Елементарна теорија множина

По предавању
Dr. JОВАНА КАРАМАТЕ

УДРУЖЕЊЕ СТУДЕНАТА МАТЕМАТИКЕ
— БЕОГРАД 1935. —

ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРИЈА МНОЖИНА

I ОПШТИ ДЕО

§ 1 Кратак увод у теорију множина. - Гоњен доказима извесних ставова из теорије трансцендентних бројева, а вероватно и другим идејама на која је наишао у својој пракси, крајем 19 века халешки математичар Георг Кантор поставља основу једне нове математичке дисциплине, која се убрзо развија у "теорију множина или скупова", и постаје основ целокупне математике.

И ако математичка анализа оперише на сваком кораку са појмом бескрајности, све до Кантора, па и данас тај је појам стварао код нас претставу о нечем несвршеном или некој величини која се ни на какав начин не да упоређивати: једном речи био је, као што је и сам Гаус говорио, само „façon de parler".

Канторова је заслуга у томе што је теоријом множина омогућио да се бар са извесног гледишта добије јаснија претстава о бескрајном, и што је штавише, створио математичку могућност да се са тим појмом оперише, апстрактно, али ипак потпуно прецизно. Не узевши у обзир њене примене, теорија множина, већ само по овом свом задатку заузима угледно место у апстрактној математици.

§ 2 Дефиниција множине. Примери.- Ако извесну количину објеката посматрамо као целину, онда се таква целина назива скупом објеката, а појединиј објекти тог скупа називају се његовим елементима. Да би овај скуп претстављао једну множину у математичком смислу, треба да има једну једину особину, тј. да нам је по његовом саставу дата могућност да распознамо да ли један произвољно изабран елеменат припада или не припада томе скупу. При томе је важно напоменути да врста самих објеката при дефиницији множине не игра никакву улогу.

Тако је шума множина дрвета, стадо множина оваца, варош множина кућа, народ множина људи, књига множина речи, права линија множина тачака итд. Множине можемо чисто апстрактно градити и од самих појмова.

Специјалне врсте множина које у математици

играју главну улогу су множине бројева и тачака.

§ 3 Коначне и бесконачне множине. Једна је множина коначна, ако садржи коначан број елемената. Шума, стадо, варош, народ, књига и други примери су за такве множине. Ако уочимо све целе позитивне бројеве мање од М, они, посматрани као целина претстављају једну коначну множину. Коначним се множинама овде нећемо бавити, јер је за саму теорију множина баш и карактеристично то што се бави бескрајним множинама и покушава да за њих створи законе; док коначне множине спадају више у предмет комбинаторике.

Бескрајна је множина она која садржи бесконачно много елемената. Најбољи су примери за такве множине, множина свих бројева, свих рационалних бројева, свих алгебарских бројева, па најзад и свих реалних бројева.

Према Канторовом аксиому који каже да су број и тачка два еквивалентна појма, јер свакој броју одговара по једна тачка и свакој тачки по један број, у примере за бескрајне множине можемо уврстити и множину свих тачака једне праве линије или једног њеног сегмента, као и множине тачака са нарочитом карактеристиком.

§ 4 Еквиваленција множина. Уочимо две коначне множине A и B да бисмо видели која множина садржи више елемената, можемо елементе сваке множине пребројати и мерне бројеве упоредити. Ми можемо међутим поступити и на други начин; узмимо најпре један елеменат множине A и ставимо му насупрот један елеменат множине B, затим уочимо један други елеменат множине A и ставимо му насупрот неки други елеменат множине B, и тако продужимо све док се елементи једне од множина не исцрпе. Она множина чији се елементи први утроше несумњиво је мања. Ако се деси да се елементи обе множине утроше исто - времено каже се да су те две множине еквива - лентне.

Тако можемо еквиваленцију множина дефини - сати на следећи начин. Две су множине A и B еквивалентне, ако између њиних елемената можемо успоставити биунивоку кореспонденцију, тј. ако свакоме елементу множине A одговара само један елеменат множине B а у исто време и обр-

нуто. Ако су множине A и B еквивалентне пишемо $A \equiv B$. Ако је множина A већа, пишемо $A \succ B$, у противном се пише $A \prec B$.*)

Множина кућа и кућних бројева је леп пример за еквиваленцију две коначне множине. Ну за коначне множине је еквиваленцију или нееквиваленцију могућно испитати и на први начин изнесен у овом параграфу. За две беокрајне множине то је апсолутно немогуће. Ту је једино могућ начин кореспондирања. Код коначних множина све се то своди на појам броја и то ординалног или редног броја. Код бесконачних множина, на које се може применити једино метода кореспондирања, а код којих је такође могућ и случај нееквиваленције, овај поступак доводи до појма кардиналног броја о чему ћемо говорити доцније.

Уочимо у овом члану још само један важан моменат. Из тога што у коначности две еквивалентне множине морају имати исти број елемената, излази да једна коначна множина не може никад

*) Знак $\succ$ и знак $\subset$ нису исти, јер скуп свих парних бројева припада скупу свих целих бројева, док су та два скупа еквивалентна.

бити еквивалентна једној својој парцијалној множини, тј. множини која је настала из ње саме испуштањем извесног броја елемената по неком правилу.

Код бесконачних множина је то могуће. Отога се и каже да у бесконачности "целина може бити једнака једном свом делу". Да бисмо то показали уочимо две бескрајне множине и то множину свих природних бројева и множину свих парних бројева из природнога низа. Између те две множине можемо успоставити еквиваленцију методом кореспондирања.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

Ма ком елементу n из прве множине одговара потпуно одређени елеменат $m=2n$ друге множине и обрнуто, ма ком елементу m друге множине одговара само један и потпуно одређен елеменат $n = \frac{1}{2} m$ из прве множине.

Из особине да две на изглед различите бескрајне множине могу бити и еквивалентне, може

се поставити следећа строжија дефиниција бескрајне множине: једна је множина бескрајна, ако постоји макар једна њена парцијална множина са којом би она била еквивалента. Ако ни једна таква парцијална множина не постоји, онда је дата множина коначна.

Као важан пример за две еквивалентне бескрајне множине напоменимо још множину свих реалних бројева и множину свих тачака праве линије, јер се између елемената ове две множине може на лак начин успоставити биунивока кореспонденција, ако смо једном за свагда на правој изабрали тачку која ће одговарати 0 и тачку која ће одговарати јединици из множине реалних бројева.

§ 5 Пребројиве и непребројиве множине. Ако уочимо две бескрајне множине N и M, од којих је N множина природних бројева и ако установимо да су те две множине еквивалентне, онда се за множину M каже да је пребројива. Према томе, једна је множина пребројива ако је еквивалентна множини природних бројева, тј. ако се између елемената те множине природних бројева може успоставити узајамна и једнозначна кореспонденција :

$$\begin{array}{l} N = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ p,\ \dots) \\ \quad\ \ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \qquad\ \ \updownarrow \\ M = (m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ \dots\ m_p,\ \dots) \end{array}$$

Значи, ако је једна бескрајна множина пребројива, њене елементе можемо уредити и по том се сваки њен елеменат мора појавити на тачно одређеном месту, тако елеменат m_p тачно на p-том месту, где је p један број из множине природних бројева.

У прошломе смо члану видели једну пребројиву множину, то је била множина свих парних позитивних бројева. У идућем ћемо члану показати још неколике пребројиве множине.

Једна је множина непребројива, ако је немогуће ма на какав начин успоставити биунивоку кореспонденцију између њених чланова и елемената множине природних бројева. Краће, непребројива је свака бескрајна множина која није еквивалентна множини природних бројева.

Доказ да овакве бескрајне множине постоје, њихове примере и разлику по којој оне у свој бескрајности отступају од такође бескрајних али пребројивих множина, видећемо у наредним параграфима. Ти ставови претстављају суштину ове теорије.

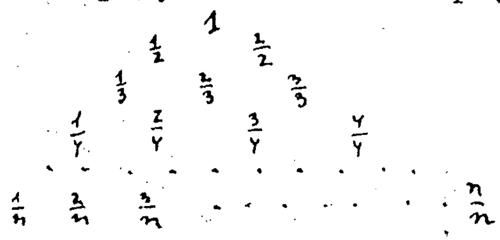
§ 6 <u>Множина свих целих бројева је пребројива.</u> Напред смо видели једну пребројиву множину која је на први поглед мања од множине природних бројева. Биће утолико више од интереса да видимо неколике множине које су на први поглед веће од поменуте, али за које се може доказати да су такође пребројиве. Таква је на првоме месту множина свих целих позитивних и негативних бројева. Ако њене елементе упоредимо по величини, изгледа нам да није пребројива, јер ни за један њен елеменат нисмо у стању да покажемо који је по реду, пошто му претходи бескрајно много других. Ако ту множину напишемо уређену на следећи довитљив начин*) видимо одмах да је она пребројива, јер кореспонденцију ове множине са множином природних бројева мо-

*)
$$\begin{array}{cccccccc} 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \end{array}$$

жемо установити по следећем правилу. Сваки позитиван елеменат m дате множине је $(2n-1)$-ви по реду, а сваки негативан ($-n$) је $2n$ -ти по реду. Што елементе дате множине можемо да нумеришемо, доказ је да је можемо пребројати.

