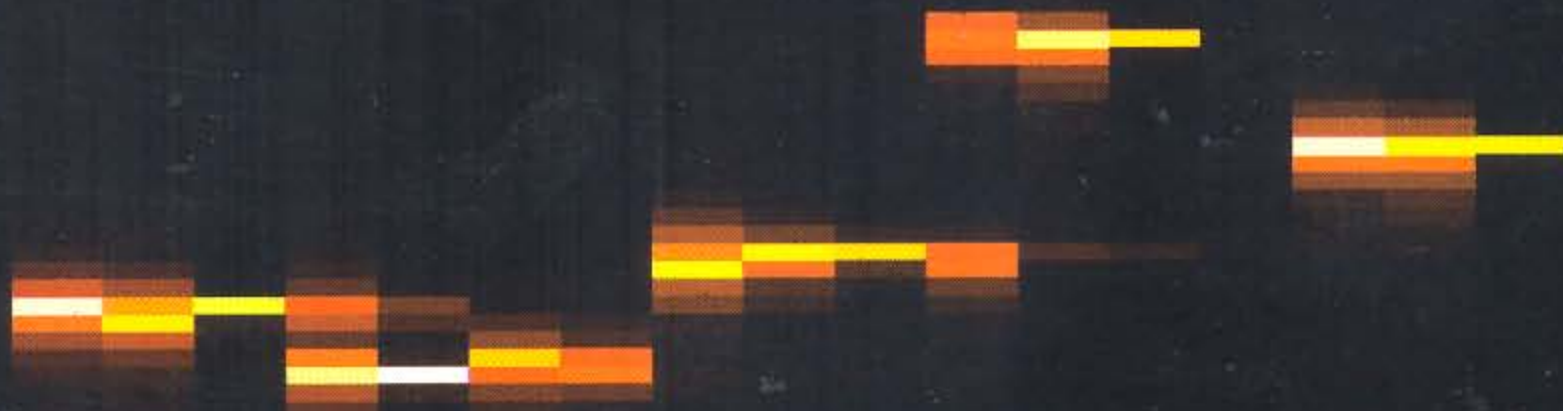


Aleksandar Jovanović

MATEMATIKA U BIOLOGIJI



Matematički fakultet

SADRŽAJ

Predgovor	1
1. Osnove	3
1.1 Tablice istinitosti	4
1.2 Skupovi	5
1.3 Relacije	6
1.4 Funkcije	9
1.5 Neke strukture	11
1.6 Matrice	16
2. Nizovi	21
2.1 Operacije na nizovima	28
2.2 Problem kontinuuma	29
3. Redovi	33
4. Realne funkcije	41
4.1 Inverzna funkcija	46
4.2 Granična vrednost	54
4.3 Neprekidnost	60
5. Izvod	65
5.1 Geometrijsko značenje prvog izvoda	66
5.2 Izvod inverzne funkcije	76
5.3 Tablica izvoda	78
5.4 Tejlorov red	79
5.5 Ispitivanje funkcija	85
6. Integral	91
6.1 Neodređeni integral	91
6.2 Smena promenljivih	95
6.3 Parcijalna integracija	98
6.4 Određeni integral	101
6.5 Geometrijsko značenje određenog integrala	102

7. Verovatnoća i statistika	111
7.1 Verovatnoća	111
7.1.1 Formalno uvođenje	114
7.1.2 Teorema potpune verovatnoće	118
7.1.3 Slučajna promenljiva	119
7.1.4 Puasonova raspodela	121
7.1.5 Normalna raspodela	122
7.1.6 Matematičko očekivanje i disperzija	123
7.2 Elementi statistike	124
7.2.1 Mere centralne tendencije	128
7.2.2 Standardna devijacija	130
7.2.3 Raspodela	131
8. Analiza signala	137
8.1 Mikroskopija signala	138
8.2 Furijeova transformacija	141
8.3 Primer iz akustike	148
8.4 Kardio vaskularne promene	151
8.5 Elektroencefalografija-EEG	159
8.6 Zigurat	160
9. Obrada mikroskopskih slika	161
9.1 Fotometrija	161
9.2 Analiza hromozoma	163
9.3 Kompoziti	174
9.4 Spektroskopija slika	178
Dodaci	197
Indeks	199
Literatura	203

Predgovor

Nakon dugogodišnje saradnje sa biolozima, medicinarima i hemičarima na istraživačkim problemima, kao i u nastavnom kontaktu sa studentima i postdiplomcima biologije uverio sam se da je standardni aparat više matematike, pre svega matematičke analize, višestruko koristan i neophodan u savremenoj biologiji i medicini. Ova knjiga je namenjena pre svega tom krugu. Sadržaj je podeljen u devet poglavlja: osnove, nizovi, redovi, funkcije, izvod, integral, verovatnoća i statistika, analiza signala i obrada mikroskopskih slika. Prvih sedam služe za ekspoziciju matematike, nadam se razumljivo i pregledno, sa ambicijom da se čitalac ne preoptereti, ali i željom da se ne naruši minimalna potpunost izloženog gradiva. Na tako (jednostavno) određenoj pojmovnoj osnovi iznikle su primene, sažeto opisane, u poslednje dve glave, niz zadataka na kojima sam poslednjih godina radio sa svojim studentima. Taj rad započeli smo sa seminarskim radovima i nastavili inovacionim projektom (I1.0814.) Ministarstva za nauku i tehnologiju Republike Srbije, što nam je omogućilo da funkcionalno i relativno kompletno rešimo deo postavljenih zadataka, u obliku kvalitetnog softvera i integrisanih linija za akviziciju, arhiviranje, obradu i analizu signala i slika. Želim ovde da se zahvalim Stevanu Kordiću na prvim kvalitetnim programima za akviziciju, arhiviranje i analizu EEG signala, Igoru Kataniću i Saši Laleviću na paralelizovanom *FFT*, Zoranu Popoviću i Goranu Obradoviću za prvi dobar 3D spektroskop slika i signala, Igoru Jovanoviću i Saši Malkovu na softveru za akviziciju slika, posebno Obradoviću i Malkovu na finalizaciji 3D spektroskopije signala, fotomorfologije, reprezentacije i analize hromozoma, Goranu Laziću za pokušaj rešenja automatizacije "ispravljanja" hromozoma, timu Gorana Lazarevića na prvom izdanju simulatora svetlosnih Turingovih mašina, Aleksandru Jovanoviću junioru na sistemskoj i hardverskoj podršci, kao i mnogobrojnim studentima računarstva Matematičkog fakulteta u Beogradu za uspešan rad na dodirnoj problematici koja ovde nije pomenuta.

Lepi primeri analize organskohemijskih gelova na bazi fotometrijske reprezentacije slične modelu *G*-traka hromozoma, analize astronomskih

spektara i struktura, prvobitno planirani, izostavljeni su iz knjige jer je tekst počeo da biva preopširan.

U eksperimentima se određuju diskretne, uvek konačne funkcije i objekti koji dovoljno precizno predstavljaju posmatrane elemente prirode. Iza ovih konačnih senki postoje njihovi idealni arhetipovi, u svetu ideja uređenom i neuređenom aksiomama teorije skupova i aksiomama estetike. Idealnim objektima bavi se matematika, dok se fizički svet trudi da ne zaostane za prvim. Ovih dana navršava se 120 godina od kada je Kantor prvi video svet skupova, problem kontinuuma i velike hijerarhije beskonačnosti, što je iniciralo ozbiljne posledice za razvoj matematike. Ovde su ti sastojci samo ovlaš pomenuti u nadi da kod praktičara neće izazvati dodatnu averziju prema matematici.

Beograd, 24. April 1997.

Autor

1. Osnove

Uobičajeno je u ovom veku da se svi matematički pojmovi definišu pomoću pojmova skupa i skupovne pripadnosti, koji se smatraju osnovnim. Izgradnja celokupne matematike obavlja se korišćenjem teorije skupova i matematičke logike, što predstavlja vrlo ozbiljan matematički poduhvat koji ovde izbegavamo. Iz matematičke logike koristimo simboliku koja omogućava kraće zapise matematičkih iskaza i bolje sagledavanje matematičkih objekata. Od teorije skupova preuzimamo notaciju, osnovne pojmove i simbole kao i elementarna svojstva. Logički veznici – operacije su: \wedge , \vee , \neg , \Rightarrow , \Leftrightarrow , koje redom čitamo i, ili, ne, povlači, ekvivalentno. Logičke konstante su \top (tačno), \perp (lažno). Kvantori su: \forall , \exists ; koje čitamo redom: za svaki, postoji. Logički veznici i kvantori omogućavaju izgradnju složenih formula matematike polazeći od elementarnih, analogno izgradnji složenih rečenica govornog jezika polazeći od prostih. Istinitost složene formule zavisi od istinitosti elementarnih i logičke strukture formule.

Primer 1. (1) Simbolični zapis:

$$(\forall x) (x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0),$$

čitamo: za svako x , x manje od nula ili x jednako nula ili x veće od nula.

(2) Simbolični zapis:

$$(\forall x)(\exists y) 2x + y = 0,$$

čitamo: za svaki x , postoji y tako da, dva x plus y jednako nula.

1.1 Tablice istinitosti

Upotreba logičkih veznika precizira se sledećim (definicionim) tablicama:

disjunkcija	\vee	\top	\perp	$\left(\begin{array}{l} \text{"tačno ili tačno"} \text{ ima vrednost tačno,} \\ \text{"tačno ili netačno"} \text{ ima vrednost tačno,} \\ \text{"netačno ili tačno"} \text{ ima vrednost tačno,} \\ \text{"netačno ili netačno"} \text{ ima vrednost netačno,} \end{array} \right)$
	\top	\top	\top	
	\perp	\top	\perp	

konjunkcija	\wedge	\top	\perp
	\top	\top	\perp
	\perp	\perp	\perp

negacija	\neg	
	\top	\perp
	\perp	\top

implikacija	\Rightarrow	\top	\perp
	\top	\top	\perp
	\perp	\top	\top

ekvivalencija	\Leftrightarrow	\top	\perp
	\top	\top	\perp
	\perp	\perp	\top

Tablice logičkih veznika omogućavaju da se izračuna logička vrednost složenih formula bez kvantora ako su poznate logičke (istinitosne) vrednosti elementarnih formula od kojih se složena formula sastoji. Istinitost formula sa kvantorima se u ovom spisu podrazumeva na prirodnojezičkom nivou. Oznaka akko između dve rečenice označava da su iste ekvivalentne.

1.2 Skupovi

Skupovi se grade listanjem članova ili skupljanjem članova koji zadovoljavaju neki uslov – formulu $x \in y$ čitamo: skup x pripada skupu y (odnosno x je element skupa y).

Teorija skupova obezbeđuje postojanje:

- (1) praznog skupa \emptyset ,
- (2) neuređenog para skupova x i y : $\{x, y\}$ (ako su dati skupovi x i y),
- (3) uređenog para skupova x i y : $(x, y) = \{\{x, x\}, \{x, y\}\}$,
- (4) unije proizvoljnog skupa x : $\cup x$,
- (5) partitivnog skupa $P(x)$ (datog skupa x),
- (6) beskonačnog skupa: $(\exists x) (\emptyset \in x \wedge ((\forall y) y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$,
- (7) podskupa separiranog formulom $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ (skup elemenata A koji imaju osobinu – svojstvo φ tj. za koje važi formula φ). $A \subseteq B$ akko $(\forall x) x \in A \Rightarrow x \in B$.

Polazni objekt teorije skupova je prazan skup \emptyset , koji nema elemenata. Svi ostali objekti teorije skupova i cele matematike izgrađuju se polazeći od ovog objekta kao jedinstvene cigle. Ilustrujmo ovo izgradnjom prirodnih brojeva (Fon Nojmanova definicija prirodnih brojeva):

Primer 2.

$$\begin{aligned}
 0 &= \emptyset, \\
 1 &= \{0\} = \{\emptyset\}, \\
 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
 &\vdots \\
 n+1 &= \{0, 1, 2, \dots, n\}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Skup $N(= \omega)$ prirodnih brojeva je \subseteq -minimalan skup za koji važi:

1. $\emptyset \in N$,
2. $x \in N \Rightarrow x \cup \{x\} \in N$.

Uslov \subseteq -minimalnosti u prethodnoj rečenici znači da svaki skup, koji ispunjava uslove 1 i 2, sadrži N . Uobičajeno je da $\cup\{x, y\}$ označavamo sa $x \cup y$. Važi $\{x, x\} = \{x\}$. Definicija uređenog para obezbeđuje da važi:

$(a, b) = (c, d)$ akko $a = c \wedge b = d$. Uređeni par je dvočlani niz. Uređena n -torka elemenata a_1, a_2, \dots, a_n definiše se sa $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$.

Unija skupa x , $\cup x$ je skup koji se sastoji od elemenata elemenata od x . Presek skupova x i y definiše se sa: $x \cap y = \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$, skup članova x koji pripadaju y . Razlika skupova x i y definiše se sa: $x - y = \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$ skup onih članova x koji ne pripadaju y . Partitivni skup skupa x

$$P(x) = \{y \mid y \subseteq x\}.$$

Dekartov proizvod skupova x i y definiše se sa:

$$x \times y = \{z \mid z = (u, v) \wedge u \in x \wedge v \in y\} = \{(u, v) \mid u \in x \wedge v \in y\}.$$

Dekartov proizvod skupova A_1, A_2, \dots, A_n definiše se sa

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

1.3 Relacije

Definicija 1. n -arnu relaciju ρ među skupovima A_1, A_2, \dots, A_n definišemo kao podskup od $\prod_{i=1}^n A_i$. Kažemo da je ρ n -arna relacija skupa A

akko $\rho \subseteq \prod_{i=1}^n A = A^n$. Ako je $n = 2$ kažemo da je ρ binarna relacija. Tada se umesto $(x, y) \in \rho$ piše još i $x\rho y$.

Definicija 2. Binarna relacija ρ skupa A je relacija ekvivalencije ako važi sledeći niz svojstava:

1. $(\forall x \in A) (x, x) \in \rho$ - *refleksivnost*.
2. $(\forall x \in A)(\forall y \in A) (x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$ - *simetričnost*.
3. $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A) ((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho$ - *tranzitivnost*.

Primer 3. Evo nekoliko dobro poznatih relacija ekvivalencije:

- (1) Relacija sličnosti trouglova.
- (2) Relacija \parallel skupa pravih u ravni: $x \parallel y$ akko x paralelna sa y .
- (3) Relacija kolinearnosti vektora.
- (4) Relacija istobrojnosti u skupu $P(n)$.

Definicija 3. Binarna relacija ρ skupa A je relacija *poretka* ako važi:

1. refleksivnost.
2. $(\forall x \in A)(\forall y \in A) ((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow x = y$ - *antisimetričnost*.
3. tranzitivnost.

Ako je $(\forall x \in A)(\forall y \in A) (x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho$ kažemo da je poredak ρ totalan, linearan ili lanac. Inače ρ je parcijalan poredak. Ako se u prethodnoj definiciji umesto uslova 1. uzme $(\forall x \in A) (x, x) \notin \rho$, dobija se relacija strogog poretka.

Primer 4. Evo nekoliko poznatih primera relacije poretka:

- (1) Uočimo relaciju \subseteq u skupu $P(x)$. Ovo je relacija parcijalnog poretka.
- (2) Uočimo relacije \leq i $<$ u skupu R .
- (3) Neka je ρ relacija u $P(n)$ definisana sa $x \rho y$ akko x je manje brojan od y (tj. x ima manje elemenata nego y).
- (4) Neka je x proizvoljan skup. Uočimo relaciju \in na skupu x . Ako je \in tranzitivna u x onda je \in relacija strogog poretka u x , a skup x nazivamo tranzitivnim. Ako \in nije tranzitivna u x onda postoji \subseteq -minimalan nadskup od x u kome je \in tranzitivna. Tranzitivne skupove, koji su linearno uređeni relacijom \in , nazivamo rednim brojevima. Uočimo da su skupovi iz **Primer 2.** redni brojevi, kao i da su $\omega, \omega \cup \{\omega\}$ redni brojevi.

Primer 5. Neka je ρ relacija ekvivalencije skupa A . Relacija ρ određuje jedno razlaganje – particiju skupa A na disjunktne podskupove:

Neka je $C_x = \{y \in A \mid x \rho y\}$. Ovaj skup nazivamo *klasom ekvivalencije elementa x* . Iz uslova relacije ekvivalencije sledi:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) C_x = C_y \vee C_x \cap C_y = \emptyset.$$

Neka je $\{C_x \mid x \in B \subseteq A\}$ skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ . Onda važi $A = \bigcup_{x \in B} C_x$. Skup $\{C_x \mid x \in B \subseteq A\} = A/\rho$ se naziva *količničkim skupom* (skupa A i relacije ρ).

Definicija 4. Poredak ρ je *gust* ako važi

$$(\forall x)(\forall y) (x\rho y \Rightarrow (\exists z)(x\rho z \wedge z\rho y)).$$

Primer 6.

- (1) Relacija \leq u skupu realnih brojeva R predstavlja gust linearni poredak.
- (2) Relacija $>$ u skupu Q racionalnih brojeva je gust linearni poredak.
- (3) Relacija $<$ u skupu ω nije gusto uređenje.

Definicija 5. Relacija poretka ρ u skupu A je *dobro zasnovana* relacija ako nema beskonačnih opadajućih lanaca. Dobro zasnovano linearno uređenje naziva se *dobro uređenje*.

Primer 7. Evo primera dobro zasnovanih relacija:

- (1) relacija \in na proizvoljnom skupu A je dobro zasnovana;
- (2) relacija \leq u skupu ω prirodnih brojeva je dobro uređenje;
- (3) relacija \in u skupu ω je dobro uređenje;
- (4) definišimo $<_{\omega+1}$ u skupu ω sa

$$<_{\omega+1} = (< \setminus \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots\}) \cup \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\},$$

(u ovom poretku imamo: $1 <_{\omega+1} 2 <_{\omega+1} 3 <_{\omega+1} \dots <_{\omega+1} 0$).
Očigledno relacija $<_{\omega+1}$ jeste dobro uređenje.

Definišimo $<_{\omega+\omega}$ u skupu ω sa

$$1 <_{\omega+\omega} 3 <_{\omega+\omega} 5 <_{\omega+\omega} \dots <_{\omega+\omega} 0 <_{\omega+\omega} 2 <_{\omega+\omega} 4 <_{\omega+\omega} \dots$$

Ovo je takođe dobro uređenje od ω .

Definišimo još jedno dobro uređenje skupa prirodnih brojeva. Uočimo da važi

$$N = \bigcup_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot (2N - 1) = (2N - 1) \cup (2 \cdot (2N - 1)) \cup (2^2 \cdot (2N - 1)) \cup \dots,$$

tj. skup prirodnih brojeva je jednak uniji skupova: nula puta parni (neparni), jedan puta parni, dva puta parni, itd. Iskoristimo prethodno za izgradnju sledećeg poretka $<_{\omega \cdot \omega}$:

$$2N - 1 <_{\omega \cdot \omega} 2 \cdot (2N - 1) <_{\omega \cdot \omega} 2^2(2N - 1) <_{\omega \cdot \omega} 2^3(2N - 1) <_{\omega \cdot \omega} \dots,$$

(prirodno uređeni neparni brojevi, pa jedan puta parni, zatim dva puta parni, itd.).

Definicija 6. Za binarnu relaciju $\rho \subseteq A \times B$ definiše se *inverzna relacija*

$$\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Domen relacije ρ definiše se sa

$$\text{dom}(\rho) = \{x \in A \mid (\exists y \in B) (x, y) \in \rho\},$$

kodomen relacije ρ definiše se sa

$$\text{codom}(\rho) = \{y \in B \mid (\exists x \in A) (x, y) \in \rho\}.$$

Kompozicija relacije $\rho \subseteq A \times B$ i $\tau \subseteq B \times C$ je definisana sa

$$\tau \circ \rho = \{(x, z) \in A \times C \mid (\exists y \in B) (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \tau\}.$$

1.4 Funkcije

Definicija 7. Relacija $f \subseteq A \times B$ je *funkcija* akko

$$(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z.$$

Neka je $\text{dom}(f) = A$. Za funkciju f se kaže da slika skup A u skup B , u oznaci $f : A \rightarrow B$.

Funkcija f je "1-1" (*injekcija*) akko

$$(x, y), (u, v) \in f \wedge x \neq u \Rightarrow y \neq v.$$

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je "na" (*surjekcija*) akko $\text{codom}(f) = B$.

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je *bijekcija* akko f je "1-1" i "na".

Prethodne definicije uključuju i višeargumentne funkcije: za funkciju $f : \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow B$ se kaže da je *n-arna*. Upotrebljavaju se još i sledeće oznake:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f : x \mapsto y.$$

Funkcija $f : A^n \rightarrow A$ se naziva *n-arnom operacijom skupa A*.

Primer 8. Evo nekoliko primera funkcija:

- (1) Prazan skup \emptyset je funkcija.
- (2) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ je funkcija. $\text{dom}(f) = \{1, 2, 3\}$, $\text{codom}(f) = \{1, 2\}$. f nije "1-1".
- (3) $g = \{(1, 1), (2, 2), (1, 3)\}$ nije funkcija.
- (4) $h = \{(1, 1), (2, 2), (3, \pi)\}$ je bijekcija.

Prethodne funkcije možemo zapisati i na sledeći način:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \pi \end{pmatrix}.$$

Ovaj način je zgodan za zapisivanje konačnih funkcija.

