Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

MASTER RAD

Rad sa matematički nadarenim učenicima

Mentor
Prof. Milan Božić

Student
Dragana Trifković
1030/2013

Beograd, septembar, 2016

RAD SA MATEMATIČKI NADARENIM UČENICIMA

Rezime

U ovom radu bavili smo se podučavanjem matematički darovitih učenika, teškoćama i ljepotama rada sa njima. U prvom dijelu rada, akcenat je stavljen na prepoznavanje nadarene djece, a kasnije su date neke od smjernica za rad sa njima. Drugi dio rada posvećen je na radu sa učenicima nadarenim za matematiku i daje mnoge informacije koje mogu biti od pomoći profesorima za identifikaciju takvih učenika i rad sa njima.Konačno, treći dio rada sadrži mnoge od metoda za rješavanje ozbiljnih matematičkih problema, koje bi trebalo da savladaju matematički nadareni učenici. Cilj rada je da se prikažu svi bitni momenti u radu sa nadarenim za matematiku, da se pruži pomoć u podučavanju učenika, prije svega profesorima koji rade u osnovnim i srednjim školama i žele da se posvete radu sa ″malim matematičarima″.

Ključne riječi: darovitost, učenici, prepoznavanje, rad...

Abstract

In this work we focused on teaching students with mathematical talents, the difficulty as well as beauty of working with them. In the first part of the work, the accent has been put on the recognition of the talented kids, and later on some directions for work with them have been given. The second part of the work is devoted to working with students talented for mathematics, and gives much information that can help teachers recognize such students and work with them. Finally, the third part of the work contains many methods for solving serious mathematical problems, which should be done by gifted students. The objective of this work is to show all important moments in work with students gifted for mathematics , to give help in teaching students, before all to teachers working in primary and secondary schools and want to devote themselves to work with ” little mathematicians ”.

Key words : talent, students , recognition , work ,…

Biografija

Dragana Trifković, rodjena je 11.12.1984. godine u Bijeljini u Republici Srpskoj. Osnovnu školu završila je u selu Brodac u blizini Bijeljine, zatim gimnaziju ″Filip Višnjić″ u Bijeljini, nakon koje je upisala studije na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu na smjeru Numerička matematika i optimizacija. 2009. godine završava pomenute studije i u januaru 2010. godine dobija zaposlenje u Tehničkoj školi ″Mihajlo Pupin ″ u Bijeljini na mjesto profesora matematike, gdje radi i danas.

SADRŽAJ

1. UVOD 3
2. O DAROVITOSTI 4
2.1.Teorija darovitosti 4
2.1.1. Istorijat 4
2.1.2. Darovitost i intiligencija.. 5
2.1.3.Pogrešna shvatanja darovitih učenika.. 7
2.1.4. Savremene teorije darovitosti 7
2.2. Identifikacija darovitih učenika.. .13
2.2.1. Liste za provjeru i skale.. 13
2.2.2. Testovi.. 15
2.2.3. Procjena nastavnika.. 15
3. METODIČKI PRISTUPI RADU SA DAROVITIM UČENICIMA.. 19
3.1 .Strategije poučavanja .... .19
3.1.1. Problemsko poučavanje 20
3.1.2. Heurističko poučavanje 20
3.1.3. Programirano proučavanje 21
3.2. Strategije učenja otkrivanjem 21
3.2.1. Istraživanje 21
3.2.2. Projekat 22
3.2.3. Simulacija.. 22
3.3. Metoda demonstracije 23
4. MATEMATIČKA DAROVITOST.. 24
4.1. Kako se prepoznaju matematičke sposobnost.. 27
4.2.Nastavnici za rad sa matematički nadarenom djecom 31
4.3. Napredovanje darovite djece unutar školskog sistema.. 32
4.4. Obrazovanje nadarenih učenika 34
4.4.1. Akceleracija 34
4.4.2. Obogaćivanje redovnog nastavnog programa 37
4.4.3. Grupisanje učenika po sposobnostima 40
4.4.4. Dodatna nastava matematike i matematička sekcija 41
4.5. Odgovornost škole i nastavnika u rayvoju matematički darovitih učenika.......43
4.6. Takmičenja.. 43
5. METODE RJEŠAVANJA PROBLEMSKIH ZADATAKA 45
5.1. Metoda uzastopnih približavanja 45
5.2. Metoda uočavanja pravilnosti.. 47
5.3. Metoda ispisivanja sistemskih list.i.. 49
5.4. Metoda inverzije 50
5.5.Metoda dužina.. 52
5.6.Metoda površine pravougaonika.. 54
5.7.Logički zadaci.. 55
5.8.Dirihleov princip.. 57
5.9.Metoda pomočnih figura u planimetrijskim zadacima.. 59
5.10.Funkcija “apsolutna vrijednost”.. 61
5.11.Funkcija “najveće cijelo”.. 64

5.12.Diskusija rješenja linearne jednačine sa jednom nepoznatom…………………..65
5.13.Gausova metoda eliminacije……………………………………………………66
5.14.Diofantove jednačine……………………………………………………………68
5.14.1.Metod rastavljanja polinoma na činioce…………………………………69
5.14.2.Metoda osnovnog pravila o dijeljenju polinoma…………………………70
5.14.3.Metoda zbira stepena sa parnim eksponentima…………………………..71
5.14.4.Metoda posljednje cifre…………………………………………………..71
5.14.5.Metoda kongruencije……………………………………………………..72
5.14.6.Metoda nejednakosti……………………………………………………...73
5.15.Tablično rješavanje jednačina…………………………………………………73
5.16. Logaritamske nejednačine u kojima su i logaritamska veličina i baza promjenljive veličine…………………………………………………………………………. 74
5.17.Dokazi algebarskih nejednakosti primjenom odnosa između sredina……………75
6. ZAKLJUČAK.. 77
LITERATURA..78

1.UVOD

Oduvijek su daroviti učenici i podučavanje istih bili posebno zanimljivi svima koji su se imalo bavili obrazovanjem. Proteklih godina, svrha i značaj podučavanja darovitih učenika pretrpjeli su uticaj brojnih promjena. U novije vrijeme kao jedan od odlučujucih faktora za prepoznavanje darovitih učenika, ističe se inteligencija. Školstvo se u velikoj mjeri bavi time kako pravilno postaviti standarde koje učenici moraju zadovoljiti da bi bili okarakterisani kao daroviti, a da se pri tome ne ošteti nijedan učenik i da se prepoznaju razni oblici darovitosti. Međutim, nameće se jedno važno pitanje: Da li je pojam nadarenosti zaista značajan u obrazovnom sistemu koji se temelji na jednakosti svih učenika.Tragajući za odgovorom na ovo pitanje, treba krenuti od pretpostavke da su svi učenici jednako važni i zaslužuju isti tretman. Poznavanje razlika među njima znači prihvatanje činjenice da se učenici međusobno razlikuju. Zato se jednako djelotvornim smatra ponavljanje gradiva koje su daroviti učenici već potpuno savladali kao i napredovanje na viši nivo prije nego što su svi savladali osnove pojedinog gradiva.

Jedan od osnovnih problema kod tradicionalne metode podučavanja, koja je još uvijek najzastupljenija u većini školskih ustanova, jeste taj što ona ne dozvoljava odgovarajući pristup različitostima koje su vidljive kod učenika. Podučavanje se svodi na to da nastavnik predstavi određenu temu učenicima a zatim rješava svima jednako postavljen zadatak. U novije vrijeme, sve je veći broj nastavnika koji pokušavaju izbjeći ove tradicionalne metode, pri čemu se povećavanjem različitosti unutar jedne grupe učenika, predmetna metoda pokazuje manje djelotvornom.

Jedno je sigurno: na nastavnicima je odgovoran posao da prepoznaju nadarene učenike i još odgovorniji da ih podstaknu da tu svoju nadarenost ne zanemare, na protiv, da je iskoriste, njeguju i dograđuju i da im pomognu na tom putu svojim znanjem i razumijevanjem.

U ovom radu bavićemo se pojmovima darovitosti, inteligencije, njihovim razvojem, vrstama i raznim shvatanjima vezanih za darovitost. Pokušaćemo da odgovorimo na najčešća pitanja i dileme koje iz njih proizilaze. Takođe govorićemo o vrstama nastave u podučavanju darovite djece, o problemima i ljepotama rada sa njima.

U drugom dijelu rada ograničićemo se i posvetiti matematički nadarenoj djeci. Daćemo neke od smjernica koje bi trebale da pomognu nastavnicima pri objektivnoj identifikaciji ovih učenika koja u suštini jeste jedan od početnih problema. Isto tako, nadam se, da će mnoge informacije iz ovog rada pomoći nastavnicima pri samom radu sa matematički nadarenim učenicima.

I na kraju, navešćemo neke od metoda rješavanja problemskih zadataka koji jesu najčešći tip problema u radu sa matematički nadarenim učenicima, a koje su jako djelotvorne u ranijem uzrastu ove djece i sa kojim će naučiti neke od načina razmišljanja o matematičkim problemima, koje će kasnije ozbiljnije nadograditi. Ove metode sam pomenula jer smatram da rad se nadarenom djecom treba početi u nižim razredima i tada im predočiti temelje matematike kao nauke, kako bi im kasnije bila potrebna što manja pomoć u njihovom usavršavanju. Pored metoda za rad sa nadarenim osnovcima, navešćemo i metode za rješavanje ozbiljnijih matematičkih problema.

2. O DAROVITOSTI

2.1 Teorija darovitosti

2.1.1. Istorijat

Kroz istoriju ljudskoga roda, dometi u aktivnosti koja je unapređivala život, bili su predmet interesovanja i pokušaja da se oni dosegnu, od strane pojedinca i od cijelih društava. Danas, pažnju većine ljudi privlače naučna otkrića, umjetnička dijela i sportski rezultati. Postignuća djece se često porede sa postignućima odraslih stručnjaka u datoj oblasti. Takođe se ispituju i upoređuju njihovo ponašanje, osobine ličnosti i sposobnosti, sa željom da se budući stvaraoci prepoznaju i podrže u pravo vrijeme i na adekvatan način. Kod ovakve djece se nalaze kreativni potencijali, odnosno darovitost.

Početkom 20.vijeka započeta su naučna proučavanja darovite djece i mladih. Takođe obavljena su i mnoga istraživanja o prirodi darovitosti, kao i o oblicima njenog ispoljavanja i podsticajima njenog razvoja. Sva pitanja, tokom ovog proučavanja, se mogu svesti na dva osnovna- pitanje identifikacije i pitanje obrazovanja. Lako se može uočiti da davanje prednosti jednom ili drugom pitanju ima određene implikacije na obrazovanje i vaspitanje darovitih učenika. Tvrdi se da vaspitno-obrazovni rad treba da bude tako planiran i organizovan da dozvoli svoj djeci da maksimalno ispolje svoje potencijale. Škola se smatra jednim od ključnih faktora podrške razvoju talenata. Svaki rad sa darovitim učenicima u školi podrazumijeva definisanje ove kategorije učenika i njihov izbor na osnovu određenih indikatora. Postavlja se pitanje: Kako da izaberemo učenike kod kojih ćemo tražiti darovitost? Sud nastavnika i mišljenje roditelja su od presudnog značaja. Najprije se učenik podvrgava njihovom ispitivanju, pa se onda proglašava darovitim.
U različitim društvima se vrše razna testiranja inteligencije i znanja, pa se na osnovu dobijenih rezultata vrši klasifikacija darovitih učenika. Povoljnija situacija je kada postoji više podataka o učeniku. Tada se skretanje pažnje na određene učenike čini opravdanim. Što je više indikatora, to su veće šanse za izdvajanje darovitih učenika.

Da bi djeca i mladi sa posebnim sposobnostima razvili svoje kapacitete, potrebna im je stimulišuća i motivišuća okolina. Darovit učenik ne smije da bude zanemaren, jer se u tom slučaju njegova darovitost neće dovoljno razviti ili će se potpuno izgubiti. Takođe je i preopterećenje neželjeno. Od škole se očekuje da odnos prema darovitim učenicima ne svede na rješavanje pojedinačnih slučajeva, već da razvije sistem mijera koji će regulisati status darovitih učenika.

Obrazovanje i vaspitanje darovite djece postaje problem u okviru masovnog obrazovanja. Ranije je prilikom obrazovanja darovitih pojedinaca bilo velikih mogućnosti za usklađivanje zahtjeva sa sposobnostima učenika, ali širenje obrazovanja znatno umanjuje te mogućnosti. U ovakvim slučajevima daroviti učenici imaju posebne sklonosti za pojedine oblasti, ali najčešće nisu angažovani na pravi način. Sa druge strane prekomijerno angažovanje dovodi do premora, nesigurnosti u sebe i gubitka samopoštovanja. Daroviti pojedinci imaju pravo na adekvatno obrazovanje, koje će obezbijediti razvoj njihovih potencijala u potunosti. Na početku XXI veka od svih mladih se očekuje da tokom školovanja iskoriste i razvijaju svoje sposobnosti.

Preovladava uvjerenje da više nije dovoljno da učenici u školi nešto nauče i uspiješno rješavaju određene testove. Oni treba da se pripreme za savladavanje teškoća koje nose rad i život u uslovima savremenog svijeta, čija je glavna odlika sve brže promjene. Škola se usmjerava na obrazovanje i vaspitanje pojedinaca koji će vjerovati u svoje sposobnosti, imati bazična znanja i kompetencije, biti otporni na neizvijesnost, spremni da rizikuju, istražuju, osposobljeni za otkrivanje, rješavanje ali i postavljanje problema. Znanja i vještine koje učenici razvijaju i stiču tokom svog školovanja trebalo bi da im omoguće ne samo da uspiješno rade, već i da žive kvalitetno!

2.1.2 Darovitost i inteligencija

Brojni programi i strategije podučavanja polaze od tradicionalnog shvatanja inteligencije, koje je uticalo i na način shvatanja obrazovanja uopšte. Shodno tradicionalnom shvatanju, inteligencija je odlučujuće obilježje koje utiče na sposobnosti pojedinca u svim područjima. Takodje, predstavljena je kao nasljedno svojstvo koje se ne mijenja kroz vrijeme. U izučavanju inteligencije Robert Sternberg i Howard Gardener najuticajniji su i najviše citirani teoretičari. Sternberg je razvio teoriju prema kojoj inteligencija ima tri dimenzije. Prva se odnosi na mentalne mehanizme koji procesuiraju informacije, druga na savladavanje novih zadataka ili situacija te sposobnost da se postupak zaključivanja odvija automatski, dok se treća dimenzija odnosi na sposobnost prilagođavanja, biranja i oblikovanja okoline.

Teorija višestruke inteligencije Howarda Gardnera mnogo je raširenija medu nastavnicima. Vjerovatno zbog činjenice kako odražava ono što je učiteljima o učenicima od ranije poznato, a to je da postoji više različitih oblika da učenik bude "bistar". Gardner je svoju teoriju razvio kombinovanjem rezultata različitih istraživanja koja se bave sastavnim dijelovima inteligencije. Tako je do sada prepoznao sedam različitih oblika inteligencije:

- Verbalno – lingvistička (Očitava se kod onih koji znaju pričati priče pune detalja ili o vlastitim iskustvima precizno izvještavaju.)
- *Matematičko – logička* (Sposobnosti kojima se u tradicionalnim školama najviše bave, čini temelj velike većine standardizovanih mjerenja inteligencije.)

  Ova inteligencija podrazumijeva lako poznavanje i primjenu brojeva i matematičkih pojmova, pronalaženje obrazaca i lakoću u uočavanju odnosa, uzroka i posledica u nauci. Ova vrsta inteligencije dolazi do izražaja u rješavanju problema i zagonetki, rješavanju matematičkih zadataka, korištenju računara i učenju kompjuterskih programa i jezika, predstavljanju činjenica pomoću mapa, kao i u pronalaženju rješenja u detektivskim pričama. Ono što povezuje sve ove različite aktivnosti, a što je ključni element ove inteligencije, jeste logika koja se koristi kao sredstvo u rješavanju problema. Ova inteligencija je najbliža onome što zovu opšta inteligencija. Djeca trebaju mnoštvo prilika da rješavaju matematičke probleme, sastavljaju slagalice, pronalaze obrasce, upoređuju i suprotstavljaju stvari, klasifikuju ideje i materijale, rade statističke analize, izvode osnovne matematičke operacije, sastavljaju tangrame i dr.
- Muzičko – ritmička (Dijete koje posjeduje ovu inteligenciju samo sebi pjeva dok priča priču, ima sposobnost da u svom okruženju čuje različite zvukove i u muzici dobro razlikuje visine tonova.)
- Tjelesno – kinestetička (Dijete sa ovom izraženom sposobnosti pokazuje posebne sportske sposobnosti u igrama ili na igralištu.)

- Vizuelno – socijalna (Djeca sa lakoćom slažu dijelove slike i dobro im ide oblikovanje predmeta.)
- Intrapersonalna (Djeca koja dobro razumiju vlastitu sposobnost i raspon emocija, znaju biti jednostrano usmjerena na njima zadanu temu.)
- Interpersonalna (Djecu sa ovom inteligencijom drugi doživljavaju kao vođe. Osjetljiva su na osjećaje drugih, to su djeca koja se brinu za druge.).

Škole se uglavnom baziraju na logičko-matematičkoj i verbalno-lingvističkoj inteligenciji, a isti oblici mjere se tradicionalnim IQ testovima te standardizovavim provjerama znanja. Medjutim, ovo se počelo mijenjati kada su mnogi učitelji pokazali zanimanje za Gardnerovu teoriju i pokušali svojim podučavanjem obuhvatiti svih osam oblika inteligencije. David Perkins je obuhvatio sve teorije o inteligenciji i grupisao ih u tri cjeline. Neutralna inteligencija potiče iz biološkog sastava i određena je prema prirodnom uticaju tj.prema mentalnom procesu.Ovo je najtradicionalniji pogled na inteligenciju. Iskustvena inteligencija obuhvata poznavanje obrazaca ponašanja i situacija. Prema tome, inteligencija je pitanje iskustva razmišljanja u tačno određenom kontekstu. Misaona inteligencija temelji se na sposobnosti smišljanja strategija tj. poznavanju načina na koji treba razmišljati, načina kako posmatrati razmišljanje drugog i načina na koji istrajati u tome. Perkins smatra kako sve tri dimenzije utiču na inteligentno ponašanje. Joseph S. Renzulli, je razvio pojam nadarenosti utemeljen na tri "prstena", koji se sastoji od nadprosječne sposobnosti, kreativnosti i predanosti zadatku odnosno motivaciji. Iako će pojedini učenici iskazati ovakve obrasce ponašanja stalno i kroz sva područja, drugi će ih pokazati samo u pojedinim aktivnostima i područjima interesovanja. Renzulli ističe da je najdjelotvorniji način podučavanja nadprosječnih učenika taj da nastavnik odabere sadržaj i način podučavanja u skladu sa učenikovim potrebama. Kako je koncept inteligencije postajao sve više nejasan, tako se koncept darovitosti sve više razvijao. Ako inteligencija nije jednoznačno određena sposobnost, ne može biti ni jedinstvene defnicije darovitosti. Škole se moraju više usresrediti na identifikovanje sposobnosti i područja u kojima je učenik jak, radije nego da svim učenicima dodjeli isti nivo sposobnosti.

Uvaženo mišljene u svijetu o darovitosti i talentu:
Daroviti su oni učenici koji pokazuju potencijal za izuzetnu uspješnost u mnogim različitim područjima djelovanja.
Talentovani su oni učenici koji pokazuju potencijal za izuzetnu uspješnost u jednom području djelovanja.

Navedimo sada podjelu sposobnosti darovitih učlenika koja nam može biti od velike koristi pri prepoznavanju i uočavanju darovitosti:

- Lakoća formulacije problema
- Hitrost uma
- Prilagodljivost u rukovanju podacima
- Sposobnost organizacije podataka
- Originalnost u interpretaciji
- Sposobnost prenošenja ideja

2.1.3. Pogrešna shvatanja nadarenih učenika

Postoji mnogo pogrešnih predstava o darovitim učenicima koje u mnogome njihova sredina može spriječiti. Navešćemo neke od najčešćih zabluda i pogrešnih mišljenja koje okolina ima prema nadarenim učenicima:

1. Daroviti učenici su pametni i mogu se brinuti sami za sebe

Kada učenici ne dobiju obrazovanje primjerno njihovim potrebama oni gube motivaciju, a ponekad i samo interesovanje za učenje i školu. Istraživanja pokazuju da se njihova interesovanja za napretkom neće održati niti razvijati do kraja ukoliko nisu u potpunosti motivisani.

2. Daroviti su učenici uspješni u svim predmetima

Iako postoje učenici koji briljiraju u svim područjima, velika većina njih pokazuje darovitost za samo jedno od njih. Daroviti učenici mogu imati poteškoća sa učenjem pojedinih predmeta dok ostale predmete polažu sa lakoćom.

3. Nadareni učenici su jedna homogena grupa

Kao i sve druge grupe, nadareni učenici imaju različita interesovanja, područja u kojima odskaču od drugih, različite sposobnosti i temperament. Ne postoje tačno defnisane karakteristike nadarenog učenika niti se svi učenici trebaju tretirati na isti način.

4. Svi učenici su talentovani u nekom području

Ovo je nešto poželjno i istina je da sva djeca mogu učiti i da ona imaju područja u kojima odskaču. Medutim, činjenica je da pojedinci uče brže od ostalih i sposobni su da nauče više. Nadarenim učenicima je potreban drugačiji sadržaj gradiva i poučavanje nego ostaloj djeci da bi se zadovoljile njihove potrebe.

2.1.4. Savremene teorije darovitosti

Prije nego što se krene sa opisivanjem savremenih teorija darovitosti, postavlja se pitanje ko su zapravo daroviti učenici? U literaturi se uglavnom sreću dvije sintagme, koje u bukvalnom prevodu znače „školski napredni“ i „ranije sazreli“. Kako sami nazivi kažu, kod „školskih naprednih“ učenika je naglasak na znanjima i sposobnostima za učenje, a kod „ranije sazrelih“ mladih u prvi plan se ističe brzina njihovog razvoja. „Školski napredni“ učenici znaju više i i uče brže i lakše od drugih iz svog odeljenja i škole, dok kod „ranije sarelih“ se brže dosežu viši razvojni stepeni i kraće se zadržavaju na pojedinim stepenima od svojih vršnjaka. U oba slučaja se daroviti učenici određuju kao superiorni u odnosu na svoje vršnjake, a često se po karakteristikama i postignuću porede sa starijim drugovima i odraslim osobama. Međutim, pouzdano se zna da daroviti učenici nisu samo oni koji ispoljavaju visoke sposobnosti, dobro uče, postižu odličan školski uspijeh već ih ima i među neuspiješnima, problematičnim, hendikepiranim pošto nisu uvijek uspiješno integrisani, već pokazuju tendencije ka raznim oblicima neadaptiranog ponašanja i reagovanja.

Postoje razne teorije za opisivanje darovitosti, ali će ovdje biti predstavljene tri najčešće koncepcije darovitosti: Stenbergova, Renzulijeva i teorija po Ganjeu. Vrijednost ovih teorija leži u tome što originalno rješavaju relacije između ključnih pojmova-kreativnosti, sposobnosti i ličnosti. Stenbergova koncepcija darovitosti je kognitivistička i pokazuje domete ovakvog pristupa u tumačenju darovitosti. Renzulijeva teorija ima implicitnu teorijsku osnovu, što znači da ne naglašava posebno kognitivne operacije, niti razvoj, ali je rezultat uopštavanja višegodišnjeg iskustva u vaspitno-obrazovnom radu sa darovitom decom te je kao takva bliska školskoj realnosti. Ganje nudi eklektički model koji razlikuje i određuje odnose između darovitosti i talenata, darovitosti i kreativnosti i talenata i kreativnosti.

Stenbergova teorija o darovitim osobama

Stenberg opisuje darovitost kao izuzetnu, neuobičajenu inteligenciju. Za njeno objašnjenje i razumijevanje autor prema sopstvenom tumačenju nudi složenu teoriju koju izvodi iz svoje teorije inteligencije. Darovitost nije ista kod svih osoba, kao ni inteligencija. Ona se može dosegnuti različitim putevima i ispoljavati kroz različite oblike. Kognitivni, iskustveni i adaptivni aspekt intelektualne darovitosti objašnjavaju se komponentnom, iskustvenom i kontekstualnom podteorijom. Prva podteorija odgovara na pitanje kako su ponašanja inteligentna u datom okruženju; druga podteorija odnosi se na pitanje koja su ponašanja inteligentna za datu individuu, a treća podteorija objašnjava gde su koja ponašanja inteligentna.

Komponentna podteorija povezuje inteligenciju sa unutrašnjim svijetom i specifikuje mentalne mehanizme koji leže u osnovi izuzetno inteligentnog ponašanja. Stenberg razlikuje komponente sticanja znanja, metakomponente i radne komponente, u zavisnosti od toga da li se radi o procesima koji učestvuju u učenju kako se nešto radi, u planiranju šta će se i kako raditi ili u samom obavljanju zadatka. Metakomponente obuhvataju procese višeg reda koji se koriste kod planiranja, praćenja i odlučivanja tokom rada na zadatku.

Iskustvena podteorija odnosi se na značaj prethodnog iskustva za zadatke koji se rješavaju ili na situacije u okviru kojih se javljaju postavljeni zadaci. Najvažnije su vještine rada sa novim, nepoznatim materijalom i sposobnost automatizovanja informacionih procesa. Novina i automatizacija idu zajedno tako da što je osoba efikasnija u pogledu jedne od njih, ostaje više mogućnosti da bude uspiješna i u drugoj. Međutim, sa povećanjem iskustva opada novina i zadatak postaje manje pogodan za mjerenje inteligencije.

Kontekstualna podteorija povezuje inteligenciju sa spoljašnjim svjetom koji okružuje datu osobu. Izuzetna inteligencija se javlja u kontekstu kao svrhovita adaptacija na okolinu, kao oblikovanje okoline i kao selekcija okoline koja je relevantna za datu osobu. Za mjerenje kontekstualno usmjerene inteligencije mogu se upotrebiti tri klase inteligentnih ponašanja: sposobnost rješavanja problema, verbalne sposobnosti i socijalne kompetentnosti. Prema Stenbergovim riječima, kreativnost se može smatrati dimenzijom inteligencije, kao i tipom darovitosti.

