Univezitet u Beogradu

Prirodno-matematički fakultet

Odsek za matematiku i mehaniku

REŠAVANJE JEDNAČINA KRETANJA STOHASTIČKOM SIMULACIJOM

-doktorska disertacija-

Dražen Pantić

Institut „Boris Kidrič", Vinča

Beograd 1988

SADRŽAJ

I.	UVOD	str.2
II.	ŠREDINGEROV OPERATOR SA OSNOVNIM STANJEM	str.3
	1. Formulaciaja dinamike šredingerove polugrupe u terminima osnovnog stanja	str.4
	2. Stohastički kalkulus u smislu Malliavin-a i Bismut-a	str.8
	3. Stohastički kalkulus primenjen na Braunovo kretanje sa distorzijom	str.13
III.	DIRAKOVA JEDNAČINA	str.31
	1. Probabilistički tretman Dirakove jednačine	str.32
APPENDIX		str.39
REFERENCE		str.50

I. UVOD

Feynman-Kacova formula je otvorila mogućnost rešavanja kinetičkih jednačina matematičke fizike stohastičkom simulacijom. Naime, dejstvo Šredingerove polugrupe operatora na funkcije iz L_2 postalo je moguće posmatrati preko očekivanih vrednosti familije funkcionala na Braunovom kretanju.

Od tada mnoštvo formula istog tipa je izvedeno i sve važnije jednačine kretanja su podvrgnute stohastičkom tretmanu pridruživanjem pojedinim jednačinama odgovarajućih stohastičkih procesa, tako da se Košijev problem rešava nalaženjem očekivanih vrednosti od funkcionala na pridruženom procesu. Pored očigledne koristi u neposrednom nalaženju rešenja Monte-Karlo simulacijama, plodovi veze između matematiče fizike i stohastičkih procesa se ogledaju u definisanju novih klasa stohastičkih procesa, naročito Markovskih, i razvijanju metoda njihovog ispitivanja.

Mi ćemo posmatrati dve važne jednačine matematičke fizike, Šredingerovu i Dirakovu jednačinu, kao i njima pridružene stohastičke procese, i primenićemo savremene aspekte stohastičke analize na te procese.

Tokom rada na ovoj disertaciji dragocenu pomoć mi je pružio profesor dr.Zoran Ivković na čemu mu se najtoplije zahvaljujem.

II. ŠREDINGEROV OPERATOR SA OSNOVNIM STANJEM

1. FORMULACIJA DINAMIKE ŠREDINGEROVE POLUGRUPE U TERMINIMA OSNOVNOG STANJA

U ovoj glavi ćemo izložiti neke činjenice vezane za šredingerove operatore kod kojih je infimum spektra svojstvena vrednost, i pridružene difuzne procese. Dokazi svih teorema se mogu naći u knjizi [7], i u člancima [1], [2], [19], [16].

Neka je zadat šredingerov operator H na $L_2 = L_2(\mathbb{R}^d, dx)$, $H: Dom(H) \to L_2$, $Dom(H) \subseteq L_2$, definisan kao $Hf(x) = -\Delta f(x)/2 + V(x) \cdot f(x)$, na $\mathbb{C}_o^2$. Funkcija V se naziva potencijal.

Formulacija u terminima osnovnog stanja

U daljem ćemo pretpostaviti da postoji "osnovno stanje" ϕ_o, tj. skoro svuda pozitivna funkcija u $L_{2,loc}(\mathbb{R}^d, dx)$, tako da je $H\phi_o = 0$ u smislu distribucija. Definišući $\tilde{f}_i = \phi_o \cdot f_i$, gde je $i = 1,2$ i $f_i \in \mathbb{C}_o^2$, može se lako pokazati da je

(1.1.) $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_1(x) \cdot H\tilde{f}_2(x) dx = 1/2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \nabla f_1(x) \cdot \nabla f_2(x) \cdot \phi_o(x)^2 dx$, pa ako definišemo meru m, $m(dx) = \phi_o(x)^2 dx$ relacija (1.1.) se može predstaviti kao $\left(\tilde{f}_1 | H\tilde{f}_2\right)_{L_2} = 1/2 \cdot \left(\nabla f_1 | \nabla f_2\right)_{L_2(m)}$. Forma $\varepsilon(f,g) = 1/2 \cdot \left(\nabla f | \nabla g\right)_{L_2(m)}$, je simetrična, pozitivna kvadratna forma definisana na svuda gustom skupu u $L_2(m)$, $Dom(\varepsilon) = \mathbb{C}_o^2$. . Može se pokazati, [1], da je $\nabla\phi_o \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^d, dx) \otimes \mathbb{R}^d$ dovoljan uslov da forma dopušta zatvorenje u $L_2(m)$. Naime, ako $f_n \to 0$ i $\nabla f_n \to u$, $(n \to \infty)$, $f_n \in Dom(\varepsilon)$, tada se koristeći parcijalnu integraciju može pokazati da je $u=0$. Zatvorenje forme ćemo takođe obeležiti sa ε, a $Dom(\varepsilon)$ zatvorenje skupa $\mathbb{C}_o^2$ u odnosu na skalarni proizvod $\langle f,g\rangle = =(f|g)_{L_2(m)}+\varepsilon(f,g)$. Tada postoji samokonjugovani operator $\tilde{H}$, $Dom(\tilde{H})\subseteq Dom(\varepsilon)$, tako da važi

(1.2.) $\quad f\in Dom(\varepsilon),\quad g\in Dom(\tilde{H}) \;\Rightarrow\; \varepsilon(f,g)=(f|\tilde{H}g)_{L_2(m)}$. Za $f\in\mathbb{C}_o^2$ je $\tilde{H}f=-(\Delta f/2+b.\nabla f)$, gde je $b=\nabla\ln\phi_o$.

Forma ε je Markovska u sledećem smislu: za svako $\delta>o$ postoji neopadajuća funkcija $a_\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, za koju je $a_\delta(t)=t$ na $[0,1]$ $\max(-|t|,-\delta)\le a_\delta(t)\le\min(|t|,1+\delta)$ na $\mathbb{R}$, tako da ako je $f\in Dom(\varepsilon)$ tada je $a_\delta(f)\in Dom(\varepsilon)$ i $\varepsilon(a_\delta(f),a_\delta(f))\le\varepsilon(f,f)$. Naime ako definišemo $a_\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}k_\delta(s)ds$, gde je $k_\delta\in\mathbb{C}$, $k_\delta=1$ na $[0,1]$, $k_\delta=0$ van $(-\delta,1+\delta)$ i $0\le k_\delta\le 1$, tada je $\varepsilon(a_\delta(f),a_\delta(f))=\int|k_\delta(f)|^2|\nabla f|^2 m(dx)/2\le \le\varepsilon(f,f)$, [1].

<u>Teorema</u> <u>1.1.</u>(Fukushima)

Neka je ε simetrična, pozitivna zatvorena kvadratna forma definisama na svuda gustom skupu u $L_2(m)$ i $\tilde{H}$ samokonjugovani operator asociran formi ε kao u relaciji (1.2.). *Ako je forma Markovska tada* $0\le f\le 1$ *povlači* $0\le e^{-t\tilde{H}}f\le 1$. ■

Sledeća teorema uspostavlja vezu između forme ε i difuznih procesa.

<u>Teorema</u> <u>1.2.</u>

Ako forma ε dopušta zatvorenje, tada postoji difuzni proces $(X_t,t\ge 0)$ *u* $\mathbb{R}^d$, *tako da polugrupa* $(e^{-t\tilde{H}},t\ge 0)$ *definiše verovatnoće prelaza procesa* (X_t), *tj. za f ograničenu funkciju u* $L_2(m)$, $\mathbb{E}_x(f(X_t))=e^{-t\tilde{H}}f(x)$, *gde je* $\mathbb{E}_x(\cdot)$ *očekivanje pod uslovom* $X_0=x$. ■

Polugrupa $(e^{-t\tilde{H}})$ je simetrična u $L_2(m)$ u sledećem smislu: za pozitivne, ograničene funkcije f_1,f_2 iz $L_2(m)$ važi

$$(1.3.)\qquad \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x)\cdot e^{-t\tilde{H}} f_2(x)\cdot m(dx)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t\tilde{H}} f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot m(dx),$$

odakle je jasno da je m invarijantna mera procesa (X_t).

Pod vrlo blagim uslovima difuzni proces (X_t) se može predstaviti kao rešenje stohastičke diferencijalne jednačine. Naime, za $f\in\mathbb{C}_o^2$ proces $(\zeta_t(f))$ definisan kao $\zeta_t(f)=f(X_t)-f(X_0)+\int_0^t \tilde{H}f(X_s)ds$ je neprekidni martingal sa kvadratnom karakteristom $\langle\zeta(f)\rangle_t=\int_0^t\|\nabla f(X_s)\|^2ds$, [17]. Tada je karakteristika dva takva procesa $\langle\zeta(f),\zeta(g)\rangle_t=\int_0^t\nabla f(X_s).\nabla g(X_s)ds$, pa postoji Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$ tako da je $\zeta_t(f)=\int_0^t\nabla f(X_s)dB_s$; teorema 1. str.22. [17]. Sledeća teorema tvrdi da ako niz funkcija (f_n) u $\mathbb{C}_o^2$ teži ka funkciji $f(x)=x$ tada $\zeta_t(f_n)$ teži ka B_t skoro svuda, [19].

Teorema 1.3.

Neka je difuzni proces (X_t) asociran formi ε kao u Teoremi 1.2. *Ako je $\nabla\phi_o\in L_2\otimes\mathbb{R}^d$ tada postoji standardno Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$, $(B_t,t\geq0)$ tako da je*

$$(1.4.)\qquad X_t-X_0=\int_0^t b(X_s)ds+B_t,$$

gde je $b=\nabla\ln\phi_o$, $B_0=0$ i $\mathbb{P}(X_0\in dx)=m(dx)$. ∎

Proces (X_t) ćemo zvati Braunovo kretanje sa distorzijom.

Ako za $f\in L_2(m)$ definišemo $\tilde{h}(t,x)=e^{-t\tilde{H}}f(x)=\mathbb{E}(f(X_t)|X_0=x)$, tada je $\tilde{h}(t,x)$ $L_2(m)$-slabo rešenje Košijevog problema $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{h}(t,x)=-\tilde{H}_x\tilde{h}(t,x)$, $\tilde{h}(t,x)=f(x)$ tj. za $g\in L_2(m)$

$$(1.5.)\qquad \frac{\partial}{\partial t}(g|\tilde{h}(t,\cdot))=-(g|\tilde{H}\tilde{h}(t,\cdot)).$$

Formulacija preko Feynman-Kac-ovog funkcionala

Šredingerovu polugrupu u L_2 možemo da definišemo koristeći takozvanu Feynman-Kac formulu. Neka je $\langle B_t\rangle$ standardno Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$. Sa $\mathbb{K}_d$ obeležimo klasu funkcija $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ tako da važi $\lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_x \mathbb{E}_x\left\{\int_0^t |f(B_s)|\,ds\right\}=0$, a $\mathbb{K}_{d,\mathrm{loc}}$ funkcije koje su lokalno u $\mathbb{K}_d$. Za potencijal V za koji je $V_-=\min(V,0)\in\mathbb{K}_d$, $V_+=\max(V,0)\in\mathbb{K}_{d,\mathrm{loc}}$ može se definisati $e^{-tH}f(x)=\mathbb{E}_x\langle f(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\rangle$, za $f\in L_2(m)$, [16].

Ako potencijal V dopušta osnovno stanje ϕ_o tada, obeležavajući sa U unitarnu transformaciju $U:L_2\to L_2(m)$, $Uf=f/\phi_o$, važi $e^{-t\tilde{H}}=U\circ e^{-tH}\circ U^{-1}$, pa je, pod uslovima iz Teoreme 1.3.

(1.6.) $$\mathbb{E}_x\langle f(X_t)\rangle=\mathbb{E}_x\langle f(B_t)\cdot\phi_o(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\cdot\phi_o(x)^{-1}.$$

Neposredno sleduje da je funkcija $h(t,x)=\phi_o(x)\cdot\tilde{h}(t,x)$ L_2-slabo rešenje problema $\frac{\partial}{\partial t}h(t,x)=-H_x h(t,x)$, $h(t,x)=f(x)\cdot\phi_o(x)$.

2. STOHASTIČKI KALKULUS U SMISLU MALLIAVIN-a I BISMUT-a

Neka je $(B_t, 0 \le t \le T)$ standardni Vinerov proces i neka je $F(\omega)$ kvadratno integrabilni funkcional (k.i.f) adaptiran σ-algebri $\sigma(B_t, 0 \le t \le T)$. Kao što je poznato, F dopušta predstavljanje kao suma višestrukih Viner-Ito-ovih integrala

(2.1.) $$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \cdots \int_0^{t_{n-1}} f_n(t_1, \cdots, t_n) dB_{t_1} \cdots dB_{t_n} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(F),$$ gde

je f_n simetrična, deterministička funkcija na $[0,T]^n$. Stohastički integral $I_n(F)$ se naziva projekcija funkcionala F na homogeni Vinerov haos reda n.

Malliavin-ov izvod.

Malliavin-ov izvod $\mathscr{L}F$ funkcionala F se definiše kao

(2.2.) $$\mathscr{L}F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot I_n(F),$$ ukoliko red konvergira u smislu srednjih kvadrata.

