

Математички факултет
Универзитет у Београду



Скупови и комбинаторика у основној школи – дигитални наставни материјали

мастер рад

Ментор

проф. др Небојша Икодиновић

Студент

Ружица Радовић

1118/2015

Београд,

2016.

МЕНТОР:

проф. др Небојша Икодиновић

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Мирослав Марић

др Славко Моцоња

Апстракт:

У раду се анализирају циљеви и задаци наставних садржаја тема Скупови и Комбинаторика која се обрађује у основној школи. Такође, разматра се улога информационих технологија у наставним активностима чијом се употребом омогућава лакше разумевање наставних јединица и математичких особина и односа. Коришћењем модерних технологија у настави може се постићи виши степен интеракције ученика и наставног материјала. Интерактивност може бити омогућена визуелизацијом математичких објеката. Тако формирано знање може бити дуготрајније, а стечено разумевање математичких односа објеката се лакше преноси из нижих у више разреде. Тренутно не постоје интерактивни материјали на српском језику за наведене наставне теме.

Садржај

Увод.....	5
1. Значај математике и наставне теме Скупови и Елементарна комбинаторика.....	7
1.1. Математика у основној школи.....	8
1.2. Циљеви и задаци наставе математике.....	9
1.3. Наставни садржај теме Скупови.....	10
1.4. Наставни садржај теме Елементарна комбинаторика.....	12
2. Развој информационо комуникационих технологија.....	13
2.1. Модерне технологије у образовању.....	13
2.2. Информационо комуникационе технологије у настави математике.....	14
2.3. Смернице за унапређење улоге информационо-комуникационих технологија у образовању.....	16
2.4. Активности ГеоГебра Центра у Београду.....	18
3. Дигитални наставни материјали „Скупови“.....	21
3.1. Циљ креираних материјала.....	22
3.2. Садржај и структура дигиталних наставних материјала.....	23
3.3. Основни елементи дигиталних материјала „Скупови“.....	29
3.4. Интерактивност и динамичност наставних материјала.....	31
4. Опис коришћених алата и карактеристичних конструкција.....	33
4.1. Платформа еЗбирка.....	33
4.2. Платформа Завршни испит.....	36
4.3. Програмски пакет ГеоГебра.....	38
4.4. Опис израда карактеристичних конструкција.....	40
4.4.1. Интерактивност задатака.....	40
4.4.2. Конструкције у програмском пакету ГеоГебра.....	43
5. Пример методичке припреме часа за извођење наставе у дигиталном кабинету.....	45
6. Закључак.....	57
7. Литература.....	58

Увод

Развој информационог друштва намеће потребу да се процес интеграције информационо - комуникационих технологија (ИКТ) у наставни процес интензивира. Прописани наставни планови дозвољавају флексибилност избора наставних метода и средстава. Наставници су подстакнути да смисленом употребом дигиталних материјала осавремене наставу, кад год је то оправдано и потребно. Дидактичко – методичке иновације уз примену новина у наставној технологији би требало да резултира подизању квалитета наставе и процеса усвајања знања. Комбинацијом иновативних наставних модела и нових образовних технологија у настави се креира окружење које може омогућити већу мотивисаност и ангажованост ученика, коришћење различитих извора знања, развој функционалних способности ученика, и повећање исхода учења.

Осавремењавање наставног процеса је један од предуслова за боље образовање. У нашим школа још увек је доминантан фронтални начин рада. Због тога, овај рад има за циљ да допринос развоју интерактивних наставних материјала из наставних тема Скупови и Елементарна комбинаторика у основношколском образовању. Рад ће се бавити и пратичној примени дигиталних материјала у настави математике.

У првом поглављу је описан значај математике, као наставног предмета и као науке. Представљена је улога математике у образовању и наглашена је неопходност усвајања математичких знања. Математика је јасно одређена садржајима, циљевима и задацима који су дати одговарајућим наставним програмима. Такође, дати су детаљни прикази наставних тема Скупови и Елементарне комбинаторике.

Друго поглавље је посвећено ИКТ, њиховом утицају и развоју. Приказани су фактори који подстичу и условљавају имплементацију дигиталних материјала и образовних технологија у наставни процес, а специјално у настави математике. Такође, представљене су смернице за унапређење улоге ИКТ у образовању, као и институционални оквир употребе ИКТ у настави. Приказане су активности ГеоГебра Центра у Београду и дат је приказ неких до сада креираних дигиталних материја.

У трећем поглављу су представљени дигитални наставни материјали „Скупови“. Наставни материјал је намењен ученицима и наставницима, налази се јавно доступан на адреси <http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041>. Приказан је циљ креирања материјала, њихов садржај, структура, основни елементи и истакнуте су особине интерактивности и динамичности наставних материјала.

У четвртом поглављу је описан скуп коришћених алата и карактеристичних функција. Представљени су коришћени програми (ГеоГebra), платформе (еЗбирка и Завршни испит) и функције (JavaScript) и начини на који се њихове могућности користе за креирање дигиталних материјала. Како се овакав принцип израде дигиталних материја може користити и на другим наставним областима, па чак и другим предметима, ово поглавље наставницима може послужити као упутство за креирање својих дигиталних материјала.

У петом поглављу су приказани примери методичке припреме часа за извођење наставе у дигиталном кабинету. Додатно је наглашено да само промена наставног средства не имплицира позитивне едукативне исходе, већ једино унапред планирана и организована примена ИКТ може дати позитивне резултате који се тичу мотивације ученика, повећања знања и позитивног односа према учењу.

1. Значај математике и наставне теме Скупови и Елементарна комбинаторика

Први сусрет са математичким и проблемским активностима човек доживљава већ током првих сазнања о себи и свету око себе, пре него што се у школи упозна са наставним предметом математика. Почети развоја математичког мишљења настају са првим контактом са предметима у свом окружењу [1]. Дете почиње да уочава, описује, упоређује, пребројава, групише, разврстава и означава симболима. Том приликом долази се до развоја мисаоних способности чиме се олакшава решавање проблема у разним животним ситуацијама, па самим тим и упоређивање начина решавања проблема као и упоређивања резултата [2].

Резоновање и логичко закључивање су од фундаменталног значаја за разумевање математичких законитости и особина. Ученицима је потребно доста времена да би користили математику као алат, односно као један од начина за разумевање света око њих [3]. Приликом решавања различитих проблема потребно је много искуства које се мора стицати постепено, чиме се постиже способност конструисања правих начина решавања проблема, као и добре процене којом могу доћи до тачног решења.

Обогаћујући математички речник ученик напредује, па самим тим тако развија и унапређује начин размишљања о решавању проблема. Осим тога, сама успешност решавања математичког или било ког другог проблема у великој мери је повезана са развојем и ширењем комуникационих вештина и способност резоновања.

Мисаона, вербална и практична активност има важну улогу у процесу развијања основних математичких појмова. Разни практични проблеми се могу решити и превазићи применом математичких активности па зато ученике треба подстицати и охрабривати да буду креативни и истрајни чиме се постиже обогачивање и развој интелекта сваког ученика [3].

1.1. Математика у основној школи

У основној школи математика као наставни предмет има велики значај за сваког ученика. Не само да доприноси развоју интелекта, логичког размишљања и креативности, математика је од централног значаја за живот и рад у модерном друштву [4]. Наставни планови и програми имају за циљ стварања сета знања и вештина које су применљиве за разумевање основа економије, технологије, бизниса, финансија и различитих области информационих технологија.

Смит у извештају о настави математике у Великој Британији наглашава неопходност учења математике на свим нивоима образовања. У истом извештају се истиче потреба за повећањем броја часова и обима наставних планова и програма у циљу развоја целокупног друштва [5]. Овакви и слични извештаји се могу наћи у многим стратегијама развоја образовања широм света. На пример, наводи из истраживања из Америке, Аустралије и Кине, редом:

- Шта математичко знање чини централним предметом у образовању? Као што је Галилеј истакао: Природа може бити разумљива само ономе ко зна језик којим је она писана, а тај језик је математика. Математика је начин да ученици спознају свет око њих [6].
- Успешно разумевање математике формира основе за изучавање многих дисциплина и за њихову примену. Математичка писменост представља пут интерпретације свакодневних и практичних ситуација. Она чини основу за доношење многобројних и свакодневних одлука [7].
- Професор Фан за знање и разумевање математике наводи да је то изнад свега, ствар културе. Наводећи разлике Кинеског образовног процеса, истиче да у Кини родитељи знају да је математика основни предмет у школама, да се у модерном друштву очекује да свако разуме математику иако то значи пуно одрицања, учења и тешког рада [8].

Математика је јасно одређена садржајима, циљевима и задацима који су дати одговарајућим наставним програмима. Кроз садржаје који се изучавају треба да буду остварени постављени циљеви и задаци. Њихово остваривање помоћи ће у свестраном развоју личности ученика. О значају математике током основношколског образовања говори и број наставних часова током образовног процеса ученика.

1.2. Циљеви и задаци наставе математике

Да би се успешно формирао скуп математичких знања и вештина код ученика током образовног процеса и како би ученици развили логичко резоновање и математичко мишљење формирају се циљеви и задаци наставе математике. Завод за унапређивање образовања и васпитања у оквиру припреме планова и програма за наставни предмет математика у основном образовању истиче циљеве и задатке наставе [9].

Циљ наставе математике у основној школи јесте стварање математички писменог, компетентног појединца који је способан да математику користи у свакодневном животу [10]. Односно, код ученика треба да се развије:

- способност за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе,
- скуп знања за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; усвајање елементарних математичких знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву;
- ментална способност за формирање научног погледа на свет и свестран развој личности ученика.

Задацима наставе математике се описују очекивања знања, вештине и разумевања које ученици треба да стекну током образовног процеса. Осим материјалних задатака, дефинишу се функционални (који обухватају развој способности мишљења, закључивања и уопштавања) и васпитни задаци наставе [10]. Односно, задаци наставе математике јесу:

- стицање знања неопходних за разумевање квантитативних и просторних односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу;
- стицање основне математичке културе потребне за откривање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање), за успешно настављање образовања и укључивање у рад;
- развијање ученикове способности посматрања, опажања и логичког, критичког, аналитичког и апстрактног мишљења;
- развијање културних, радних, етичких и естетских навика ученика, као и математичке радозналости;
- стицање способности изражавања математичким језиком, јасност и прецизност изражавања у писменом и усменом облику;
- усвајање основних чињеница о скуповима, релацијама и пресликавањима;
- савлађивање основних операција с природним, целим, рационалним и реалним бројевима, као и усвајање основних својстава тих операција;
- упознавање најважнијих геометријских објеката: линија, фигура и тела, и разумевање њихових узајамних односа;
- оспособљавање ученика за прецизност у мерењу, цртању и геометријским конструкцијама;
- припрема ученика за разумевање одговарајућих садржаја природних и техничких наука;
- изграђивање позитивних особина ученикове личности, као што су: систематичност, упорност, тачност, уредност, објективност, самоконтрола и смисао за самостални рад;
- стицање навика и умешности у коришћењу разноврсних извора знања.

1.3. Наставни садржај теме Скупови

Наставна тема Скупови се први пут у образовном процесу ученика обрађује у петом разреду. Формирање основних појмова скупова и операција заснива се на игри и

практичној активности ученика (преко конкретних примера). Издвајањем скупа елемената са заједничком особином ученицима се приближава појам припадности. Затим се скупови графички представљају помоћу Венових дијаграма. Дефинишу се и приказују скупови са различитим и скупови са истим бројем елемената. На изабраним примерима треба представити употребу речи: сваки, неки, или, и, не, следи. При раду с дијаграмима ове речи ће се везивати за скуповне операције и релације [10]. Дефинишу се скуповне операције унија, пресек и разлика.

Због лакшег планирања наставе, за тему Скупови Завод за унапређивање образовања и васпитања је у оквиру Наставног програма за пети разред основног образовања и васпитања дао оријентациони предлог броја часова: укупан број часова за тему Скупови је 12, при чему је предложено да 7 часова буду часови обраде, 4 часа је препоручено за понављање и увежбавање, док је један час предвиђен за проверу знања [9].

Табела 1. Предлог плана и програма за наставну тему скупови

	НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА	ТИП ЧАСА	ОБЛИК РАДА
1	Скуп, обележавање скупа, елементи скупа	обрада	фронтални, индивидуални
2	Венов дијаграм и задавање скупа	обрада	фронтални, индивидуални
3	Празан скуп. Једнакост скупова. Број елемената скупа	обрада	фронтални, индивидуални
4	Увод у скупове	вежбање	индивидуални, рад у паровима
5	Подскуп	обрада	фронтални, индивидуални
6	Скупови	вежбање	индивидуални
7	Пресек скупова	обрада	фронтални, индивидуални
8	Унија скупова	обрада	индивидуални и фронтални
9	Разлика скупова	обрада	фронтални, индивидуални
10	Пресек, унија и разлика скупова	утврђивање	индивидуални и фронтални
11	Скупови	вежбање	индивидуални, рад у паровима
12	Скупови	провера знања	индивидуални

Значај теме Скупови јесте развој појма скупа као најопштији у односу на друге појмове математике, што доприноси изграђивању математичког језика и уноси прецизност у изражавању.