Definicija 8. Bijekcije imaju poseban značaj u matematici. Između ostalog koristimo ih za definiciju istobrojnosti: za skupove A i B kažemo da su *iste moći* odnosno *iste kardinalnosti* akko postoji bijekcija čiji je domen A i kodomen B . Prethodno zapisujemo sa $|A| = |B|$. Slično, kažemo da je skup A *kardinalnosti manje ili jednake* B , u oznaci $|A| \leq |B|$ akko postoji injekcija A u B . Može se dokazati da važi

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

Kažemo da je skup A *manje moći* od skupa B , u oznaci $|A| < |B|$ akko $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$, tj. ako postoji injekcija A u B i ne postoji bijekcija između A i B .

Primer 9.

- (1) $|\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}| < |\{0, 1\}|$.
- (2) Pokažimo da važi $|P(3)| = |8|$ za $3 = \{0, 1, 2\}$ i $8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Pošto je

$$P(3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\},$$

odavde sledi $|P(3)| = 8$ i $|8| = 8$.

(3) $|N| = |2N|$ (GALILEO).

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{pmatrix} \text{ je bijekcija.}$$

Istobrojnost sa pravim podskupom je svojstvo beskonačnih skupova.

(4) $|N| = |Q|$. Dovoljno je skup Q^+ poređati u niz. Predstavimo elemente Q^+ redukovanim razlomcima. Zbir brojioca i imenioca u razlomku nazovimo visinom. Prvo poređajmo visine u niz. Potom za datu visinu h poređajmo razlomke visine h (kojih je konačno mnogo) po rastućem redosledu. Ostatak sledi iz (3).

Definicija 9. Neka je A konačan skup. Bijekcija $f : A \rightarrow A$ naziva se još i *permutacija* skupa A . Broj svih permutacija skupa A , $|\text{Perm}(A)| = |A|!$. Bijekcija u suštini uspostavlja identifikaciju domena i kodomena i omogućava zamenu skupa istobrojnim u razmatranjima, gde je to podesno.

Konačni skup se može zameniti brojem njegovih elemenata. Neka je $|A| = |n| = |\{0, 1, 2, \dots, n-1\}|$. Uobičajeno je da se piše $|A| = n$. Saglasno prethodnim opaskama, permutacija skupa A je bilo koja bijekcija $f : n \rightarrow A$. Prirodni poredak u n ($0 < 1 < 2 < \dots < n-1$ što je ekvivalentno sa $0 \in 1 \in 2 \in \dots \in n-1$) se permutacijom f prenosi na A , zbog čega identifikujemo permutaciju f od A sa poretkom u A koji permutacija f prenosi sa n na A .

Definicija 10. Uočimo podskup $B \subseteq A$ takav da $B \neq \emptyset$. Neka je $|B| = m \leq n$. *Varijacija* (klase m) bez ponavljanja je bijekcija $g : m \rightarrow B$. *Varijacija sa ponavljanjem* klase k skupa A je funkcija $g : k \rightarrow A$. Broj svih varijacija skupa A klase m bez ponavljanja je $V_n^k = n(n-1)\dots(n-(k+1))$. Broj svih varijacija sa ponavljanjem klase k skupa A od n elemenata je $\bar{V}_n^k = n^k$.

Definicija 11. Skup svih funkcija iz A u B označava se sa ${}^A B$ ili B^A . Za $C \subset \text{dom}(f)$, definišemo skup $f[C] = \{f(x) | x \in C\}$.

1.5 Neke strukture

Definicija 12. Uređeni par (X, d) je metrički prostor ako važi sledeće: X je neprazan skup, funkcija $d : X^2 \rightarrow [0, +\infty)$, (rastojanje u X) je takva da

1. $(\forall x) d(x, x) = 0,$
2. $(\forall x)(\forall y) d(x, y) = d(y, x),$
3. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (relacija trougla).

Primer 10. Uređeni par (R^2, d) (Euklidska ravan), ako je za dve (proizvoljne) tačke $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ rastojanje d definisano sa

$$d(M_1, M_2) = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Slično, (R^3, d) je trodimenzionalni Euklidski prostor ako se rastojanje definiše sa

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Nešto opštije, (R^n, d) je n dimenzionalni Euklidski prostor ako je funkcija rastojanja u R^n definisana sa

$$d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

gde je $a = (x_1, x_2, \dots, x_n), b = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$

Definicija 13. Uređena trojka $(G, *, e)$, gde je $*$ binarna operacija u G i $e \in G$ je konstanta, je *grupa* ako važe uslovi:

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) x * (y * z) = (x * y) * z$ - aksioma *asocijativnost*.
2. $(\forall x) e * x = x * e = x$ - aksioma *neutralnog elementa*.
3. $(\forall x)(\exists y) x * y = y * x = e$ - aksioma *inverznog elementa*.

Element e naziva se *neutralnim* ili *jedinčnim* elementom. Komutativna grupa se naziva i Abelovom.

Primer 11.

- (1) $(Z, +, 0)$ je Abelova grupa.
- (2) $(Q \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ je Abelova grupa.
- (3) $(R, +, 0)$ i $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ su Abelove grupe.

Definicija 14. Uređena petorka $(A, +, \cdot, 0, 1)$, gde je A neprazan skup sa dve binarne operacije, je *polje* ako $0, 1 \in A$ i važe sledeći uslovi:

1. $(A, +, 0)$ je Abelova grupa, sa neutralnim elementom,
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ - asocijativnost \cdot ,
3. $(\forall x) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ - element 1 je neutralni element za \cdot ,
4. $(\forall x \in A \setminus \{0\})(\exists y) x \cdot y = y \cdot x = 1$ - egzistencija inverznog elementa u odnosu na operaciju \cdot , za sve osim 0,
5. $(\forall x)(\forall y) x \cdot y = y \cdot x$, - komutativnost \cdot ,
6. $(\forall x)(\forall y)(\forall z) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \wedge (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ - distributivnost \cdot prema $+$.

Primer 12. Proveriti da su strukture $(Q, +, \cdot, 0, 1)$, $(R, +, \cdot, 0, 1)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ polja (\mathbb{C} je skup kompleksnih brojeva).

Uočimo skup V vektora u Dekartovoj ravni, uz uobičajenu identifikaciju: dva vektora su jednaka ako su jednake dužine, paralelnih pravaca i istog smera. Ova identifikacija redukuje razmatranje na vektore sa početkom u koordinatnom početku. Uočimo da je jednakost vektora relacija ekvivalencije, označimo je sa \sim . Onda, umesto razmatranja celog V , razmatra se količnik skup V/\sim , skup klasa ekvivalencije za \sim . Svaka od ovih klasa sadrži jedan vektor čiji je početak u $(0, 0)$. Sa uobičajeno definisanim sabiranjem vektora $+$ i množenjem vektora skalarom \cdot , struktura $((V/\sim, +, 0), R, \cdot)$ je primer vektorskog prostora. Sabiranje je binarna operacija među vektorima, tj. u V/\sim . Međutim, \cdot je tzv. mešovita operacija koja paru skalar-vektor pridružuje vektor.

U skupu R^2 definišimo operaciju $+$:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Za $a \in R$ i $x = (x_1, x_2) \in R^2$ definišimo proizvod (skalara i vektora) sa: $a \cdot x = (ax_1, ax_2)$.

Uočimo da su strukture $((V/\sim, +, 0), R, \cdot)$ i $((R^2, +, 0), R, \cdot)$ istovetne.

Definicija 15. Struktura $((V, +, 0), K, \cdot)$ je vektorski prostor nad poljem (skalara) K ako važi sledeće:

1. $+$ je binarna operacija u V , \cdot je mešovita operacija (domen \cdot je $K \times V$, kodomen V).
2. $(V, +, 0)$ je Abelova grupa (čiji se neutralni element zove nula vektor),
3. $(\forall a \in K)(\forall x \in V)(\forall y \in V) a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$,
4. $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall x \in V) (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,

5. $(\forall a \in K)(\forall b \in K)(\forall x \in V) a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x,$
 6. $1 \cdot x = x.$

Primer 13. (1) Proveriti da je $((R^3, +, 0), R, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem R ako su operacije definisane sa:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$a \cdot (x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3).$$

(2) Proveriti da je $((R^n, +, 0), R, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem R gde su operacije $+$, \cdot definisane analogno definiciji pod (1).

Definicija 16. Ako važi $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, onda je v *linearna kombinacija* vektora v_1, v_2, \dots, v_n . Vektori v_1, v_2, \dots, v_n su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, koji nisu svi jednaki 0, i ako važi

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0.$$

Vektori su *linearno nezavisni* ako nisu linearno zavisni. $B \subseteq V$ je baza vektorskog prostora ako je svaki element V jednak linearnoj kombinaciji vektora iz B i ako su elementi B linearno nezavisni. U tom slučaju $|B|$ je dimenzija vektorskog prostora V . Ako je $|B| < \aleph_0$, kažemo da je V konačno dimenzionalan.

Primer 14.

- (1) Jedna baza vektorskog prostora R^2 je skup $\{(2, 0), (1, 1)\}$; druga baza je $\{(0, 1), (1, 0)\}$;
 (2) jedna baza za R^3 je $\{(1, 2, 0), (0, 2, 1), (4, 1, 1)\}$, druga je $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Primetimo da je R^2 dvodimenzionalan, R^3 trodimenzionalan;
 (3) jedna baza za R^n je $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ i ovaj prostor je n -dimenzionalan.

Definicija 17. Neka je V vektorski prostor nad R . Preslikavanje sa domenom $V \times V$ i kodomenom R u oznaci

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle,$$

je skalarni proizvod ako važe uslovi:

1. $(\forall u)(\forall v)(\forall w) \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle,$
2. $(\forall u)(\forall v) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$
3. $(\forall u) \langle u, u \rangle \geq 0,$
4. $(\forall u) \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

Norma vektora: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$

Primer 15. Za vektorski prostor R^n nad R , neka su dati vektori $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Definišimo

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Lako se proverava da je $\langle x, y \rangle$ skalarni proizvod kao i da za normu važi:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rastojanje se preko norme može definisati sa

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

što se poklapa sa definicijom rastojanja u n -dimenzionalnom euklidskom prostoru. Za vektore x, y kaže se da su ortogonalni ako je $\langle x, y \rangle = 0$. Uočimo da je npr. baza iz **Primeru 14.** (3) ortogonalna. Ova baza je ortonormirana – svi njeni vektori imaju normu jednaku 1. Za dva vektora x i y kosinus ugla φ između x i y određen je sa

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

po analogiji sa trodimenzionalnim euklidskim prostorom. Napominjemo da se može dokazati

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Za kolinearne vektore (na istom pravcu), tj. linearno zavisne imamo da je $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|.$

1.6 Matrice

Klasična definicija matricu tipa $m \times n$ određuje kao pravougaonu shemu od m vrsta (redova) i n kolona brojeva, da bi se, zatim, na ovim strukturama definisale operacije. Tako su na primer:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

-matrice, čiji su tipovi redom 2×3 i 2×4 , dok je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

-matrica tipa $m \times n$, čiji je opšti član a_{ij} element u i -tom redu i j -toj koloni. Tako na primer $b_{13} = 7$, $c_{21} = 0$, $c_{14} = 4$.

Definicija 18. Realna matrica tipa $m \times n$ je preslikavanje iz $(m + 1 \setminus \{\emptyset\}) \times (n + 1 \setminus \{\emptyset\})$ u R . Onda je ${}^{(m+1 \setminus \{\emptyset\}) \times (n+1 \setminus \{\emptyset\})}R$ skup svih realnih matrica. U skupu matrica tipa $m \times n$ definišimo operacije: množenje matrice skalarom:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix};$$

Sabiranje matrica (za matrice istog tipa),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = C,$$

pri čemu je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za $i \in \{1, 2, \dots, m\}$; $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Proizvod matrica P i Q je definisan ako su tipovi ovih matrica redom $m \times k$, $k \times n$, tj. ako je broj kolona prve jednak broju redova (vrsta) druge:

$$P \cdot Q = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & \dots & p_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \dots & p_{mk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{k1} & \dots & q_{kn} \end{bmatrix} = S,$$

pri čemu je

$$s_{ij} = \sum_{l=1}^k p_{il} \cdot q_{lj}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Definišimo još pookoordinatno množenje za matrice istog tipa sa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = C,$$

gde je $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ za $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Primer 16. Odrediti:

(1)

$$4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \pi \cdot I = \pi \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

(I je $n \times n$ -kvadratna matrica tipa n);

(2) zbir i pokoodinatni proizvod matrica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

(3) proizvode matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice imaju raznovrsne primene u matematici i u drugim naukama. n -torku možemo smatrati jednovrsnom ili jednokolonskom matricom. n -torka može da posluži za aproksimaciju realne funkcije od jednog argumenta istom funkcijom na konačnom poddomenu, što se vrlo često čini prilikom određivanja funkcija merenjem. Na sličan način matrice se mogu koristiti za aproksimaciju funkcija od dva argumenta.

Primer 17.

(1) Predstaviti tabelarno i grafički funkciju $f(x) = x^2$, na intervalu $[-3, 3]$. Tabela bi se mogla formirati npr. u sledećim tačkama:

x	-3	-2	1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

odakle: $f \approx (9, 4, 1, 0, 1, 4, 9)$ (po ekvidistantnim tačkama $-3, -2, 1, 0, 1, 2, 3$ intervala $[-3, 3]$). Crtanje (grafika) ove funkcije prepuštamo čitaocu.

(2) Predstaviti tabelarno i grafički funkciju

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Uočimo da je domen ove funkcije ravan $R \times R$, a kodomen $[0, +\infty)$. Postupimo li slično kao pod (1), uzevši npr. celokoordinatne tačke iz $[-3, 3] \times [-3, 3]$, dobijamo tabelu (koristeći tabelu pod (1)):

(x, y)	$-3; -3$	$-3; -2$	$-3; -1$	$-3; 0$	$-3; 1$	$-3; 2$	$-3; 3$
$f(x, y)$	18	13	10	9	10	13	18
(x, y)	$-2; -3$	$-2; -2$	$-2; -1$	$-2; 0$	$-2; 1$	$-2; 2$	$-2; 3$
$f(x, y)$	13	8	5	4	5	8	13
(x, y)	$-1; -3$	$-1; -2$	$-1; -1$	$-1; 0$	$-1; 1$	$-1; 2$	$-1; 3$
$f(x, y)$	10	5	2	1	2	5	10
(x, y)	$0; -3$	$0; -2$	$0; -1$	$0; 0$	$0; 1$	$0; 2$	$0; 3$
$f(x, y)$	9	4	1	0	1	4	9
(x, y)	$1; -3$	$1; -2$	$1; -1$	$1; 0$	$1; 1$	$1; 2$	$1; 3$
$f(x, y)$	10	5	2	1	2	5	10
(x, y)	$2; -3$	$2; -2$	$2; -1$	$2; 0$	$2; 1$	$2; 2$	$2; 3$
$f(x, y)$	13	8	5	4	5	8	13
(x, y)	$3; -3$	$3; -2$	$3; -1$	$3; 0$	$3; 1$	$3; 2$	$3; 3$
$f(x, y)$	18	13	10	9	10	13	18

Odavde slično kao pod (1) za funkciju od jednog argumenta,

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 18 & 13 & 10 & 9 & 10 & 13 & 18 \\ 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ 18 & 13 & 10 & 9 & 10 & 13 & 18 \end{bmatrix},$$

(na tačkama sa celobrojnim koordinatama u $[-3, 3] \times [-3, 3]$). Grafiku prepuštamo čitaocu.

Kao što smo funkciju $f(x) = x^2$, umesto sa pomakom 1, mogli tabelirati sa proizvoljno finim pomakom, slično važi i za funkciju $f(x, y) = x^2 + y^2$, koja se može tabelirati proizvoljno fino. Drugim rečima $f(x, y)$ možemo proizvoljno fino aproksimirati matricom.

Matrice (kao aproksimacije realnih funkcija) predstavljaju pogodan model za digitalizovane slike, što koristimo u poglavlju posvećenom analizi mikroskopskih slika.

2. Nizovi

Nizovi su funkcije čiji je domen skup N , odnosno $N \setminus \{\emptyset\}$, a kodomen neprazan skup A . Ako je $A \subseteq R$, niz je realan. Niz $\{(x, f(x)) \mid x \in N\}$ možemo predstaviti opštim članom $(n, f(n))$. Argument niza (prirodan broj) naziva se još indeksom. Umesto $f(n)$ često se piše f_n . Tako na primer niz $f = \{(1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), \dots\}$ možemo predstaviti opštim članom

$$f(n) = f_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Skup svih nizova, čije su vrednosti u skupu A , označavamo sa A^N . Ovde se uglavnom bavimo realnim nizovima.

Primer 1. Neka je $X \subseteq N$ (konačan ili beskonačan). Definišimo niz $f_X = \{(n, 1) \mid n \in X\} \cup \{(n, 0) \mid n \in N \setminus X\}$, tj.

$$f_X(n) = \begin{cases} 1, & \text{ako } n \in X, \\ 0, & \text{ako } n \in N \setminus X. \end{cases}$$

Za $A = \{3, 4, 5\}$ imaćemo niz f_A za koji važi:

$$f_A(3) = f_A(4) = f_A(5) = 1, \quad f_A(n) = 0 \quad \text{ako je } n < 3 \text{ ili } n > 5,$$

odnosno $f_A = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, \dots)$. Skupu $B = \{1, 2, 7\}$ odgovara niz $f_B = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$. Skupu parnih brojeva $2N$ odgovara niz $f_{2N} = (1, 0, 1, 0, \dots)$, skupu neparnih $2N - 1$ odgovara niz $(0, 1, 0, 1, \dots)$. Na ovaj način pridružuje se svakom podskupu X skupa prirodnih brojeva N niz f_X . Neka su X, Y dva različita podskupa N , i neka je $n \in X \setminus Y \cup Y \setminus X$ (n pripada X i ne pripada Y ili obrnuto). Sledi $f_X(n) \neq f_Y(n)$. Dakle, ako su $X, Y \subseteq N$ različiti, njima se na ovaj način pridružuju različiti nizovi. Posmatrajmo sada partitivni skup skupa prirodnih brojeva $P(N)$ i skup svih binarnih nizova 2^N . Neka je $f \in 2^N$ i neka je $X = \{n \mid f(n) = 1\}$. Očigledno važi $f = f_X$. Definišimo funkciju $h: P(N) \rightarrow 2^N$ sa $h(X) = f_X$. Iz prethodnog razmatranja sledi da je h , "1-1" i "na", tj. bijekcija.

Funkcija f_X u prethodnom primeru naziva se karakterističnom funkcijom skupa X . U opštem slučaju neka je $X \subseteq A$. Karakteristična funkcija skupa X definiše se sa

$$\chi_X(t) = \begin{cases} 1, & t \in X, \\ 0, & t \in A \setminus X. \end{cases}$$

Posmatrajmo niz $a = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$, čiji je opšti član $a_n = 2^n$. Lako proveravamo da je ovaj niz neograničen. S druge strane, neka je $b_n = \frac{1}{n}$ (za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) i $b_0 = 0$. Za ovaj niz lako proveravamo da je ograničen. U oba slučaja koristimo sledeću prirodnu definiciju.

Definicija 1. Neka je $a_n, n \in \mathbb{N}$ realan niz. a_n je *ograničen* akko postoji realan broj M takav da za sve n važi $|a_n| \leq M$ (u ovom slučaju svi članovi niza a_n smešteni su u interval $[-M, M]$). Za niz koji nije ograničen kažemo da je *neograničen*.

Definicija 2. A je *tačka nagomilavanja* realnog niza $a_n, n \in \mathbb{N}$ akko za svaki pozitivan realan broj ε , interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ sadrži beskonačno mnogo elementa niza a_n .

Uočimo niz b_n iz prethodnog primera. Jasno je da je 0 tačka nagomilavanja ovog niza. Neka je naime, $\varepsilon > 0$. Ako je $\varepsilon > 1$, onda interval $(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$ sadrži sve članove niza b_n .

$$\text{Ako je } \varepsilon < 1, \text{ za } n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ biće } \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ tj. } b_n \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Za geometrijsku progresiju $a_n = 2^n$ lako proveravamo da nema tačka nagomilavanja (Neka je A proizvoljan realan broj i neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Interval $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ sadrži najviše jedan član niza a_n .), kao i da je a_n neograničen.

Definicija 3. M je *gornja ograda (ograničenje)* niza a_n , akko za sve n važi $a_n \leq M$. m je *donja ograda* niza a_n akko za sve n važi $m \leq a_n$. Ako niz ima gornju ogradu, onda postoji i najmanje gornje ograničenje koje nazivamo *supremum* niza. Slično, ako je niz ograničen s leva, onda ima i najveće ograničenje s leva koje nazivamo *infimum* niza.

Definicija 4. Realan niz a_n , $n \in N$ je *monotono rastući* akko za sve $n \in N$ važi $a_n \leq a_{n+1}$. Niz a_n , $n \in N$ je *monotono opadajući* akko za sve $n \in N$ $a_n \geq a_{n+1}$. Niz je *monoton* ako je monotono rastući ili opadajući.

Neka je a_n niz $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$. Očigledno, ovaj niz je ograničen i s leva i s desna. Na primer važi za sve $n \in N$, $a_n \leq 4$ i $a_n \geq 0$. Zato ovaj niz ima supremum (3) i infimum (1). Takođe, a_n nije monoton.

Za niz $a_n = \frac{1}{n}$ lako uočavamo da je ograničen i monoton. Supremum ovog niza je 1, infimum je 0.

