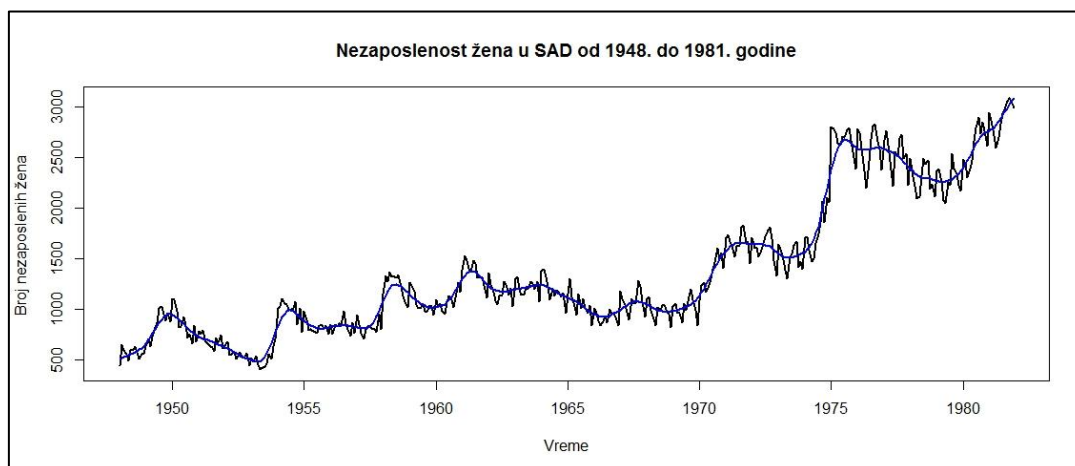
**Slika 4.3.** - Grafički prikaz trenda izdvojenog iz posmatrane vremenske serije

```
> random <- vs.decompose$time.series[,3]
> plot(random, type="l", lwd=2, xlab="vreme", ylab="slucajna
+   komponenta", main="slucajna komponenta")
```



**Slika 4.4.** - Grafički prikaz slučajne komponente izdvojene iz posmatrane serije

Posmatrana serija ima rastući trend, stohastičkog karaktera. Sezonska komponenta ima vrednosti koje se kreću u intervalu od -100 do 100, a koje pravilno variraju u istim periodima u različitim godinama. Slučajna komponenta nema određenih pravilnosti pri kretanju kroz vreme, a njene vrednosti su u intervalu od -300 do 300. Na slici 4.5. predstavljena je posmatrana vremenska serija, sa istaknutim trendom, koji je prikazan plavom bojom i koji pokazuje kretanje vrednosti vremenske serije u srednjem. Ono što se takođe može primetiti na slici 4.5. jeste to da sa rastom trenda u mnogome ne rastu i amplitude sezonskih i slučajnih fluktuacija. Ovo navodi na to da se posmatrana vremenska serija može opisati jednim aditivnim modelom.



**Slika 4.5.** - Grafički prikaz posmatrane vremenske serije i njene linije trenda

Da bi se odredila prognoza budućih vrednosti posmatrane vremenske serije, na osnovu poznatih vrednosti iste, potrebno je izvršiti izravnavanje date vremenske serije. Dakle, potrebno je izravnati liniju trenda, tako da se dobije trend na osnovu kojeg će se moći odrediti potrebne prognoze. Na posmatranoj vremenskoj seriji će kroz naredne primere biti prikazane sve metode izravnavanja koje su navedene u prethodnom poglavlju ovog rada.



**Metoda 1: Izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih proseka**

Uslovi koje mora da zadovoljava vremenska serija da se primenio metod izravnavanja pomoću simetričnih pokretnih proseka jesu da posmatrana serija nema sezonskih niti cikličnih varijacija, kao i da slučajne komponente predstavljaju nekorelisane slučajne promenljive, sa nultim očekivanjem i stabilnom varijansom. Dakle potrebno je na osnovu date vremenske serije formirati vremensku seriju bez sezonske komponente. To se može uraditi postupkom desezoniranja. Pošto posmatranoj vremenskoj seriji odgovara aditivni model, vremenska serija bez sezonske komponente dobiće se oduzimanjem od vrednosti date vremenske serije izdvojene vrednosti sezonske komponente, tj. *season*. U narednom kodu tražena serija bez sezonske komponente biće vremenska serija *deseason*, a njen grafički prikaz nalazi se na slici 4.6..

```
> deseason <- vs - season
> plot(deseason, type="l", lwd=2, xlab="Vreme", ylab="Broj
+   nezaposlenih žena", main="Vremenska serija bez sezonske
+   komponente")
```



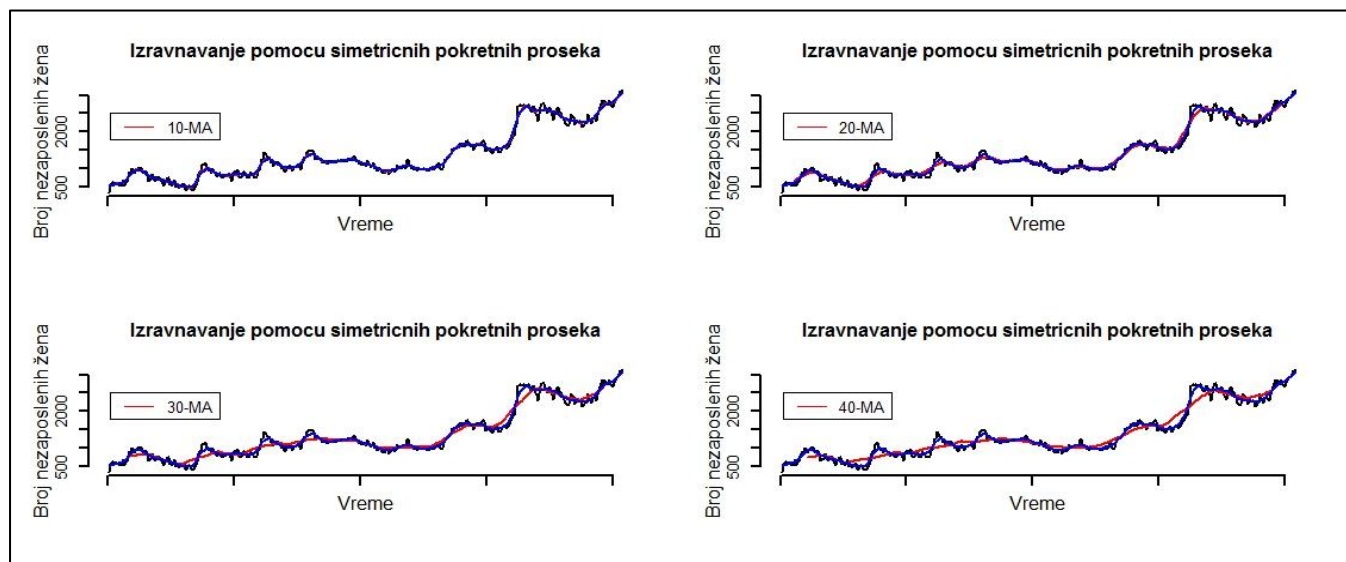
**Slika 4.6.** – Grafički prikaz posmatrane vremenske serije sa eliminisanom sezonskom komponentom

Novoformiranu vremensku seriju treba izravnati primenom simetričnih pokretnih proseka. Uzima se paran broj pondera. Naredni kod u R-u prikazuje definisanje funkcije *MAsimetric(x, d)* koja prosleđenu vremensku seriju *x* izravnavaju pomoću *d* pondera, pri čemu *d* mora biti paran broj.

```
> MAsimetric <- function(x, d){
+   Y <- c()
+   n <- length(x)
+   m <- d/2
+   for(t in (m+1):(n-m))
+     Y <- c(Y, (sum(x[(t-m+1):(t+m-1)])+0.5*x[t-m]+0.5*x[t+m])/d)
+   plot(1:n, x, lwd=2, type="l", xlab="", ylab="", axes=F,
+     +   main="Izravnavanje pomoću simetričnih pokretnih
+     +   proseka")
+   axis(1, labels=FALSE, lwd=2)
+   mtext(1, text="Vreme", line=1)
+   axis(2, ylim=Trend, lwd=2)
+   mtext(2, text="Broj nezaposlenih žena", line=2)
+   lines((m+1):(n-m), Y, lwd=2, col="red")
+   return(Y)
+ }
```

Definisano funkciju *MAsimetric()* treba primeniti na seriju *deseason*. Za samu ilustraciju metode koristiće se redom 10, 20, 30 i 40 simetričnih pondera, a odgovarajući grafici dati su na slici 4.7..

```
> par(mfrow=c(2,2))
> u <- MAsimetric(deseason, 10)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("10-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+       col="red")
> u1 <- MAsimetric(deseason, 20)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("20-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+       col="red")
> u2 <- MAsimetric(deseason, 30)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("30-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+       col="red")
> u3 <- MAsimetric(deseason, 40)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("40-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+       col="red")
```



**Slika 4.7.** – Primena metode izravnavanja pomoću simetričnih pokretnih proseka

Na prikazanim graficima je plavom bojom iscrtana linija trenda vremenske serije, dok su crvenom bojom iscrtane linije trenda nastale izravnavanjem pomoću 10, 20, 30 i 40 simetričnih pondera. Kao što se može videti, s povećanjem broja pondera, linija trenda gubi svoje nepravilnosti i velike promene vrednosti i postepeno se izravnuje.