1.4. Наставни садржај теме Елементарна комбинаторика

Основни појмови елементарне комбинаторике се у настави срећу у многим земљама. У нашој земљи се такође спроводе различита истраживања са циљем увођења елемената комбинаторике, вероватноће и статистике у млађе разреде основне школе. Наставне теме Елементарне комбинаторике нема у Наставном програму за пети разред основног образовања, који је прописан од стране Завода за унапређивање образовања и васпитања (наставна тема се појављује у додатној настави у седмом разреду основне школе) [9].

Професорка Јевремовић за комбинаторику наводи да је то област математике која се среће у свакодневном животу, па је увођење комбинаторике у наставу с једне стране не само потпуно природно, већ је једно од најефикаснијих средстава за развијање креативности [11]. Може се рећи да се комбинаторика бави пребројавањем елемената коначних скупова као и одређивањем бројем начина да се ти елементи групишу.

При увођењу елемената комбинаторике у наставу млађих разреда треба правити разлику између научног и наставног аспекта. Она садржи елементе игре, па је зато ученицима у основној школи занимљива. А теме задатака, због области, се могу једноставно повезати са стварним животом и реалном применом.

У оквиру дигиталних материјала овог рада, разматрају се, приказују и ученицима представљају основни принципи елементарне комбинаторике.

2. Развој информационо комуникационих технологија

Током последње деценије технологија и модерни уређаји (рачунари, телефони и таблети) постају неодвојиви део свакодневног живота. Ти модерни уређаји су постали уобичајено средство комуникације и размене информација. Са развојем структуре и доступности интернета развио се и потпуно нови дигитални свет. Ученици нису изостали из свеобухватног утицаја технологија, како у школи (нови предмети, нове компетенције и развој нових способности), тако и код куће (различити видови мултимедије, употреба друштвене мреже, учење и нови ниво забаве).

Образовне институције широм света разматрају потенцијал који технологије могу имати у процесу усвајања знања, развијају стандарде и процедуре нове образовне праксе и покушавају да што успешније технологију унесу у наставу [12].

2.1. Модерне технологије у образовању

Веома често, када се говори о примени технологија у настави и процесу усвајања знања, као аргументи за њихову употребу истиче се сврсисходност учења које такво образовно окружење доноси. Модерне технологије могу да:

- допринесу развоју ширег спектра компетенција ученика;
- повежу градиво са реалним примерима и применама;
- повећају интерактивност ученика, наставног материјала и наставника;
- формирају динамичке моделе и симулације за интерактивно учење;
- повећају складиштење, убрзају претраживање и прошире доступност информација;
- помогну ученицима да лакше усвајају комплексне идеје [13].

ИКТ као скуп алата имају потенцијал да омогуће наставнику креирање образовног окружења у коме ће ученик бити у центру пажње (енг. learner-centered environments). Бројни су начини и типови тако организоване наставе: настава базирана на решавању

проблема, пројектна настава, симулације, прилагођена упутства и само регулативно учење (енг. problem-based learning, project-based learning, simulations, customized tutorials, peerassisted learning, and self-regulated learning) [14].

Када се говори о интеграцији технологија и учења, потребно је поменути различите препреке које могу утицати како на образовне исходе таквог едукативног процеса, тако и на односе у учионици и став ученика према предмету. Као главне препреке, истраживачи наводе недостатак средстава, недостатак одговарајућих наставних материјала, недостатак знања и вештина наставника, анксиозност ученика. Шта више, успех повезивања технологије и учења зависи од начина и степена решавања уочених проблема, односно зависе од пружене подршке свим учесницима образовног процеса, на свим нивоима. Истраживачи и едукатори се слажу да је интеграција образовних технологија у процес учења комплексан процес и свеобухватан процес и да он не може зависити од појединца, већ мора постојати решеност целокупне јавности и носиоца власт о потребној промени парадигме.

2.2. Информационо комуникационе технологије у настави математике

Математика јесте један од најзахтевнијих, а самим тим и најпроблематичнијих наставних предмета без обзира на ниво образовања у којем се ученици сусрећу са њом. Неопходност познавања математичких принципа, развој дедуктивног начина размишљања и начин решавања проблемских ситуација су неке од кључних компетенција које ученици треба да усвоје током школовања.

Разне студије, још од пре две деценије указују на утицај визуелизације објеката и математичких особина на унапређивање учења математике [15]. Различити облици процедура и дигиталних материјала се користе у савременој настави како би се ученицима помогло да математику не перципирају само као скуп процедура, већ као начин размишљања, истраживања, решавања проблема и постављање питања. Развој мултимедија омогућава висок степен визуелизације, не само у илустративне сврхе, већ као пружање помоћи ученицима у овладавању математичким концептима. Динамичке и

интерактивне презентације математичких објеката, односно аплети, могу помоћи ученицима да истраживањем и померањем објеката уочавају особине и доносе закључке.

Новија истраживања потврђују тренд да ИКТ има позитиван утицај на процес учења, наводећи да је да употреба модерних дидактичких средстава (софтвера, графичких приказа, образовних платформи, симулација и едукативних аплета) не може да замени традиционални начин учења, већ може и треба да га оплемени. На информационо комуникационе технологије треба гледати као на помоћно дидактичко средство и примењивати га у настави сврсисходно, са унапред планираним циљем, обимом и на одговарајући начин. Узимајући у обзир карактеристике ученика који одрастају у 21. веку, наставници треба да разумеју значај интеграције технологије у образовни процес [16].

У многим педагошким истраживањима, која се баве методама учења, се као закључак истиче повећан квалитет стицања знања уколико ученик у процесу учења истовремено гледа, слуша и манипулише, односно ради. Мандић у свом истраживању наводи да су ефекти меморисања наставног материјала већи ако ученик до сазнања долази:

- око 10–15% читањем писаних материјала, слушањем предавања (фронтални облик рада са једносмерном комуникацијом која доминира у нашим школама),
- око 20%, посматрањем,
- око 30–35%, истовременим посматрањем и слушањем,
- око 90%, аудиовизуелна перцепција и моторне активности [17].

Овакви закључци иду у прилог настави математике која је подржана различитим образовним софтверима који пружају могућност истовременог ангажовања различитих начина учења и метода стицања знања. Суштина и предности таквог учења је да циљ наставе није пуко меморисање и репродуковање математичких законитости, особина и односа, већ развој активног учествовања ученика у процесу стицања квалитетног знања. Дигитални наставни материјали својом мултимедијалношћу, функционалностима и новим могућностима превазилазе недостатке уџбеника и додатно мотивишу ученике.

Осим што дигитални наставни материјали могу помоћи ученицима да развију дубље разумевање математичких односа и развој логичких компетенција, они могу помоћи

ученицима у смеру и обиму учења. Како брзина учења математике и напредовање зависе од тренутних способности и знања, образовни софтвери могу да се прилагођавају степену напредовања ученика и да континуираном повратном информацијом која прати активности ученика у раду, стимулише ученика у савладавању предвиђених садржаја. Тако организована настава омогућава да сваки ученик усваја наставни материјал у складу са његовим индивидуалним способностима и напредује према сопственим вештинама и навикама.

Употреба сврсисходних софтвера у настави математике може допринети процесу активног учења и омогућити ученику да експерименталним методама формира нова сазнања, нове начине размишљања и нове углове сагледавања проблема. Кадијевић истиче да употреба адекватних рачунарских метода доприноси разумевању математичких законитости јер смањује време за процедурално учење, а повећава време за концептуално разумевање појмова. Сврсисходност новог дидактичког средства првенствено зависи од предавача, односно од тога како он организује и реализује едукативан процес [16].

Модерне технологије омогућавају развој дигиталних система за подршку учења и стицања вештина, а на државама је одговорност да препознају могућности и да прате промене које информационе технологије доносе. На тај начин би, у складу са њима, обезбедили развој технологија за потребе образовања и донели стратешке документе којима би се омогућила и прописала њихова адекватна употреба. Тиме наставници добијају институционални оквир, инфраструктуру и потребну помоћ за имплементацију дигиталног учења.

2.3. Смернице за унапређење улоге информационо-комуникационих технологија у образовању

Развој метода и облика примене информационо комуникационих технологија у образовни процес на нашим просторима није пратио интезитет којим се то дешавало у развијеним земљама [18]. Подршка која је недостајала наставницима и ученицима је изостајала од државних институција, па су пројекти дигиталног учења у почетку били

независни пројекти наставника и професора који су се добро служили технологијом. Последњих година, захваљујући утицају ИКТ на научне, технолошке и социјалне промене, Влада Републике Србије је препознала потенцијал дигиталног учења и усвојила Дигиталну агенду. Основни циљ ове стратешке агенде јесте постављање основних принципа развоја информационог друштва и дигиталног учења. Поред Дигиталне агенде за Србију (која се састојала из два документа Стратегија развоја Информационог друштва до 2020. године и Стратегија развоја е-комуникација у Србији од 2010. до 2020. године) усвојено је још неколико стратегија и смерница као што је Смернице за унапређивање улоге информационо-комуникационих технологија у образовању.

Ти документи и смернице су донешене у складу са стратегијом Европа 2020, у оквиру које су европске земље донеле националне стратегије којима се промовише примена информационих технологија у различитим областима, па између осталог и образовања. Усвајањем стратегије развоја образовања препознаје се значај развоја нових технологија у циљу унапређења образовног система. Такође, истиче се да образовање треба да буде у служби развоја потенцијала ученика – стваралачких, креативних и радних, како би се обезбедио научни и технолошки развој државе. Према Стратегији образовања у Србији до 2020. године наводе се циљеви осигуравања, стицање неопходних ИКТ знања, вештина код ученика и професионално усавршавање и обука наставника. Такође, обезбеђивање модерне технологије и квалитетне рачунарске инфраструктуре за извођење образовног просеса у школама у Србији.

Национални просветни савет је 2013. године усвојио Смернице за унапређење улоге информационо-комуникационих технологија у образовању, у којима се препознаје да постоји потреба за увођењем наменски дизајнираних програмских платформи система за управљање учењем [19]. У том документу наведене су препоруке да се на нивоу образовних институција и на нивоу наставне праксе:

- промовише хибридни (мешовит, дистрибуиран) модел организације наставе;
- корићење приступа употребе апликација за приступ онлајн садржајима за потребе наставе путем „ pametnih “ телефона у оквиру наставе;
- промовишу савремене методе рада уз употребу ИКТ;

У смерницама се налази велики број података који указују на тренутни степен развоја информационог друштва, модерних технологија и тренутно стање развијености примене ИКТ у васпитно-образовном процесу [19]. Кроз документ се наводе и основни појмови и принципи успешне интеграције ИКТ у образовању, као и улога ИКТ у циљевима и исходима образовања и наглашава се да:

- иако је употреба рачунара и интернета код ученика и наставника велика, употреба савремених технологија у настави је и даље недовољно заступљена;
- повратне информације добијене применом ових решења користимо да направимо план додатног утврђивања градива и тако директно утичемо на повећање квалитета знања;
- применом ових платформи ученик из позиције посматрача добија улогу учесника у настави;
- алати су описани из аспекта доступности, једноставности за коришћење и могућностима које нуде. За сваки од наведених алата приказане су предности и мане.

У Стратегији развоја информационог друштва до 2020. године је наглашено да је потребно истовремено развијати опремљеност школа, укључујући информационо-технолошко опремање и комуникационо повезивање школа, као и предузимати мере да се технолошка основа примени зарад испуњења циља ефективнијег и ефикаснијег образовања [20].

2.4. Активности ГеоГебра Центра у Београду

У Србији постоји ГеоГебра Центар у Београду, основан при Математичком факултету Универзитета у Београду, чија је интернет адреса <http://geogebra.math.rs> (Слика 1.). Циљ ГеоГебра Центра у Београду јесте унапређење наставе математике, стручно усавршавање наставника математике, као и имплементација дидактичког материјала у

настави који је направљен коришћењем ГеоГebra пакета [21]. Сви материјали су доступни путем интернета и слободни за коришћење.

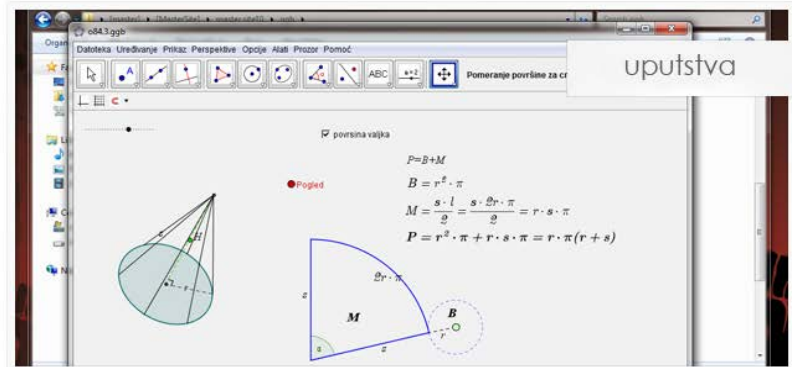
GeoGebra Centar Beograd

Početna Aktivnosti Članovi Materijali Kontakt

GeoGebra Centar Beograd

Podržavamo primenu i proučavamo uticaj primene interaktivnih nastavnih sadržaja izrađenih primenom paketa GeoGebra u procesu nastave matematike.