Dostignuti supremum naziva se maksimum, dostignuti infimum naziva se minimum.

Teorema 1. (BOLCANO-VAJERŠTRAS). *Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

Dokaz. Neka je niz a_n , $n \in N$ ograničen sa M tj. $[-M, M] \supseteq \{a_1, a_2, \dots\}$. Prepolovimo interval $[-M, M] = [-M, 0] \cup [0, M]$. Bar jedan od ova dva intervala, na primer $[0, M]$, sadrži beskonačno mnogo članova niza a_n . Polovljenjem ovog intervala dobijamo dva, od kojih biramo jedan, koji sadrži beskonačno mnogo članova niza a_n . Ponovimo li ovaj postupak, u n -tom koraku dobijamo interval polovine dužine prethodnog, koji sadrži beskonačno mnogo članova niza a_n . Označimo sa I_0 polazni interval $[-M, M]$, a sa I_n ovako dobijen interval u n -tom koraku koji sadrži beskonačno mnogo članova polaznog niza a_n . Neograničenom primenom prethodnog postupka dobijamo niz intervala:

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

opadajuće dužine. Dokažimo da:

Presek ovih intervala sadrži tačno jedan realan broj. (1)

Ako bi $\bigcap_{n \in N} I_n$ imao dva različita člana a, b npr. $a < b$, sadržao bi i sve brojeve između njih, tj. interval $[a, b]$. Dakle, za sve n , $I_n \supseteq [a, b]$. Označimo sa $d(I)$ dužinu intervala I . U ovom slučaju imali bismo da je

$$d(I_n) = \frac{d[-M, M]}{2^n} = \frac{2M}{2^n},$$

kao i da je $d([a, b]) = b - a$. Sledi,

$$\text{za sve } n, b - a < \frac{2M}{2^n} \quad \text{tj. za sve } n, 2^n < \frac{2M}{b - a},$$

pa bi niz $a_n = 2^n$ bio ograničen, što je kontradikcija. Dakle (1) važi.

Da je $\bigcap_{n \in N} I_n \neq \emptyset$ vidimo iz sledećeg razmatranja. Neka je $I_n = (c_n, d_n)$, $n \in N$. Niz c_n je ograničen s desna, dok je niz d_n ograničen s leva. Neka je c supremum niza c_n . Pošto je za sve $m, n \in N$ $c_n \leq d_m$, važi i da je za sve $m \in N$ $c \leq d_m$. Sledi da je $c \in \bigcap_{n \in N} I_n$, budući da $c \in [c_n, d_n]$, $n \in N$.

Dokažimo da je c tačka nagomilavanja niza a_n . Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je $n > \frac{M}{\varepsilon}$. Tada interval $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ sadrži I_n u kome je beskonačno mnogo članova polaznog niza. \square

Definicija 5. A je granična vrednost (limes) niza a_n , $n \in N$, u oznaci

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

akko za svaki $\varepsilon > 0$, postoji n_0 tako da za sve $n > n_0$, $|A - a_n| < \varepsilon$.

Drugim rečima, A je granična vrednost niza a_n akko u svakoj okolini tačke A ima beskonačno mnogo članova niza, a izvan nje najviše konačno mnogo.

Niz je konvergentan ako ima graničnu vrednost. U suprotnom je divergentan.

Primer 2. Neka je $a_n = q^n$, $n \in N$ gde je $q > 0$ (geometrijska progresija sa količnikom q). Ako je $q = 1$, niz je konstanta, $a_n = 1$, $n \in N$. Za $q > 1$ slično kao i za $q = 2$ lako se utvrđuje da je niz neograničen (i divergentan). Za $q < 1$, niz je ograničen, $a_n \leq 1$, $n \in N$, i ima bar jednu tačku nagomilavanja. Lako se proverava da je 0 tačka nagomilavanja i infimum ovog niza. Neka je $\varepsilon > 0$, tada

$$a_n = q^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln q < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}, \quad \text{tj.}$$

$$\text{za } n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}, \quad a_n \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon),$$

što znači da su svi članovi niza za koje važi uslov unutar ε okoline 0, a van ε okoline ih je najviše konačno mnogo.

Primer 3. Neka je

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad n \in N,$$

gde je $p \in R$. Za $p = 0$, $a_n = 1$, $n \in N$. Za $p < 0$, $a_n = n^{|p|}$ i niz a_n je neograničen i divergentan. Za $p > 0$ i $\varepsilon > 0$ imamo

$$|a_n| = a_n = \frac{1}{n^p} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}},$$

što znači da za svaki $\varepsilon > 0$, čim je $n > \varepsilon^{\frac{-1}{p}}$, $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Teorema 2. *Monoton i ograničen niz ima limes.*

Dokaz. Neka je npr. niz a_n monotonno rastući i ograničen. Po **Teoremi 1**, niz a_n ima tačku nagomilavanja A . Neka je $\varepsilon > 0$. U okolini $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ ima beskonačno mnogo članova niza a_n . Neka je n_0 takav da a_{n_0} pripada ovoj okolini. Za sve $n > n_0$, $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ jer bi u suprotnom, zbog monotonosti u ovoj okolini bilo samo konačno mnogo članova niza. \square

Teorema 3. *Neka je a_n monotonno rastući niz i neka je b_n monotonno opadajući niz. Neka je za sve n , $d_n \leq a_n \leq c_n$. Ako niz c_n konvergira, onda i niz a_n konvergira i važi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Iz divergencije niza d_n sledi i divergencija niza a_n . Odgovarajuća tvrdjenja važe i za niz b_n .

Dokaz. Ograničimo se na nizove sa pozitivnim članovima. Neka je $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Dokažimo da je za sve n , $a_n \leq c$. U suprotnom slučaju bi za neki n_0 bilo $a_{n_0} > c$, pa bi (zbog monotonosti) bilo za sve $n > n_0$, $a_n > a_{n_0} > c$. Neka je $\varepsilon = |c - a_{n_0}|$ i neka je n_1 takav da za sve $n > n_1$ važi

$c_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, po konvergenciji niza c_n . Neka je $n_2 = \max(n_0, n_1) + 1$ sledi $c_{n_2} < c + \varepsilon < a_{n_2}$, kontradikcija. Sledi da je niz a_n ograničen, pa iz monotonosti sledi tvrđenje. \square

Zadatak 1. Izvesti dokaz bez ograničenja na početku dokaza.

Primer 4. Ispitati konvergenciju niza

$$1 + 1, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 4 + \frac{1}{4}, \dots$$

Označimo gornji niz sa a_n . Očigledno je

$$a_n = n + \frac{1}{n} > n,$$

tj. ovaj niz je neograničen, pa zato divergentan.

Primer 5. Ispitati konvergenciju niza

$$a_n = \frac{\ln n}{n}, \quad \text{za } n > 0.$$

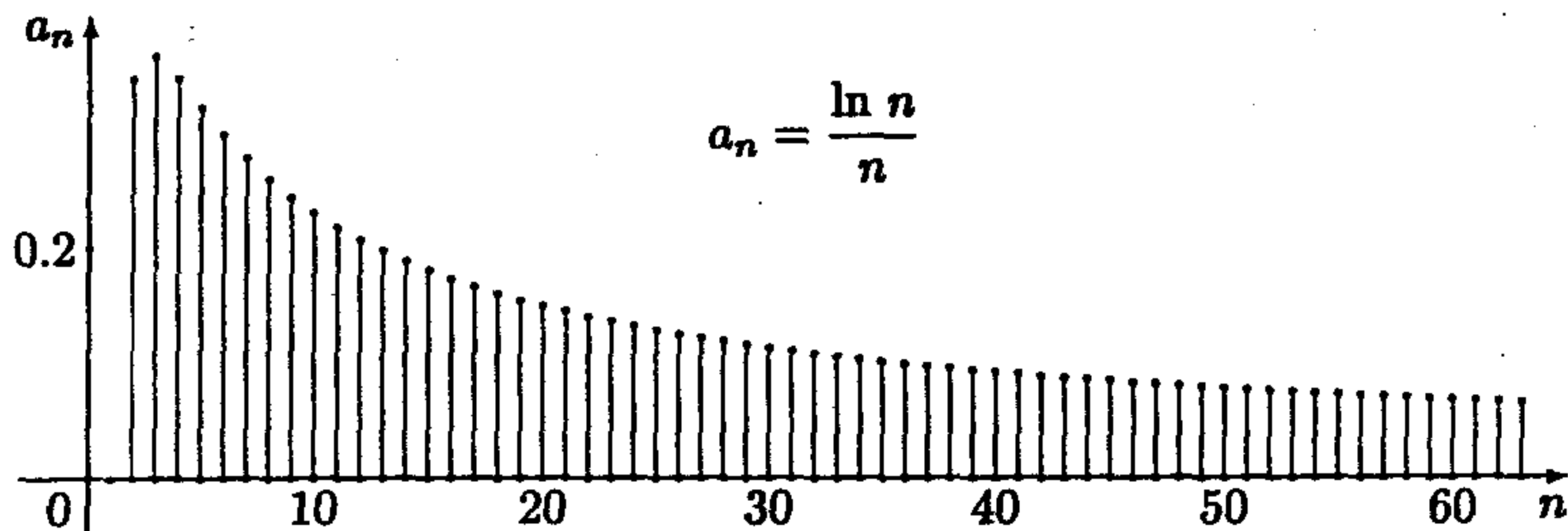
Zapišimo ovaj niz kao

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Pošto je za sve $n > 0$, $\ln n < \sqrt{n}$, imamo da je $a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$, kao i da je $\frac{1}{n} < a_n$. Iz **Primer 3.** imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Niz a_n je ograničen pa ima tačku nagomilavanja. Da je 0 tačka nagomilavanja niza a_n dokazuje se rezonovanjem, sličnim dokazu prethodne teoreme. Neka je $\varepsilon > 0$. Onda za $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$ svi članovi niza $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pripadaju ε okolini 0, pa i svi članovi niza a_n (za koje je $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$), što znači da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.



Slika 1.

Zadatak 2. Neka je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in N$. Ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A,$$

dokazati da niz b_n konvergira i da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Primer 6. Neka je a_n monoton niz. Dokažimo da a_n konvergira akko a_n je ograničen.

(\Leftarrow) Ako je a_n ograničen i monoton, već smo dokazali da je konvergentan.

(\Rightarrow) Pretpostavimo da je a_n monotonno rastući. Neka je a_n konvergentan i neka je $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Po definiciji konvergencije imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n) n > n_0 \Rightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Uzmimo neki takav ε i n_0 i neka je $M_0 = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{n_0}\}$. Očigledno

$$(\forall n) a_n \leq A + \varepsilon_0 + M_0,$$

pa je niz a_n ograničen. Sličan dokaz izvodimo ako je a_n opadajući niz.

2.1 Operacije na nizovima

Neka su a_n, b_n nizovi. Definišemo zbir, razliku, proizvod i količnik nizova $a + b, a - b, a \cdot b$ i $\frac{a}{b}$ redom:

$$\begin{aligned} c = a + b &\Leftrightarrow (\forall n) c_n = a_n + b_n, \\ c = a - b &\Leftrightarrow (\forall n) c_n = a_n - b_n, \\ c = a \cdot b &\Leftrightarrow (\forall n) c_n = a_n \cdot b_n, \\ c = \frac{a}{b} &\Leftrightarrow (\forall n) c_n = \frac{a_n}{b_n} \wedge b_n \neq 0. \end{aligned}$$

Očigledno je iz definicije da za svaka dva niza postoje njihovi zbir, razlika i proizvod, dok količnik postoji samo u slučaju kada su svi članovi niza imenioca različiti od 0.

Može se dokazati da ako nizovi a i b konvergiraju, onda konvergiraju i njihov zbir, razlika i proizvod, dok količnik ovih nizova konvergira akko $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Tada važi:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ kada } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0. \end{aligned}$$

Dokažimo za primer prvu od ovih formula. Neka je $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i neka je $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Po definiciji

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon' > 0)(\exists n_0) n > n_0 &\Rightarrow a_n \in (A - \varepsilon', A + \varepsilon') \quad \text{i} \\ (\forall \varepsilon' > 0)(\exists n'_0) n > n'_0 &\Rightarrow b_n \in (B - \varepsilon', B + \varepsilon'). \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Onda postoje n_0 i n'_0 tako da

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow a_n \in (A - \varepsilon', A + \varepsilon') \quad \text{i} \\ n > n'_0 &\Rightarrow b_n \in (B - \varepsilon', B + \varepsilon'). \end{aligned}$$

Za $n > \max(n_0, n'_0)$ biće

$$a_n + b_n \in (A - \varepsilon' + B - \varepsilon', A + \varepsilon' + B + \varepsilon') = (A + B - \varepsilon, A + B + \varepsilon).$$

Zadatak 3. Dokazati preostale formule.

Teorema 4. Neka je a_n kovergentan i neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Tada važi $a_n = a + c_n$, gde je c_n nula niz ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$).

Dokaz. Predstavimo niz $a_n = a + (a_n - a)$. Neka je $c_n = a_n - a$. Imamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a,$$

pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$. \square

Sledeću važnu teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 5. (KOŠIJEV PRINCIP KONVERGENCIJE). Niz a_n konvergira akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n)(\forall p > 0) \quad n > n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Do sada je prema običajima korišćena oznaka ∞ za beskonačno. Sledeća teorema je dosta korisna za razumevanje nekih okolnosti vezanih za ∞ .

2.2 Problem kontinuuma

Teorema 6. (KANTOROV DIJAGONALNI POSTUPAK). Za svaki skup X , $|X| < |P(X)|$.

Dokaz. Neka je $f: X \rightarrow P(X)$. Uočimo da je $f(x) \in P(X)$, zato $f(x) \subseteq X$. Skup $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ ne pripada kodomenu f pa zato f nije "na". (Ako je $y \in X$ takav da $f(y) = Y$, bilo bi $y \in Y \Leftrightarrow y \notin f(y) = Y$.) \square

Teorema 7. $|N| < |R|$ (Kantorov dijagonalni postupak, mala teorema - prirodnih brojeva ima manje nego realnih.)

Dokaz. $|N| < |(0, 1)| = |R|$. Pretpostavimo da je $|N| = |(0, 1)|$. Sledi da se elementi intervala $(0, 1)$ mogu poređati u niz: r_1, r_2, r_3, \dots . Neka je $r_k = 0.d_k^1 d_k^2 d_k^3 \dots$ (na primer binarni zapis, $d_k^i \in \{0, 1\}$) za $k \in N$.

Definišimo niz d_k , $k \in N$ sa $d_k \in \{0, 1\} \setminus \{d_k^k\}$ i $r = 0.d_1d_2d_3\dots$. Sledi $(\forall n)(r \neq r_n) \wedge r \in (0, 1)$, kontradikcija. Dakle, $|N| \neq |(0, 1)|$. Da je $|N| < |(0, 1)|$, uočimo neku injekciju (npr. $h(n) = \frac{1}{n+1}$) N u $(0, 1)$. \square

Zadatak 4. Dokazati da je $|P(N)| = |R|$ (koristeći **Primer 1**).

Posledica 1. Važi sledeći niz relacija:

$$\begin{aligned} |N| &< 2^{|N|} = |2^N| = |P(N)| \\ &< |P^{(2)}(N)| = |P(P(N))| = |2^R| \\ &< |P^{(3)}(N)| = |P(P(P(N)))| < \dots \end{aligned}$$

gde je

$$P^{(1)}(X) = P(X), \quad P^{(n+1)}(X) = P(P^{(n)}(x)), \quad n > 1.$$

Sledi da beskonačnih skupova različite moći (brojnosti) ima beskonačno mnogo. Neka je $T = \bigcup_{n \in N} P^{(n)}(N)$. Imamo da je za svaki $n \in N$, $|P^{(n)}(N)| < T$. Iteriramo li ova dva postupka, dobijamo vrlo dugačku beskonačnu hijerarhiju beskonačnih skupova:

$$\begin{aligned} |N| &< |P(N)| < \dots < |P^{(n)}(N)| < \dots < |T| < |P(T)| \\ &< \dots < |P^{(n)}(T)| < \dots < \left| \bigcup_{n \in N} P^{(n)}(T) \right| < \dots \end{aligned}$$

Primer 7. Za niz $n \in N$, važi

$$\begin{aligned} |P(n)| &= |2^n| = |\{f \mid f \text{ je funkcija, dom}(f) = n, |\text{codom}(f)| = 2\}| \\ &= 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

PROBLEM KONTINUUMA. Posle **Teoreme 7**, $|N| < |R|$ preostaju dve mogućnosti:

1. $\neg(\exists X) |N| < |X| < |R|$.

Ne postoji skup kardinalnosti između $|N|$ i $|R|$.

2. $(\exists X) |N| < |X| < |R|$.

Postoji skup kardinalnosti između kardinalnosti skupa prirodnih brojeva i kardinalnosti realnih brojeva.

Prvu mogućnost nazivamo Kantorovom hipotezom kontinuuma, za koju je vezan razvoj teorije skupova i matematičke logike u dvadesetom veku. Utvrđeno je da se hipoteza kontinuuma, CH ne može ni dokazati niti odbaciti, zbog čega se kontinuum hipoteza ili njena negacija može uzeti za dodatnu aksiomu teorije skupova (i cele matematike), čime se razrešava niz važnih problema matematike.

3. Redovi

Definicija 1. Neka je a_n , $n \in N$ proizvoljan niz. Uočimo pridruženi niz $S_n = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$. Beskonačana zbir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i naziva se *redom* čiji je opšti član a_n . Niz S_n je niz *parcijalnih suma* reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definicija 2. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *konverentan* akko konvergira niz njegovih parcijalnih suma. Za red koji ne konvergira kažemo još i da divergira.

Primer 1. Neka je $a_n = (-1)^n$. Red $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergira. Naime, niz parcijalnih suma ovog reda

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1, & \text{za } n \in 2N, \\ 0, & \text{za } n \in 2N - 1, \end{cases}$$

ima dve tačke nagomilavanja, pa zato divergira iako je ograničen.

Primer 2. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ za $q > 0$. Za $q = 1$, $S_n = n$ i red divergira. Za $q \neq 1$, članovi reda čine geometrijsku progresiju za koju važi da je

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ako je $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ i red divergira. Za $q < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

pa polazni red konvergira (i zbir mu je $\frac{1}{1 - q}$).

Primer 3. Redu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pridružimo red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ako drugi red konvergira, onda konvergira i prvi. U tom slučaju kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergira. Za niz $S_n = a_1 + \dots + a_n$ sledi da je

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| = |S'_{n+p} - S'_n|,$$

gde je $S'_n = |a_1| + \dots + |a_n|$ parcijalna suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, po Košijevom kriterijumu za nizove konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Obrnuta implikacija ne važi.

Teorema 1. Neophodan uslov za konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dokaz. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. Po Košijevom kriterijumu za nizove imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall p) \quad n > n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

odakle za $p = 1$ dobijamo $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \quad n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon$. \square

Ovaj uslov nije dovoljan.

Primer 4. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ naziva se harmonijski. Za njegovu 2^k -tu delimičnu sumu imamo

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_k = 1 + \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, podniz S_{2k} , $k \in N$ je monoton i neograničen i zato divergentan, pa je i polazni red divergentan.

Zadatak 1. (MAJORANTA I MINORANTA.) Neka su a_n , $n \in N$ i b_n , $n \in N$ nizovi sa nenegativnim članovima takvi da $(\forall n) a_n \leq b_n$. Važi sledeće:

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(pomoć: posmatrati nizove parcijalnih suma, ispitati njihovu monotonost i još jedno svojstvo).

Sledeće dve teoreme su vrlo korisne u ispitivanju konvergencije redova.

Teorema 2. (KOŠIJEV KRITERIJUM.) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nenegativnim članovima konvergira ako postoji $q \in [0, 1)$ i postoji n_0 tako da za sve $n > n_0$ važi

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q.$$

Red divergira ako postoje $q > 1$ i n_0 tako da za sve $n > n_0$ važi

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q.$$

Dokaz. Neka je $q \in [0, 1)$ i neka je n_0 takav da za sve $n > n_0$ važi $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Odavde sledi da za $n > n_0$ $a_n \leq q^n$, pa zato

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n = \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \frac{q^{n_0+1}}{1-q},$$

dakle, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira (prema **Zadatku 1.** i **Primeru 2.**).

Ako postoje $q > 1$ i n_0 takav, da za svaki $n > n_0$ važi $\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1$, dokaz divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ izvodimo sasvim slično koristeći divergentnu minorantu. \square

Teorema 3. (DALAMBEROV KRITERIJUM.) Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nenegativnim članovima konvergira ako postoji $q \in [0, 1)$ i postoji n_0 tako da za sve $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Red divergira ako postoje $q > 1$ i n_0 takvi da za sve $n > n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q.$$

Dokaz. Neka su $q \in [0, 1)$ i n_0 takvi da za sve $n > n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Indukcijom po k dokazujemo da važi formula

$$(\forall k) a_{n_0+1+k} \leq a_{n_0+1}q^k.$$

Za $k = 1$ očigledno.

Korak indukcije. Pretpostavimo da je formula tačna za $k = n$. Imamo

$$a_{n_0+1+n} \leq a_{n_0+1}q^n.$$

Dalje, $a_{n_0+1+(n+1)} \leq a_{n_0+1+n}q \leq a_{n_0+1}q^nq = a_{n_0+1}q^{n+1}$ (po polaznom uslovu i prethodnoj nejednakosti).