Ako definišemo $F(r\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot I_n(F)$ za $r<1$, tada se jednostavno može pokazati da je $\mathscr{L}F(\omega) = \underset{r \to 0}{l.i.m.} (F(\omega) - F((1-r)\omega))/r$, ukoliko $\mathscr{L}F$ postoji.

Bismut-ov izvod.

Neka je $(u_t, 0 \le t \le T)$ slučajni proces, sa lokalno kvadratno integrabilnim trajektorijama, adaptiran prirodnoj familiji σ-algebri procesa $(B_t, 0 \le t \le T)$ tako je da za $r>0$ mera na $\mathbb{C}[0,T]$, definisana procesom $(B_t + r \cdot \int_0^t u_s ds, t \le T)$, apsolutno neprekidna u odnosu na Vinerovu meru. Tada se može definisati funkcional F na procesu $(B_t+r\cdot\int_0^t u_s ds)$, i taj funkcional ćemo obeležiti sa $F(\omega+r\cdot\int u_s ds)$.

Bismut-ov izvod ili izvod u pravcu u funkcionala F se definiše kao $D_u F(\omega)=\underset{r\to 0}{l.i.m.}(F(\omega+r\cdot\int u_s ds)-F(\omega))/r$.

Neka je (h_n) ortonormirana baza u $L_2[0,T]$. Tada se može definisati $(DF,DF)=\sum_{k=1}^{\infty}(D_{h_k}F)^2$, ukoliko red konvergira u L_1. Može se pokazati da je (DF,DF) definisan korektno ako postoji konstanta K tako da je $\mathbb{E}((D_u F)^2)\le K\cdot\mathbb{E}(\int_0^T u_s^2 ds)$, [21].

Ukoliko postoji $\mathcal{L}F$ i ako je (DF,DF) jednoznačno definisan tada za dva puta diferencijabilnu funkciju f sa ograničenim izvodima važi $\mathcal{L}f(F)=f'(F)\cdot\mathcal{L}F-f''(F)\cdot(DF,DF)$.

Važnu ulogu u definisanju Bismut-ovog izvoda ima teorema Girsanova, [I-W].

Teorema (Girsanov)

Neka je $(B_t, 0\le t\le T)$ *Braunovo kretanje na* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *sa potokom* σ*-algebri* $(\mathcal{F}_t, 0\le t\le T)$ *i neka je* $(u_t, 0\le t\le T)$ *predvidiv proces tako da je za neko* $r>0$ $\mathbb{E}(\exp(r\cdot\int_0^T u_s^2 ds))<\infty$. *Tada je proces* $(\zeta_t, 0\le t\le T)$, *definisan kao* $\zeta_t=\exp\left[\int_0^t u_s dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t |u_s|^2 ds\right]$, *martingal i* $\mathbb{E}(\zeta_t)=1$. *Štaviše, ako je* $\mathbb{Q}$ *verovatnosna mera na* Ω *definisana kao* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=\zeta_T$ *tada je proces* $(\tilde{B}_t, 0\le t\le T)$, $\tilde{B}_t=B_t-\int_0^t u_s ds$, *Braunovo kretanje u odnosu na* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{Q},\mathcal{F}_t)$. ■

Sledeća teorema ustanovljava takozvanu formulu parcijalne integracije, [21].

Teorema 2.1.

Neka je F kvadratno integrabilni funkcional i $\langle u_s\rangle$ *merljivi proces, kao u prethodnom paragrafu. Ako je za neko* $r>0$ $\mathbb{E}\langle \exp(r\cdot\int_0^T u_s^2 ds)\rangle<\infty$ *i ako postoji* $D_u F$ *tada je*

$$\mathbb{E}\langle D_u F(\omega)\rangle=\mathbb{E}\langle F(\omega)\cdot\int_0^T u_s dB_s\rangle. \quad (2.4.)$$ ■

Na osnovu teoreme Girsanova sleduje da je $\mathbb{E}\langle F(\omega+r\cdot\int u_s ds)\rangle = \mathbb{E}\langle F(\omega)\cdot\exp(r\cdot\int_0^T u_s dB_s+r^2/2\cdot\int_0^T u_s^2 ds)\rangle$, odakle sleduje dokaz teoreme za ograničene funkcionale. Upotrebom standardnog postupka lokalizacije teorema se dokazuje i za kvadratno integrabilne funkcionale, [20].

Formula parcijalne integracije je moćno sredstvo za dokazivanje apsolutne neprekidnosti, u odnosu na Lebegovu meru, raspodele funkcionala, što ilustruje sledeća teorema, [21].

Teorema 2.2.(Bismut)

Neka je F kvadratno integrabilni funkcional, i neka je $\langle u_s\rangle$ *proces kao u* Teoremi 2.1.. *Ako* $D_u F$ *i* $D_u(D_u F)$ *postoje i ako je* $D_u F>0$ *skoro svuda, tada zakon raspodele funkcionala F ima gustinu.* ■

Dovoljni uslovi za apsolutnu neprekidnost raspodele funkcionala, u terminima Malliavin-ovog izvoda, su dati u sledećoj teoremi, [21].

Teorema 2.3.(Malliavin)

Neka je F kvadratno integrabilni funkcional na Vinerovom procesu, i neka postoje $A=(DF,DF)$, $\mathcal{L}F$, $\mathcal{L}A$ *i neka postoji* (DA,DA) *u* L_2. *Ako je* $A\neq 0$ *tada je zakon raspodele funkcionala F apsolutno neprekidan u odnosu na Lebegovu meru.* ■

Pored formule parcijalne integracije važno sredstvo u dokazu prethodnih teorema je i takozvana Malliavin-oba lema, [12].

Lema 2.4. (Malliavin)

Neka je X slučajna promenljiva u $\mathbb{R}^d$ *i neka postoji konstanta C tako da za svako* $f\in\mathbb{C}_b^1$ *važi* $\|\mathbb{E}(\nabla f(X))\|\le C\cdot \sup(|f(x)|:x\in\mathbb{R}^d)$. *Tada je raspodela slučajne promenljive X apsolutno neprekidna u odnosu na Lebegovu meru.* ■

Sledeća teorema koju su dokazali Kusuoka i Stroock predstavlja važan specijalni slučaj Malliavin-ove leme, [11].

Teorema 2.5. (Kusuoka-Stroock)

Neka je μ *verovatnosna mera na* $\mathbb{R}^d$. *Pretpostavimo da za* $1\le i\le d$ *postoji* $\psi_i\in L_q(\mu)$ *tako da je, za* $f\in\mathbb{C}_0^\infty$, $\int\frac{\partial f}{\partial y_i}(y)\mu(dy)=-\int f(y)\psi_i(y)\mu(dy)$. *Ako je* $q>d$ *tada postoji* $g\in\mathbb{C}_b$ *tako da je* $\mu(dy)=g(y)dy$ *i da postoji konstanta* $C(q,d)$ *tako da je* $\|g\|_{\mathbb{C}_b}\le\left[C(q,d)/q\right]^q\cdot\left(\sum_1^d\|\psi_i\|_{L_q(\mu)}\right)^d$. ■

Primena na stohastičke diferencijalne jednačine

Neka su $A_0,A_1,\dots,A_d$ beskonačno diferencijabilne funkcije $A_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$. Definišimo funkciju $b(x)=A_0(x)+1/2\sum_{i,k=1}^{d}A_k^{(i)}(x)\cdot\frac{\partial A_k}{\partial x_i}(x)$ i matricu $a(x)=\left[A_1(x),\dots,A_d(x)\right]$.

Ako je (B_t) Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$ definišimo proces $(Y_{t,x})$ jednačinom $Y_{t,x}-x=\int_0^t a(Y_{s,x})dB_s+\int_0^t b(Y_{s,x})ds$, i neka je $DY_{t,x}=\left[\frac{\partial Y_{t,x}^{(k)}}{\partial x_j}\right]$ izvod po početnom uslovu. Može se pokazati da je $DY_{t,x}$ regularna matrica tako da se može definisati takozvana Malliavin-ova kovarijaciona matrica kao

$$M(t,x)=\sum_{1}^{d}\int_{0}^{t} DY_{s,x}^{-1}\cdot A_i(Y_{s,x})\otimes DY_{s,x}^{-1}\cdot A_i(Y_{s,x})ds.$$

Regularnost verovatnoća prelaza u terminima Malliavin-ove kovarijacione matrice daje sledeća teorema, [12].

Teorema 2.6. (Malliavin)

Ako je $\sup_x \mathbb{E}(\det M(t,x)^{-q})<\infty$ *za* $t\geq 0$ *i* $1<q<\infty$ *tada postoji glatka funkcija* $p:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}_+$ *tako da za* $t\geq 0$ *i ograničenu funkciju* f $\mathbb{E}(f(Y_{t,x}))=\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\cdot p_t(x,y)\cdot dx.$ ■

3. STOHASTIČKI KALKULUS PRIMENJEN NA BRAUNOVO KRETANJE SA DISTORZIJOM

U ovoj glavi ćemo primeniti stohastički kalkulus na Braunovo kretanje sa distorzijom, difuzni proces pridružen Šredingerovom operatoru sa osnovnim stanjem. Predmet našeg interesovanja su svojstva diferencijabilnosti po početnom uslovu Braunovog kretanja sa distorzijom i odgovarajuće polugrupe operatora, asimptotsko ponašanje fundamentalnog rešenja Košijevog problema i spektar restrikcije Šredingerovog operatora na ograničeni domen.

Obeležimo uslov da funkcija $b=\nabla\ln\phi_0$ ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog reda sa (A).

Neka je $(X_{t,x}, t\geq 0)$, familija procesa definisana jednačinom

(3.1.) $\quad X_{t,x}-x=\int_0^t b(X_{s,x})ds+B_t$, a familija $(X^{r,u}_{t,x}, t\geq 0)$ definisana jednačinom

(3.2.) $\quad X^{r,u}_{t,x}-x=\int_0^t b(X^{r,u}_{s,x})ds+B_t+r\cdot\int_0^t u_s ds$, gde je $x\in\mathbb{R}^d$, $r>0$, i $(u_t, t\geq 0)$ adaptirani proces sa merljivim trajektorijama tako da je za neko $\delta>0$ i svako $t>0$ $\mathbb{E}(\exp(\delta\cdot\int_0^t\|u_s\|^2 ds))<\infty$; ovu klasu procesa ćemo obeležiti sa Γ.

Uslov (A) implicira da je $(X_{t,x})$ Braunovo kretanje sa distorzijom (definisano relacijom (1.4.)), na trajektoriji određenoj početnim uslovom $X_0=x$ i $e^{-t\tilde{H}}f(x)=\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$; takođe u skladu sa oznakama u definiciji Bismut-ovog izvoda $X^{r,u}_{t,x}(\omega)=$ $=X_t(\omega+r\cdot\int u_s ds)$.

Najpre iskazujemo takozvanu lemu Bellman-a, [9] str.41.

Lema (Bellman)

Neka su $\alpha(t)$ *i* $\beta(t)$ *merljive ograničene funcije i* $L>0$ *tako da je* $\alpha(t)\le\beta(t)+L\cdot\int_0^t\alpha(s)ds$. *Tada je* $\alpha(t)\le\beta(t)+L\cdot\int_0^t e^{L(t-s)}\cdot\beta(s)ds.$ ∎

Sledeća teorema je rezultat primene stohastičkog računa na Braunovo kretanje sa distorzijom.

Teorema 3.1.

Neka je (X_t) *Braunovo kretanje sa distorzijom. Ukoliko je ispunjen uslov* **(A)** *tada važe sledeća tvrđenja:*

(i) *proces* $(X_{t,x})$ *definisan u* (3.1.) *je diferencijabilan po početnom stanju, tj. za* $t\ge0$ *postoji* $DX_{t,x}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ *tako da je* $X_{t,x}-X_{t,y}=DX_{t,x}\cdot(x-y)+o(|x-y|)$, *kada* $y\to x$; *takođe važi* $\frac{\partial}{\partial t}DX_{t,x}=b'(X_{t,x})\cdot DX_{t,x}$, $DX_{0,x}=\mathbb{I}$ *i* $\sup(\|DX_{t,x}\|:x\in\mathbb{R}^d)\le e^{Ct}$, *gde je* $C=\sup(\|b'(x)\|:x\in\mathbb{R}^d)$;

(ii) *za proces* (u_t) *koji pripada klasi* Γ *postoji izvod u pravcu,* $D_uX_{t,x}=\lim_{r\to0}(X^{r,u}_{t,x}-X_{t,x})/r$, *i*

$$D_uX_{t,x}=DX_{t,x}\cdot\int_0^t DX^{-1}_{s,x}\cdot u_s ds; \tag{3.2.}$$

(iii) *za ograničenu, merljivu funkciju* f $(f\in\mathcal{M}_b)$ *i* $t>0$ *preslikavanje* $x\to\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ *je neprekidno diferencijabilno na* $\mathbb{R}^d$ *i*

$$\nabla_x\mathbb{E}(f(X_{t,x}))=\mathbb{E}(f(X_{t,x})\cdot\int_0^t DX_{s,x}dB_s)\cdot t^{-1}; \tag{3.3.}$$

(iv) *za* $g\in\mathbb{C}^1_b$ *i* $t>0$ *važi*

$$\mathbb{E}(\nabla g(X_{t,x}))=\mathbb{E}(g(X_{t,x})\cdot\Big[\int_0^t DX_{s,x}dB_s\cdot t^{-1}-\int_0^t b'(X_{s,x})dB_s\Big]). \tag{3.4.}$$

Dokaz.