Aktivnosti



Uputstvo »

Nastavni materijali

Слика 1. Почетна страна веб презентације ГеоГebra Центра у Београду

Активности чланова ГеоГebra Центра се заснивају на пружању помоћи наставницима математике везано за креирање и употребу дигиталних наставних материјала. Односно:

- Обука и подршка садашњих и будућих наставника математике у професионалном развоју.
- Развој образовног софтвера коришћењем ГеоГebra који је намењен свим наставницима и који је јавно доступан.
- Истраживања везана за употребу ГеоГebra у наставном процесу из којих се јасно може видети у којој мери и на који начин коришћење овог софтвера може да помогне наставницима у свакодневном процесу наставе математике, а у циљу лакшег савладавања садржаја плана и програма математике на свим нивоима.
- Сарадња са свим ГеоГebra Институтима у земљи и иностранству у циљу размене идеја, материјала и искустава.

Сви дигитални наставни материјали су доступни путем интернета, на веб презентацији ГеоГебра Центра у Београду и слободни су за коришћење у наставним активностима. Материјали покривају математичко градиво на свим нивоима образовног процеса од основно школског до факултетског градива [22]. Неки од интерактивних наставних материјала су:

- „*Теорија вероватноће*“, у овим материјалима је представљен појам вероватноће за средњу школу. Приказане теме су подељене по поглављима и осим теоријског дела, материјал садржи и задатке. Оба дела су праћена анимацијама у циљу интерактивног приказа теме.
- „*О интегралима*“, у овим материјалима је приказан рад са интегралима, почев од основних дефиниција и теорема до примена интеграла у геометрији и наукама. У раду су налази велики број интерактивних аплета, креираних како би се олакшало разумевање и учење градива из ове области.
- „*Површина геометријских фигура*“, у овим материјалима је објашњен појам површине фигура кроз све разреде основне и средње школе. Материјали су прожети интерактивним материјалима и подељени у разреде у којима се изучавају особине површине.
- „*Извод функције*“, интерактивни наставни материјали су базирани на уџбенику „Анализа са алгебром“ за трећи разред Математичке гимназије.
- „*Визуелни приказ Поенкареовог диск модела*“, у материјалима је дат визуелни приказ основних појмова и релација као и свих аксиома хиперболичке геометрије равни.
- „*Електронске лекције о диференцијланим једначинама*“, у овим материјалима је представљена математичка област диференцијланих једначина визуелизована ГеоГебра аплетима.
- „*Елементарне функције*“, у овим материјалима су представљене елементарне функције са својим својствима, операцијама и начином задавања. Интерактивни аплети омогућавају боље разумевање градива.
- „*Интерактивни курс Више математике*“, у овом материјалима су представљене математичке области из књиге „Елементи више математике“ и

обухватају: комплексне бројеве, полиноме, матрице, векторску алгебру и део аналитичке геометрије.

- „Диференцијални рачун“, у овим материјалима се разматра визуелизација диференцијалног рачуна. У раду су приказане следеће теме: функције једне променљиве, низови, гранична вредност функције, непрекидност функције, изводи и примена извода.
- „Геогебрице“, у овим материјалима се визуелизују почетни математички појмови, као на пример: бројање до 5, бројање до 10, појмови горе, доле, на, иза итд. Материјали су намењени ученицима млађих разреда основне школе.

Мотивација за израду дигиталних материјала „Скупови“, који ће бити приказани у наставку текста, је проистекла из колекције интерактивних материјала који се налазе на сајту ГеоГебра Центра.

Материјали „Скупови“ су креирани по узору на већ постојеће наставне материјале који обрађују друге математичке теме и одржан је принцип непосредне интерактивности. Сматрам да ће овим радом, колекција дигиталних наставних материјала бити увећана, јер тренутно не постоје интерактивни наставни материјали на српском језику за наставне теме Скупови и Увод у елементарну комбинаторику.

3. Дигитални наставни материјали „Скупови“

У овом поглављу је представљен дигитални наставни материјал у коме је обрађен појам скупова током основне школе. Наставни материјали су креирани тако да поштују све принципе дидактичко – методичког рада са ученицима, пратећи структуру наставних часова и процеса учења [24]. Сви садржаји су јавно доступни, слободни за коришћење и налазе се на адреси <http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041/materijali.html>.

Креирани наставни материјали „Скупови“ нуде широк спектар могућности које могу бити значајне за подизање квалитета наставе и образовања ученика. Имајући у виду мотивациону улогу дигиталних дидактичких средстава, њихова употреба на наставним

часовима доприноси темељнијем и дубљем разумевању математичког садржаја. Овакав ефекат материјала се остварује и при самосталном раду ученика - учењу код куће, обнављању знања или проверавању градива. Имплементацијом интерактивних аплета, динамичких задатака и омогућеном интеракцијом ученика и наставног материјала настава се прилагођава „потребама“ ученика, у смислу да ученик може учити истражујући интерактивне додатке материјала без обзира на време и место учења.

3.1. Циљ креираних материјала

Повећање непосредне активности ученика током учења и задржавање пажње током усвајања градива је основни циљ креирања интерактивне презентације наставне теме „Скупови“. Електронски материјали су креирани тако да се ученичка активност темељи на принципима учења путем истраживања која је омогућена високим степеном интеракције ученика са наставним материјалима и повратним информацијама које ученицима пружају додатну потребну помоћ током процеса учења (Слика 2.).

Почетна страница Методичка упутства за наставнике Динамички наставни материјали

ЕЛЕМЕНТИ СКУПА

❓ Можеш ли да наведеш примере неких скупова?

Научили смо да скуп формирамо групишући све чланове, водећи рачуна о заједничкој особини или својству које имају сви чланови тог скупа. Групишимо скуп биљака, који је приказан на аплету, на основу задатих особина скупова.

Скуп црвеног воћа

Скуп дрвећа

Скуп цвећа

За сваки објекат који је у неком скупу кажемо да припада том скупу и да је елемент тог скупа. У супротном кажемо да он не припада том скупу, то јест да није његов елемент.

САДРЖАЈ

- Појам скупа
 - Елементи скупа
 - Венов дијаграм
 - Скупови са много елемената и скуп без елемената
 - Подскуп скупа
 - Једнакост скупа
 - Задаци за вежбање
- Операције са скуповима
 - Пресек скупова
 - Унија скупова
 - Разлика скупова
 - Изрази са више скуповних операција
 - Шта смо научили у овој области
 - Занимљивост
 - Задаци за вежбање
 - Задаци за додатан рад
- Увод у комбинаторику
 - Основни принцип
 - Задаци за вежбање

Слика 2. Изглед почетне странице дигиталних материјала „Скупови“

Осавремењавање едукативног процеса не имплицира употребу рачунара у процесу стицања знања, већ промену парадигме презентовања и усвајања знања. Развој наставних средстава и модерних технологија омогућили су развој наставних метода које подстичу индивидуализацију наставног процеса, прилагођавање учења сваком ученику, његовим могућностима, темпу учења и способностима [24]. У тако промењеној парадигми наставе у коме је ученик у центру пажње, основни задатак наставника јесте да припремом одговарајућих наставних материјала омогући ученицима да самостално истражују математичке законитости, доносе закључке и потврђују математичка својства објеката и појмова. Тако улога наставника бива померена са места на коме је он „предавач“ ка позицији у којој наставник треба да контролише, усмерава и проверава учење. Поштујући наведене принципе припремљен је интерактиван дигитални наставни материјал „Скупови“. Односно, применом ових дигиталних материјала у едукативном процесу добијамо покушај увођења мешаног учења (Blended learning) где ученици могу учити код куће, делимично уз употребу ИКТ, а у школи дискутују, расправљају и анализирају.

Организација материјала је таква да ученици, наставници и родитељи могу читати материјал и истраживати математичке законитости у различитим окружењима за учење (школа, кућа, дигитални кабинети...). Материјали су намењени ученицима и наставницима за рад у школи, као допуна учењу код куће и такође, намењени су амбициозним родитељима за рад са својом децом. Материјали могу бити коришћени за одржавање часова математике у дигиталним кабинетима или као допуна стандардним часовима. На овај начин су ученици добили још једно наставно средство које им може помоћи да боље и квалитетније разумеју математичко градиво.

3.2. Садржај и структура дигиталних наставних материјала

Наставни материјал је у облику интернет презентације са додатним елементима, и као такав погодан је за коришћење на свим модерним уређајима – рачунарима, таблетима и телефонима. Интерактивност и динамичност наставних материјала је омогућена коришћењем ГеоГебра аплета који су дизајнирани и креирани тако да ученици могу да уче

истраживајући. Померајући и посматрајући објекте који се налазе на аплетима ученици могу да уочавају промене особина и својства објеката и да на тај начин доносе закључке и формирају знање. Испис математичког текста и формула је омогућен коришћењем MatJax библиотеке. Додатна интерактивност задатака је постигнута JavaScript функцијама. Све графичке презентације математичких објеката и особина, креиране су у програму ГеоГебра.

Такође, у материјалима се повезују и користе додатне наставне платформе - еЗбирка и Завршни Испит, као помоћ при организацији наставе, као комуникационе платформе и као платформе за испитивање знања. Коришћени су већ постојећи наставни материјали који се налазе на поменутих платформама и креирани су нови материјали како би се функционалност платформа прилагодио наставној теми и посебним наставним јединицама у којима се поменуте платформе користе.

Интерактивни наставни материјали „Скупови“ су креирани тако да прате национални план и програм прописан од стране Министарства за просвету, науку и технолошки развој, за наставну тему скупови за пети разред основне школе који је допуњен појмовима елементарне комбинаторике. Материјал је подељен на наставне јединице у којима се обрађују одређена својства, особине и операције математичких појмова или у којима се проверавају стечена знања.

Табела 2. Садржај наставних материјала „Скупови“

	Наслов наставне јединице	Опис наставне јединице
1.	Појам скупа	Усвајање математичког појма скупа.
2.	Елементи скупа	Значење речи „припада“ и „не припада“, као и одговарајућих симбола: $\{$, $\}$, \in , \notin . Формирање скупа на основу заједничких својстава неких објеката.
3.	Венов дијаграм	Усвајање графичког представљања скупа помоћу Веновог дијаграма. Записивање скупа коришћењем скуповне

		симболике.
4.	Скупови са много елемената и скуп без елемената	Усвајање појма празног скупа и одговарајуће ознаке.
5.	Подскуп скупа	Усвајање појма подскупа и одговарајућих симбола $\subset, \not\subset$.
6.	Једнакост скупа	Уочавање једнаких скупова на основу издвајања њихових елемената.
7.	Задачи за вежбање	Утврђивање усвојених појмова везаних за скупове: Венев дијаграм, елемент скупа, празан скуп, једнакост скупова. Стицање навике коришћења скуповне симболике: $\{, \}, \in, \notin, \emptyset$.
8.	Операције са скуповима	Утврђивање пређеног градива из скупова, а нарочито појма подскупа. Подсећање на различите начине задавања скупа и Венев дијаграм
9.	Пресек скупова	Усвајање појма пресека два скупа као скуповне операције и схватање смисла везника „и“. Правилно извођење операције пресека скупова. Коришћење симбола \cap .
10.	Унија скупова	Усвајање појма уније два скупа као скуповне операције и схватање смисла везника „или“. Коришћење симбола \cup . Уочавање и разумевање разлике између операција пресека и уније скупова.
11.	Разлика скупова	Усвајање појма разлике два скупа као

		<p>скуповне операције и схватање смисла везника „не“.</p> <p>Коришћење симбола \setminus.</p> <p>Уочавање и разумевање разлике између операција пресека, уније и разлике скупова.</p> <p>Коришћење научених скуповних операција када су задата три скупа.</p>
12.	Изрази са више скуповних операција	Утврђивање појмова пресек, унија, разлика, подскуп, елемент, припада, не припада.
13.	Шта смо научили у овој области	Обнова елементарног знања о скуповима.
14.	Занимљивост	Упознавање са појмом бесконачности и појмом парадокса.
15.	Задаци за вежбање	Утврђивање појмова пресек, унија, разлика, подскуп, елемент, припада, не припада. Извођење скуповних операција у текстуалним задацима.
16.	Задаци за додатан рад	Додатно утврђивање претходно усвојених појмова.
17.	Увод у комбинаторику	Усвајање појма комбинаторике.
18.	Основни принцип	Усвајање пребројавања користећи дрво. Усвајање основног правила пребројавања-правило производа.
19.	Задаци за вежбање	Утврђивање основних појмова везаних за комбинаторику.

		Представљање комбинаторних проблема графички или на други начин, пребројавање и записивање могућих распореда објеката.
--	--	--

Лекције почињу увођењем нових особина појмова или подсећањем изученог градива са претходних часова (Слика 3.). Након тога следи главни део часа, где је интерактивним аплетима или динамичним задацима представљено ново градиво које ученици треба да усвоје, науче и разумеју. У оквиру главног дела наставне јединице налазе се задаци и питања која треба да провере степен усвојености знања и разумевања градива. Завршни део наставних јединица представља део који се односи на понављање наученог градива и задавања задатака за домаћи рад.

За све време прављења дигиталних наставних материјала „Скупови“ поштован је принцип да се наставно градиво излаже од једноставнијих појмова ка тежим. Такође, компликован и тежак математички појам или особина је визуализована постављањем аплета који га илуструје или чије особине испитује.