Dakle, važi $(\forall n) a_{n_0+1+n} \leq a_{n_0+1}q^n$. Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0+1} a_n + \sum_{n=n_0+2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0+1} a_n + \sum_{n=n_0+2}^{\infty} a_{n_0+1}q^n.$$

Pošto je $q \in (0, 1)$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po **Primeru 2.** i **Zadatku 1.** (ima konvergentnu geometrijsku majorantu).

Neka je $q > 1$ i neka za sve $n > n_0$ važi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$. Slično kao u prvom slučaju dokazujemo da red ima divergentnu geometrijsku minorantu i da zato divergira. \square

Primetimo da se za $q = 1$ **Teoreme 2.** i **3.** ne izjašnjavaju o konvergenciji reda.

Primer 5. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$.

Prema Dalamberovom kriterijumu imamo

$$\frac{\frac{|a^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|a^n|}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \leq \frac{|a|}{[|a|] + 1} < 1, \quad \text{za sve } n > [|a|],$$

tj. polazni red apsolutno konvergira, zato i polazni red konvergira za $a \in \mathbb{R}$.

Primer 6. Ispitajmo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, za $a > 0$. Za $a \geq 1$ red divergira. Neka je $a < 1$ i neka je $d = 1 - a$. Koristimo Dalamberov kriterijum:

$$\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \frac{n+1}{n}a.$$

Odredimo konstantu q i n_0 :

$$\frac{n+1}{n}a < 1 \Leftrightarrow (n+1)a < n \Leftrightarrow a < n(1-a) \Leftrightarrow n > \frac{a}{d}.$$

Ako za n_0 uzmemo $\left[\frac{a}{d}\right] + 1$, dobijamo:

$$1 = a + \frac{a}{1-a} > a + \frac{a}{\left[\frac{a}{1-a}\right] + 1} > \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}, \quad \text{za sve } n > n_0,$$

pa red konvergira po Dalamberovom kriterijumu.

Zadatak 2. Ispitati konvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 0.9999999999^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 1.0000000001^n.$$

Primenimo Košijev kriterijum za konvergenciju nizova na niz parcijalnih suma S_n reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Zapišimo ovaj red na sledeći način:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n.$$

Član R_n nazivamo *ostatkom reda*. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda konačni zbir S_n predstavlja aproksimaciju sume reda S . U ovom slučaju za svaki ε postoji n_0 tako da za sve $n > n_0$;

$$|S - S_n| = |R_n| < \varepsilon, \quad \text{sledi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, odnosno da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) \ n > n_0 \Rightarrow |R_n| < \varepsilon.$$

Prema Košijevom kriterijumu, konvergencija niza S_n ekvivalentna je sledećem uslovu.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall p) \ n > n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Očigledno, važi $(\forall p) \ |S_{n+p} - S_n| \leq R_n$, pa iz pretpostavke sledi uslov konvergencije, čime je dokazana

Teorema 4. Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira akko $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. \square

Sledeća teorema daje dovoljan uslov za redove kod kojih znak uzastopnih članova alternira.

Teorema 5. (LAJBNICOV KRITERIJUM.) Ako je a_n monotono opadajućí nula niz, onda red

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{konvergira.}$$

Dokaz. U nizu parcijalnih suma S_n reda $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ uočimo podnizove S_{2n-1} i S_{2n} . Iz uslova teoreme sledi da za sve n

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= S_{2n-1} + (a_{2n} - a_{2n+1}) > S_{2n-1}, \\ S_{2n+2} &= S_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) < S_{2n}. \end{aligned}$$

Neparni podniz je monotono rastući dok je parni monotono opadajući. Iz prve nejednakosti sledi $S_{2n} > S_{2n+1}$, $S_{2n} > S_{2n-1}$. Dokažimo

$$(\forall n)(\forall m) S_{2n} > S_{2m+1}.$$

Slučaj $n \geq m$ je već dokazan. Neka je $n < m$, odnosno $m = n + p$. Niz S_{2n} je monotono opadajući, zato je $S_{2n} > S_{2(n+p)}$. Iz prethodnog

$$S_{2m+1} = S_{2(n+p)+1} < S_{2(n+p)} < S_{2n}.$$

Dakle, niz S_{2n+1} , $n \in \mathbb{N}$ monotono raste i ceo je levo ($<$) od niza S_{2n} koji monotono opada, pa oba niza imaju limes. Iz $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0 \text{ i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S.$$

Red konvergira i suma mu je S . \square

Primer 7. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Razmotrimo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Očigledno važi

$$(\forall n) \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

pa po Lajbnicovom kriterijumu red konvergira.

Pogledajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$. Ako je $p \leq 0$, red divergira (ne ispunjava neophodan uslov za konvergenciju). Za $p > 0$, $(n+1)^p > n^p$, niz $\frac{1}{n^p}$ je monoton nula niz i red konvergira po Lajbnicovom kriterijumu.

Zadatak 3. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n},$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^p}.$$

Zadatak 4. Dokazati da za ostatak reda R_n iz formulacije Lajbnicovog kriterijuma:

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Zadatak 5. Utvrditi za koje vrednosti x red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergira.

4. Realne funkcije

Za funkciju f kažemo da je *realna* (sa n argumenata ili n promenljivih) ako važi $\text{dom}(f) \subseteq R^n$, $\text{codom}(f) \subseteq R$. Uobičajeno je da se realna funkcija zadaje formulom i da se potom određuje domen funkcije kao maksimalan (u smislu \subseteq) skup za koji je definiciona formula definisana. Tako na primer:

$$f(x, y, z) = x + y + \frac{z}{2},$$

je funkcija od tri promenljive, zbir $x + y + \frac{z}{2}$ je definisan za sve $(x, y, z) \in R \times R \times R$, pa je domen ove funkcije R^3 (trodimenzioni prostor), dok je $\text{codom}(f) = R$. Funkciju f možemo zapisati i na sledeći način:

$$f = \left\{ (x, y, z, x + y + \frac{z}{2}) \mid x, y, z \in R \right\}.$$

Neka je f data formulom

$$f(x, y) = x + \frac{1}{y}.$$

Uočavamo da je funkcija definisana za $x \in R$ i za $y \in R \setminus \{0\}$, pa je $\text{dom}(f) = R \times (R \setminus \{0\})$, dok je $\text{codom}(f) = R$. Zato,

$$f = \left\{ (x, y, z) \mid x \in R \wedge y \in R \setminus \{0\} \wedge z = x + \frac{1}{y} \right\}.$$

Ovde se bavimo funkcijama jedne promenljive čiji je domen podskup od R .

Primer 1. Neka je

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{za } x \in [0, +\infty), \\ -x, & \text{za } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Očigledno $\text{dom}(f) = R$, $\text{codom}(f) = [0, +\infty)$ i

$$f = \{(x, x) \mid x \in [0, +\infty)\} \cup \{(x, -x) \mid x \in (-\infty, 0)\}.$$

Neka je $g(x) = \chi_Q(x)$. Imamo

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{akko } x \in Q, \\ 0, & \text{akko } x \in R \setminus Q, \end{cases}$$

$\text{dom}(g) = R$, $\text{codom}(g) = \{0, 1\}$. Neka je $h(x) = \frac{1}{x}$. Definišimo složene funkcije

$$h(f(x)) = \frac{1}{|x|} \quad \text{i} \quad h(g(x)) = \frac{1}{\chi_Q(x)}.$$

Domen prve je $R \setminus \{0\}$, a kodomen je $(0, +\infty)$. Druga funkcija je definisana za one x , za koje je $\chi_Q(x) \neq 0$, zato je njen domen Q , a kodomen $\{1\}$ (i funkcija je konstanta).

Primer 2. Uočimo neki niz, na primer $a_n = \frac{1}{n}$, za $n \in N \setminus \{\emptyset\}$. To je funkcija

$$f = \{(1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots\} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0 \wedge x \in N\}.$$

$\text{dom}(f) = N^+$, $\text{codom}(f) = \{\frac{1}{n} \mid n \in N^+\}$, pa je i niz realna funkcija.

Primer 3. Skup

$$\{(-4, \frac{1}{16}), (-3, \frac{1}{8}), (-2, \frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\},$$

je funkcija (realna) sa domenom $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ od 8 elemenata i dobro nam služi da vizuelizujemo funkciju $f(x) = 2^x$ sa svim bitnim osobinama ($\text{dom}(f) = R$, $\text{codom}(f) = R^+$, $f > 0$, f rastuća, f teži nuli kada x teži $-\infty$, f brzo teži $+\infty$ kada x neograničeno raste).

Na sličan način

$$B = \{(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)\},$$

dosta dobro reprezentuje funkciju $y = \sin x$. Primetimo da je u ovakvom rezonovanju prisutna i opasnost pogrešnog zaključivanja. Ako za crtanje ili vizuelno predstavljanje funkcije upotrebimo one elemente domena, za koje najlakše određujemo vrednost funkcije, može se desiti da ne uočimo neko značajno svojstvo funkcije. Obrnuto, ako smo odredili ponašanje funkcije u okolini značajnih elemenata domena, obezbedićemo i dobar uvid u funkciju na celom domenu. U eksperimentalnim disciplinama je uobičajeno da se funkcija određuje merenjem, na primer

$$(t_0, f(t_0)), (t_1, f(t_1)), \dots, (t_n, f(t_n)).$$

Za ispravno zaključivanje o ponašanju funkcije f potrebno je da znamo (utvrdimo) da funkcija nema bitnih promena na intervalima sadržanim u (t_i, t_{i+1}) . Na primer

$$B \subseteq \{(x, \sin x) \mid x \in R\} \quad \text{kao što je} \quad B \subseteq \{(x, \sin(201x)) \mid x \in R\},$$

pa ako je B dobijen merenjem, onda je neophodno da znamo da je funkcija monotona na intervalima

$$\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right], \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

ili da merenje obavimo sa više detalja.

Prirodni poredak $< (\leq)$ u skupu R i njegova svojstva imaju značajnu ulogu u ispitivanju realnih funkcija. Njime je određena klasična linearnost skupa R .

Definicija 1. Funkcija f je *rastuća* na skupu A akko

$$x, y \in A \wedge x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Funkcija je *strogo rastuća* na A akko

$$x, y \in A \wedge x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Na adekvatan način se definiše opadajuća, odnosno strogo opadajuća. Funkcija je monotona na A akko zadovoljava neko od prethodnih svojstava (na skupu A).

Definicija 2. Funkcija f je *parna* akko

$$(\forall x \in \text{dom}(f)) f(x) = f(-x).$$

Funkcija f je *neparna* akko

$$(\forall x \in \text{dom}(f)) f(-x) = -f(x).$$

Definicija 3. Funkcija f je *periodična* sa periodom $T > 0$ (frekvencijom $\frac{1}{T}$) akko

$$(\forall x \in \text{dom}(f)) f(x + T) = f(x).$$

T je osnovna perioda funkcije f ako je T najmanja perioda f .

Definicija 4. Funkcija f ima *maksimum* u $a \in A$ akko

$$(\forall x \in A) x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a),$$

funkcija f ima *minimum* na skupu A u tački a akko

$$(\forall x \in A) x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

Funkcija f je *ograničena* na skupu A akko

$$(\exists r > 0)(\forall x \in A) |f(x)| < r.$$

Funkcija f ima *singularitet* u tački a akko za svaki $\varepsilon > 0$, f je neograničena na $[a - \varepsilon, a)$ ili je neograničena na $(a, a + \varepsilon]$.

Primer 4. $f(x) = \ln |1 + x|$.

Domen.

$$|1 + x| > 0 \Leftrightarrow x \neq -1; \quad \text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

Kodomen.

$$\{y \mid (\exists x \in \text{dom}(f)) y = f(x)\} = \mathbb{R}.$$

Monotonost.

$$x, y \in (-\infty, -1) \wedge x < y \Rightarrow |1 + x| > |1 + y| \Rightarrow \ln |1 + x| > \ln |1 + y|.$$

$$x, y \in (-1, +\infty) \wedge x < y \Rightarrow |1 + x| < |1 + y| \Rightarrow \ln |1 + x| < \ln |1 + y|.$$

$$\begin{aligned} f & \text{ strogo opadajuća na } (-\infty, -1), \\ f & \text{ strogo rastuća na } (-1, +\infty). \end{aligned}$$

Parnost. $f(1) \neq \pm f(-1)$, pošto $-1 \notin \text{dom}(f)$ funkcija nije parna. Iz istog razloga nije ni neparna.

Grafik funkcije je simetričan u odnosu na osu $x = -1$ pa se u odnosu na ovu osu ponaša slično kao i parna funkcija u odnosu na osu $x = 0$.

Periodičnost. Funkcija nije periodična (ovo sledi, na primer, iz stroge monotonosti funkcije).

Ograničenost. Nije ograničena.

Ekstremne vrednosti. Nema.

Tačka -1 je singularitet f : uočimo intervale $[-1 - \frac{1}{n}, -1)$, $n \in \mathbb{N}$.

Primer 5. $f(x) = x - [x]$, gde je $[x] = \max \{ k \mid k \in \mathbb{Z} \wedge k \leq x \}$.

Domen. \mathbb{R} .

Kodomen.

$$(\forall x) 0 \leq x - [x] \wedge x - [x] < 1,$$

sledi $\text{codom}(f) = [0, 1)$.

Monotonost. f raste za $x \in [k, k+1)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Parnost. Funkcija nije parna i nije neparna.

Periodičnost.

$$(\forall T \in \mathbb{N}) f(x+T) = (x+T) - [x+T] = x - [x].$$

Osnovna perioda $T = 1$.

Ograničenost. $(\forall x) f(x) \in [0, 1)$.

Ekstremne vrednosti. Za $x \in \mathbb{Z}$, f dostiže minimum 0. Nema maksimum.

Primer 6. $f(x) = \ln(-x^2)$. $\text{dom}(f) = \text{codom}(f) = f = \emptyset$. f je monotono rastuća i monotono opadajuća, parna i neparna, ograničena i neograničena.

Primer 7. Neka je $f(x)$ proizvoljna funkcija čiji je domen $(-a, a)$, $a > 0$ ili R . Definišimo g i h sa

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Očigledno:

$$\text{dom}(g) = \text{dom}(h) = \text{dom}(f),$$

$$g(-x) = g(x),$$

$$h(-x) = -h(x) \quad \text{i}$$

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

tj. f se može rastaviti na zbir parne i neparne funkcije.

4.1 Inverzna funkcija

Posmatrajmo sada, na primer, jednačinu $x^2 + y^2 = 1$. Jednačina je formula, koja za neke vrednosti promenljivih ima vrednost \top (istinita je), za neke vrednosti \perp (neistinita je). Prethodna jednačina je tačna za $x = 1$ i $y = 0$, a netačna za $x = 0 \wedge y = 2$. Ovo još iskazujemo na sledeći način: uređen par $(1, 0)$ pripada skupu rešenja jednačine (u opštem slučaju skupu za koji je polazna formula istinita), a uređen par $(0, 2)$ ne pripada skupu rešenja ove jednačine (u opštem slučaju ne pripada skupu za koji je polazna formula istinita). Ako imamo više jednačina ili nejednačina, koje čine tzv. sistem, onda imamo posla sa formulom koja se dobija povezivanjem pojedinačnih jednačina, nejednačina logičkim veznicima. Rešavanje sistema od jedne ili više jednačina, nejednačina je postupak, kojim se određuje skup rešenja, tj. onih vrednosti nepoznatih-promenljivih, za koje je sistem istinit. Skup rešenja može biti \emptyset (sistem nema rešenja) ili neprazan (sistem ima rešenja – elemente skupa rešenja).

Vratimo se na polazni primer jednačne $x^2 + y^2 = 1$. Označimo sa C skup rešenja ove jednačine. Već smo uočili da je C neprazan. Ovaj skup možemo predstaviti i na sledeći način:

$$C = \{ (x, y) \mid x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + y^2 = 1 \}.$$

Dakle C je skup tačaka Dekartove ravni R^2 . Znači, C je binarna relacija skupa R jer je $C \subseteq R^2$. Da je C krug poluprečnika 1 sa centrom u tački

$(0,0)$, čitalac bi trebalo da može da dokaže (npr. upotrebom Pitagorine teoreme). C nije funkcija jer ne zadovoljava uslov jednoznačnosti funkcije (na primer: $(0,1) \in C$ i $(0,-1) \in C$). Definišimo podskupove C_1, C_2 skupa C :

$$C_1 = \{(x,y) \mid (x,y) \in C \wedge y \geq 0\},$$

$$C_2 = \{(x,y) \mid (x,y) \in C \wedge y < 0\} = C \setminus C_1.$$

Skup C_1 sastoji se od onih elemenata (tačkaka) skupa C koji se nalaze iznad x ose u R^2 , skup C_2 se sastoji od preostalih elemenata i $C = C_1 \cup C_2$. Relacije C_1 i C_2 su funkcije koje bismo mogli zapisati sa:

$$C_1(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{za } x \in [-1,1] = \text{dom}(C_1),$$

$$C_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{za } x \in (-1,1) = \text{dom}(C_2).$$

Posmatrajmo jednačinu $y - x^2 = 0$. Skup rešenja ove jednačine je

$$P = \{(x, x^2) \mid x \in R\}.$$

Skup P je funkcija (parabola sa temenom $(0,0)$ čija je osa, osa y).

Potražimo likove (relacije) simetrične funkcijama C_1, C_2 i P u odnosu na pravu $y = x$. Dobićemo skupove (relacije) C'_1, C'_2 i P' . Lako proveravamo da nijedna od relacija C'_1, C'_2, P' nije funkcija (ne ispunjava uslov jednoznačnosti). Uočimo da se relacija P' može rastaviti npr. $P' = P'_1 \cup P'_2$ gde su

$$P'_1 = \{(x,y) \in P \mid y \geq 0\}, \quad P'_2 = \{(x,y) \in P \mid y < 0\}.$$

Dobijene relacije P'_1 i P'_2 su funkcije (neprekidne).

Neka su f i g funkcije za koje važi $\text{codom}(g) \subseteq \text{dom}(f)$, tada se kompozicija funkcija f i g , u oznaci $f \circ g$ definiše kao funkcija, za koju važi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in \text{dom}(g).$$

$f \circ g$ se još naziva i *složena funkcija*. Ako nije ispunjen prethodni uslov, onda kompoziciju definišemo kao funkciju na delu A domena g tako da $g[A] \subseteq \text{dom}(f)$ (može se desiti kao u **Primeru 6**. da je takav skup A prazan). Pošto smo za realne funkcije već uzeli sve funkcije, čiji su domen i

kodomen podskupovi od R imamo da je kompozicija realnih funkcija realna funkcija. Dakle, umesto

$$R^R = \{ f \mid f \text{ je funkcija} \wedge \text{dom}(f) = R \wedge \text{codom}(f) \subseteq R \},$$

ovde proučavamo elemente skupa

$$\bigcup_{X \in P(R)} R^X,$$

(skup parcijalnih funkcija R u R).

Označimo sa id identičnu funkciju na skupu R :

$$\text{dom}(\text{id}) = R \wedge \text{id}(x) = x,$$

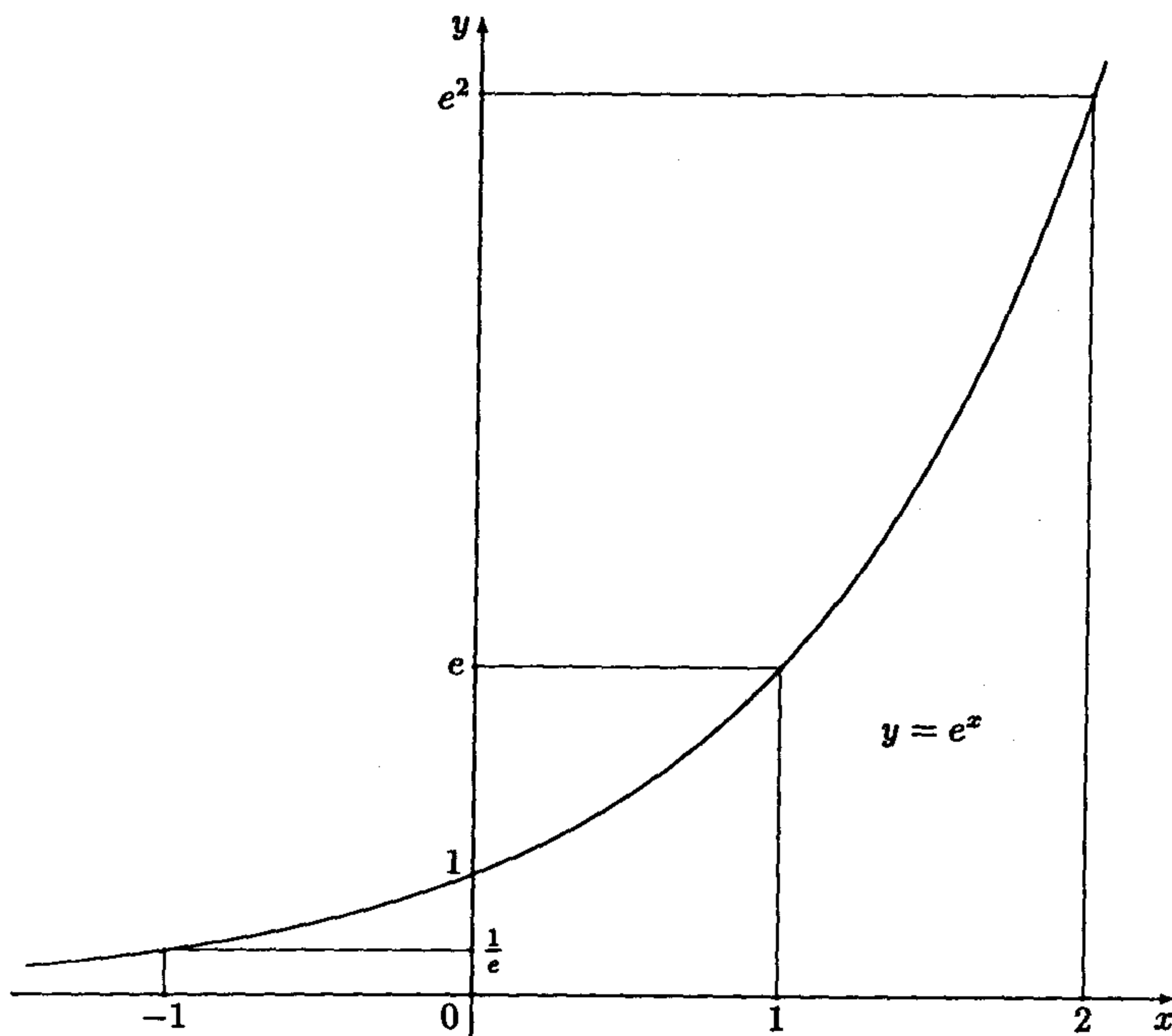
(to je prva funkcija iz matematičke prakse: $f(x) = x$). Za realnu funkciju g , zadatak traženja *inverzne* funkcije jeste zadatak rešavanja funkcionalne jednačine $f \circ g = \text{id}$, preciznije, rešavanje funkcionalne jednačine

$$(\forall x \in \text{dom}(g)) (f \circ g)(x) = \text{id}(x).$$

Ovo je jednačina po nepoznatoj funkciji f . Funkciju f , za koju važi ovaj uslov, nazivamo inverznom funkcijom funkcije g i označavamo je sa g^{-1} . Dakle, $g^{-1} \circ g = \text{id}$ (na domenu g). Uobičajeno je da se kaže da je g^{-1} jedinstvena, da je inverzna funkcija funkcije g^{-1} polazna funkcija, tj. $(g^{-1})^{-1} = g$. Upozoravamo da $g^{-1}(x)$ nije (osim slučajno) jednaka $\frac{1}{g(x)}$. Nažalost, i ova oznaka proizvodi dvosmislice. Razmotrimo prvo sledeće primere.