И уопште да бисмо доказали да је једна множина пребројива, као што се из примера види, довољно је макар само да можемо да је уредимо тако, да смо у стању рећи који је елеменат у њој први, који други, који n -ти итд., тј. довољно је да можемо да је пребројимо.

§ 7 Множина рационалних бројева је пребројива. Јер и ако много гушћа од множине природних бројева, да се нанизати по извесном правилу, тј. да се пребројати. То можемо постићи на три начина. Прво, ако све рационалне бројеве распоредимо у редове по величини њиховог именитеља, а у сваком реду по величини бројитеља:

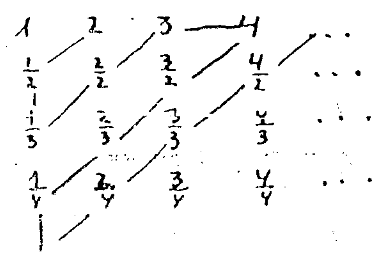


Изоставимо ли све разломке који се понављају и напишемо ли остале у продужењу испод природног низа, видимо да смо успоставили биунивоку кореспонденцију ових бројева са бројевима из природног низа, јер нисмо ни један рационалан број изоставили, па се према томе свакоме зна своје место. На први начин је показана пребројивост рационалних бројева између 0 и 1, а из ове се као логичка последица закључује и пребројивост свих рационалних бројева уопште.

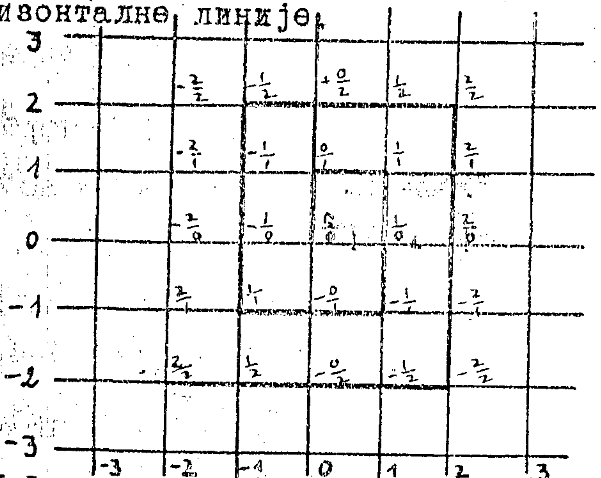
Ако све рационалне позитивне бројеве поређамо у овакву схему,*) а затим их нанижемо по изломљеној линији и изоставимо све који се понављају, можемо лако уочити правило по коме се они ређају. На тај начин је доказана и непосредно пребројивост свих позитивних рационалних бројева.

Пребројивост множине свих рационалних бројева може се доказати, ако се они уреде на је-

*)



дан други начин, тако да се постигне њихова нумерација, а то се може постићи овако. Повући ћемо бесконачно много вертикалних и бесконачно много хоризонталних правих и све ове праве означићемо бројевима, као што је учињено на слици. Сваку ћемо пресечну тачку, затим означити једним рационалним бројем чији је бројитељ нумера вертикалне, а именитељ нумера хоризонталне линије.



Сл. 1.

Пођемо ли од броја $\frac{0}{0}$ спирално и поређамо све те бројеве у низ

$$\frac{0}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, -\frac{1}{1}, -\frac{0}{1}, \dots,$$

па изоставимо све бројеве који нису одређени, као $\frac{n}{0}$ и који се понављају, тада ћемо добити поредак у коме је обухваћена множина свих по-

зитивних и негативних рационалних бројева, али уређена тако, да се свакоме вна одговарајуће место одређено бројем природног низа. Дакле, множина рационалних бројева је пребројива.

§ 8 Множина алгебарских бројева је пребројива. - Алгебарски је сваки број који може бити корен једне алгебарске једначине са рационалним коефицијентима. Према томе је множина алгебарских бројева скуп свих реалних корена ових алгебарских једначина. Да бисмо доказали да је ова множина пребројива, доказаћемо најпре да је пребројива множина свих алгебарских једначина. Да бисмо то пак, доказали потребно је да све ове једначине на неки начин уредимо. У ту ћемо сврху увести појам висине једне алгебарске једначине.

Ако је општа алгебарска једначина са целим коефицијентима

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots a_1 x + a_0 = 0,$$

њеном се висином зове израз

$$h = (n-1) + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots |a_0|.$$

Тако је на пример висина једначине

$$4x^4 - 2x + 1 = 0$$

$$h = 3+4+2+1 = 10.$$

Из саме је дефиницијe очигледно да свака једначина може имати само једну висину и да једну исту висину може имати само коначан број једначина ма колики велики он био.

Све алгебарске једначине можемо сада уредити по њиховој висини, почев од оних чија је висина 1. Једначине, пак, исте висине можемо уредити ма на какав други начин, рецимо по висини њиховог степена. Ако смо и ово учинили, онда је систем свих алгебарских једначина уређен, тј. доказано је да је множина свих алгебарских једначина пребројива.

Замислимо сада на место сваке алгебарске једначине њене реалне корене и то уређене по величини. Ако у свакоме поретку изоставимо све бројеве који се понављају, онда добијамо множину алгебарских бројева уређену тако да сваки број има једно и потпуно одређено место, што није ништа друго до успостављање биунивоке кореспонденције са множином природних бројева. Дакле је и множина свих алгебарских бројева пребројива.

§ 9 Множина свих реалних бројева је непребројива.- Да би се доказало до постоје и множине које нису пребројиве, довољно је показати да постоји једна таква множина. То ћемо доказати за множину свих реалних бројева од 0 - 1.

Пре него што пређемо на сам доказ, уочимо да се сваки реалан број може написати у облику децималног разломка. И то сваки рационалан број као коначан или бесконачно периодичан разломак, а сваки ирационалан број као бесконачан и непериодичан разломак. На пример

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4999\dots$$

показује да се и рационалним бројевима који претстављају коначне децималне разломке може привидно дати облик бесконачног периодичног разломка. Из тога излази да се сви реални бројеви могу једнозначно написати у облику бесконачних децималних разломака.

Ако то учинимо и све ове бројеве уредимо било на који начин само под претпоставком да је између њих и бројева из природног низа успостављена биунивока кореспонденција,

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longleftrightarrow & 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots, \\ 2 & \longleftrightarrow & 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots, \\ 3 & \longleftrightarrow & 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots, \\ 4 & \longleftrightarrow & 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots, \\ \vdots & & \ldots\ldots\ldots, \\ \vdots & & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

изгледало би да је и множина свих реалних бројева пребројива. Међутим и поред тога што смо узели у обзир бесконачно много реалних бројева и старали се да их све до једног уредимо, ма колико их узели и ма како их уредили, увек можемо наћи један реалан број који нисмо убројали. Такав је например број

$$0,b_1b_2b_3b_4\ldots$$

где је $b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22},\ b_3 \neq a_{33},\ b_4 \neq a_{44}, \ldots,$ зато што се разликује од свакога броја који је убројан. Ако и овај број прикључимо уређеној множини истим, тзв. "дијагоналним поступком",

можемо пронаћи један реалан број који ни овај пут нисмо урачунали, а одмах се види да смо, продужујући поступак, у стању наћи и бесконачно много оваквих бројева.

Показавши да све реалне бројеве не можемо никад пребројати доказали смо и да су они непребројиви. Ну како је непребројив њихов скуп који се цео садржи између 0 и 1, то је непребројива и множина свих реалних бројева.

§ 10 Доказ егзистенције трансцендентних бројева. Доказ егзистенције трансцендентних бројева је непосредна последица доказа о непребројивости множине свих реалних бројева и пребројивости свих алгебарских бројева.

И ако су обе бесконачне, множина је свих алгебарских бројева, као што смо видели пребројива, дакле мања од множине свих реалних бројева, која је непребројива. Из овога доказаног факта Кантор је извукао два закључка. С једне стране и бесконачности се међу собом разликују и могу бити мање или веће, што значи да појам бесконачности ни пошто није магловит, већ потпуно одређен. С друге стране, осим алгебарских, морају постојати још неки други реални бројеви чија је множина куд и камо већа од множине алгебарских бројева, шта више она је непребројива, пошто од двеју пребројивих множина не би никад постала непребројива множина, као што је то случај са множином свих реалних бројева. А пошто се у математици сваки реалан број, који није алгебарски, дефинише као трансцендентан то је множина свих трансцендентних бројева непребројива, тј. трансцендентни бројеви не само да постоје, него су куд и камо многобројнији од алгебарских.

Конкретно доказати који бројеви нису алгебарски претставља проблем своје врсте. Тако је Лувил пре Канторове теорије дао доказ да су извесни бројеви трансцендентни, доказавши да не могу бити корени ни једне алгебарске једначине с рационалним коефицијентима. С друге стране докази да су број π и број e трансцендентни дошли су тек много доцније, што потврђује да се теоријом множина може доказати егзистенција једне непребројиве множине трансцендентних бро

јева, али да се не може извадити ни један број који тој множини припада.