Najbitnije intelektualne karakteristike kreativno darovitih osoba predstavljaju njihove sposobnosti da vide probleme na drugačiji način od ostalih ljudi, da misle divergentno o mogućim rješenjima i da koriste procese uviđanja prilikom rješavanja problema ili ispunjavanja zadatka. Kreativno daroviti ljudi su izuzetno uspiješni u definisanju problema, strateškoj upotrebi divergentnog mišljenja i vještinama selektivnog kodiranja, poređenja i kombinovanja informacija. Sljedeću karakteristiku kreativno darovitih ljudi predstavljaju njihova velika znanja. Stvaranju kreativnih dijela prethode godine učenja i sticanja znanja. Darovita djeca provode mnogo vremena prikupljajući informacije u oblasti svoga interesovanja što im obezbeđuje dobru osnovu znanja.

Pojedinci mogu imati iste visoke sposobnosti, ali će njihovo postignuće biti različito zato što se međusobno razlikuju po tome kako koriste te svoje sposobnosti. Sklonost pojedinca da koristi svoje sposobnosti na određeni način predstavlja njihov intelektualni ili kognitivni stil. Po Stenbergovom uvjerenju, svaki čovek u svom mentalnom funkcionisanju ispoljava dominaciju jedne od tri osnovne funkcije - zakonsku, izvršnu i sudsku, koje predstavljaju njegov stil mišljenja. Osobe sa zakonskim stilom vole da stvaraju svoja pravila, rade na problemima koji su jedinstveni, na zadacima koji su slabije struktisani i zahtijevaju konstruktivno planiranje. Osobe koje imaju izvršni stil vole da slede pravila i izračunavaju koji su putevi najbolji za primjenu plana, birajući probleme sa zadatom strukturom. Ljudi sa sudskim stilom vole da procenjuju pravila i procedure, da sude o postojećim strukturama i da ispituju ponašanje ljudi. Kreativno darovite osobe odlikuje pretežno zakonski stil. Ovaj stil mišljenja obećava najbolje uslove za ispoljavanje kreativnosti, stvarajući situacije koje zahtijevaju uvođenje novog i uključivanje mašte da bi se premostilo nepoznato, povezalo raznorodno itd.

Osobine ličnosti predstavljaju sljedeći resurs kreativne darovitosti o kome govore Stenberg i Lubart. Da bi osoba stvorila kreativno djelo treba da ima i određeni sklop osobina koji će joj u tome pomoći. Među karakteristikama ličnosti najveći značaj imaju: sposobnost tolerisanja nejasnoća, spremnost za umjereno preuzimanje rizika, želja da se prevaziđu teškoće kada se na njih naiđe u radu i da se izdrži uprkos njima, da se ide dalje, da se napreduje i „raste“ u datoj oblasti. Neophodno je i izvjesno samopoštovanje, koje pomaže pojedincu da podnese i riješi probleme sa kojima se susreće, dok ne završi to što radi i dok se drugi ne uvjere u vrijednost toga na čemu je radio. Stenberg tvrdi da kod kreativno darovitih osoba dominira motivacija orijentisana na zadatak. Autori kreativnih djela ispoljavaju veliko interesovanje i ljubav za predmet kojim se bave, visoku koncentraciju pažnje i uopšte uporno rade u određenoj oblasti i na određenom problemu dok ne dođu do njegovog rješenja.

U određenim etapama rada na zadatku spoljašnji motivatori su vrlo poželjni. Njihov pozitivan uticaj ogleda se u tome što podstiču pojedinca ne skrećući njihovu pažnju sa zadatka. Spoljašnje nagrade mogu uspješno da motivišu kreativnu produkciju u slučajevima kada već postoji visok nivo motivacije orijentisane na zadatak, što se dešava u kasnijim fazama kreativnog rada. Istraživanja pokazuju da kreativno darovite osobe imaju želju da postignu savršenstvo u tome što rade, teže da to što rade urade odlično, da samoaktualizuju svoje potencijale, kao i da zadovolje želju za intelektualnom novinom.

Sve navedene karakteristike - sposobnost, znanje, kognitivni stil, osobine i motivisanost pretvaraju se u kreativnu darovitost u interakciji sa okolinom u kojoj se osoba nalazi. Sredina najviše utiče na razvijanje kreativnosti svojom opremljenošću, sadržajima i orijentacijama, nagrađivanjem i vrjednovanjem kreativnih proizvoda. Kreativni stvaraoci često potiču iz porodica i sredina koje su pružale povoljne uslove za njihov razvoj. Ono što važi za porodicu , važi i za ostale društvene institucije. Kreativno ponašanje ispoljava se tamo gde se nagrađuje , što znači da sredina koja nagrađuje nekreativno , konformističko ponašanje ne može da očekuje kreativnost ljudi koji u njoj žive. Jedna ideja može u jednoj sredini biti procjenjena kao vrijedna, a u drugoj kao bezvrijedna. U zavisnosti od toga gdje se pojedinac nalazi, on će biti podstaknut ili obeshrabren da nastavi sa svojim radom.

Divergentno mišljenje je malo ili nimalo zastupljeno u školskom radu. Školsko učenje se svodi na pamćenje što većeg broja informacija koje se prezentuju u obliku činjenica. I kada se dozvoljava razmišljanje i traganje za odgovorom, školske ocjene se daju na uobičajen način. Traži se jedan tačan odgovor do kojeg je učenik došao na način koji je pokazao nastavnik. Ocjene su toliko značajne da učenici brzo nauče da ne rizikuju, već misle i odgovaraju na traženi način. Vođeni spoljašnjom motivacijom mogu da postignu visok uspijeh u školi, a da uopšte nisu stvarno zainteresovani niti vezani za zadatke koje ispunjavaju. Konačan razultat je da učenik ne razvija motivaciju usmjerenu na zadatak koja mu je neophodna za kreativnu produkciju.

Kroz cjelokupno školovanje, nastavnik određuje šta učenik treba da radi, a od učenika se očekuje da ta naređenja izvrši. Očigledno se nagrađuju učenici koji ispoljavaju izvršeni kognitivistički stil. Standardnim testiranjem se identifikuju učenici sa izvršno-lokalnim stilom, koji se radom u školi potvrđuje i nagrađuje. Na taj način kreativnost se ne traži i ne podstiče. Stenberg je vrlo kritičan po tom pitanju. Primjedbe o pogrešnom izboru i neadekvatnom radu odnose se kako na obavezni program, tako i na razne programe namjenjene darovitim učenicima. Ovi programi pružaju slične mogućnosti koje pružaju redovni programi, ne utičući bitno na kreativnost učenika.

Renzulijeva teorija o darovitim ponašanjima

Renzuli pod darovitošću podrazumijeva darovito ponašanje. Ono odražava interakciju tri grupe karakteristika: natprosječne intelektualne sposobnosti, visokog nivoa posvećenosti zadatku i visokog nivoa kreativnosti. Darovita i talentovana djeca su ona koja posjeduju ovaj kompozitni sklop crta i primjenjuju ga na bilo koju potencijalno vrijednu oblast ljudskog rada. Darovitost djece razlikuje se od darovitosti odraslih. Djeca mogu da budu darovita tako da uspiješno ispunjavaju zadatke koji im se postavljaju u školi i kod kuće ispoljavajući uz to veliku sposobnost učenja.

Darovito ponašanje se javlja kod nekih ljudi, u nekim periodima života i pod određenim uslovima. Visok nivo ostvarenja u različitim oblastima zahtjeva različite stepene inteligencije. Renztuli prihvata opredjeljenje većine istraživača da je za visok nivo kreativno-produktivnog ostvarenja u određenom polju potrebna natprosječna, ali ne i izuzetno visoka inteligencija.Kada je koeficijent inteligencije 120 ili veći, uvećava se i značaj drugih, neintelektualnih varijabli za kvalitet postignuća.

Renzuli govori o dobrim natprosječnim sposobnostima, specifikujući opšte i posebne sposobnosti koje u njih ulaze. Od opštih sposobnosti pominju se: visok nivo apstraktog mišljenja, verbalno i numeričko rezonovanje, shvatanje prostornih odnosa, memorija i verbalna fluentnost, adaptacija na nove situacije i oblikovanje novih situacija koje se sreću u spoljašnjoj sredini i automatizacija informacionih procesa. Posebne sposobnosti obuhvataju primjenu različitih kombinacija opštih sposobnosti na jednu ili više oblasti znanja ili ljudskog djelovanja; kapacitet za traženje i odgovarajuću upotrebu formalnog znanja, znanja koje se podrazumeva, tehnike, logike i strategija u rješavanju pojedinih problema.

Posvećenost zadatku podrazumjeva kapacitet za veliku zainteresovanost, zanos, fascinaciju i uključenost u problem, oblast proučavanja ili oblik ljudskog izražavanja; kapacitet za istrajnost, izdržljivost, određenost, težak i posvećen rad; samopovjerenje, jak ego i vjerovanje u sopstvenu sposobnost za izvođenje značajnog posla, oslobođenost od osjećanja slabosti i nemoći, težnju za postignućem, sposobnost da se identifikuju problemi u posebnim oblastima, sposobnost da se bude na glavnim tokovima razmijene i novina u datim oblastima, postavljanje visokih standarda za sopstveni rad, zadržavanje otvorenosti i spremnost da se prihvati kritika od drugih, kao i da samog sebe kririkuje, razvijanje ukusa za lijepo i kvalitetno.

Za Renzulija, kreativnost u okviru darovitosti predstavlja fluentnost, fleksibilnost i originalnost mišljenja, a ispoljava se kao: otvorenost za različita iskustva, prijemčivost za novo i drugačije u mislima, djelovanju i proizvodima kod sebe i kod drugih ljudi, radoznalost, spekulativnost, sklonost pustolovinama, „mentalna živahnost“, želja za preduzimanjem rizika u mislima i stvarnim aktivnostima, osjetljivost za detalje, želja da se reaguje i dijela prema spoljašnjim stimulusima na sopstvene ideje i osjećanja. Slično Stenbergu, Renzuli u svojim novijim radovima posebnu pažnju posvećuje kreativnosti, koju definiše kao kreativnu produktivnost.

Analiza kreativne produkcije u osnovi ima karakteristike pojedinca. Kod učenika, mora da uključi njihove sposobnosti, interesovanja i stilove učenja kao najvažnije lične varijable. Renzuli razlikuje situacionu i realno-produktivnu kreativnost. Situaciona kreativnost se dešava u strukturisanoj situaciji, kada se rješava postavljen problem, a angažovani pojedinac doživljava svoj rad kao samoaktualizujuću aktivnost. Realno-produktivna kreativnost podrazumjeva rad na samostalno izabranom problemu, uz korišćenje autentične metodologije i rezultira, dovodi do stvaranja jedinstvenog postignuća.

Ganjeova teorija o darovitim postignućima

Za razliku od Stenberga, koji darovitost traži u kognitivnim mehanizmima i procesima, i Renzulija koji razmatra darovita ponašanja, treći izabrani autor, Ganje, u centar svog interesovanja stavlja darovito postignuće. Za Ganjea darovitost predstavlja izrazitu natprosječnu kompetentnost u jednoj ili više oblasti sposobnosti, a izrazita natprosječnost u jednom ili više područja ljudskih aktivnosti je talenat. Kreativnost je samo jedno od područja ljudskih sposobnosti koje može da učestvuje u svakoj oblasti darovitosti.

Ganje pravi razliku između darovitosti i talenta. Darovitost označava posjedovanje i korišćenje neuvježbanih i spontano izraženih prirodnih sposobnosti u najmanje jednoj oblasti sposobnosti, u stepenu koji omogućava djetetu da se u poređenju sa vršnjacima po toj karakteristici nađe među 15 % najboljih. Talenat označava superiorno vladanje sistematski razvijenim sposobnostima i znanje u bar jednom polju ljudske aktivnosti, u stepenu koji svrstava djetetovo postignuće među 15% najboljih rezultata njegovih vršnjaka aktivnih u tom polju ili poljima.

U okviru 15% najboljih, koji predstavljaju osnovnu kategoriju talentovanih osoba, mogu se razlikovati tri podgrupe - niži, srednji i najviši nivo postignuća. Niži nivo postignuća označen je kao „umjereno talentovan“ i obuhvata 2-3% najtalentovanijih osoba najviših rezultata u polju koje se posmatra. Kao „visokotalentovane“ mogu se označiti jedna do dve osobe na hiljadu, a „ekstremno talentovano“ je samo dvadeset do trideset osoba od milion ljudi.

Ganje najprije određuje domene darovitosti, to jest potencijala. Model sadrži pet domena sposobnosti: intelektualne, kreativne, socioafektivne, senzomotorne i „ostale“. Intelektualni potencijali obuhvataju rezonovanje, pamćenje i suđenje. Kreativan dar se odnosi na originalnost, investivnost, humor i drugo. Socioafektivni potencijal ispoljava se kroz empatiju, samosvijest, vođstvo, a senzomotorni preko snage, fine motorne kontrole, trajanja i fleksibilnosti motornih radnji. Darovitost je prirodna sposobnost koja ima genetsku osnovu i može se opaziti u svakom zadatku sa kojim se djete suočava tokom svog školovanja. Potencijali, odnosno darovitost, mogu se lakše uočiti kod mlađe djece zato što su uticaji okoline i sistematsko učenje djelovali samo u ograničenoj mjeri, tako da se ono što djete umije i zna ne može pripisati njima. Kod starije djece, pa i odraslih osoba, darovitost se ispoljava preko lakoće i brzine kojom stiču nove vještine u bilo kom polju ljudske aktivnosti; što se lakše i brže uči, veće su prirodne sposobnosti. Kako sam Ganje kaže, to su one prirodne sposobnosti koje neki laici zovu „talenti“ ili „prirodni talenti“, dok ih on imenuje kao „darove“.

Prirodne sposobnosti ili darovi mogu se opisati kao „sirov materijal“ koji predstavlja sastavni deo talenta. Ovo znači da talenti obavezno uključuju natprosječne prirodne sposobnosti iz čega sledi da niko ne može biti talentovan ako nije darovit. Međutim, ako je neko darovit, ne znači da će obavezno postati talentovan. Primjer za ovaj slučaj predstavljaju mnoga intelektualno darovita djeca koja u školi ne postižu odgovarajući akademski uspijeh. Njihove prirodne sposobnosti ostale su na nivou potencijala. Školski neuspijeh najsposobnijih učenika ozbiljan je lični i društveni problem. Jedan od ključnih zadataka škole jeste transformacija početnih potencijala učenika u prave talente.

Razvojni procesi predstavljaju sledeći element modela koji povezuje potencijale i talente, a čine ih učenje, uvježbavanje i korišćenje. Na razvojne procese djeluju dvije grupe faktora koje Ganje naziva katalizatorima. Među katalizatorima ličnosti najvažnija je motivacija, kojom započinje proces razvoja talenta. Početne sposobnosti preobražavaju se u određeni talenat zavisno od toga koliko je pojedinac motivisan da uči, vježba i da ih koristi. Motivacija je ta koja vodi pojedinca preko prepreka, kroz dosadu i omogućava prevazilaženje povremenih neuspjeha, koji nužno stoje na putu razvoja svakog talenta, ma koliki bili potencijali. Temperament, kao nasleđena predispozicija osobe da se ponaša na određeni način i stečeni stilovi značajno doprinose razvoju talenta, bilo da ga stimulišu ili usporavaju. Podjednako značajan katalizator razvoja talenta predstavlja okruženje. Uticaj sredine može se posmatrati na makro i mikro planu. Makro plan obuhvata ulogu sredine kao geografske, demografske i sociološke kategorije. U mikrookvirima, sredina djeluje preko porodice i njenih bitnih karakteristikja, kao što su socioekonomski status, broj članova, ličnost roditelja i njihovi vaspitni stilovi.

Kreativnost za Ganjea postoji kao vrsta darovitosti. To je jedna od sposobnosti, potencijal, dok se prema novijim radovima, ne može govoriti o kreativnom talentu jer se kreativna nadogradnja utapa u oblast i predmet kroz koji se ispoljava. Kod Ganjea, tumačenje uloge škole u razvoju dječijih talenata znatno je skromnije od onog koje nude dva predhodna autora, Stemberg i Renzuli. Ono što se može naći kod ovog autora jesu profili talentovanih učenika. Ganje je prikupio veliki broj opisa koje je nazvao prototipovima darovitih učenika i isprobavao ih u više istraživanja. Određene sposobnosti i talenti dva puta se više vezuju za mušku nego za žensku djecu. Za dječake češće procjenjivano da imaju fizičke sposobnosti i tehničke talente, dok su djevojčice češće procjenjivane kao talentovane za umjetnost i sa višim socioafektivnim sposobnostima.

Prema novijim ispitivanjima, listu od dvanaest najčešćih tipova darovitih učenika u učionici čine: enciklopedista, „munja“, povjerljiv tip, diplomata, gimnastičar, tip sa brzim refleksima, gramatičar, geograf, komičar, instrumentalista, sudija i koordinaror. Spisak obuhvata po dva predstavnika intelektualnih stavova (enciklopedista i „munja“), socioafektivnih stavova (povjerljiv tip i diplomata), fizičkih stavova (gimnastičar i tip sa dobrim refleksima), akademskih talenata (gramatičar i geograf), umetničkih talenata (komičar i instrumentalista) i interpersonalnih talenata (sudija i koordinator). Enciklopedista puno zna o raznim stvarima i izvan školskih predmeta. „Munja“ bzo razumije objašnjenje i često nalazi odgovore pre drugih. Povjerljiv tip je učenik koji zna da sluša i čuva tuđe tajne, da utješi druge i učini da im bude dobro. Diplomata lako sklapa poznanstva i prijateljstva, lako komunicira sa odraslima i djecom koje ne poznaje. Gimnastičar je jako dobar u fizičkim vježbama koje zahtijevaju ritam, ravnotežu, fleksibilnost i koordinaciju. Osoba brzih refleksa je učenik koji je vrlo vješt sa rukama, dobar u igrama koje zahtijevaju brze reflekse. Gramatičar dobro zna gramatička pravila i piše bez grešaka. Geograf zna puno o različitim krajevima svijeta i načinu života u pojedinim zemljama. Komičar nasmije svakog svojim vicevima, imitacijama i improvizacijama. Instrumentalista dobro svira jedan ili više muzičkih instrumenata. Sudija je uspiješan u rješavanju sporova između učenika, zna da pomogne drugima kako da naprave kompromis i da se dogovore i slože. Koordinator je dobar organizator, kada se radi na projektu, misli o svim detaljima, zna kako da raspodijeli posao i sve stiže na vrijeme.

2.2. Identifkacija darovitih učenika

Za identifkaciju talentovanih ili darovitih učenika koriste se mnogi izvori informacija koje se mogu svrstati u tri kategorije, a to su primjena mjernih skala i lista za provjeru, primjena različitih vrsta standardizovanih testova i naravno nastavnikova procjena. Roditelji imaju jako veliku ulogu u identifkaciji darovitih učenika i zato je bitna saradnja s njima.

2.2.1. Liste za provjeru i skale procjene

Procjenjuje se da se 90% moždanih stanica razvija do djetetove pete godine, što nam govori da su roditelji najvažniji djetetovi učitelji. Oni bitno utiču na razvoj djeteta, zato je važno da škole dobiju informaciju o njima kada djeca krenu u školu te im osiguraju primjeren program. Rad škole temelji se na vrjednovanju i proširenju iskustva djece kada dođu u školu. Ta iskustva nisu ista kod sve djece nego jednoznačno istaknuta kod svakog pojedinačno i zato s njima treba postupati na primjeren način. Roditelji promatrajući i bilježeći djetetov razvoj u emocionalnom, intelektualnom, tjelesnom, moralnom i kreativnom smislu pokušavaju za svako dijete pronaći odgovarajuće aktivnosti, iskustva i interakciju. Zato je važno da roditelji, popunjavanjem raznih listi, doprinesu otkrivanju djetetovog potencijala.

Rani znakovi darovitosti obuhvataju:

- Jezičnu vrsnost, upotrebu fraza i cijelih rečenica u veoma ranom uzrastu
- Velik broj riječi u ranom uzrastu, pravilno upotrijebljenih
- Rani razvoj čitanja
- Sposobnost duže koncentracije nego kod ostale djece
- Zanimanje za knjige, rječnike, enciklopedije i atlase
- Velika radoznalost i smisao za zabavu i humor.

Radi subjektivnosti uobičajene procjene darovitosti, mnogi zagovaraju upotrebu kontrolnih listi. One mogu pomoći da roditelje i nastavnike upozore na eventualne propuste koje su napravili u otkrivanju djetetove darovitosti. Takodje, mogu uticati na strategije i pokrenuti dijalog s djecom i roditeljima.

Većina listi za provjeru bazira se na inteligenciji i kreativnosti ali se njihova valjanost rijetko provjeravala u razredu. One često potvrđuju procjenu nastavnika stoga najvjerovatnije neće polučiti rezultate radi kojih su nastale. Među kontrolnim listama za provjeru po predmetima izdvojićemo listu za provjeru matematičkih sposobnosti koju su nastavnici uočili u ponašanju darovitih učenika.

KONTROLNA LISTA ZA PROVJERU MATEMATIČKIH SPOSOBNOSTI

Pokazuje li dijete upornost u traženju najboljeg i najjednostavnijeg rješenja problema? Djeca koja imaju dara za matematiku ne umaraju se lako kada su zaokupljeni rješavanjem zadataka.
Pokazuje li dijete samopouzdanje u novoj matematičkoj situaciji i inicijativu pri rješavanju zadataka? Djeca će izjaviti nešto poput: 'Znam, pokušaću ovo!', 'Ne, to ne može biti dobro...' ili 'Gledaj, pokazaću ti!'.
Otvorenost uma? Matematički nadarena djeca odvagaće dokaze i biti spremna promijeniti gledište u skladu s dokazima.
Stalno sam sebi postavlja pitanja tokom nastave i kod kuće? Na primjer: 'Koliko sekundi traje ljudski život?' ili 'Koliko brzo ide avion?' ili 'Koliku površinu mogu vidjeti s vrha tornja?'...
S lakoćom izražava misli, stalno sebi postavlja pitanja i rado vrši misaone eksperimente? Ovo se u matematici može vidjeti kao pružanje otpora da napiše cijelo rješenje zadatka kojeg može riješiti napamet, u glavi.
Pokazuje posebno zanimanje za brojeve (npr. brojevi automobila imaju posebne oznake, 124 je djeljiv sa 2...)?
Posebno se zanima za razne oblike?
Često je u stanju kraćim postupkom doći do rješenja problema jer želi izbjeći standardne metode?

2.2.2. Testovi

Talentovanu i darovitu djecu često identifikujemo primjenom standardnih testova. Njima mjerimo znanje, umijeće i sposobnost darovitih pojedinaca. Danas se u svijetu koriste rezultati testova grupne inteligencije i postignuća, a njima se može tačno prepoznati oko 96% darovitih učenika. Koriste se pojedinačni testovi inteligencije gdje pojedinac treba postići nadprosječan uspjeh, koji se obično ne temelji na riječima. Potrebno je ocjenjivanje širokog spektra kako bi se izmjerila uspješnost, potencijal i napredak. Nastavnici u neformalnom ocjenjivanju učenika koriste svoju stručnost i instinkte ali i formalna ocjena će dati rezultate jer će nastavnika navesti da potvrdi svoje prve utiske ili ga podstaći da ih promjeni na nove i objektivnije. Ti testovi mogu biti uzeti kao dokaz učenikove velike sposobnosti.

Počevši od procjene male djece pa sve do državne mature, ispita na fakultetu, ocjene su jedno od glavnih mjerila znanja, no većina njih je usklađena s nastavnim strategijama. Velika većina nastavnika smatra da bi testovi na državnom nivou, poput državog ispita, trebali reći šta je potrebno znati o učenicima te da ostali testovi nisu potrebni. Zabluda je da su takvi testovi standardizovani testovi koji se temelje na normama, oni su zapravo testovi koji se temelje na kriterijumima. Ne sporimo da oni donose korisne podatke o djetetu ali ne mogu pokazati koliko su pojedinci uspješni u odnosu na stvarni stepen za njihov uzrast. Da bi se prepoznali talenti koje djeca imaju, potrebno je proširiti način ocjenjivanja. Samo testovi temeljeni na normama mogu pokazati objektivne rezultate, u kombinaciji sa standardiziranim testovima može se vidjeti koliko je pojedini učenik uspješan obzirom na svoje vršnjake. Testovi temeljeni na normama i oni temeljeni na kriterijumima u kombinaciji s državnim testovima pokazuju komponentu dodatne vrijednosti čime će rezultat testa imati više smisla. Jedan od problema koji se javlja u obrazovanju je taj da roditelji jako malo očekuju od svoje djece. Stoga pri izradi i standardizaciji testova važno je postići da se djeca osjećaju dovoljno motivisano da daju sve od sebe.

2.2.3. Procjena nastavnika

U preko 90% slučajeva u svim identifikacijskim postupcima o kojima se izvještavalo u stručnoj literaturi, bila su uključena opažanja i nominacije nastavnika. Pod nazivom nastavnik misli se na :učitelja, nastavnika, profesora u osnovnoj, srednjoj školi i na fakultetu. Istraživanja pokazuju slabo dijagnostikovanje darovite djece od strane nastavnika. To se smatra nedovoljnom pripremljenosti nastavnika za postupke otkrivanja nadarenih učenika tj.nedostatak teorijskog znanja.

Kod pripremanja i osposobljavanja nastavnika za ulogu nominatora nadarenih učenika, moraju se imati u vidu i osnovni izvori grešaka u njihovim procjenama u njihovim dijagnozama. Nastavnici pretežno kod učenika najviše vrjednuju školsko postignuće, izraženo visokim školskim ocjenama. U pogledu nadarenosti tu se može javiti dvostruka greška: da proglašavaju nadarenima, po sposobnostima realno prosječne učenike sa univerzalnim odličnim ocjenama, koji su taj uspijeh postigli marljivim radom, radnom disciplinom i u povoljnom sociološkom okruženju, u dobrim ekonomskim uslovima. S druge strane da nastavnik ne prepozna nadarenog učenika sa manjom ocjenom iz razloga teškog sociološko-ekonomskog stanja u porodici, zapuštenosti itd. Sljedeći faktor koji može navesti da više ili manje savjesno ne analizira nadarenost učenika je manifestacioni otpor takvih učenika rutinskim i za njih dosadnim školskim situacijama. Taj se otpor može odraziti u vidu stalnih dosadnih pitanja, upadica u riječ nastavnika, protesta, brbljanja s drugima ili pak u obliku bavljenja svojim aktivnostima, sanjarenja, povlačenja u sebe, itd. Ovo ometanje redovne i “propisane” razredne ili grupne atmosfere nastavnici mogu protumačiti nedisciplinom i svoje nezadovoljstvo s tim ponašanjem onda reflektuju na svoj vrijednosni stav u smislu smanjenja opštih kvaliteta takvih pojedinaca. Nadalje, ponekad i neke devijacije u osobinama ličnosti nadarenih učenika: izrazita introvertiranost, jača aksioznost, depresija i slično mogu za nastavnike predstavljati znatne prepreke u otrkivanju njihove superiornosti u drugim područjima. U nabrajanju uzroka nedovoljne valjanosti dijagnoze nastavnika ne smije se zaboraviti i na uobičajne greške subjektivnog procjenjivanja, kao što su halo-efekat, lična procjena ocjenjivača, tendencija centralnim ocjenama, logička greška, prilagođavanje kriterijuma konkretnom uzorku itd… Ima u literaturi još jedna pojava a to je namjerno omalovažavanje nadarenih. Naime, ponekad, odnosno ponekom emcionalno i socijalno nedovoljno prilagođenom nastavniku smetaju briljantni učenici, na neki način im je zavidan i onda ignoriše njihovu nadarenost odnosno uskraćuje podršku njihovom razvoju, ali to su već poznati ekstremi i u pedagoškoj praksi. Sigurno postoji još faktora koji na bilo koji način ometaju nastavnika u tačnom prepoznavanju nadarenih učenika.