### **Metoda 2:** Izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih proseka

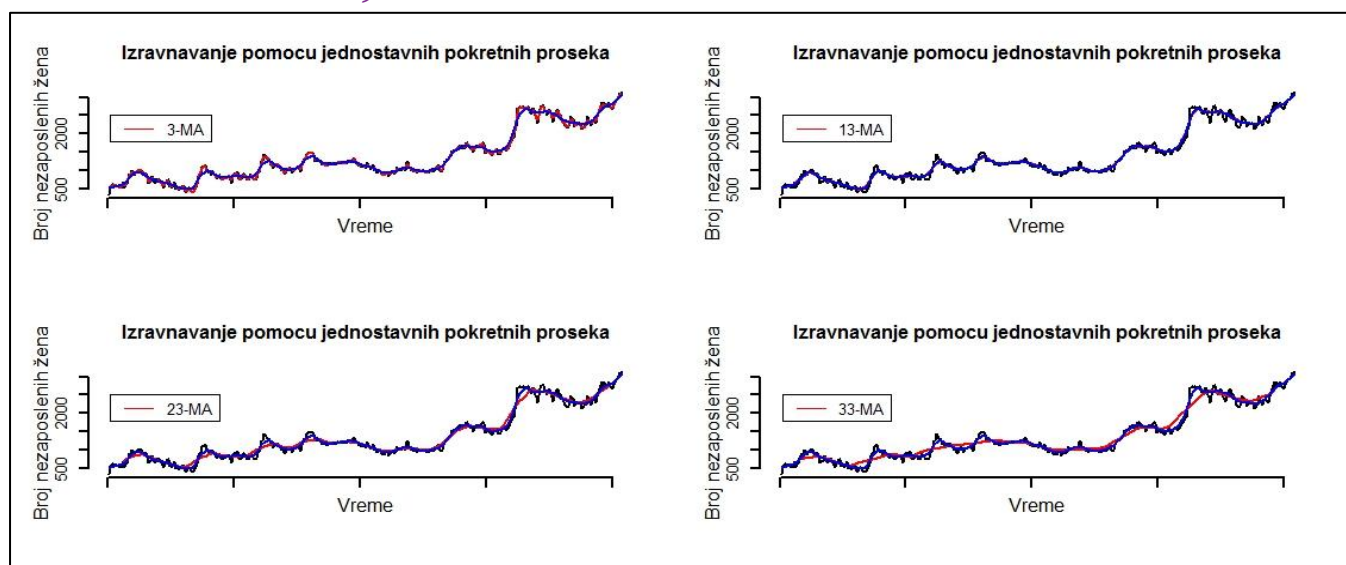
Već je rečeno da u slučaju kad su svi ponderi kod simetričnih pokretnih proseka međusobno jednaki, tada se koristi metod izravnavanja pomoću jednostavnih pokretnih proseka. Dakle, uslovi koji su navedeni u prethodnoj metodi važiće i u ovoj metodi i koristiće se ista vremenska serija, nastala uklanjanjem sezonske komponente. Razlika se javlja u definisanju funkcije izravnavanja

pomoću pondera. Naime, naredni kod u R-u prikazuje definisanje funkcije  $MAsimple(x, d)$  koja prosleđenu vremensku seriju  $x$  izravna pomoću  $d$  pondera, pri čemu je  $d$  neparan broj.

```
> MAsimple <- function(x, d){
+   Y <- c()
+   n <- length(x)
+   m <- (d-1)/2
+   for(t in (m+1):(n-m))
+     Y <- c(Y, sum(x[(t-m):(t+m)])/d)
+   plot(1:n, x, lwd=2, type="l", xlab="", ylab="", axes=F,
+     +   main="Izravnavanje pomoću jednostavnih pokretnih
+     +   proseka")
+   axis(1, labels=FALSE, lwd=2)
+   mtext(1, text="Vreme", line=1)
+   axis(2, ylim=Trend, lwd=2)
+   mtext(2, text="Broj nezaposlenih žena", line=2)
+   lines((m+1):(n-m), Y, lwd=2, col="red")
+   return(Y)
+ }
```

Definisanu funkciju  $MAsimple()$  treba primeniti na seriju *deseason*. Za samu ilustraciju metode koristeće se redom 3, 13, 23 i 33 pondera, a dobijeni grafici biće prikazani na slici 4.8..

```
> par(mfrow=c(2, 2))
> u <- MAsimple(deseason, 3)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("3-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+   col="red")
> u1 <- MAsimetric(deseason, 13)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("13-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+   col="red")
> u2 <- MAsimetric(deseason, 23)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("23-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+   col="red")
> u3 <- MAsimetric(deseason, 33)
> lines(Trend, col="blue", lwd=2)
> legend(2, 2500, c("33-MA"), lty=c(1,1), lwd=c(1.5,1.5),
+   col="red")
```



Slika 4.8. - Primena metode izravnavanja pomoću jednostavnih pokretnih proseka

Na prikazanim graficima je plavom bojom iscrtana linija trenda vremenske serije, dok su crvenom bojom iscrtane linije trenda nastale izravnavanjem pomoću 3, 13, 23 i 33 simetričnih pondera. Kao što se može videti, s povećanjem broja pondera, linija trenda gubi svoje nepravilnosti i velike promene vrednosti i postepeno se izravnuje.

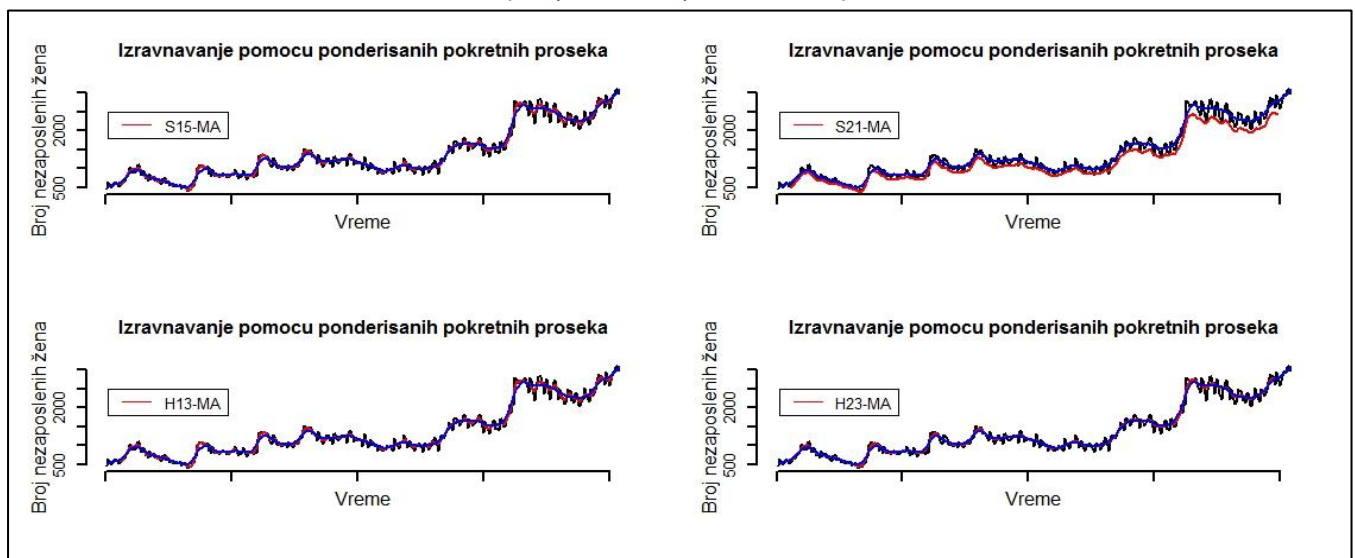
### Metoda 3: Izravnavanje pomoću ponderisanih pokretnih proseka

Izravnavanje pomoću jednostavnih i simetričnih pokretnih proseka je specijalan slučaj izravnavanja pomoću ponderisanih pokretnih proseka, jer je suma njihovih težina jednaka 1 i pri tome su težine simetrične. U nastavku će se koristiti skupovi pondera koji su navedeni u tabeli 3.1., i to skupovi S15-MA, S21-MA, H13-MA i H23-MA. Pri formiranju izravnanog trenda koristi se funkcija:

$$\text{filter}(x, \text{filter}, \text{sides} = 2, \dots),$$

kojoj se prosleđuju podaci jedne vremenske serije  $x$ , niz težina  $\text{filter}$  i pozicija podataka koji su od važnosti (početni podaci ili središnji podaci), tj.  $\text{sides} = 2$ . Naredni kod ilustruje formiranje izravnanog trendova za pomenute skupove pondera, tj.  $\text{UF.filter1}$ ,  $\text{UF.filter2}$ ,  $\text{UF.filter3}$  i  $\text{UF.filter4}$ , i crtanje grafika svakog od njih.

```
> MAS15 <- c(-.009, -.019, -.016, .009, .066, .144, .209, .231,
+ .209, .144, .066, .009, -.016, -.019, -.009)
> MAS21 <- c(-.003, -.009, -.014, -.014, -.006, .017, .051, .037,
+ .134, .163, .171, .163, .134, .037, .051, .017, -.006, -.014,
+ -.014, -.009, -.003)
> MAH13 <- c(-.019, -.028, .066, .147, .214, .24, .214, .147, 0,
+ .066, -.028, -.019)
> MAH23 <- c(-.004, -.011, -.016, -.015, -.005, .013, .039, .068,
+ .097, .122, .138, .148, .138, .122, .097, .068, .039, .013,
+ -.005, -.015, -.016, -.011, -.004)
> UF <- MUF[,2]
> time <- seq(1, 408, 1)
> UF.filter1 <- filter(UF, MAS15, sides=2)
> UF.filter2 <- filter(UF, MAS21, sides=2)
> UF.filter3 <- filter(UF, MAH13, sides=2)
> UF.filter4 <- filter(UF, MAH23, sides=2)
```