Bez umanjivanja opštosti teoremu ćemo dokazati u jednodimenzionom slučaju.

(i) Relacija (3.1.) i ograničenost izvoda funkcije b daju $|X_{t,x}-X_{t,y}|\le|x-y|+\int_0^t|b(X_{s,x})-b(X_{s,y})|ds\le|x-y|+C\cdot\int_0^t|X_{s,x}-X_{s,y}|ds$, pa je na osnovu leme Bellmana-a $|X_{t,x}-X_{t,y}|\le e^{Ct}\cdot|x-y|$.

Sa druge strane, ako je $DX_{t,x}$ rešenje jednačine $\frac{\partial}{\partial t}DX_{t,x}=b'(X_{t,x})\cdot DX_{t,x}$, $DX_{0,x}=I$ tada je

$$|X_{t,x}-X_{t,y}-DX_{t,x}\cdot(x-y)|=$$
$$|\int_0^t\left[b(X_{s,x})-b(X_{s,y})-b'(X_{s,x})\cdot DX_{s,x}\cdot(x-y)\right]ds|\le$$
$$\le\int_0^t|b(X_{s,x})-b(X_{s,y})-b'(X_{s,x})\cdot(X_{s,x}-X_{s,y})|ds+$$
$$+\int_0^t|b'(X_{s,x})\cdot\left[X_{s,x}-X_{s,y}-DX_{s,x}\cdot(x-y)\right]|ds\le$$
$$\le\int_0^t|b(X_{s,x})-b(X_{s,y})-b'(X_{s,x})\cdot(X_{s,x}-X_{s,y})|ds+$$
$$+C\cdot\int_0^t|X_{s,x}-X_{s,y}-DX_{s,x}\cdot(x-y)|ds,$$

pa ponovnom primenom leme Bellman-a dobijamo da je

$$|X_{t,x}-X_{t,y}-DX_{t,x}\cdot(x-y)|\le$$
$$\le\int_0^t e^{C(t-s)}\cdot|b(X_{s,x})-b(X_{s,y})-b'(X_{s,x})\cdot(X_{s,x}-X_{s,y})|ds.$$

Dalje, $|b(X_{s,x})-b(X_{s,y})-b'(X_{s,x})\cdot(X_{s,x}-X_{s,y})|=o(|X_{s,x}-X_{s,y}|)$ kada $y\to x$, pa kako je $|X_{s,x}-X_{s,y}|\le e^{Cs}\cdot|x-y|$ to se na osnovu ograničenosti izvoda funkcije b i teoreme Lebega može zaključiti da je $|X_{t,x}-X_{t,y}-DX_{t,x}\cdot(x-y)|=o(|x-y|)$ kada $y\to x$.

(ii) Dokaz egzistencije izvoda u pravcu je identičan kao dokaz tačke (i), uz napomenu da $D_uX_{t,x}$ zadovoljava jednačinu $\frac{\partial}{\partial t}D_uX_{t,x}=b'(X_{t,x})\cdot D_uX_{t,x}+u_t$, $D_uX_{0,x}=0$, pa se metodom varijacije parametara može zaključiti da važi relacija (3.2.).

(iii) Primetimo najpre da proces $\{DX_{t,x}, t\geq 0\}$ pripada klasi Γ. Ako obeležimo $\tilde{u}_{\cdot}=DX_{\cdot,x}$, tada je, na osnovu relacije (3.2.), $D_{\tilde{u}}X_{t,x}=t\cdot DX_{t,x}$. Tada je, za $f\in\mathbb{C}_b^1$, preslikavanje $x\mapsto f(X_{t,x})$ neprekidno diferencijabilno, pa važi

$$f(X_{t,x})-f(X_{t,y})=\int_y^x f'(X_{t,z})\cdot DX_{t,z}dz=\int_y^x f'(X_{t,z})\cdot D_{\tilde{u}}X_{t,z}\cdot t^{-1}dz=$$
$$=\int_y^x D_{\tilde{u}}(f(X_{t,z}))dz\cdot t^{-1}.$$

Tada je, na osnovu teoreme Fubinija i formule parcijalnog integrisanja,

$$\mathbb{E}(f(X_{t,x}))-\mathbb{E}(f(X_{t,y}))=\int_y^x \mathbb{E}(D_{\tilde{u}}(f(X_{t,z})))\cdot t^{-1}dz=$$
$$=\int_y^x \mathbb{E}(f(X_{t,z})\cdot\int_0^t \tilde{u}_s dB_s)\cdot t^{-1}dz.$$

Kako su i leva i desna strana gornje jednakosti neprekidni linearni funkcionali na $\mathcal{M}_b$, to ta jednakost važi za sve funkcije iz $\mathcal{M}_b$. Koristeći Markovsko svojstvo $\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_{X_{t,x}}(f(X_{s,\cdot}))\right\}=$ $=\mathbb{E}(f(X_{t+s,x}))$ i dokazanu apsolutnu neprekidnost $\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ (po x) sada se lako dokazuje relacija (3.3) i neprekidnost izvoda.

(iv) Kako je $\frac{\partial}{\partial t}(DX_{t,x}^{-1})=-b'(X_{t,x})\cdot DX_{t,x}^{-1}$, odatle sledi da je $\mathbb{I}-DX_{t,x}^{-1}=\int_0^t DX_{s,x}^{-1}\cdot b'(X_{s,x})ds$, pa je

$$DX_{t,x}-\mathbb{I}=DX_{t,x}\cdot\int_0^t DX_{s,x}^{-1}\cdot b'(X_{s,x})ds.$$

Ako definišemo $\hat{u}_{\cdot}=b'(X_{\cdot,x})$ tada je $D_{\hat{u}}X_{t,x}=DX_{t,x}-\mathbb{I}$, ili imajući u vidu da je $DX_{t,x}=t^{-1}\cdot D_{\tilde{u}}X_{t,x}$,

$$\mathbb{I}=t^{-1}\cdot D_{\tilde{u}}X_{t,x}-D_{\hat{u}}X_{t,x}.$$

Za funkciju $g\in\mathbb{C}_b^1$ tada važi

$$g'(X_{t,x})=t^{-1}\cdot D_{\tilde{u}}(g(X_{t,x}))-D_{\hat{u}}(g(X_{t,x})),$$

odakle, na osnovu formule parcijalne integracije, sleduje (3.4.).

Interesantno je primetiti da Teorema 3.1. ima kao posledicu da je za $t\geq 0$ preslikavanje $x\to X_{t,x}$ $\mathbb{C}_1$-homeomorfizam prostora $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^d$.

Jedan od novijih rezultata tog tipa tvrdi da ako funkcije $a:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$ i $b:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ imaju ograničene parcijalne izvode prvog i drugog reda, i ako je proces $\langle Y_{t,x}\rangle$ definisan jednačinom

$$Y_{t,x}-x=\int_0^t a(Y_{s,x})dB_s+\int_0^t b(Y_{s,x})ds, \tag{3.5.}$$

tada je sa verovatnoćom 1 preslikavanje $x\to Y_{t,x}$ $\mathbb{C}_1$-homeomorfizam $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{R}^d$, [4].

Suštinski slabiji dovoljni uslovi, tako da je u svakom trenutku vremena Braunovo kretanje sa distorzijom $\mathbb{C}_1$-homeomorfizam proizilaze iz činjenice da je $a=0$.

Osobine regularnosti verovatnoće prelaza

Poznata je veza izmedu difuznih procesa i parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda preko takozvane Foker-Plankove jednačine [6]. Klasični problem vezan za difuzne procese je traženje dovoljnih uslova tako da verovatnoće prelaza budu apsolutno neprekidne, sa tendencijom da gustine prelaza budu što glatkije.

Za slučaj Braunovog kretanja sa distorzijom jasno je da Teorema 2.6. Malliavin-a implicira: ako funkcija b ima ograničene izvode svih poredaka tada je verovatnoća prelaza apsolutno neprekidna, sa glatkom gustinom. Noviji rezultati relaksiraju uslove za koeficijent b, dajući dovoljne uslove da postoji k-puta diferencijabilna gustina. U tom smislu važi sledeća teorema, [15].

Teorema 3.2. (Rogers)

Neka je $(X_{t,x})$ *Braunovo kretanje sa distorzijom. Ako je* b *neprekidno diferencijabilna* $(k+1)$*-put, sa ograničenim parcijalnim izvodima, tada verovatnoća prelaza procesa* $(X_{t,x})$ *ima gustinu koja je* k*-puta neprekidno diferencijabilna.* ■

Rogers zasniva dokaz teoreme na unitarnoj ekvivalenciji polugrupe definisane verovatnoćama prelaza Braunovog kretanja sa distorzijom i Šredingerove polugrupe sa osnovnim stanjem. Naime, relacija (1.6) implicira da operator $e^{-t\tilde{H}}$ ima integralno jezgro $\tilde{p}_t(x,y)$, i da je

$$\tilde{p}_t(x,y)=(2\pi t)^{-d/2}e^{-|x-y|^2/2t}\mathbb{E}_x\left\{\exp\left(-\int_0^t V(B_s)ds\right)\Big|B_t=y\right\}\cdot\phi_o(y)\cdot\phi_o(x)^{-1}.$$

Uslovno očekivanje u gornjem izrazu se može napisati u regularnoj formi koristeći Braunovski most na $[0,1]$, $W_s=B_s-s\cdot B_1$ $s\in[0,1]$, kao $\mathbb{E}\left\{\exp\left[-t\cdot\int_0^1 V(x+s(y-x)+t^{1/2}W_s)ds\right]\right\}$. Kako je $-\Delta\phi_0+V\cdot\phi_0=0$ i $b=\nabla\ln\phi_0$ to je $V=(\mathrm{div}b+|b|^2)/2$, pa je jasno da ovakav pristup zahteva da funkcija b ima jedana stepen glatkosti više od gustine.

Direktnom primenom stohastičkog računa u smislu Malliavin-a ili Bismut-a, koristeći Teoremu 2.2., možemo da zaključimo da ako b ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda tada Braunovo kretanje sa distorzijom ima neprekidnu i ograničenu gustinu. Tako Teorema 2.2. zahteva egzistenciju izvoda u pravcu, $D_uX_{t,x}$, i dvostrukog izvoda uz pravcu, $D_u(D_uX_{t,x})$.

Kako je $D_uX_{t,x}=DX_{t,x}\cdot\int_0^t DX_{s,x}^{-1}\cdot u_s ds$, a $\frac{\partial}{\partial t}DX_{t,x}=b'(X_{t,x})\cdot DX_{t,x}$, to egzistencija $D_u(D_uX_{t,x})$ nameće uslove o drugim izvodima funkcije b.

Koristeći Teoremu 3.1. mi ćemo dokazati da ako funkcija b

ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog reda tada Braunovo kretanje sa distorzijom ima neprekidno diferencijabilnu gustinu verovatnoća prelaza.

U dokazu će nam biti potrebna takozvana teorema Burkholder-a, [18].

Teorema (Burkholder)

Neka je $(B_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *Braunovo kretanje u* $\mathbb{R}^d$ *i* a $\mathcal{F}_.$*-progresivno merljiva funkcija sa vrednostima u* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ *tako da je za svako* $t>0$ $\mathbb{E}\left\{\int_0^t \|a(s)\| ds\right\} < \infty$. *Tada za* $q \geq 2$ *važi*

$$\mathbb{E}\left\{\left\|\int_0^t a(s) dB_s\right\|^q\right\}^{1/q} \leq C(q) \cdot \mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t \|a(s)\|^2 ds\right]^{q/2}\right\}^{1/q}; \text{ gde je}$$

$$C(q) = \left[\frac{q^{q+1}}{2 \cdot (q-1)^{q-1}}\right]^{1/2}. \blacksquare$$

Teorema 3.3.

Pod uslovom (A) postoji neprekidno diferencijabilna funkcija $p: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ *tako da za* $t>0$ *i* $f \in \mathcal{M}_b$ *važi*

(3.6) $$\mathbb{E}(f(X_{t,x})) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \cdot p_t(x,y) \cdot \phi_o^2(x) dx,$$ *i postoji konstanta* K *tako da je* $\sup_y p_t(x,y) \leq K \cdot \max(t^{-d/2}, 1) \cdot \phi_o(x)^{-2}$.

Dokaz.

Ako je $(P_t(x,B))$ familija verovatnoća prelaza tada se relacija (3.4.) iz tačke (iv) Teoreme 3.1. može napisati kao

$$\int \nabla g(y) \cdot P_t(x,dy) = \int g(y) \cdot r_t(x,y) \cdot P_t(x,dy), \text{ gde je}$$

$$r_t(x,y) = \mathbb{E}\left(\int_0^t DX_{s,x} dB_s \cdot t^{-1} - \int_0^t b'(X_{s,x}) dB_s \,\middle|\, X_{t,x} = y\right).$$ Tada se, koristeći nejednakost Burkholder-a, može pokazati da je

$$\left[\int \|r_t(x,y)\|^q \cdot P_t(x,dy)\right]^{1/q} \leq$$

$$\leq C(q) \cdot \left[\mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t \|DX_{s,x}\|^2 ds \cdot t^{-1}\right]^{q/2}\right\}^{1/q} \cdot t^{-1} + \mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t \|b'(X_{s,x})\|^2 ds\right]^{q/2}\right\}^{1/q}\right] \leq$$

$\leq C(q)\cdot t^{-1}\cdot e^{Ct}$.