Slično kao i kod osobina nadarenih učenika, tako i kod pitanja potrebnih karakteristika nastavnika za rad s nadarenim učenicima u stručnoj literaturi se nailazi na brojne kompozicije poželjenih profila ličnosti nastavnika, podobnih da se bave nadarenim učenicima. N. Davis (1954.g) nabraja sljedeće kvalitete: demokratski stavovi za saradnju, ljubaznost i razumjevanje za pojedinca, strpljenje, širok krug interesa, prijatna lična vještina i vladanje, poštenje i pravednost, smisao za humor, dobra narav i konzistentno ponašanje, interesovanje za probleme ljudi, fleskibilnost, korišćenje priznanja i pohvala, te neuobičajena vještina u poučavanju izvanrednih pojedinaca.

J.J Gatlagher (1976.g) navodi ove karakteristike: dobro zdravlje i tjelesna superiornost, svestranost interesa, kreativnost i originalnost, natprosječna vještina poučavanja drugih, uključenost u svoju okolinu, jasna i dosledna filozofija vaspitanja, poznavanje teorije učenja, odličan smisao za humor i obimna fizička energija.

J. Whitnore (1980g.) opisao je učitelje nadarenih kao one učitelje koji oblikuju osobine i životni stil učenika, koji podstiču učenike da misle na višoj razini, koji stimulišu interesovanje i nezavisnost težnji, koji razumijevaju potrebu za fleksibilnošću i koji nalaze zadovoljstvo u energičnim i istraživačkim umovima djece.

M. Lindseu (1980.g) na osnovu empirijskih spoznaja karakteriše uspješne učitelje u radu s nadarenom djecom, a to su, prema njemu, oni koji razumiju i prihvataju sami sebe, imaju izvanrednu jačinu ega, posjeduju natprosječna intelektualna interesovanja i odgovorni su za vlastito ponašanje i njegove posljedice.

C.Sohnitz i J. Galbraith (1985.g) ističu smisao za humor, jasan pojam o sebi i pozitivne stavove prema kontinuiranom samoobrazovanju, zatim određene didaktičke vještine prvenstveno okretnost u primjeni širokog kruga metoda poučavanja, te odgovarajuće vještine komunikacije koje uključuju opažanje, intuiciju, govorne vještine, vještine u pismenosti u izražavanju, vještine grupnog vođenja i savjetovanja i slično.

Iz ovoga se može generalizovati koje karakteristike treba da posjeduje nastavnik efikasan u radu sa nadarenim učenicima a to je snažna, emocionalna konzistentna ličnost, širokih intelektualnih interesa, invetivna, fleksibilna, komunikativna, osposobljena specifičnim znanjem za odgovarajuću edukativnu djelatnost.

Tu se sada pojavljuje i postavlja jedno zanimljivo pitanje: Kako nadareni učenici zamišljaju svog idealnog nastavnika. Na to pitanje postoji veći broj odgovora dobijenih istraživanjem. Tako na primjer A. Kathnelson i L Golleu ispitujući nadarene učenike od šest do šesnaest godina o karakteristikama koje bi po njihovom mišljenju trebao imati nastavnik-učitelj, kao ličnost najčešće su nailazili na osobine: "da ih razumije, da ima smisla za humor, da može učenje načiniti zabavnim i da je veseo…". Nešto rjeđe isticane su karakteristike da ih podržava i uvažava, da je inteligentan, da je s njima dosledan, te da je fleksibilan, a najrjeđa je da zna svoj predmet, da stvari objašnjava pažljivo i da je vješt u grupnom vođenju. Iz svega ovog proizilazi da su kod efektivnog nastavnika s nadarenima "u igri" njegove tjelesne, intelektualne, emocionalne pozitivne karakterne osobine. Tu sad se dolazi do dileme da li nastavnik koji radi sa nadarenom djecom i sam mora biti nadaren. Sigurno je da su ispod prosječne sposobnosti nastavnici kontradiktorni za takav rad, a natprosječni u oblasti u kojoj rade imaju poželjne karakteristike.

Mi bismo mogli da prihvatimo stavove po ovom pitanju G. Brucha i E.P. Torranea, koji kažu da nije važno da li su učitelji visoko intelegentni i lijepog izgleda (iako treba da se oblače i budu uredni) već je vrlo važno da su zainteresovani u pomaganju i vođenju mladih ljudi. Ili kako je na jednom savetovanju u Beogradu u svom izlaganju izjavila J. Šefer, da nastavnik treba, ako već sam nije kreativan, bar da bude otvoren prema promjeni, uvijek sklon novom, da se divi i bez ljubomore podstiče kreativno ponašanje učenika. Po njoj, nastavnik ne smije biti orijentisan na jednobraznost i ponavljanje, već za novinu i raznolikost. A to se već može i naučiti. Najbliži istini je stav u regrutovanju nastavnog kadra, sposobnost za otkrivanje i podršku nadarenih učenika. Treba kombinovati različite selekcione procedure s raznolikim i bogatim programom njihovog osposobljavanja za tu funkciju. Načini i oblici osposobljavanja nastavnika za rad s nadarenim učenicima i studentima proizilaze iz inventara potrebnih profesionalnih znanja i vještina koje bi morali posjedovati, a da bi mogli na tom planu uspiješno djelovati. I opet, takvih lista programskih sadržaja ima mnoštvo u svijetu. Postoji široka lista sa 34 zahtev u kojima se isprepliću sposobnost, vještine i saznanja nastavnika za aktivnost s nadarenim učenicima iz školske oblasti San Diego (D. Hermanson). Nastavnik treba usvojiti te zahtjeve sa konkrtetnom listom u pogledu potrebnih znanja i vještina za edukativan rad s nadarenim učenicima da bi, ujedno, naglasili i svu složenost osposobljavanja nastavnika za tu ulogu. Odatle se ističe da u tu svrhu će se morati koristiti i više oblika i programskih modela, a među njima su najbitniji:

1) Edukacija u sklopu nastavničkog studija,
2) Edukacija putem izrade specijalističkih, magistarskih i doktorskih radnji,
3) Edukacija putem seminarskog osposobljavanja,
4) Organizovano permanentno samoobrazovanje nastavnika koji bi mogao biti kvantitativno najobuhvatniji, organizacijsko najednostavniji i finansiski najeftiniji način dopunskog osposobljavanja nastavnika za rad s nadarenim učenicima.

Da bi se ostavrili ovi ciljevi u pogledu osposbljenosti i samog rada nastavnika sa nadarenim učenicima treba stvoriti i posebne uslove: motivisanost nastavnika za takvo samoobrazovanje (materijalno-društvena i pedagoška priznanja statusnog zvanja - vrednosna stimulacija) i organizovanost izvora informacija: knjige, brošure, priručnici, radio i televizijske emisije, mikrofilmovi, kompjuterska tehnika i slično.

Otkrivanje i identifikacija nadarenih učenika je složen, stručno i etički odgovoran zadatak. Da bi taj zadatak bio uspješno izvršen, njegovoj realizaciji su imanentno određeni principi. Jedan od prvih je DEMOKRATIČNOST, što znači da se svim članovima školske populacije daju jednake šanse da budu otkriveni i identifikovani. Potom je STANDARDIZOVANOST, što osigurava jednoznačnu primjenu potrebnih postupaka i interpretaciju dobijenih analiza. Zatim to je KONTINUIRANOST postupaka što govori da je indentifikacija proces, a ne jednokratni čin. Sljedeća načela su: Kompozitne metodologije i princip poštovanja integriteta ličnosti
Pretpostavka za valjanu procjenu je dobro poznavanje "ponašanja" učenika u različitim situacijama, kako školskim, tako i u vanškolskim. Upravo je karakteristika nadarenih učenika da se bave brojnim vanškolskim aktivnostima. Zato nastavnik ne bi trebao olako davati bilo koju ocjenu ako nije siguran, već prethodno prikupiti odgovarajuće dodatne informacije. I ako tako bude pazio da ga ne zavara njegov opšti utisak o učeniku (bilo pozitivan ili negativan),

te da u skladu s njim nekritički daje i pojedinačne ocjene neće pogriješiti. Osim toga, treba da vodi računa i o opštem intelektualnom nivou razreda u kom se ocijenjeni učenik nalazi, jer bi se na primer pojedinac i s relativno skromnijim sposobnostima mogao značajno isticati u razredu učenika nižeg intelektualnog potencijala, kao što bi poneki učenik s realno visokim sposobnostima mogao ostati nezapažen u razredu učenika koji su u tom pogledu izrazito pozitivno selekcionisani. Prilikom ocjenjivanja, dobro je podsjetiti se na utvrđivanje odnosno na utvrđenu činjenicu da pojedini nadareni učenici, iz različitih razloga, ne mogu odnosno ne moraju imati i najbolje školske ocjene, da su ponekad nedovoljno emocionalno i socijalno prilagođeni, da kadkad izražavaju "čudna" ponašanja, da mogu biti osamljeni, nezainteresovani za neki školski predmet i slično, što sve može zamaskirati njihove stvarne, visoke intelektualne sposobnosti. To nam govori da se i o tome mora voditi računa pri kandidaturi određenog učenika. Procjene nastavnika su veoma bitna komponenta (uz podatke koji će se prikupiti i drugim postupcima, naročito testiranjem sposobnosti i nekih drugih osobina ličnosti) u dijagnostikovanju potencijalne nadarenosti učenika, što ima značajne individualne i društvene posljedice, iz čega proizilazi potreba da se ovoj procjeni pristupi sa naglašenim stručnom i etičkom odgovornošću. U tom smislu, koliko je važno da se učenici predloženi od strane nastavnika i kasnije potvrde kao intelektualno nadareni, toliko je još važnije da u svojim procjenama nastavnik greškom ne eliminiše realno nadarene učenike, pogotovo jer u ovom slučaju njegove procjene imaju značenje određenog predškolskog postupka.

3. Metodički pristupi u radu sa darovitim učenicima

Funkciju nastavnika možemo posmatrati sa dva različita aspekta - sa aspekta tradicionalne, klasične škole i sadašnje škole, odnosno škole budućnosti, tj.moderne škole. U tradicionalnoj školi nastavnik je bio posrednik između nastavnih sadržaja i učenika. On je bio isključivi organizator vaspitno-obrazovnog rada, a odnosi na relaciji nastavnik-učenik bili su zasnovani na hijerarhijskim načelima. Učenik je bio u podređenom položaju. Moderna škola traži i modernog nastavnika. Nastavnik mora stalno da uči, da nadograđuje znanje, da uči nešto novo i da permanentno radi na svom stručnom usavršavanju i obrazovanju. Nastavnik treba da je nov, neponovljiv, savremen.

Savremeni pristup nastavi ogleda se u tome da učenici nisu više pasivni slušaoci koji sjede u klupama, već aktivni učesnici u procesu učenja. Nastavnik je sada samo moderator koji učenika usmjerava. Savremeni pristup u nastavi matematike u većini se ogleda u uvodjenju računara u nastavni proces. Upotrebom računara u nastavi matematike procesi poučavanja i učenja podižu se na viši nivo. Kroz odgovarajuće i zanimljive sadržaje i nastavnici matematike i učenici mogu postići čak i maksimalne rezultate učenja. U didaktici se pod strategijom podrazumijeva skup postupaka koji dovode do ostvarivanja nekih ciljeva. Didaktičke strategije se razlikuju prema osnovnim ulogama glavnih subjekata u nastavi, pa se govori o:

- Predavačkoj nastavi,
- Heurističkoj nastavi,
- Problemskoj nastavi,
- Istraživačkoj nastavi,
- Mentorskoj nastavi,
- Iskustvenoj nastavi.

Strategije obuhvataju nastavne metode i postupke specifične za određena vaspitno-obrazovna područja. Nastavna metoda je način aktiviranja učesnika u vaspitno-obrazovnom procesu. Učenik ne može steći sva potrebna znanja vlastitim otkrivanjem, zato je potrebno i poučavanje. Učenje otkrivanjem se temelji na vlastitom iskustvu, a mehaničko učenje na iskustvima drugih ljudi. Nastavni program je prilagođen prosječnom učeniku, kojih uvijek ima najviše. Posljedica toga je da se učenici u razedu dijele na dobre, loše i talentovane. Treba shvatiti da sva djeca mogu učiti i da uče vlastitom aktivnošću, a zadatak škole je da stvori uslove za tu aktivnost.

3.1. Strategije poučavanja

Znatan broj nastavnika i učenika polazi od ideje da se obrazovanje sastoji od pamćenja velikog broja slučajno odabranih činjenica. Zato je nastavni proces ponajviše usmjeren prema memorisanju. To je uglavnom bio rezultat pretežno verbalne nastave, kako kažu zbog nedostatka kabineta, pribora, novca i vremena. Mnogo manje učenika osposobljava se za rješavanje problema.

3.1.1. Problemsko poučavanje

Problemsko poučavanje polazi od definisanja problema, i to tako da u tome aktivno učestvuju učenici definisanjem sopstvenog viđenja problema i uočavanjem suprotnosti između onoga što znaju i onoga što opažaju. Nakon definisanja problema traže se odgovori. U problemskoj nastavi prolazi se kroz nekoliko nivoa, ali je bitno da učenik razumije postupak primjenjen u svakom nivou rješavanja postavljenog problema.

Definisanje problema
Problem mora biti jasno i nedvosmisleno definisan. Može se dati u obliku pitanja, tvrdnje ili professor može razgovorom navesti učenika da sam formuliše problem. Složeniji problem treba struktuirati u niz manjih problema. Jedini alat u toj fazi su olovka, papir i glava.

Izdvajanje odgovarajućih informacija
Da bi se rješio problem, potrebne su odgovarajuće informacije. One mogu biti definisane tokom postavljanja problema. Najvažniji izvori informacija su vlastita opažanja, a zatim vlastito pamćenje, priručnici, udžbenici, članci, enciklopedije...

Kombinovanje pojedinih informacija
Za rješavanje jednostavnog problema nužne su najmanje dvije informacije. Složeniji problemi zahtevaju strukturisanje tako da se kombinacijom djelimičnih rješenja stiže do konačnog rješenja.

Evaluacija rešenja
Uvek treba provjeriti da li je došlo do odgovora na postavljeno pitanje i zadovoljavaju li rezultati date informacije. Treba razmisliti koji se novi ili sličan problem može rješiti na isti ili sličan način.

3.1.2. Heuristično poučavanje

Poučavanje takođe polazi od problema, a učenik se postupno vodi do rješenja. Za to su najprimjetniji različiti dijaloški postupci. Obično se primjenjuje razgovor u kome nakon definisanja problema nastavnik postupno vodi učenike do rješenja problema. Heuristička metoda je takva metoda nastave u kojoj nastavnik ne saopštava učenicima gotove činjenice i tvrdnje, nego ih navodi na samostalno otkrivanje odgovarajućih istina. Elementi ovog poučavanja su:

- privid igre
- vlastito otkrivanje matematičke istine (uz vodstvo nastavnika)
- nastavnik postavlja matematički problem, a onda vodi učenika do rješenja (heuristički dijalog)

Prednosti ove metode su

- iako heuristička nastava ne dovodi učenike do potpuno samostalnog rada, oni su u velikoj mjeri misaono aktivni
- neposredno (dvosmjerno) komuniciranje učenika i nastavnika
- slobodan razgovor,diskusija, usmjerena pitanja koja vode ka otkriću
- rad i aktivnost učenika
- dovođenje do razumijevanja sadržaja

3.1.3. Programirano proučavanje

Programirana nastava uvodi se sa ciljem da riješi problem različite brzine savladavanja nastavnih sadržaja učenika. U programiranoj nastavi nastavni sadržaji koji trebaju da se savladaju su dati unapred utvrđenim redosledom. Nakon svakog koraka, učenik bira jedno od ponuđenih rješenja, pri čemu odmah dobija povratnu informaciju. Povratna informacija ne sadrži samo podatak da li je odgovor tačan ili ne, već upućuje učenika na ispravno zaključivanje.Suština ove metode u nastavi matematike jeste podjela nastavnog gradiva na manje dijelove (članke i kvante). Svaki se sljedeći korak nadovezuje na prethodne informacije. Etape ove nastave su:

- Ponavljanje, provjera predznanja (metoda dijaloga)
- Podjela programiranog materijala, nastavnik objašnjava šta će se raditi (predavačka metoda)
- Rad prema programiranom materijalu , samostalno uz nadzor nastavnika
- Provjera usvojenosti gradiva (pismeni rad ili metoda dijaloga)

Prednost metode je u sljedećem:

- samostalna aktivnost učenika, vlastiti tempo rada
- stečeno znanje se odmah provjerava, korigira i utvrđuje
- opseg novih informacija nije prevelik, radni koraci su kratki
- moguće je potpuno diferencirati nastavu
- direktna veza učenika i gradiva
- razvija se samokontrola i poboljšava koncentracija

3.2. Strategije učenja otkrivanjem

Učenje otkrivanjem polazi od uočavanja i definisanja problema preko sopstvene aktivnosti na pronalaženju rješenja do izvođenja zaključaka i nalaženja rješenja. Učenje otkrivanjem još se naziva i iskustveno učenje jer se do saznanja dolazi vlastitim iskustvom. Kod ovog učenja susrećemo tri metode: istraživanje, projekat i simulacija.

3.2.1. Istraživanje

Istraživačka metoda se sastoji u sljedećem:

- Učenik dobija određenu informaciju,
- Dobijenu informaciju obrađuje vlastitom aktivnošću,
- Traži/ istražuje odgovor na postavljeno pitanje.

Ovakvim procesom obrazovanja učenici usvajaju sposobnosti koje su prosječnoj osobi potrebne za uspješan poslovni život i kojima se stvaraju predispozicije za cjeloživotno učenje. Istraživačka metoda označava nastavni postupak u kojem učenici samostalno usvajaju nova znanja, tj. samostalno otkrivaju i pronalaze za njih nove matematičke činjenice. U nastavi matematike poželjno je da i učenici postavljaju pitanja/probleme. Međutim, u većini slučajeva to će biti učiteljev zadatak. Učenikov istraživački rad u nastavi matematike svodi se na otkrivanje matematičkih činjenica, postupaka, pravila i zakonitosti. To svaki učenik radi samostalno, primjenjujući misaone radnje. Istraživačka nastava je naročito pogodna u radu s darovitom djecom unutar vannastavnih aktivnosti (matematička grupa, dodatna nastava iz matematike, izborna nastava i sl.). Njome se razvija timski rad (iako je moguće napraviti i individualizirano istraživanje), kreativnost, podstiče razvoj specifičnih sposobnosti i potencijala pa je posebno motivaciona za mlade istraživače.

3.2.2. Projekat

Projekat je složenija metoda u starategiji učenja otkrivanjem. U ovom radu predložen je način zadavanja zadataka u matematici koji sadrži istraživački element, plan istraživanja, prezentaciju i vrednovanje pa time zaslužuje naziv ”zadaća projektnog tipa”. Ovakve zadaće mogu se lako pripremiti i uklopiti u sve nastavne teme iz matematike i biti od velikog značaja za rad sa darovitom djecom. Njihova prednost je što zadržavaju mnogo dobrih strana koje ima projekat. Obzirom da se, u matematici, skoro svaki klasičan problemski zadatak moze transformisati u mali projektni zadatak, na ovaj način se otvara širok spektar tema za male projektne zadaće koji mogu obogatiti svakodnevnu nastavu matematike i u velikoj mjeri povećati kvalitet usvojenih znanja i vještina.

Pod pojmom ”zadaća projektnog tipa” podrazumijeva se jasno definisan projektni zadatak koji treba riješiti detaljnim istraživanjem po unaprijed utvrđenom planu, pripremiti prezentaciju te prezentovati bitne korake u istraživanju i rezultate, a iza kog obavezno slijedi samovrjednovanje ,te vrjednovanje od strane ostalih učenika i nastavnika. Na zadaći projektnog tipa može raditi jedan učenik ili grupa, ona može zahtijevati sasvim kratko ili nešto duže vrijeme za istraživanje, može biti i jednostavna i složena, možemo je prilagoditi djeci raznih sposobnosti za matematiku tako da svaki učenik u razredu može raditi na ovakvim zadaćama, može biti interdisciplinarna ali i ne mora. Veoma je pogodna za rad sa nadarenom djecom.

3.2.3. Simulacija

Simulacija se primjenjuje u slučajevima kada iz određenih razloga, učestvovanje u realnim situacijama nije moguće.Takođe, moguće je izvesti i kompjuterske simulacije rješavanja različitih problema. Danas je na raspolaganju veliki broj softverskih paketa pomoću kojih se mogu izvršiti simulacije raznih problemskih zadataka. Samo svojstvo simulacija je da pružaju mogućnost mijenjanja ulaznih i izlaznih podataka modela što vodi dubljem razumijevanju pretpostavke odnosno modela koji se posmatra jer se dobija svojevrsno kognitivno razumijevanje kako neki sistem zaista funkcionoše. Primjena simulacija u nastavi matematike može biti podrška u funkciji motivacijie učenika, prije svega da se pojednostave dodatni složeni nastavni sadržaji talentovanim učenicima.

3.3. Metoda demonstracije

Naziv ove metode potiče od latinske reči *demonstraciae,* što znači prikaz ili predstava. Koristi se u kombinaciji sa usmenim izlaganjem profesora i razgovorom sa učenicima. U ovoj djelotvornoj metodi posebno se ostvaruje princip interesa i princip običnosti. Kao prikladna i primjerena pomagala u primjeni ove metode mogu poslužiti grafoskop, računar, projektor . Individualni rad u metodi često je moguće zamijeniti grupnim radom, što čvršće povezuje učenike. Elementi ove metode su izrada modela geometrijskih likova, izrada modela geometrijskih tijela, izrada panoa i dr. Sve te aktivnosti omogućuju izražavanje različitih crta kreativnosti učenika, što je značajno u razvoju stvaralačke sposobnosti, posebno u nižim razredima osnovne škole .

4. Matematička darovitost

Dobre ocjene, visok kojeficijent inteligencije i postignuća na testovima zasigurno su neki od pokazatelja da učenika možemo smatrati nadarenim. No, postoji puno drugih načina osim testova i ocjena na kojima učenik može pokazati svoju darovitost. Kada se škola bazira samo na tradicionalnim testovima otkrivanja darovitosti dolazi do toga da će mnogi od potencijalno darovitih učenika biti zanemareni kao i njihovo znanje. Kada sve saberemo dolazimo do zaključka da postoji mnogo potencijalno darovitih učenika koji se ne svrstavaju u grupu darovitih ali im je potreban veći stepen pažnje i rada. Postavlja se pitanje: Kako prepoznati učenika nadarenog za matematiku? Evo nikih osobina matematički nadarenog djeteta:

1) Neuobičajeno zanimanje za brojeve i matematički sadržaj
2) Sposobnost razumijevanja i brza primjena novih ideja
3) Sposobnost uočavanja obrazaca i apstraktnog razmišljanja
4) Primjena nestandardnih postupaka u rješavanju zadataka
5) Sposobnost prenošenja matematičkih postupaka u neuobičajene situacije
6) Korištenje analitičkih, deduktivnih i induktivnih metoda
7) Istrajnost u rješavanju teških i složenih problema.

Treba obratiti pažnju na to da učenika nadarenog za matematiku ne možemo svrstati u skupinu 'dobrih učenika'. Oslanjajući se na posmatranja (kao metodu prepoznavanja nadarenih učenika), ono zahtjeva da nastavnici postanu svjesni svih stereotipa i pretpostavki koje bi mogli imati u pogledu prepoznavanja nadarenih učenika. Na primjer, nadareni učenici mogu imati problema sa učenjem. Pojedini će tako ometati rad, ako su frustrirani ili ako im postavljeni zadaci ne predstavljaju dovoljan izazov. Moguće je da postavljaju brojna pitanja i izazivaju rasprave izvan zadane tematike. Takođe bi mogli produžiti vrijeme potrebno za rješavanje zadataka njihovim proširivanjem ili dodavanjem detalja ili, nasuprot tome, mogu žuriti u radu zbog čega će im rezultat biti neprecizan, s nemarnim greškama. Svim se učenicima mora ponuditi prilika za izazov i prošireno učenje, kad god je to moguće.

Problem vidno nadarenih učenika u matematici (Lorenz, 1994.) sastoji se iz dva dijela: ientifikovanje izrazito nadarenih matematičkih talenata i pronalaženja prikladnih oslonaca za ovakvu djecu. Da bi se na primjer mogao riješiti postavljeni matematički problem, treba imati bogato znanje o brojevima i odnosima između brojeva, koje se obično ne upotrebljava u elementarnom školovanju učenika. Zbog toga, mogući dar može biti prorečen samo promišljanjem generalnih ličnih faktora u toj starosnoj grupi. Visoko nadarena djeca počinju u predškolskom uzrastu znatno ranije učiti čitati, počinju mnogo ranije pitati o mnogim komplikovanim činjenicama, razvijati radoznalist za neke kompleksne situacije, imaju veoma dobru memoriju i u mogućnosti su da lako uopštavaju nove situacije i nove formulacije. Razumljivo je da visoko nadareni učenici imaju visoku inteligenciju. Zanimljivo je da rezultati IQ testova pokazuju veću razliku unutar visoko nadarenih nego između učenika nesposobnih za učenje i nekih visoko nadarenih. Zato se treba izvršiti diferencijacija kroz oblasti.