The image shows a digital lesson page for 'Sets' with several red arrows pointing to specific features:

- Наслов лекције** (Lesson Title): Points to the title 'ELEMENTI SKUPA'.
- Интерактивни аплети** (Interactive Widgets): Points to the three empty circles for set representation.
- Поднаслов у лекцији** (Section Title): Points to the 'Знакомски скупови' (Notation of Sets) section.
- Дефиниције које се уводе у садашњој лекцији** (Definitions introduced in this lesson): Points to the definition of a set: 'Skup je 2 elemente skupa A u krugu oznako 2x A. Skupu "1" pripada "je element" или "припада" Pостоје број 3 и два elementa skupa A, oznako oznakom 3 u A. Skupu "U" pripada "ima element" или "ima pripada". Oznaka, kao i Društvo и kao U Društvo'.
- Задаци за домаћи рад** (Homework Tasks): Points to the 'Zanimljivi zadaci' (Interesting tasks) section.
- Навигација кроз наставни материјал** (Navigation through teaching material): Points to the 'САДРЖАЈ' (Table of Contents) list.
- Одговор на задато питање са опширним решењем** (Answer to the given question with a detailed solution): Points to the text 'Skup ima 2 elementa 2, 3, 7, a'.
- Занимљивости које ученике могу заинтересовати а које су везане за лекцију** (Interesting facts that can interest students and are related to the lesson): Points to the text 'Skup je 2 elemente skupa A u krugu oznako 2x A'.
- Питања која испитују колико су ученици savладали градиво** (Questions that test how much students have mastered the material): Points to the text 'Skup je 2 elemente skupa A u krugu oznako 2x A'.
- Интерактивни аплети на којима ученици могу померати елементе и долазити до решења** (Interactive widgets where students can move elements and reach a solution): Points to the set representation circles and the 'Povezani zadaci' (Related tasks) section.

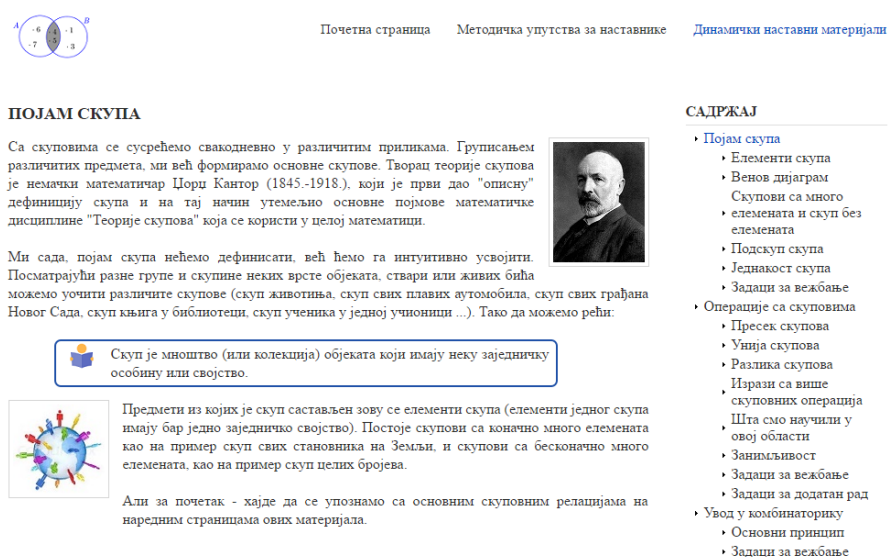
Слика 3: Приказ структуре једне странице интерактивних наставних материјала „Скупови“

Предности употребе овако креираних дигиталних материјала на наставним часовима се огледају у томе што се лако уводе, брзо и једноставно примењују, не захтевају посебну претходну припрему ученика, нису захтевне по питању технолошких ресурса потребних за извођење наставе, бесплатна су и наставник има увид у рад ученика и вредновања постигнућа.

3.3. Основни елементи дигиталних материјала „Скупови“

Како би се наставни материјал прилагодио употреби на модерним уређајима и како би се ученицима олакшала навигација кроз наставни садржај коришћен је веома једноставан графички дизајн са израженим елементима наставних јединица (другачија графичка репрезентација дела материјала који се односи на нове дефиниције, појмове, особине, задатке или задужења за домаћи рад). Тако организовано градиво омогућава бољу прегледност и читљивост, без сувишних елемената који могу одвући пажњу ученика.


Свака интернет страница наставних материјала је подељена на два дела (Слика 4.). Леви, главни део, странице представља наставну јединицу која је тренутно отворена. Са десне стране се налази садржај са јасним и концизним насловима наставних јединица који су повезани са осталим лекцијама. Тако је ученику омогућено да буде фокусиран на наставни садржај који тренутно истражује, док је навигација кроз остатак материјала олакшана.



Почетна страница Методичка упутства за наставнике Динамички наставни материјали

ПОЈАМ СКУПА

Са скуповима се сусрећемо свакодневно у различитим приликама. Груписањем различитих предмета, ми већ формирамо основне скупове. Творац теорије скупова је немачки математичар Џорџ Кантор (1845 -1918), који је први дао "описну" дефиницију скупа и на тај начин утемељио основне појмове математичке дисциплине "Теорије скупова" која се користи у целој математици.



Ми сада, појам скупа нећемо дефинисати, већ ћемо га интуитивно усвојити. Посматрајући разне групе и скупоине неких врсте објеката, ствари или живих бића можемо уочити различите скупове (скуп животиња, скуп свих плавих аутомобила, скуп свих грађана Новог Сада, скуп књига у библиотеци, скуп ученика у једној учионици ...). Тако да можемо рећи:

Скуп је мноштво (или колекција) објеката који имају неку заједничку особину или својство.

Предмети из којих је скуп састављен зову се елементи скупа (елементи једног скупа имају бар једно заједничко својство). Постоје скупови са коначно много елемената као на пример скуп свих становника на Земљи, и скупови са бесконачно много елемената, као на пример скуп целих бројева.

Али за почетак - хајде да се упознамо са основним скуповним релацијама на наредним страницама ових материјала.

САДРЖАЈ


- Појам скупа
 - Елементи скупа
 - Венов дијаграм
 - Скупови са много елемената и скуп без елемената
 - Подскуп скупа
 - Једнакост скупа
 - Задаши за вежбање
- Операције са скуповима
 - Пресек скупова
 - Унија скупова
 - Разлика скупова
 - Изрази са више скуповних операција
 - Шта смо научили у овој области
 - Занимљивост
 - Задаши за вежбање
 - Задаши за додатан рад
- Увод у комбинаторику
 - Основни принцип
 - Задаши за вежбање

Слика 4. Приказ станице наставних материјала

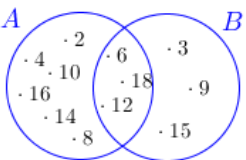
У главном делу наставних материјала, поред математичког текста, слика и задатака налазе се различити графички елементи који ученицима помажу да се крећу кроз градиво и наставни материјал.

Део наставне јединице у оквиру којег је постављено питање ученику је означено са *зеленим знаком питања*. Оваква графичка репрезентација треба да асоцира ученика да детаљније обрати пажњу на тај део текста и покуша да одговори на постављени захтев.

Када се питање налази у делу наставне јединице која ученика уводи у ново наставно градиво тада се ученику нуди помоћ. Кликом на *жуту сијалицу* ученик може проверити свој одговор упоређујући га са тачним одговором на постављено питање (Слика 5.).


 Скуп A чине сви парни бројеви мањи од 20, а скуп B сви бројеви мањи од 19 које можемо поделити са 3 без остатка. Одреди елементе $A \cup B$.


Као и на претходном часу, запишимо скупе на основу тога како су задати. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ и $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Нацртајмо Венов дијаграм, одредимо њихов пресек $A \cap B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$ и запишимо елементе.




Слика 5. Приказ питања са детаљним одговором

Посебним оквирима и елементима су обележени делови текста у којима се уводе нови појмови, дефинишу математички односи и истичу занимљивости које ученицима могу приказати значај усвајања знања (Слика 6.). Тако је ученицима скренута пажња на посебно битан део градива који ће им бити потребан за израду и решавање задатака и разумевање наредног градива.

 Поред бројева, слова и других објеката, елементи скупа могу бити и други скупови. У том случају скуп који се налази у посматраном скупу посматраћемо као један елемент скупа. Ако је $A = \{1, 2, 3, \{2, 4\}\}$, онда је $n(A) = 4$, јер су елементи скупа A бројеви 1, 2, 3 и скуп $\{2, 4\}$. Ако је $B = \{\{3\}, \{1\}, \{5, 8\}\}$, онда је $n(B) = 3$, јер су елементи скупа B скупови $\{3\}$, $\{1\}$ и $\{5, 8\}$.

 Скупе означавамо великим латиничним словима A, B, C, D, \dots . Елементе скупа пишемо унутар витичастих заграда $\{ \}$ и одвајамо их запетом.

 Пошто је 2 елемент скупа A то краће пишемо $2 \in A$. Ознаку " \in " читамо "је елемент" или "припада". Пошто број 3 није елемент скупа A , можемо написати $3 \notin A$. Ознаку " \notin " читамо "није елемент" или "не припада". Такође, липа \in Дрвеће и зец \notin Дрвеће.

Слика 6. Приказ делова текста у којима се уводе нови појмови, дефинишу математички односи и истичу занимљивости

На крају сваке наставе јединице налази се списак обавеза за ученике за рад код куће. На овај начин се проверава стечено знање, увежбавају вештине или се ученици припремају за следеће часове. Задатак за домаћи рад је означен црвеном кућицом и списком обавеза за ученике (Слика 7.).



Слика 7. Приказ дела градива у којем се наводе задаци ученика за домаћи рад

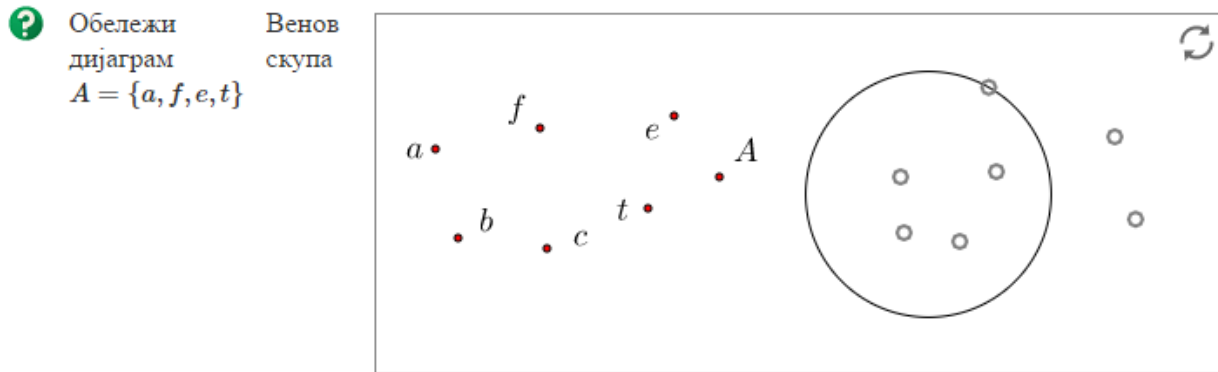
3.4. Интерактивност и динамичност наставних материјала

Употребом модерних алата може се постићи виши степен интеракције ученика и наставног садржаја (интерактивност омогућена визуелизацијом математичких објеката, особина и својства). Тако формирано знање је дуготрајније, а стечено разумевање математичких односа објеката се лакше преноси у више разреде. ГеоГебра аплети који су уграђени у дигиталне наставне материјале помажу ученицима да савладају одређене математичке законитости, да провере разумевање материјала и да примене стечена знања (Слика 8.).

? Повежи користећи скуповне операције означене делове Венових дијаграма.

Област I	<input type="radio"/>	$A \cap B \cap C$
Област II	<input type="radio"/>	$(B \cap C) \setminus A$
Област III	<input type="radio"/>	$A \setminus (B \cup C)$
Област IV	<input type="radio"/>	$(A \cap B) \setminus C$
Област V	<input type="radio"/>	$C \setminus (B \cup A)$
Област VI	<input type="radio"/>	$B \setminus (A \cup C)$
Област VII	<input type="radio"/>	$(A \cap C) \setminus B$

Слика 8. Интерактивни ГеоГебра аплет



Слика 9. Интерактивни аплет у оквиру ког ученици вежбају обележавање скупа

Пре сваког аплета налази се математички текст који ученици треба да искористе како би извели одређене активности на аплету (означавајући елементе, померајући објекте, повезујући особине) или је представљен проблем за чије решавање ученици користе аплет као алат (Слика 9.).

Групишимо скуп биљака, који је приказан на аплету, на основу задатих особина скупа.



Слика 10. Приказ ГеоГебра аплета са повратном информацијом

Битна особина која карактерише функционалност учења уз помоћ аплета јесте повратна информација након извршених активности ученика. На слици 10. је приказано обавештење ученицима који су успешно решили задатак, односно груписали скуп биљака на основу њихових особина.

4. Опис коришћених алата и карактеристичних конструкција

Ова секција има за циљ да додатно представи коришћене програме (ГеоГебра), платформе (еЗбирка и Завршни испит) и функције (JavaScript) и начине на који се њихове функционалности могу употребити за креирање дигиталних материјала. Биће приказане могућности које су коришћене за израду дигиталних наставних материјала „Скупови“ и карактеристичне конструкције. Како се овакав принцип израде дигиталних материјала може користити и на другим наставним областима па чак у другим предметима, ова секција наставницима може послужити као упутство за креирање својих дигиталних материјала.