Na osnovu Teoreme 2.5. postoji gustina $\tilde{p}_t(x,y)$, tako da je $P_t(x,dy)=\tilde{p}_t(x,y)dy$ i $\sup_y \tilde{p}_t(x,y)\leq K(q,d)t^{-d/2}e^{Cdt}$. Uzajamna apsolutna neprekidnost Lebegove i mere m povlači egsistenciju gustine $p_t(x,y)$, tako da je $\tilde{p}_t(x,y)=p_t(x,y)\cdot\phi_o(y)^2$. Imajući u vidu simetriju Braunovog kretanja sa distorzijom, relacija (1.3.), jasno je da je gustina u odnosu na invarijantnu meru m, simetrična, tj. $p_t(x,y)=p_t(y,x)$. Teorema 2.5. takođe implicira da je za $x\in\mathbb{R}^d$ $\tilde{p}_t(x,\cdot)$ neprekidna funkcija, pa se na osnovu neprekidnosti funkcije ϕ_0 i simetrije može zaključiti da je $p_t(\cdot,\cdot)$ neprekidna na $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$.

Obeležimo sa $A(t)=\sup_{x,y}\tilde{p}_t(x,y)$. Na osnovu teoreme Čepmen-Kolmogorova je $\tilde{p}_{t+s}(x,y)=\int\tilde{p}_s(x,z)\cdot\tilde{p}_t(z,y)\cdot dy$, odakle sleduje da je $A(t+s)\leq A(t)$, pa je funkcija A monotono nerastuća. Tada postoje konstanta K , tako da je $A(t)\leq K\cdot\max(t^{-d/2},1)$. Takođe imajući u vidu simetričnost, važi $p_t(x,y)\leq A(t)\cdot\phi_o(x)^{-2}$, pa je za fiksirano $x\in\mathbb{R}^d$ $p_t(x,\cdot)$ ograničena funkcija. Kako je $p_{t+s}(x,y)=\mathbb{E}(p_s(X_{t,x},y))$ na osnovu Teoreme 3.1. sleduje neprekidna diferencijabilnost gustine $p_t(x,y)$ po x, a na osnovu simetrije diferencijabilnost po y.

Ako za $r>0$ i $u,v\in\mathbb{R}^d$ definišemo $f_{r,u}(v)=p_r(u,v)$ formula Čepmen-Kolmogorova se može napisati kao

$$p_{t+s_1+s_2}(x,y)=\left[f_{s_1,x}\middle|e^{-t\tilde{H}}f_{s_2,y}\right]_{L_2(m)}.$$

Kako je operator $\tilde{H}$ definisan kao Dirchlet-ova forma, [19], to važi
$$\frac{\partial}{\partial t}p_{t+s_1+s_2}(x,y)=-1/2\left[\nabla f_{s_1,x}\middle|\nabla e^{-t\tilde{H}}f_{s_2,y}\right]_{L_2(m)},$$ pa neprekidnost parcijalnih izvoda po prostornim promenljivim x i y implicira neprekidnost $\frac{\partial}{\partial t}p_{t+s_1+s_2}(x,y)$ na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$. ∎

Obeležimo sa (B) uslov da b ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog i drugog reda. Neposredna posledica je egzistencija Freche-ovog izvoda funkcionala $DX_{t,x}$ po $x\in\mathbb{R}^d$. Tada je

(3.7.) $$DDX_{t,x}=\frac{\partial}{\partial x}DX_{t,x}=DX_{t,x}\cdot\int_0^t b''(X_{s,x})\cdot DX_{s,x}ds.$$

Pretpostavljajuću uslov (B) sada ćemo dokazati da je funkcija $\tilde{h}(t,x)=e^{-t\tilde{H}}f(x)=\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$, jako rešenje Košijevog problema $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{h}(t,x)=-\tilde{H}_x\tilde{h}(t,x)$, $\tilde{h}(t,x)=f(x)$. U tom smislu dovoljno je dokazati da je $\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ dva puta diferencijabilna funkcija po x.

Teorema 3.4.

Neka funkcija b zadovoljava uslov (B). Tada je, za $f\in\mathcal{M}_b$ i $t>0$, preslikavanje $x\mapsto\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ dva puta neprekidno diferencijabilno na $\mathbb{R}^d$.

Dokaz.

Bez umanjivanja opštosti dokaz sprovodimo za $d=1$.

Neka je $f\in\mathbb{C}_b^1$. Na osnovu Teoreme 3.1. je

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}(f(X_{t,x}))=\mathbb{E}(f(X_{t,x})\cdot\int_0^t DX_{s,x}dB_s)\cdot t^{-1},$$ pa je

(3.8.) $$t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}(f(X_{t,x})) = \mathbb{E}\left\{f'(X_{t,x})\cdot DX_{t,x}\cdot\int_0^t DX_{s,x}dB_s\right\}+$$
$$+\mathbb{E}\left\{f(X_{t,x})\cdot\int_0^t DDX_{s,x}dB_s\right\},$$

gde je $DDX_{t,x}$ definisano u relaciji (3.7.).

Kako je $DX_{\cdot,x}$ proces lokalno ograničene varijacije, to je

(3.9.) $$DX_{t,x}\cdot\int_0^t DX_{s,x}dB_s=B_t\cdot(DX_{t,x})^2-DX_{t,x}\cdot\int_0^t B_s\cdot b'(X_{s,x})\cdot DX_{s,x}ds.$$

Iz Teoreme 3.1. sleduje da je

$$(DX_{t,x})^2=DX_{t,x}\cdot\int_0^t b'(X_{s,x})\cdot DX_{s,x}ds+DX_{t,x}\text{ , pa je}$$

(3.10.) $$(DX_{t,x})^2=D_{u_1}X_{t,x}+D_{\tilde{u}}X_{t,x}\cdot t^{-1},\text{ gde je}$$

${u_1}_s=b'(X_{s,x})\cdot(DX_{s,x})^2$ i $\tilde{u}_s=DX_{s,x}$; na isti način je

(3.11) $$DX_{t,x}\cdot\int_0^t B_s\cdot b'(X_{s,x})\cdot DX_{s,x}ds=D_{u_2}X_{t,x}\text{ za}$$

${u_2}_s=B_s\cdot b'(X_{s,x})\cdot(DX_{s,x})^2$.

Tada, kako procesi $\tilde{u}$, u_1, u_2 pripadaju klasi Γ, desna strana formule (3.8.) je jednaka

$$\mathbb{E}\left\{f'(X_{t,x})\cdot\left[\left[D_{u_1}X_{t,x}+D_{\tilde{u}}X_{t,x}\cdot t^{-1}\right]\cdot B_t-D_{u_1}X_{t,x}\right]\right\}+$$
$$+\ \mathbb{E}\left\{f(X_{t,x})\cdot\int_0^t DDX_{s,x}dB_s\right\}.$$

Koristeći formulu parcijalnog integrisanja i imajući na umu da je $D_u(F\cdot G)=F\cdot D_uG+G\cdot D_uF$ i $D_u(B_t)=\int_0^t u_s ds$, konačno zaključujemo da je $t\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}(f(X_{t,x}))=$

$$=\mathbb{E}\left\{f(X_{t,x})\cdot\left[\left(B_t\cdot\int_0^t {u_1}_s dB_s-\int_0^t {u_1}_s ds\right)+\left(B_t\cdot\int_0^t\tilde{u}_s dB_s-\int_0^t\tilde{u}_s ds\right)\cdot t^{-1}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^t {u_2}_s dB_s+\int_0^t DDX_{s,x}dB_s\right]\right\}.$$

Proces u uglastim zagradama je kvadratno integrabilan, pa se gornja formula može produžiti na ceo prostor $\mathcal{M}_b$.■

U Teoremi 3.3. smo zaključili da je za fiksirano t i x gustina, u odnosu na invarijantnu meru m, $p_t(x,\cdot)$ ograničena funkcija. Koristeći čepmen-Kolmogorovljevu formulu, kao posledica Teoreme 3.4. sledi da $p_t(\cdot,\cdot)$ ima neprekidne druge izvode ako b ima ograničene i neprekidne izvode prvog i drugog reda, pa je tada $\frac{\partial}{\partial t}p_t(x,y)=-\tilde{H}_x p_t(x,y)$.

Gradijent rezolvente

U poznatom revijalnom radu [16] B.Simon postavlja sledeći problem. Neka je $H=-\Delta/2+V$ šredingerov operator, tako da je $V_-\in\mathbb{K}_d$ i $V_+\in\mathbb{K}_{d,loc}$. Pod kojim dodatnim uslovima, nametnutim na V, za $f\in L_p$ i $\alpha>1/2+d/2p$ funkcija $(\lambda+H)^{-\alpha}f$ ima gradijent (u smislu distribucija) u $L_{2,loc}$?

Neka opet šredingerov operator H dopušta osnovno stanje ϕ_0. Koristeći formulu $(\lambda+H)^{-\alpha}=\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}e^{-tH}dt$ i unitarnu ekvivalenciju $e^{-tH}=U^{-1}\circ e^{-t\tilde{H}}\circ U$ jasno je da se problem svodi na ispitivanje diferencijabilnosti rezolvente Braunovog kretanja sa distorzijom.

Teorema 3.5.

Neka Šredingerov operator H dopušta osnovno stanje ϕ_0 tako da funkcija $b=\nabla\ln\phi_0$ ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog reda. Tada za $p\geq1$, $\alpha>1/2+d/2p$ i $\lambda>C=\|b'\|$ operator $(\lambda+H)^{-\alpha}$ preslikava L_p u prostor neprekidno diferencijabilnih funkcija.

Dokaz.

Iz dokaza Teoreme 3.3. sleduje da se gustina, u odnosu na meru m, verovatnoća prelaza Braunovog kretanja sa distorzijom može majorizirati kao $p_t(x,y)\leq A(t,x)=K\cdot\max(t^{-d/2},1)\cdot\phi_0(x)^{-2}$.

Neka je $f\in M_b\cap L_p(m)$, tada je za $1/p+1/q=1$

$$|\nabla_x\mathbb{E}(f(X_{t,x}))|=|\mathbb{E}(f(X_{t,x})\int_0^t DX_{s,x}dB_s)/t|\leq$$

$$\leq\mathbb{E}\left\{|f(X_{t,x})|^p\right\}^{1/p}\cdot\mathbb{E}\left\{|\int_0^t DX_{s,x}dB_s|^q\right\}^{1/q}/t.$$

Sada ćemo majorizirati očekivane vrednosti u gornjem izrazu. Tako je $\mathbb{E}\left\{|f(X_{t,x})|^p\right\}^{1/p}=\left(\int|f(y)|^p p_t(x,y)\phi_0(y)^2dy\right)^{1/p}\leq$

$$\leq A(t,x)^{1/p}\cdot\|f\|_{L_p(m)}.$$

Dalje, na osnovu nejednakosti Burgholder-a, za $r=\max(2,q)$ je

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^t DX_{s,x}dB_s\right|^q\right\}^{1/q}\leq\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^t DX_{s,x}dB_s\right|^r\right\}^{1/r}\leq$$

$$\leq C(r)\cdot\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t\|DX_{s,x}\|^2ds\right)^{r/2}\right\}^{1/r}\leq C(r)\cdot t^{1/2}\cdot e^{Ct}.$$

Konačno zaključujemo da postoji $K=K(p,d)$ tako da $|\nabla_x\mathbb{E}(f(X_{t,x}))|\leq K\cdot\max(t^{-d/2p-1/2},t^{-1/2})\cdot e^{Ct}\cdot\phi_o(x)^{-2/p}\cdot\|f\|_{L_2(m)}$, pa se $\nabla_x\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ može produžiti na $L_p(m)$ kao ograničeni linearni funkcional. Markovsko svojstvo $\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_{X_{t,x}}(f(X_{s,\cdot}))\right\}=\mathbb{E}(f(X_{t+s,x}))$ implicira neprekidnost $\nabla\mathbb{E}(f(X_{t,x}))$ po x.

Za $\alpha>d/2p+1/2$ i $\lambda>C$ integral $\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\lambda t}\nabla_x\mathbb{E}(f(X_{t,x}))dt$ konvergira uniformno na ograničenim skupovima čime je teorema dokazana.■

Restrikcija na ograničeni domen

Neka je D ograničeni domen u $\mathbb{R}^d$ sa glatkom granicom. Predmet naše pažnje će sada biti restrikcija Braunovog kretanja sa distorzijom na domen D i spektralna svojstva generatora tako konstruisanog procesa. U tom smislu definišimo prvo vreme izlaska procesa iz domena kao $\tau_x(D)=\inf(t\geq 0:X_{t,x}\notin D)$.

Dokažimo da je $\mathbb{E}(\tau_x(D))<\infty$. Neka je $a\in\mathbb{R}^d$ tako da $\frac{\|a\|^2}{2}+b(x).a>c>0$ na D. Ito-ova formula daje

$$\exp(a.X_{t,x})-\exp(a.x)=\int_0^t \exp(a.X_{s,x})a.\,dB_s+$$
$$+\int_0^t \exp(a.X_{s,x})\left[\frac{\|a\|^2}{2}+b(X_{s,x}).a\right]ds.$$

Za $t\le\tau_n=\min(\tau_x(D),n)$ je $X_{t,x}\in D$ pa je

$$\sup_{y\in D} e^{a.y}-e^{a.x}\ge\mathbb{E}(\exp(a.X_{\tau_n}))-e^{a.x}=\mathbb{E}\left\{\int_0^{\tau_n}\exp(a.X_{s,x})\left[\frac{\|a\|^2}{2}+b(X_{s,x}).a\right]ds\right\}\ge$$

$$\ge c\cdot\inf_{y\in D} e^{a.y}\cdot\mathbb{E}(\tau_n),$$

pa na osnovu Fatou-ove leme sleduje da je $\mathbb{E}(\tau_x(D))<\infty$.