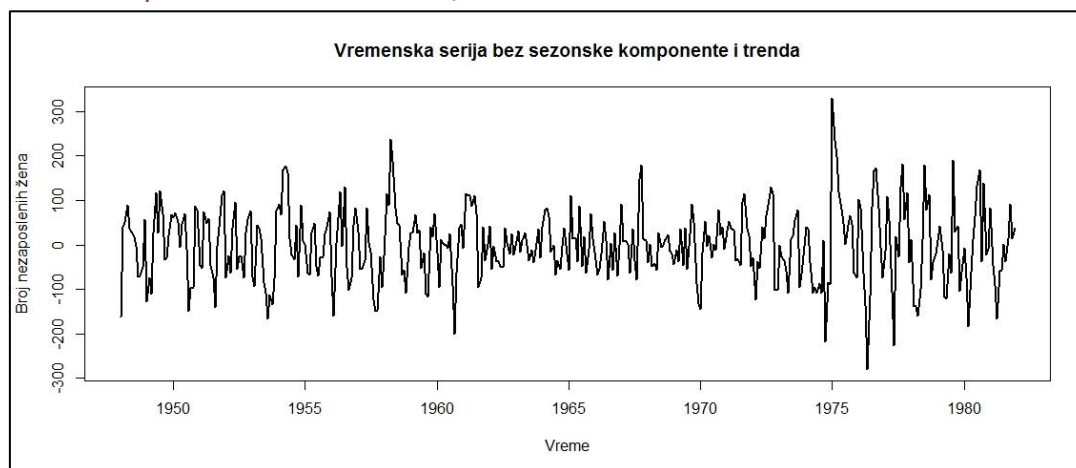
Slika 4.9. - Primena metode izravnavanja pomoću ponderisanih pokretnih proseka

Na prikazanim graficima je plavom bojom iscrtana linija trenda vremenske serije, dok su crvenom bojom iscrtane linije trenda nastale izravnavanjem pomoću skupova pondera S15-MA, S21-MA, H13-MA i H23-MA, redom. Ni jedan od skupova pondera nije deo zadovoljavajuće rezultate, ali se može reći da je liniju trenda najbolje aproksimirao skup pondera H23-MA, jer crvena linija prati pravac plave linije na grafiku koji odgovara ovom skupu pondera.

#### Metoda 4: Jednostavno eksponencijalno izravnavanje

Za primenu metode jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja potrebno je da posmatrana vremenska serija nema trend, ni sezonske ili ciklicne komponente. Dakle, u početnoj vremenskoj seriji potrebno je eliminisati trend i sezonsku komponentu. Pošto posmatranoj vremenskoj seriji odgovara aditivni model, vremenska serija bez sezonske komponente i trenda dobiće se oduzimanjem od vrednosti date vremenske serije izdvojene vrednosti sezonske komponente, tj. *season* i izdvojene vrednosti trenda, tj. *trend*. U narednom kodu tražena serija bez sezonske komponente i trenda biće vremenska serija *vs.new*, a njen grafički prikaz nalazi se na slici 4.10.

```
> vs.new <- vs - season - trend
> plot(vs.new, type="l", lwd=2, xlab="vreme", ylab="Broj
+   nezaposlenih žena", main="Vremenska serija bez sezonske
+   komponente i trenda")
```



Slika 4.10. - Grafički prikaz posmatrane vremenske serije bez sezonske komponente i trenda

Na novoformiranu seriju primenjuje se jednostavno eksponencijalno izravnavanje sa različitim konstantama izravnavanja. Pošto princip određivanja odgovarajuće konstante izravnavanja zahteva komplikovane statističke analize, u nastavku će se koristiti konstante koje pripadaju intervalu (0,0.3), a koje su uzete proizvoljno. Neka su to konstante 0.25, 0.16, 0.08 i 0.02. Za ilustraciju ovog izravnavanja u R-u se koristi funkcija *ses()* iz paketa *forecast*. Njena definicija glasi:

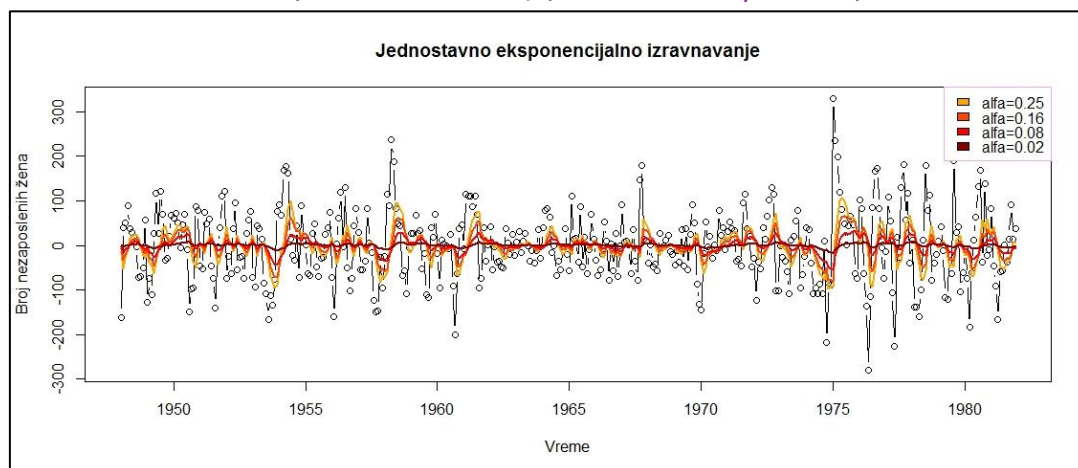
$$ses(x, h = 10, alpha = NULL, initial = c("optimal", "simple"), \dots),$$

gde je *x* označena posmatrana vremenska serija, sa *h* broj perioda koji treba da se prognoziraju, pri čemu je podrazumevana vrednost 10 perioda, sa *alpha* konstanta izravnavanja, koja će u slučaju kad nije definisana, biti prognozirana, a sa *initial* metod selektovanja inicijalnih vrednosti, koji u slučaju "optimal" inicijalizuje vrednosti pomoću parametara izravnavanja. Naredni kod ilustruje postupak izravnavanja vremenske serije *vs.new* i formira grafik ocenjenog trenda.

```

> alfa1 <- 0.25
> alfa2 <- 0.16
> alfa3 <- 0.08
> alfa4 <- 0.02
> vs.jedn.exp1 <- ses(vs.new, h=12, alpha=alfa1,
+   initial="optimal")
> vs.jedn.exp2 <- ses(vs.new, h=12, alpha=alfa2,
+   initial="optimal")
> vs.jedn.exp3 <- ses(vs.new, h=12, alpha=alfa3,
+   initial="optimal")
> vs.jedn.exp4 <- ses(vs.new, h=12, alpha=alfa4,
+   initial="optimal")
> par(mfrow=c(1, 1))
> plot(vs.new, type="b", xlab="Vreme",
+   ylab="Broj nezaposlenih žena",
+   main="Jednostavno eksponencijalno izravnavanje")
> lines(fitted(vs.jedn.exp1), col="plum3", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp2), col="darkorchid", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp3), col="deepskyblue2", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp4), col="deeppink", lwd=2)
> colors <- c("plum3", "darkorchid", "deepskyblue2", "deeppink")
> legend("topright", legend=c("alfa=0.25", "alfa=0.16",
+   "alfa=0.08", "alfa=0.02"), box.col="plum2", fill=colors)

```



**Slika 4.11.** – Primena metode jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja

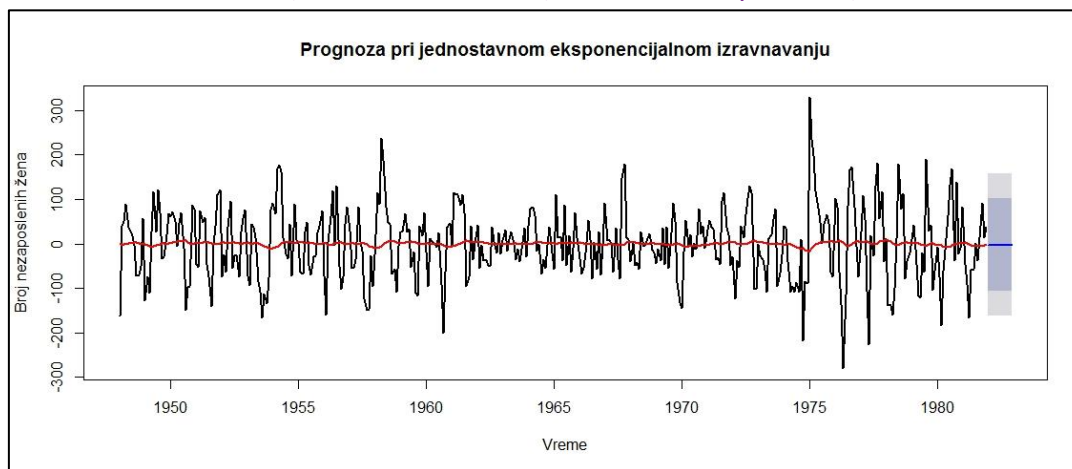
Kao što je rečeno u teorijskom delu o ovoj metodi, najbolje izravnavanje dobijaće se za konstatne izravnavanja koje su blizu 0, pa za konstante koje imaju vrednosti 0.08 i 0.02 izravnavanje će biti najuočljivije. Da bi se dobile vrednosti prognoze za narednu, 1982. godinu, koristiće se upravo konstanta 0.02. Funkcija u R-u koja daje prognozu jeste funkcija *forecast(object)* koja kao argument dobija samo vremensku seriju za koju je potrebno odrediti prognozu. U datom slučaju, taj argument će biti prethodno formirana vremenska serija *vs.jedn.exp4*. Naredni kod daje prognozirane vrednosti koje pripadaju ili 80% intervalu poverenja ili 95% intervalu poverenja.

```
> forecast(vs.jedn.exp4)
```

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Jan 1982	-2.492964	-106.6408	101.6549	-161.7734	156.7874
Feb 1982	-2.492964	-106.6616	101.6757	-161.8052	156.8193
Mar 1982	-2.492964	-106.6825	101.6965	-161.8371	156.8511
Apr 1982	-2.492964	-106.7033	101.7174	-161.8689	156.8830
May 1982	-2.492964	-106.7241	101.7382	-161.9007	156.9148
Jun 1982	-2.492964	-106.7449	101.7590	-161.9326	156.9466
Jul 1982	-2.492964	-106.7657	101.7798	-161.9644	156.9785
Aug 1982	-2.492964	-106.7865	101.8006	-161.9962	157.0103
Sep 1982	-2.492964	-106.8073	101.8214	-162.0280	157.0421
Oct 1982	-2.492964	-106.8281	101.8422	-162.0598	157.0739
Nov 1982	-2.492964	-106.8489	101.8630	-162.0916	157.1057
Dec 1982	-2.492964	-106.8697	101.8838	-162.1234	157.1375