4.1. Платформа еЗбирка

Платформа еЗбирка, која се налази на адреси <http://ezbirka.math.rs/>, представља електронску збирку задатака из математике за више разреде основне школе (Слика 11.). Платформа и наставни материјали су развијени у оквиру пројекта кога су подржали Министарство спољне и унутрашње трговине и телекомуникација, Друштво математичара Србије, Математички факултет Универзитета у Београду и чланови ГеоГебра Центра у Београду. О томе колико је платформа употребљавана од стране ученика и наставника говори податак да је за две године, колико је платформа доступна, њу посетило више од 900.000 посетилаца. Користи се у школама широм Србије, али и у земљама у региону (Црна Гора, Хрватска, Босна и Херцеговина и Македонија).

Платформа еЗбирка служи као помоћно средство за извођење наставе у дигиталним кабинетима, организовање тестова и задавање домаћих задатака. Заснована је на бесплатним технологијама и алатима као што су: HTML5, PHP, MySQL, MatJax, ГеоГебра, и функционише на свим модерним уређајим (рачунарима, телефонима и таблетима).

Платформа омогућава праћење рада ученика при изради домаћих задатака. Коришћењем платформе у ову сврху елиминисан је проблем преписивања тачних одговора

између ученика. Наиме, платформа за сваког ученика генерише јединствени домаћи задатак – наставну јединицу, тако да су задаци различити, али испитују исте компетенције и ниво знања ученика. Како су задаци различити, али опет слични, ученици не могу међусобно преписивати али могу једни другима помагати, односно објашњавати како да задатке реше. На овај начин, велики проблем преписивања домаћих задатака се трансформише у вршњачко подучавање, чиме проблем не само да је решен већ решење представља одличан модел сарадње ученика и учења ван школе.



Слика 11. Приказ наставничког административног дела платформе еЗбирка

Велики избор задатака, око 13.000, је груписан по разредима и наставним областима па је на тај начин олакшано претраживање и њихова употреба. Такође, од задатака су креиране наставне јединице које одговарају наставном плану и програму предмета математика. Начин употребе платформе еЗбирка у наставном процесу зависи од могућности и планова наставника, а платформа нуди неколико предефинисаних начина употребе:

1. *Коришћење већ постојећих наставних јединица:*

- списак свих наставних јединица;
- садржај наставне јединице;
- обавештавање ученика.

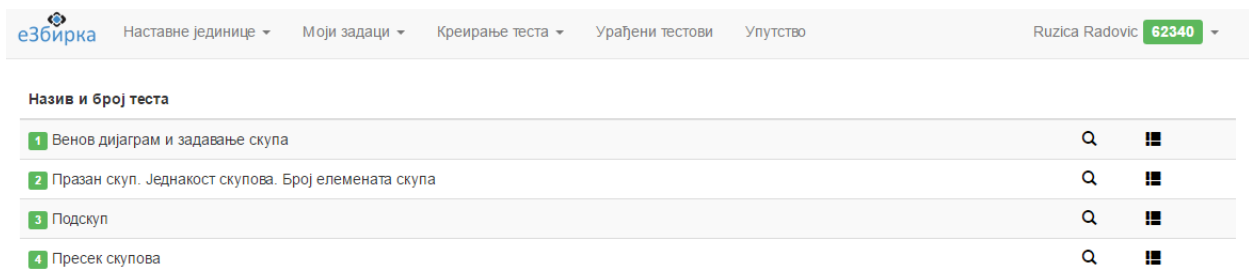
2. *Израда тестова од задатака који постоје на платформи:*

- креирање теста;
- одабир задатака;
- направљени тест добија свој број;
- обавештавање ученика.

3. *Израда тестова од задатака које наставници желе да унесу:*

- додај задатак;
- креирање теста;
- одабир задатака;
- направљени тест добија свој број;
- обавештавање ученика.

При изради дигиталних наставних материјала „Скупови“, комбиноване су две методе употребе платоформе. Наиме, искоришћене су већ постојеће наставне јединице са платформе: Венов дијаграм и задавање скупа (рб. 1), Празан скуп. Једнакост скупова. Број елемената скупа (рб. 2), Подскуп (рб. 3) и Пресек скупова (рб. 4), приказане на слици 12.



The screenshot shows the 'eЗбирка' platform interface. At the top, there is a navigation bar with the logo and several menu items: 'Наставне јединице', 'Моји задаци', 'Креирање теста', 'Урађени тестови', and 'Упутство'. On the right side of the navigation bar, the user's name 'Ruzica Radovic' and a green badge with the number '62340' are visible. Below the navigation bar, there is a table titled 'Назив и број теста'. The table contains four rows, each representing a teaching unit. Each row has a green square with a white number (1, 2, 3, 4) on the left, the name of the unit in the middle, a magnifying glass icon on the right, and a small square icon with a grid pattern on the far right.

Назив и број теста			
1	Венов дијаграм и задавање скупа	Q	■
2	Празан скуп. Једнакост скупова. Број елемената скупа	Q	■
3	Подскуп	Q	■
4	Пресек скупова	Q	■

Слика 12. Списак наставних јединица

Такође, како би се могућности платформе прилагодиле свим наставним јединицама креирани су додатни задаци и питања за оне области за које су задаци недостајали (Слика 13.). Од унесених задатака направљени су домаћи задаци: Скупови са много елемената и

скуп без елемената (рб. 2684), Подскуп скупа (рб. 2685), Пресек скупова (рб. 2686), Унија скупова (рб. 2688) и Разлика скупова (рб. 2689).

Назив и број теста				
2684	СКУПОВИ СА МНОГО ЕЛЕМЕНАТА И СКУП БЕЗ ЕЛЕМЕНАТА	Q	☰	✕
2685	ПОДСКУП СКУПА	Q	☰	✕
2686	ПРЕСЕК СКУПОВА	Q	☰	✕
2688	УНИЈА СКУПОВА	Q	☰	✕
2689	РАЗЛИКА СКУПОВА	Q	☰	✕

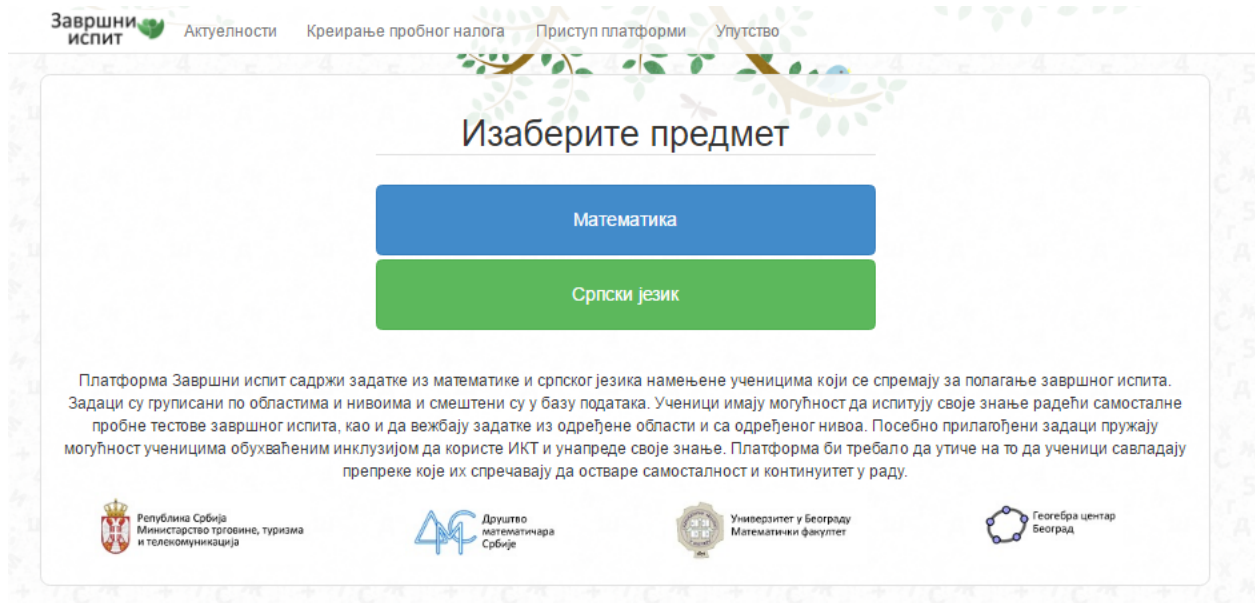
Слика 13. Списак додатно креираних наставних јединица

Када су домаћи задаци припремљени на платформи, редни број сваког од њих је уписан у поље за домаћи задатак на дигиталним наставним материјалима „Скупови“. Тако ученици, док читају материјале „Скупови“ наилазе на информацију о домаћем задатку и пратећи линк долазе на платформу еЗбирка где добијају јединствен скуп од 6 задатака. Када ученици задатке реше, њихова решења ће бити снимљена на платформи и биће на располагању наставнику да њихове одговоре прегледа пре наредног наставног часа. На основу анализе домаћег задатка, наставник је у могућности да припреми план за отклањање евентуалних недостатака и пропуста у знању ученика, већ на првом наредном часу.

4.2. Платформа Завршни испит

Платформа Завршни испит, која се налази на адреси: <http://zavrnsniispit.math.rs/>, се развија и креира у оквиру програма развоја информационог друштва у Републици Србији 2014. године. при Министарству спољне и унутрашње трговине и телекомуникација (Слика 14.). Развија је исти тим институција као и платформу еЗбирка, али са другачијим циљем. Наиме, платформа еЗбирка је била развијена као подршка редовним наставним активностима и као помоћ наставницима за контролу и планирање процеса учења. Платформа Завршни испит има за циљ пружање помоћи ученицима који се спремају за полагање завршног испита и она садржи задатке из математике и српског језика.

Коришћењем ове платформе, ученици имају могућност да провере и унапреде своје знање радећи различите пробне тестове завршног испита, као и да вежбају задатке из тачно одређене области и са тачно одређеног нивоа.



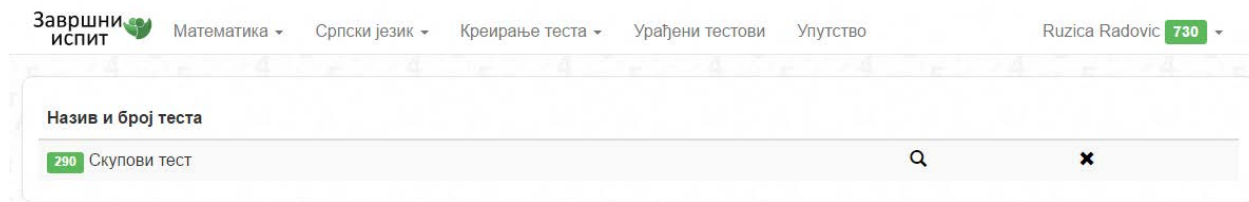
Слика 14. Приказ почетне странице платформе Завршни испит

Платформа Завршни испит омогућава неколико функционалности и начина коришћења у зависности од начина употребе платформе, као и договора ученика и наставника:

1. *Тест наставника*, ученици уносе редни број теста који им је наставник задао. Тако ће ученици радити тест који је наставник претходно креирао.
2. *Прилагођени тест*, ученици ће добити тест са задацима из свих области које се проверавају на завршном испиту, али ће тежина тих задатка, као и начин давања одговора бити прилагођени ученицима који имају одређене препреке у раду.
3. *Стандардни тест*, ученици ће добити задатке који одговарају пробном завршном испиту: укупно двадесет задатака са свих нивоа и области.
4. *Сопствени избор*, ученици могу сами бирати тачно одређене нивое и области градива из којих желе да провере своје знање.

Основна разлика између платформе еЗбирка и Завршни испит, уједно и разлог због ког је употребљена и платформа Завршни испит, је та што платформа омогућава аутоматско прегледање одговора ученика и приказ броја укупних поена које је ученик освојио на тесту. Док платформа еЗбирка, нуди већи степен комуникације између ученика и наставника, помаже наставнику да из решења и коментара ученика уочи и разуме који су његови проблеми и недостаци у знању, платформа не оцењује постигнућа ученика на тесту, не бодује тачне и нетачне одговоре – већ то ради наставник.

Да би се тестирало знање ученика, односно да би ученици након теста имали израчунат број поена и резултате, од претходно унесеног скупа задатака креиран је тест приказан на слици 15: Скупови тест (рб. 290).