U knjizi [10] dokazana je teorema koja, za slučaj Braunovog kretanja sa distorzijom ima sledeću formulaciju.

Teorema (Gihman-Skorohod)

Ako funkcija b *ispunjava uslov* (A) *tada je za* $f\in M_b$ *preslikavanje* $x\to\mathbb{E}\left\{f(X_{\tau_x(D),x})e^{-\lambda\tau_x(D)}\right\}$ *neprekidno.* ■

Dalje, polugrupu operatora $(G_D(t))$ na $L_2(D,m)$ definišimo kao $G_D(t)f(x)=\mathbb{E}\left\{f(X_{t,x})\cdot\mathbb{I}(t<\tau_x(D))\right\}$. Može se pokazati da je $G_D(t)$ simetričan operator na $L_2(D,m)$ u sledećem smislu

$$\int_D f(x)\cdot G_D(t)g(x)\cdot m(dx)=\int_D G_D(t)f(x)\cdot g(x)\cdot m(dx),\ [7].$$

Teorema 3.6.

Ako je ispunjen uslov (A) *tada je za* $t\ge0$ $G_D(t)$ *Hilbert-Šmitov operator na* $L_2(D,m)$. *Svojstveni vektori su neprekidne funkcije na* D.

Dokaz.

Jasno je da je $G_D(t)f(x)=\mathbb{E}\left\{f(X_{t,x})\cdot\mathbb{P}(t<\tau_x(D)\mid X_{t,x})\right\}=$

$$=\int_D f(y)p_t(x,y)\mathbb{P}(t<\tau_x(D)\,|\,X_{t,x}=y)\phi_o(y)^2dy=\int_D f(y)p_t^{(D)}(x,y)\phi_o(y)^2dx.$$

Kako je $p_t(x,y)$ neprekidna, a $\mathbb{P}(t<\tau_x(D)\,|\,X_{t,x}=y)$ ograničena funkcija to je integralno jezgro $p_t^{(D)}(x,y)$ operatora $G_D(t)$ ograničeno, a time i pripada $L_2(D{\times}D,m{\times}m)$ odakle sleduje da je $G_D(t)$ Hilbert-Šmitov operator.

Neka je $-H_D$ generator polugrupe $(G_D(t))$. Kako je polugrupa simetrična to je njen generator samokonjugovan na $L_2(D,m)$. Spektar generatora je čisto diskretan, što sleduje iz činjenice da su $G_D(t)$ Hilbert-Šmitovi operatori.

Neka je f svojstveni vektor operatora H_D sa svojstvenom vrednošću α. Tada je $e^{-\alpha t}f(x)=\int_D f(y)\cdot p_t^{(D)}(x,y)\cdot\phi_o(y)^2dy$, odakle sleduje ograničenost funkcije f na D. Produžimo f na ceo $\mathbb{R}^d$ definišući $f(x)=0$ na D^c. Obeležimo sa $\mathcal{R}_\lambda$ i $\mathcal{R}_\lambda^{(D)}$ rezolventne operatore Braunovog kretanja sa distorzijom i Braunovog kretanja sa distorzijom restrikovanog na D. Tada je na osnovu jednakosti Dynkin-a $\mathcal{R}_\lambda f(x)=\mathcal{R}_\lambda^{(D)}f(x)+\mathbb{E}\left\{\mathcal{R}_\lambda f(X_{\tau_x(D),x})e^{-\lambda\tau_x(D)}\right\}$. Naime,

$$\mathbb{E}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(X_{t,x})dt\right\}=\mathbb{E}\left\{\int_0^{\tau_x(D)} e^{-\lambda t}f(X_{t,x})dt\right\}+$$

$$+\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_{X_{\tau_x(D),x}}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(X_t)dt\right\}e^{-\lambda\tau_x(D)}\right\}.$$

Iz Teoreme 3.1. sleduje da je $\mathcal{R}_\lambda f$ neprekidna funkcija, a teorema Gihmana-Skorohod tvrdi da je $X_{\tau_x(D),x}$ neprekidna funkcija po x odakle sleduje da je $\mathcal{R}_\lambda^{(D)}f(x)$ neprekidna funkcija. Kako je $\mathcal{R}_\lambda^{(D)}f(x)=f(x)/(\alpha+\lambda)$ to je f neprekidna funkcija.∎

Interesatno je primetiti da gornja teorema daje mogućnost da se dokaže neprekidnost svojstvenih vektora operatora H_D, gde je H_D definisan kao samokonjugovana ekstenzija diferencijalnog operatora $-(\Delta/2+b.\nabla)$, bez obzira na dimenziju prostora d. U teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina dokazivanje neprekidnosti svojstvenih vektora diferencijalnih operatora koristi kao glavno oruđe teoremu Soboljeva, pa je stepen diferencijabilnosti dovoljan da bi svojstveni vektori bili neprekidni određen dimenzijom prostora. Preciznije većina dokaza neprekidnosti svojstvenih vektora diferencijalnih operatora oslanja se na činjenicu da je funkcija sa uopštenim parcijalnim izvodima u $L_p(D,dx)$ do poretka l, neprekidna ako je $p>d/l$.

Asimptotsko ponašanje gustine

Sledeći problem kojim ćemo se pozabaviti je asimptotsko ponašanje gustine, u odnosu na meru m, Braunovog kretanja sa distorzijom, i to uglavnom u okolini $+\infty$. Naime, teorema Rogers-a daje mogućnost da se odredi ponašanje gustine kada $t\to 0$. Na osnovu eksplicitne formule za gustinu verovatnoća prelaza u odnosu na Lebegovu meru

$$\tilde{p}_t(x,y)=(2\pi t)^{-d/2}e^{-|x-y|^2/2t}\mathbb{E}_x\left\{\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)\,|B_t=y\right\}\cdot\phi_o(y)\cdot\phi_o(x)^{-1}$$

i predstavljanja uslovnog očekivanja u gornjoj jednakosti kao

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[-t\cdot\int_0^1 V(x+s(y-x)+t^{1/2}W_s)ds\right]\right\} \tag{3.12.}$$

jasno je da je

$$\tilde{p}_t(x,y)\approx(2\pi t)^{-d/2}e^{-|x-y|^2/2t}\cdot\phi_o(y)\cdot\phi_o(x)^{-1} \text{ kada } t\to 0.$$

Kako je $\tilde{p}_t(x,y)=p_t(x,y)\phi_0^2(y)$ to je

$$p_t(x,y)\approx(2\pi t)^{-d/2}e^{-|x-y|^2/2t}\cdot\phi_o(y)^{-1}\cdot\phi_o(x)^{-1}, \text{ kada } t\to\infty.$$

Sa druge strane ponašanje u okolini ∞ se ne može odrediti direktnom primenom gornjih formula, jer se ne može odrediti ponašanje očekivane vrednosti (3.12), kada $t\to\infty$.

Obeležimo sa (A') uslov da b ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog reda i da je $\phi_0\in L_2$. Pretpostavljajući da je ispunjen ovaj uslov ocenićemo odozdo očekivanu vrednost (3.12.). Kako je $V=(\mathrm{div}b+|b|^2)/2$ to je $|V(x)|\le K(1+|x|^2)$, pa je

$$\mathbb{E}\left\{\exp\left[-t\cdot\int_0^1 V(x+s(y-x)+t^{1/2}W_s)ds\right]\right\}\ge$$

$$\ge\mathbb{E}\left\{\exp\left[-t\cdot\int_0^1 K\left[1+(x+s(y-x)+t^{1/2}W_s)^2\right]ds\right]\right\}\ge$$

$$\ge\exp\left[\mathbb{E}\left\{-t\cdot\int_0^1 K\left[1+(x+s(y-x)+t^{1/2}W_s)^2\right]ds\right\}\right]\ge$$

$$\ge\exp\left[-tK_1-t^2K_2-tK_3x^2-tK_4(y-x)^2\right].$$

Tada je $\tilde{p}_t(x,y)\ge A(t,x)\cdot\exp(-B(t)\cdot(y-x)^2)\cdot\phi_0(y)\cdot\phi_0(x)^{-1}$ gde su A i B pozitivne funkcije.

Sa druge strane, kako je m konačna mera to je 0 svojstvena vrednost operatora $\tilde{H}$ sa svojstvenim vektorom identički jednakim 1. Dokazaćemo da je to jedini svojstveni vektor, tj. da je 0 prosta svojstvena vrednost. U tom smislu nam je potrebna sledeća teorema Reed-a i Simon-a, [14].

Teorema (Reed-Simon)

Neka je H samokonjugovani operator u $L_2(M,m)$, gde je m verovatnosna mera. Pretpostavimo da je e^{-tH} pozitivan operator i da je $\inf\sigma(H)$ *svojstvena vrednost operatora H. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) $\inf\sigma(H)$ *je prosta svojstvena vrednost sa strogo pozitivnim svojstvenim vektorom;*

(b) ako je $f\in L_2(M,m)$ nenegativna funkcija različita od nule i $t>0$ tada je $e^{-tH}f(x)>0$ za m-skoro sve x; ■

Vratimo se sada našem slučaju. Ako je $f\geq 0$ i $e^{-t\tilde{H}}f(x)=0$ tada je $0=\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\cdot\tilde{p}_t(x,y)\cdot dx\geq A(t,x)\cdot\phi_o(x)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\exp(-B(t)(y-x)^2)\phi_o(y)dy$ pa je $f\cdot\phi_o=0$ skoro svuda u odnosu na Lebegovu meru, tj. $f=0$ skoro svuda u odnosu na meru m. Na osnovu teoreme Reed-Simon tada sleduje da je 0 prosta svojstvena vrednost.

Neka je dalje H zatvoreni operator u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Obeležimo sa $\Lambda(H)=\sigma(H)\cap i\mathbb{R}$ čisto imaginarne svojstvene vrednosti i sa $\mathcal{P}_\lambda$ ortogonalni projektor na jezgro operatora $H-\lambda I$ za $\lambda\in\Lambda(H)$. Tada važi sledeća teorema, [22].

Teorema(Wiener)

Neka H na $\mathcal{H}$ generiše jako neprekidnu polugrupu kontrakcija $\langle T(t),t\geq 0\rangle$. Tada za $f,g\in\mathcal{H}$ $\left[T(t)f|g\right]^2_{\mathcal{H}}$ konvergira u Cesaro-vom smislu ka $\sum_{\lambda\in\Lambda(H)}\left[\mathcal{P}_\lambda f|g\right]^2_{\mathcal{H}}$. ■

U našem slučaju je $\Lambda(\tilde{H})=\langle 0\rangle$ i $\mathcal{P}_0 f=\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\cdot\phi_o(y)^2dy$, pa ako za $r>0$ i $u,v\in\mathbb{R}^d$ definišemo $f_{r,u}(v)=p_r(u,v)$ formula čepmen-Kolmogorova se može napisati kao $p_{t+s_1+s_2}(x,y)=\left[f_{s_1,x}|e^{-t\tilde{H}}f_{s_2,y}\right]_{L_2(m)}$, odakle primenom Teoreme Wiener-a sleduje da $p_{t+s_1+s_2}(x,y)\to 1$ u Cesaro-vom smislu, kada $t\to\infty$. Kako je $\frac{\partial}{\partial t}p_{2t}(x,x)=-\left[\nabla e^{-t\tilde{H}}f_{t,x}|\nabla e^{-t\tilde{H}}f_{t,x}\right]_{L_2(m)}\leq 0$ to je

$p_t(x,x)$ monotono nerastuća funkcija (po t), pa $p_t(x,x)\to 1$ u običnom smislu. Dalje je

$$|1-p_{t+s}(x,y)|\leq\int|1-p_t(x,z)|\cdot p_s(z,y)\cdot\phi_o(y)^2dy\leq$$
$$\leq\left[\int|1-p_t(x,z)|^2\cdot\phi_o(y)^2dy\cdot\int p_s(z,y)^2\cdot\phi_o(y)^2dy\right]^{1/2}=$$
$$=\left[\left(p_{2t}(x,x)-1\right)\cdot p_{2s}(y,y)\right]^{1/2},$$ pa takođe $p_t(x,y)\to 1$ kada $t\to\infty$. Time je dokazana

Teorema 3.7.

Neka je $\phi_o \in L_2$ *i funkcija* $b=\ln\phi_o$ *ima ograničene i neprekidne parcijalne izvode prvog reda. Tada gustina verovatnoća prelaza , u odnosu na invarijantnu meru m, Braunovog kretanja sa distorzijom konvergira jedinici kada* $t\to\infty$, *tj. za svako* x, y *iz* $\mathbb{R}^d$ *važi*

$$\lim_{t\to\infty} \rho_t(x,y)=1. \blacksquare$$

Ova teorema daje mogućnost da se odredi tačno asimptotsko ponašanje integralnog jezgra Feynman-Kaca za potencijale koji dozvoljavaju osnovna stanje sa osobinom (A'). Naime, tada važi

$$(2\pi t)^{-d/2} e^{-|x-y|^2/2t} \mathbb{E}_x\left\{\exp(-\int_0^t V(B_s)ds) \,|\, B_t=y\right\}\cdot \phi_o(y)\cdot\phi_o(x)\to 1, \quad (t\to\infty),$$

pa je $\mathbb{E}_x\left\{\exp(-\int_0^t V(B_s)ds) \,|\, B_t=y\right\} \approx (2\pi t)^{-d/2} e^{-|x-y|^2/2t} \phi_o^{-1}(y)\cdot\phi_o^{-1}(x)$,

kada $t\to\infty$.