Grafički prikaz prognoze odgovara grafiku predstavljenom na slici 4.12.. Plavom bojom je nacrtana prognoza za 1982. godinu, sa 80% intervalom poverenja, koji je označen tamno plavom bojom, i sa 95% intervalom poverenja, koji je označen svetlo plavom bojom.

```
> plot(vs.new, type="b", xlab="Vreme",
+      ylab="Broj nezaposlenih žena",
+      main="Jednostavno eksponencijalno izravnavanje")
> lines(fitted(vs.jedn.exp1), col="orange", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp2), col="orangered", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp3), col="red", lwd=2)
> lines(fitted(vs.jedn.exp4), col="darkred", lwd=2)
> colors <- c("orange", "orangered", "red", "darkred")
> legend("topright", legend=c("alfa=0.25", "alfa=0.16",
+ "alfa=0.08", "alfa=0.02"), box.col="plum2", fill=colors)
```



Slika 4.12. – Prognoziranje pomoću jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja

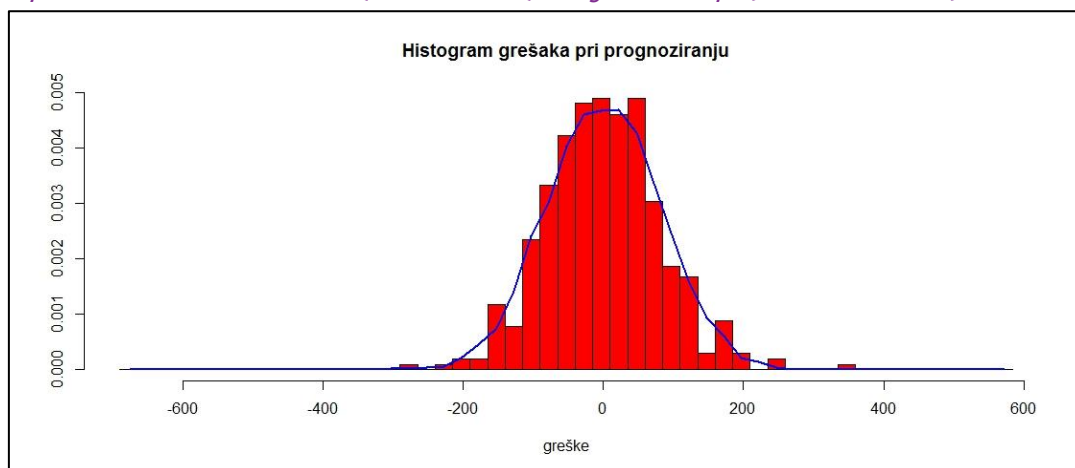
Potrebno je proveriti koliko je dobijena prognoza dobra. To se može uraditi posmatranjem grešaka koje su dobijene formiranjem prognoze. Ukoliko su one normalno raspodeljeni, sa očekivanjem koje ima vrednost 0 i sa konstantnom disperzijom, onda je prognoza zadovoljavajuća. Naredni kod formira histogram dobijenih grešaka pri prognoziranju pomoću jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja i krivu koja odgovara grafiku normalne raspodele, sa očekivanjem koje ima vrednost 0 i sa nekom konstantnom disperzijom.

```
> plotForecastErrors <- function(forecasterrors) {
+   size <- IQR(forecasterrors)/4
+   errorsd <- sd(forecasterrors)
+   errormin <- min(forecasterrors) - errorsd*5
+   errormax <- max(forecasterrors) + errorsd*3
```

```

+ mynorm <- rnorm(10000, mean=0, sd=errorsd)
+ mymin <- min(mynorm)
+ mymax <- max(mynorm)
+ if (mymin < errormin) { errormin <- mymin }
+ if (mymax > errormax) { errormax <- mymax }
+ bins <- seq(errormin, errormax, size)
+ hist(forecasterrors, col="red", freq=FALSE, breaks=bins,
+ + xlab="greške", ylab="", main="Histogram grešaka pri
+ + prognoziranju")
+ myhist <- hist(mynorm, plot=FALSE, breaks=bins)
+ points(myhist$mids, myhist$density, type="l", col="blue",
+ + lwd=2)
+ }
> plotForecastErrors(forecast(vs.jedn.exp4)$residuals)

```



**Slika 4.13.** – Histogram grešaka pri prognoziranju pomoću jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja

Dobijeni crveni histogram grešaka pri prognoziranju, predstavljen na slici **4.13.**, pokazuje da je raspodela grešaka prognoze otprilike centrirana oko nule i manje ili više normalno raspodeljena. Pojavljuju se manja odstupanja od krive koja odgovara gustini normalne raspodele  $N(0, const.)$ , koja je obeležena plavom bojom, pa se može zaključiti da jednostavno eksponencijalno izravnavanje pruža adekvatne prognoze u slučaju posmatranih podataka.

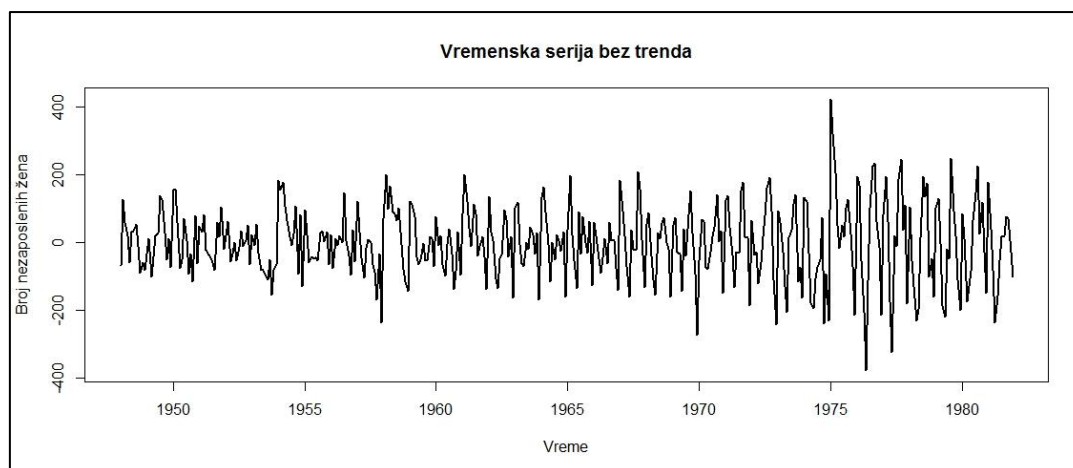
Jednostavno eksponencijalno izravnavanje se može primeniti i ako vremenska serija ima samo sezonsku komponentu sa određenim periodom. Posmatrana serija ima period od 12 meseci, tako da je u nastavku prikazano jednostavno eksponencijalno izravnavanje na datu vremensku seriju u kojoj je uklonjen trend. To će biti serija *vs. notrend*, koja se dobija kada se od vrednosti vremenske serije oduzmu vrednosti izdvojenog trenda. Ta serija ima grafički prikaz dat na slici **4.14.**

```

> vs.notrend <- vs - trend
> plot(vs.notrend, type="l", lwd=2, xlab="Vreme",
+ ylab="Broj nezaposlenih žena",
+ main="Vremenska serija bez trenda")

```





**Slika 4.14.** – Grafički prikaz posmatrane vremenske serije sa eliminisanim trendom

U narednom kodu predstavljeno prognoziranje 12 vrednosti za 1982. godinu po formulama koje su navedene u teorijskom delu o jednostavnom eksponencijalnom izravnavanju. Koristiće se koeficijenti izravnavanja koji imaju vrednosti  $\alpha = 0.02$  i  $\beta = 0.2$ . Početne vrednosti nivoa i sezonske komponente uzimaće, redom, vrednost prvog elementa serije i vrednost prvih 12 vrednosti sezonske komponente.

```
> alpha <- 0.02
> beta <- 0.2
> n <- length(vs.notrend)
> Fo <- rep(NA, n)
> So <- rep(NA, n)
> Fo[13] <- vs.notrend[13]
> So[1:12] <- season[1:12]
> So[13] <- beta*(vs.notrend[13]-Fo[13])+(1-beta)*So[1]
> d <- 12
> for(i in 14:n){
+   Fo[i] <- alpha*(vs.notrend[i]-So[i-d])+(1-alpha)*Fo[i-1]
+   So[i] <- beta*(vs.notrend[i]-Fo[i])+(1-beta)*So[i-d]
+ }
> prog.exp1 <- rep(NA,n)
> for(i in 14:n){
+   prog.exp1[i] <- Fo[i-1]+So[i-d]
+ }
> for(k in 1:12){
+   prog.exp1[n+k] <- Fo[n]+So[(n-d+k)]
+ }
>
> cat("Prognoza narednih 12 meseci: ", prog.exp1[(n+1):(n+12)])
```

```
Prognoza narednih 12 meseci:
130.147 78.68485 -47.72959 -161.7305 -173.5921 -7.067175 45.60747 133.4747
114.7226 21.67126 -28.83393 -167.7194
```

### **Metoda 5:** Dvostruko eksponencijalno izravnavanje

Uz pretpostavku da data vremenska serija sadrži samo trend, a ne i sezonsku komponentu, može se primeniti metod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja i to metod Brown-ov metod izravnavanja. Modifikovana polazna vremenska serija koja nema sezonsku komponentu jeste serija