Слика 15. Креирани тест за проверу знања ученика на платформи Завршни испит

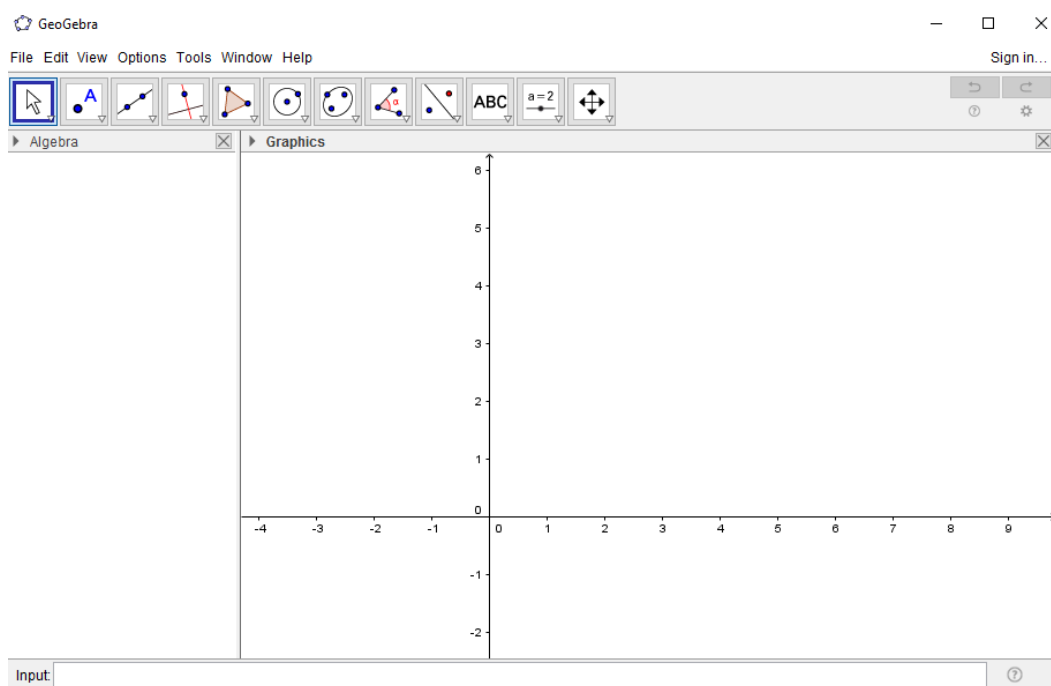
Као и у случају повезивања претходне платформе, редни број теста је исписан на страници у оквиру дигиталних материјала „Скупови“ заједно са везом ка платформи Завршни испит. Када ученици отворе тест и реше сва питања добиће анализу урађеног теста, уједно њихово решење се снима и приказује се наставнику у оквиру његовог административног панела.

4.3. Програмски пакет ГеоГебра

ГеоГебра је бесплатан математички софтвер намењен за учење и извођење наставе математике за све нивое образовања. Програм је креирао Маркус Хохенвартер током мастер студија и наставио са даљим унапређењима током докторских студија. То је софтвер који омогућава једноставно учење и извођење наставе геометрије, алгебре, анализе и статистике. Погодности које ГеоГебру издвајају у односу на друге графичке

програме јесте веза између алгебарске и графичке презентације сваког објекта. Односно, дуалност приказа објеката и њихова динамичка измена директно на екрану или преко Инпут Бар-а (Слика 16.). Такав приступ даје интуитиван приказ веза између објеката, њихових особина и својстава и утицај промене вредности израза на коначно решења, и обратно.

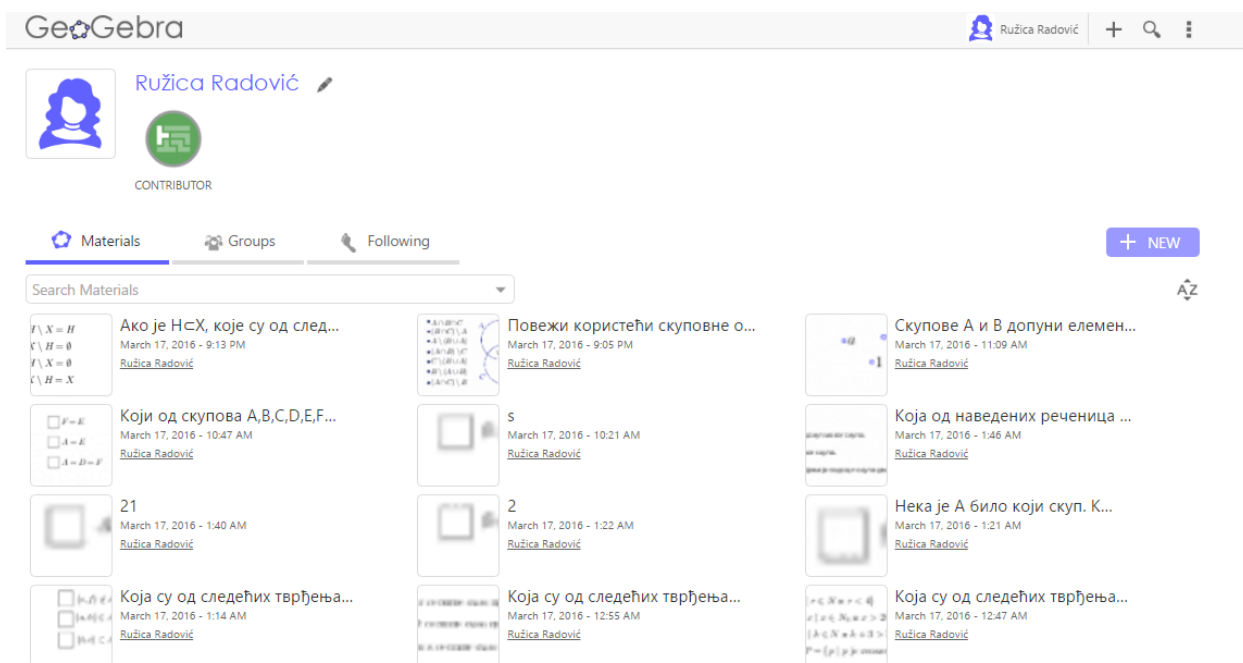
Могу се правити конструкције тачкама, векторима, дужима, линијама, полигонима, функцијама итд. ГеоГебра има особину да може да користи променљиве уместо бројева, векторе и тачке, да проналази изводе и интеграле функција и има команде као што су Роот или Екстремум. Наставници и студенти могу користити ГеоГебру у оквиру израде геометријских конструкција, потврђивања одређених математичких особина, доказивања геометријских теорема или у друге сврхе користећи конструисане аплете.



Слика 16. Изглед ГеоГебра интерфејса

Програм је креиран тако да је омогућен рад на било ком уређају и оперативном систему. Сви садржаји креирани кроз Геоггебру се на једноставан начин могу поделити са другим корисницима путем интерактивних аплета или интернет страница. Додатно, ГеоГебра заједници наставника и ученика нуди могућност преузимања и дељења

материјала на специјализованом порталу www.geogebra.org, где се налази колекција креираних аплета (Слика 17.).



Слика 17. Лични ГеоГebra тјуб са аплетима које је аутор креирао



Када се аплети конструишу, постављају се на личну страницу ГеоГebra Тјуба како би се детаљније уредиле опције за њихово приказивање и коришћење, односно како би се добио HTML изворни код. Тај код омогућава да се аплет угради на интернет страницу и да се приказује као део материјала. Сама интерактивност аплета зависи од начина конструкције и планираних активности учења.

4.4. Опис израда карактеристичних конструкција



4.4.1. Интерактивност задатака

За постизање динамичности HTML странице коришћен је Јаваскрипт, који је написан управо у циљу постизања интерактивности веб страница и задатака које ученици истражују. На тај начин ученици „остварују комуникацију“ између задатака и делова

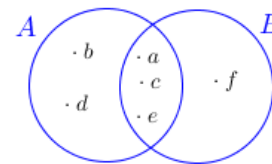
материјала. Интерактивност која је постигнута даје на значају дигиталним наставним материјалима „Скупови“ јер она чини разлику између класичног и овог наставног материјала.

а)  Дати су скупови $A = \{a, b, c, d, e\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$, $B \setminus A = \{f\}$. Одреди елементе скупа B 

 **Задатак за домаћи рад**
Домаћи задатак бр 2689 на платформи еЗбирка .

б)  Дати су скупови $A = \{a, b, c, d, e\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$, $B \setminus A = \{f\}$. Одреди елементе скупа B 

Како бисмо решили задатака, нацртајмо Венов дијаграм. Попунимо прво поље $B \setminus A$ са елементом $\{f\}$, затим $A \setminus B$ са елементима $\{b, d\}$. Да би скуп A био комплетан недостају елементи $\{a, c, e\}$ који се морају наћи у $A \cap B$. Сада, са Веновог дијаграма можемо прочитати да је $B = \{a, c, e, f\}$



 **Задатак за домаћи рад**
Домаћи задатак бр 2689 на платформи еЗбирка .

Слика 18. Приказ питања и одговора, пре (а) и након (б) активирања скривеног садржаја

Интерактивност задатака представљена на слици 18. показује скривени текст, односно решење проблема. Овакву помоћ при изради задатака и решавању проблема ученици могу да користе како би проверили да ли су на правом путу ка добијању решења, да ли је њихово решење тачно или да добију смернице уколико задатак не умеју да реше. Интерактивност је постигнута употребом Јаваскрипт функција које омогућавају сакривање дела текста:

```

1 <script>
2 $(function () {
3     // сви елементи чији id почиње са text су сакривени.
4     $("#id^=text").hide();
5
6     $(".button").click(function () {
7         // претражују се елементи чији је id једнак text +
8         // вредност елемента којег је корисник кликнуо.
9         $("#text" + $(this).data("rel")).toggle();
10    });
11 });
12 </script>

```

Слика 19. Приказ функција које омогућавају сакривање текста

А затим је математички текст исписан тако да су на део текста који је сакривен примењене Јаваскрипт функције:

```

1 <article>
2 <p>
3     <!-- дугме које приказује сакривени текст -->
4     <div class="button" data-rel="8">  </div>
5     <!-- текст задатка -->
6     Дати су скупови  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $A \setminus B = \{b, d\}$ ,  $B \setminus A = \{f\}$ . Одреди елементе скупа  $B$ .
7 </p>
8 <p>
9     <!-- секција сакривеног текста, која као и дугме означава исти
10    задатак број 8. Тиме је омогућено присуство више сакривених садржаја
11    на страници -->
12    <div id="text8" class="resenje"> 
13    Како бисмо решили задатака, нацртајмо Венов дијаграм. Попунимо прво
14    поље  $B \setminus A$  са елементом  $\{f\}$ , затим  $A \setminus B$  са
15    елементима  $\{b, d\}$ . Да би скуп  $A \setminus B$  био комплетан недостају
16    елементи  $\{a, c, e\}$  који се морају наћи у  $A \cap B$ . Сада, са
17    Веновог дијаграма можемо прочитати да је  $B = \{a, c, e, f\}$ 
18 </div>
19 </p>
20 </article>

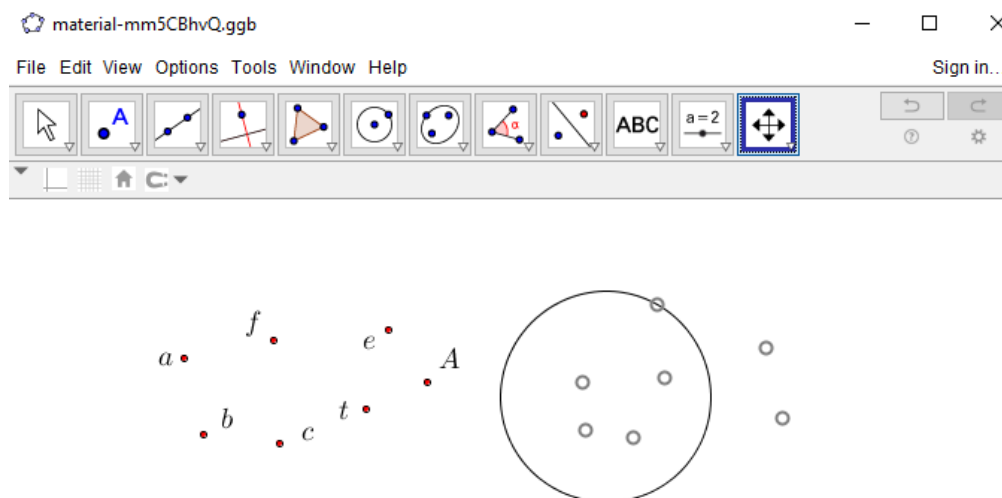
```

Слика 20. Приказ текста и начин употребе наведене функције

На овај начин су исписани сви задаци који имају написана решења. Вредности **data-rel** поља које представља дугме за приказ решења `<div class="button" data-rel="8">` и поља **id** секције за решење задатка `<div id="text8" class="resenje">` морају бити исте. На тај начин се дефинише које дугме приказује које решење, односно сакривени текст.

4.4.2. Конструкције у програмском пакету ГеоГебра

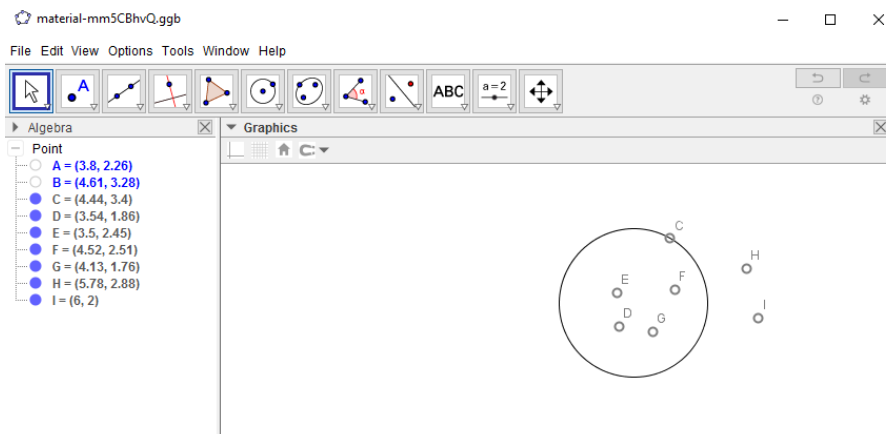
У овом делу рада ће детаљно бити представљен начин креирања једног од аплета на коме ученици треба да вежбају обележавање Веновог дијаграма.