III. DIRAKOVA JEDNAČINA

1. PROBABILISTIČKI TRETMAN DIRAKOVE JEDNAČINE

Dirakova jednačina u 1+1 dimenziji je sledeći Košijev problem u $L_2 \otimes \mathbb{R}^2$:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-qA_0(x,t)\right]f(x,t)-\sigma_3 c\left[\hbar/i\frac{\partial}{\partial x}-qA_1(x,t)\right]f(x,t)-mc^2\sigma_1 f(x,t)=0$$

$f(x,0)=g(x)$,

gde je $f(x,t)=\begin{bmatrix} f(x,t,1) \\ f(x,t,-1) \end{bmatrix}$, $g(x)=\begin{bmatrix} g(x,1) \\ g(x,-1) \end{bmatrix}$, A_0 i A_1 su kompleksne funkcije na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, c, m, q, $\hbar$ pozitivne konstante, a σ_1,σ_3 označavaju standardne Paulijeve matrice $\sigma_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\sigma_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ukratko ćemo opisati rešavanje Dirakove jednačine stohastičkom simulacijom, [3].

Definišimo najpre funkciju $\psi(x,y,t)=\begin{bmatrix} \psi(x,y,t,1) \\ \psi(x,y,t,-1) \end{bmatrix}$, uvodeći novu promenljivu y i promenu vremena za $T>0$, kao

$$\psi(x,y,t)=\exp(-mc^2(T-t)/\hbar)e^{-iy}f(x,T-t).$$

Tada $\psi(x,y,t)$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,t,\theta)+mc^2/\hbar\left[\psi(x,y+\frac{\pi}{2},t,-\theta)-\psi(x,y,t,\theta)\right]-$$
$$-c\theta\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,y,t,\theta)+q/\hbar\left[A_0(x,T-t)-c\theta A_1(x,T-t)\right]\frac{\partial}{\partial y}\psi(x,y,t,\theta)=0$$

uz uslov $\psi(x,y,T,\theta)=e^{-iy}g(x,\theta)$.

Gornja jednačina koju zadovoljava funkcija ψ daje ideju za probabilističku reprezentaciju rešenja f.

Neka je $(N(t))$ Puasonov proces sa intenzitetom $a=mc^2/\hbar$. Definišimo procese $(S(t,\theta))$ i $(X(x,t,\theta))$ kao

(4.1) $\qquad S(t,\theta)=\theta(-1)^{N(t)}$, i

(4.2.) $X(t,x,\vartheta)=x-c\int_0^t S(u,\vartheta)du$, gde je $x\in\mathbb{R}$ i $\vartheta\in(-1,1)$.

Tada funkcija f, rešenje Dirakove jednačine, dopušta sledeću stohastičku reprezentaciju:

$$f(x,t,\theta)=e^{\alpha t}\mathbb{E}\Bigg\{g(X(x,t,\theta),S(t,\theta))\cdot$$
$$\exp\left[-i\frac{\pi}{2}N(t)-i\frac{q}{\hbar}\int_0^t\Big[A_0(X(x,u,\theta),t-u)-cS(u,\theta)A_1(X(x,u,\theta),t-u)\Big]du\right]\Bigg\}.$$

Ovakav pristup je motivisan Kacovim rešenjem takozvane telegrafske jednačine, [8]. Neka je $(G(t),t\in\mathbb{R})$ jako neprekidna grupa operatora na Banahovom prostoru $\mathscr{X}$, sa generatorom H. Tada za polugrupu operatora $(F(t,\theta),t\geq0)$, $\theta\in(-1,1)$ definisanu kao $F(t,\theta)=\mathbb{E}\left\{G\left[\int_0^t(-1)^{N(u)}du\right]\middle|(-1)^{N(t)}=\theta\right\}$, važi

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,\theta)=-\alpha(F(t,\theta)-F(t,-\theta))+\theta H\circ F(t,\theta).$$

Takođe je dokazano da polugrupa $(F(t)t\geq0)$, definisana kao $F(t)=\mathbb{E}\left\{G\left[\int_0^{\alpha t}(-1)^{N(u)}du\right]\right\}$ konvergira ka polugrupi sa generatorom H^2, kada $\hbar\to0$. U slučaju da je $(G(t),t\in\mathbb{R})$ grupa translacija, tj. $H=\frac{\partial}{\partial x}$, granična polugrupa je određena Braunovim kretanjem. U tom smislu je proces $(X(x,t,\theta))$ sličan Braunovom kretanju.

Sa druge strane, rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina difuznog tipa mogu se aproksimirati koristeći procese slične procesu $(X(x,t,\vartheta))$. Važi sledeća teorema [18]:

<u>Teorema</u>(Stroock)

Neka su procesi $(Y(t,x))$ *i* $(Y(t,x,r))$ *definisani kao*

$Y(t,x)-x=\int_0^t a(Y(s,x))dB_s+\int_0^t b(Y(s,x))ds$ *i*

$Y(t,x,r)-x=r\int_0^t a(Y(s,x,r))(-1)^{N(s)}ds+r^2\int_0^t b(Y(s,x,r))ds$, *gde su* *a i b glatke funkcije sa ograničenim izvodima,* $\langle B_t\rangle$ *standardno Braunovo kretanje i* $\langle N(t)\rangle$ *Puasonov proces sa intenzitetom 1.*

Tada, $\langle Y(t/r^2,x,r)\rangle$ *konvergira u verovatnoći ka procesu* $\langle Y(t,x)\rangle$*, kada* $r\to 0$. ■

Iz definicija u gornjoj teoremi, jasno je da su procesi $\langle Y(t,x)\rangle$ i $\langle Y(t,x,r)\rangle$ rešenja jednačina istoga tipa, s tim što je u prvom slučaju stohastička diferencijalna jednačina definisana na Braunovom kretanju, a u drugom na procesu $\int_0^t (-1)^{N(u)}du$.

Da bi podrobnije ispitali difuzno ponašanje gornjeg procesa, iskoristićemo stohastičku analizu martingala.

Za $\langle M_t, t\geq 0\rangle$ sdesna neprekidni martingal sa $[M]_t$ ćemo označiti kvadratnu karakteristiku a sa λ_M Doleanovu meru, (A7. i A10.).

Karakterizaciju Braunovog kretanja u terminima kvadratne karakteristike daje teorema Levija, [5].

<u>Teorema</u>(Levi)

Neprekidni L_2*-martingal je Braunovo kretanje ako i samo ako je za* $t\geq 0$ $[M]_t=t$. ■

<u>Lema</u> <u>4.1.</u>

Neka je $\langle M_t, t\geq 0\rangle$ L_2*-martingal neprekidan sdesna. Tada važi ekvivalencija:*

$$\text{za } t\geq 0\ [M]_t=t \Leftrightarrow \text{za } 0<s\leq t<\infty, F\in\mathcal{F}_s\ \lambda_M\Big[(s,t]\times F\Big]=(t-s)\cdot\mathbb{P}(F).$$

<u>Dokaz.</u>

($\Rightarrow$) Neposredno iz relacije $\lambda_M\Big[(s,t]\times F\Big]=\mathbb{E}\Big\{([M]_t-[M]_s)\cdot\mathbb{I}_F\Big\}$.

($\Leftarrow$) $(t-s)\cdot\mathbb{P}(F)=\mathbb{E}\Big\{([M]_t-[M]_s)\mathbb{I}_F\Big\}=\mathbb{E}\Big\{(\mathbb{E}([M]_t|\mathcal{F}_s)-[M]_s)\mathbb{I}_F\Big\}$, pa je $\mathbb{E}([M]_t|\mathcal{F}_s)-[M]_s=t-s$, odakle sledi da je $[M]_t-t$ martingal. Kako je $[M]_t-t$ proces ograničene varijacije to je $[M]_t-t=[M]_0-0=0$. ■

Sledeća teorema objašnjava difuzno ponašanje procesa

$$\int_0^t (-1)^{N(u)}du.$$

<u>Teorema 4.1.</u>

Neka je $(N(t))$ Puasonov proces sa intenzitetom α i $(\mathcal{F}_t)$ potok σ-algebri generisan tim procesom. Tada je $(X(t))$, definisan kao

$$X(t)=\left[(-1)^{N(t)}-1+2\alpha\int_0^t(-1)^{N(s)}ds\right]/2\sqrt{\alpha}\ ,$$

L_2-martingal sa sdesna neprekidnim trajektorijama. Štaviše, ako je $([X]_t)$ kvadratna karakteristika martingala $(X(t))$, tada $[X]_t=t$. ■

<u>Dokaz.</u>

Iz definicije sleduje da je za $s<t$

$$X(t)-X(s)=\left[(-1)^{N(t)}-(-1)^{N(s)}+2\alpha\int_s^t(-1)^{N(u)}du\right]/2\sqrt{\alpha}=$$

$$=(-1)^{N(s)}\left[(-1)^{N(t)-N(s)}-1+2\alpha\int_s^t(-1)^{N(u)-N(s)}du\right]/2\sqrt{\alpha}.$$

Kako je $(N(t))$ proces sa homogenim, nezavisnim priraštajima, to je slučajna promenljiva $(-1)^{N(t)-N(s)}-1+2\alpha\int_s^t(-1)^{N(u)-N(s)}du$

nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_s$, i

$$\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s)-X(s)=$$

$$=(-1)^{N(s)}\mathbb{E}\left\{(-1)^{N(t)-N(s)}-1+2\alpha\int_s^t(-1)^{N(u)-N(s)}du\right\}/2\sqrt{\alpha}=$$

$$=(-1)^{N(s)}\mathbb{E}(X(t-s)).$$

Kako je $\mathbb{E}((-1)^{N(u)})=e^{-2\alpha u}$ to je

$$\mathbb{E}(X(v))=(e^{-2\alpha v}-1+2\alpha\int_0^t e^{-2\alpha u}du)/2\sqrt{\alpha}=0,$$

pa je $\mathbb{E}(X(t)|\mathcal{F}_s)=X(s)$, tj. $(X(t))$ je martingal. Neprekidnost sdesna sleduje iz neprekidnosti sdesna Puasonovog procesa.

Nađimo sada Doleanovu meru. Za $F\in\mathcal{F}_s$

$$\lambda_X\Big[(s,t]\times F\Big]=\mathbb{E}\Big\{(X(t)-X(s))^2\cdot \mathbb{1}_F\Big\}=$$

$$=\mathbb{E}\Big\{\Big[(-1)^{N(t)}-(-1)^{N(s)}+2\alpha\int_s^t(-1)^{N(u)}du\Big]^2\cdot\mathbb{1}_F\Big\}/4\alpha=$$

$$=\mathbb{E}(X(t-s)^2)\cdot\mathbb{P}(F).$$

Ostaje da se izračuna $\mathbb{E}(X(t-s)^2)$. Neka je $v=t-s$. Tada

$$\mathbb{E}\Big\{\Big[(-1)^{N(v)}-1+2\alpha\int_0^v(-1)^{N(u)}du\Big]^2\Big\}/4\alpha=$$

$$=\mathbb{E}\Big\{1+1+4\alpha^2\int_0^v\int_0^v(-1)^{N(x)+N(y)}dxdy+4\alpha\int_0^v(-1)^{N(x)+N(v)}dx-$$

$$-4\alpha\int_0^v(-1)^{N(x)}dx-2(-1)^{N(v)}\Big\}/4\alpha.$$

Dalje je, $\mathbb{E}\Big\{4\alpha^2\int_0^v\int_0^v(-1)^{N(x)+N(y)}dxdy\Big\}=$

$$=8\alpha^2\mathbb{E}\Big\{\int_0^v\int_0^y(-1)^{N(y)-N(x)}dxdy\Big\}=8\alpha^2\int_0^v\int_0^y\mathbb{E}\Big\{(-1)^{N(y-x)}\Big\}dxdy=$$

$$=4\alpha v-2(1-e^{-2\alpha v}).$$

Kako je $\mathbb{E}\Big\{\int_0^v(-1)^{N(x)+N(v)}dx\Big\}=\mathbb{E}\Big\{\int_0^v(-1)^{N(v)-N(x)}dx\Big\}=$

$$=\mathbb{E}\Big\{\int_0^v(-1)^{N(x)}dx\Big\},$$

to lako zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(X(v)^2)=(2+4\alpha v-2+2e^{-2\alpha v}-2e^{-2\alpha v})/4\alpha=v.$$

Konačno zaključujemo da je $\lambda_X\left[(s,t]\times F\right]=(t-s)\cdot\mathbb{P}\{F\}$ pa na osnovu Leme 4.1. sleduje da je $[X]_t=t$. ■

Neka je dalje $\{U_n\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom, sa parametrom α, tako da je

$N(t)=\max\{n:S_n\le t\}$, gde je $S_n=\sum_{i=1}^{n}U_i$.