§ 11 Моћ једне множине. Појам кардиналног броја. Величина једне множине цени се по броју њених елемената, па се и однос између две множине сматра однос бројева њиних елемената.

Ако су две множине коначне ми им можемо елементе избројати и видети која је множина по броју својих елемената мања, која већа, и јесу ли еквивалентне.

Ако су две уочене множине бесконачне, елементи им се не могу избројати, али се оне ипак могу упоређивати у извесном смислу, може се пак рећи, као што смо видели, која је множина по броју елемената мања, која већа и јесу ли еквивалентне.

Број елемената једне множине зове се моћ те множине или њен кардиналан број.

Код коначних множина је моћ или кардиналан број једнак самоме редном броју њених елемената, који се зове још и ординалан број.

Бескрајним се множинама број елемената не

у горњем смислу. Оне се само мо-
може одредити у горњем смислу. Оне се само мо-
гу разликовати, по броју својих елемената на
пребројиве и непребројиве. Према томе осим ко-
начне моћи, разликоваћемо још пребројиву моћ
и непребројиву моћ. Ова се последња зове још и
моћ континуума. Ово је име добила с тога, што
је најпре за множину свих реалних бројева до-
казано да је непребројива, а ова је множина е-
квивалентна множини тачака једне непрекидне
праве линије.

Јасно је да су кардинални бројеви и уве-
дени с тога да би се могле поредити и множине
са бескрајним моћима, чији се елементи не могу
да изброје.

Пребројива се моћ означава кардиналним бро-
јем a, а моћ континуума кардиналним бројем c
Видели смо да је $a < c$.

Кантор пребројиву моћ означава јеврејским
словом "алеф" $\aleph$. Затим приликом извођења рачун -
ских операција с кардиналним бројевима доказује
и да је $\aleph + \aleph$ још увек $\aleph$ исто као и $\aleph \cdot \aleph$
а да је тек $2^{\aleph}$ један већи кардиналан број и то

баш број c.

У дефинисање рачунских операција, кад смо в
већ једном увели појам кардиналног броја, лако
је ући, али нам оно овде није потребно, јер је од
посебног интереса.

§ 12 Множина свих непрекидних функција има
моћ континуума. Дедекиндовим пресеком се одређу-
је ирационалан број помоћу два бескрајна низа,
од којих му један тежи с леве а други с десне
стране. Како су оба низа бескрајна и неограниче
на, то онај с леве не може имати највећи, а онај
с десне стране не може имати најмањи број. Ма
који рационалан број сматрали за највећи у ле-
вом или најмањи у десном низу, увек смо у стању
наћи један рационалан број који ће се мање раз-
ликовати од посматраног ирационалног броја, тј.
који ће му бити ближи.

Оваквим аксиоматичним начином је и дата са-
ма дефиниција ирационалног броја.

На основу овога става постаје јасно да је
свака непрекидна функција, позната за рационалне
апсцисе, потпуно одређена, јер су ирационалне

апсцисе дате пресецима који се са своје стране састоје из низова познатих рационалних апсциса. Ови, пак, пресеци, који одређују ирационалне апсцисе, одређују и пресеке на самој функцији којима су дате њене ирационалне тачке.

Како се и рационални бројеви (рационалне апсцисе), могу одредити помоћу пресека, са по два низа, то је јасно да је свака непрекидна функција одређена једном бескрајном множином низова. Према томе је и множина свих непрекидних функција одређена бескрајном множином свих низова и овој еквивалентна.

Да бисмо доказали да је множина свих непрекидних функција непребројива, остаје да се докаже да је непребројива бескрајна множина свих низова.

Елементи ових низова су реални бројеви, те их све можемо написати у облику целог броја и бескрајно децималног разломка. Ако то и учинимо и посматрамо један низ

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \end{array}$$

увек смо у стању да га по изломљеној линији, која се види на схеми, заменимо једним реалним бројем

$$a_1 a_2 b_1 c_1 b_2 a_3 a_4 b_3 c_2 d_1 \ldots$$

Очевидан је и обрнут став да се сваком реалном броју, ако га напишемо у виду бескрајног децималног разломка, по горњем правилу може наћи одговарајући низ из посматране множине. На тај начин је између множине низова и множине реалних бројева утврђена еквиваленција, чиме је посредно доказано, да је и множина свих низова непребројива и да има моћ c. Ово пак, повлачи као последицу и непребројивост множине свих непрекидних функција.

Дакле, множина свих непрекидних функција има моћ континуума, или како се још каже, њен кардинални број је c.

§ 13 <ins>Моћ множине свих реалних једнозначних функција већа је од моћи континуума.</ins> Посматрајмо све реалне једнозначне функције $f(x)$, за све вредности X-а од 0 до 1. Обележимо са $\mathcal{F}$ множину свих тих функција и претпоставимо да она има моћ континуума c. Како смо претпоставили да је множина $\mathcal{F}$ непребројива, то значи да по једна њена функција $f_z(x)$ мора одговарати сваком реалном броју z.

Сваку од функција множине $\mathcal{F}$ напишимо за важније вредности X-а од 0 до 1

$$
\begin{array}{lllll}
f_{0,1}(x) \dots\dots & f_{0,1}(0,1) \dots & f_{0,1}(0,2) \dots & f_{0,1}(0,3) \dots & f_{0,1}(0,4) \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{0,2}(x) \dots\dots & f_{0,2}(0,1) \dots & f_{0,2}(0,2) \dots & f_{0,2}(0,3) \dots & f_{0,2}(0,4) \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{0,3}(x) \dots\dots & f_{0,3}(0,1) \dots & f_{0,3}(0,2) \dots & f_{0,3}(0,3) \dots & f_{0,3}(0,4) \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
f_{0,4}(x) \dots\dots & f_{0,4}(0,1) \dots & f_{0,4}(0,2) \dots & f_{0,4}(0,3) \dots & f_{0,4}(0,4) \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

и замислимо да смо написали не само функције $f_{0,1}(x), f_{0,2}(x), f_{0,3}(x), \dots$ већ све функције $f_z(x)$ које одговарају по једном реалном броју од 0 до 1. Замислимо осим тога да смо написали сваку од тих функција не само за вредност 0,1 ; 0,2; 0,3; 0,4 и 0,5, већ за све вредности X-а од 0 до 1. На такав смо начин непребројиву бескрајну множину унеколико

уредили.

Да бисмо показали да постији једна реална једнозначна функција $\varphi(x)$ која не припада множини $\mathcal{F}$, замислимо само једну такву функцију која би за апоцису 0,1 узела вредност различиту од $f_{0,1}(0,1)$, за апоцису 0,2 вредност различиту од $f_{0,2}(0,2)$, за апоцису 0,3 вредност различиту од $f_{0,3}(0,3)$ итд. Та би функција доиста припадала множини свих реалних функција јер би била одређена за све вредности променљиве од 0 до 1, али не би припадала множини $\mathcal{F}$, јер би се од сваког њеног елемента разликовала бар у једној тачки.

Кад бисмо ову функцију уврстили у множину $\mathcal{F}$ и сличан поступак понављали бескрајно пута, не би нам било тешко да нађемо и бескрајно много функција сличних функцији $\varphi(x)$, које не би припадале множини $\mathcal{F}$ са кардиналним бројем C.

Из тога што постоје и такве функције које не припадају једној множини која има моћ континуума, лако је закључити да множина свих реалних једнозначних функција има моћ већу од моћи континуума. Њен се кардиналан број обележава са

f.

Према томе, између кардиналних бројева чију смо егзистенцију досад доказали постоји однос

$$a < c < f .$$

§ 14 Постоји ли бесконачно много кардиналних бројева. Проблем континуума.- Добивши ова три кардинална броја, Кантор је одмах поставио питање да ли кардиналних борјева има бесконачно много. На то питање је одговорио позитивно, а доказао га је једним поступком истоветним са дијагоналним, који је напред два пута употребљен.

После тога наметнуло се једно много теже питање, питање да ли су кардинални бројеви свугде густи, или можда иза броја а одмах долази с, а иза с f итд. То је питање и до данас остало нерешено, а познато је у математици под именом "проблем континуума".

И МНОЖИНЕ ТАЧАКА

§ 15 О множини тачака. Множине тачака могу се проучавати у n- димензионалном простору. Ми ћемо се овде ограничити на линеарне множине тачака и на множине тачака у равни .

Ако место речи "број" ставимо реч тачка, онда добијамо низ примера за пребројиве и непребројиве множине тачака, а из већ доказаних примера за пребројиве и непребројиве множине бројева, које су изнете у првом делу.

Множине тачка ћемо посматрати засебно стога, што се од њих и почело у стварању теорије множина а и због тога што су специјално за множине тачака везане извесне нове дефиниције и појмови на које раније нисмо наилазили, а према којима је извршена у неку руку класификација тих множина. Осим тога, искључивши множине тачака као геометријске претставнике низова бројева, добија се много већа прегледност у изучавању ставова из теорије низова.

Напоменимо још следеће:

Како,према Канторовм аксиому,свакој тачки
једне праве одговара један број и обратно, то ми
у даљем излагању нећемо правити разлику између
речи"број" и "тачка".