Identifikaciju talenata putem testova inteligencije je teško napraviti zbog činjenice da standardni testovi prvog stepena vrše nedovoljnu diferencijaciju dobrog učenika u matematici i onog ekstremno nadarenog. Razvoj dijagnostičkih metoda za drugu polovinu osnovne škole mora biti skeptički razmotren. Neke karakteristike visoko nadarene djece za matematiku, međutim mogu se dati na način karakterističan za matematički kreativne odrasle osobe. Već između sedme i osme godine visoko nadarena djeca matematiziraju svoju okolinu, posebno obraćaju pažnju na matematičke karakteristike i funkcionalne zavisnosti u različitim situacijama, pa se za njih kaže da svijet vide matematičkim očima. Čak je u prvom stepenu zapaženo da ovakva djeca nikada nisu umorna da rade matematiku, te da imaju izvrsnu memoriju za matematičku građu, odnose, dokaze i metode rješavanja.

Među visoko nadarenim učinicima u matematici razlikuju se tri tipa: analitički tip, geometrijski tip i harmonijski tip.

Analitički tip odlikuje matematički apstraktna uloga razuma. U njihovom razmišljanju, dobro razvijene verbalno-logičke komponente preovladavaju nad slabašnim vizuelno-slikovitim komponentama. Oni funkcionišu lakše kada su u pitanju apstraktni modeli i nemaju potrebe za vizuelnim osloncima dok uzimaju u obzir matematičke relacije. Ustvari, oni hoće da koriste komplikovane analitičke metode kad vrješavaju probleme, čak i onda kada vizuelni pristup može dovesti do jednostavnijeg rješenja. Oni više vole apstraktne situacije i kada god su u mogućnosti pokušavaju prevesti konkretne probleme u apstraktne izraze. Oni mogu imati slabije razvijenu vizuelnu sposobnost, posebno za trodimenzionalni prostor. Isto taka u školi će više nadmašiti ostale učenike u aritmetici i algebri nego u geometriji.

Geometrijski mislioci ispoljavaju matematičko-slikoviti tip razmišljanja. Njihova razmišljanja proizilaze iz dobro razvijene vizuelne komponente. Vizuelna komponenta podstiče ih da interpretiraju vizuelno matematičke odnose, ponekad i veoma pronicljivim putevima. Iako njihova verbalno logička sposobnost može biti jako dobro razvijena, oni još uvijek i dalje djeluju sa vizuelnim šemama, pa i onda kada je za problem prikladniji pristup analitičkog mišljenja i kada je upotreba vizuelnog prikaza suvišna i teška. Zaista, ovakvi učenici često nalaze da funkcionalne relacije i analitičke formule postaju shvatljivije i uvjerljivije samo kada im se da vizuelna interpretacija.

Harmonijski tip ispoljava relativnu ravnotežu između ekstremnosti dva prethodna tipa. Oni posjeduju dobro razvijene i verbalno-logičke i vizuelno-slikovite sposobnosti te kada im je zadan problem, oni su u stanju dati rješenje na oba gornja načina. Krutetskii (1976.) promatra dva podtipa među harmonijskim misliocima: onog koji je sklon umnim operacijama bez upotrebe vizuelnih mogućnosti te onog drugog koji je swklon umnim operacijama sa upotrebom vizuelnih mogućnosti. Drugim rečima, iako su harmonijski mislioci sposobni perfektno prikazati odnose vizuelnim putem, neki više vole tako raditi dok drugi ne vide potrebu za tim. U suštini možemo identifikovati iz pomenutog Krutetskiijevog rada sljedeće značajne karakteristike matematički nadarenih učenika:

1. Oblikovana percepcija matematičke građe i sposobnost shvatanja formalne strukture problema.
2. Logička sposobnost mišljenja o karakterističnim i prostornim odnosima te sposobnost dobrog pronicanja u matematičke simbole.
3. Brza i široka generalizacija matematičkih objekata, relacija i operacija.
4. Skraćivanje matematičkih rasuđivanja i sposobnost pronicanja u sažete strukture.
5. Fleksibilnost umnih procesa
6. Težnja ka jasnoći, jednostavnosti, ekonomičnosti, racionalnosti i raznovrsnosti rješenja kao i poboljšanju dobijenih rezultata.

7. Brza i slobodna rekonstrukcija umnog procesa kao i mogućnost obrta matematičkog rasuđivanja.
8. Generalizovana memorija za matematičke odnose, argument, karakteristike, dokaze, metode rješavanja i principe problemskog rješavanja.
9. Matematički način razmišljanja.
10. Energija i istrajnost u rješavanju problema.

Kod izvođenja nastave matematike za nadarene učenike javljaju se problem koji uzimaju dva smjera: socijalna integracija i emocijalno stanje i njena adekvatna podrška pri izvođenju ili mjerama organizacije. Njihova socijalna integracija u razred koji pohađaju je često pravila teškoće kod prisutnih faktora osobenosti ličnosti visoko nadarenih učenika. Ovakva djeca su introventirana i okrenuta sebi, shvataju i razumiju stvari jako brzo, pa ona ne mogu da razumiju zašto su drugi učenici tako spori ilči zašto drugi učenici njih ne razumiju. Zbog svog specifičnog stila učenja, oni radije vole da uče nezavisno od drugih, vole nešto da otkriju u igrama i da otvaraju problemske situacije te se podvrgavaju takvoj vrsti učenja.

Zablude koje vladaju kada su u pitanju nadarena djeca za matematiku su sljedeće:

- Matematički nadareni učenici postižu mnogo, brzi su i tačni u svome radu.

Iako je to odlika nekih matematički nadarenih učenika, postoje i oni koji postižu manje od očekivanog na redovnoj nastavi matematike.

- Dodatne vježbe ili aktivnosti za "one koji brže riješe" idu u korist potrebama matematički nadarenih učenika.

Ako su ti zadaci na istom nivou kao i rad ostatka razreda, onda je to samo da ih se zabavi i ne daje im mogućnosti za matematička učenja.

- Matematička takmičenja zadovoljavaju potrebe matematički nadarenih učenika.

Takmičenja povremeno omogućuju nadarenim učenicima da pokažu svoje sposobnosti, medutim njima su potrebne svakodnevne prilike za razvoj njihovih potencijala.

- Imamo dovoljno sredstava i vremena posvetiti se obrazovanju matematički nadarenih učenika.

Ta rečenica nikako ne ide u prilog sitaciji u kojoj se trenutno nalazimo. Manjak finansijskih sredstava i visoko obrazovanih ljudi kako u nastavi matematike tako i u radu s nadarenim učenicima, kao i relativno loša opremljenost škola nastavnim sredstvima otežavaju rad sa nadarenom djecom.

Po čemu se učenik nadaren za matematiku razlikuje od svojih vršnjaka

Nadareni učenici se razlikuju od ostalih u tri posebna značajna područja za matematiku.
Matematički nadareni učenici razlikuju se od ostalih u:

1. Brzini kojom uče
2. Dubini njihovog shvatanja
3. Povećanom stepenu zanimanja.

U odnosu na usvajanje matematičkih znanja

- Brzina može predstavljati problem zbog prirode matematike koja se uči nadovezivanjem znanja na prethodno naučeno

- Dublji nivo shvatanja i apstrakcije su mogući kod većine matematičkih tema, zbog čega je postavljanje granica bitno
- Ukoliko zanimanje nije na vrijeme uočeno, talenat možda nikada neće biti razvijen.

4.1.Kako se prepoznaju matematičke sposobnosti

Psihologija matematičkog stvaralaštva još nema pouzdanih odgovora kako se egzaktno mogu utvrditi sposobnosti učenika za matematiku. Navodimo mišljenja nekih autira koji su pisali o tom problemu, često karakteristična i po ekstremnoj poziciji koju zauzimaju.
D.S. Mitrinović piše: "U svim zemljama pa i kod nas čisti psiholozi nastoje da potisnu matematiku u nastavi, jer pedagozima izgleda sve teško. Oni sami, po pravilu, ne znaju matematiku i stoga nisu u mogućnosti da ocijene šta može da savlada učenik u određenom uzrastu. Pedagozi ne uzimaju dovoljno u obzir utvrđenu činjenicu da je matematika najbolje sredstvo da se u što mlađe doba uđe u metod naučnog mišljenja i naučnog stvaranja.Istorija matematičkih nauka potvrđuje da je u matematici već u dvadesetim godinama života moguće davati lijepe naučne rezultate."

Tradicionalno je mišljenje da se na časovima matematike najviše razvija logičko i funkcionalno mišljenje, da se maksimolno razvija misaona aktivnost. Pedagog i psiholog Borislav Stevanović se takvom zaključku suprotstavlja. On piše: "ni jedan nastavni predmet ne može imati preimućstvo nad drugim predmetima, da on znatno više nego drugi predmeti razvija opštu sposobnost za mišljenje. Tu prednost nema ni matematika." Matematičar Vladimir Devide je mnogo pomirljiviji: "Biće manje nesporazuma ako se pedagozi potrude da nauče nešto više iz matematike i filozofije, filozofi nešto više iz matematike i pedagogije, dok matematičari treba nešto više da prouče pedagogiju i filozofiju." Autor je sklon dati prvenstvo mišljenju matematičara, no tek zajedničkim naporima matematičara, psihologa i pedagoga i uvažavanjem rezultata svakih od ovih oblasti, moguće je očekivati potpuniji uvid u puteve rješavanja ovog problema.

Jedan od najvećih matimatičara dvadesetog vijeka A.N. Kolmogorov, je pod naslovom " O profesiji matematičara" pisao, pored ostalog, i o matematičkim sposobnostima. Njegovi zaključci se svode na sljedeće. Svaki čovjek prosječnih opštih sposobnosti može savladati srednjoškolsku matematiku, pa čak i razumjeti osnove diferencijalnog i integralnog računa. Međutim, talenat, nadarenost u oblasti matematike, u domenu fizikalnog eksperimenta, i konstruisanju novih mašina nisu dati svakom od prirode kao neki dar. Nikakav uporan rad ne može zamjeniti prirodnu nadarenost. Rad daje relativno dobre rezultate u nauci samo u sjedinjenju sa nadarenošću, i obrnuto. Ljudi koji posjeduju vještinu pamćenja višecifrenih brojeva i te brojeve brzo sabiraju, množe ili izračunavaju korijen iz njih usmeno, ne mogu poslužiti kao primjer ljudi sa dobrim matematičkim sposobnostima. Spretno transformisanje složenih algebarskih izraza, nalaženje uspješnih puteva za rješavanje jednačina koje nisu obuhvaćene standardnim pravilima, možemo smatrati sposobnostima koje se traže od matematičara. Rastavljanje na činioce polinoma x^5+x+1 i $x^{10}+x^5+1$ može poslužiti kao primjer da ponekada i rastavljamje vrlo prostih izraza na činioce, zahtijeva veliku oštroumnost. Analogno, dokaz elementarnim putem da su pozitivni korjeni jednačine $x^5+x=10$ iracionalni brojevi, takođe zahtijeva veliku pronicljivost.

Razvijena prostorna intucija, funkcionalno mišljenje i suptilno logičko zaključivanje jesu bitne karakterestike matematičkih sposobnosti. Treba biti vrlo dobar matematičar da bi se zatvorivši oči, bez crteža mogla jasno zamisliti kakva se figura dobije presjecanjem ravni i kocke, ako ravan sadrži sredinu jedne dijagonale kocvke i normalna je na tu dijagonalu. Za rješavanje sljedeća dva zadatka potrebna je i razvijena prostorna predstava

1. Oko sfere je opisan prostorni četverougao, dokazati da dodirne tačke četverougla sa sferom pripadaju istoj ravni
2. Dokazati da je zbir odstojanja proizvoljne tačke iz unutrašnjosti pravilnog tetraedra od njegovih strana konstantan

U školskoj praksi na razvijanje logičkog mišljenja najviše utiče sistematski kurs geometrije u kome se upoznaju definicije i aksiome, a zatim formulišu i dokazuju teoreme. Shvatiti i umjeti pravilno primjeniti princip matematičke indukcije predstavlja dobar kriterijum logičke zrelosti, koja je matematičaru potrebna. Razne komponente matematičkih sposobnosti nalaze se u različitim kombinacijama. Mehaničko pamćenje velikog broja činjenica i formula nije od bitnog značaja za matematičko stvaralaštvo. Dobro pamćenje u matematici, kao i u drugim oblastima, zaista je korisno, ali ogroman broj velikih matematičara nisu imali izuzetnu memoriju. Matematičke sposobnosti se obično pojavljuju u mladosti i zahtjevaju neprekidno vježbanje. Potpuno odvajanje od matematike tokom nekoliko godina posle završene srednje škole, predstavlja propust koji se teško može popraviti.

Nadarenost za matematiku nije tako rijetka kao što se obično misli. Činjenica je da poneki od nadarenih i sami ne vjeruju u svoje sposobnosti ili u sebi ne nalaze snage da se uhvate u koštac sa matematičkim problemima. Matematičko stvaralaštvo se ispoljava još u srednjoj školi kada učenici rješavaju nestandardne zadatke, samostalno traže rješenje i navikavaju se na istraživanje.
U zavisnosti od ličnih stvaralačkih potencijala, mladi ljudi brže ili sporije prilaze samostalnom stvaralaštvu. Ni svaki naučnik nije prvorazredni stvaralac. Neki student još u toku studija ostvare samostalne rezultate, zatim ostaju vjerni naučnim istraživanjima i unose u nauku svoj doprinos, pomažu njen napredak. Međutim, neki student blistavo polažu ispite a kasnije ne postaju matematički stvaraoci neki student koji nisu polagali ispite sa visokim ocijenama kasnije otkrivaju nove istine u matematici. Matematičari raspolažu stručnim znanjem i matematičkom intuicijom, koja im omogućuje da utvrde koji učenik posjeduje matematičke sposobnosti.

Osnovne komponente dobrog programa za rad sa matematički nadarenom djecom

Svaki dobar program za rad sa matematički nadarenom djecom treba da sadrži sljedeće komponente.

1. ***Kvalitetan matematički sadržaj***
   Matematički sadržaj programa mora biti kvalitetan, a ne samo zbirka igara, trikova, slagalica ili izolovanih tema. Plan i program trebaju biti kvalitetno različiti u odnosu na redovan program, a ne samo njegova ubrzana verzija. Ove razlike se trebaju ogledati u težini sadržaja, obimu i dubini nastavnog plana.

2. ***Ispravan pedagoški pristup***
   Tehnike predavanja moraju uključiti adekvatnu metodologiju i moraju biti primjerene nadarenim i talentovanim učenicima. Učenici moraju imati tačno određene instrukcije o

sadržaju koji uče. Nastavnici treba da ohrabruju svoje nadarene učenike da koriste svoju individualnu snagu do maksimuma, a instrukcije treba da reflektuju njihove jedinstvene sposobnosti. Instrukcije treba dati u obliku neprikladnom za manje sposobne učenike, čak i u sporijim uslovima. Nastavnici i učenici treba da značajno utiču jedni na druge i nastavnici treba da poučavaju, motivišu i vode učenike, a ne samo da vode protocol i obavljaju administrativne dužnosti.

3. ***Sposobnost nastavnika***
   Nastavnici koji rade u programu za matematički nadarene učenike moraju biti dobro upućeni u matematiku, pedagogiju i obrazovnu psihologiju.

4. ***Sposobnost mišljenja višeg reda***
   Program za rad sa matematički nadarenom djecom mora njegovati procese mišljenja višeg reda. Učenici moraju raditi na neograničenom istraživanju koje razvija sposobnosti mišljenja višeg reda i sadržaj nastavnog plana treba u potpunosti ispredavati na način koji zahtijeva primjenu ovakvih procesa.

5. ***Rješavanje problema i primjene***
   Rješavanje problema mora biti glavno žarište instrukcija. Moraju se učiniti napori da se uključi primjena matematike u stvarnim životnim situacijama kao o dublje ispitivanje standardnih tema.

6. ***Vještina komuniciranja***
   Vještina komuniciranja je neophodna za učenje matematike. Od učenika se očekuje da čitaju, pišu, slušaju, govore i misle kao matematičari. Takođe treba podići nivo komunikacije između učenika i nastavnika, kao i učenika između sebe tokom procesa instrukcija. Učenici treba da kroz komunikaciju pokažu određeni stepen matematičke preciznosti.

7. ***Vještina učenja i radne navike***
   Matematika sa svojim jedinstvenim karakteristikama sadržaja pruža efektivno sredstvo za razvijanje vještina učenja i radnih navika. Ove vještine uključuju čitanje, pravljenje zabilješki, učenje za kontrolne radove i testove, rješavanje problema, opštu organizaciju rada i predanost zadacima.

8. ***Individualne razlike***
   Program treba da očekuje i prihvati širok spektar razlika kod učenika iako su oni identifikovani kao nadareni i talentovani. Ovo ne znači samo razlike u interesovanjima u pogledu matematike, već i široko područje aktivnosti van učionoce. Matematički nadareni učenici obično imaju širok spektar izuzatnih sposobnosti i njihov školski program treba da dopusti i podrži njihovo učešće u vannastavnim aktivnostima, sportu i klubovima. Treba im pružiti priliku da istraže mnoge aspekte kako svojih interesa i svojih sposobnostima, tako i svojih vršnjaka, te poštovanje i mišljenje da, iako su drugačiji, ipak nisu čudni. Mora se biti svjestan činjenice da su to bistra djeca i da su ponekad živo zainteresovana za razne dječije aktivnosti.

9. ***Podsticanje kreativnosti***
Program mora dati priliku učenicima da iskazuju matematičke ideje na kreativan način. Učenici moraju biti podstaknuti da ekspermentišu, istražuju, naslućuju pa čak i pogađaju.

10. ***Pomoćna sredstva za učenje***
Nadareni učenici trebaju čestu i maštovitu upotrebu manipulativnih materijala i drugih oblika instruktivne pomoći. Svi program treba da obuhvate širok izbor pomoćnih sredstava za učenje, ali pri tom se ne treba ograničiti samo na tekstove, digitrone, kompjutere, televiziju i ostale audiovizuelne materijale pogodne za rukovanje, već tu treba uključiti i osobe koje mogu pružiti pomoć.

11. ***Integracija sadržaja***
Matematika treba biti povezana sa sadržajem drugih predmeta u okviru školskog programa. Ovo povezivanje treba da se praktikuje kako na časovima matematike tako i na časovima drugih predmeta.

12. ***Planiranje i razvoj***
Cijeli program mora biti dobro planiran i koordiniran. Po prirodi treba biti razvojni i treba podsticati realizaciju neotkrivenog potencijala. Planiranje treba uključiti preciznu definiciju, adekvatan i čvrst kriterijum identifikacije i pažljivu selekciju procedura, kao i fleksibilnost modifikacije programa ako se ukaže potreba za tim.

13. ***Procjena***
Kontinuirana procjena i praćenje napretka učenika i efikasnost programa vodi ka daljim poboljšanjima. Tu procjenu i praćenje treba obavljati pravilno uz više različitih pristupa.

14. ***Briga za učenike***
Rad sa matematičkim nadarenim učenicima treba ozbiljno shvatiti. Nastavnici i vođe programa moraju imati sluha za pojedinačne brige i potrebe učenika. Učenicima uključenim u specijalni program treba biti dopušteno da učestvuju u svim dimenzijama školskih aktivnosti. Program za nadarene učenike treba da ih zaštiti od društvene izolacije.

15. ***Mobilnost i fleksibilnost***
Program mora biti dovoljno fleksibilan da dozvoli učenicima da se kreću unutar i van programa bez predrasuda u skladu sa promjenama njihovih potreba. Odluku da se doda novi učenik ili isključi stari učenik iz programa, treba pažljivo donijeti uz konsultaciju nastavnog kadra, roditelja učenika i samih učenika.

16. ***Status***
Status i prestiž treba povezati sa programom. I učenicima i nastavnicima treba dati više različitih prilika da se dokažu van redovnih nastavnih aktivnosti.

4.2.Nastavnici za rad sa matematički nadarenom djecom

Konsenzus matematički nadarenih učenika, istraživača i pedagoga koji rade sa takvim učenicima je dao listu obilježja cijenjenih kod svih predavača a posebno kod onih koji rade sa matematički nadarenim učenicima. Idealan nastavnik za rad sa pomenutim učenicima mora biti:

- Emocionalno zdrava, realna i autentična osoba koja uvažava ali je osjetljiva kada su u pitanju drugi, poštuje druge ljude i vjeruje im, poštena je i iskrena, fleksibilna, snalažljiva i dosjetljiva osoba,
- Energična i vitalna osoba,
- Sa iskustvom i zrelošću,
- Sa jakim zaleđem u matamatici i profesionalnim zvanjem matematičara,
- Čovjek koji ima kulturne i intektualne interese kako unutar, tako i van polja matematike,
- Osoba koja pokazuje entuzijazam za matematiku i poučavanje mladih, sposobna da oživi predmet izučavanja, efektivno komunicira sa učenicima i voli da izlaže ideje,
- Usmjeren ka učeniku pokazujući pri tome lični interes za učenike, njihova uvjerenja i mogućnosti, vođa je i motivator koji može slušati učenike i često učiti od njih,
- Osoba koja posjeduje dobar smisao za humor i sposobnost da učenje učini zagavnim,
- Neko ko razumije socijalne, emocionalne i edukativne potrebe nadarenih učenika
- Čovjek koji razumije razmišljanja i način učenja matematički nadarenih učenika, posebno onda kada se razmišljanja razlikuju, prihvata nove i drugačije ideje,
- Neko ko voli da traga za novim saznanjima i idejama, ko poučavanje mladih vidi kao vid unapređenja vlastitog inzelektualnog razvoja,
- Čovjek dovoljo uvjeren u svoje sposobnosti, odupire se iskušenju da se intelektualno takmiči sa učenicima već zajedno sa njima traga za novim saznanjima, cijeni promjene.

Naravno, nerealno je očekivati da se sve gopre navedene osobine pronađu u jednoj osobi, ali ova lista prikazuje ideale za kojima tragamo. Ono što je najvažnije jeste da nastavnik može da radi sa matematički nadarenim učenicima, da im pomogne u skladu sa njihovim visokim potencijalom i da ih motiviše da pozitivno misle o sebi i svom radu.

Iako se navedene karakteristike odnose na sve nastavnike, postoje posebne primjedbe vezane za nastavnike koji rade u osnovnoj školi. Galagher, 1985., tvrdi da mnogi nastavnici matematike u osnovnim školama izbjegavaju matematiku i možda čak osjećaju neugodnost od matematike. To je fenomen koji se mogao uočiti u osnovnim školama u BiH još od ranije. Kako većina programa za obuku nastasvnika matematike u osnovnoj školi sadrži relativno malo matematike, pojavljuje se izvjestan broj nastavnika koji su slabi u matematici. Ali povećanje nastavnih sadržaja za nastavnike ne rješava problem izbjegavanja matematike. Nastavnici, dakle, trebaju kontinuirano da usavršavaju svoje znanje matematike i vještine poučavanja mladih, kako kroz svoj posao, tako i kroz dodatne vidove obrazovanja.

Rad sa nastavnicima matematike koji su kroz svoje školovanje imali jaku obuku i čiji je primarni zadatak da poučavaju matematiku svoje kvalitatne učenike ima svoje prednosti. Timski rad koji uključuje bar jednog člana tima sa jakom obukom, takođe može biti efektivan. Postoji potreba za većom komunikacijom između nastavnika matematike osnovnih i srednjih škola u cilju međusobne razmjene sadržaja i tehnika predavanja. Bez obzira na to koja su sredstva dostupna u školi moraju se uložiti napori da se učenicima nadarenim za matematiku osiguraju nastavnici matematike sa jakim znanjem koji žele da rade sa takvim učenicima.Ono sa čim se većina matematićara složila jeste da je za nastavnika najbitnije da bude zainteresovan za svoj predmet i da posjeduje znanje iz istog.

4.3. Napredovanje darovite djece unutar školskog sistema

Brzina kojom će daroviti učenik napredovati u usvajanju nastavnog gradiva je individualno od pojedinca do pojedinca. Ne postoji poželjna brzina napredovanja ali u literaturama možemo pronaći brzinu očekivanog napretka darovitog učenika.
Pokažimo primjerom američkog modela žkolstva brzinu napretka darovitog učenika:

Do kraja drugog razreda daroviti učenik treba:

- Čitati, pisati i razumjeti cijele brojeve i mjesne vrijednosti brojeva do jednog miliona
- Sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti cijele brojeve do hiljadu
- Sabrirati i oduzimati razlomke jednakih imenilaca
- Rješavati zadatke s riječima koristeći osnovne računske operacije sa cijelim brojevima
- Procijeniti i mjeriti veličine koristeći SU ustav jedinica
- Koristiti matematički jezik za analizu podataka u problem
- Identifikovati i klasifikovati osobine geometrijskih oblika.

Do kraja trećeg razreda daroviti učenik treba:

- Čitati, pisati i razumjeti brojeve do jedne milijarde
- Sabirati, oduzimati, množiti i dijeliti cijele brojeve do million
- Sabirati, oduzimati i dijeliti razlomke razlčitih imenilaca
- Primijeniti vezu između razlomaka i decimalnog zapisa
- Rješavati zadatke riječima koristeći temeljne operacije sa cijelim brojevima i razlomke
- Prikupiti i analizirati podatke koristeći matematički jezik
- Znati uporediti i analizirati geometrijska tijela
- Tumačiti dijagrame, tablice i grafove
- Primijeniti formule za geometrijske likove (kvadrat, pravougaonik, trougao i krug),

Do kraja četvrtog razreda daroviti učenik treba:

- Vršiti operacije s cijelim brojevima, decimalnim brojevima i razlomcima
- Zapisati, interpretirati i rješavati riječima zadane probleme koji uključuju temeljne operacije s cijelim brojevima, razlomcima i decimalnim brojevima
- Identifikovati, poredati, zaokruživati i uporediti cijele brojeve, razlomke i decimalne brojeve
- Prikupljati i analizirati podatke koristeći matematički jezik za uopštavanje zaključaka i opravdanje teorija
- Računati dužinu, površinu i obim uobičajenih geometrijskih oblika
- Prevoditi decimale i razlomke u procente,

Do kraja petog razreda daroviti učenik treba:

- Pokazati razumijevanje za cijele brojeve, razlomke, decimalne brojeve i procente koristeći modele, transformacije i tehnologiju

- Koristiti modele da ilustuje razumijevanje i korištenje načina mjerenja, diskutujući opravdanost tih načina u stvarnom životu
- Koristiti konkretne metode poput crtanja grafika i koristiti algebarska svojstva u rješavanju jednostavnih jednčina i nejednačina
- Razvijati smisao za prostor identifikujući, opisujući, upoređujući i klasifikujući geometrijske figure da bi se opisale veze i riješili problem
- Koristiti statistiku i vjerovatnoću da bi se istražile svakodnevne pojave u stvarnom svijetu, upotrebljavajući grafike i dijagrame da bi se utvrdila predviđanja.