Jasno je da proces $\{X(t)\}$ ima prekide samo u tačkama $t=S_n$ i kako je $X(S_n)=\dfrac{(-1)^n-1}{2\alpha^{1/2}}+\alpha^{1/2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}U_i$, to važi $\Delta X(S_n)=(-1)^n/\alpha^{1/2}$.

Tada je na osnovu Ito-ove formule

$$\exp(i\lambda X(t))-1=i\lambda\int_0^t\exp(i\lambda X(s))dX(s)-\lambda^2/2\cdot\int_0^t\exp(i\lambda X(s))ds+$$

$$+\sum_{S_n\le t}\left[\exp(i\lambda X(S_n))-\exp(i\lambda X(S_{n-}))-i\lambda\Delta X(S_n)\exp(i\lambda X(S_{n-}))\right]$$

Primenjujući operator očekivanja dobijamo

$$\mathbb{E}\{\exp(i\lambda X(t))\}-1=-\lambda^2/2\cdot\int_0^t\mathbb{E}\{\exp(i\lambda X(s))\}ds+A_\alpha(t),\text{ gde je}$$

$$A_\alpha(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\lambda\alpha^{1/2}\sum_1^n(-1)^{i-1}U_i\right]\mathbb{I}(S_n\le t)\right\}$$

$$\left[\exp(i\lambda\frac{(-1)^n-1}{2\alpha^{1/2}})-\exp(i\lambda\frac{(-1)^{n-1}-1}{2\alpha^{1/2}})-i\lambda\frac{(-1)^n}{\alpha^{1/2}}\exp(i\lambda\frac{(-1)^{n-1}-1}{2\alpha^{1/2}})\right]$$

Obeležimo $b_n(t)=\mathbb{E}\left\{\exp\left[i\lambda\alpha^{1/2}\sum_1^n(-1)^{i-1}U_i\right]\mathbb{I}(S_n\le t)\right\}$. Tada je

$$b_{n+1}(t)=\alpha\int_0^t b_n(t-s)\exp(-\alpha s+i\lambda\alpha^{1/2}(-1)^n s)ds,\text{ ili ako je}$$

$$\hat{b}_n(\rho)=\int_0^\infty e^{-\rho t}b_n(t)dt,\text{ tada je }\hat{b}_{n+1}(\rho)=\hat{b}_n(\rho)\left[1+\rho\alpha^{-1}+i\lambda(-1)^{n+1}\alpha^{-1/2}\right]^{-1}.$$

Koristeći gornju formulu možemo izračunati da je

$$\hat{b}_n(\rho)=\rho^{-1}\left[1+\rho\alpha^{-1}+i\lambda\alpha^{-1/2}\right]^{-p_n}\left[1+\rho\alpha^{-1}-i\lambda\alpha^{-1/2}\right]^{-q_n};$$

p_n (q_n) označava broj parnih (neparnih) brojeva $\le n$.

Sumirajući parne i neparne stepene možemo zaključiti da važi

$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{-\rho t}A_\alpha(t)dt=0$, za $\rho>0$, pa primenom leme Bellmana dokazujemo

da karakteristična funkcija $\mathbb{E}(\exp(i\lambda X(t)))$ teži ka $e^{-\lambda^2 t/2}$.

Pored toga što svojom strukturom kao martingal, proces $(X(t))$ nalikuje Braunovom kretanju i jednodimenzione raspodele tog procesa teže ka Gausovim merama kada intenzitet α teži ka beskonačnosti.

APPENDIX

A1. Očekivane vrednosti i uslovno očekivanje

Neka je $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ prostor verovatnoća, tj. $\Omega\neq\emptyset$, $\mathcal{F}$ je σ-algebra i $\mathbb{P}$ nenegativna σ-aditivna mera na $\mathcal{F}$, tako da je $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

Slučajna promenljiva (s.p.) je preslikavanje $X:\Omega\to\mathbb{R}$ tako da je za Borelov skup B, $(B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$. Sa $\sigma(X)$ ćemo obeležiti σ-algebru generisanu promenljivom X, $\sigma(X)=(X^{-1}(B):B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Očekivana vrednost se definiše kao $\mathbb{E}(X)=\int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$, ako integral konvergira apsolutno.

Neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra u $\mathcal{F}$ i neka je X integrabilna s.p. Tada je $\mathbb{E}(X\cdot\mathbb{I}(\omega\in G))$ σ-aditivna funkcija skupa na $\mathcal{G}$, apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$, pa na osnovu teoreme Radon-Nikodym-a postoji $\mathcal{G}$-merljiva funkcija $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ tako da za $G\in\mathcal{G}$ važi

$$\mathbb{E}(X\cdot\mathbb{I}(\omega\in G))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\cdot\mathbb{I}(\omega\in G)).$$

$\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ je *uslovno očekivanje* s.p. u odnosu na $\mathcal{G}$.

Ako je $\mathcal{G}=\sigma(Y)$ tada se $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ osnačava kao $\mathbb{E}(X|Y)$ i naziva uslovno očekivanje s.p. X u odnosu na s.p. Y.

A2. Nezavisnost

Neka je $(\mathcal{F}_i:i\in I)$ familija σ-algebri u $\mathcal{F}$. lanovi familije su uzajamno *nezavisni* ako za svako $n\in\mathbb{N}$, $i_1,\dots,i_n$ iz I i $B_j\in\mathcal{F}_{i_j}$ važi

$$\mathbb{P}(B_1\cap\dots\cap B_n)=\mathbb{P}(B_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(B_n).$$

Ako su σ-algebre $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$ generisane s.p. X i Y nezavisne tada kažemo da su X i Y nezavisne i $\mathbb{E}(X|Y)=\mathbb{E}(X)$.

A3. Slučajni proces adaptiran potoku σ-algebri

Neka je $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ rastuća familija σ-algebri u $\mathcal{F}$ neprekidna sdesna, tj $\bigcap(\mathcal{F}_s : s>t)=\mathcal{F}_t$. Ovakva familija se naziva *potok* σ-algebri.

Slučajni proces sa vrednostima u $\mathbb{R}^d$, $(X_t : t\geq 0)$, je *adaptiran* familiji $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ ako je $X_t^{-1}(B)\in\mathcal{F}_t$, za $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proces je *merljiv* ako je $\{(t,\omega) : X_t(\omega)\in B\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{F}$.

A4. Algebra predvidivih skupova

Neka je $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ potok σ-algebri. Na $\mathbb{R}_+\times\Omega$ definišimo familiju skupova $\mathcal{A}=\left\{\{0\}\times F : F\in\mathcal{F}_0\right\}\cup\left\{(s,t]\times F : 0<s\leq t<\infty, F\in\mathcal{F}_s\right\}$ i najmanju σ-algebru $\mathcal{P}$ tako da je $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$; $\mathcal{P}$ se naziva σ-algebra *predvidivih* skupova.

A5. Martingali

Proces $(M_t : t\geq 0)$ se naziva *martingal* (*supermartingal*, *submartingal*) u odnosu na potok $(\mathcal{F}_t : t\geq 0)$ ako je $(X_t : t\geq 0)$ $(\mathcal{F}_t : t\geq 0)$-adaptiran , za $t\geq 0$ X_t je integrabilna s.p. i

$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t)=X_t$, (respektivno $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t)\leq X_t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_t)\geq X_t$).

A6. Doob-Meyerova dekompozicija martingala

Proces $(A_t : t\geq 0)$ ćemo zvati *prirodno rastući integrabilni proces* ako je $(\mathcal{F}_t : t\geq 0)$-adaptiran, $A_0=0$, preslikavanje $t\to A_t$ je neopadajuće , $\mathbb{E}(A_t)<\infty$ i za svaki ograničeni, sdesna neprekidni martingal $(M_t : t\geq 0)$ važi $\mathbb{E}\left\{\int_0^t M_{s-} dA_s\right\} = \mathbb{E}\left\{\int_0^t M_s dA_s\right\}$.

Submartingal $(U_t : t\geq 0)$ je lokalno uniformno integrabilan ako za ograničeni skup I u $\mathbb{R}_+$ važi $\lim_{C\to 0} \sup_{t\in I} \mathbb{E}(|U_t|\cdot \mathbb{I}(|U_t|>C))=0$.

Teorema (Doob-Meyer)

Lokalno uniformno integrabilni submartingal $(U_t : t\geq 0)$ *dopušta jedinstvenu dekompoziciju* $U_t - U_0 = N_t + A_t$, *gde je* $(N_t : t\geq 0)$ *martingal a* $(A_t : t\geq 0)$ *prirodno rastući integrabilni proces.* ∎

Dokaz se može naći u knjizi [I-W].

A7. Kvadratna karakteristika martingala

Ako je $(M_t : t\geq 0)$ kvadratno intregrabilni martingal tada je $(M_t^2 : t\geq 0)$ submartingal, pa na osnovu teoreme Doob-Meyer-a postoji jednoznačna dekompozicija $M_t^2 - M_0^2 = N_t + [M]_t$, gde je $(N_t : t\geq 0)$ martingal a $([M]_t : t\geq 0)$ prirodno rastući integrabilni proces.

Proces $([M]_t, t\geq 0)$ se naziva *kvadratna karakteristika* martingala $(M_t, t\geq 0)$.

Za dva martingala $(M_t : t\geq 0)$ i $(N_t : t\geq 0)$ uzajamna kvadratna karaktristika se definiše kao $\langle M,N\rangle_t = ([M+N]_t - [M-N]_t)/4$.

A8. Braunovo kretanje

Za $t>0$ i $x\in\mathbb{R}^d$ definišimo funkciju $g_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2t})$.

Braunovo kretanje u $\mathbb{R}^d$ se definiše kao neprekidni proces $(B_t : t\geq 0)$ tako da su, za svako $0<t_1<\ldots<t_n$, $B_{t_1} - B_0, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nezavisne s.p. i $\mathbb{P}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in E) = \int_E g_{t_i - t_{i-1}}(x)dx$ za $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Kažemo da je $(B_t: t\geq 0)$ proces sa homogenim, nezavisnim priraštajima.

Mera na $\mathbb{C}(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d)$ definisana Braunovim kretanjem se zove *Vinerova mera*.

Lako se pokazuje da, ako je $(\mathcal{F}_t: t\geq 0)$ generisan prosecom $(B_t: t\geq 0)$, tada je $(B_t: t\geq 0)$ martingal, i $[B]_t = t$.

A9. Puasonov proces

Puasonov proces sa intenzitetom α se definiše kao proces $(N(t), t\geq 0)$ sa vrednostima u $\{0\}\cup\mathbb{N}$ tako da važi
$\mathbb{P}(N(t)=n) = e^{-\alpha t}\cdot\frac{(\alpha)^n}{n!}$.

Može se pokazati da Puasonov proces takođe ima homogene, nezavisne priraštaje.

A10. Doleanova mera na predvidivim skupovima

Ako je $(M_t, t\geq 0)$ L_2-martingal u odnosu na potok $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ tada se na familiji $\mathcal{A}$, (A.4.), može definisati funkcija skupa, takozvana *Doleanova mera*,

$$\lambda_M\Big[(s,t]\times F\Big] = \mathbb{E}\Big\{(M_t - M_s)^2\cdot \mathbb{I}_F\Big\}.$$

Ako je proces $(M_t, t\geq 0)$ sa verovatnoćom 1 neprekidan sa desne strane tada se koristeći teoremu Karateodorija, λ_M može produžiti do σ-aditivne mere na σ-algebri predvidivih skupova, $\mathcal{P}$; [5].

Kako je $\lambda_M\Big[(s,t]\times F\Big] = \mathbb{E}\Big\{(M_t - M_s)^2\cdot \mathbb{I}_F\Big\}$ to na osnovu teoreme Doob-Meyera, (A.6.) sleduje da je

$$\lambda_M\Big[(s,t]\times F\Big] = \mathbb{E}\Big\{([M]_t - [M]_s)\cdot \mathbb{I}_F\Big\}.$$

Ukoliko se λ_M može produžiti na $\mathcal{P}$ tada je za $P\in\mathcal{P}$

$$\lambda_M\left(P\right)=\mathbb{E}\left\{\int_0^\infty \mathbb{I}(\,(t,\omega)\in P)\,d[M]_t\right\}.$$

A11. Stohastički integral u odnosu na kvadratno integrabilni martingal

Neko je $(M_t, t\geq 0)$ L_2-martingal sa sdesna neprekidnim trajektorijama. Definišimo kao $\mathcal{L}^2_M$ funkcije $X:\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}$ merljive u odnosu na algebru predvidivih skupova $\mathcal{P}$ i kvadratno integrabilne u odnosu na Doleanovu meru λ_M, $\mathcal{L}^2_M=L_2(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{P},\lambda_M)$.

Za jednostavnu funkciju X iz $\mathcal{L}^2_M$ tipa

$$X_t(\omega)=c_0\mathbb{I}(t=0)\mathbb{I}(\omega\in F)+\sum_1^n c_i\mathbb{I}(s_i<t\leq t_i)\mathbb{I}(\omega\in F_i),$$

gde je $0<s_1<t_1<\ldots<s_n<t_n$, definišemo *stohasatički integral* kao

$$\int XdM=\sum_1^n c_i\mathbb{I}(\omega\in F_i)(M_{t_i}-M_{s_i}).$$

Tada je $\mathbb{E}\left\{\left(\int XdM\right)^2\right\}=\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X_t(\omega)^2\lambda_M(dt,d\omega).$

Kako su jednostavne funkcije svuda guste u $\mathcal{L}^2_M$ to se koristeći gornju formulu stohastiki integral može definisat na celom prostoru $\mathcal{L}^2_M$.