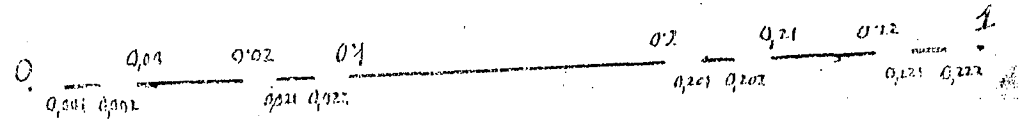
На исти начин,како свакој тачки у равни
одговара један комплексан број и обратно и ка-
ко ћемо се приликом проучавања множина тачака
у равни служити комплексним бројевима,речи "тач
ка" а у равни и комплексан број" сматраћемо
као синониме.

§ 16 О једној непребројивој множини тачака.

Из онога што је напред речено излази да су реци
мо, множине рационалних или алгебарских тача-
ка пребројиве, док множина свих тачака које од-
говарају реалним бројевима има моћ континуума.
Ну и без везе са врстом бројева, у стању смо
да образујемо бескрајно много пребројивих и не-
пребројивих множина тачака самих за себе. Ево
једног примера.

Узмимо произвољан одсечак једне праве,поде-
лимо га на три једнака дела и извадимо средњи
део. Са одсечцима који претстављају прву и по-
следњу трећину првобитне дужине, учинимо то

исто, поделимо их на три једнака дела,од којих
изводимо само средње. Код сваког одсечка доби-
јамо по две крајње нове дужи,које нисмо изводи-
ли а које можемо делити на три дела и исти про-
цес понављато бескрајно много пута.



Сл. 2.

Као што се из поступка види,дужине размака
које постепено вадимо чине геометријску прогре-
сију чији је први члан (ако је дужина првобит-
ног размака 1), $a_1 = \frac{1}{3}$ а количник $q = \frac{2}{3}$.Збир
свих тих извађених дужина је дакле $\sum_0^\infty \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n = 1$.То
значи да се овим поступком,ако се он продужи у
бескрајност,исцрпљује цела дуж од 0 до 1.Али ни-
је тако!

Ако за часак лакшег излагања ради, избаци-
мо декадни систем писања бројева и послужимо се
тринарним системом који садржи свега три цифре
0,1 и 2, па бројевима овога система нумеришемо
граничне тачке дужи,које вадимо, онда ћемо до-

бити једну схему и то на слици 2. Означеним поступком вадимо тачке које се налазе најпре у размаку (0.1, 0.2); затим у размацима(0.01,0.02) и (0.21,0.22); затим у (0.001,0.002),(0.021, 0.022),(0.201,0,202), (0.221,0.222), итд.

Али и поред тога што је, као што смо видели дужина свих, тако извађених размака једнака дужини целокупног размака, преостаје ипак још бескрајно много тачака размака (0,1) које нисмо извадили ни једним од горњих размака; шта више таквих тачака преостаје још непребројиво много.

Јер, вадећи први размак (0.1, 0.2), видимо да тиме избацујемо оне тачке размака (0,1)чије апсцисе , писане у тринарном систему садрже цифру 1 на првом месту после децималне тачке,тј. преостају сви они бројеви који на првом месту не садрже цифру 1 . Вадећи затим размаке (0.01,0,02) и (0.21,0.22), видимо да избацујемо све бројеве који садрже цифру 1 на другом месту, преостају дакле сви они бројеви који не садрже цифру 1, на првом и другом месту. На исти начин вадећи размаке (0.001, 0.002),(0.021,0.022),(0.201,0.202)

и (0.221,0.222) избацујемо све бројеве који садрже цифру 1 на трећем месту, преостају дакле сви они бројеви који не садрже цифру 1 на прва три места. После n оваквих поступака видимо дакле да ће преостати сви бројеви који не садрже цифру 1 међу првих n децимала , и кад тај поступак продужимо до бесконачности видимо да смо тим избацили само све оне бројеве који садрже цифру 1, па су према томе преостали још сви они бројеви,који, писани у тринарном систему, садрже цифре 0 и 2 .

Видимо дакле, да тих бројева преостаје још бескрајно много, а дијагоналним је поступком лако доказати да ти бројеви нису пребројиви,тј. да је моћ њине множине једнака моћи континуума.

Приметимо још да је ово један од привидно парадоксалних резултата теорије множина,тј. да и поред тога што смо из сегмента (0,1) извадили бескрајно много сегмената чија је укупна дужина једнака дужини датог сегмента (0,1), ипак је у томе сегменту остало још непребројиво много тачака.

Ово долази отуда, што се једна тачка, или више тачака, па чак и пребројиво много њих, може укључити у размак тако, да дужину њихова збира можемо учини произвољно малом. Овим примером видимо да се и непребројиво много тачака може укључити у таке размаке.

§ 17 Ограничено и неограничене множине тачака. За једну множину тачака у равни, било да је пребројива или непребројива, каже се да је ограничена ако смо у стању наћи један круг коначног полупречника, тако да се све тачке те множине налазе у кругу. Услов ограничености једне множине тачака да се аналитички овако представити. Ако са a обележимо комплексне бројеве који одговарају тачкама посматране множине E, онда ће множина бити ограничена ако постоји један број M такав, да неједначина

$$|a| < M$$

буде задовољена за све $a \in E$.

Множина тачака у равни је неограничена ако увек постоји макар један елеменат те множине који пада ван круга, коме можемо унапред одредити ма како велики полупречник.

Аналитички, множина тачака у равни је неограничена, ако постоји бар један број a множине E такав да буде

$$|a| > M,$$

ма како велики изабрали број M.

Примери бескрајних ограничених множина су:

Множина $E=\{e^{k\pi i}\}$, $k=0,1,2,\ldots$ јер за њу важи неједначина

$$|e^{k\pi i}| < 1+\varepsilon = M, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Множина

$$E=\{e^{p\theta i}+e^{q\theta i}\}, \quad p, q = 1,2,3,\ldots$$

јер је

$$|e^{p\theta i}+e^{q\theta i}| \le |e^{p\theta i}|+|e^{q\theta i}| \le 2, \text{ за све } p \text{ и } q.$$

Из сличних разлога који се препуштају читаоцу и следеће су множине ограничене:

Множина $E=\{a^n\}$, $n=0,1,2,\ldots$, за $|a|<1$,

где је a комплексан број.

Множина $E=\left\{\frac{x^2}{1+x}\cdot e^{xi}\right\}$, $-\infty \le x \le +\infty$.

Множина $E=\left\{\left(1+\frac{i^n}{n}\right)^n\right\}$, $n=1,2,3,\ldots$

" $E=\left\{\left(1+\frac{1^{n\theta i}}{n}\right)^n\right\}$, $n=1,2,3,\ldots$

" $E=\{\sin x\, e^{xi}+\sin y\, e^{yi}\}$, $-\infty \le x \le +\infty$, $-\infty \le y \le +\infty$

" $E=\left\{\frac{1}{p}+\frac{i}{q}\right\}$, $p, q = 1,2,3,\ldots$

Множина $E \equiv \left\{ \left(\frac{i^p}{p} + \frac{i^q}{q} \right)(p+q) \right\}$, $p, q = 1, 2, 3, \ldots$

" $E \equiv \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} e^{\alpha i} \right\}$, $p, q, r = 1, 2, 3, \ldots$

Примери за бескрајне неограничене множине су:

Множина тачака с Bernoulli-еве спирале $E \equiv \{a^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ за $|a| > 1$, јер је a комплексан број, јер ма како велико M узели, ако изаберемо n веће од $\frac{\lg M}{\lg |a|}$, биће $|a^n| > M$.

Из сличних разлога, које препуштамо читаоцу неограничене су и следеће бескрајне множине тачака у равни:

Множина тачака Архимедове спирале

" $E \equiv \{ t e^{t \alpha i} \}$, $-\infty \leq t \leq +\infty$

" $E \equiv \left\{ \frac{1}{z} \right\}$, кад је $|z| \leq 1$ или кад z има облик

$$z = \frac{1}{p} + \frac{i}{q}, \quad p, q = 1, 2, 3, \ldots$$

Множина $E \equiv \left\{ \frac{1}{1-z} \right\}$, за $|z| \leq 1$, или кад је $|z - e^{\alpha i}| \leq |1 - e^{\alpha i}|$.

Множина тачака праве $\arc(z) = \alpha$

" $E \equiv \{a + ib\}$, где су a и b ови рац. бројеви

" $E \equiv \{a e^{b \pi i}\}$, " " " " " " "

" $E \equiv \left\{ \frac{1}{1+z} \right\}$, кад је $R(z) \geq -1$, или $R(z) \leq -1$ или $R(z) = -1$, или $\mathcal{I}(z) \geq 0$.

Уочимо за час линеарне множине тачака. Дефиниција ограничености и неограничености ових множина иста је као и равних множина тачака, јер су оне само специјалан случај ових последњих. Због тога код линеарних множина можемо ове појмове прецизирати.