Primer 8. $g(x) = e^x$. Jednačina $(f \circ g)(x) = x$, $x \in \text{dom}(g) = R$ postaje $(\forall x \in R^+) f(e^x) = x$ i ima rešenje $f(x) = \ln x$, odnosno $g^{-1}(x) = f(x) = \ln x$. Za složenu funkciju $g^{-1} \circ g$ imamo:

$$\begin{aligned} \text{dom}(g^{-1} \circ g) &= \text{dom}(g) = R, \\ \text{codom}(g^{-1} \circ g) &= \text{codom}(g^{-1}) = R. \end{aligned}$$



Slika 1.

Obrnuto, za inverznu funkciju funkcije $f(x) = \ln x$ postavljamo jednačinu $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $x \in \text{dom}(f) = (0, +\infty)$, odnosno

$$f^{-1}(\ln(x)) = x, \quad x \in (0, +\infty),$$

čije je rešenje $f^{-1}(x) = e^x$, $x \in \text{codom}(f) = \mathbb{R}$. Za složenu funkciju $f^{-1} \circ f$ važi:

$$\begin{aligned} \text{dom}(f^{-1} \circ f) &= \text{dom}(f) = (0, +\infty), \\ \text{codom}(f^{-1} \circ f) &= \text{codom}(f^{-1}) = (0, +\infty). \end{aligned}$$

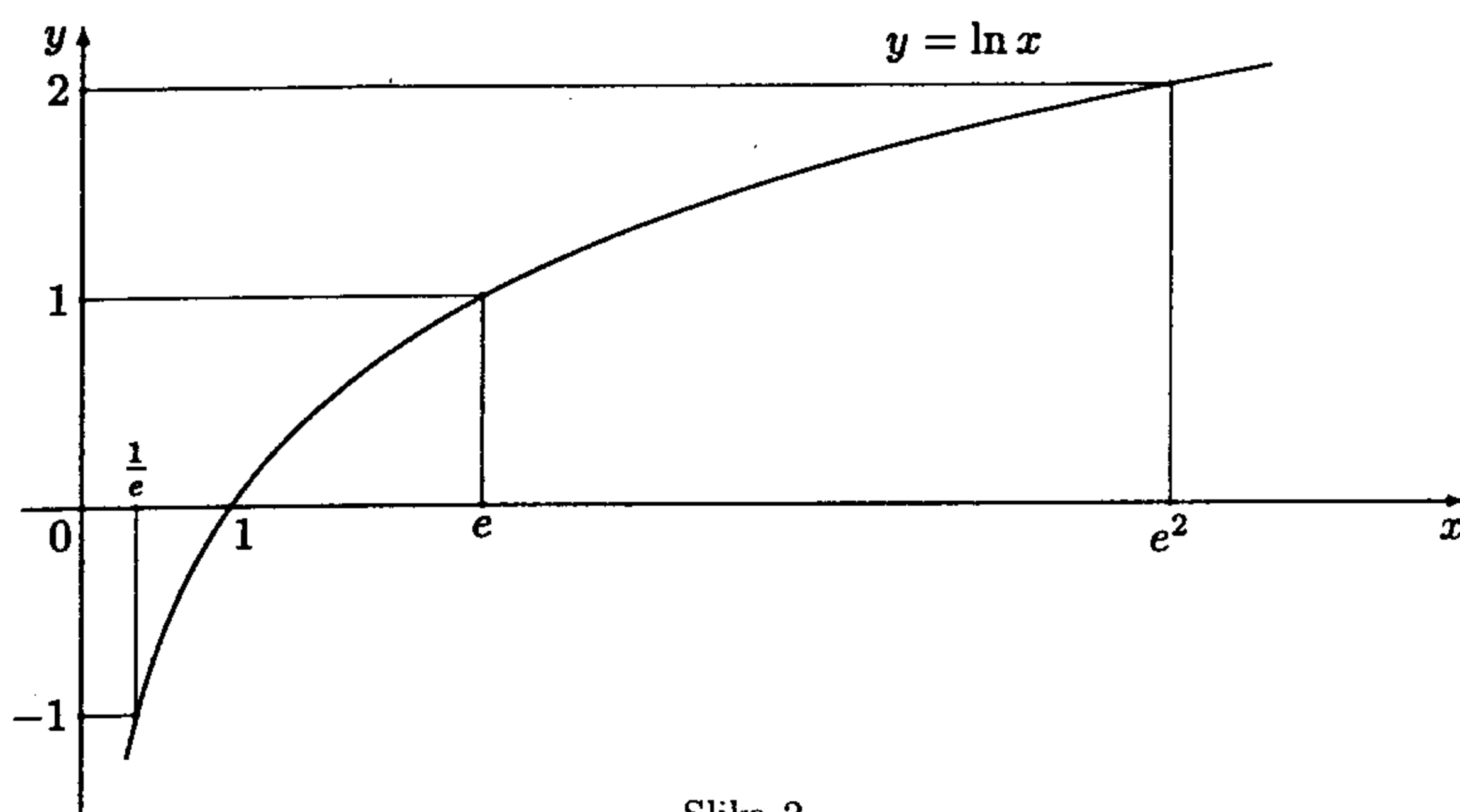
Pošto je

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ g)(x) &= x, \quad x \in \text{dom}(g) = \mathbb{R} \text{ i} \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= x, \quad x \in \text{dom}(f) = (0, +\infty), \end{aligned}$$

zaključujemo da funkcije $g^{-1} \circ g$ i $f^{-1} \circ f$ nisu jednake (domeni su im različiti). Pošto je $f = g^{-1}$ i $g = f^{-1}$ dobijamo $f \circ g \neq g \circ f$.

Dakle, za $g(x) = e^x$, jednačina $(f \circ g)(x) = x$, $x \in \text{dom}(g) = \mathbb{R}$, ima rešenje $g^{-1}(x) = \ln x$, $x \in \text{codom}(g) = (0, +\infty)$. Da je to rešenje jedinstveno, proveravamo na sledeći način. Neka je h takva funkcija, da važi $(h \circ g)(x) = x$, $x \in \text{dom}(g) = \mathbb{R}$. Onda važi:

1. h je definisana za $y \in \text{codom}(g) = (0, +\infty)$ i
2. $(\forall x \in \text{dom}(g)) h(g(x)) = h(e^x) = x$, pa sledi da $h(y)$ zadovoljava definiciju $\ln y$ i definisana je na $(0, +\infty)$, pa se funkcije g^{-1} i h poklapaju.



Slika 2.

Primer 9. Neka je $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Potražimo f^{-1} . Funkcija f je parabola sa nulama $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ i temenom $(1, -4)$. Odavde, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{codom}(f) = [-4, +\infty)$. Za f^{-1} , $\text{dom}(f^{-1}) = [-4, +\infty)$, $\text{codom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$ i znamo da su f i f^{-1} simetrične u odnosu na id , tj. $y = x$. Pošto f^{-1} vraća slike od f u njihove originale, izraz $y = x^2 - 2x - 3$, kojim je funkcija f definisana eksplicitno po x , transformišimo u $x = g(y)$ rešavanjem $x^2 - 2x - 3 - y = 0$ po x . Imamo $x = 1 \pm \sqrt{1 + 3 + y}$, odnosno

$$x = 1 \pm \sqrt{4 + y},$$

pa je $f^{-1}(y) = 1 \pm \sqrt{4 + y}$, odnosno $f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{4 + x}$. Vidimo da ovde jednom originalu (y) odgovaraju dve slike ($1 + \sqrt{4 + y}$ i $1 - \sqrt{4 + y}$), što je i prirodno, budući da polazna funkcija f slika po dva originala u

jednu sliku. Sledi da f^{-1} nije funkcija, pa f nema inverznu funkciju. Lako zaključujemo da, ako f nije monotona, onda f nema inverznu funkciju. Problem razrešavamo na sledeći način. Rastavimo domen f na delove, na kojima je f strogo monotona (zato "1-1"): $\text{dom}(f) = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty)$ i uvedimo f_1 i f_2 :

$$\begin{aligned} \text{dom}(f_1) &= (-\infty, 1], & f_1(x) &= f(x), & x &\in \text{dom}(f_1), \\ \text{dom}(f_2) &= (1, +\infty), & f_2(x) &= f(x), & x &\in \text{dom}(f_2). \end{aligned}$$

Funkcije f_1 i f_2 su "1-1" na svojim domenima i još važi $f = f_1 \cup f_2$, odnosno

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (-\infty, 1], \\ f_2(x), & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Funkcije f_1 , f_2 imaju inverzne

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(x) &= 1 - \sqrt{4+x}, & \text{dom}(f_1^{-1}) &= [-4, +\infty) = \text{codom}(f_1), \\ & & \text{codom}(f_1^{-1}) &= (-\infty, 1] = \text{dom}(f_1); \\ f_2^{-1}(x) &= 1 + \sqrt{4+x}, & \text{dom}(f_2^{-1}) &= (-4, +\infty) = \text{codom}(f_2), \\ & & \text{codom}(f_2^{-1}) &= (1, +\infty) = \text{dom}(f_2). \end{aligned}$$

f^{-1} je inverzna relacija polazne relacije f ,

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\}, \quad \text{i važi} \quad f^{-1} = f_1^{-1} \cup f_2^{-1}.$$

Zaključujemo u opštem slučaju, ako je data funkcija f lepo rastavljiva po domenu na strogo monotone, onda se tim strogo monotoniim funkcijama pridružuju inverzne funkcije, koje još nazivamo inverznim granama polazne funkcije.

Razmotrimo slučaj konstante na skupu A : $f: A \rightarrow \{c\}$, tj. $(\forall x \in A) f(x) = c$. Ovde je $f^{-1} = \{(c, x) \mid x \in A\} = \{(c, x) \mid (x, c) \in f\}$. Da bismo našli inverzne grane, neophodno je da domen f sasvim usitnimo:

$$\text{dom}(f) = A = \bigcup_{x \in A} \{x\},$$

čime se f rastavlja na monotone parčiće, svaki sa po jednim uređenim parom:

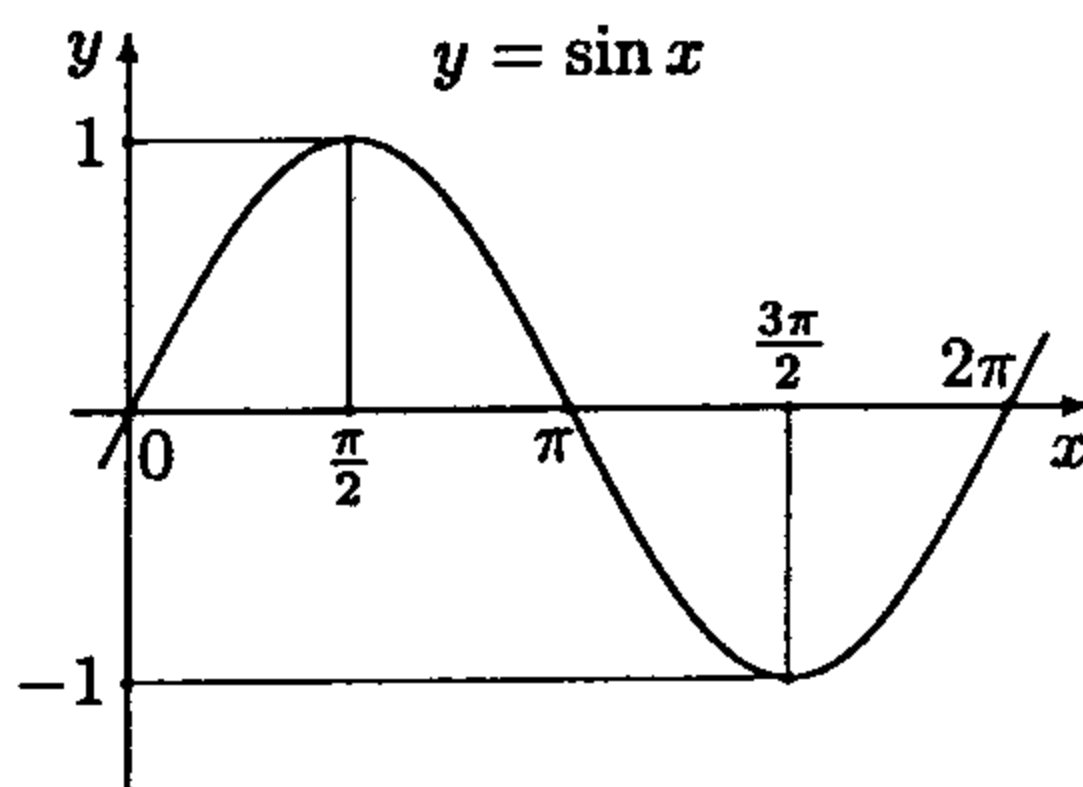
$$f = \bigcup_{x \in A} \{(x, c)\}.$$

Očigledno $(\forall x \in A) \{(x, c)\}$ je monotona funkcija i može se obaviti prethodni postupak. Ako stavimo

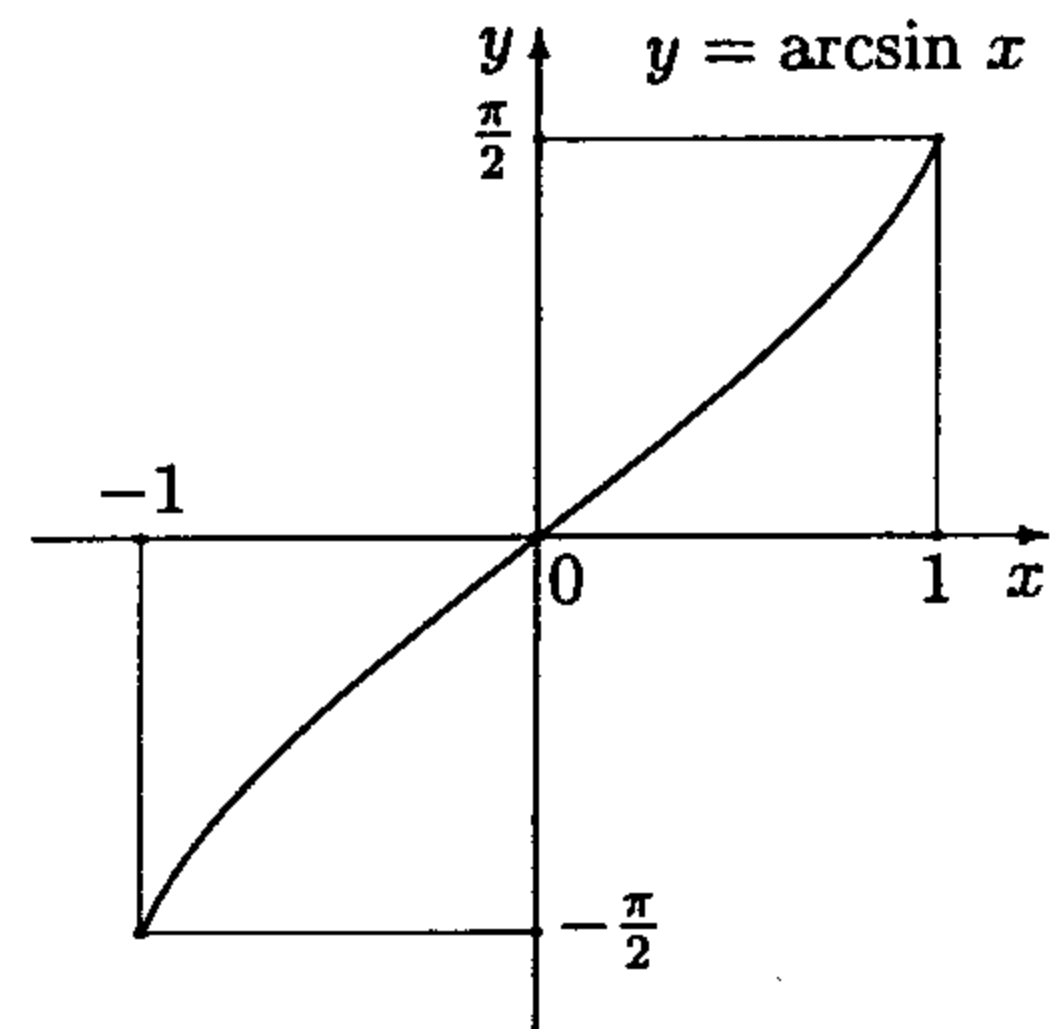
$$f_x = \{(x, c)\}, \quad \text{dom}(f_x) = \{x\}, \quad \text{codom}(f_x) = \{c\},$$

i $(\forall x \in A) f_x^{-1} = \{(c, x)\}$. Ovde inverznoj grani ima koliko i elemenata polaznog domena. Za $A = \mathbb{R}$, inverznoj grani ima kontinuum mnogo.

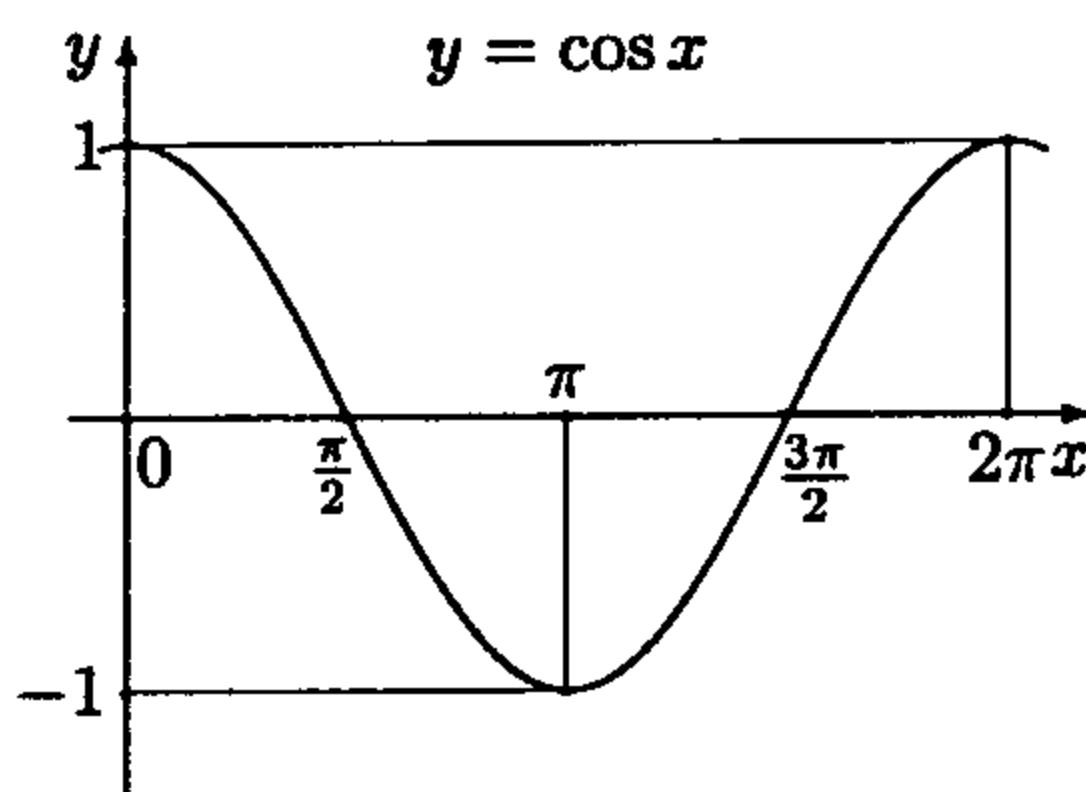
Primer 10. Grafici osnovnih trigonometrijskih funkcija i njihovih inverzних funkcija dati su na slikama 3, 4, 5, 6, 7, 8. i 9.