Ako je X $\mathcal{P}$-merljiv proces tako da za svako $t>0$ $\mathbb{I}(s\leq t)X_s(\omega)$ pripada klasi $\mathcal{L}^2_M$ tada se može definisati integral $Y_t=\int\mathbb{I}_{[0,t]}XdM$ kao centrirani kvadratno integrabilni martingal sa sdesna neprekidnim trajektorijama, i $[Y]_t=\int\mathbb{I}_{[0,t]}X^2d[M]_t$.

A12. Ito-ova formula

Neka je $(M_t, t\geq 0)$ L_2-martingal sa sdesna neprekidnim trajektorijama i f dva puta diferencijabilna funkcija sa ograničenim izvodima. Tada je

$$f(M_t)-f(M_0)=\int_0^t f'(M_s)dM_s+1/2\int_0^t f''(M_{s-})d[M]_s+$$

$$+\sum_{s\leq t}\left[f(M_s)-f(M_{s-})-f'(M_{s-})\Delta M_s\right]$$

gde je $\Delta M_s=M_s-M_{s-}$.

A13. Markovski procesi u $\mathbb{R}^d$. Generatori Markovskih procesa. Difuzije

Proces $(X_t, t\geq 0)$ se naziva *Markovski proces* ako važi

$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\sigma(X_u:u\leq t))=\mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_t)$, za $f\in\mathcal{M}_b$ i $t,s>0$.

Ako je još $\mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_t)=\mathbb{E}(f(X_s)|X_0)$ tada je proces *homogen*.

Familija verovatnoća prelaza $(P_t(x,B):t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d, B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ homogenog Markovskog procesa se definiše kao

$P_t(x,B)=\mathbb{P}(X_t\in B|X_0=x)$,

tako da je za fiksirano t i x $P_t(x,\cdot)$ verovatnosna mera, a za fiksirano t i B $P_t(\cdot,B)$ Borel merljiva funkcija.

Markovsko svojstvo na jeziku verovatnoća prelaza je izraženo u takozvanoj formuli *Čepmen-Kolmogorova*

$P_{t+s}(x,B)=\int P_t(y,B)P_s(x,dy)$.

Verovatnosna mera μ na $\mathbb{R}^d$ se naziva *invarijantna mera* ako

$\mu(B)=\int P_t(x,B)\mu(dx)$ za $t\geq 0$ i $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Ako definišemo familiju operatora na $\mathcal{M}_b$ $(P_t, t\geq 0)$ kao

$P_t f(x)=\mathbb{E}(f(X_t)|X_0=x)=\mathbb{E}_x(f(X_t))$

tada važi $P_t \circ P_s = P_{t+s}$, tj $\langle P_t, t\geq 0\rangle$ je polugrupa operatora.

Polugrupa $\langle P_t, t\geq 0\rangle$ je *Felerovska* ako P_t preslikava $\mathbb{C}_o$ u $\mathbb{C}_o$ za $t\geq 0$ i ako je za $f\in\mathbb{C}_o$ $\lim\limits_{t\to 0}\|P_t f - f\|_{\mathcal{M}_b} = 0$.

Generator, H, Felerovskog procesa se definiše kao

$Dom(H) = \{f\in\mathcal{M}_b : \lim\limits_{t\to 0}(P_t f - f)/t$ postoji$\}$ i $Hf = \lim\limits_{t\to 0}(P_t f - f)/t$.

Interesantno je primetiti da je za $f\in Dom(H)$

$f(X_t) - f(X_0) - \int\limits_0^t Hf(X_s)ds$ martingal.

Difuzni proces se definiše kao Felerovski proces sa neprekidnim trajektorijama čiji generator sadrži u svom demenu definisanosti dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije sa ograničenim nositeljem.

A14. Generatori jako neprekidnih polugrupa ograničenih operatora

Polugrupa $\langle T(t), t\geq 0\rangle$ operatora u Banahovom prostoru $\mathcal{X}$ je *jako neprekidna polugrupa* ($\mathbb{C}_0$-polugrupa) ako je $T(0)=I$ i za svako $x\in\mathcal{X}$ važi $\lim\limits_{t\to 0}\|T(t)x - x\| = 0$. Ako je $\|T(t)\|\leq 1$ tada je $\langle T(t), t\geq 0\rangle$ $\mathbb{C}_0$-polugrupa *kontrakcija*.

Operator $H: Dom(H)\to\mathcal{X}$, $Dom(H)\subseteq\mathcal{X}$, je *zatvoren*, ako je skup $\{(x, Hx) : x\in Dom(H)\}$ zatvoren u $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$.

Rezolventni skup, $\rho(H)$, operatora H se definiše kao skup svih kompleksnih brojeva λ tako da $(\lambda - H)^{-1}$ postoji kao ograničeni operator, a *spektar*, $\sigma(H)$, kao komplement rezolventnog skupa.

Generator, H, polugrupe $\langle T(t), t\geq 0\rangle$ se definiše kao

$Dom(H) = \{x\in\mathcal{X} : \lim\limits_{t\to 0}(T(t)x - x)/t$ postoji$\}$ i $Hx = \lim\limits_{t\to 0}(T(t)x - x)/t$.

Teorema(Hille-Yosida)

Linearni operator H je generator $\mathbb{C}_0$-polugrupe kontrakcija na $\mathcal{H}$ ako i samo ako :

(i) H je zatvoren operatop i $\overline{Dom(H)}=\mathcal{H}$;

(ii) rezolventni skup $\rho(H)$ sadrži $(0,\infty)$ i za $\lambda>0$ $\|(\lambda-H)^{-1}\|\leq\lambda^{-1}$. ■

Operator $\mathcal{R}_\lambda=(\lambda-H)^{-1}$ se naziva *rezolventni operator* i može se lako pokazati da je $\mathcal{R}_\lambda=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt$.

A15. Košijev problem

Neka je H linearni operator na Banahovom prostoru $\mathcal{H}$, $Dom(H)\subseteq\mathcal{H}$.

Košijev problem : naći funkciju $f:\mathbb{R}_+\to\mathcal{H}$ tako da je f jako neprekidna za $t\geq0$, jako diferencijabilna za $t>0$, da je za $t>0$ $f(t)\in Dom(H)$ tako da važi

$$\frac{d}{dt}f(t)=Hf(t),\quad t>0 \text{ i } f(0)=x.$$

Ako je H generator $\mathbb{C}_0$-polugrupe kontrakcija tada je za $x\in Dom(H)$ funkcija $f(t)=T(t)x$ jedinstveno ograničeno rešenje Košijevog problema.

A16. Samokonjugovani operatori. Spektralna teorema

Operator H u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je *simetričan* ako je $\overline{Dom(H)}=\mathcal{H}$ i za $x,y\in Dom(H)$ $\left(x\,|\,Hy\right)_{\mathcal{H}}=\left(Hx\,|\,y\right)_{\mathcal{H}}$.

Konjugovani operator simetričnog operatora H se defininiše kao $Dom(H^*)=\{y\in\mathcal{H}:(\exists z\in\mathcal{H})(\forall x\in Dom(H))(\left(y\,|\,Hx\right)_{\mathcal{H}}=\left(z\,|\,x\right)_{\mathcal{H}})\}$ i $H^*y=z$.

Simetrični operator je *samokonjugovan* ako je $H^*=H$.

Sada ćemo iskazati takozvanu spektralnu teoremu, uzimajući njenu formulaciju u terminima operatora množenja, [14].

Spektralna teorema.

Neka je H samokonjugovani operator u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, $Dom(H)\subseteq\mathcal{H}$.

Tada postoji merljiv prostor $(M,\mathcal{F},\mu)$ sa konačnom merom μ, unitarni operator $U:\mathcal{H}\to L_2(M,\mu)$ i $\mathcal{F}$-merljiva realna funkcija F na M tako da važi:

(i) $f\in Dom(H) \Leftrightarrow (F\cdot Uf)\in L_2(M,\mu)$

(ii) $f\in Dom(H) \Rightarrow Hf=U^{-1}(F\cdot Uf)$. ■

Familija ortogonalnih projektora asocirana operatoru H se sada definiše kao $E(A)f=U^{-1}(\mathbb{I}(F\in A)\cdot Uf)$, $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Spektar operatora H je jednak spektru operatora množenja funkcijom F u $L_2(M,\mu)$, pa je

$\sigma(H)=\{\lambda\in\mathbb{R}:(\forall\varepsilon\geq0)(\mu\{m\in M:|F(m)-\lambda|<\varepsilon\}>0)\}$,

a čisto diskretni spektar, tj. skup svojstvenih vrednosti operatora H $\sigma_p(H)=\{\lambda\in\mathbb{R}:\mu\{m\in M:F(m)=\lambda\}>0\}$.

A17. Hilbet-šmitovi operatori

Ograničeni operator H na Hilberovom prostoru $\mathcal{H}$ se naziva *Hilbert-Šmitov operator* ako za neku ortonormiranu bazu (e_n) važi

$$Tr(H^*H)=\sum_n \left(He_n|He_n\right)_{\mathcal{H}}<\infty.$$

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da neki operator bude Hilbert-šmitov u nekom L_2 prostoru, [14].

Teorema

Neka je $(M,\mathcal{F},\mu)$ merljiv prostor i $\mathcal{H}=L_2(M,\mu)$. Tada je $H\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Hilbert-Šmitov operator ako i samo ako postoji $K\in L_2(M\times M,\mu\otimes\mu)$ tako *da je* $Hf(x)=\int K(x,y)f(y)\mu(dy)$ *i* $Tr(H^{*}H)=\int |K(x,y)|^{2}\mu(dy)\mu(dx)$. ∎

Hilbert-Šmitov operator je kompaktan, pa mu je spektar čisto diskretan i sastoji se od niza svojstvenih vrednosti koje teže nuli.

A18. Operatori sa kompaktnom rezolventom

Samokonjugovani operator H na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je ograničen odozdo ako postoji konstanta c tako da za $x\in Dom(H)$ $\left(x|Hx\right)_{\mathcal{H}}\geq c\left(x|x\right)_{\mathcal{H}}$; ako je $c=0$ pada je H *pozitivan*.

Teorema([14])

Neka je H *odozdo ograničen operator. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(i) za neko $\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda-H)^{-1}$ *je kompaktan operator;*

(ii) postoji ortonormiran bazis u $Dom(H)$, (e_n) *tako da je*

$He_n=\lambda_n e_n$ *i* $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_n\to\infty$. ∎

REFERENCE.

[1] S.Albeverio, R.Hoegh Krohn, L.Streit:
Energy forms, Hamiltonians and distorted Brownian motion.
J.Math.Phys. 18(1977), 907

[2] S.Albeverio, F.Gesztesy, W.Karwowsky, L.Streit
On the connection between Schrödinger and Dirichlet forms.
J.Math.Phys. 26(1985), 2546

[3] Ph.Blanchard, Ph.Combe, M.Sirugue, M.Sirugue-Collin
Probabilistic solution of Dirac equation.
Preprint BiBios Mai 85/44.

[4] N.Bouleau, F.Hirsch
Sur des proprietes du flot d'une equation differentielle stochastique.
C.R.Acad.Sci. Paris, t.306, Serie I, 1988.

[5] K.L.Chung, R.J.Williams
Introduction to stochastic integration.
Birkhäuser, 1983.

[6] W.Feller
An introduction to probability theory and its application.

[7] M.Fukushima
Dirichlet forms and Markov processes.

North-Holland/Kodansha, 1980.

[8] B.Gaveau, T.Jacobson, M.Kac, L.S.Schulman
Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion.
Phys.Rev.Lett., Vol.53, No.5, 1984.

[9] I.I.Gihman, A.V.Skorohod
Stohastičeskie differencial'n'ie uravnenija.
Naukova Dumka, Kiev 1968.

[10] I.I.Gihman, A.V.Skorohod
Teorija slučajnyh processov.
Tom. III
Nauka, Moskva, 1975.

[11] S.Kusuoka, D.Stroock
Applications of Malliavin calculus.
Part I.
Taniguchi Symp. SA
Katata 1982.

[12] P.Malliavin
Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators.
Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq.
Kyoto 1976.

[13] D.Pantić
Stochastic calculus on distorted Brownian motion.
J.Math.Phys. 1(1988), 207

[14] M.Reed, .Simon
Methods of modern mathematical physics.
I. Functional analisys.

IV. Analysis of operators.
Academic Press 1978.

[15] L.C.G.Rogers
Smooth transition densities for one-dimensional diffusions.
Bull.Lond.Math.Soc.17(1985), 157

[16] B.Simon
Schrödinger semigroups.
Bull.Amer.Math.Soc. 7(1982), 447

[17] A.V.Skorohod
Stohastičeskie uravnenija dlja složn'ih sistem.
Nauka, moskva 1983.

[18] D.Stroock
Topics in stochastic differential equations.
Tata Inst. of Fund. Res.
Bombay 1982.

[19] L.Streit
Energy forms: Schrödinger theory, Processes.
Phys.Rep. 77(1981), 36

[20] A.Ju.Veretennikov
Verojatnostnyj podhod k gipoellipticnosti.
Uspehi Mat. Nauk. 3(1983),113

[21] M.Zakai
The Malliavin calculus.
Acta Appl. Math. Vol.3, No2, 1985.

[22] N.Wiener
Generalized harmonic analysis.
Acta. Math. 58(1930), 119.