Тако на пр. кажемо да је линеарна множина E ограничена са десне или горње стране, ако постоји један коначан број M такав да буде

$$a \leq M \quad \text{за све} \quad a \subset E.$$

Исто је тако множина E ограничена са леве или доње стране, ако је

$$a \geq M \quad \text{за све} \quad a \subset E.$$

Тако је нпр. множина свих рационалних или ирационалних негативних бројева ограничена с горње стране, а множина свих позитивних рационалних или ирационалних бројева са доње стране, док је множина свих целих бројева неограничена са обе стране.

Множине $E \equiv \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$, $E \equiv \{ n^{(-1)^n} \}$, $E \equiv \{ (-1)^n n^{(-1)^n} \}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$E \equiv \left\{ \frac{(-1)^p}{q} p^{(-1)^p} + \frac{(-1)^q}{p} q^{(-1)^q} \right\}$, $E \equiv \left\{ \frac{(-1)^p}{q} p^{(-1)^p} \right\}$, $E \equiv \left\{ \frac{|p-q|}{p-q} \cdot \frac{p}{q} \right\}$, $p \neq q$, $\left. {p \atop q} \right\} = 1, 2, 3, \ldots$

су ограничене са доње стране, док су множине

$E \equiv \{ 5 - n \}$, $E \equiv \{ (-1)^n n^{(-1)^{n+1}} \}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $E \equiv \left\{ \frac{3}{q} - \frac{p}{q+2} \right\}$, $\left. {p \atop q} \right\} = 1, 2, 3, \ldots$,

ограничене са горње стране.

Уочимо сад једну линеарну множину тачака.

Ако је та множина ограничена са десне стране тада овој одговара једна потпуно одређена тачка Γ таква да се десно од ње не налази ни једна тачка множине E, а да се лево од $\Gamma - \varepsilon$, ма како мало било $\varepsilon > 0$, налази најмање једна тачка множине E.

Та се тачка Γ назива "горњом границом" множине E. Да горња граница једне са десне стране ограничене множине увек постоји и да је једнозначно одређена доказује се пресеком.

Нека је $E \equiv \{e\}$ дата са горње стране ограничена множина, тј. $e \leq M$, кад $e \subset E$.

Дефинишимо групе A и B, пресека који ће одредити Γ на следећи начин, (пресек можемо извршити у скупу свих тачака праве, тј. у скупу свих реалних бројева):

Ставимо у групу B све тачке које се налазе десно ма од које тачке e множине E, у групу A све остале тачке дотичне праве. Групе A и B чине пресек, јер је: Π_1) скуп свих тачака праве $\equiv A + B$.

Π_2) $A > a < b \subset B$, јер су све тачке које $\not\subset B$ лево од свих тачака групе B.

Π_3) A и B нису правни јер $M \subset B$, а $E \subset A$.

Једнозначно одређена тачка $\Gamma = (A|B)$ је горња граница множине E. Јер 1^{o}) свака тачка $x > \Gamma \subset B$, па је, по дефиницији од B, десно од свих тачака множине E. 2^{o}) ма која тачка $y < \Gamma \subset A$ па се према дефиницији групе B, лево од y мора налазити макар једна тачка $e \subset E$, иначе би $y \subset B$. Дакле десно од $\Gamma - \varepsilon$ $(< \Gamma)$ и ма како мало било $\varepsilon > 0$ налази се најмање једна тачка множине E. Дакле је $\Gamma = (A|B)$ заиста горња граница множине E.

На исти се начин доказује да једна са доње стране ограничена множина E има једну потпуно одређену доњу границу γ дефинисану на следећи начин: доња граница γ множине E је она т. која се налази лево од свих тачака те множине тако да се најмање једна т. те множине налази лево од $\gamma + \varepsilon$, за ма како мало $\varepsilon > 0$.

Како је једна линеарна ограничена множина истовремено ограничена са леве и са десне стране, то видимо да свакој линеарној ограниченој множини E одговарају две тачке γ и Γ, доња и горња граница, тако да је $[\gamma, \Gamma]$ најужи размак који садржи све тачке множине E.

Вежбе ради ваља одредити горње и доње грани - це напред наведених примера као и следећих множина:

$$E\equiv\left\{\frac{1}{n}\right\},\ E\equiv\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\},\ E\equiv\left\{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^n\right\},\ E\equiv\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right\},$$

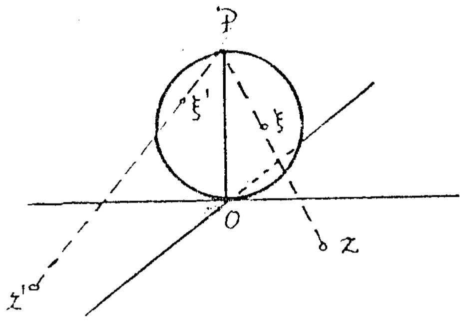
$$E\equiv\left\{\left[1+\frac{(-1)}{n^2}\right]^n\right\},\ n=1,2,3,\ldots,\quad E\equiv\left\{\frac{p}{q}\right\},\ p<q,$$

$$E\equiv\left\{\frac{-p}{p+q}\right\},\ 2p<q<3p\ ,\quad E\equiv\left\{\frac{p}{q}\right\},\ q>p^2+3,\ p,q=1,2,3,\ldots$$

Доња и горња граница могу припадати самој линеарној множини тачака, тј. бити њени крајњи елементи , али то не мора бити увек случај.

§ 18 Стереографско пресликавање. Да бисмо испитивање неограничених множина могли свести у коначност и тиме извесне појмове и ставове који важе за ограничене множине проширили и на неограничене множине служимо се стереографским пресликавањем равни на лопту.

Уочимо за то лопту пречника 1, која лежи на посматраној равни додирујући је у исходишту O, и пројектујмо из пола P тачке равни на тачке лопте. Тада видимо да свакој тачки z_1 из равни



Сл.3.

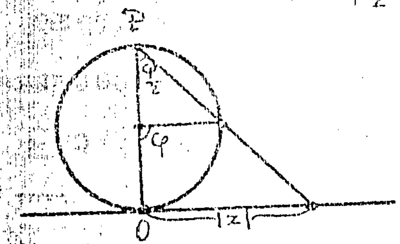
одговара једна потпуно одређена тачка ξ на лопти и обратно, свакој тачки ξ' на лопти одговара једна потпуно одређена тачка z_1 у равни. Овако се пресликавање зове стереографско пресликавање, а лопта на коју се раван пресликава назива се често и Римановом лоптом.

Како се овим пресликавањем тачке целокупне неограничене равни пресликавају на Риманову куглу, која се сва протеже у коначности, то видимо да смо овим пресликавањем постигли жељени циљ.

Испитајмо зато најпре саму природу стереографског пресликавања.

Ако нам је тачка у равни дата својим комплексним бројем z , (тј. својим координатама $z = x+iy$), тада можемо и на кугли успоставити један координатни систем и одредити помоћу тих координата положаја на кугли, тачки z одговарајућу тачку ξ. Ако за почетни меридијан узмемо круг који пресликава осу Ox_1 и географску дужину ω тачке ξ

меримо од тог меридијана, а место географске ширине φ' узмемо лук $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$ великог круга $O\xi$, тада су тачком z координате (ω, φ) потпуно одређене и добијамо: $\omega = \arg(z)$, $\varphi = 2\operatorname{arctg}|z|$, или $z = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot e^{\omega i}$. Међутим, ови обрасци

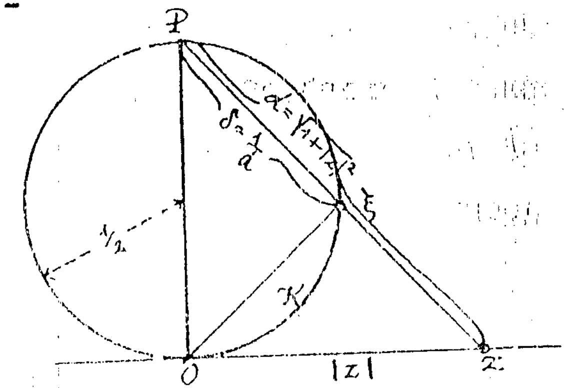


сл. 4.

нам неће бити толико потребни, много је за нас важнији образац који даје растојање тачака ξ и ξ' на кугли, а к које одговарају тачкама z и z' у равни.

Ми можемо тражити то растојање мерено по куглиној површини, тј. дужину лука $\widehat{\xi\xi'}$ највећег круга што пролази кроз тачке ξ и ξ'. Међутим много је подесније да узмемо за растојање тих тачака њихово стварно растојање у простору, тј. дужину Δ тетиве $\overline{\xi\xi'}$, уосталом, ако нам је познато "тетивно растојање Δ" лучно растојање је $2\arcsin\Delta$.

Уочимо дакле две тачке z и z' у равни, да бисмо добили тетивно растојање $\Delta(z, z')$ тачака ξ и ξ' које њима одговарају на кугли, уочимо најпре раван што пролази кроз тачке P, O, z (сл. 5), а затим раван



сл. 5.