*deseason*. U R-u se za dvostruko eksponencijalno izravnavanje koristi funkcija *HoltWinters()* iz paketa *stats*. Njena definicija glasi:

```
HoltWinters(x, alpha = NULL, beta = NULL, gamma = NULL, ...),
```

gde je sa *x* označena željena vremenska serija, sa *alpha*, *beta*, *gamma* konstante izravnavanja, koje će u slučaju kad nisu definisane biti prognozirane, dok u slučaju kad su definisane sa FALSE biće isključene iz izravnavanja, tj. definisaće različite tipove eksponencijalnog izravnavanja. Naredni kod ilustruje postupak izravnavanja i formira grafik ocenjenog trenda, kao i primenu ove metode za prognoziranje za 1982. godinu, odnosno za narednih 12 meseci. U funkciji *HoltWinters()* vrednost konstanti *beta* i *gamma* je FALSE, što znači da se te konstante neće koristiti pri izravnavanju, jer je u pitanju Brown-ov metod izravnavanja. Konstanta *alpha* biće ocenjena.

```
> vs.Brown <- Holtwinters(deseason, beta=FALSE, gamma=FALSE)
> vs.Brown
```

```
Holt-winters exponential smoothing without trend and without seasonal component.
```

```
Call:
```

```
Holtwinters(x = deseason, beta = FALSE, gamma = FALSE)
```

```
Smoothing parameters:
```

```
alpha: 0.9392262
```

```
beta : FALSE
```

```
gamma: FALSE
```

```
Coefficients:
```

```
[,1]
```

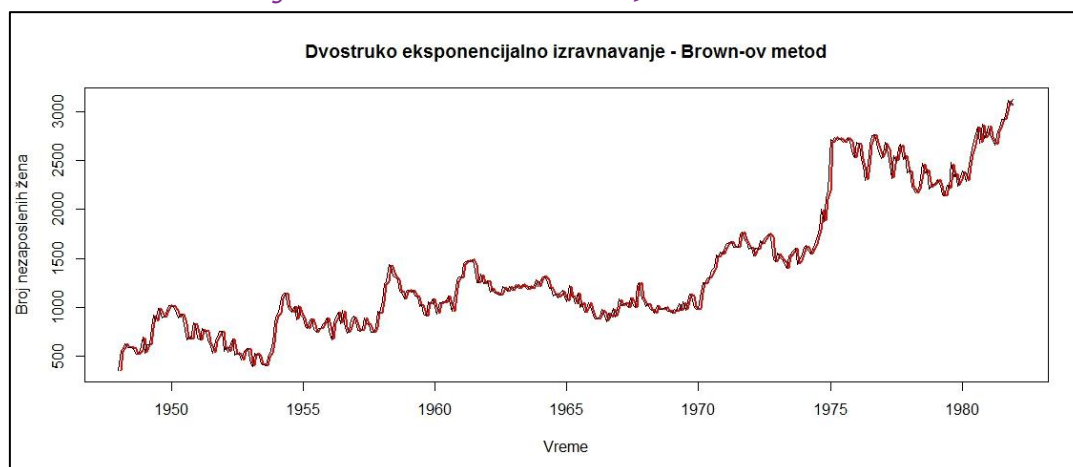
```
a 3126.554
```

Dobijeno je da je konstanta izravnavanja *alpha* jednaka 0.9392262. U narednom kodu biće izračunata greška pri primeni Brown-ove metode izravnavanja, a nakon toga prikazan grafik izravnjane vremenske serije.

```
> vs.Brown$SSE
```

```
[1] 3204045
```

```
> plot(vs.Brown, type="l", lwd=2, xlab="Vreme", ylab="Broj nezaposlenih žena",
+       main="Dvostruko eksponencijalno izravnavanje - Brown-ov metod")
```



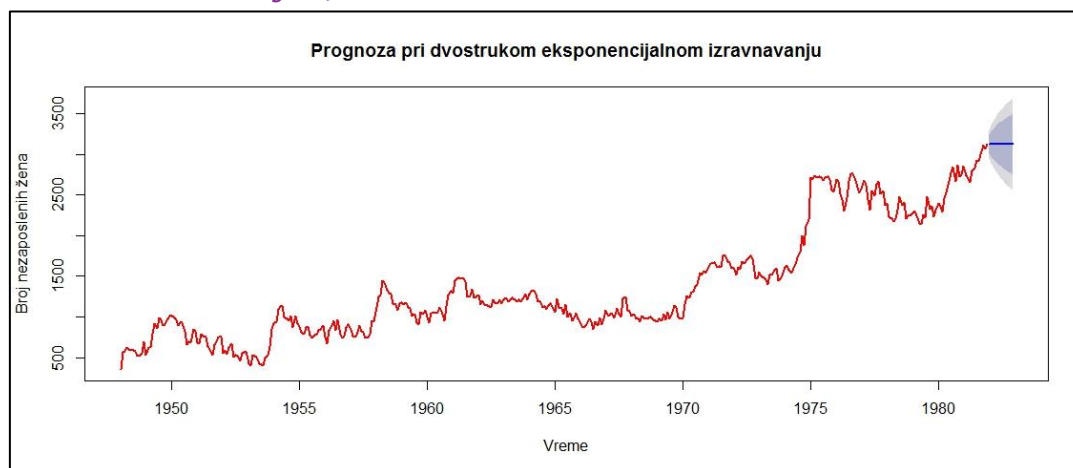
**Slika 4.15.** – Primena Brown-ove metode izravnavanja

Na slici **4.15.** linija izravnjenog trenda predstavljena je crvenom bojom, dok je originalna linija koja prati vrednosti serija označena crnom bojom. Sa grafika se vidi da se linija izravnjenja dosta poklapa sa posmatranim vrednostima, što je zadovoljavajuće. Dakle, prognozirane vrednosti za period od 1948. do 1981. godine, dobijene dvostrukim eksponencijalnim izravnavanjem davaće dobre prognoze za naredne periode. Ostaje da se odredi i prognoza za narednih 12 meseci, tj. za 1982. godinu.

```
> forecast.HoltWinters(vs.Brown, h=12)
```

	Point	Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Jan 1982		3126.554	3013.088	3240.019	2953.023	3300.084
Feb 1982		3126.554	2970.889	3282.218	2888.485	3364.622
Mar 1982		3126.554	2937.904	3315.203	2838.039	3415.068
Apr 1982		3126.554	2909.884	3343.223	2795.186	3457.921
May 1982		3126.554	2885.094	3368.014	2757.273	3495.835
Jun 1982		3126.554	2862.622	3390.485	2722.905	3530.202
Jul 1982		3126.554	2841.919	3411.189	2691.242	3561.865
Aug 1982		3126.554	2822.622	3430.485	2661.731	3591.376
Sep 1982		3126.554	2804.480	3448.627	2633.985	3619.123
Oct 1982		3126.554	2787.307	3465.801	2607.720	3645.387
Nov 1982		3126.554	2770.962	3482.145	2582.723	3670.384
Dec 1982		3126.554	2755.336	3497.771	2558.825	3694.282

```
> plot.forecast(forecast.HoltWinters(vs.Brown, h=12), type="l",
+ lwd=2, col="red", xlab="Vreme", ylab="Broj nezaposlenih žena",
+ main="Prognoza pri dvostrukom eksponencijalnom
+ izravnavanju")
```

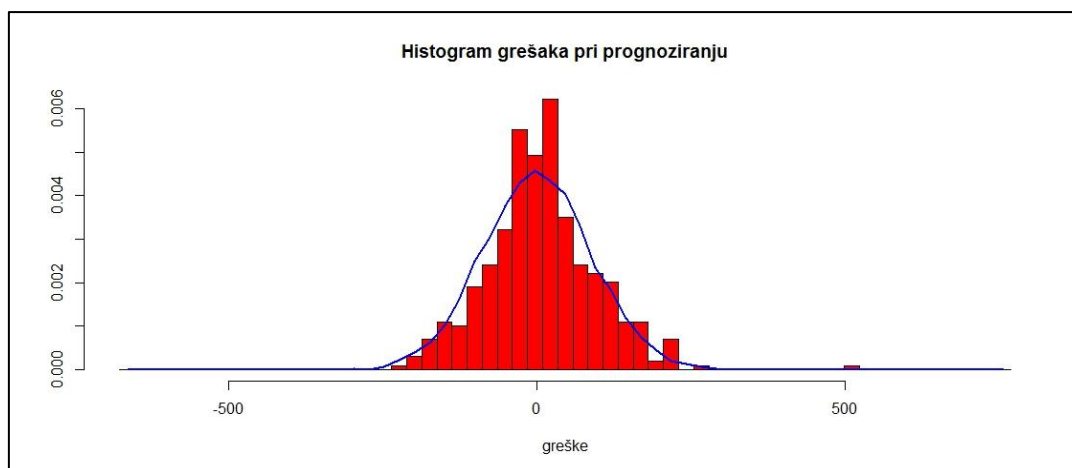


**Slika 4.16.** - Prognoziranje pomoću dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja

Na slici **4.16.** može se uočiti da je prognoza za narednih 12 meseci iscrtana plavom linijom sa 80% intervalom poverenja, koji je označen tamno plavom bojom, i sa 95% intervalom poverenja, koji je označen svetlo plavom bojom.

Pomoću funkcije `plotForecastErrors()` koja je definisana kod jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja, a korišćena je za proveru adekvatnosti dobijene prognoze, može se proveriti i adekvatnost prognoze dobijene pomoću dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja. Naredni kod formira histogram grešaka dobijene prognoze.

```
> plotForecastErrors(forecast.HoltWinters(vs.Brown,
+ h=12)$residuals)
```



**Slika 4.17.** – Histogram grešaka pri prognoziranju pomoću Brown-ove metode izravnavanja

Formirani crveni histogram na slici **4.17.** prikazuje da je raspodela grešaka dobijenih pri prognozi pomoću dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja približno normalna raspodela sa konstantnom disperzijom i očekivanjem 0. Na osnovu ovoga može se zaključiti da dvostruko eksponencijalno izravnavanje daje pogodne prognoze.