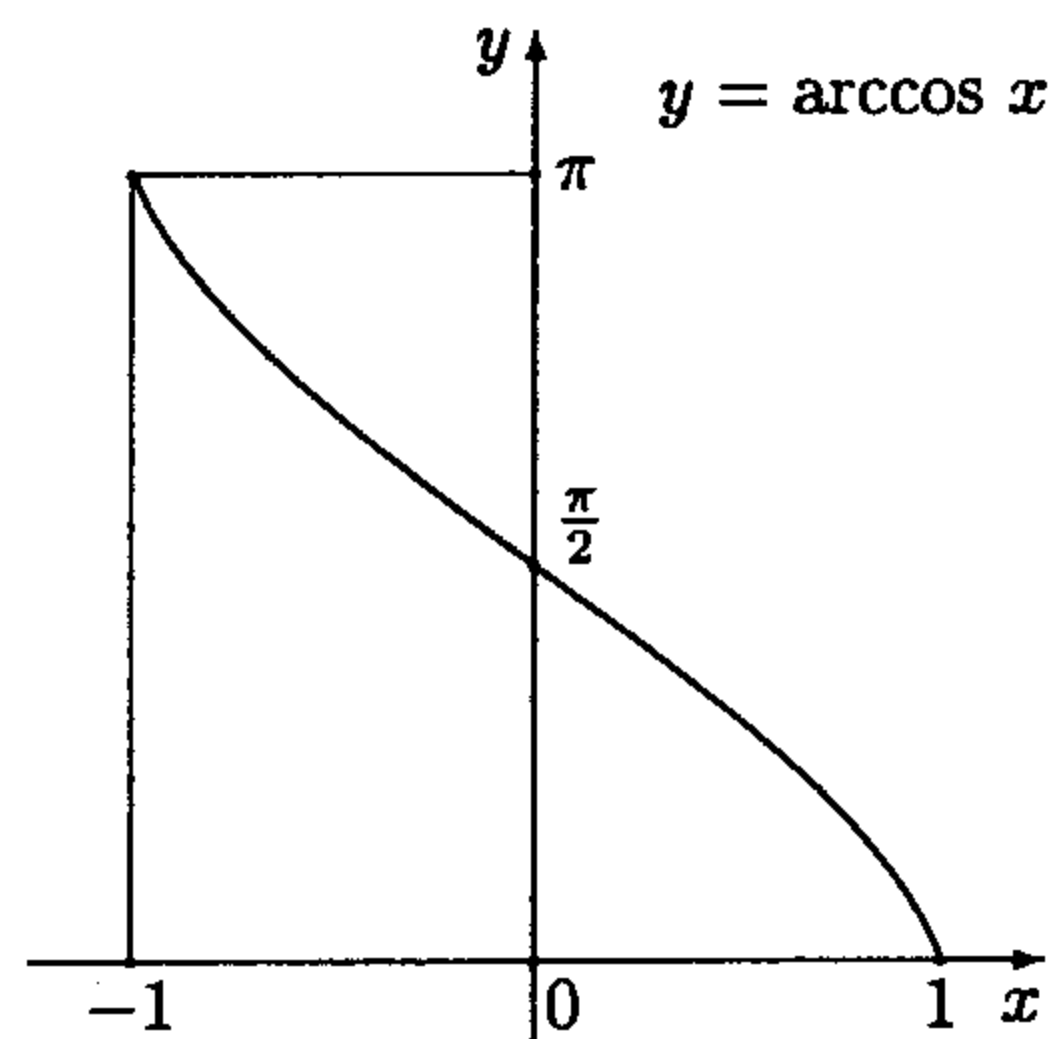
Slika 3.



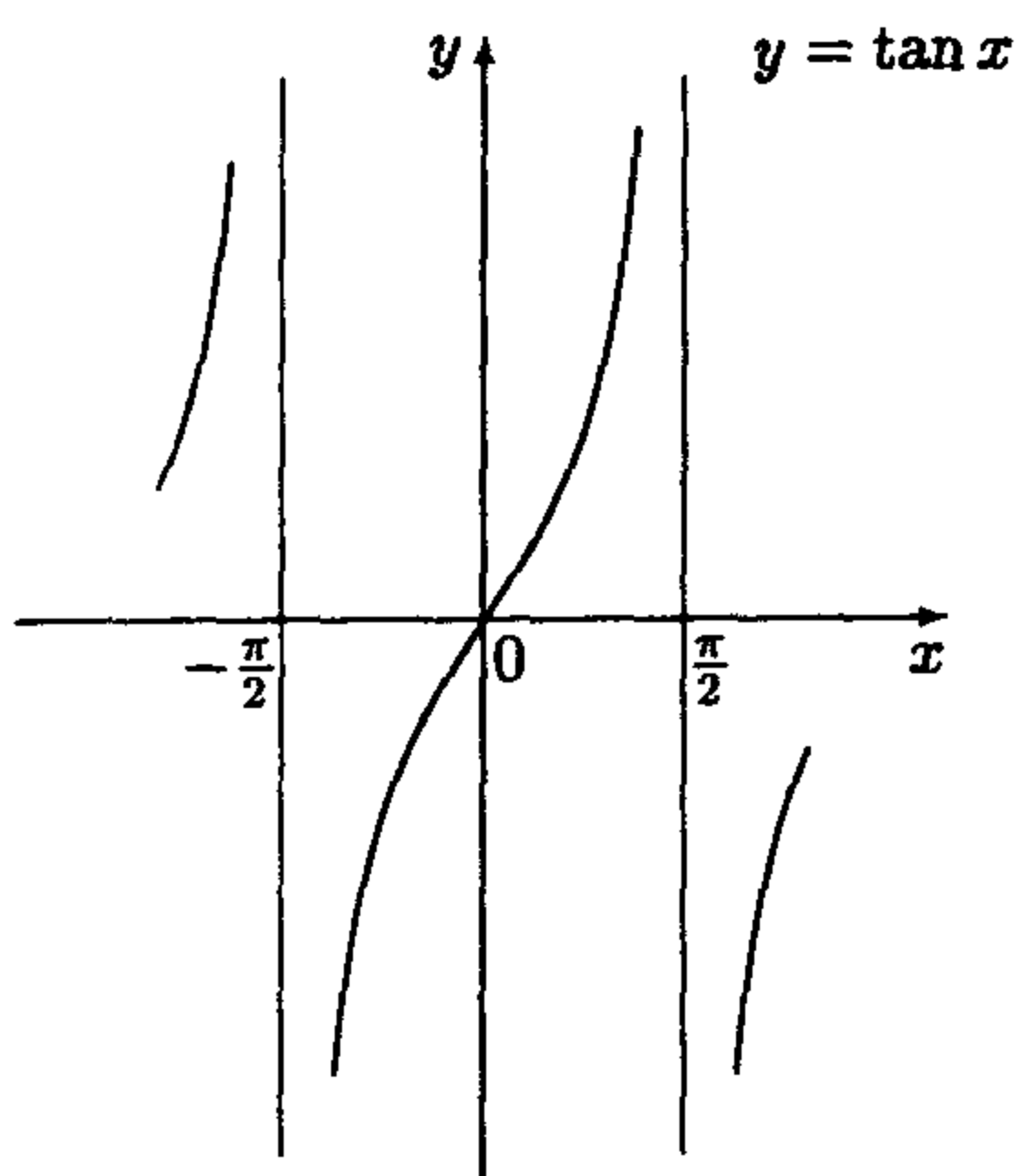
Slika 4.



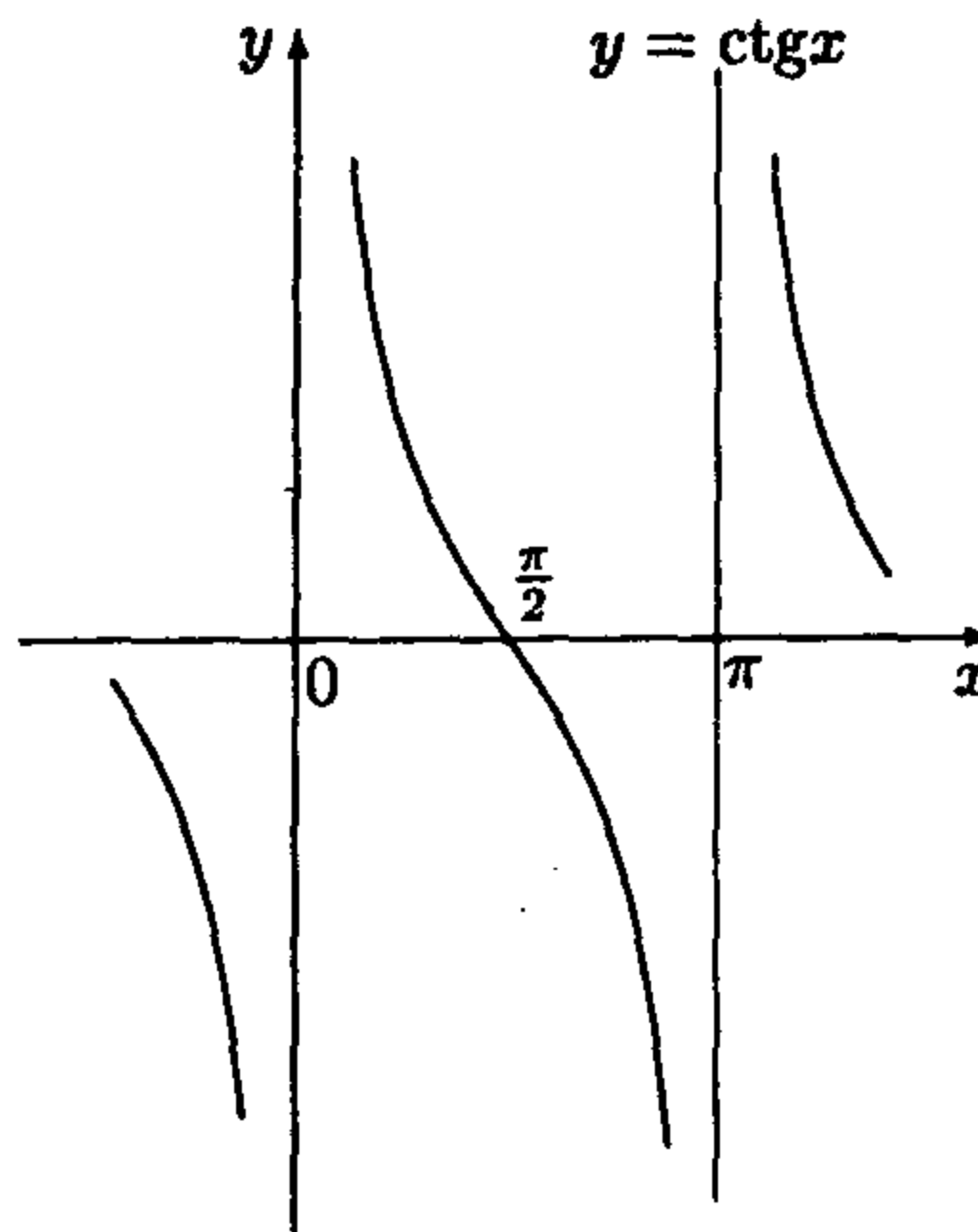
Slika 5.



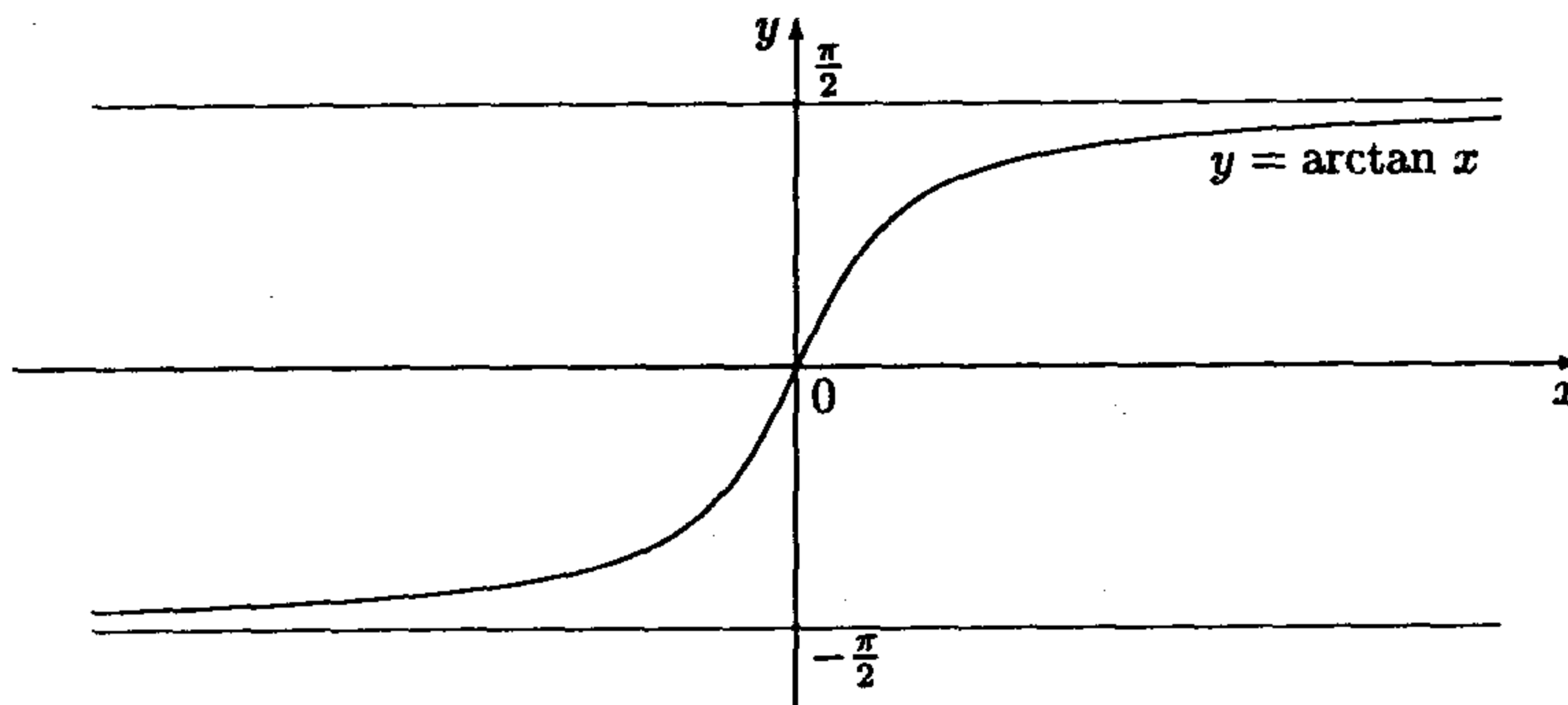
Slika 6.



Slika 7.

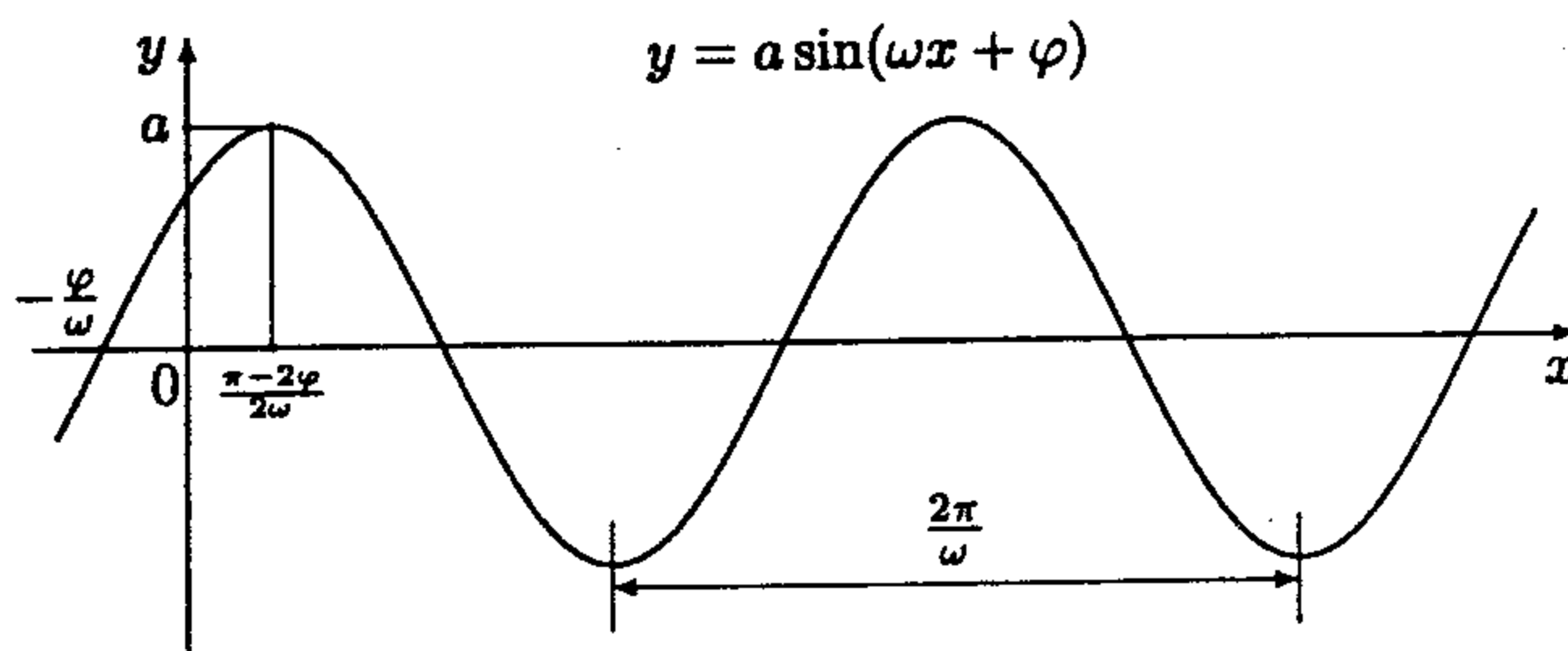


Slika 8.



Slika 9.

Primer 11. Na slici 10 prikazana je formula $y = a \sin(\omega x + \varphi)$ koja uopštava funkcije $\sin x$ i $\cos x$. Ekstremne vrednosti ove funkcije su u tačkama $\frac{\pi - 2\varphi}{2\omega} + \frac{k\pi}{\omega}$, gde $k \in \mathbb{Z}$. Parametar a je *amplituda* ("otklon od ravnotežnog položaja"), φ je *fazni pomak* koji određuje translaciju duž x ose grafika funkcije $y = a \sin \omega x$.



Slika 10.

4.2 Granična vrednost

Definicija 5. Neka je f takva da za neki c , $(c, +\infty) \subseteq \text{dom}(f)$. A je *granična vrednost funkcije* f kada x teži $+\infty$, u oznaci $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall x) x > n_0 \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon.$$

Ako, kada x teži $+\infty$, $f(x)$ neograničeno raste, onda $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vidimo da se gornja definicija poklapa sa limesom niza, gde argument funkcije n teži $+\infty$ preko domena niza N , dok se ovde događa isto sa realnom funkcijom čiji argument teži $+\infty$ preko realnog domena.

Definicija 6. Neka je za neko c , $(c, a) \subseteq \text{dom}(f)$. A je *levi limes* $f(x)$ kada x teži a , u oznaci $A = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x) x \in (c, a) \cap (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ akko

$$(\forall M > 0)(\exists \delta)(\forall x) x \in (c, a) \cap (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) > M.$$

Definicije *desnih limesa* $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, kao i sve definicije $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ i

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, ostavljamo čitaocu.