што пролази кроз тачке P, z, z' (сл. 6). Из сличности троуглова $O\xi P$ и zOP на сл. 5 је

$$\frac{P\xi}{PO} = \frac{PO}{Pz},$$

па је стављајући

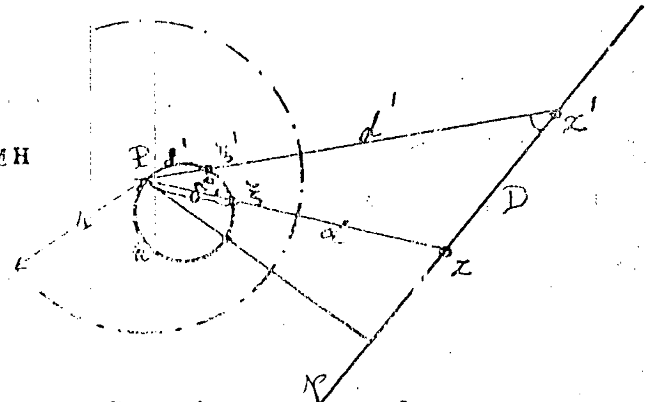
$$\overline{Pz} = \sqrt{1+|z|^2} = d,$$

$$\overline{P\xi} = \frac{1}{d}.$$

На исти бисмо начин добили стављајући

$$\overline{Pz'} = \sqrt{1+|z'|^2} = d'$$

$$\overline{P\xi'} = \frac{1}{d'}.$$



сл. 6.

С обзиром на ознаке $Pz = d$, $P\xi = \delta$, $\overline{\xi\xi'} = \Delta$ и $Pz' = d'$, $P\xi' = \delta'$, $zz' = D$, имамо

$$\delta = \frac{1}{d} \quad \text{и} \quad \delta' = \frac{1}{d'}$$

Према томе видимо да су троугли Pzz' и $P\xi'\xi$ на сл. 6 слични, тј.

$$\frac{\overline{P\xi}}{\overline{Pz'}} = \frac{\overline{P\xi'}}{\overline{Pz}}$$

отуда је

$\frac{\xi\xi'}{P\xi} = \frac{zz'}{Pz'}$, т.ј. $\frac{\Delta}{1/d} = \frac{D}{d'}$,

дакле
$$\Delta = \frac{D}{dd'},$$

или коначно
$$\Delta(z,z') = \frac{|z'-z|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}} . \qquad (1)$$

Тај нам образац даје **тетивно** растојање тачака ξ и ξ' на лопти кад су дате тачке z и z'. Обрнуто, а на сличан начин добијамо образац
$$D(\xi,\xi') = \frac{\Delta}{\delta\delta'}, \qquad (2)$$

који даје растојање тачака z и z', када су дате тачке ξ и ξ' на лопти, а где је Δ тетивно расотјање тачака ξ и ξ', а δ и δ' су њихова отстојања од пола P.

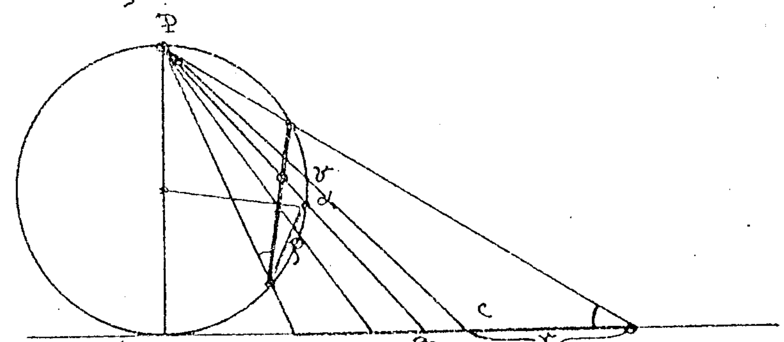
Испитајмо сад како се праве и кругови у равни пресликавају на лопти и обрнути.

Најпре видимо да се свака права p у равни пресликава на један круг k (в. сл. 6) на лопти и обрнуто. Јер слику праве p добијамо на лопти кад тражимо пресек лопте са равни што пролази кров

тачку P и праву p, а то је круг k који пролази кров тачку P а који је реципрочна слика праве p у равни $[Pp]$.

Обратно, слику круга k који пролази кроз пол P, у равни добијамо кад тражимо пресек равни круга k са датом равни, а то је права p или реципрочна слика круга k у равни $[Pp]$.

Уочимо сада на лопти један круг који не пролази кроз пол P са средиштем у тачки α (тачка α лежи на лопти) и тетивним полупречником ρ. Ако дакле са ξ означимо једну тачку тог круга, тада је



Сл.7.

тетивно растојање тачака α и ξ стално и једнако ρ. Према томе ако означимо са a и z, тачкама α и ξ одговарајуће тачке у равни, биће према (1)
$$\Delta(a,z) = \frac{|a-z|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|z|^2)}} .$$

или ако ставимо

$$k = \rho\sqrt{1+|a|^2},$$

биће

$$|z-a| = k\sqrt{1+|z|^2},$$

отуда следи

$$|z-a|^2 = |z|^2 - 2R(\bar{a}z) + |a|^2 - k^2 + k^2|z|^2,$$

или

$$|z|^2 - 2R\left(\frac{\bar{a}}{1-k^2}\cdot z\right) + \frac{|a|^2}{(1-k^2)^2} = \frac{k^2}{1-k^2} - \frac{|a|^2}{1-k^2} + \frac{|a|^2}{(1-k^2)^2},$$

то јест

$$\left|z-\frac{a}{1-k^2}\right|^2 = \frac{k^2}{1-k^2} + \frac{k^2|a|^2}{(1-k^2)^2} = \frac{k^2}{(1-k^2)^2}\left(1+|a|^2-k^2\right). \quad (3)$$

Дакле је слика круга са лопте у равни такође круг са средиштем у тачки $c = \frac{a}{1-k^2}$ и полупречником $r = \frac{k}{1-k^2}\sqrt{1+|a|^2-k^2}$ (4)
(ово под претпоставком да је

$$k = \rho\sqrt{1+|a|^2} \neq 1, \quad (5)$$

иначе се једначина (3) претвара у једначину праве, а то је баш случај кад круг на лопти пролази кроз пол P).

Сад можемо и обратно лако показати, да се сваки круг у равни пресликава у круг на лопти. Јер ако је у равни дат произвољан круг са средиштем у тачки c и полупречником r, из образаца (4) и (5) добијамо

$$k = \frac{r}{\sqrt{1+r^2+|c|^2}} \quad \text{па је} \quad a = \frac{1+|c|^2}{1+|c|^2+r^2}\cdot c$$

и

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{1+|a|^2}} = \frac{r}{\sqrt{1+|a|^2}\cdot\sqrt{1+r^2+|c|^2}}.$$

Према томе, на основу претходног видимо ако са a' означимо тачку на лопти која одговара тачки a, да ће круг на лопти са центром у тачки a' и тетивним полупречником ρ бити на лопти слика круга из равни са центром у тачки a и полупречника r.

Тиме смо доказали да се стереографским пресликавањем круг увек пресликава у круг (али се том приликом средишта тих кругова не пресликавају једно у друго).

Вратимо се сад натраг на множине тачака и уочимо у равни једну множину E коју ћемо стереографски пресликати на Риманову лопту у множину $\mathcal{E}$. Ако је множина E ограничена, тј. ако је

$$|a| < M, \text{ за све } a \subset E,$$

тада се све тачке множине $\mathcal{E}$ на лопти налазе на јужној калоти средишта која је омеђена кругом k (слика круга $\mathcal{K}: |z|=M$) и чији је тетивни полупречник

$$\rho=\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$$

Ако је множина E неограничена, тј. ако постоји, ма како велики био број M, макар једна тачка a множине E таква да буде $|a|>M$,

тада ће се на калоти која садржи пол P увек налазити тачке α множине E, ма како близак био јединици тетивни полупречник $\rho=\frac{M}{\sqrt{1+M^2}}$ круга k са седиштем у O (или ма како мален био полупречник $\rho_1=\sqrt{1-\rho^2}=\frac{1}{\sqrt{1+M^2}}$ истог круга k али са средиштем у полу P).

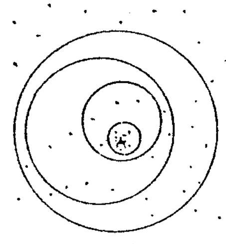
Ако је дакле множина E неограничена у равни, множина E ће имати на лопти тачке α које су произвољно блиске полу P, док код ограничених множина E то није случај.

§ 19 ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА.

Тачка нагомилавања је свака она тачка у равни у чијој се близини налази бесконачно много елемената једне множине тачака. Речи "у близини" прецизираћемо ако кажемо да се под близином у овом смислу подразумева произвољно мала

контура што обухвата тачку коју дефинишемо.

Прецизније формулисана дефиниција тачке нагомилавања би дакле гласила: Једна је тачка, тачка нагомилавања, ако се у произвољно малој контури описаној око те тачке налази увек бесконачно много елемената једне множине тачака. У ствари довољно је да би једна тачка ω била тачка нагомилавања, да се у свакој произвољно малој контури, која садржи ту тачку, налази бар једна тачка дотичне множине различита од ω, јер је тада лако увидети, узимајући све мање и мање контуре, да у близини те тачке мора бити и бесконачно много тачака дате множине.