Drugi metod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja jeste Holt-Winters-ov metod izravnavanja. Za razliku od Brown-ovog metoda pri ovom izravnavanju će se koristiti dve konstante izravnavanja. Koristiće se modifikovana polazna vremenska serija koja nema sezonsku komponentu, tj. serija *deseason*. U R-u se za Holt-Winters-ov metod izravnavanja koristi takođe funkcija `HoltWinters()`. Naredni kod ilustruje postupak izravnavanja i formira grafik ocenjenog trenda, kao i primenu ove metode za prognoziranje za 1982. godinu, odnosno za narednih 12 meseci. U funkciji `HoltWinters()` vrednost konstante *gamma* je `FALSE`, što znači da se ta konstanta neće koristiti pri izravnavanju, jer je u pitanju Brown-ov metod izravnavanja. Konstante *alpha* i *beta* biće ocenjene.

```
> vs.Holtwinters <- Holtwinters(deseason, gamma=FALSE)
> vs.Holtwinters
```

Holt-winters exponential smoothing with trend and without seasonal component.

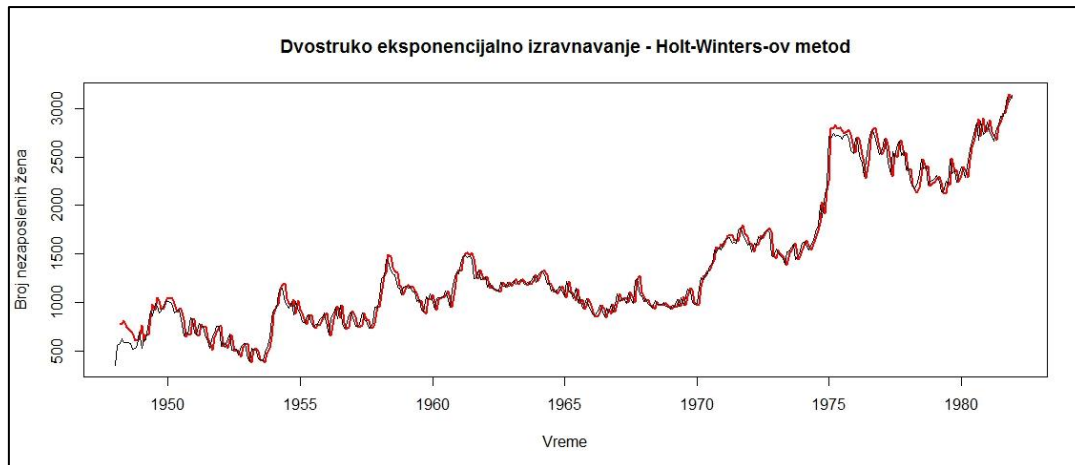
```
Call:
Holtwinters(x = deseason, gamma = FALSE)
```

```
Smoothing parameters:
alpha: 0.940785
beta : 0.1171668
gamma: FALSE
```

```
Coefficients:
      [,1]
a 3128.64128
b  34.04883
```

Dobijeno je da su konstante izravnavanja *alpha* i *beta* jednake, redom, 0.940785 i 0.1171668.

```
> plot(vs.Holtwinters, type="l", lwd=2,
+      xlab="Vreme", ylab="Broj nezaposlenih žena",
+      main="Dvostruko eksponencijalno izravnavanje - Holt-Winters-
+      ov metod")
```



**Slika 4.18.** - Primena Holt-Winters-ove metode izravnavanja

Linija izravnjenog trenda na grafiku prikazanom na slici **4.18.** predstavljena je crvenom bojom, dok je originalna linija koja prati vrednosti serija označena crnom bojom. Sa grafika se vidi da se linija izravnjenja dosta poklapa sa posmatranim vrednostima, što je zadovoljavajuće. Dakle, prognozirane vrednosti za period od 1948. do 1981. godine, dobijene dvostrukim eksponencijalnim izravnavanjem davaće dobre prognoze za naredne periode. Vrednost greške pri primeni Holt-Winters-ove metode izravnavanja dobijena je kao rezultat izvršavanja sledećeg koda.

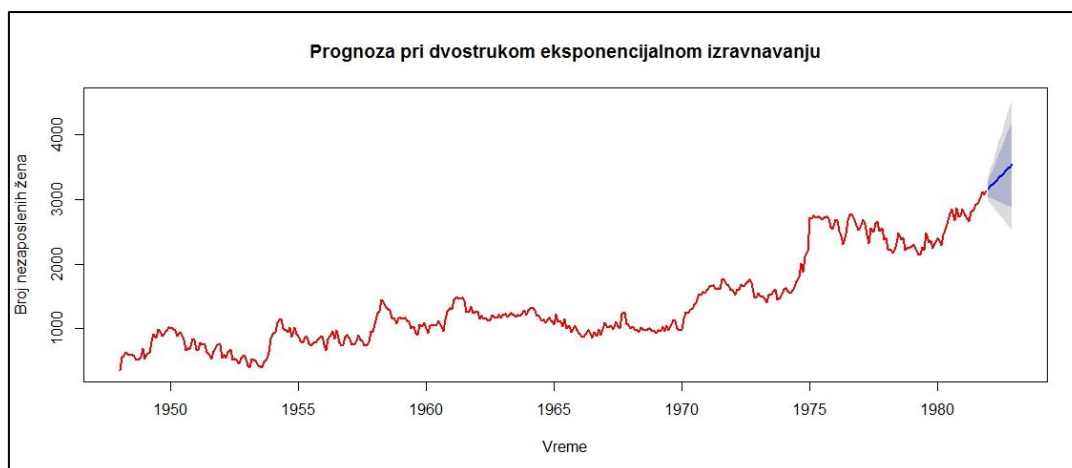
```
> vs.Holtwinters$SSE
[1] 3556970
```

Ostaje da se odredi i prognoza za narednih 12 meseci, tj. za 1982. godinu.

```
> forecast.Holtwinters(vs.Holtwinters, h=12)
```

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Jan 1982	3162.690	3042.697	3282.684	2979.176	3346.204
Feb 1982	3196.739	3022.660	3370.818	2930.509	3462.969
Mar 1982	3230.788	3007.809	3453.766	2889.772	3571.804
Apr 1982	3264.837	2994.658	3535.015	2851.634	3678.039
May 1982	3298.885	2981.893	3615.878	2814.087	3783.684
Jun 1982	3332.934	2968.883	3696.985	2776.166	3889.702
Jul 1982	3366.983	2955.288	3778.678	2737.350	3996.616
Aug 1982	3401.032	2940.909	3861.154	2697.335	4104.728
Sep 1982	3435.081	2925.627	3944.534	2655.938	4214.223
Oct 1982	3469.130	2909.367	4028.892	2613.047	4325.212
Nov 1982	3503.178	2892.085	4114.272	2568.592	4437.765
Dec 1982	3537.227	2873.754	4200.700	2522.533	4551.922

```
> plot.forecast(forecast.Holtwinters(vs.Holtwinters, h=12),
+ type="l", lwd=2, col="red", xlab="Vreme", ylab="Broj
+ nezaposlenih žena", main="Prognoza pri dvostrukom
+ eksponencijalnom izravnavanju")
```

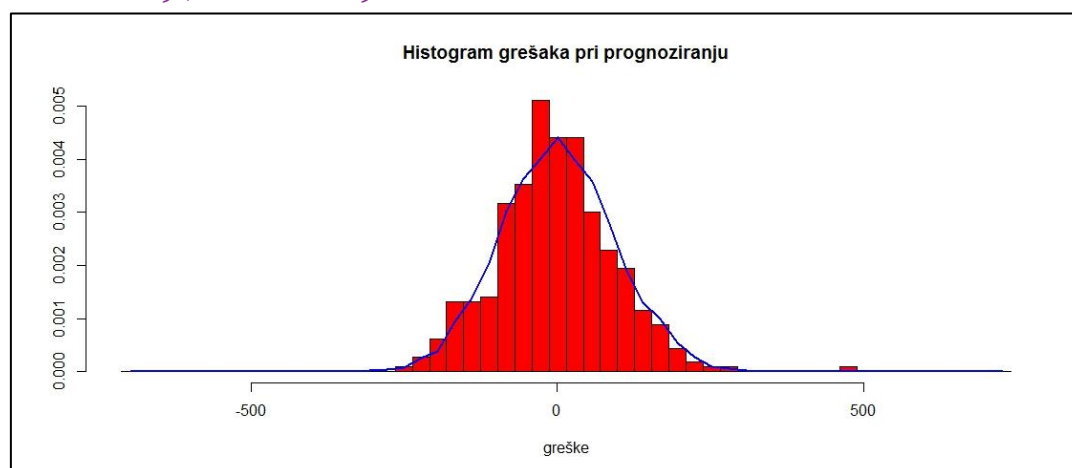


**Slika 4.19.** - Prognoziranje pomoću dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja

Prognoza za narednih 12 meseci na slici **4.19.** iscrtana je plavom linijom sa 80% intervalom poverenja, koji je označen tamno plavom bojom, i sa 95% intervalom poverenja, koji je označen svetlo plavom bojom. Za razliku od prognoze koja je dobijena za Brown-ov metod izravnavanja, ova prognoza prati liniju ocenjenog trenda, tako da daje pouzdanije rezultate.

Korišćenjem funkcije `plotForecastErrors()` koja je definisana kod primene metode jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja može se dobiti i histogram grešaka koje su dobijene primenom Holt-Winterove metode izravnavanja. Izgled dobijenog crvenog histograma na slici **4.20.** prati oblik plave linije koja odgovara gustini normalne  $N(0, const.)$  raspodele, pa se može zaključiti da ovaj metoda izravnavanja u ovom slučaju daje zadovoljavajuće prognoze.

```
> plotForecastErrors(forecast.Holtwinters(vs.Holtwinters,
+ h=12)$residuals)
```



**Slika 4.20.** - Histogram grešaka pri prognoziranju pomoću Holt-Winters-ove metode izravnavanja

### **Metoda 6:** Trostruko ekponencijalno izravnavanje

Trostruko eksponencijalno izravnavanje se koristi kod vremenskih serija koje imaju prisutnu i sezonsku komponentu i trend. Dakle data vremenska serija može se izravnavati na ovaj način, jer ona sadrži i trend i sezonsku komponentu. Pošto posmatrana serija odgovara jednom aditivnom modelu

vremenske serije, onda će se u nastavku koristiti Holt-Winters-ovo trostruko eksponencijalno izravnavanje za aditivnu vremensku seriju.