Слика 21. Изглед конструкције

Почетна идеја јесте да при читавању аплета буду видљиви елементи Веновог дијаграма који су распоређени без икаквог реда. Ученик ће, померајући елементе скупа, ознаку скупа и елементе који му не припадају, уколико скуп правилно обележи, добити обавештење.

Користећи основне алате ГеоГебре, конструисати круг $s(A, AB)$, затим тачке E, D, G и F у унутрашњости круга, тачку C на кружници и тачке H и I ван круга. Уредити њихов визуелни приказ, тако што се у опцијама могу склонити њихове ознаке, променити величину и стил тачака које их представљају.



Слика 22. Почетни корак констукције

Унети тачке J, K, L, M, N, O и P, и њихове ознаке које су типа текстуална поља редом A, b, c, f, a, t и e. У опцијама текстуалних поља „везати“ њихове локације за тачке које представљају. Сакрити старе ознаке тачака и променити њихову величину и боју, тако да их ученици могу принети у означена поља у и око круга.

Како би завршили конструкцију остало је да се испрограмира појављивање обавештења да је Венеов дијаграм исправно попуњен. У ту сврху треба мерити одређена растојања између тачака које престављају ознаке елемената и места на коме оне треба да се налазе:

$b = \text{Segment}[N, A],$

$d = \text{Segment}[O, A],$

$e = \text{Segment}[M, A],$

$f = \text{Segment}[P, A],$

$g = \text{Segment}[J, C],$

$h = \text{Segment}[L, I],$

$i = \text{Segment}[K, I],$

$j = \text{Segment}[L, H]$ и

$k = \text{Segment}[K, H].$

За услов приказивања текста „Браво“ може се користити :

$$(b < 1.3) \wedge (d < 1.3) \wedge (e < 1.3) \wedge (f < 1.3) \wedge (g < 0.2) \wedge ((h < 0.2) \vee (i < 0.2)) \wedge ((j < 0.2) \vee (k < 0.2)),$$

односно може се прихватити да су тачке М, N, O и P на удаљености 1,3 од центра круга, да је тачка J у 0.2 околини тачке C и да постоје две комбинације ређања преостала два елемента који не припадају Венеовом дијаграму. Дакле последњи услов јеста да или је тачка L у 0.2 околини тачке I или је то тачка K и или је тачка L у 0.2 околини тачке H или је то тачка K.

На тај начин се у обзир узимају све тачне могућности обележавања елемената скупа. Постојао је још један начин, а то је да се мере растојања елемената од центра круга, али би онда тачан одговор био приказан и за позиције елемената ван одређених тачака.

5. Пример методичке припреме часа за извођење наставе у дигиталном кабинету

У наставку су дати примери методичке припреме часа за извођење наставе у дигиталном кабинету за наставне јединице Једнакост скупова и Основни принцип елементарне комбинаторике. Час у дигиталном кабинету је прелазак из традиционалног начина едукативног процеса. Већ је у раду наглашено да само промена наставног средства не имплицира позитивне едукативне исходе, већ једино унапред планирана и организована примена ИКТ може дати позитивне резултате који се тичу мотивације ученика, повећања знања и позитивног односа према учењу. Материјали на које се односи приказана припрема јесу лекције дигиталних наставни материјала „Скупови“ са свим функционалностима које они поседују.

Наставна тема: СКУПОВИ

Наставна јединица: Једнакост скупова

Циљ часа: Развијање следећих компетенције код ученика:

- способност да изразе и тумаче чињенице и мисли;

- развијање математичке писмености: усвајање појма једнакост скупова;
- развијање способности за организацију и управљање сопственим учењем;
- подстицање идеја и креативног изражавања;

Тип часа: обрада

Облик рада: фронтални, индивидуални

Метода рада: разговор, рад на динамичким интерактивним материјалима

Наставна средства: динамичким интерактивним материјали, адреса:

http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041/1.5.jednakost_skupa.html

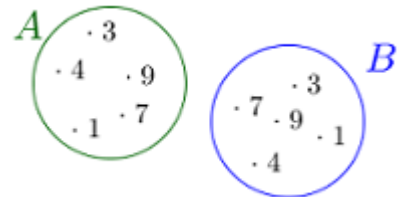
Ток и садржај часа

Уводни део часа (5 минута)

- Усмена провера домаћег задатка.
- Наставник најављује да ћемо овог часа научити како одређујемо да ли су два скупа једнака и обавештава ученике да се данашња лекција налази на адреси:

http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041/1.5.jednakost_skupa.html.

Главни део часа (35 минута)



Један ученик чита први пасус:

Посматрајмо скупове $A = \{3, 1, 5, 9, 7\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Да ли примећујемо неку везу између елемената ова два скупа?

Сваки елемент скупа A јесте елемент и скупа B , то јест $A \subset B$, и сваки елемент скупа B јесте елемент и скупа A , то јест $B \subset A$.

За такве скупове A и B кажемо да су једнаки, и краће пишемо $A=B$.

Ученици записују дефиницију у школску свеску:

Два скупа су једнака ако имају исте елементе, то јест ако је сваки елемент првог скупа елемент и другог скупа, и сваки елемент другог скупа јесте елемент и првог скупа.

Број елемената скупа

-Наставник чита први задатак:

Да ли су скупови $S = \{2, 4, 6\}$ и $P = \{2, 2, 4, 6, 6, 6\}$ једнаки?

Посматрајмо скупове $S = \{2, 4, 6\}$ и $P = \{2, 2, 4, 6, 6, 6\}$. Можемо приметити да је сваки елемент скупа S елемент и скупа P , и сваки елемент скупа P јесте елемент скупа S .

Дакле, закључујемо да је $S = P$.

Само на први поглед може изгледати да скуп P има шест елемената.

За скуп једино је важно да ли неки елемент припада том скупу или не (а не колико је пута записан).

Није битан редослед којим су записани елементи скупа (то значи да је $\{a,b\}=\{b,a\}$), нити да ли је исти елемент записан више пута (то значи $\{a,a\}=\{a\}$).

Наставник објашњава како се одређује број елемената неког скупа:

Број елемената скупа A означавамо са $n(A)$, и то је број различитих елемената тог скупа.

На пример, ако су дати скупови: $A = \{a, a, b, c\}$, $B = \{1, 6, 6, 8\}$ и $C = \{1, a, 6, d\}$ број њихових елемената је: $n(A) = 3$, $n(B) = 3$ и $n(C) = 4$.

Један ученик решава следећи задатак:

Да ли су једнаки скупови $U = \{1, 4\}$, $V = \{1, 1, 1, 1, 4, 4\}$ и $W = \{4, 1\}$? И колико имају елемената?

Скупови јесу једнаки. Наиме, скуп V можемо записати као $V = \{1, 4\}$, односно можемо избацити елементе који се понављају више пута. Скуп W је исти као скуп U и V , само су елементи тог скупа у обрнутом редоследу.

Можемо приметити да сва три скупа имају по три елемената.

Други ученик решава следећи задатак:

Дат је скуп $E = \{5, c, 555, a\}$. Одреди све једночлане подскупове, двочлане подскупове и трочлане подскупове.

-Шта је подскуп неког скупа?

Једночлани скуп је скуп који има само један елемент. Двочлани скуп је скуп који има два елемента, а трочлани скуп је скуп који има три елемента.

Подскупови са 1 елементом: $\{5\}$, $\{c\}$, $\{555\}$ и $\{a\}$.

Подскупови са 2 елемената: $\{5, c\}$, $\{5, 555\}$, $\{5, a\}$, $\{c, 555\}$, $\{c, a\}$ и $\{555, a\}$.

Подскупови са 3 елемената: $\{5, c, 555\}$, $\{5, c, a\}$, $\{c, 555, a\}$ и $\{5, 555, a\}$.

Следећи пример ради ученик:

Два скупа који имају различити број елемената не могу бити једнака. Запиши два скупа која имају исти број елемената, а нису једнака.

Нека та два скупа имају по 3 елемента. Запишимо их: $A = \{1, f, 3\}$ и $B = \{e, 1, 2\}$.

Наставник уз помоћ ученика ради следећи пример:

Који од скупова A, B, C, D, E, F и G имају исти број елемената:

$A = \{a, b, c\}$	<input type="checkbox"/>	F и E	<input type="checkbox"/>	B и G
$B = \emptyset$	<input type="checkbox"/>	A и E	<input type="checkbox"/>	D и G
$C = \{b, b, c\}$	<input type="checkbox"/>	A, D и F	<input type="checkbox"/>	C и F
$D = \{\{a, b, c\}\}$				
$E = \{b, \{b\}, c\}$				
$F = \{a, \{b, c\}\}$				
$G = \{\emptyset\}$				

Најпре можемо одредити број елемената сваког скупа:

$$n(A) = 3,$$

$$n(B) = 0$$

$$n(C) = 2$$

$$n(D) = 1$$

$$n(E) = 3$$

$$n(F) = 2$$

$$n(G) = 1$$

На основу ових података можемо закључити да купови A и E , C и F , и D и G имају исти број елемената.

Сада је потребно штиклирати она поља на аплету поред којих се налазе одговарајући парови скупова.

Ако смо тачно урадили задатак. На аплету ће се појавити информација која потврђује тачност решења: исписаће се „Браво!“.

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \emptyset$$

$$C = \{b, b, c\}$$

$$D = \{\{a, b, c\}\}$$

$$E = \{b, \{b\}, c\}$$

$$F = \{a, \{b, c\}\}$$

$$G = \{\emptyset\}$$

F и E

A и E

A , D и F

B и G

D и G

C и F

Браво!

Наставник чита следећи задатак:

Скупове A , B и C допуни елементима тако да буду једнаки.

$$A = \{3, 6, a, _, _ \}$$

$$B = \{1, _, 6, _, c\}$$

$$C = \{c, _, 1, 3, a\}$$

$\bullet a$ $\circ 3$ $\bullet 6$
 $\bullet 1$ $\bullet c$



Треба распоредити елементе: 1, 3, 6, a и c у неке од датих скупова, тако да сва три скупа буду једнака.

Посматрамо скупове A и B . Шта можемо да приметимо? Да би скупови A и B били једнаки, скупу A морамо додати елементе 1 и c који се налазе у скупу B , а не налазе се у скупу A , а скупу B морамо додати елементе a и 3. Сада су скупови A и B једнаки.

Остаје да скупу C додамо одговарајући елемент како би скупови A , B и C били једнаки. Упоређујући дате скупове можемо да приметимо да скупу C недостаје елемент 6.

Ако смо скуповима доделили одговарајуће елементе, исписаће се порука којом нам је потврђено да је задатак тачан.

$$A = \{3, 6, a, \overset{\circ}{1}, \overset{\circ}{c}\}$$

$$B = \{1, \overset{\circ}{a}, 6, \overset{\circ}{3}, c\}$$

$$C = \{c, \overset{\circ}{6}, 1, 3, a\}$$



Браво!

Завршни део часа (5 минута)

- Наставник прозива ученика и поставља му питање: Шта је подскуп неког скупа? Другом ученику поставља питање: Када су два скупа једнака? Трећем поставља питање: Да ли два скупа могу бити једнака ако имају различит број елемената?
- Задатак за домаћи рад:

Домаћи задатак **бр 2** на платформи еЗбирка.

Наставна тема: Комбинаторика

Наставна јединица: Основни принцип елементарне комбинаторике

Циљ часа:

- подстицање идеја и креативног изражавања;
- упознавање ученика са појмом комбинаторике;
- усвајање основних правила уз помоћ којих се решавају задаци из области комбинаторике-правило пребројавања користећи дрво и правило производа.

Тип часа: обрада

Облик рада: фронтални, индивидуални

Метода рада: разговор, рад на динамичким интерактивним материјалима

Наставна средства: динамички интерактивни материјали, адреса:

http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041/3.1.osnovni_princip.html

Ток и садржај часа

Уводни део часа (5 минута)

- Наставник најављује да ћемо овог часа научити како одређујемо да ли су два скупа једнака и обавештава ученике да се данашња лекција налази на адреси:

http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09041/3.1.osnovni_princip.html

Главни део часа (35 минута)



Када се прави низ одлука, један од

начина да се одреде све могућности је да се испишу све могућности сваке категорије и да се повежу на све могуће начине. Да бисмо узели у обзир све могућности користимо дијаграм Дрво, чија свака колона представља по један избор а сваки избор се састоји од толико елемената колико их у том тренутку у избору има.

- Наставник задаје задатак:

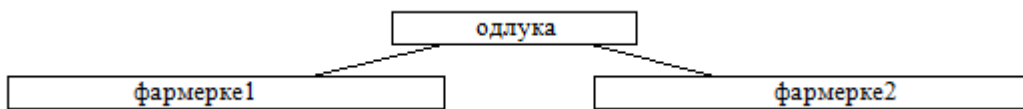
Ако одеш у коповину и купиш два пара фармерки, три мајице и двоје патика, на колико начина можеш да изабереш одевне комбинације (облачећи нове фармерке, мајицу и патике)?