Definicija 7. A je granična vrednost funkcije f kada x teži a u oznaci $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ akko

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A.$$

Slično se definišu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Primer 12. Za $f(x) = \frac{1}{x}$ odrediti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Imamo $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ jer } (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) x \in (-\delta, 0) \Rightarrow f(x) < M,$$

što sledi iz

$$(\forall M < 0)(\forall x) x \in \left(\frac{1}{M}, 0\right) \Leftrightarrow f(x) < M.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ jer važi } (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) x \in (0, \delta) \Rightarrow f(x) > M,$$

što sledi iz

$$(\forall M > 0)(\forall x) x \in \left(0, \frac{1}{M}\right) \Leftrightarrow f(x) > M.$$

Pokažimo da

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \frac{1}{7} \text{ akko } (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) |x - 7| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{7} \right| < \varepsilon.$$

Treba naći δ u zavisnosti od ε . Zato podimo od proizvoljnog $\varepsilon > 0$ i desne strane implikacije. Za $\varepsilon \geq \frac{1}{7}$ stavimo $\delta = 1$, za $\varepsilon \in (0, \frac{1}{7})$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{7} \right| < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{7} - \varepsilon < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{7} + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - 7\varepsilon}{7} < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{x} < \frac{1 + 7\varepsilon}{7} \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{1 - 7\varepsilon} > x \wedge x > \frac{7}{1 + 7\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow \frac{7(1 - 7\varepsilon + 7\varepsilon)}{1 - 7\varepsilon} > x \wedge x > \frac{7(1 + 7\varepsilon - 7\varepsilon)}{1 + 7\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow 7 + \frac{49\varepsilon}{1 - 7\varepsilon} > x \wedge x > 7 - \frac{49\varepsilon}{1 + 7\varepsilon}. \end{aligned}$$

Sledi da ako za δ uzmemo $\frac{49\varepsilon}{1+7\varepsilon}$, onda

$$|x - 7| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{7} \right| < \varepsilon.$$

Napomenimo da smo za δ mogli uzeti 24ε ili 3ε ako je $\varepsilon \in (0, \frac{1}{7})$. U definiciji limesa ($\forall \varepsilon > 0$) ($\exists \delta$) čitamo za svaki $\varepsilon > 0$ postoji δ , znači da δ treba izraziti preko ε tako da važi ostatak formule. Implikacija će svakako važiti ako umesto δ uzmemo δ' takvo da $0 < \delta' < \delta$, tj. ako δ okolinu suzimo.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ dokazuje se na istovetan način kao $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Primer 13. Uzmimo funkciju χ_Q i proizvoljan $a \in R$. Skup racionalnih brojeva Q je gust u R , tj.

$$(\forall r_1, r_2 \in R)(\exists q \in Q) q \in (r_1, r_2).$$

Skup $I = R \setminus Q$ iracionalnih brojeva je takođe gust u R i $I \cap Q = \emptyset$. Funkcija χ_Q nema limes kad x teži a . Ako uzmemo proizvoljno malu okolinu $(a - \delta, a + \delta)$ tačke a , zbog $(a - \delta, a + \delta) \cap Q \neq \emptyset$ i $(a - \delta, a + \delta) \cap I \neq \emptyset$, funkcija $\chi_Q(x) = 1$ za $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap Q$ i $\chi_Q(x) = 0$ za $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap I$. Sledi da za svaki $A \in R$ i svaki $\delta > 0$, postoji $x \in (a - \delta, a + \delta)$ tako da $|A - \chi_Q(x)| \geq \frac{1}{2}$, pa A nije limes $\chi_Q(x)$ kad x teži a . Drugim rečima, funkcija χ_Q je bez limesa na celom domenu.

Teorema 1. Ako postoje $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, onda

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow a} g(x));$
4. iz $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ sledi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$

Dokaz. Neka je $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

Za $\varepsilon > 0$ neka su δ', δ'' takvi da: $x \in (a - \delta', a + \delta')$ povlači $f(x) \in (A - \frac{\varepsilon}{2}, A + \frac{\varepsilon}{2})$; $x \in (a - \delta'', a + \delta'')$ povlači $g(x) \in (B - \frac{\varepsilon}{2}, B + \frac{\varepsilon}{2})$. Neka je $\delta = \min(\delta', \delta'')$, onda $x \in (a - \delta, a + \delta)$ povlači

$$|A - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |B - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

odakle i iz sledeće nejednakosti sledi 1.

$$|(A + B) - (f(x) + g(x))| \leq |A - f(x)| + |B - g(x)| < \varepsilon.$$

4. $B \neq 0$, neka je na primer $B > 0$. Odavde sledi da postoji neka δ_1 , okolina tačke a i brojevi $M > m > 0$ takvi da $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)$ povlači $m < g(x) < M$, odnosno $\frac{1}{m} > \frac{1}{g(x)} > \frac{1}{M}$. Tada

$$\begin{aligned} \left| \frac{A}{B} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| &= \frac{|Ag(x) - Bf(x)|}{|Bg(x)|} \leq \frac{|Ag(x) - AB + AB - Bf(x)|}{Bm} \\ &\leq \frac{|A|}{Bm} \cdot |B - g(x)| + \frac{B}{Bm} \cdot |A - f(x)|. \end{aligned}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i neka je

$$\varepsilon' = \frac{Bm}{|A| + B} \varepsilon,$$

onda postoje δ' i δ'' tako da $x \in (a - \delta', a + \delta') \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon', A + \varepsilon')$ i $x \in (a - \delta'', a + \delta'') \Rightarrow g(x) \in (B - \varepsilon', B + \varepsilon')$. Neka je $\delta = \min(\delta_1, \delta', \delta'')$, onda za $x \in (a - \delta, a + \delta)$ imamo $|A - f(x)| < \varepsilon'$ i $|B - g(x)| < \varepsilon'$. Odavde sledi

$$\frac{|A|}{Bm} \cdot |B - g(x)| + \frac{B}{Bm} \cdot |A - f(x)| < \frac{|A|}{Bm} \varepsilon' + \frac{B}{Bm} \varepsilon' = \frac{|A| + B}{Bm} \varepsilon' = \varepsilon,$$

odnosno

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

Za $B < 0$ postupa se na sličan način. Odgovarajuća teorema važi za limese kad x teži $+\infty$, odnosno $-\infty$. \square

Primer 14. Odrediti sledeće limese: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \ln x)$, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^n}{\sin x}$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2}$.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \ln x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} \ln x,$$

jer limesi s desne strane postoje. Ostatak ostavljamo čitaocu, kao i da je

$$\lim_{x \rightarrow e} x^n = e^n \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow e} \sin x = \sin e \neq 0,$$

pa

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^n}{\sin x} = \frac{e^n}{\sin e}.$$

$$(|\sin e - \sin x| = \left| 2 \sin \frac{e-x}{2} \cos \frac{e+x}{2} \right| \leq \left| 2 \sin \frac{e-x}{2} \right| \leq |e-x|).$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0 \quad \text{jer} \quad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad x > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} (= M) \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Iz poslednjeg primera vidimo da važi sledeće: ako je $f(x)$ ograničena, a $g(x)$ teži nuli kada x teži a (ili $+\infty$ ili $-\infty$), onda $f(x) \cdot g(x)$ teži nuli.

Primer 15. Odrediti $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$.

U oba slučaja prethodna teorema je neprimenljiva direktno.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4;$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2+x+1) - 3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Teorema 2. Neka je $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ za $x \in (a - \delta, a)$. Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = A$, onda je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$.

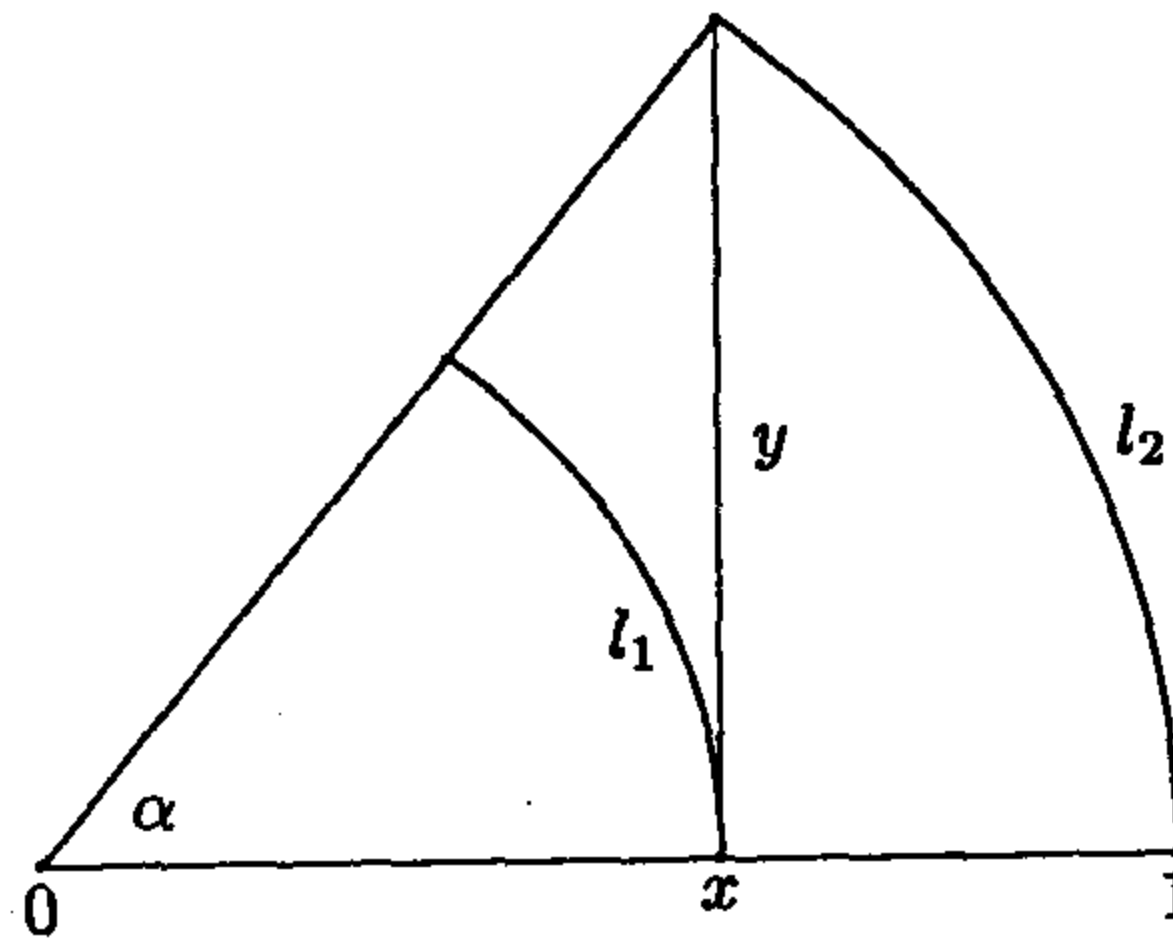
Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Onda postoje δ', δ'' tako da

$$x \in (a - \delta', a) \Rightarrow g(x) \in (A - \varepsilon, A) \quad \text{i}$$

$$x \in (a - \delta'', a) \Rightarrow h(x) \in (A - \varepsilon, A).$$

Ako je $\delta = \min(\delta', \delta'')$, onda $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow \{g(x), f(x), h(x)\} \subseteq (A - \varepsilon, A)$. Na sličan način dokazuje se ova teorema kad $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. \square

Primer 16. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$. Uočimo ugao α u jediničnom krugu (vidi sliku 11.), dužina luka $l_2 = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$, $l_1 = \frac{\pi x}{180^\circ} \alpha$, odnosno u radijanima $l_2 = \alpha$, $l_1 = x\alpha$. Očigledno $l_1 < y < l_2$ tj. $x\alpha < \sin \alpha < \alpha$, tj. $\alpha \cos \alpha < \sin \alpha < \alpha$.



Slika 11.

Sledi $\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$ pa po **Teoremi 2.** imamo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos \alpha = 1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 1,$$

sledi $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Da je $\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ ostavljamo čitaocu.

Teorema 3. Neka je $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ i neka je $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$. Onda je $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = B$.

Dokaz. Po pretpostavci za svaki $\varepsilon > 0$ postoji δ' tako da $t \in (A - \delta', A + \delta')$ povlači $|f(t) - B| < \varepsilon$; za svaki ε' , pa i za $\varepsilon' = \delta'$, postoji δ tako da iz $x \in (a - \delta, a + \delta)$ sledi $g(x) \in (A - \delta', A + \delta')$. Dakle, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji δ tako da $x \in (a - \delta, a + \delta)$ povlači $f(g(x)) \in (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$. Slično se dokazuju i varijante teoreme za $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$. \square

Primer 17. Naći sledeće limese: $\lim_{x \rightarrow 0} a^{\sin x}$, ($a > 0$), $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{t^2}$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} a^{\sin x} = a^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x} = a^0 = 1;$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{t^2} = \cos \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \right) = \cos 0 = 1;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \operatorname{tg} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \operatorname{tg} 1.$$

Zadatak 1. Odrediti sledeće limese: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

4.3 Neprekidnost

Definicija 8. Funkcija $f(x)$ je *neprekidna* u tački a akko

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Po definiciji neprekidnosti funkcija može biti neprekidna samo u tačkama koje pripadaju njenom domenu.

Primer 18. Funkcija sgn (*signum*) definiše se izrazom

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Očigledno, sgn je neprekidna za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. U 0 funkcija ima prekid jer
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1$, $\text{sgn}(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1$.

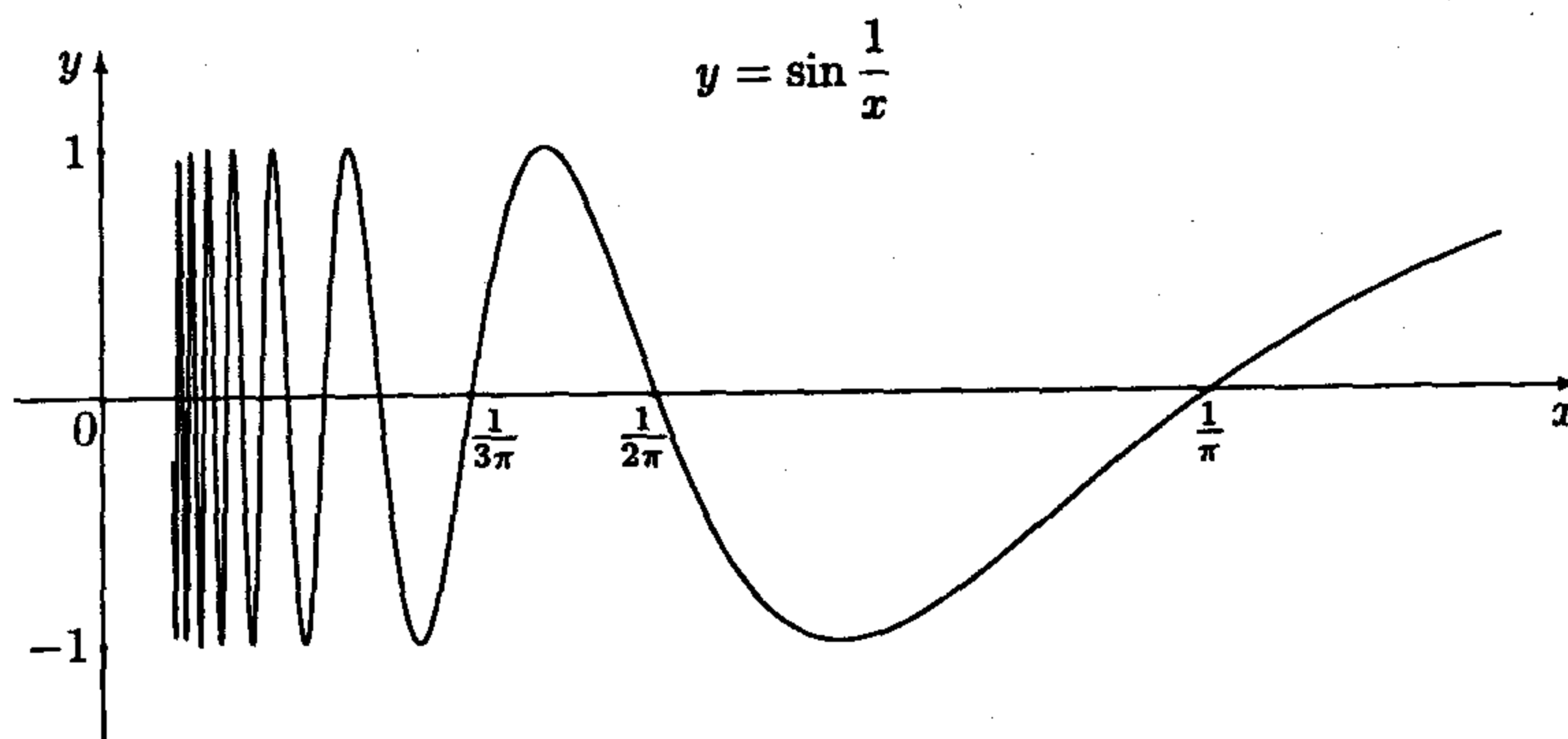
Ovakav prekid naziva se *prekid prve vrste*.

Primer 19. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Imamo $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Proveru da je f neprekidna u svakoj tački domena ostavljamo čitaocu. Za $x \in \{-1, 1\}$ funkcija nije definisana. Tada imamo

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Ako je $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, onda kažemo da je $x = a$ vertikalna asimptota i da $f(x)$ teži $\pm\infty$ kada x teži a sleva. Slično važi ako x teži a s desne strane. U ovim slučajevima kažemo da funkcija ima prekid druge vrste.

Primer 20. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Obe funkcije su definisane za $x \neq 0$ i neprekidne su na celom domenu. Funkcija $\sin \frac{1}{x}$ osciluje između -1 i 1 kada x prilazi 0 i ne postoje $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$. Za drugu funkciju, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$, pa ova ima limes i prekid.



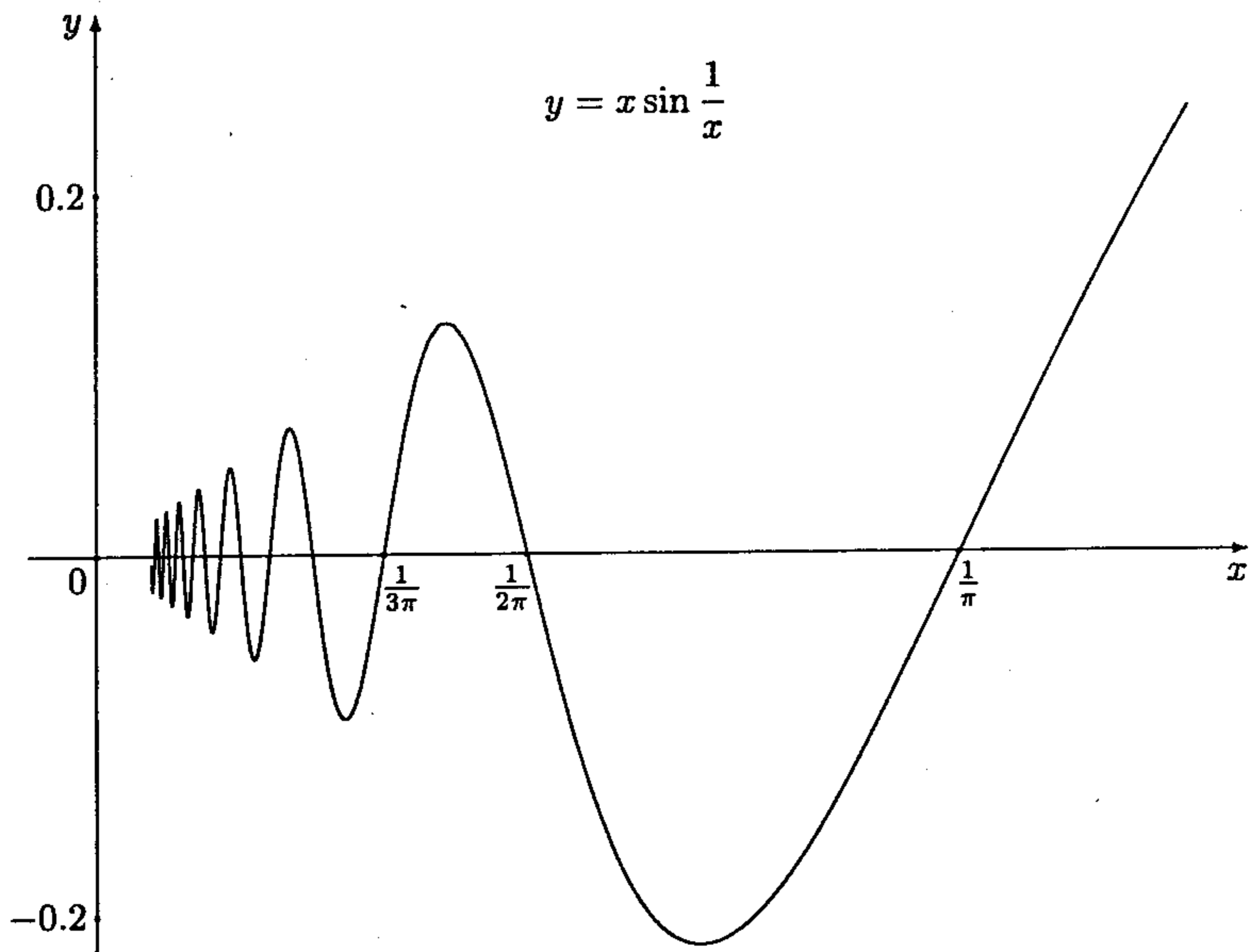
Slika 12.

Ako uvedemo h sa

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

vidimo da se funkcija g može produžiti funkcijom h koja je neprekidna na \mathbb{R} .

Koristeći **Teoremu 2.** dokazuje se neprekidnost zbira, razlike, proizvoda i količnika (gde je imenilac različit od nule) neprekidnih funkcija. Upotrebom **Teoreme 3.** dokazuje se da ako su f i g neprekidne i $\text{codom}(g) \subseteq \text{dom}(f)$, onda je neprekidna složena funkcija $f \circ g$.