Do kraja šestog razreda daroviti učenik treba:

- Razviti razumijevanje odnosa između cijelih, racionalnih i realnih brojeva, koristeći modele i transformacije
- Koristiti i razvijati sposobnost potrebnu za rješavanje složenijih jednačina i nejednačina
- Primjenjivati algebarske koncepte u rješavanju problema s procentima
- Razvijati prostorni smisao identifikujući, upoređujući i konstruišući geometrijske likove koristeći formule za opisivanje veza i za rješavanje problema
- Koristiti algebarske koncepte u analiziranju funkcijskih veza i rješavanju različitih problema realnog svijeta, uključujući tablice, grafike, jednačine i nejednačine
- Utvrditi vezu između jednačina i grafa u koordinatnom sistemu
- Koristiti statistiku i vjerovatnoću da bi se napravila predviđanja o svakodnevnim pojavama, korištenjem grafova i dijagrama u određivanja tih predviđanja
- Koristiti računalo u rješavanju jednadčina.

Do kraja sedmog razreda daroviti učenik treba:

- Riješiti jednačine i nejednačine koje uključuju sabiranje, množenje i dijeljenje koristeći svojstva, geometrijski prikaz, inverze, recipročne vrijednosti, odnose, cijele brojeve i faktorijele
- Zapisati, uporediti, riješiti i nacrtati linearne veze, jednačine i nejednačine
- Koristiti svojstva nagiba i standardni oblik jednačine da bi se prikazale veze između linearne jednačine i njenog grafika
- Zapisati, uporediti, riješiti i nacrtati grafik kvadratne jednačine, pojasniti odnos između kvadratne jednačine i njenog grafika.

Do kraja osmog razreda daroviti učenik treba:

- Napisati eksplicitne formule za aritmetički i geometrijski niz, kao i odrediti članove niza
- Grafički prikazati linearne i kvadratne funkcije
- Riješiti sistem jednačina različitim metodama poput supstitucije, grafičkog rješavanja, metode suprotnih kojeficijenata
- Koristiti algebarski koncept i matrice u zapisivanju transformacija
- Rješavati algebarske probleme, uključujući stepene i n-te korijene (pozitivne i negativne)
- Koristiti i razvijati vještine potrebne za analiziranje logaritamskih funkcija
- Koristiti kvadratne veze u jednačinama i grafičkom prikazu
- Analizirati geometrijski i aritmetički red.

4.4.Obrazovanje nadarenih učenika

Postoje različiti načini na koje možemo prilagoditi iskustva u učionici potrebama nadarenih učenika. Medutim, da bismo to mogli važno je znati koji se znakovi matematičkih sposobnosti pojavljuju u kojoj fazi djetetovog razvoja. Tok razvoja logičko-matematičke sposobnosti opisao je Švajcarski psiholog Jean Piaget prateći razvoj sposobnosti male djece da logički uređuju stvarnost oko sebe, zaključuju, uočavaju i predviđaju odnose. Piaget je ovaj razvoj podijelio u 4 faze:

- senzomotorička faza (do 2. godine)
- predoperacijska faza (od 2. do 6. godine)
- faza konkretnih operacija (od 6. do 11. godine)
- faza formalnih operacija (od 11. godine pa nadalje).
-

Prema datoj razvojnoj šemi pravo apstraktno mišljenje ne možemo očekivati kod djece prije njihove 11. ili 12. godine, a više oblike ne prije adolescencije. Ipak, naknadna straživanja pokazala su da kod neke djece možemo vrlo rano uočiti karakteristike koje ukazuju na razvijeno zaključivanje i osjetljivost za problem.

Istraživanja su takođe pokazala da se kod nekih pojedinaca razvoj matematičkih sposobnosti nastavlja i nakon faze formalnih operacija, odnosno u adolescenciji, ali i nakon nje. Nakon što se postigne sposobnost apstraktnog mišljenja, ona se dalje može razvijati kao sposobnost uočavanja sve kompleksnijih odnosa te mogućnost složenih mentalnih aktivnosti. Ipak, za razliku od nekih drugih nadarenosti koje proizlaze iz razvijenih, vrlo specifičnih sposobnosti, sposobnosti u osnovi logičko-matematičke nadarenosti nisu tako jasno izražene. Mogli bismo ih zamisliti kao rezultat istovramene aktivacije sljedećih užih sposobnosti:

1. numerička sposobnost je razumijevanje, čitanje i pisanje matematičkih simbola, razumijevanje pojma količine, numeričkih operacija, te numeričkih odnosa;
2. sposobnost pamćenja i planiranja za rješavanje koraka u problemu;
3. sposobnost prostornog predočavanja za razumijevanje geometrije i prostornih odnosa;
4. sposobnost logičkog zaključivanja i uočavanja veza.

Nakon što smo vidjeli koje su karakteristike matematičke sposobnosti te kada se pojavljuju došli smo do najbitnijeg kada su u pitanju nadarena djeca, a to je obrazovanje nadarenih učenika u nastavi matematike. Obrazovanje učenika sa natprosječnim sposobnostima moguće je provoditi na brojne načine, a mi ćemo posvetiti pažnju sljedećim metodama: metodi akceleracije - ubrzanje obrazovanja, metodi obogaćivanja redovnog nastavnog programa i grupisanje učenika po sposobnostima.

4.4.1Akceleracija

Akceleracija je oblik nastave kojim se učenici namjerno izlažu naprednijim standardima nastavnog plana i programa od onoga koji je određen njihovom stvarnom uzrastu i u vremenu kraćem od propisanog. Može imati razne oblike i podjele: raniji polazak u školu, smještanje u razred za nadarene, skupljanje bodova na testiranjima, preskakanje jednog ili više razreda, završavanje dva razreda u jednoj godini ili istovremeno pohadanje osnovne i srednje škole. Mi smo se odlučili za uključujuću i isključujuću podjelu akceleracije, čije oblike ćemo kasnije objasniti.

Metoda akceleracije ne treba uključivati sve učenike, niti ubrzavati cijeli razred samo zbog dobrobiti nekolicine nadarenih. Naime, iako ju je lakše organizovati u okviru postojećih struktura rasporeda te je trošak izvodenja takve nastave znatno manji, može dovesti do neprimjerenog ubrzavanja i teškoća u radu. Postavlja se pitanje je li ocjena vrlo dobar jednu godinu prije bolja od ocjene odličan godinu kasnije. Akceleracija je prikladna samo za učenike natprosječnih sposobnosti koji konstantno imaju visoka školska postignuća, uče brže od ostalih i imaju visoku motivaciju za rad, a moguće ju je provoditi na jedan od sljedeća dva načina:

1. ***Akceleracija grupe učenika***

Prednosti:

- Za razliku od akceleracije cijelog razreda, određenoj grupi učenika moguće je bez posljedica ubrzati nastavni plan i program.
- Učenici dobijaju priliku raditi sa sebi sličnim pojedincima koji će im pružiti odgovarajuću podršku i potrebnu pomoć u daljnjem radu i napretku.

Nedostaci:

- Dugoročno je teško organizovati ovakav način rada u učionicama.
- Profesorima je nezgodno raditi paralelno s dvjema potpuno različitim grupama.
- Može doći do problema upravljanja u smislu količine nastavnog vremena.

2. ***Individualna akceleracija***

Prednosti:

- Izuzetno sposobni učenici vrlo su motivisani i mogu samostalno raditi uz povremenu pomoć nastavnika.
- Nastavnicima rad s nadarenim pojedincem ne oduzima previše vremena, stoga se mogu posvetiti i koncentrisati na ostatak razreda.

Nedostaci:

- Neki učenici zakažu u ubrzanom nastavnom planu i programu.
- Ostatak razreda ponekad može izolovati nadarenog učenika.
- Nastavnicima je potrebna dodatna priprema za rad s takvim učenikom.

Sljedeća tablica daje sažeti prikaz podjela i oblika akceleracija, a primjeri nakon nje praktičnu primjenu u nastavi matematike.

Tabela 1: Podjela i oblici akceleracije

Uključujuća	Akceleracija cijelog razreda	Cijeli razrad ranije polaže testove ili ubrzano prelazi nastavne teme
	Akceleracije grupe učenika	Akceliramo grupu najboljih učenika po nastavnim temama, po potrebi
Isključujuća	Individualna akceleracija unutar ili izdvajanjem iz razreda	Učenik samostalno radi u razredu na višoj razini nastavnog plana i programa ili se izdvaja u posebno organizovan razred nadarenih učenika unutar same škole
	Alternativne mogućnosti	Učenicima se omogućuje dodatna nastava u drugim školama (ljetne, subotnje) ili kroz kurseve i programe specijalizacije, učenici se stavljaju u okruženje sebi sličnih

Na primjer, u sedmom razredu osnovne škole učenici se upoznaju s pojmom linearne funkcije i njenim grafikom, dok u osmom razredu nauče kvadrirati i korjenovati. Tada bismo nadarenim učenicima mogli uvesti pojam kvadratne funkcije, njenog grafika i nula. Pritom moramo paziti da učenici mogu raditi samo s funkcijama koje imaju realne nule, obzirom da se s kompleksnim brojevima susreću tek u drugom razredu srednje škole. Još jedan primjer akceleracije, koji možemo provesti u drugom razredu srednje škole, jeste uopštenje trigonometrije pravouglog trougla na bilo koji trougao uvodeći pritom sinusnu i kosinusnu teoremu . Također, u četvrtom razredu srednje škole kada se učenici samo dotaknu pojma integrala, nadareni učenici koji rade samostalno i bržim tempom bi mogli obraditi tu nastavnu temu u potpunosti. Akceleracija je zahtjevan i osjetljiv način ostvarenja potreba nadarenog učenika, kako za profesore, u didaktičko-metodičkom pristupu, tako i za učenike. Važno je uzeti u obzir stepen emocionalne i socijalne zrelosti nadarenog učenika, ali i želju za promjenom prije donošenja odluke o primjeni akceleracije. Ipak, istraživanja su pokazala da su učenici u čijem se obrazovanju koristila metoda akceleracije zadržali odličan uspjeh te postigli bolja postignuća i socijalnu prilagođenost u poređenju sa učenicima istih sposobnosti čije školovanje nije ubrzavano. Iz svega navedenog možemo pretpostaviti da je akceleracija dobra obrazovna metoda u slučaju nadarenih učenika.

4.4.2. Obogaćivanje redovnog nastavnog programa

Obogaćivanje nastave, koje se ponekad naziva i proširenje, prikladno je za sve učenike stoga se može provoditi u cijelom razredu, ali po potrebi i s malom grupom učenika ili individualno. Posebnost ove metode obrazovanja je u tome što svi učenici imaju koristi od nje. Obogaćivanje aktivnosti učenja osigurava produbljenje i proširenje redovne nastave prema sposobnostima i potrebama učenika. Možemo razlikovati dva načina obogaćivanja, horizontalno i vertikalno. Horizontalno obogaćivanje istražuje područja znanja koja se rijetko dotiču u zajedničkom, osnovnom kurikulumu škole. Vertikalno obogačivanje razvija sposobnost kvantitativnog mišljenja, što podrazumijeva sklonost prema temi i sposobnost razumijevanja temeljnih načela i generalizovanja.
Prednosti ovog oblika nastave su:

- Zbog opsega ponuđenih informacija programi obogaćivanja uvelikom pomažu nadarenim učenicima s velikim područjem interesa.
- Izbjegava se formalna identifikacija i vidljivo etiketiranje pa samim time i problemi koje oni nose sa sobom.
- Kada je planirano u uskoj saradnji s nastavnim planom i programom, obogaćivanje izbjegava djelimična i nepotpuna iskustva učenja povezujući nadarene učenike, iako horizontalno, s opštim razrednim aktivnostima i nastavnim temama.
- Obogaćivanje može obuzdati probleme intelektualne dosade i frustracije.

S druge strane, nedostaci su sljedeći:

- Obogaćivanje je teško definisati i ponekad se skriva pod pojmovima kao što su proširivanje, "manje više isto" ili "samo da se zaposle".
- Zbog uvriježenog mišljenja da je obogaćivanje dobro za sve učenike postavlja se pitanje je li onda adekvatno rješenje za potrebe učenja nadarenih učenika.
- Nastavnicima je potrebna dodatna priprema za provodenje ovog oblika nastave.
- Prilikom provođenja obogaćivanje može postati homogeno rješenje, obraćajući pri tom malo ili nimalo pažnje na potrebe pojedinih učenika.

Obzirom da su iz redovnog nastavnog plana i programa izostavljeni brojni zanimljivi sadržaji zbog potreba većine te je on ograničen i prilično monoton, posebno nadarenim učenicima, obogaćivanje nastave je pravo rješenje. U nastavku ćemo predstaviti dva modela za proširenje redovnog programa u nastavi matematike:

1. ***Trijadni model obogaćivanja***

Primjenjuje se u britanskom sistemu obrazovanja i zalaže se za to da nastavnici planiraju obradu tema služeći se križaljkom "Morati, trebati, moći". Nastavnici koji pohađaju kurseve stručnog usavršavanja često u praksi izrađuju odlične primjere toga modela, a mi vam u nastavku donosimo jednu takvu potpunu križaljku.

Tabela 2: Pitagorina teorema 8. razred osnovne škole

	Morali bi naučiti	**Trebali bi naučiti**	**Mogli bi naučiti**
Pojmovi	Ključne pojmove: katete, hipotenuza, iskaz Pitagorine teoreme	Obrat Pitagorine teoreme	Pitagorine trojke
Znanja	Primijeniti Pitagorinu teoremu na različite pravougle trouglove	Na temelju datih podataka ispitati da je li trougao pravougli ili ne	Razlikovati primitivne Pitagorine trojke
Procesne vještine	Znati formulaciju, smisao i osnovni dokaz Pitagorine teoreme	Formulisati obrat Pitagorine teoreme te izračunavati dužinu jedne stranice pravouglog trougla ako su zadane dužine ostalih stranica	Zaključiti da je u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojci tačno jedan od brojeva neparan, određivati Pitagorine trojke uz određene uslove
Stavovi	Primjena na neke geometrijske likove		

2. *Blumova taksonomija*

Blumova taksonomija je niz kognitivnih stepena pomoću kojih nastavnici mogu izraditi djelotvoran kurikulum i evaluacijske aktivnosti za sva predmetna područja i za sve učenike. Sastoji se od šest stepenica razmišljanja koje se nadograđuju jedna na drugu po složenosti:

- Znanje je temelj, a obuhvata pamćenje činjenica i informacija.
- Razumijevanje uključuje pokazivanje razumijevanja naučenog i mogućnost izražavanja ideja vlastitim riječima.
- Primjena je mogućnost upotrebe naučenog.
- Analiza je mogućnost analiziranja, klasifikovanja ili upoređivanja dvije ili više stvari.
- Sinteza je kreativnost - stvaranje nečeg novog, pokušavanje nečega što nikada prije nije pokušano.
- Evaluacija uključuje prosuđivanje ili odlučivanje o relevantnosti ili vrijednosti stvari. Učenici donose zaključke na temelju gornjih kriterija.

Slika 1: Blumova taksonomija u nastavi matematike

Očito je da su prva tri nivoa prikladna za sve učenike, dok su posljednja tri ključne za razvoj sposobnosti mišljenja višeg reda kod najsposobnijih učenika. Radi se o tome da se učenicima postavljaju pitanja koja sadrže određene nivoe mišljenja i određene glagole koji će usmjeriti njihovo razmišljanje i djelovanje. Učenički rezultati postaju sve složeniji kako napreduju kroz nivoe, a zadaci na najvišim nivoima razvijaju kritičko, kreativno i logičko mišljenje te aktivnosti u kojima se rješavaju problemi. Sljedeća tablica kroz konkretan primjer prikazuju primjenu Blumove taksonomije u nastavi matematike.

Tabela 3:Tetivni i tangentni četverougao, 1. razred srednje škole

Nivoi	Znanje
Znanje	Definisati tangentni i tetivni četverougao.
Razumijevanje	Iskazati karakterizaciju i svojstva tangentnog i tetivnog četverougla
Primjena	Riješiti konkretan zadatak primjenom do sada naučenog gradiva.
Analiza	Dokazati svojstva tangentnog i tetivnog četverougla.
Sinteza	Uporediti tangentni i tetivni četverougao kroz sličnosti i razlike, doći do Ptolomejeve teoreme.
Evaluacija	Iskazati i dokazati Ptolomejevu teoremu, objasniti ga drugim učenicima u razredu.

.

4.4.3.Grupisanje učenika po sposobnostima

Grupisanje po sposobnostima, naziva se još i homogeno grupisanje, je oblik diferencirane nastave koja podrazumijeva samostalnu aktivnost učenika. Radi se o tome da nastavnik cijeli razred podijeli na grupe prema predznanju i matematičkim sposobnostima tako da razlike unutar grupe budu minimalne. Učenici se raspoređuju u tri grupe; slabiji, dobri i izvrsni, i tokom nastavnog procesa rješavaju zadatke primjerene svojim mogućnostima. S obzirom da pri obradi tema u nastavi matematike uvijek postoje i lakši i teži dijelovi, moguće je na svakom času primijeniti rad sa homogenim grupama.

Medutim oko ovog oblika nastave u školstvu često dolazi do podjela. Naime, kritičari tvrde da homogeno grupisanje ima veliku ulogu u raslojavanju društva, dopunsku nastavu uglavnom pohadaju manjine i ušenici niskih socioekonomskih statusa te da je heterogeno grupisanje potrebno kako bi se svim učenicima osigurale jednake prilike. Učenici koji zapadnu u slabije grupe lišeni su mogućnosti razvijanja svojih vještina i sposobnosti, javlja se osjećaj manje vrijednosti, komunikacija u razredu postaje otežana i sužava se (tokom časa medusobno komunicira tek 20% učenika). Sa druge strane, zagovornici ovog načina poučavanja smatraju da je homogeno grupisanje potrebno barem neko određeno vrijeme kako bi se zadovoljile potrebe nadarenih učenika. Oni strahuju da bi sporiji ritam mogao podbaciti u izazovu učenika te da će oni propustiti priliku naprednijeg rada. Takođe ovaj način rada i dalje uključuje sve učenike, razvija se interes za matematiku, učenje na času, zadržava se pažnja i koncentracija svih učenika i povećava se efikasnost nastave. Sljedeća tablica prikazuje kako određenu nastavnu temu prilagoditi radu s homegenim grupama.

U drugom razredu srednje škole nakon što nastavnik definiše kvadratnu jednačinu i pojam rješenja, učenici bi na sljedeći način mogli učestvovati, a nadareni među njima doći do izvođenja formule za rješavanje kvadratne jednačine:

Tabela 4: Obrada kvadratne jednačine

Slabiji učenici	Dobri učenici	Nadareni učenici
Rješavaju poseban slučaj kada je c = 0, prvo primjer, a zatim jednačinu sa opštim brojevima.	Rješavaju slučaj kada je b = 0 i komentarišu pozitivnost broja ispod korijena.	Rješavaju najopštiji oblik kvadratne jednačine dopunom do potpunog kvadrata, pri čemu izvode i samu formulu.

Nakon toga nastavnik zajedno sa svim učenicima uvježbava formulu na konkretnim zadacima. Zbog jakih argumenata na obje strane pitanje grupisanja učenika po sposobnostima rezultovalo je brojnim istraživanjima o prednostima i nedostacima heterogenih i homogenih skupina. A većina ih obično tvrdi da samo grupisanje nema uticaja dok u kombinaciji s kvalitetnim poučavanjem i materijalima prilagođenim učeničkim potrebama itekako ima pozitivan učinak na postignuća učenika. Uostalom nepotrebno je i nerealno koristiti samo jednu metodu grupisanja. Obje, i homogene i heterogene grupe mogu biti učinkovite zavisno od aktivnosti učenika. Ponekad nadareni učenici imaju koristi i proširene mogućnosti u radu s učenicima sličnih sposobnosti, s druge pak strane mogu puno naučiti i produbiti svoje znanje pomažući kolegama slabijih sposobnosti. Stručnjaci u obrazovanju nadarenih učenika napravili su sljedeće preporuke o grupisanju:

- Heterogene grupe su prikladnije kada učenici rješavaju zadatke otvorenog tipa ili kada se obrađuje gradivo koje je nepoznato svima.
- Homogene grupe su prikladnije kada učenici rade na razvoju svojih vještina ili ponavljaju već naučeno.
- Strategije grupisanja trebaju biti fleksibilne, a učenicima dopušteno bar povremeno raditi samostalno prema vlastitom interesovanju.
- Učenici bi trebali imati mogućnost samostalnog odabira grupa na temelju zajedničkih interesovanja.
- Svi učenici moraju steći vještinu grupnoga rada kako bi saradnja u zajedničkom čcenju bila moguća.

4.4.4. Dodatna nastava, sekcija kao oblici rada sa matematički nadarenim učenicima

Dodatna nastava ima za cilj da učenicima koji vole matematiku i uspješno usvajaju matematičke sadržaje u redovnoj nastavi omogući napredovanje, produbljivanjem i proširivanjem tih sadržaja, a time i da probude još jače motive interesovanja za učenje matematike. Dodatna nastava učenika motiviše na stvaralački rad, samostalan rad, razvija kod učenika sposobnost logičkog mišljenja, razvija stvaralačko i kritičko mišljenje, osposobljava učenika za samoobrazovanje uz pomoć literature;uopšte da darovitim učenicima omogući ispoljavanje i razvijanje njihovih matematičkih sposobnosti. Pored izrazito opšteobrazovne funkcije (pružanje mogućnosti učenicima za sticanje dodatnih i dubljih znanja i umijenja), ona ima i značajnu vaspitnu funkciju(pozitivno i snažno utiče na intelektualno, radno, estetsko i moralno vaspitanje učenika-stiču se i razvijaju pozitivni kvaliteti ličnosti učenika neophodni za njegovo djelovanje u društvu).

Svaki nastavnik-profesor u osnovnoj i srednjoj školi, potrebno je da poznaje metodološke kriterijume prilikom prepoznavanja učenika za dodatnu nastavu iz matematike. Zato je potrebno da se ta spsobnost za matematiku uoči kod učenika u pravo vrijeme i na pravi način. Učenika treba prepoznati na osnovu posebne sposobnosti i sklonosti za matematiku, naročito njegovu spoosbnost logičkog mišljenja, onda njegovo rezonovanje na povišenom nivou apstrakcije, onda brzom vršenju generalizacije, kao i mogućnost samostalnog snalaženja u problemskim situacijama; kao i originalnosti rješenja problema i postavljanja novih problema (elastičnost i kreativnost mišljenja), kritičnosti mišljenja i slično. Sposobnost učenika za matematiku je u korelaciji i s raznim drugim intelektualnim sposobnostima kao i svojstvima ličnosti, kao što je pojačano interesovanje za bavljenje matematikom, sklonost prema jasnosti, preciznosti, konciznosti, kritičnosti, istrajnost u radu, radoznalosti. Sposobnosti i sklonosti za matematiku počinju da se ispoljavaju djelimično u starijim razredima osnovne škole, a da li će se i u kojoj mjeri dalje razvijati; to zavisi od uslova života i učenja, i posebno od uticaja kroz nastavu matematike, u toku daljeg školovanja.

Na časovima dodatne nastave iz matematike sam nastavnik se u suštini mora rukovoditi opštim didaktičkim principima kao i na časovima redovne nastave. Od tih principa, najvažniji su: princip aktivnosti, princip naučnosti i princip postupnosti. Učenik na takvim časovima, po pravilu, samostalno otkriva onoliki dio nastavnog gradiva koliko je u datim okolnostima moguće. Za vrijeme rješavanja zadataka i u toku otkrivanja i formilsanja novih pravila i postupaka, učenici treba da budu što je moguće više samostalni u radu. Nastavnik treba da saopštava samo ono do čega nijedan učenik u grupi ne može samostalno doći. Samostalnost učenika treba da ide dotle i da se ispoljava i u tome da oni sami postavljaju nove zadatke, manje-više slične onima koji su već rješavani, pa i sasvim nove. Osjećaj zadovoljstva u traženju rješenja problema nekog zadatka i radost u tome, kod učenika stvara još veću aktivnost i interesovanje za matematiku. Princip postupnosti u nastavi matematike znači da pre svega, da sadržaj teme i odgovarajuće zadatke treba birati tako od lakšeg ka težem kako se mogu dovoljno misaono angažovati članovi grupe na časovima dodatne nastave. Važne su razvojne funkcije zadataka, koje se ogledaju u doprinosu formiranja određenih kvaliteta mišljenja (samostalnost, gipkost, kritičnost, ekonomičnost i kreativnost). Da bi daroviti učenici mogli svoje sposobnosti stvarno upotrebiti i dalje razvijati; naročito je važno da se prilikom odabiranja zadataka vodi računa o njihovoj raznovrsnosti. Pored određenih i jasno formulisanih zadataka, treba postavljati i takozvane problemske situacije tj. poroblemske zadatke.

Matematičke sekcije u školi su veoma korisne aktivnosti za razvijanje i održavanje interesovanja za učenje matematike.

U sekciji , odnosno klubu sami učenici određuju oblike , metode rada i sadržaj na svojim sastancima (tematika u okviru date programske orijentacije), pri čemu nastavnik, daje stručnu pomoć i sugestije za rad. Oblici rada , odnosno aktivnosti matematičkih sekcija (klubova) mogu biti vrlo različiti. Pored redovnih sastanaka sa odgovarajućom tematikom (zanimljiva predavanja, razgovori-rasprave, rješavanje zadataka, matematičkih zanimljivosti, igara, praktičkih razgovora i dr.), mogu se organizovati i razne masovne manifestacije (matematičke večeri sa različitom tematikom, matematički kvizovi, matematičke konferencije i zborovi, izložbe o radu sekcije-kluba, matematičke eskurzije i sl.), izdavanje zidnih matematičnih novina i slično. Programi sekcija (klubova) mogu obuhvatiti mnoge oblasti iz istorije matematike, sa kratkim biografskim skicama i zanimljivim anegdotama, zatim odabrana poglavlja iiz aritmetike, algebre i geometrije, igre i takmičenja, primjene matematike na druge nastavne predmete i područja tj. aktivnosti. Savremna iskustva su pokazala da u nastavi matematike postoji još mnogo oblika rada koji podstiču učenike na intezivnije učenje. Isto tako značajno je da se izvan toga učenici zainteresuju za matematiku u slobodnom vremenu. Naime, postoje mogućnosti za organizovanje niza zanimljivih matematičkih aktivnosti u kojima se učenici angažuju.