Jedan od načina za primenu ovog izravnavanja jeste primenom funkcije `HoltWinters()`, koja je korišćna i kod jednostavnog i kod dvostrukog eksponencijalnog izravnavanja, ali s tim što ni jedna od konstanti izravnavanja neće biti definisana sa `FALSE`. Dakle, ocenjivaće se sve tri konstante izravnavanja, *alpha*, *beta* i *gamma*. Koristiće se vremenska serija *vs* koja je definisana na samom početku analize.

Naredni kod ilustruje postupak izravnavanja i formira grafik ocenjenog trenda, kao i primenu ove metode za prognoziranje za 1982. godinu, odnosno za narednih 12 meseci. Koristiće se vremenska serija *vs* koja je definisana na početku analize posmatrane vremenske serije.

```
> vs.Holtwinters3 <- Holtwinters(vs)
> vs.Holtwinters3
```

Holt-winters exponential smoothing with trend and additive seasonal component.

```
Call:
Holtwinters(x = vs)

Smoothing parameters:
alpha: 0.8676926
beta : 0.01118778
gamma: 1
```

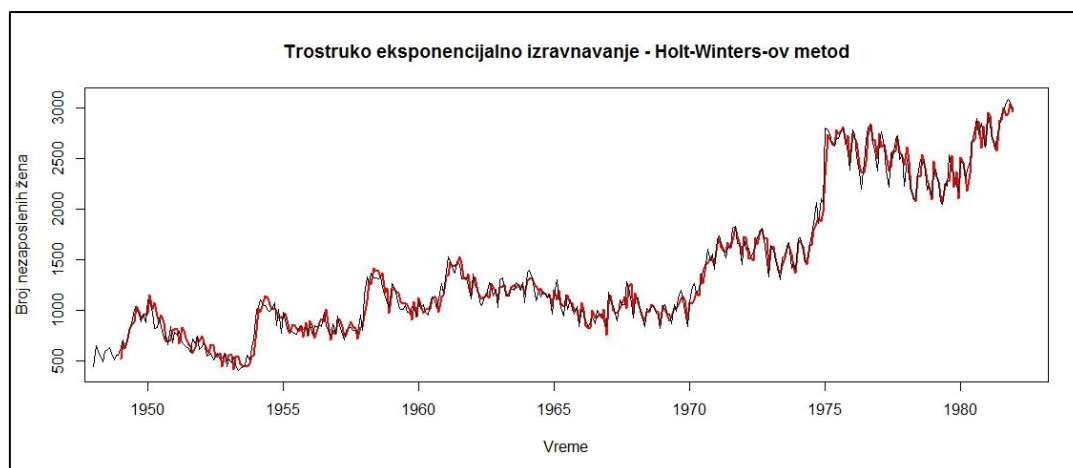
Coefficients:

```
      [,1]
a 3193.86374
b   12.70429
s1 124.99511
s2  82.78113
s3 -32.15480
s4 -131.80903
s5 -140.51452
s6  20.80905
s7  60.86655
s8 112.92477
s9  74.93866
s10 -33.89272
s11 -95.71828
s12 -202.86374
```

Ocene nepoznatih konstanti izravnavanja *alpha*, *beta* i *gamma* su, redom, 0.8676926, 0.01118778 i 1. Pošto su vrednosti konstanti *alpha* i *gamma* blizu 1, to znači da su te konstante zasnovane na skorašnjim vrednostima vremenske serije, dok je vrednost konstante *beta* zasnovana i na starijim i novijim vrednostima vremenske serije, jer je njena vrednost bliska nuli. U narednom kodu biće izračunata greška pri primeni trostrukog eksponencijalnog izravnavanja, a nakon toga prikazan grafik izravnjane vremenske serije.

```
> vs.Holtwinters3$SSE
[1] 3113910
```

```
> plot(vs.Holtwinters3, type="l", lwd=2, xlab="Vreme", ylab="Broj
+ nezaposlenih žena", main="Trostruko eksponencijalno
+ izravnavanje - Holt-Winters-ov metod")
```



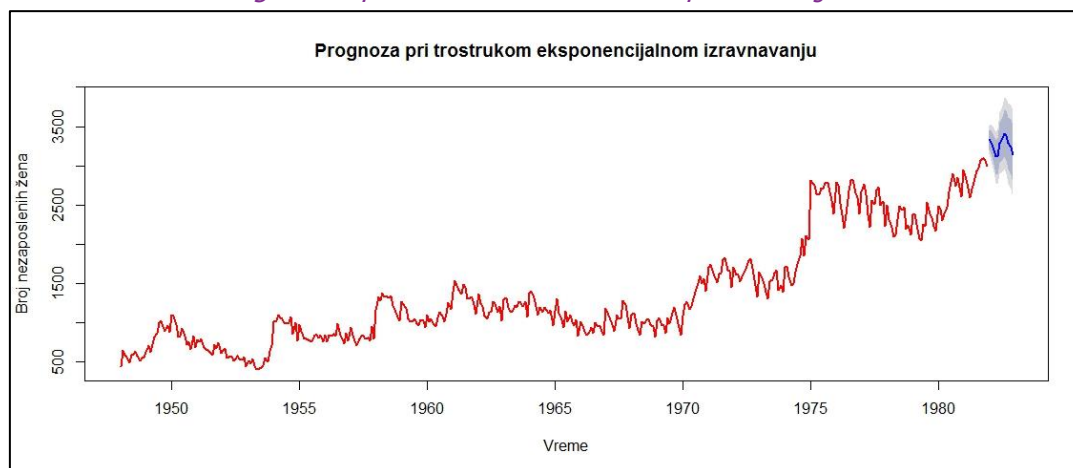
**Slika 4.21.** – Primena trostrukog eksponencijalnog izravnavanja

Linija izravnjenog trenda na dobijenom grafiku na slici **4.21.** predstavljena je crvenom bojom, dok je originalna linija koja prati vrednosti serija označena crnom bojom. Sa grafika se vidi da se linija izravnjenja dosta poklapa sa posmatranim vrednostima, tj. vidi se da je ovaj metod uspešan u predviđanju sezonskih skokova, što je zadovoljavajuće. Dakle, prognozirane vrednosti za period od 1948. do 1981. godine, dobijene dvostrukim eksponencijalnim izravnavanjem davaće dobre prognoze za naredne periode. Ostaje da se odredi i prognoza za narednih 12 meseci, tj. za 1982. godinu.

> `forecast.Holtwinters(vs.Holtwinters3, h=12)`

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Jan 1982	3331.563	3217.844	3445.282	3157.645	3505.482
Feb 1982	3302.053	3150.767	3453.340	3070.681	3533.426
Mar 1982	3199.822	3017.985	3381.659	2921.726	3477.917
Apr 1982	3112.872	2904.388	3321.356	2794.023	3431.721
May 1982	3116.871	2884.292	3349.450	2761.172	3472.569
Jun 1982	3290.899	3036.047	3545.750	2901.137	3680.660
Jul 1982	3343.660	3067.913	3619.408	2921.941	3765.379
Aug 1982	3408.423	3112.859	3703.986	2956.398	3860.448
Sep 1982	3383.141	3068.633	3697.649	2902.143	3864.139
Oct 1982	3287.014	2954.281	3619.746	2778.144	3795.884
Nov 1982	3237.893	2887.539	3588.246	2702.073	3773.713
Dec 1982	3143.451	2775.990	3510.913	2581.467	3705.436

> `plot.forecast(forecast.Holtwinters(vs.Holtwinters3, h=12),`  
 + `type="l", lwd=2, xlab="Vreme", ylab="Broj nezaposlenih žena",`  
 + `main="Prognoza pri trostrukom eksponencijalnom izravnavanju")`

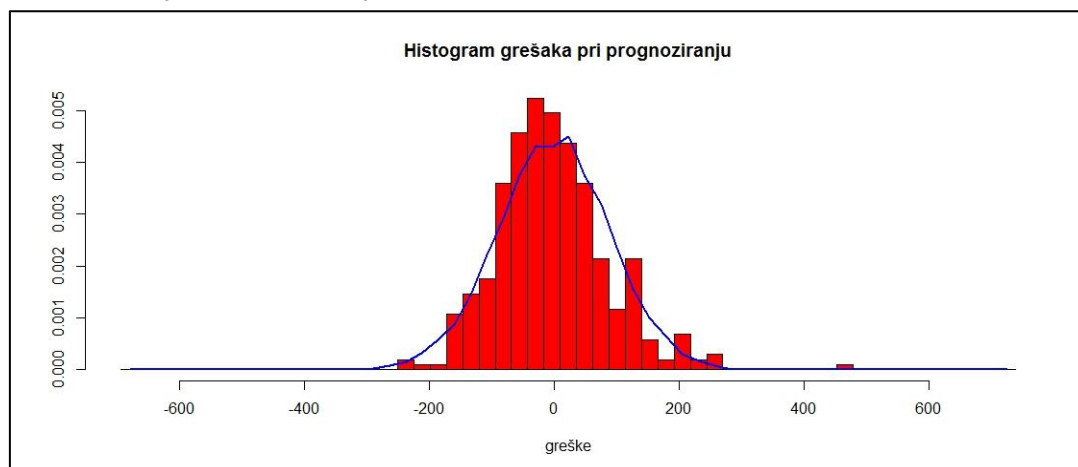


**Slika 4.22.** - Prognoziranje pomoću trostrukog eksponencijalnog izravnavanja



Prognoza za narednih 12 meseci iscrtana je plavom linijom na slici 4.22., dok je 80% interval poverenja označen tamno plavom bojom, a 95% interval poverenja svetlo plavom bojom.

```
> plotForecastErrors(forecast.HoltWinters(vs.HoltWinters3,
+ h=12)$residuals)
```



Slika 4.23. - Histogram grešaka pri prognoziranju pomoću trostrukog eksponencijalnog izravnavanja

Korišćenjem funkcije `plotForecastErrors()` koja je definisana kod primene metode jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja može se dobiti i histogram grešaka koje su dobijene primenom Holt-Winterove metode izravnavanja. Izgled dobijenog crvenog histograma na nekim mestima odstupa od oblika plave linije koja odgovara gustini normalne  $N(0, const.)$  raspodele, pa se može zaključiti da ovaj metoda izravnavanja u ovom slučaju ne daje baš povoljne prognoze.