сл. 8.

Тачка нагомилавања једне множине може, али мора припадати самој множини.

Може се тако наћи много примера бескрајних множина које имају тачке нагомилавања што уопште тој множини не припадају.

Такав је пример множина $E=\{a^n\}$, $n=0,1,2,\dots$ за $|a|<1$, где је a комплексан број. Та множина претставља изоловане тачке Бернулиеве спирале, за коју знамо да се бескрајно много пута завија око тачке O, али ова тачка не припада множини $E=\{a^n\}$, јер је $a^n \neq 0$ за све n. Према томе O не припада тој множини, она је међутим једина њена тачка нагомилавања. Заиста, индекси који задовољавају неједначину $|a|^n<\varepsilon$ одређују тачке које се налазе у кругу

$$|x|=\varepsilon,$$

чији је полупречник ε произвољно мали. Остаје да се покаже да има бескрајно много таквих бројева n који задовољавају неједначину $|a|^n<\varepsilon$ ма како мали био број $\varepsilon>0$. А да би она неједнчина била испуњена треба да буде

$$n\log|a|<\log\varepsilon$$

или, како је $|a|<1$ а $\log|a|<0$

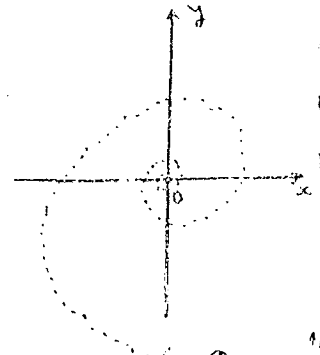
мора да је

$$n>\frac{\log\varepsilon}{\log|a|}=\frac{-\log\varepsilon}{-\log|a|}=\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{|a|}}=M\log\frac{1}{\varepsilon}$$

и, као што видимо, таквих вредности од n постоји бескрајно много.

Из неједначине $n>M\log\frac{1}{\varepsilon}$ види се још да су ε и n у обрнутом односу. Уколико је ε мање, у толико треба да буде n веће да би неједначина била испуњена. Почевши од

једног индекса n_0 за коју је она испуњена, њу задовољавају и сви већи индекси n, који се сад могу протезати до бескрајности. То, пак, значи уколико је круг око тачке O мањи, у толико има више елемената множине ван њега, али је у њему још увек бесконачно много њих.



Сл. 9.

Сличан пример имамо и у линеарној множини тачака $E=\{\frac{1}{n}\}$, $n=1,2,3,\dots$, где је тачка нагомилавања O, али ова тачка не припада уоченој множини.

На овоме месту напомињемо још следећи став: ако једна линеарна множина не садржи своју доњу или горњу границу, онда су те тачке, тачке нагомилавања дотичне множине.

Докажимо овај став за горњу границу Γ, за доњу границу доказ је исти. По дефиницији горње границе Γ множине E, у размаку $(\Gamma-\varepsilon,\Gamma)$ мора се налазити најмање једна тачка e множине E, а како по претпоставци $\Gamma \notin E$ то мора бити $e\neq\Gamma$, дакле је, како се ε можемо изабрати произвољно мало, Γ тачка нагомилавања множине E. Кад би $\Gamma\in E$, горњи доказ не би важио, јер се може десити да једна тач ка размака ($\Gamma - \varepsilon, \Gamma$) која $< E$ буде баш сама тачка Γ. Од користи је проверити овај став на претходним примерима.

Уочимо сад множину E тачака α и пресликајмо их стереографски на лопту у тачке α, чију множину означимо са $\mathcal{E}$.

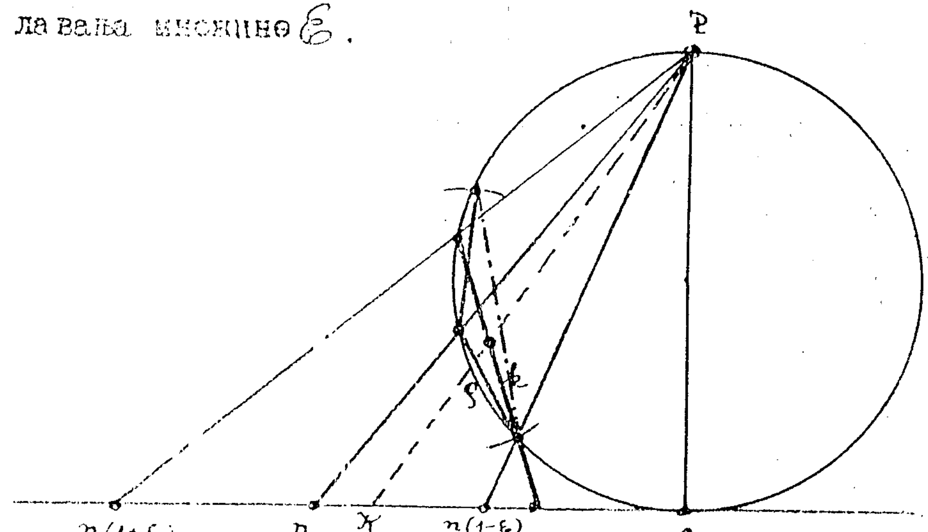
Исто као у равни, казаћемо и на лопти да је γ тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$, ако се у произвољној малој контури описаној око тачке γ на лопти увек налази најмање једна тачка α множине $\mathcal{E}$ различито од γ. Тада можемо лако доказати следећи став: Ако је n тачка нагомилавања множине E и γ слика тачке n на лопти, тада је γ тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$, и обратно.

Јер, ако око тачке n опишемо круг полупречника ϵ, он ће се пресликати на лопту у круг који ће се налазити у кругу са средиштем у γ и тетивним полупречником

$$\Delta[n(1-\varepsilon), n] = \epsilon \frac{|n|}{\sqrt{(1+|n|^2)(1+(1-\varepsilon)|n|^2)}} < \epsilon.$$

Према томе ће се у произвољно малом кругу (са средиштем у γ и полупречником ϵ) налазити најмање јед-

на тачка α множине $\mathcal{E}$; дакле је γ тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$.



Сл. 10.

Обратан став је исто тако лако доказати.

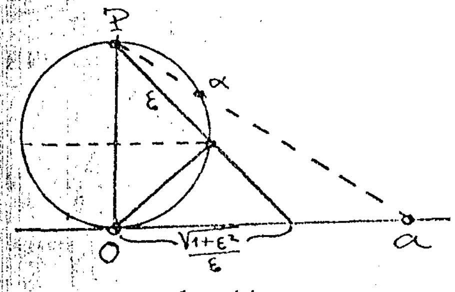
Претпоставимо сад да је множина E неограничена. Видели смо (у § 18) да се тада у произвољно малом кругу описаном око пола P увек налази једна тачка α множине $\mathcal{E}$, према томе је пол P тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$.

Можемо доказати обратан став, тј. да ће множина E бити неограничена кад год је пол P тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$.

Јер, ако је P тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$, у произвољно малом кругу са средиштем у P и тетивним полупречником ϵ, налази се увек једна тачка множине $\mathcal{E}$. Према томе ће се ван круга

$$|z| = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} = M,$$

ма како велико M изабрали, увек налазити једна тачка a множине E; дакле је множина E неограничена.



Сл. 11.

Према томе смо доказали став: да би множина E била неограничена потребно је и довољно да пол P буде тачка нагомилавања множине $\mathcal{E}$.

Како полу P не одговара у ствари ни једна тачка у равни, али се тачка a удаљује у бесконачност док се тачка α приближава полу P, то ако у равни уведемо тачку ∞ и ставимо по дефиницији да тачки ∞ одговара пол P и обратно, онда горњи резултат можемо и овако формулисати. Свака неограничена множина има тачку ∞ као тачку нагомилавања и обратно.

§ 20. БОЛЦАНО - ВАЈЕРШТРАСОВ СТАВ

Болцано-Вајерштрасов став је за наше даље излагање јед од основних ставова; он се састоји у следећем:

Свака бескрајна и ограничена множина има најмање једну тачку нагомилавања.

За доказ овог става уочимо најпре линеарне множине тачака. Нека је дакле E ограничен скуп реалних бројева a или тачака на правој тј.

$$m \le a \le M \quad \text{за све} \quad a \subset E$$

У ту сврху разделимо све тачке посматране праве у две групе и покажимо да оне чине пресек који одређује једну тачку нагомилавања множине $\mathcal{E}$.

У групу А ставимо све тачке посматране праве лево од којих се налази највише коначан број или ни једна тачка множине E; у групу В ставимо све остале тачке дотичне праве.