4.5. Odgovornost škole i nastavnika u razvoju matematički darovitih učenika

Veliku ulogu u otkrivanju nadarenih učenika ima i nastavnik. Učenici nadareni za matematiku ne moraju biti uspješni i u ostalim nastavnim predmetima stoga ih nije lako prepoznati. Za nastavnika je važno da nauči prepoznati potrebe darovitih učenika i njihove karakteristike. Takođe, nastavnici koji uspostave dobar odnos sa svojim učenicima sposobni su to znanje iskoristiti kao dobar vodič za dalji rad s njima, radije nego darovite učenike razdvojiti prema tradicionalnim testovima.Učiteljima je potrebna posebna obuka i podrška u prepoznavanju matematičke nadarenosti. Učitelji koji rade s darovitim učenicima trebaju dobro poznavati matematičke sadržaje, no ako škola ima samo nekoliko nadarenih učenika, a nema odgovarajućeg učitelja, trebao bi im se omogućiti rad sa za to odgovarajućim mentorom izvan njihove matične škole. Usklađeni program mora biti tako postavljen da se matematička znanja usvojena u jednoj školskoj godini ne ponavljaju ili prekidaju u drugoj.

Škola bi trebala imati organizovan sistem podrške koji uključuje opremljenost odgovarajućim knjigama, tehnologijom i kadrom za to osposobljenih ljudi. Kada se u redovnoj nastavi osiguraju dovoljno zahtjevna i široka iskustva s nadarenim učenicima, stvara se potencijal za obogaćivanje obrazovne zajednice. Naime, ostali učenici u tim uslovima razvijaju povečano zanimanje i uz malu pomoć mogu svladati zahtjevnije zadatke. Dakle, svi učenici imaju mogućnost učenja u skladu sa svojim sposobnostima, ako im se u podučavanju ponudi raznolikost zadataka i nastavnog materijala, te pri tome prati ritam njihovog učenja i nadziru njihove potrebe.

4.6.Takmičenja

Kada govorimo o nadarenim učenicima ne možemo da zaobiđemo temu „takmičenja”, obzirom da su takmičenja, bar kod nas, rijetka prilika učenicima da provjere svoja znanja i sposobnosti, koje izlaze iz okvira standardnog školskog programa i da odmjere snage sa učenicima koji se ne nalaze u njihovom odjeljenju. U nekim zemljama djeca se prilikom upisa klasifikuju prema sposobnostima, ali kod nas to nije slučaj i odjeljenja se formiraju upravo od djece mješovitih sposobnosti. Sve dok se ne pojave prva takmičenja ocjene su roditeljima i djeci jedini indikator znanja i sposobnosti. Ali ocjene mogu biti, i najčešće i jesu, prilično nesiguran indikator.

- Kao prvo one zavise od kriterijuma samo jedne osobe (učitelja, odnosno nastavnika) ;
- U nižim razredima, dok se djeca još navikavaju na sistem školovanja, kriterijum ocjenjivanja ne bi smio biti (pa zato i nije) suviše rigorozan, pa u prvih nekoliko godina školovanja u odjeljenju bude veoma veliki broj djece sa odličnim uspjehom, što nije baš realna slika.;

- Ocjena ima samo 5 i u okviru samo jedne ocjene nisu predviđene razlike koje bi se odnosile na nijanse (mada mnogi nastavnici, iz velike potrebe, često pokušavaju te nijanse na neki način da izraze), tako da i odličnih ocjena (petica) ima različitih.

Djeca, po prvi put, na takmičenjima imaju priliku da izađu iz okvira svog odjeljenja i odmjere snage sa ostalom djecom – prvo iz iste škole,a zatim, ukoliko se pokažu uspješni, i šire, sve do nivoa republike.

Na takmičenju su testovi jedinstveni za sve, što znači da sva deca podležu istom kriterijumu,a sastavljaju ih određena udruženja specijalizovana za određenu oblast.
” Sezona ” ovih takmičenja počinje u drugom polugodištu i proteže se sve do pred kraj školske godine.

Motivacija učenika i nastavnika za takmičenje

Iz svega gore navedenog nije teško zaključiti šta motiviše učenike da se takmiče. Pre svega to je izazov da odmjere svoje snage sa učenicima van odjeljenja i to u gradivu koje prevazilazi ono predviđeno standardnim planom i programom, te da steknu realniju sliku o svom znanju i sposobnostima. Osim toga, neke nagrade u višim razredima osnovne škole mogu im omogućiti lakši upis u željenu srednju školu zbog bodova koje donose. Što se tiče nastavnika tu je situacija drugačija. Ne postoje mehanizmi koji su predviđeni da stimulišu nastavnike da pripremaju učenike za takmičenje. Ne postoji ni zakonska obaveza koja se odnosi na ovo,a sami nastavnici, ako izuzmemo entuzijazam malobrojnih pojedinaca,nemaju interes u takmičenjima. Trebalo bi da želja učenika za napretkom, učenjem i takmičenjem podstakne nastavnike da im u tome maksimalno pomognu.

5.Metode rješavanja problemskih zadataka

U svakom području matematike postoji niz razradenih i djelotvornih metoda rješavanja raznovrsnih problema. Radi se o metodama pogodnim za rad s nadarenim učenicima, oni su na tom stepenu već dobrim djelom prepoznati, a navedenim metodama će se samo produbiti njihovo razumijevanje matematike, logičko zaključivanje i principi razmišljanja.

Uglavnom se radi o sistematizaciji postupaka rješavanja koja im na tom stepenu nedostaje, zadaci su razumljivi darovitim učenicima i rješavaju ih s velikim zanimanjem. Navedene metode mogu poslužiti i za dalje prepoznavanje darovitosti ako ono ranije nije uočeno te za razlučivanje boljih od onih lošijih, gdje će bolji među njima obično lakše prihvatiti neku metodu i znati je iskoristiti na primjeren način.

5.1 Metoda uzastopnih približavanja

Krenućemo od metode rješavanja problema primjerenih učenicima IV. i V. razreda. Učenici ovog uzrasta još ne uče jednačine pa se rješavanje nekog problema mora osmisliti drugačije. Postoji jedna metoda rješavanja problema primjerena učenicima ovog uzrasta, koja uspješno zamjenjuje potrebu postavljanja jednačina. To je metoda uzastopnih približavanja, a poznata je i kao metoda pokušaja i pogrešaka. Metoda se sastoji u nizu pokušaja da se dođe do rješenja postavljenog problema. U svakom od njih nastoji se ispraviti pogreška koja je nastala u prethodnom pokušaju. Pritom se pogreška smanjuje i u svakom narednom pokušaju dolazi se sve bliže i bliže traženom rezultatu. Metoda se najčešće prikazuje pomoću tablice u koju se unose pokušaji.

Zadatak 1. (4. razred)
Od početka školske godine, do danas, Zvonimir je dobio 46 ocjena. Svaka od njih je ili petica ili četvorka. Zbir svih ocjena je 204. Koliko je Zvonimir dobio petica?

Rješenje:
Napravimo tablicu u kojoj u prvom stupcu upisujemo broj petica, a u drugom upisujemo broj četvorki, a zbir ta dva broja mora biti 46. U ostalim stupcima računamo zbir ocjena. Počećemo tako da pretpostavimo da su u prvom stupcu svih 46 ocjena petice. Zatim uzmemo da su svih 46 ocjena četvorke. U sljedeći red stavimo da je polovina ocjena četvorke, a druga petice. Nakon toga se vidi koji broj trebamo smanjivati, a koji povećavati.

Tablica 6: Broj ocjena

Broj petica	Broj četvorki	Zbir petica	Zbir četvorki	Zbir svih ocjena
46	0	230	0	230
0	46	0	184	184
23	23	115	92	207
22	24	110	96	206
21	25	105	100	205
20	26	100	104	204

Zadatak 2.(5.razred)
125kg šećera stavljeno je u 40 vrećica od kojih neke sadrže 2kg, a neke 5kg. Koliko je bilo vrećica od 2kg, a koliko od 5kg.

Rješenje:
U 40 vrećica koje sadrže 2kg stane

$$2 \cdot 40 = 80\text{kg}$$

šećera što je manje od 125kg. Stoga, smanjujemo broj vrećica od 2kg. U 30 vrećica od 2kg i 10 vrećica od 5kg stane

$$2 \cdot 30 + 5 \cdot 10 = 110\text{kg}:$$

Do rješenja dolazimo pomoću tablice:

Tablica 7: Težina šećera u kilogramima

Vrećica od 2kg	Vrećica od 5kg	Šećer u kg
40	0	80
30	10	110
20	20	140
22	18	134
23	17	131
24	16	128
25	15	125

Vrećica od 2 kg je bilo 25, dok je vrećica od 5 kg bilo 15.

Zadatak 3. (5. razred)
Na času geometrije učenici su od štapića jednakih dužina slagali trouglove i kvadrate. Upotrijebili su 300 štapića i složili 92 lika. Koliko je medu njima bilo trouglova, a koliko kvadrata?

Rješenje:
Najveći mogući broj trouglova je 92, a tada nema kvadrata. Najveći mogući broj kvadrata je 92, a tada nema trouglova. To su krajnji slučajevi. U prvom od njih broj stranica je 276, a u drugom 368. Kako je ukupan broj stranica likova u zadatku 300, učenici su složili određeni broj i trouglova i kvadrata.
Idući korak je srednji slučaj u kom uzimamo da je i trouglova i kvadrata bilo po 46. U tom slučaju ukupan broj stranica je 322. To je previše. Budući da kvadrati više doprinose broju stranica, treba smanjiti broj kvadrata, a povećati broj trouglova. Sad počinjemo približavanje rješenju povećanjem broja trouglova, recimo za po 5, tj. sa 46 na 50, 55, 60, 65, 70. Istovremeno se broj kvadrata smanjuje sa 46 na 42, 37, 32, 27, 22. Ukupan broj stranica likova u tim slučajevima je 318, 313, 308, 303, 298. Šta nam kažu zadnja dva broja? Kažu nam da je traženi broj trokuta izmedu 65 i 70. Treba nastaviti približavanje rješenju unazad i promatrati 68, 68, 67, odnosno 66 trokuta. Odmah se vidi da sljedeća dva pokušaja vode do rješenja. Rješavanje zadatka prikazaćemo u tablici:

Tablica 8: Broj stranica

Broj trouglova	Broj kvadrata	Ukupan broj stranica
92	0	276
0	92	368
46	46	322
50	42	318
55	37	313
60	32	308
65	27	303
70	22	298
69	23	299
68	24	300

Od 300 štapića učenici su složili 68 trouglova i 24 kvadrata.

Važna komponenta metode je tablica, dok je važno svojstvo metode procjena. U svakom pokušaju traženja rješenja učenici aktivno razmišljaju o granicama u kojima se rješenje nalazi i dolaze mu sve bliže. S vremenom, učenici stiču iskustvo koje će im omogućiti bolju procjenu, smanjiti broj pokušaja i brže pronaći rješenje.

5.2 Metoda uočavanja pravilnosti

Rješavanjem zadataka ovom metodom pažnja je usmjerena na podatke koji su zadani u zadatku i njihov medusobni odnos. Učenici svojim logičkim zaključivanjem i uočavanjem dolaze do rješenja zadatka

.

Zadatak 1. (8.razred)
Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 3, 6, 24, 192.... Postupak obrazloži.

Rješenje:
Količnici uzastopnih članova su 2, 4, 8. Kako je 4 : 2 = 2 i 8 : 4 = 2, onda slijedeći količnik treba biti

$$8 \cdot 2 = 16;$$

a zatim

$$16 \cdot 2 = 32:$$

Zato u nizu slijedi broj

$$192 \cdot 16 = 3072$$

žodnosno

$$3072 \cdot 32 = 98304$$

Zadatak 2. (5.razred)
Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 2, 7, 17, 37.... Postupak obrazložite.

Rješenje:
Kako su razlike uzastopnih članova

$$7 - 2 = 5$$
$$17 - 7 = 10$$
$$37 - 17 = 20;$$

te je 10 : 5 = 2 i 20 : 10 = 2, onda sljedeća razlika treba biti

$$20 : 2 = 40;$$

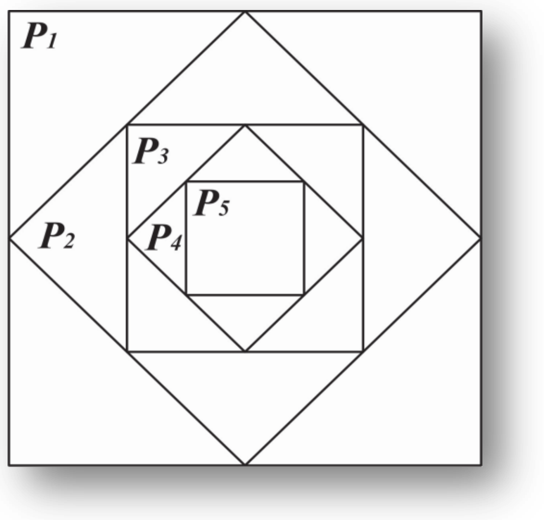
a zatim

$$40 : 2 = 80:$$

Zato u nizu slijedi broj 37 + 40 = 77 odnosno 77 + 80 = 157. Dva broja koja nastavljaju niz su 77 i 157.

Zadatak 3.(8. razred)
Pet kvadrata nalazi se jedan u drugome tako da su tjemena manjeg kvadrata središta stranica većeg. Koliko je puta površina najvećeg kvadrata veća od površine najmanjega?

Rješenje:



Slika 2: Pet kvadrata

$$P_1 = 2P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{P_1}{2}$$

$$P_3 = \frac{P_2}{2} \Rightarrow P_3 = \frac{P_1}{4}$$

$$P_4 = \frac{P_3}{2} \Rightarrow P_3 = \frac{P_1}{8}$$

$$P_5 = \frac{P_4}{2} \Rightarrow P_5 = \frac{P_1}{16}$$

Stranica kvadrata P_1 dužine je a, tj. njegova površina iznosi $P_1 = a^2$.
Iz gore zadanog računa dobili smo da je

$$P_5 = \frac{P_1}{16}$$

Slijedi da je

$$P_1 = 16P_5$$

što znači da je površina najvećeg kvadrata 16 puta veća od površine najmanjeg!

5.3 Metoda ispisivanja sistemskih listi

Ovo je metoda u kojoj ispisujemo sva moguća rješenja i uzimamo ono rješenje koje odgovara uslovu zadatka. Kod ove metode moramo paziti da nam se moguća rješenja ne ponavljaju, tek kada iscrpimo sve mogućnosti možemo pristupiti konačnom rješenju. Radi vizualne jednostavnosti podaci se najčešće unose u tablicu.

Zadatak 1. (5. razred)
Na koliko različitih načina možemo razmijeniti novčanicu od 50 konvertibilnih maraka, koristeći se s kovanicama ili novčanicama od 2, 5 i 10 konvertibilnih maraka?

Rješenje:
Svota koju čine kovanice od 5 KM i novčanice od 10 KM sigurno je djeljiva sa 5, a kako je i 50 KM djeljivo sa 5, slijedi da svota koju čine kovanice od 2 KM mora biti djeljiva sa 5, a to je moguće samo ako je broj tih kovanica djeljiv sa 5.
Dakle, kovanica od 2 KM ima

0; 5; 10; 15; 20 ili 25.

Svota koju čine kovanice od 2 KM i novčanice od 10 KM sigurno je djeljiva sa 2, a kako je i 50 KM djeljivo s 2, slijedi da svota koju čine kovanice od 5 KM mora biti djeljiva sa 2, a to je moguće samo ako je broj tih kovanica djeljiv sa 2.
Tablicom prikažimo sve mogućnosti.

Tablica 9: Broj kovanica

Broj kovanica od 2 KM	Broj kovanica od 5 KM	Broj novčanica od 10 KM	Broj načina
0	0, 2, 4, 6, 8, 10	5, 4, 3, 2, 1, 0	6
5	0, 2, 4, 6, 8	4, 3, 2, 1, 0	5
10	0, 2, 4, 6	3, 2, 1, 0	4
15	0, 2, 4	2, 1, 0	3
20	0, 2	1, 0	2
25	0	0	1

Dakle, 50 KM možemo razmijeniti na 21 različit način.

Zadatak 2. (5. razred)
Ciframa 1, 3, 5, 9 napiši sve trocifrene brojeve djeljive s 3, pri čemu su sve cifre različite.

Rješenje:
Broj je djeljiv s 3 ako mu je zbir cifara djeljiv s 3.
Stoga, vrijedi

$$1 + 3 + 5 = 9;$$
$$1 + 3 + 9 = 13;$$
$$1 + 5 + 9 = 15;$$
$$3 + 5 + 9 = 17:$$

Zato cifre 1, 3, 5 i 9 daju brojeve 135, 153, 315, 351, 513, 531, 159, 195, 519, 591, 915 i 951.

Zadatak 3. (5. razred)
U jednoj košarkaškoj ligi 8 je ekipa, a svaka ekipa mora odigrati utakmicu sa svakom od preostalih ekipa. Koliko će se u toj ligi odigrati utakmica?

Rješenje:
U prvi stubac upisujemo sve utakmice koje je ekipa A odigrala sa svojim protivnicima, a to su AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH. U slijedeći stubac upisujemo utakmice koje je odigrala ekipa B, s tim da se protivnici ne smiju ponavljati, tj. ekipa B je već igrala sa ekipom A i tu utakmicu ne upisujemo. U trećem stupcu upisujemo utakmice ekipe C bez već odigranih i tako do posljednje ekipe. Posljednji red prikazuje broj odigranih utakmica za svaki stubac.

Tablica 10: Broj odigranih utakmica

	AB AC AD AE AF AG AH	BC BD BE BF BG BH	CD CE CF CG CH	DE DF DG DH	EF EG EH	FG FH	GH
UKUPNO	7	6	5	4	3	2	1

Ako saberemo broj odigranih utakmica u posljednjem redu, dobijemo da će se u toj ligi odigrati 28 utakmica.

5.4 Metoda inverzije

Još jedna nadasve zanimljiva metoda je metoda invrezije. Ova metoda se sastoji u tome da se rješavajući zadatak krene od zadnjeg elementa u zadatku, a operacije se izvode obrnutim redoslijedom od onoga koji se navodi u zadatku.

Zadatak 1. (5.razred)
Ivan je zamislio jedan broj. Kada je taj broj pomnožio s 8 i tom proizvodu dodao 8, dobio je broj koji je za 11 veći od 701. Koji je broj zamislio Ivan?

Rješenje:
Zadatak ćemo krenuti rješavati obrnutim redoslijedom, tj. unazad. Broj koji je za 11 veći od 701 je 712. Ako njemu oduzmemo 8 dobitćemo proizvod, dakle proizvod je 794. Kad ga podijelimo s 8, dobit ćemo traženi broj, tj.

$$704 : 8 = 88:$$

Ivan je zamislio broj je 88.

Zadatak 2. (5. razred)
Na pitanje koliko mu je godina, jedan matematičar je odgovorio: "Ako od broja mojih godina oduzmeš 5, dobijeni broj podijeliš brojem 5 te od rezultata ponovo oduzmeš 5, dobićeš broj 5". Koliko mu je godina?

Rješenje:
Krećemo od zadnjeg podatka i radimo obrnute računske operacije:

$$5 + 5 = 10$$

(jer oduzimamo 5)

$$10 \cdot 5 = 50$$

(jer dijelimo sa 5)

$$50 + 5 = 55$$

(jer oduzimamo 5)

Provjera:

$$55 - 5 = 50$$
$$50 : 5 = 10$$
$$10 - 5 = 5$$

Matematičar ima 55 godina.

Zadatak 3.(6. razred)
Majka je prije odlaska na posao pripremila korpu šljiva za svoje tri kćeri. Prvo se probudila najstarija kći i misleći da je prva, pojela trećinu šljiva iz korpe. Druga se probudila srednja kći i, misleći da je prva, pojela trećinu šljiva iz korpe. Zadnja se probudila najmlada kći i, smatrajući da se probudila prva, uzela iz korpe trećinu šljiva. Tada je u korpi ostalo 8 šljiva. Koliko je šljiva majka ostavila u korpi.

Rješenje:
I ovaj ćemo zadatak krenuti rješavati obrnutim redoslijedom. Najmlada je kći uzela iz korpe trećinu šljiva i preostalo ih je još 8. To znači da je tih 8 šljiva jednako dvjema trećinama šljiva koje su bile u korpi prije nego li je šljive uzela najmlađa kći. Odatle lako izračunamo da trećina šljiva iznosi 4, tj. da je u korpi bilo

$$3 \cdot 4 = 12$$

šljiva prije nego je najmlada kći uzela svoj dio. Vratimo se korak u nazad. Srednja kći pojela je trećinu šljiva iz korpe u kojoj je nakon toga preostalo 12 šljiva. Dakle, srednja kći je u korpi zatekla

$$3 \cdot \frac{12}{2} = 18$$

šljiva. Na sličan način promotrimo i događaj koji se dogodio prvi. Najstarija je kći pojela trećinu šljiva iz korpe u kojoj je potom preostalo 18 šljiva. To znači da 18 šljiva odgovara dvjema trećinama ukupnog broja šljiva, tj. majka je pripremila korpu sa

$$3 \cdot \frac{18}{2} = 27$$

šljiva.

5.5 Metoda dužina

Ovu metodu možemo primjeniti pri rješavanju problemskih zadataka. Navešćemo nekoliko primjera.

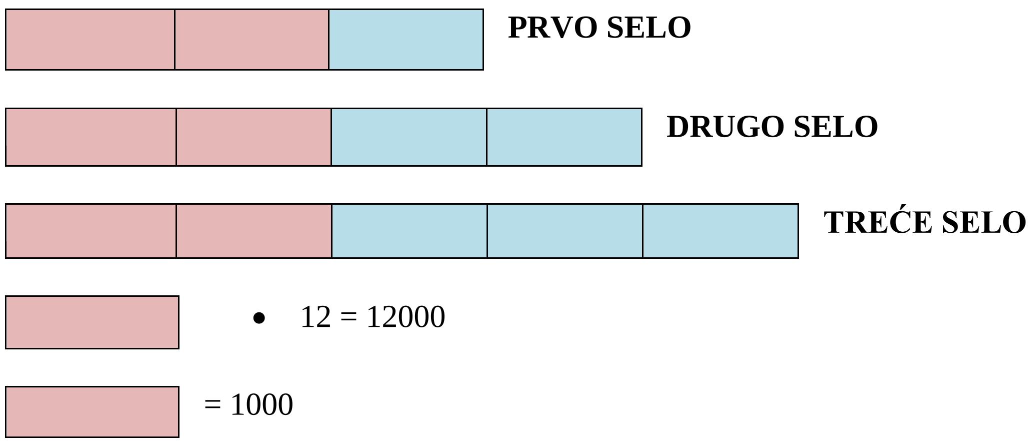
Zadatak 1. (4. razred OŠ)
Jedan broj je veći od drugog za 406. Ako se veći broj podijeli manjim, dobiće se količnik 3 i ostatak 66. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Manji broj ima vrijednost 170, a veći $3 \cdot 170 + 66 = 576$.

Zadatak 2. (6. razred OŠ)
U tri sela ima ukupno 12000 stanovnika. Koliko ima stanovnika u svakom selu ako 2/3 prvog,1/2 drugog i 2/5 trećeg sela imaju jednak broj stanovnika?

Rješenje:



Prvo selo ima 3000, drugo 4000, a treće 5000 stanovnika.

Zadatak 3.
Ivan i Branko su pošli na izlet. Usput je Ivan kupio 5, a Branko 3 kolača, plativši ukupno za njih 24 dinara. Na izletu im se pridruži i Miloš te sva trojica zajedno pojedoše kolače. Za svoj dio kolača Miloš im plati 8 dinara. Kako će tih 8 dinara podijeliti Ivan i Branko?

Rješenje:

Za 8 kolača su Ivan i Branko platili 24 dinara, pa je svaki kolač koštao 3 dinara.

3din	3din	3din	3din	3din

Ivan je za 5 kolača platio 15 dinara.

3din	3din	3din

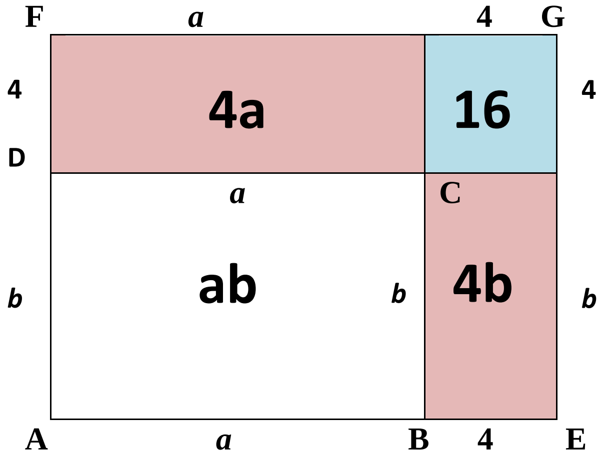
Branko je za 3 kolača platio 9 dinara.

Svaki od njih trojice je pojeo kolača za 24:3=8 dinara. Ivan je platio 7 dinara više za kolače nego što ih je pojeo. Branko je platio 1 dinar više za kolače nego što ih je pojeo. Od 8 dobijenih Miloševih dinara Ivan će dobiti 7, a Branko 1 dinar.

5.6. Metoda površine pravougaonika

Umjesto klasičnog rješavanja nekih jednčina u kojima se pojavljuje proizvod binoma možemo te jednačine rješavati grafički primjenom površine pravougaonika.