U narednom kodu predstavljeno prognoziranje 12 vrednosti za 1982. godinu po formulama koje su navedene u teorijskom delu o trostrukom eksponencijalnom izravnavanju. Koristiće se koeficijenti izravnavanja koji imaju vrednosti  $\alpha = 0.868$ ,  $\beta = 0.011$  i  $\gamma = 1$ . Početne vrednosti nivoa, trenda i sezonske komponente uzimaće, redom, vrednost prvog elementa serije, prvu vrednost trenda i vrednost prvih 12 vrednosti sezonske komponente.

```
> alfa <- 0.868
> gama <- 0.011
> delta <- 1
> n <- length(vs)
> Fo <- rep(NA, n)
> fo <- rep(NA, n)
> So <- rep(NA, n)
> Fo[13] <- vs[1]
> fo[13] <- trend[1]
> So[1:12] <- season[1:12]
> So[13] <- delta*(vs[13]-Fo[13])+(1-delta)*So[1]
> d <- 12
> for(i in 14:n){
+   Fo[i] <- alfa*(vs[i]-So[i-d])+(1-alfa)*(Fo[i-1]+fo[i-1])
+   fo[i] <- gama*(Fo[i]-Fo[i-1])+(1-gama)*fo[i-1]
+   So[i] <- delta*(vs[i]-Fo[i])+(1-delta)*So[i-d]
+ }
> prog.exp2 <- rep(NA, n)
> for(i in 14:n){
+   prog.exp2[i] <- Fo[i-1]+fo[i-1]+So[i-d]
+ }
> for(k in 1:12){
+   prog.exp2[n+k] <- Fo[n]+k*fo[n]+So[(n-d+k)]
```

```
+ }  
>  
> cat("Prognoza narednih 12 meseci (vrednosti): ",  
+     prog.exp2[(n+1):(n+12)])  
Prognoza narednih 12 meseci (vrednosti): 3357.868 3352.843 3275.109 3209.429  
3225.404 3397.502 3435.647 3480.748 3440.235 3340.114 3300.488 3224.741
```

Kao i slučaju prognoziranja pomoću funkcije *HoltWinters()*, pri ovoj prognozi dobijene su vrednosti koje osciliraju oko broja 3500 i koje pripadaju pomenutim intervalima poverenja, sa 80% i 95%.

## 5. ZAKLJUČAK

Izravnavanje vremenskih serija omogućava formiranje prognoza budućih vrednosti nekih pojava, na osnovu poznavanja prošlih prikupljenih podataka o tim pojavama, a koje zavise od vremena. Ovaj rad dao je objašnjenje o samim postupcima izravnavanja vremenskih serija, kao i njihova primena na konkretnim podacima, koji su prikupljeni u određenom periodu.

Konkretno, pri korišćenju metoda izravnavanja pomoću pokretnih proseka, prikazano je na koji način se može izravnati postojeći tok vremenske serije u zavisnosti od tipova pondera koji se koriste. Uočeno je da pri povećanju broja pondera dobijena izravnana linija ima sve manje izraženih fluktuacija, tj. dolazi do gubljenja nepravilnosti i velikih promena vrednosti. Ono što se takođe može primetiti jeste to da metode izravnavanja pomoću simetričnih i jednostavnih pokretnih proseka imaju veći stepen izravnavanja od metode izravnavanja pomoću ponderisanih pokretnih proseka.

Pri korišćenju metoda eksponencijalnog izravnavanja, pored izravnavanja vremenske serije, izvršeno je i prognoziranje vrednosti za jednu kalendarsku godinu. Određene su vrednosti vremenske serije za 1982. godinu na osnovu poznavanja vrednosti serije u periodu od 1948. do 1981. godine.

Kod jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja korišćene su konstante izravnavanja koje imaju vrednosti 0.02, 0.08, 0.16 i 0.25. Najbolje izravnavanje zabeleženo je za konstante koje imaju vrednosti 0.02 i 0.08, što je bilo očekivano, na osnovu samog definisanja metode jednostavnog eksponencijalnog izravnavanja. Za konstantu izravnavanja koja ima vrednost 0.02 izvršena je prognoza vrednosti za 1982. godinu, tj. za narednih 12 meseci. Dobijene vrednosti pratile su izravnjanu liniju trenda koja je dobijena pri izravnavanju pomoću pomenute konstante. Analizom grešaka prognoze utvrđeno je da je prognoza dobijena na ovaj način zadovoljavajuća. Zbog prisutne dekompozicije vremenske serije pre primene ove metode, postupak izravnavanja posmatrane vremenske serije je ponovljen pomoću drugih metoda.

Dvostruko eksponencijalno izravnavanje izvršavano je pomoću dve metode – Brown-ove metode i Holt-Winters-ova metoda izravnavanja. Konstante izravnavanja su ocenjene primenom funkcija iz odgovarajućih paketa u okviru programskog jezika R. Dobijene izravnane linije prate postojeću liniju toka vremenske serije, što je za dalje prognoziranje bilo poželjno. Određene su prognoze za 1982. godinu primenom obe metode. Manje greške pri prognozi dala je Holt-Winters-ova metoda izravnavanja, upravo zbog manje modifikacije početne serije. Takođe, izračunate su i greške primene obe metode, tj. vrednosti sume kvadrata grešaka koje su dobijene za svaku vrednost. Dobijeno je da Holt-Winters-ova metoda ima veću grešku primene metode od Brown-ove metode.

Na kraju je primenjeno trostruko eksponencijalno izravnavanje na polaznoj, nemodifikovanoj, vremenskoj seriji. Ova metoda imala je najmanju grešku primene metode, u odnosu na prethodne metode eksponencijalnog izravnavanja. Međutim, pri prognoziranju vrednosti za 1982. godinu, greške nastale pri računanju prognoze pokazivale su malo odstupanje od normalne raspodele, što je dovelo do zaključka da dobijene prognoze možda i nisu toliko zadovoljavajuće.

Ovaj rad imao je za cilj da pokaže ulogu izravnavanja vremenskih serija pri prognoziranju budućih vrednosti. Kao i sama analiza vremenskih serija, i postupci izravnavanja nose sa sobom određeni rizik pri prihvatanju njihovih rezultata u donošenju odluka. Ono što je prednost primene postupaka izravnavanja jeste svakako bolje razumevanje prirode posmatranih podataka. Potrebno je dobro analizirati i proučavati željene podatke, kako bi se donela ispravna odluka o tome koje metode

izravnavanja bi davale pouzdanije rezultate. Svakako, izravnavanje vremenskih serija nije tako jednostavan proces. Potrebno je imati veliko iskustvo i potrebnu intuiciju kako bi se dobili zadovoljavajući željeni odgovori.

Ono što je svakako najlepša, i ujedno najvažnija, osobina samog procesa izravnavanja vremenskih serija jeste to da ono dovodi do boljeg shvatanja prošlosti, koja igra bitnu ulogu u donošenju prognoza. Vreme je relativno, to je tačno, ali je ono neophodno da bi se bolje razumeli dalji tokovi događaja.

“Budućnost pripada onima koji se najdalje i najduže sećaju prošlosti”, rekao je Fridih Niče. Ja bih za kraj konstatovala da izravnavanje vremenske serije može da se primeni i u životu čoveka. Svaki čovek ima određenu prošlost kojom nije zadovoljan, koju bi da izbriše, zaboravi. Ono što mu može pomoći da svoju budućnost učini lepšom jeste upravo to da zamisli svoju lepšu prošlost, da “izravna” sve one nepravilnosti koje mu kvare postojeću prošlost, i da poveruje u nju. Takve misli i sećanja pomoći će mu da stvori bolju budućnost, budućnost kakvu želi.

## LITERATURA

- [1] Pavle Mladenović: *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd 2008.
- [2] Zlatko J. Kovačić: *Analiza vremenskih serija*, Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1995.
- [3] Zorica Mladenović, Aleksandra Nojković: *Primenjena analiza vremenskih serija*, Centar za izdavačku delatnost ekonomskog fakulteta u Beogradu, 2012.
- [4] Everrete S. Gardner, Jr.: *Exponential smoothing: The state of the art – Part II*, University of Houston, 2005.
- [5] James D. Hamilton: *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [6] Robert H. Shumway, David S. Stoffer: *Time Series Analysis and Its Applications*, Department of Statistics, University of California, 2011.
- [7] Information paper: *An Introductory Course on Time Series Analysis – Electronic Delivery*, Australian Bureau of Statistics, 2005.
- [8] Velleman, P.F., Hoaglin, D.C.: *Applications, Basics, and Computing of Exploratory Data Analysis*, Boston, Mass, Duxbury
- [9] [http://www.cengage.com/resource\\_uploads/downloads/0840062389\\_347257.pdf](http://www.cengage.com/resource_uploads/downloads/0840062389_347257.pdf)
- [10] <http://a-little-book-of-r-for-time-series.readthedocs.org/en/latest/src/timeseries.html>
- [11] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc4.htm>
- [12] <https://datamarket.com/data/>