Групе А и В чине заиста пресек, јер:

Π_1) А + В једнако је скупу свих тачака праве;

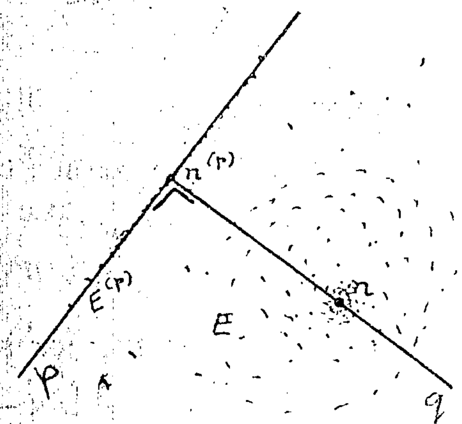
Π_2) $A \supset a < b \subset B$, јер се лево од сваке тачке $a' < a \subset A$ налази такође највише коначан број тачака множине E, према томе a' не може $\subset B$, па је дакле свака тачка b групе В већа од ма које тачке a групе А.

Π_3) $A \neq 0$, јер $m \subset A$ и $B \neq 0$, јер $M \subset B$.

Групе А и В чине дакле пресек; покажимо још да је $\eta = (A|B)$ тачка нагомилавања множине E.

По дефиницији групе A, лево од тачке $n-\epsilon \subset A$, може бити највише коначан број тачака множине E, а лево од тачке $n+\epsilon \subset B$ налази се бесконачан број тачака множине E и то ма како мален био број $\epsilon > 0$. Дакле, у произвољно малом размаку $(n-\epsilon, n+\epsilon)$ налази се бескрајно много тачака множине E, што доказује да је n тачка нагомилавања множине E, чија је егзистенција овим доказана.

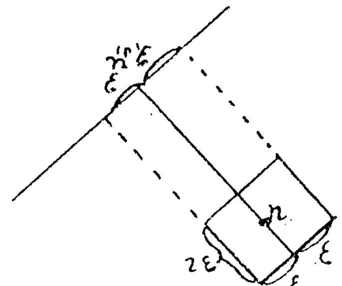
Уочимо сад једну равну бескрајну и ограничену множину тачака E и докажимо Болцано-Вајерштрасов став за те множине.



Сл.12.

Нека је p једна произвољна права у равни и пројектујмо најпре тачку a множине E на ту праву. Тиме добијамо на правој p такође једну бескрајну и ограничену множину тачака $E^{(p)}$ са елементима $a^{(p)}$, која према малочас доказаном Болцано-Вајерштрасовом ставу мора имати најмање једну тачку нагомилавања $n^{(p)}$. У близини тачке $n^{(p)}$ налази се дакле

бескрајно много тачака множине $E^{(p)}$; уочимо један пребројив скуп тих тачака $\{a_\nu^{(p)}\}, \nu = 1,2,3,\ldots$ и одговарајуће тачке $\{a_\nu\}, \nu = 1,2,3,\ldots$ множине E; докажимо да ће множина $\{a_\nu\}$ имати једну тачку нагомилавања n на правој $n^{(p)}q$. Ради тога пројектујмо те тачке на праву q; тиме добијамо на тој правој бескрајну и ограничену множину тачака $\{a_\nu^{(q)}\}, \nu = 1,2,3,\ldots$ која према Болцано-Вајерштрасовом ставу мора имати најмање једну тачку нагомилавања n. n је и тачка нагомилавања множине E.



Сл.13.

Јер, ако око тачке n опишемо квадрат чије су стране паралелне правама p и q и величине 2ϵ (ϵ произвољно мало и > 0) у том ће се квадрату налазити бескрајно много тачака a_ν, тј. бескрајно много тачака a множине E. Тиме је егзистенција једне тачке нагомилавања равне множине E доказана.

У овако доказаном Болцано-Вајерштрасовом ставу претпоставка да множина E буде ограничена је неопходна, јер у супротном не бисмо могли доказати да групе A и B чине пресек, тј. не бисмо могли тврдити да обе групе A и B нису празне. (И заиста, у примеру $E \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ група B је празна).

Али се овај став може ипак проширити и на неограничене множине ако у равни уведемо тачку ∞.

Тако, ако нам је дата једна бескрајна множина E (која не мора бити ограничена) и ако је стереографски пресликамо на Риманову лопту у множину $\mathcal{E}'$, тада је множина $\mathcal{E}$ на лопти бескрајна и ограничена. Она онда, према Болцано-Вајерштрасовом ставу мора увек имати најмање једну тачку нагомилавања γ. Ако је η слика тачке γ у равни, онда η мора бити (према ономе што смо у § 19 виделм), тачка нагомилавања множине E.

Ако се, дакле, тачка γ не поклапа са полом P, дата се тачка нагомилавања η множине E налази у коначности; ако се међутим тачка γ поклапа са полом P тада је $\eta = \infty$ и множина E има тачку нагомилавања у бескрајности.

Према томе, ако на горе описани начин уведемо у равни и тачку ∞, можемо формулисати и проширени Болцано -Вајерштрасов став на следећи начин:

Свака бескрајна множина E има најмање једну тачку нагомилавања и то у коначности ако је множина

ограничена, ако је та множина неограничена тачка ∞ је свакако тачка нагомилавања.

§ 21. КЛАСИФИКАЦИЈА МНОЖИНА ТАЧАКА

Множине тачака се према напред уведеним појмовима у главном деле на отворене, затворене, (густе) и перфектне.

Видели смо да у општем случају тачка нагомилавања једне множине E не мора њој припадати. Како скуп тачака нагомилавања сачињава за себе једну множину тачака, то ту множину која се у општем случају разликује од дате множине, називамо "изводном множином" и бележимо је са E'.

Примери:

Дата множина $E = \{a^n\}, n = 1, 2, 3, \dots, |a| < 1$.

Изводна множина $E' \equiv 0$ {или E' садржи само тачку ∞}.

Дата множина E = скупу рационалних бројева.

Изводна множина E' = скупу свих реалних бројева.

Дата множина E = скупу свих бројева између 0 и 1.

Изводна множина $E' = E$ ако је интервал $[0, 1]$ затворен.

Дата множина $E = \{e^{n\theta i}\}, n = 1, 2, 3, \dots$

Изводна множина $E' \equiv |x| = 1$, за θ ирационално, а

$E' \equiv$ празно, за θ рационално.

Дата множина $E \equiv \{e^{p\theta i} + e^{q\theta i}\}$, $p, q = 1, 2, 3, \dots$, θ ирац.

Изводна множина $E' \equiv$ све тачке z које задовољавају услов $|z| \leq 2$.

Нека читалац нађе изводне множине задате множине

$$E \equiv \left\{\frac{p}{q} + e^{q\theta i}\right\}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

$$E \equiv \left\{\frac{p}{q} + \frac{e^{p\theta i}}{q}\right\}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

као и за множине наведене у ранијим параграфима.

Затворена множина је она којој припадају све њене тачке нагомилавања, тј. она множина која садржи своју изводну множину. $(E' \subset E)$

Пример:

Свака изводна множина је затворена. Нека је дата једна бескрајна множина тачака P . Онда све њене тачке нагомилавања, без обзира да ли јој припадају или не, чине једну нову множину P', то је изводна множина у односу на дату. Ако је и она бесконачна доказаћемо да је увек затворена. Нека су $p_1', p_2', p_3', \dots$ елементи множине P', а p_ω' њена тачка нагомилавања. Пошто је p_ω' тачка нагомилавања множине P', то се у њеној близини мора налазити

бескрајно много елемената множине P'. Како су сви они тачке нагомилавања множине P, то се у њиној близини мора налазити бескрајно много елемената множине P. Према томе се у близини тачке p_ω' налази бескрајно много елемената дате множине P, што значи да је p_ω' тачка нагомилавања и множине P, па као таква припада множини P'. Множина P' је дакле затворена, којој припадају све њене тачке нагомилавања.

Од множине P' можемо опет образовати њену изводну множину P'' или другу изводну множину множине P. Док је у множини P' било тачака које нису припадале множини P, дотле све тачке множине P'' морају припадати множини P'. И при даљем поступку свака тачка n-те изводне множине мора припадати $(n-1)$-вој, па према томе и првој изводној множини.

Густе множине су оне чија је свака тачка у исти мах и тачка нагомилавања.

Пример:

Таква је линеарна множина рационалних тачака, јер нам је познато да између свака два, ма како блиска, рационална броја можемо наћи још бескрајно много рационалних бројева.

Код ове врсте множина постоји још једна варијанта, која носи назив свугде густе множине тачака.

Множина је тачака свугде густа, ако јој је изводна множина континуум, као што је то случај са множином рационалних тачака или са множинама

$$E \equiv \left\{ \sqrt{\tfrac{p}{q}} \right\},\ p, q = 1, 2, 3, \dots$$

$$E \equiv \left\{ \sin n\theta\pi \right\},\ n = 1, 2, 3, \dots$$

θ ирац.

ПЕРФЕКТНА је множина тачака она која је еквивалентна својој изводној множини, $E \equiv E'$.

Из ове је дефиниције скоро очигледно да је свака множина, која је истовремено и затворена и густа - перфектна.

Пример за ову врсту множина је множина тачака посматрана у § 16 .

К Р А Ј

****

У редакцији Б. Шеварлића и З. Бркића

Литографија Косте М. Војковића - Београд
Поенкареова 15

С А Д Р Ж А Ј:

I ОПШТИ ДЕО

II МНОЖИНЕ ТАЧАКА

****
****
****
****
****
*****
***
*