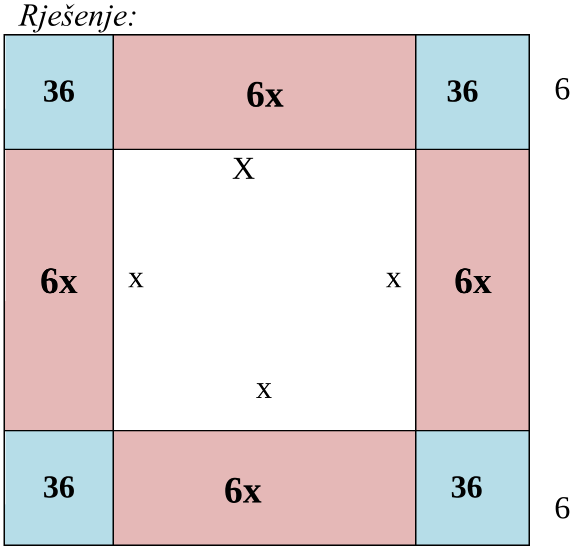
Zadatak 1. (5. razred OŠ)
Zadat je pravougaonik ABCD obima 42 cm. Produžimo stranicu AB za 4 cm preko tačke B do tačke E, a stranicu AD za 4 cm preko točke D do točke F. Za koliko se razlikuju površine zadatog pravougaonika ABCD i pravougaonika kome su AE i AF susjedne stranice?
Rješenje:



Iz $O=2(a+b)=42$ slijedi $a+b=21$**,** pa se površine novodobijenoga pravougaonika AEGF i datoga pravougaonika ABCD razlikuju za $4a+4b+16=4(a+b)+16=4\cdot 21+16=100$,
tj. za 100 cm².

Zadatak 2. (4. razred OŠ)
Iz jednoga kvadrata izrezan je u sredini drugi kvadrat, tako da je ostao okvir širine 6 cm. Kolika je dužina stranice novodobijenoga kvadrata ako je površina okvira 384 cm²?

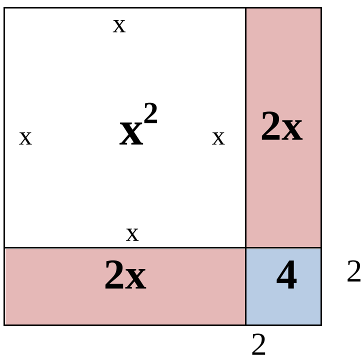
Rješenje:



Površina okvira je $4\cdot(6x+36)=384$, odakle je
$6x+36=384:4$,
$6x+36=96$,
$6x=96-36$,
$6x=60$,
$x=10$ cm.

Zadatak 3. (4. razred OŠ)
Ako dužinu stranice kvadrata povećamo za 2 cm, dobićemo kvadrat koji ima površinu za 8 cm² veću od površine prvobitnog kvadrata. Koliko iznosi dužina stranice prvog kvadrata?

Rješenje:



Iz $2x+2x+4+x^2=x^2+8$ slijedi da je $4x=4$, $x=1cm$.

Zadatak 4.
Data su dva različita pozitivna broja. Ako od većeg broja oduzmemo 3, a manjem dodamo 2, dobićemo jednake brojeve čiji je proizvod jednak proizvodu datih brojeva. Koji su dati brojevi?

Rješenje:
Neka su zadati brojevi a i b i neka je veći broj a. Iz $a-3=b+2$ sledi $a=b+5$, pa iz $2(b+2)=3b$ slijedi $b=4$ i $a=9$.

5.7. Logički zadaci

Zadatak 1.
U deset pravougaonika upisati devet slova, ali tako da u svaki pravougaonik dođe tačno jedno slovo. Izostavite složena slova dž, lj, nj.

Rješenje:

D	E	V	E	T	S	L	O	V	A

Zadatak 2. (5. razred OŠ)
Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{T \cdot A \cdot L \cdot E \cdot S}{P \cdot I \cdot T \cdot A \cdot G \cdot O \cdot R \cdot A}$$

ako svako slovo predstavlja jednu cifru (0,1,2, ..., 9) i to tako da različita slova predstavljaju različite, a jednaka slova jednake cifre.

Rješenje:.
Budući da je 10 različitih slova, a 10 različitih znamenaka, tada su zastupljene sve znamenke. Budući da nula ne može biti u nazivniku, tada je ona u brojniku, pa je vrijednost razlomka nula.

Zadatak 3. (5. razred OŠ)
U istoj zgradi u 4 stana stanuju osobe A, B, C i D. Osobe B, C i D su braća osobe A, a osim njih osoba A nema više braće. U stanu osobe A postoje 2 vrata i 3 prozora.
U stanu osobe B ima toliko vrata koliko u stanu osobe C ima prozora i toliko prozora koliko tamo ima vrata.
U stanovima braće osobe D ima jednak broj vrata i prozora.
Živi li u toj zgradi punica (tašta) osobe A?

Rješenje:
U stanu osobe A ima dvoja vrata i tri prozora. S druge strane u stanovima braće osobe D ima jednak broj vrata i prozora, pa zaključujemo da osoba A nije brat nego sestra osobama B, C i D. Zato osoba A nema punicu, pa je odgovor zadatka odričan.

Zadatak 4. (6. razred OŠ)
Prodavačica prodaje punu korpu jaja. Kupac A prvo kupi polovinu sadržaja korpe i još pola jajeta. Zatim dođe kupac B i kupi polovinu ostatka jaja i još pola jajeta. To isto učine redom kupci C, D i E. Nakon odlaska kupca E, u korpi više nije bilo jaja.
Koliko je jaja bilo u korpi?
Je li prodavačica mogla prodati cijela jaja?

Rješenje:
Računanje unatrag.
Iza kupca E nije ostalo ništa jaja. On je uzeo jedno (posljednje) jaje (pola ostatka tj. 0.5 i još pola jajeta). Iza kupca D ostalo je 1 jaje. On je uzeo 2 jajeta (pola ostatka, tj 1.5 i još pola jajeta). Iza kupca C ostalo je 3 jaja. On je uzeo 4 jajeta (pola ostatka 3.5 i još pola jajeta). Iza kupca B ostalo je 7 jaja. On je uzeo 8 jaja (pola ostatka 6.5 i još pola jajeta). Iza kupca A ostalo je 15 jaja. On je uzeo 16 jaja (pola ukupne količine 15.5 i još pola jajeta). Dakle, u korpi je bilo ukupno 31 jaje. Od toga je A uzeo 16, B 8, C 4, D 2 i E 1 jaje.

Metoda lažne pretpostavke.
Pretpostavimo da je u korpi bilo (na primjer) 15 jaja (neparan broj). Kupac A uzima pola od 15 i još pola jajeta, tj. uzima 8 jaja. Ostaje još u korpi 7 jaja. Kupac B uzima 3.5+0.5=4 jaja, pa u korpi ostaje 3 jajeta. Kupac C uzima 2 jajeta, a u korpi ostaje 1 jaje. Kupac D uzima 0.5+0.5=1 jaje i u korpi ne ostaje više ni jedno jaje za kupca E. Dakle, u korpi treba biti 2·(15+0.5)=31 jaje.

Zadatak 5.

Jedna osoba u grupi stavlja prsten na jedan članak na jednome prstu jedne ruke. Označimo osobe brojevima 1,2,3, ..., desnu ruku sa 1, a lijevu sa 2, prste na ruci s 1,2,3,4 i 5 (računajući od palca) i članke na prstu s 1, 2 i 3 (računajući od vrha prsta). Sada računajte sljedeće:

Broj osobe koja ima prsten pomnožite s 2, dodajte tome 5 i sve pomnožite s 5. Rezultatu dodajte broj ruke na kojoj je prsten, sve pomnožite s 10 i tome dodajte redni broj prsta na kome je prsten. Rezultat pomnožite s 10, tome dodajte broj članka na kome je prsten i sve to smanjite za 491. Recite rezultat. Ja ću pogoditi osobu kod koje je prsten, na kojoj je ruci, na komu prstu i na komu članku prsta.

Obrazložite odgovor!

Rješenje .

Označimo:

a – broj osobe (1,2,3…)

b – broj ruke, 1- desna, 2- lijeva)

c – broj prsta na ruci (1,2,3,4,5 - računajući od palca)

d – broj članka na prstu (1,2,3 - računajući od vrha)

$$(((a\cdot 2 + 5)\cdot 5 + b)\cdot 10 + c)\cdot 10 + d - 491 = K \qquad \text{(konačni rezultat)}$$

$$1000a + 100b + 10c + d + 2009 = K$$

$$\overline{abcd} = K-2009$$

5.8. Dirihleov princip ("princip zečeva i kaveza", "princip kuglica i kutija",…)

Dirichletov princip pokazuje postojanje objekata koji imaju jedno ili više unaprijed zadatih svojstava, ali ne pokazuje kako se to konkretno ostvaruje.

Ako *$n+1$ zečeva raspoređujemo u n praznih kaveza, tada će postojati barem jedan kavez u kome su smještena barem 2 zeca.* **Uopšteno:** Ako $nk+1$ zečeva raspoređujemo u n kaveza, tada postoji barem jedan kavez u kome su smješteni barem $k+1$ zečeva

Zadatak 1. (7. Razred OŠ)

U jednoj oblasti na opštinskom takmičenju iz matematike od 4. do 8. razreda učestvovalo je 1995 učenika. Svaki takmičar rođen je jedne od ovih godina: 1980., 1981., 1982., 1983. ili 1984.

(a) Dokaži da postoje barem dva učenika rođena istoga dana iste godine.

(b) Dokaži da postoji barem 6 takmičara koji su rođeni istoga dana i mjeseca

Rješenje:

(a) Budući da su 1980. i 1984. bile prestupne godine, zaključujemo da u pet navedenih godina ima 1827 dana. Kako je na takmičenju učestvovalo 1995 takmičara, izlazi da su barem dva takmičara rođena istoga dana iste godine.

(b) Prema datumu rođenja takmičare možemo razvrstati u 366 grupa. Kako je 1995=366·5+165, tada prema Dirichletovom principu postoji barem jedna grupa s najmanje 6 takmičara, tj. najmanje 6 takmičara je rođeno istoga dana i mjeseca.

Zadatak 2. (2. razred SŠ)
Dato je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje:
Kako je $29^2=841$, tada je svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. To su prosti brojevi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23 (ukupno 9 prostih brojeva). Budući da ima 10 složenih brojeva, a 9 prostih brojeva ≤ 23, tada po Dirichletovom principu postoje barem dva složena broja koja su djeljiva istim od 9 navedenih prostih brojeva.

Zadatak 3.
Na nekom šahovskom turniru učestvuje 8 šahista. Svaki od njih igra sa svakim od preostalih 7 šahista po jednu partiju šaha. Dokazati da u svakom trenutku postoje barem dvojica šahista koja su odigrala jednak broj partija šaha.

Rješenje:
Ako postoji šahista koji je već odigrao svih 7 partija šaha, tada ne postoji šahista koji još nije odigrao ni jednu partiju šaha. Broj odigranih partija šaha svakoga šahiste tada može biti 1,2,…,6 ili 7, tj. ukupno 7 mogućnosti. Budući da je 8 šahista, a 7 mogućih brojeva odigranih partija šaha, tada po Dirichletovom principu barem dvojica šahista imaju jednak broj odigranih partija šaha.

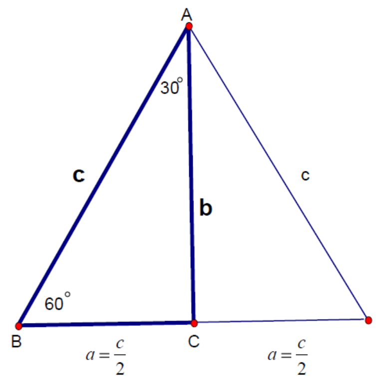
Ako postoji šahist koji nije odigrao ni jednu partiju šaha, tada ne postoji šahist koji je odigrao svih 7 partija šaha. Mogući broj odigranih partija šaha svakoga šahista sada je 0,1,…,5 ili 6, tj. ukupno 7 mogućnosti. Slučaj se svodi na prethodni slučaj.

Zadatak 4.
Dokazati da između 11 proizvoljno odabranih prirodnih brojeva uvijek postoji dva broja čija je razlika djeljiva sa 10.

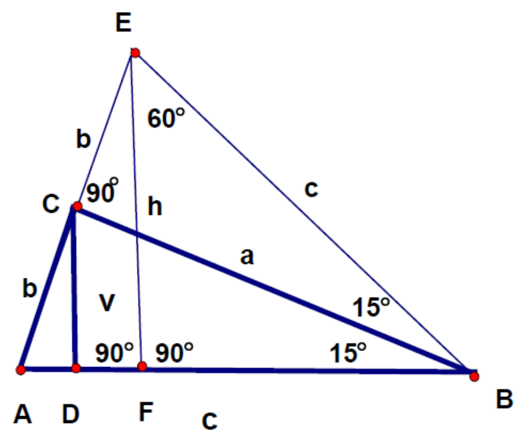
Rješenje:
Ostaci dijeljenja prirodnih brojeva sa 10 mogu biti: 0,1,2,…,9 (ukupno 10 različitih ostataka).
Budući da je 11 prirodnih brojeva, a 10 različita ostatka, tada po Dirichletovom principu među njima postoje bar dva broja s istim ostatkom. Razlika tih brojeva je djeljiva sa 10.

5.9.Metoda pomoćnih figura u planimetrijskom zadacima

LEMA 1.
Dužina katete pravouglog trougla sa uglovima 30° i 60° koja se nalazi nasuprot ugla od 30° jednaka je polovini dužine hipotenuze.



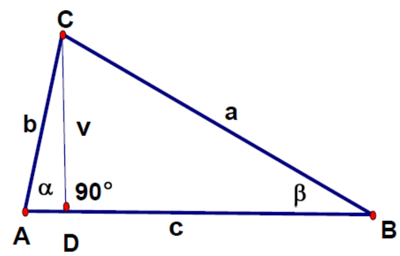
LEMA 2. Dužina visine na hipotenuzu pravouglog trougla sa uglovima 75° i 15° jednaka je četvrtini dužine hipotenuze.



$$\Delta\,\mathrm{BEF}: h=\frac{c}{2} \qquad \Delta\,\mathrm{EAF}: v=\frac{h}{2} \qquad v=\frac{c}{4}$$

Zadatak 1. (7. razred OŠ)
U pravouglom trouglu sa dužinom hipotenuze *c* oštri uglovi odnose se kao 1:5. Izrazi površinu tog trougla pomoću dužine *c* hipotenuze.

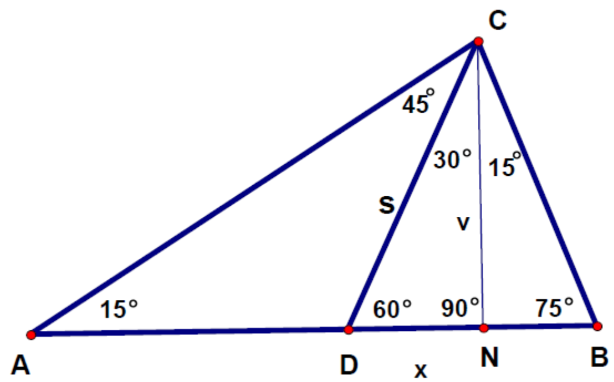
Rješenje:



Iz $\alpha+\beta=90^\circ$ i iz uslova zadatka $\alpha=5\beta$ slijedi
$\alpha=75^\circ$ i $\beta=15^\circ$.
Za površinu ΔABC tada dobijamo
$P=c(c/4)/2=c^2/8.$

Zadatak 2. (3. razred SŠ)
Dužina hipotenuze pravouglog trougla je 15 cm, a jedan njegov ugao je 15° . Izračunaj dužinu odreska simetrale pravog ugla koji je unutar trougla.

Rješenje:

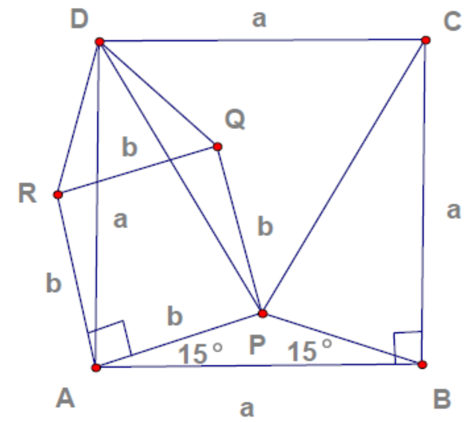


c = 15 cm,

ΔABC: $v=c/4=15/4$ *cm,*
ΔCDN: $x=s/2,$
$s^2=v^2+x^2,$
$s=\frac{5}{2}\sqrt{3}$ *cm.*

Zadatak 3. (7. razred OŠ)
Dat je kvadrat *ABCD* i tačka M unutar kvadrata takva da je *ABP= PAB =15º.*
Dokazati da je trougao ΔPCD jednakostraničan.

Rješenje:
Pomoćni lik je kvadrat.



Neka su ispunjeni uslovi zadatka.
Tada je trougao ΔCDP jednakokraki.
Konstruišimo kvadrat *APQR*.
Tada su trouglovi ΔADR i ΔABP podudarni.
($AD= AB=a$, $AR=AP=b$,
$DAR= BAP=15^o$ *(uglovi sa normalnim kracima)),*
pa je $DR=AR=b$,
$RDA= RAD=15^o$ *i*
$ARD=180^o-2\cdot 15^o=150^o$

Stoga je $QRD=150^o-90^o=60^o$, pa je (zbog $QR=RD=b$) ΔRQD jednakostraničan trougao, tj. $RQD=60^o$ i $DQ = PQ =b$, pa je $PQD=90^o+60^o=150^o$. Dalje slijedi da su trouglovi ΔDPQ i ΔADR podudarni ($PQ = AR =b$, $DQ = DR =b$, $PQD = DRA=150^o$), pa je $DP = AD =a$, zbog čega je ΔCDP jednakostraničan trougao.

5.10. Funkcija“apsolutna vrijednost”

Funkciju *apsolutna vrijednost* definišemo kao funkciju:

$$|x| = \begin{Bmatrix} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{Bmatrix}$$

Za ovu funkciju vrijedi:

$$|ab| = |a||b|$$

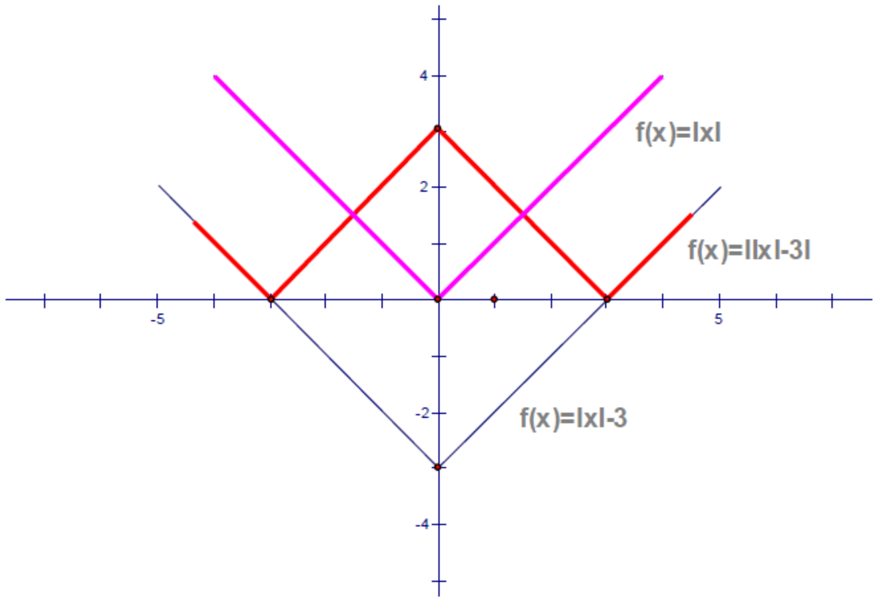
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

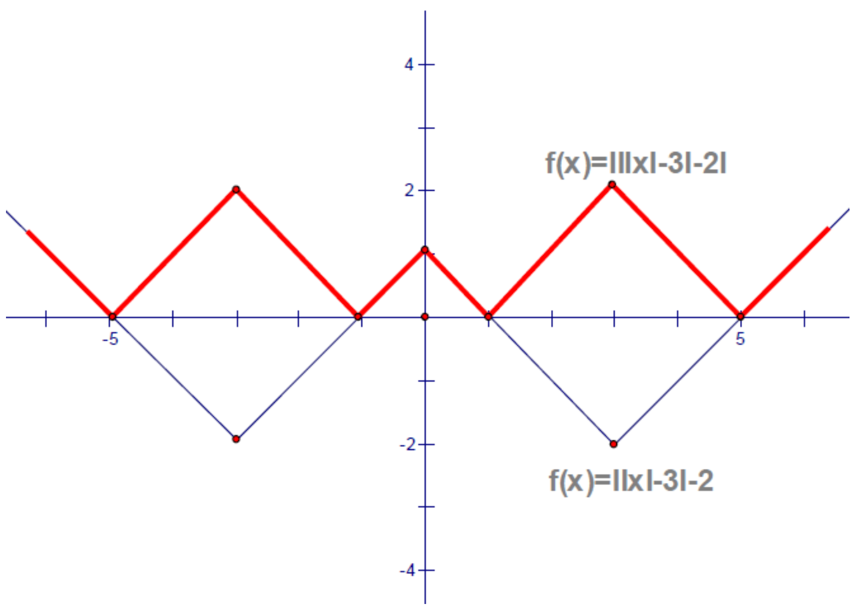
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

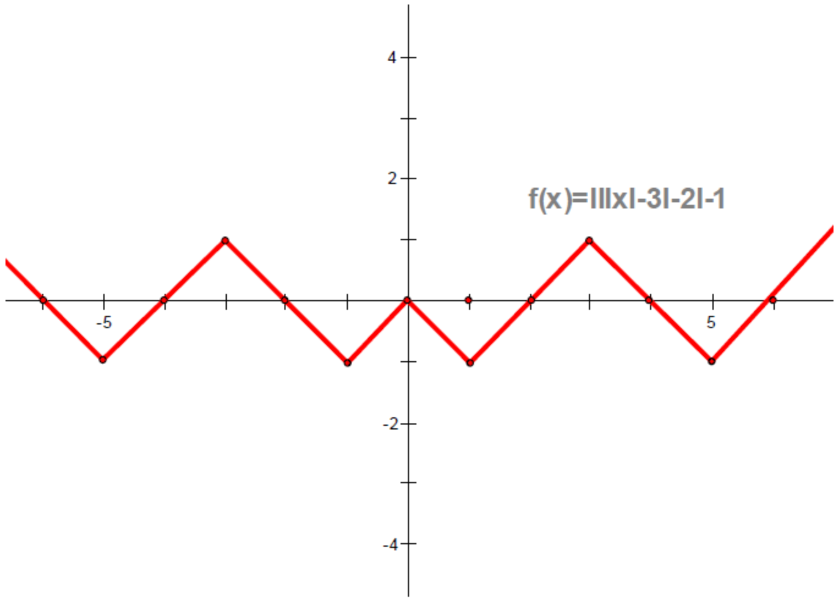
Zadatak 1.

Nacrtajte grafik funkcije $f(x)=|||x|-3|-2|-1$, $x \in R$.

Rješenje:







Zadatak 2.
Riješite jednačinu $|||x|-3|-2|-1=0,\ x\in R$.

Rješenje:
Grafička metoda.
Prema prethodnom primjeru nule funkcije su
$x\in\{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$.

Zadatak 3.
Riješite nejednačinu $|||x|-3|-2|-1\leq 0,\ x\in R$.

Rješenje:
Grafička metoda.
Prema zadatku 1. rješenja nejednačine su
$x\in[-6,-4]U[-2,2]U[4,6]$.

Zadatak 4.
Riješite jednadžbu $|3-x|+1=|x|-2x,\ x\in R$.

Rješenje:
Metoda razlikovanja slučajeva.
$3-x=0, x=3;\ x=0$

Interval	$(-\infty, 0)$	$[0, 3]$	$(3, +\infty)$
X	-	+	+
$3-x$	+	+	-
$\|3-x\|+1=\|x\|-2x$	$3-x+1=-x-2x$	$3-x+1=x-2x$	$-(3-x)+1=x-2x$
	$x=-2$	$x=-4$	$x=1$
Rješenje	$x=-2$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$

Dakle, jedino rješenje zadate jednačine je $x=-2$.

Zadatak 5.
Riješite nejednačinu
$(|2-x|-|2x-3|+4x-1)/|x+4|\geq 1,\ xR.$

Rješenje:
Za $x\neq -4$ zadatu nejednačinu možemo pisati u obliku
$|2-x|-|2x-3|+4x-1-|x+4|\geq 0,\ x\neq -4.$
Metoda razlikovanja slučajeva.
$2-x=0,\ x=2;\ 2x-3=0,\ x=3/2;\ x+4=0,\ x=-4.$

Interval	$(-\infty, -4)$	$(-4, 3/2)$	$[3/2, 2]$	$(2, +\infty)$
$2-x$	+	+	+	-
$2x-3$	-	-	+	+
$x+4$	-	+	+	+
	$x\geq -1/2$	$x\geq -3/2$	$0x\geq 0$	$x\geq -2$
rješenje	$x\in\varnothing$	$x\in(-3/2, 3/2)$	$x\in[3/2, 2]$	$x\in(2, +\infty)$

Ako $x\in(-3/2, 3/2)$ nejednačina ima oblik
$(2-x)+(2x-3)+4x-1+(x+4)\geq 0$, odakle je $x\geq -1/2$, pa u navedenom intervalu nema rješenja.
Ako $x\in(-4, 3/2)$ nejednačina izgleda
$(2-x)+(2x-3)+4x-1-(x+4)\geq 0$, odakle je $x\geq -3/2$, pa su rješenja nejednačine
$x\in(-3/2,3/2)$
Ako $x\in[3/2, 2]$ dobijemo
$2-x-(2x-3)+4x-1-(x+4)\geq 0$, odakle je $0x\geq 0$, pa su rješenja nejednačine
$x\in[3/2, 2]$.
Poslednji slučaj je ako $x\in(2, +\infty)$
$-(2-x)-(2x-3)+4x-1-(x+4)\geq 0$, odakle je $x\geq -2$, pa su rješenja nejednačine
$x\in(2, +\infty)$.
Dakle, rješenja zadate nejednačine su $x\in(-3/2, +\infty)$.

5.11. Funkcija "najveće cijelo(cijeli dio)"

Funkciju $\lfloor\ \rfloor: R\to Z$,

$$x\to\lfloor x\rfloor=\max k\in Z: k\leq x,$$

zovemo funkcija "najveće cijelo ili cijeli dio",
a funkciju $\{\ \}: R\to[0,1)$,

$$x\to\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$$

zovemo razlomljeni (decimalni) dio
Za funkciju "cijeli dio" vrijede ova svojstva:
(a) $x=\lfloor x\rfloor+\{x\},\ \lfloor x\rfloor=x-\{x\},\ x\in R$
(b) $0\leq\{x\}<1,\ x\in R$
(c) $\lfloor k\rfloor=k,\ k\in Z$
(d) $x-1<\lfloor x\rfloor\leq x,\ x\in R$

(e) $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1,\ x \in R$
(f) $\lfloor k + x\rfloor = k + \lfloor x\rfloor,\ k \in Z,\ x \in R$

U sljedećim ćemo primjerima primijeniti ovu funkciju na rješavanje jednačina.