Допушта ученицима да одговоре на питања, а задим на табли црта следећу шему користећи дијаграм Дрво.

Дакле, пошто морамо да се одлучимо за једне фармерке, једну мајицу и једне патике, наш дијаграм ће имати три колоне.

Шта ће се налазити у првој колони? Шта прво бирамо? (Двоумимо се између фармерки).

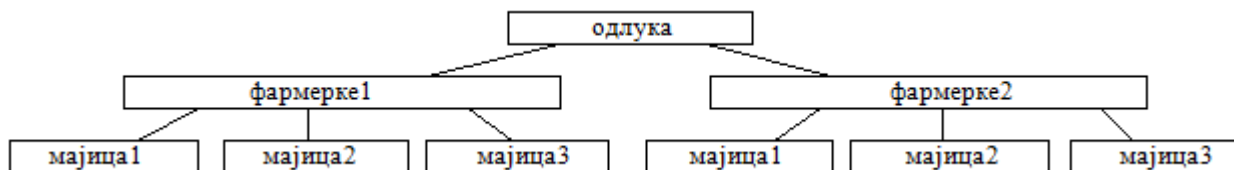
То значи да дијаграм почиње фармеркама (имаћемо две гране јер толико имамо фармерки).



Шта је следећи избор? (Мајице.)

Како треба распоредити мајице? (У избору имамо три мајице. Дакле, уз сваки пар фармерки можемо да узмемо једну од 3 мајице.)

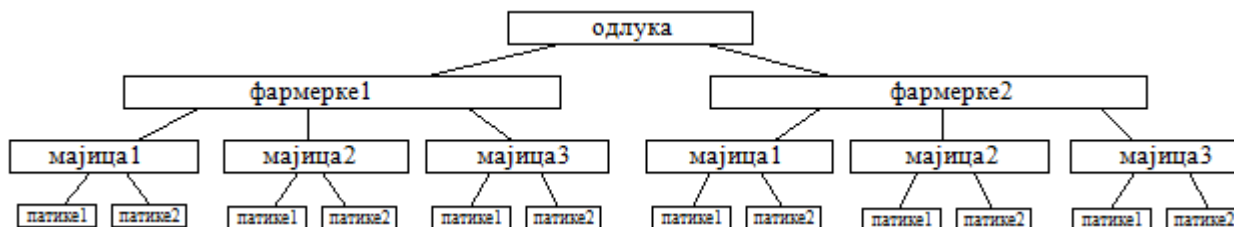
На сваку грану фармерки ћемо додати три гране мајица.



Шта је последњи избор? (патике)

Како треба распоредити патике? Ако смо изабрали неке фармерке и неку мајицу, између колико патика правимо избор? (2 пара патика.)

Дакле, на сваку грану мајица ћемо додати две гране које ће означавати патике.



Овако смо излистали све могуће начине да саставимо данашњи комбинацију облачења. Ако их пребројимо видећемо да смо успели да направимо 12 комбинација.

Ово није једини начин за одређивање свих могућих комбинација.

Други начин за израчунавање укупног броја могућности је множење броја избора сваке одлуке.

Имамо: 2 пара фармерки и 3 мајице и 2 пара патика, па је тада:

$$\begin{array}{l} \text{Број пари фармерки} \rightarrow 2 \\ \text{Број мајица} \rightarrow 3 \\ \text{Број патика} \rightarrow 2 \end{array} \quad 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \quad \begin{array}{l} \text{Број комбинација} \end{array}$$

Тако долазимо до основног принципа елементарне комбинаторике:

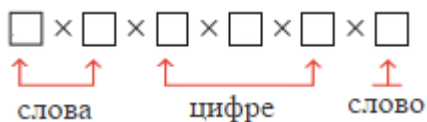
- Укупан број могућих исхода једне серије одлучивања се добија тако што се помножи број могућих избора за сваку категорију.
- Наставник поставља следећи задатак:

Један серијски број се састоји од два велика слова азбуке, три цифре и још једног великог слова азбуке, на пример "ШР322Д" или "КГ413Р". Колико могућих серијских бројева постоје ако:

- Слова и цифре се могу понављати у серијском броју.
- Слова и цифре се не могу понављати у серијском броју.

Решење:

- Пошто постоји шест цифара нацртаћемо шест поља.



Колико имамо различитих могућности за прво поље ако знамо да ту треба уписати слово? (Азбука садржи 30 великих слова.)

Дакле, у прво поље уписујемо број 30.

Колико имамо различитих могућности за друго поље ако знамо да ту треба уписати поново неко слово, уз дозвољено понављање? (Поново имамо 30 могућности.)

Треће, четврто и пето поље су цифре које се смеју понављати.

Колико има цифара? (0, 1, ..., 9, то значи да их има 10.)

Дакле, у поља три, четири и пет уписујемо број 10.

Шесто поље је слово. Колико има различитих могућности ако се слова смеју понављати?
(30)

У шесто поље уписујемо 30.

$$\square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square$$
$$30 \times 30 \times 10 \times 10 \times 10 \times 30 = 27000000$$

слова цифре слово

Дакле, укупан број могућности је 30

$$2300000 \cdot 10 \cdot 30 =$$

б) Поново цртамо шест поља.

$$\square \times \square \times \square \times \square \times \square \times \square$$

слова цифре слово

Знамо да је прво поље слово. Колико могућности имамо? (30)

Друго поље је такође слово, али морамо водити рачуна о томе да се слова не понављају.
Колико имамо могућности за друго поље? (29 могућности, јер смо једно слово искористили за прво поље.)

Следећа три поља су цифре.

Колико имамо могућности за треће поље ако треба уписати једну цифру? (10)

Колико имамо могућности за четврто поље у које треба уписати цифру, при чему морамо да водима рачуна да се цифре не понављају? (9 јер смо једну цифру искористили за треће поље.)

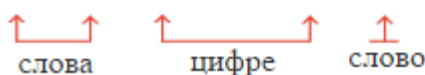
Колико могућности имамо за пето поље? Ту можемо уписати једну цифру, с тим да се

цифре не смеју поновити. (Имамо 8 могућности.)

Шесто поље је слово. Колико могућности имамо ако се слова не смеју понављати?

Треба приметити да смо већ искористили два слова за права два поља, па преостаје 28 могућности.

$$\begin{array}{cccccc} \square & \times & \square & \times & \square & \times & \square & \times & \square & \times & \square \\ \color{red}{30} & \times & \color{red}{29} & \times & \color{red}{10} & \times & \color{red}{9} & \times & \color{red}{8} & \times & \color{red}{28} & = & 17539200 \end{array}$$



Дакле, укупан број могућности је 30

$$\cdot 29 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 28 = 2192400.$$

Завршни део часа (5 минута)

- Задаци за домаћи рад:

1) Једна коцка и један новчић су бачени. Користећи основне принципе елементарне комбинаторике израчунај број могућих исхода. Престави све исходе дијаграмом.

2) Да би се користила банковни аутомат потребно је да корисник унесе четворочифрени ПИН број. Колико је различитих комбинација?

6. Закључак

У овом раду представљен је један вид наставе уз помоћ рачунара, то јест коришћењем ИКТ. Настава математике се најчешће обавља коришћењем најосновнијих наставних средстава, као што су креда, маркер, табла. На квалитет и развој наставе математике у великој мери могу утицати они наставни материјали који уз квалитетну припрему треба да подстакну ученике да развијају своје мисаоне способности чиме се олакшава решавање проблема.

Интерактивни материјал који је приказан у овом раду направљен је са циљем да мотивише ученике да унапређују резоновање и логичко закључивање. То се може постићи једино ако наставник добром организацијом, кроз припремање и планирање наставе прилагоди процес учења индивидуалним могућностима ученика. Представљени материјали у великој мери могу помоћи наставнику да процењује ефикасност учења. Настава у којој ученици не учествују активно скоро да не може довести до реализације неопходног исхода учења које нови наставни програми математике предвиђају.

Неопходно је да наставник који жели да учествује у наставном процесу буде мотивисан и спреман за свакодневно усавшавање како би могао да примењује технологије које се стално развијају.

Добро организовани и припремљени час може у великој мери олакшати наставнику преношење знања ученицима. Интерактивни материјали омогућавају бржи и ефикаснији приказ разних математичких објеката чиме се постиже разбијање монотоности коју са собом носи класични начин предавања.

7. Литература

- [1] Петровић, Н. (1997). Модели диференциране наставе математике и успјех ученика, у: Ђурић, Ђ.: Особине ученика и модели диференциране наставе – чиниоци ефикасности основног образовања 1, Учитељски факултет Сомбор, 109-120.
- [2] Jitendra, A.K., Griffin, C., Deatline-Buchman, A. & Sczesniak, E. (2007). Mathematical word problem-solving in third grade classrooms: lessons learned from design experiments, *The Journal of Educational Research*, 100 (5), 283-302.
- [3] Поповић, Б., Јаблан, Б., Невенић, Ј. (2009). Методика наставе математике и школа по мери детета – нове тенденције; у С. Хрњица (прир.): Школа по мери детета 2. Београд: Save the Children
- [4] Пинтер, Ј., Крекић, В., Ћетковић, А. (2002). Методички приручник из математике за разредну наставу. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
- [5] Smith, A. (2004). *Making Mathematics Count: The report of Professor Adrian Smith's Inquiry into Post-14 Mathematics Education*. London: The Stationery Office. Приступљено 27. августа 2016. на <http://www.mathsinquiry.org.uk/report/MathsInquiryFinalReport.pdf>
- [6] Arnold, D. (2003). *Doing the Math and Making an Impact*. Приступљено 27. августа 2016. на <http://www.ima.umn.edu/newsletters/updates/summer03/>
- [7] Commonwealth of Australia (2009). *Belonging Being & Becoming: The Early Years Framework for Australia*, Commonwealth of Australia.
- [8] Stanford, P. (2014). *Numeracy Campaign: What we can learn from China*. Приступљено 27. августа 2016. на <http://www.telegraph.co.uk/education/maths-reform/9338540/Numeracy-Campaign-What-we-can-learnfrom-China.html>
- [9] Завод за унапређивање образовања и васпитања (2016). Наставни план за други циклус основног образовања и васпитања, Наставни програм за пети разред основног образовања и васпитања, Република Србија.
- [10] Завод за унапређивање образовања и васпитања (2016). Наставни програми за предмет Математика, Република Србија.
- [11] Јевремовић, В. (2010). Како изабрати, решавати и састављати задатке из комбинаторике. Републички семинар 2010. о настави математике и рачунарства у основним и средњим школама. Приступљено 27. августа 2016. на <http://www.dms.rs/DMS/data/seminari/seminar2010/V.Jevremovic.pdf>
- [12] Lawless, K. A., & Pellegrino, J. W. (2007). Professional development in integrating technology into teaching and learning: Knowns, unknowns, and ways to pursue better questions and answers. *Review of Educational Research*, 77, 575-614.
- [13] Ashburn, E. A., & Floden, R. E. (2006). *Meaningful learning using technology: What educators need to know and do*. New York: Teachers College Press.
- [14] Reigeluth, M., Joseph, R. (2002). *Beyond Technology Integration: The Case for Technology Transformation*. *Educational Technology*, 42(4), 9-13.

- [15] Wheatley, G. & Brown, D. (1994) The Construction and Representation of Images in Mathematical Activity. Proceedings of PME 18, 1, P 81.
- [16] Matzen, N., & Edmunds, J. (2007) Technology as a catalyst for change: The role of professional development. Journal of Research on Technology in Education, 29(4), 417-430.
- [17] Мандић Д. (2003): Дидактичко-информатичке иновације у образовању, Медиаграф, Београд.
- [18] Цигурски, С., Симић, С., Марковић, С., Шћепановић, Д., (2013), Истраживање о употреби информационо-комуникационих технологија у школама у Србији, Тим за социјално укључивање и смањење сиромаштва, Србија.
- [19] Национални Просветни Савет Републике Србије (2013). Смернице За Унапређивање Улоге Информационо-Комуникационих Технологија У образовању. Приступљено 27. августа 2016. са http://www.nps.gov.rs/wp-content/uploads/2013/12/SMERNICE_final.pdf
- [20] Влада Републике Србије (2010). Стратегија развоја информационог друштва у Републици Србији до 2020. године, Службеном гласнику Републике Србије 345-4865/2010-01.
- [21] Марић, М., Марић, М., Радовић, С. (2012). Израда и примена дидактичког материјала коришћењем програмског пакета ГеоГебра. Источно Сарајево: Филозофски факултет.
- [22] Веб презентација Геогевра Центра у Београду <http://geogebra.math.rs> .
- [23] Петровић, С., Мартић, Ј., Петкович, М. (1997). “Дидактичко-методички приручник за наставу математике V-VIII разреда основне школе”, Завод за удзбенике и наставна средства, Београд, 1997.
- [24] Радојичић, М., Радовић, С., Марић, М, (2014), Иновативни приступ настави математике применом електронских материјала за учење, 5. Конференција са међународним учешћем Техника и Информатика у образовању, Факултет Техничких Наука, Чачак.