Zadatak 1.
Riješite jednačinu

$$\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor = x, x \in R$$

Rješenje:
Prema definiciji funkcije "cijeli dio" lijeva je strana zadate jednačine cijeli broj, pa je onda to i desna strana, tj. $x \in Z$

$$\frac{2x+2}{3} - 1 < \left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor \leq \frac{2x+2}{3},$$

$$\frac{2x+2}{3} - 1 < x \leq \frac{2x+2}{3},$$

$$2x - 1 < 3x \leq 2x + 2$$

$$-1 < x \leq 2$$

pa, zbog $x \in Z$, dobijamo rješenja zadate jednačine $x \in \{0,1,2\}$.

Zadatak 2.
Riješite jednačinu

$$\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x-1}{2}, x \in R$$

Rješenje:
Neka je lijeva strana zadate jednačine cijeli broj k.
Tada je to i desna strana, pa iz $k=(x-1)/2$ slijedi $x=2k+1$, što znači da je i x cijeli broj.
Supstitucijom $x=2k+1$ u zadatu jednačinu dobijamo

$$\lfloor (2k+2)/3 \rfloor = k,\ k \in R.$$

Prema prethodnomu zadatku rješenja ove jednačine su $k \in \{0,1,2\}$, pa iz $x=2k+1$ izlazi $x \in \{1,3,5\}$.

5.12.Diskusija rješenja linearne jednačine sa jednom nepoznatom

- Jednačina $a \cdot x = b$, $a \neq 0$, ima jedinstveno realno rješenje $x = b/a$ **(određena/moguća jednačina).**

- Jednačina $0 \cdot x = 0$ ima beskonačno mnogo realnih rješenja $x \in R$ **(neodređena jednačina).**

- Jednačina $0 \cdot x = b \neq 0$ nema rješenja **(nemoguća jednačina).**

Zadatak 1.
U zavisnosti od parametra $a \in R$ diskutujte rješenja jednačine $a(x-1)=3x+2,\ x \in R$.

Rješenje:
$a(x-1)=3x+2,$
$ax-a=3x+2,$
$ax-3x=a+2,$
$x(a-3)=a+2 \ /: (a-3) \neq 0,$
$x=(a+2)/(a-3)$

$1^o\ a \neq 3, x=(a+2)/(a-3)$
$2^o\ a=3\ ,0x=5,$.

Zadatak 2.
U zavisnosti od parametra $a \in R$ diskutujte rješenja jednačine
$a^2(x-1)+a(x+2)=2x+1,\ x \in R.$

Rješenje:
Zadatu jednačinu možemo transformisati u oblik $x(a^2+a-2)=a^2-2a+1$, odnosno
$x(a+2)(a-1)=(a-1)^2$.
Dijeljenjem dobijene jednačine sa $(a+2)(a-1) \neq 0$ (za $a \neq -2$ i $a \neq 1$) slijedi
$x=(a-1)/(a+2).$

$1^o\ a \in R \setminus \{-2,1\}$ slijedi $x=(a-1)/(a+2).$
$2^o\ a=1\ ,0x=0,\ x \in R.$
$3^o\ a=-2\ ,0x=9,\ 0=9,$ nema rješenja.
Dakle,
za $a \in R \setminus \{-2,1\}$ zadana jednadžba ima *jedinstveno rješenje* $x=(a-1)/(a+2)$ (određena jednadžba),
za $a=1$ *beskonačno mnogo rješenja* $x\ R$ (neodređena jednadžba),
za $a=-2$ *nema rješenja* (nemoguća jednadžba

5.13. Gausova metoda eliminacije

Pri rješavanju linearnih sistema jednačina primjenjivaćemo elementarne transformacije pri kojima sistem linearnih jednačina ostaje ekvivalentan:
-Zamjena mjesta dviju ili više jednačina

-Pomnožiti (podijeliti) jednačinu bilo kojim nenultim brojem

-Dodati (oduzeti) jednačini bilo koju drugu jednačinu

Najčešće primjenjujemo kombinaciju ovih transformacija.
Višelinearne sisteme jednačina možemo kraće zapisati u matričnom obliku.

Zadatak 1.

U zavisnosti od parametra k∈R diskutovati rješenja sistema jednačina

$$x+y+kz=2$$
$$x+ky+z=-1$$
$$kx+y+z=-1$$
$$x,y,z \in R$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & k & 1 & -1\\ k & 1 & k & -1\end{array}\right] \underset{\substack{II=II-I\\ III=III-kI}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & k-1 & 1-k & -3\\ 0 & 1-k & (1-k)(1+k) & -2k-1\end{array}\right] \underset{III=III+II}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & k & 2\\ 0 & k-1 & 1-k & -3\\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k)\end{array}\right]$$

1) k∈R\{-2,1}

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & k & 2\\ 0 & k-1 & 1-k & -3\\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & -2(2+k)\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}/(k-1)\\ /(1-k)(2+k)\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & k & 2\\ 0 & 1 & -1 & -3/(k-1)\\ 0 & 0 & 1 & -2/(1-k)\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}I-kII\\ II+III\end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2/(1-k)\\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k)\\ 0 & 0 & 1 & -2/(1-k)\end{array}\right] \sim \text{I=I-II}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1/(1-k)\\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k)\\ 0 & 0 & 1 & -2/(2+k)\end{array}\right]$$

Dakle, za *k∈R\{-2,1}* sistem linearnih jednačina je određen, a rješenja su mu

$$x=\frac{1}{1-k}, \quad y=\frac{1}{1-k}, \quad z=\frac{-2}{1-k}.$$

2) k=-2

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \underset{II=II/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \underset{I=I-II}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{matrix}$$

Za *k=-2* sistem je neodređen, a rješenja su mu:

$$x=1+z$$
$$y=1+z$$
$$z=t$$
$$t\epsilon R.$$

3) *k = 1*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \\ 0x + 0y + 0z = -6 \end{matrix}$$

Za *k = 1* sustav linearnih jednadžaba nemoguć (nema rješenja).

5.14. Diofantove jednačine

Jednačinu kojoj tražimo cjelobrojna rješenja zovemo Diofantovom jednačinom. Razlikovaćemo linearne i nelinearne Diofantove jednačine.

I. LINEARNE DIOFANTOVE JEDNAČINE

Zadatak 1.
Naći cjelobrojna rješenja jednačine *13x+8y=15, x,yϵZ.*

Rješenje:
Eulerova metoda.

13x+8y=15, x,y ϵZ
⇒ *y=(15-13x)/8, x,y ϵZ*
⇒ *y=2-2x+(-1+3x)/8, x,y ϵZ*
⇒ *(-1+3x)/8=u ϵZ i y=2-2x+u, x,y ϵZ*
⇒ *x=(1+8u)/3=3u+(1-u)/3=3u+v ϵZ i v=(1-u)/3 ϵZ*
i y=2-2x+u ϵZ
⇒ *x=3u+v ϵZ i u=1-3v ϵZ i y=2-2x+u ϵZ, v ϵZ*
⇒ *x=3·(1-3v)+v ϵZ i y=2-2·(3-8v)+(1-3v) ϵZ, v ϵZ*
⇒ *x=3-8v i y=-3+13v, vϵZ*

Zadatak 2. (6. razred OŠ)
Odredi sve cijele brojeve *y* za koje je razlomak *(5y-6)/y* pozitivan cijeli broj.

Rješenje:
$(5y-6)/y=k,\ k \in N$
$\Rightarrow 5y-6=yk$
$\Rightarrow y(5-k)=6$
$\Rightarrow y=6/(5-k) \in Z$
$\Rightarrow 5-k \in \{-1, -2, -3, 1, 2, 3, 6, -6\}$
$\Rightarrow k \in \{6,7,8,4,3,2,11\}.$
$\Rightarrow y \in \{-1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}.$

Zadatak 3.
Riješite jednačinu $12x-3y=5,\ x,y \in Z.$

Rješenje:
Iz zadate jednačine dobijamo
$y=(12x-5)/3$, tj. $y=4x-2+1/3.$
Budući da desna strana posljednje jednačine nije nikada cijeli broj (za $x \in Z$), tada zadata jednačina nema cjelobrojnih rješenja.

II. NELINEARNE DIOFANTOVE JEDNAČINE

Pri rješevenju nelinearnih Diofantovih jednačina razlikuju se sljedeće metode:

- Metoda rastavljanja polinoma na činioce
- Metoda osnovnog pravila o dijeljenju polinoma
- Metoda zbira stepena sa parnim eksponentima
- Metoda posljednje cifre
- Metoda kongruencije/ostatka dijeljenja
- Metoda nejednakosti

5.14.1.METODA RASTAVLJANJA POLINOMA NA ČINIOCE

Zadatak 1. (2. razred SŠ)
Odredi sve cijele brojeve x za koje je $x^2+3x+24$ kvadrat nekog cijelog broja.

Rješenje:
Iz $x^2+3x+24=y^2$ slijedi $(2x+3)^2+87=4y^2$, a odavde $87=(2y+2x+3)(2y-2x-3)$. Zbog $87=87\cdot 1=1\cdot 87=3\cdot 29=29\cdot 3= = -1\cdot(-87)= -87\cdot(-1)= -3\cdot(-29)= -29\cdot(-3)$ slijedi

$2y+2x+3=A$	$2y-2x-3=B$	$x=(A-B-6)/4$	$y=(A+B)/4$
1	87	-23	22
87	1	20	23
3	29	-8	8
29	3	5	8
-1	-87	20	-22
-87	-1	-23	-22
-3	-29	5	-8
-29	-3	-8	-8

Rješenja su jednadžbe $x \in \{-23, -8, 5, 20\}$.

Zadatak 2.
Odredite sva cjelobrojna rješenja jednačine $x^2-2011=y^2$.

Rješenje:
Zadatu jednačinu možemo pisati u obliku $(x-y)(x+y)=2011$.
Budući da je
$2011=1\cdot 2011=2011\cdot 1=-2011\cdot(-1)=-1\cdot(-2011)$, imamo:

$x-y=A$	$x+y=B$	$x=(A+B)/2$	$y=(B-A)/2$
1	2011	106	105
2011	1	106	-105
-2011	-1	-106	105
-1	-2011	-106	-105

Rješenja zadate jednačine su
$(x,y) \in \{(106,105), (106,-105), (-106,105), (-106,-105)\}$

5.14.2. METODA OSNOVNOG PRAVILA O DIJELJENJU POLINOMA

Zadatak 1.
Riješite jednačinu $xy+2y=x$, $x,y \in Z$.

Rješenje:
Iz zadate jednačine slijedi $y=x/(x+2)=1-2/(x+2)$, $x\neq-2$
(jer $x=-2$ nije rješenje zadate jednačine).
$y \in Z \Rightarrow 2/(x+2) \in Z \Rightarrow x+2 \in \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow x \in \{1, -3, 0, -4\} \Rightarrow$
$(x,y) \in \{(-1,-1), (-3,3), (0,0), (-4,2)\}$

Zadatak 2.
Odredite sva cjelobrojna rješenja jednačine

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

Rješenje:
Očigledno su $x,y\neq 0$.

Zadatu jednačinu možemo napisati u obliku $x(y-3)=3y$. Očito je $y \neq 3$ (jer za $y=3$ lijeva je strana posljednje jednačine 0, a desna 9), pa imamo
$x=3y/(y-3)=(3(y-3)+9)/(y-3)=3+9/(y-3)$. Odavde je

$y-3$	1	-1	3	9	-9
$y=(y-3)+3$	4	2	6	12	-6
$9/(y-3)$	9	-9	3	1	-1
$x=3+9/(y-3)$	12	-6	6	4	2

$(x,y) \in \{(2,-6), (-6,2), (4,12), (12,4), (6,6)\}$

5.14.3. METODA ZBIRA STEPENA SA PARNIM EKSPONENTIMA

Zadatak 1. (1. razred SŠ)
Odredi sve cijele brojeve x,y za koje vrijedi $(y^2)^2+x^{2010}=2y^2-1$.

Rješenje:
Zadatu jednačinu možemo pisati u obliku $(y^2-1)^2+x^{2010}=0$. Kako su oba sabirka nenegativna (zbog parnosti eksponenata 2 i 2010) i kako je desna strana jednačine nula, slijedi da je $y^2-1=0$ i $x^{2010}=0$, tj. $y^2= 1$ i $x=0$.
Rješenja jednačine su $(x,y) \in \{(0,-1), (0,1)\}$.

Zadatak 2.
Riješite jednačinu $x^2+y^2+z^2=2(x+1)$, $x,y,z \in Z$.

Rješenje:
Zadatu jednačinu možemo napisati u obliku $(x-1)^2+y^2+z^2=3$, pa $je(x-1)^2= 1$, $y^2= 1$, $z^2= 1$, tj. $x\{0,2\}$, $y\{1,-1\}$, $z\{1,-1\}$.
Rješenja zadate jednačine su
$(x,y,z) \in \{(0,1,1), (0,1,-1), (0,-1,1), (0,-1,-1), (2,1,1), (2,1,-1), (2,-1,1), (2,-1,-1)\}$.

5.14.4.METODA POSLJEDNJE CIFRE (specijalno: METODA PARNOSTI I NEPARNOSTI)

Zadatak 1.(1. razred SŠ)
Odrediti cjelobrojna rješenja jednačine $x^2+y^2-8z=14$.

Rješenje:
Desna strana zadate jednačine je parna, pa to treba biti i lijeva strana. Stoga su x i y iste parnosti. Ako su x i y oba parna broja, tada je lijeva strana zadate jednačine djeljiva sa 4, a desna nije, pa zadata jednačina nema rješenja. Neka su x i y oba neparna broja, tj. $x=2m+1$, $y=2n+1$, $m,n \in Z$. Uvrštavanjem toga u zadatu jednačinu i sređivanjem dobijamo $m(m+1)+n(n+1)-2z=3$. Budući da su $m(m+1)$ i $n(n+1)$ parni brojevi (proizvod dva uzastopna cijela broja) slijedi da je lijeva strana posljednje jednačine parna, a desna to nije, pa ova jednačina, a s tim ni zadata, nema rješenja. Dakle, zadata jednačina nema rješenja.

Zadatak 2.
Naći cjelobrojna rješenja jednačine $x^2+5y=201020092008$.

Rješenje:
Budući da x^2 ima posljednju cifru 0,1,4,5,6 ili 9, a $5y$ 0 ili 5, tada lijeva strana zadate jednačine ima posljednju cifru 0,1,4,5,6 ili 9, a nikada 8, pa zadata jednačina nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 3.
Naći cjelobrojna rješenja jednačine $(x^2)^2+(y^2)^2=1223334444\ldots999999999$.

Rješenje:
Očito su $x,y\neq 0$. x^2 i y^2 mogu imati posljednju cifru 1, 4, 5, 6 ili 9, pa $(x^2)^2$ i $(y^2)^2$ mogu imati posljednju cifru 1, 5 ili 6. Stoga $(x^2)^2+(y^2)^2$ može imati posljednju cifru
0, 1, 2, 6 ili 7, a nikada 9.
Dakle, zadata jednačina nema rješenja.

5.14.5.METODA KONGRUENCIJE (METODA OSTATKA DIJELJENJA)

Zadatak 1.
Naći cjelobrojna rješenja jednačine $x^2-3y=17$.

Rješenje:
Kako je $3y$ djeljivo s 3, a 17 nije, tada ni x^2, pa s tim ni x nije djeljivo sa 3. Stoga možemo pisati $x=3k+1$ ili $x=3k+2$ $k\in Z$. Uvrštavanjem $x=3k+1$ u zadatu jednačinu i sređivanjem dobijamo $3(3k^2+2k-y)=16$. Budući da je lijeva strana posljednje jednačine djeljiva s 3, a desna to nije, tada posljednja jednačina nema rješenja. Ako u polaznu jednačinu pak uvrstimo $x=3k+2$, dobijamo $3(3k^2+4k-y)=13$. Kako je lijeva strana dobijene jednačinev djeljiva sa 3, a desna nije, dobijena jednačina, pa samim tim i polazna nema rješenja.

Zadatak 2.
Naći cjelobrojna rješenja jednačine $x^2=9y+5$.

Rješenje:
Budući da desna strana zadate jednačine nije djeljiva s 3, tada to nije ni lijeva strana, tj. ni x nije djeljiv s 3. Neka *je* $x=3k+1,\ k\in Z$. Tada zadatu jednačinu možemo napisati u obliku $(3k+1)^2=9y+5$, tj. $9k^2+6k+1=9y+5$, odnosno
$3\cdot(3k^2+2k-3y)=4$. Lijeva je strana posljednje jednačine djeljiva s 3, a desna nije, pa ta jednačina nema rješenje. Ako je $x=3k+2,\ k\in Z$ dobijamo $(3k+2)^2=9y+5$, tj. $9k^2+12k+1=9y+5$, tj. $3\cdot(3k^2+4k-3y)=1$. Kako je lijeva strana jednačine djeljiva sa 3 a desna nije dobijena jednačina, a samim tim ni zadata, nema rješenja u skupu Z.

5.14.6.METODA NEJEDNAKOSTI

Zadatak 1.
Odrediti cjelobrojna rješenja jednačine $3^x + 4^x = 5^x$.

Rješenje:
Zadatu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Za $x<2$ lijeva je strana posljednje jednačine veća od 1, a za $x>2$ manja od 1. Jedino je rješenje ove, pa s tim i zadate jednačine $x=2$.

Zadatak 2.
Naći prirodna rješenja jednačine

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

*Rješenje***:**
Očito je $(x,y,z)=(3,3,3)$ jedno rješenje zadate jednačine i $x,y,z\neq 1$. Neka je $x<y<z$. Tada je $1/x>1/y>1/z$, pa iz $3/z<1/x+1/y+1/z=1<3/x$ slijedi $x<3$ i $z>3$. Zbog $x\neq 1$ i $x<3$ slijedi $x=2$, pa zadana jednačina postaje $1/y+1/z=1$. Iz $2/z<1/y+1/z=1/2<1/y$ slijedi $y<4$ i $z>4$. Zbog $y>x=2$ i $y<4$ slijedi $y=3$, pa iz $1/3+1/z=1/2$ slijedi $z=6$.
Dakle (2,3,6) je još jedno rješenje dane jednačine.
Zbog "ravnopravnosti" x,y,z u zadatoj jednačini dolazimo još do 5 rješenja date jednačine.
Rješenja zadate jednačine su
$(x,y,z) \epsilon \{(2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,3,3), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)\}$.

5.15.Tablično rješavanje jednačina

Zadatak 1.
Riješiti nejednačinu

$$\frac{2x+1}{3-x} \leq 0, x\epsilon R.$$

Rješenje:
$2x+1=0 \Rightarrow x= -1/2$, $3-x=0 \Rightarrow x=3$

-∞	-1/2	3	+∞
2x-1	-	+	+
3-x	+	+	-
(2x-1)/(3-x)	-	+	-

Rješenja date nejednačine su: $x\epsilon(-\infty,-1/2]U(3,+\infty)$

Zadatak 2.
Riješiti nejednačinu

$$\frac{x^2 - x - 6}{1 - x} \geq 0, x \epsilon R.$$

Rješenje:
Zadatu nejednačinu možemo zapisati u obliku

$$\frac{(x+2)(x-3)}{1-x} \geq 0, x \epsilon R.$$

Granice posmatranih intervala su -2, 1 i 3.

	-∞	-2	1	3	+∞
x+2	-	+	+	+
x-3	-	-	-	+
1-x	+	+	-	-
(x^2-x-6)/(1-x)	+	-	+	-

Rješenja zadate nejednačine su: *xϵ(-∞,-2]U(1,3]*

5.16.Logaritamske nejednačine u kojima su i logaritamska veličina i baza promjenljive veličine

Lema.
Neka *a,b ϵ R* zadovoljavaju svojstva:
b>0, a>0 i a≠1. (*)
Tada vrijedi

$$\log_a b \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \text{ akko } (a-1)(b-1) \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \qquad (**)$$

Dokaz:
Neka su ispunjeni uslovi (*). Tada vrijedi $\log_a b < 0$
akko *((0<a<1 i b≥1)* ili *(a>1 i 0<b≤1))*
akko *((a-1<0 i b-1≥0)* ili *(a-1>0 i b-1≤0))*
akko *(a-1)(b-1)≤0.*
Analogno se pokazuje da vrijedi
$\log_a b \geq 0$ akko *(a-1)(b-1)≥0,*
čime je (**) dokazano.

Zadatak 1.(3. razred SŠ)
Riješiti nejednačinu $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3)$<0.

Rješenje:
Iz uslova *x^2-4x+3>0, x-3>0* i *x-3≠1* slijedi *xϵ (-3,4)υ(4,∞).* (*)

Sada primjenom leme slijedi $(x-4)(x^2-4x+2)<0$,
a odatle redom proizilazi $(x-4)((x-2)^2-2)<0$,
$(x-4)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})<0$, $x\epsilon(-\infty, 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2}, 4)$. (**)
Iz (*) i (**) slijede rješenja zadate nejednačine
$x\,\epsilon(2+\sqrt{2}, 4)$.

5.17.Dokazi algebarskih nejednakosti primjenom odnosa između sredina

Za $a, b, c, \ldots \epsilon\, R, a, b, c > 0$ definišemo:

$A = \frac{a+b}{2}, A = \frac{a+b+c}{3}$	**Aritmetička sredina**
$G = \sqrt{ab}, G = \sqrt[3]{abc}$	**Geometrijska sredina**
$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$, $\frac{1}{H} = \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{3}$	**Harmonijska sredina**
$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ K = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$	**Kvadratna sredina**

Odnos između sredina: H≤G≤A≤K.
Pri tome važi jednakost akko je *a=b=c*.

Zadatak 1. (1. razred SŠ)
Ako su *a,b,c* pozitivni realni brojevi takvi da je $1/a+1/b+1/c=1$, dokažite nejednakost $(a-1)(b-1)(c-1)\geq 8$.

Rješenje:
Iz $1/a+1/b+1/c=1$ slijedi ab+bc+ca=abc.
Primjenom H-A nejednakosti $3/(1/a+1/b+1/c) \leq (a+b+c)/3$ slijedi $a+b+c\geq 9$, a odavde
$(a-1)(b-1)(c-1)= abc-(ab+bc+ca)+a+b+c-1 = abc-abc+a+b+c-1=$
$= a+b+c-1\geq 9-1=8$ što se i tvrdilo.

Primjer 2. (1. razred SŠ)
Dokaži da za sve *x*, $x>0$ vrijedi nejednakost
$x^4+y^3+x^2+y+1> \frac{9}{2}xy.$

Rješenje;
Iz $(x^2-1)^2\geq 0$ slijedi $x^4+1\geq 2x^2$.
Analogno je $y^2+1\geq 2y$, pa je $y^3+y\geq 2y^2$.
Stoga je $(x^2)^2+y^3+x^2+y+1>3x^2+2y^2$. (*)
Primjenom A-G nejednakosti je $3x^2 + 2y^2 \geq 2xy\sqrt{6}$
Budući je $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$
slijedi da je $3x^2+2y^2\geq 9xy/2$. (**)
Sada iz (*) i (**) slijedi tvrdnja zadatka.

6.Zaključak

Darovitost je sigurno veoma neodređen pojam koji je vrlo teško precizno definisati. O tome svjedoče i brojne teorije koje su se bavile time a koje smo pomenuli u ovom radu. Ono u čemu će se svi složiti jeste da je darovitost potencijal za izuzetan razvoj određenih sposobnosti koji će dovesti do neospornog uspjeha u iskazivanju talenta.

Zbog toga je jako bitno da nastavnik na vrijeme prepozna i na pravi put usmjeri darovitog učenika. Kako je mnogo različitosti među učenicima i mnogo posla unutar jednog razreda može se desiti da nastavnik napravi propust u identifikaciji nadarenog učenika, tako da se ne treba oslanjati samo na predmetnog nastavnika. U određivanju nadarenih učenika trebaju učestvovati i roditelji, razredni starješina, škola i pomoći predmetnom nastavniku da propusta bude što manje.

Cilj nastavnika jeste da izgrade didaktički i administrativno fleksibilnu strukturu u kojoj škole imaju širok prostor za osmišljavanje programa prilagođenih potrebama nadarene djece. Nije važno samo realno identifikovati ovu djecu, nego imati dobar plan rada sa njima i nastavnike koji će sa entuzijazmom i pravim znanjem učestvovati u tome.

Tada će učenici biti sposobni da ispune svoju ulogu u društvu na pravi način, kao nezavisni, kreativni i produktivni kako bi dostigli svoje maksimume i ostvarili svoje težnje. Time bi dobili svoje mjesto u društvu i doprinjeli njegovom razvoju.

I na kraju bih se usudila da posavjetujem nastavnike matemateke da se posvete matematički nadarenoj djeci, da ih podržavaju, da ih motivišu, da rade sa njima jer, osim što pomažu toj djeci, time nadograđuju sebe i svoja znanja. Nije sramota da nekada nešto i mi naučimo od učenika.

Literatura

1) N. Elezović, Elementarna matematika 28: Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima, Element, Zagreb, 2007.
2) D. George, Obrazovanje darovitih: Kako identificirati i obrazovati darovite i talentirane učenike, Educa, Zagreb, 2005.
3) M. Pavleković, Matematika i nadareni učenici, Element, Zagreb, 2009.
4) S. Maksić, Darovito dete u školi, zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2007.
5) M. Stevanović, Inovacije u nastavnoj praksi, prosvetni pregled, Beograd, 1982.
6) C.M.Diezmann and J.J.Watters, Summing up the education of mathematically gifted students, 2002., In Proceedings 25.th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pages 219-226, Auckland
7) J.Stepanek, Meeting the Needs of Gifted Students: Diferentiating Mathematics and Science Instruction, 1999.
8) L.McClure i J.Piggott, Meeting the Needs of Your Most Able Pupils: MATHEMATICS, Routledge, London and New York, Northwest Regional Educational Laboratory, 2007.
9) M.Ć.Obradović, Nadarenost razumijevanje, prepoznavanje, razvijanje, Zagreb, Školska knjiga, 1990.
10) S.Y.Walker, Darovita djeca, Zagreb, Veble commerce, 2007.
11) Š. Arslanagić, Matematika za nadarene, Birograf, Sarajevo, 2004.