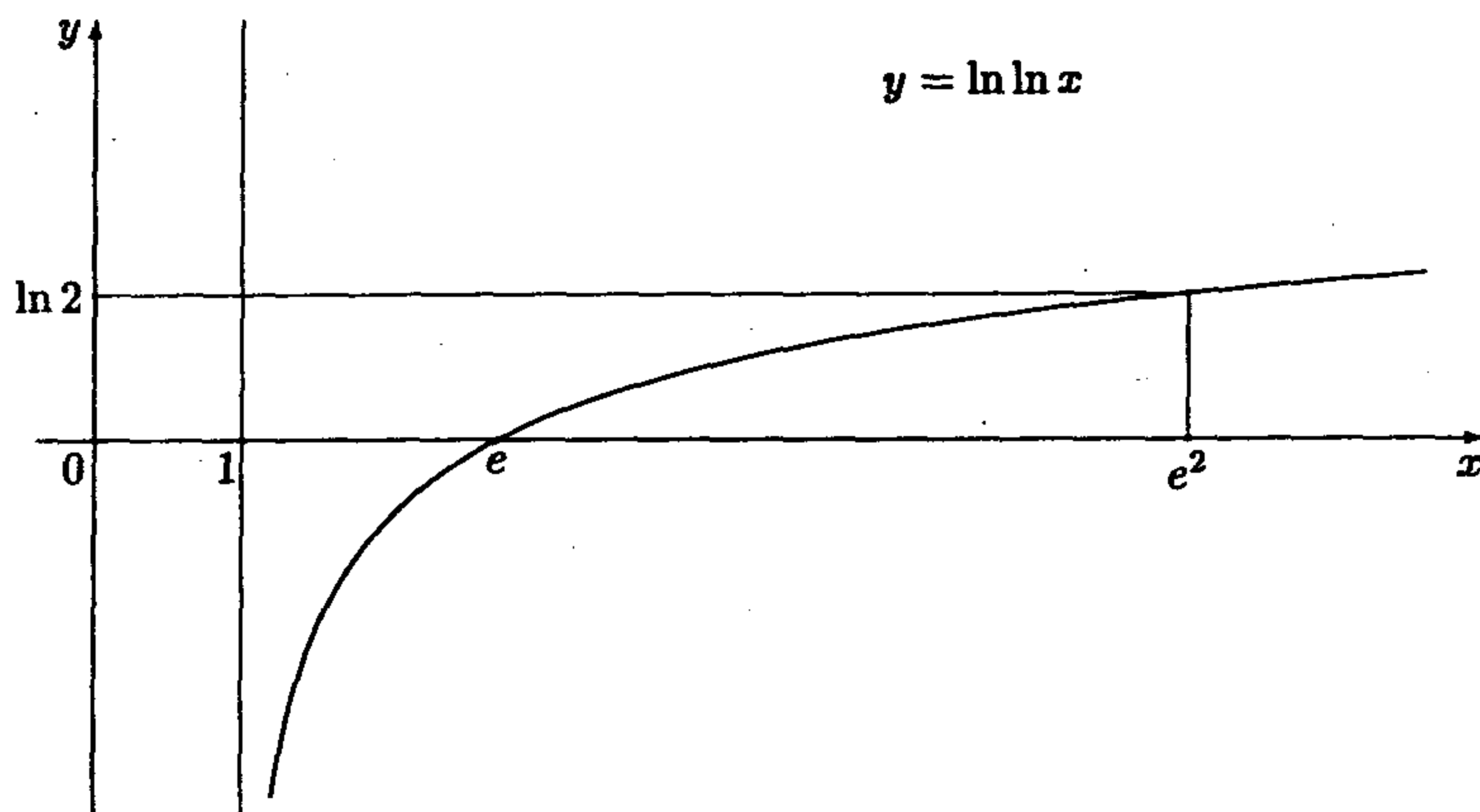


Slika 13.

Primer 21. Funkcija $f(x) = \text{tg } x$ ima prekide u tačkama $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcija $g(x) = \ln \left| \sin \frac{1}{x} \right|$ ima prekide za $\frac{1}{x} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. za

$x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Znači, u intervalu $(0, \frac{1}{\pi})$ ova funkcija ima prebrojivo mnogo prekida (druge vrste). Funkcija $\chi_Q(x)$ nije neprekidna ni u jednoj tački jer nigde nema limes.

Primer 22. Funkcija $f(x) = \ln \ln x$, slika 14. Domen je interval $(1, +\infty)$, sa vertikalnom asimptotom u $x = 1$. $\text{Codom}(f) = \mathbb{R}$ i grafik ove funkcije podseća na funkciju $f(x) = \ln x$.



Slika 14.

5. Izvod

Definicija 1. Za funkciju $f(x)$ posmatrajmo sledeći limes u tački a ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x}.$$

Ako ovaj limes postoji nazivamo ga *izvodom funkcije* $f(x)$ u tački a i označavamo $f'_x(a) = f'(a)$. Prethodni limes se zapisuje i na sledeći način:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}.$$

Razliku $\Delta x = (a + \Delta x) - a$ nazivamo *priraštajem argumenta*, dok razliku $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ nazivamo *priraštajem funkcije* f u tački a koja odgovara priraštaju argumenta Δx . Ako za funkciju f definišemo

$$f' = \{ (a, f'(a)) \mid a \in \text{dom}(f) \wedge f'(a) \text{ postoji} \},$$

onda je f' funkcija, jer limes, ako postoji, onda je jedinstven i važi $\text{dom}(f') \subseteq \text{dom}(f)$.

Za funkciju koja ima izvod u tački a kaže se da je *diferencijabilna* u a .

Primer 1. Neka je $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = R$. Neka je $a \in \text{dom}(f)$, pronađimo izvod $f'(a)$, ako on postoji.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) = 2a. \end{aligned}$$

Vidimo da je $f'(a) = 2a$ za svaki $a \in \text{dom}(f) = R$, znači f' slika a u $2a$,

$$f' = \{ (a, 2a) \mid a \in R \} = \{ (x, 2x) \mid x \in R \}, \quad \text{znači}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 2x$. Dakle izvod funkcije $f(x) = x^2$ je funkcija $f'(x) = 2x$.

Neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački a možemo zapisati i sa

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ povlači } \Delta f(a) \rightarrow 0,$$

da funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a možemo zapisati sa

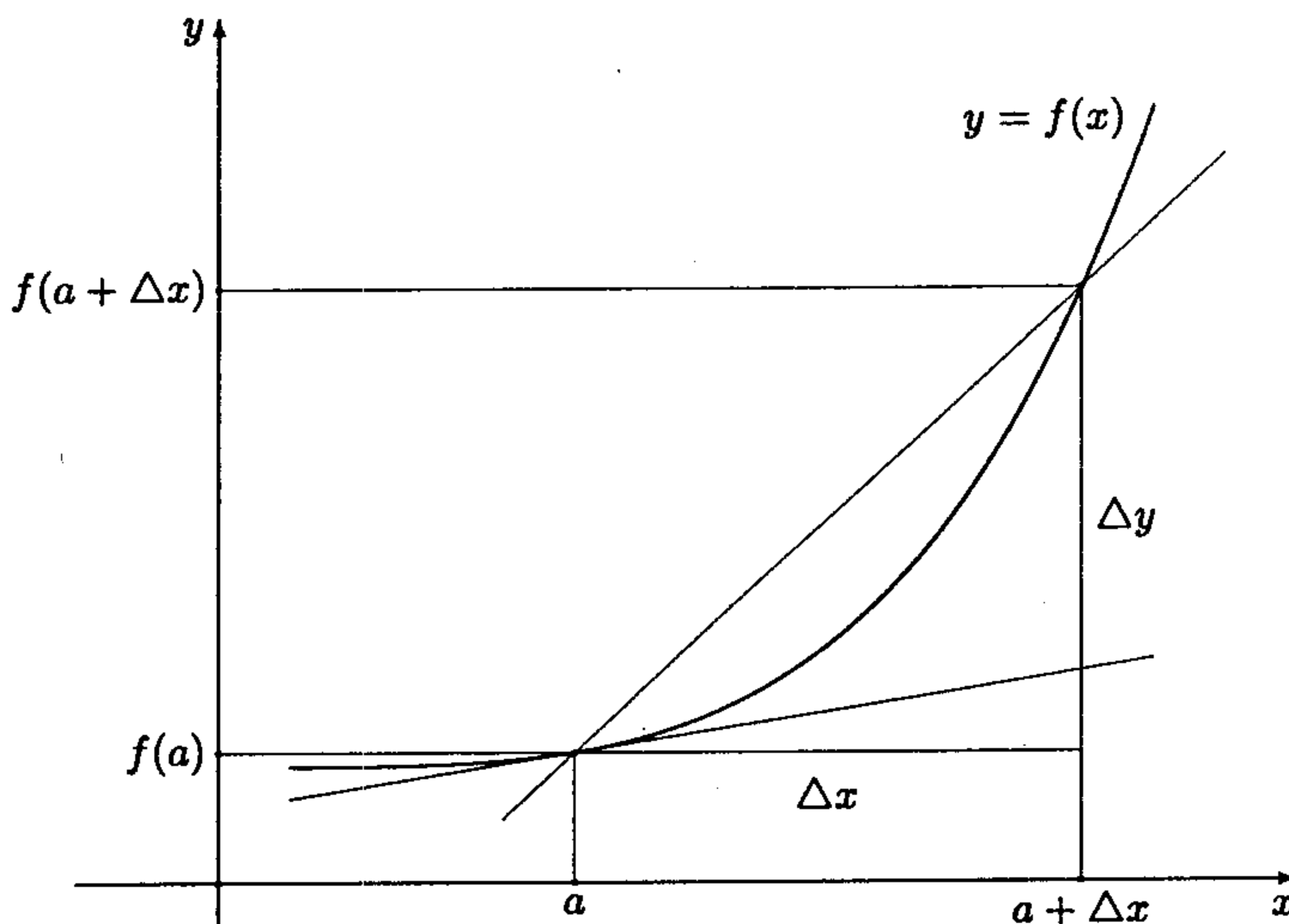
$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ povlači } \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} \rightarrow f'(a).$$

Odavde zaključujemo:

- (1) ako funkcija $f(x)$ ima izvod u tački a , onda je ona i neprekidna u tački a ;
- (2) ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački a , onda ne mora postojati izvod $f(x)$ u tački a ; izvod postoji samo ako $\Delta f(a)$ teži nuli ne sporije nego Δx .

5.1 Geometrijsko značenje prvog izvoda

Posmatrajmo $f(x)$ u okolini tačke a (slika 1). Uočimo sečicu koja sadrži tačke $(a, f(a))$ i $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.

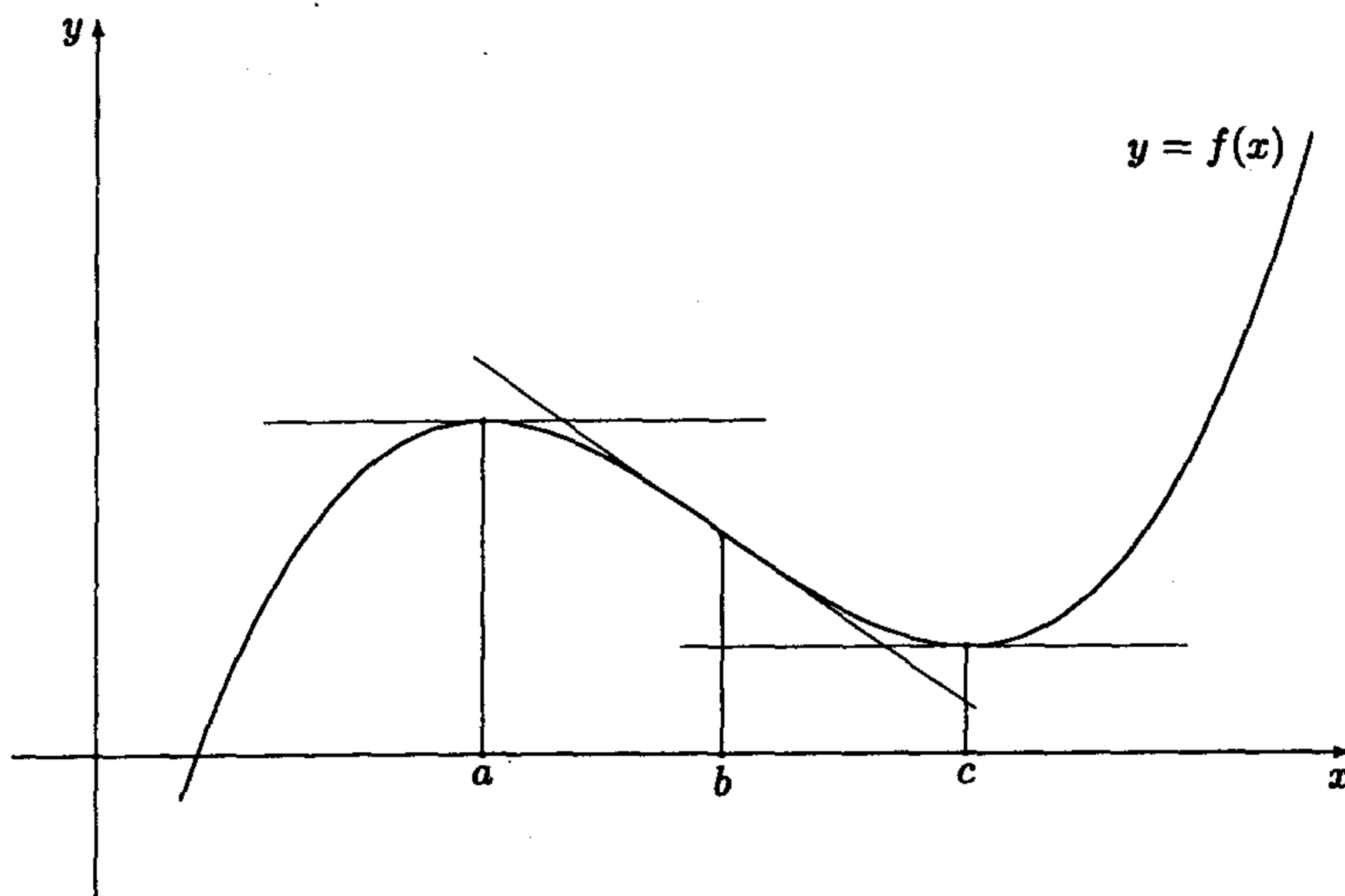


Slika 1.

Vidimo da je tangens ugla koji ova sečica zaklapa sa x osom

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ako $\Delta x \rightarrow 0$, onda $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(a)$, a to je tangens ugla između tangente krive $f(x)$ u tački a i x ose, odnosno, $f'(a)$ je koeficijent pravca tangente u tački a na krivu $f(x)$. Prethodno omogućava upotrebu prvog izvoda za određivanje lokalnih ekstremuma (minimuma i maksimuma) funkcije. Neka na primer funkcija $f(x)$ ima maksimum u tački a , minimum u tački c i prevoj (prelaz konkavnosti u konveksnost i obrnuto) u tački b .



Slika 2.

Uočavamo da je $f'(a) = f'(c) = 0$. Znači $f(a)$ je lokalni ekstremum ako je $f'(a) = 0$. Uočimo takođe da je levo od maksimuma $f'(x) > 0$ i da je desno od maksimuma $f'(x) < 0$. Slično, za minimum važi da je levo od minimuma $f'(x) < 0$, desno od minimuma $f'(x) > 0$. Ovo bismo mogli sažeti:

- ako je $f'(a) = 0$ i $f'(x)$ opada u okolini tačke a , onda je $f(a)$ lokalni maksimum funkcije $f(x)$;

- ako je $f'(c) = 0$ i $f'(x)$ raste u okolini tačke c onda je $f(c)$ lokalni minimum funkcije $f(x)$.

Lokalni minimum možemo naći koristeći drugi izvod $f''(x)$. Naime, ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda $f(x)$ ima minimum u tački c ; ako je $f'(a) = 0$ i $f''(a) < 0$, onda $f(x)$ ima maksimum $(a, f(a))$.

Za prevojnu tačku uočimo da važi: $f(b)$ je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako $f'(x)$ ima lokalni ekstremum u b , tj. ako $(f'(x))' = f''(x)$ ima nulu u b , $f''(b) = 0$. Prethodno razmatranje pretpostavlja postojanje $f'(x)$, odnosno $f''(x)$, u okolini lokalnog ekstremuma, odnosno prevojne tačke.

Ako je na primer funkcija $f(x)$ definisana:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x = 1, \\ 0, & \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \end{cases}$$

vidimo da je $\max\{f(x) \mid x \in \text{dom}(f)\} = 1$. Pošto $f(x)$ ima prekid za $x = 1$, znači da ne postoji $f'(1)$, tj. $1 \notin \text{dom}(f')$.

Proizvod $f'(x)\Delta x$ naziva se diferencijal i obeležava se sa dy ili $df(x)$. Tako imamo $dx = \Delta x$, $df(x) = f'(x)dx$.

Po definiciji izvoda:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

što povlači da je

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + g(\Delta x),$$

pri čemu $g(\Delta x) \rightarrow 0$, kada $\Delta x \rightarrow 0$. Odavde sledi

$$\Delta f(x) = (f'(x) + g(\Delta x))\Delta x.$$

Primer 2. Pronađi izvod funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot \Delta x + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^k + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1} \right) \\
 &= \binom{n}{1} x^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Oдавде sledi

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer 3. Pronađi izvod funkcije $f(x) = c$, konstanta za $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oдавde sledi

$$(c)' = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer 4. Pronađi izvod funkcije $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
 &= e^x, \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Odavde sledi

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in R.$$

Primer 5. Pronaći izvod funkcije $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \right) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Odavde sledi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Primer 6. Pronaći izvod funkcije $f(x) = \sin x$, $x \in R$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) \\ &= 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x, \quad x \in R \end{aligned}$$

Odavde sledi

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R.$$

Primer 7. Pronađi izvod funkcije $f(x) = |x|$, $x \in R$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}, & x > 0, \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x + \Delta x) + x}{\Delta x}, & x < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Pošto iz navedenog važi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = -1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = 1,$$

sledi da f' ne postoji u nuli. Iz svega rečenog sledi

$$|x|' = \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty), \\ -1, & x \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad \text{dom}(|x|') = R \setminus \{0\}.$$

Primer 8. Pronađi izvod funkcije $f(x) = \cos x$, $x \in R$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x(-2 \sin^2 \frac{\Delta x}{2}) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \cos x \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\sin \frac{\Delta x}{2} \right) \\ &\quad - \left(\sin x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\Delta x} \right) \\ &= \cos x \cdot 1 \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Oдавде sledi

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1. Ako postoje $f'(x)$ i $g'(x)$, onda postoje $(f(x) + g(x))'$, $(f(x) - g(x))'$, $(f(x) \cdot g(x))'$ i $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ i važi

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ako je $g(x) \neq 0$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} 1. \quad (f(x) + g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

2. Slično kao 1.

$$\begin{aligned} 3. \quad (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x)(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))g(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x + \Delta x) \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x) \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right) + g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x) - f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \frac{\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) \cdot g(x) - f(x) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x+\Delta x)g(x))} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Primer 9. Odredimo izvod funkcija $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
(\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

Teorema 2. Ako postoji $g'(x)$ i ako postoji izvod funkcije f u tački $y = g(x)$, onda postoji izvod složene funkcije $f(g(x))$ i važi

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Dokaz. Važi

$$\Delta f(g(x)) = f(y + \Delta y) - f(y) = (f'(y) + \gamma(\Delta y))\Delta y,$$

gde $\gamma(\Delta y) \rightarrow 0$, kada $\Delta y \rightarrow 0$. Iz uslova teoreme $\Delta x \rightarrow 0$ povlači $\Delta y \rightarrow 0$. Sledi

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{(f'(y) + \gamma(\Delta y))\Delta y}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(y) + \gamma(\Delta y)) \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = f'(y) \cdot g'(x) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Primer 10. Naći izvode funkcija $\text{sh}(\sin x)$ i $\cos(\ln(x^2 - 2x - 3))$. Definicije funkcije $\text{sh } t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\text{ch } t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ (*hiperbolički sinus i kosinus*).

$$\begin{aligned} (\text{sh}(\sin x))' &= \left(\frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} (e^{\sin x}(\sin x)' - e^{-\sin x}(-\sin x)') \\ &= \frac{1}{2} (e^{\sin x} \cos x + e^{-\sin x} \cos x) \\ &= \frac{\cos x}{2} (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) \\ &= \cos x \text{ch}(\sin x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos(\ln(x^2 - 2x - 3)))' &= -\sin(\ln(x^2 - 2x - 3)) \cdot (\ln(x^2 - 2x - 3))' \\ &= -\sin(\ln(x^2 - 2x - 3)) \cdot \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \cdot (x^2 - 2x - 3)' \\ &= -\sin(\ln(x^2 - 2x - 3)) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} \\ &= \frac{-2x + 2}{x^2 - 2x - 3} \sin(\ln(x^2 - 2x - 3)). \end{aligned}$$

Primer 11. Naći izvode funkcija $\text{th}(\sqrt{x^2 + 3})$ i $\text{cth tg } x$, koje se definišu izrazima $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$, $\text{cth } x = \frac{1}{\text{th } x}$ (*hiperbolični tangens i kotangens*).

$$\begin{aligned} (\text{th}(\sqrt{x^2 + 3}))' &= \left(\frac{\text{sh } \sqrt{x^2 + 3}}{\text{ch } \sqrt{x^2 + 3}} \right)' \\ &= \frac{(\text{sh } \sqrt{x^2 + 3})' \cdot (\text{ch } \sqrt{x^2 + 3}) - (\text{sh } \sqrt{x^2 + 3}) \cdot (\text{ch } \sqrt{x^2 + 3})'}{(\text{ch } \sqrt{x^2 + 3})^2} \\ &= \frac{(\text{ch } \sqrt{x^2 + 3}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \cdot \text{ch } \sqrt{x^2 + 3} - \text{sh } \sqrt{x^2 + 3} \cdot (\text{sh } \sqrt{x^2 + 3}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}}{(\text{ch } \sqrt{x^2 + 3})^2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}(\text{ch } \sqrt{x^2 + 3})^2}. \end{aligned}$$

Pošto je $(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$, lako izvodimo

$$(\text{cth tg } x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 \text{tg } x} \cdot (\text{tg } x)' = -\frac{1}{\cos^2 x \text{sh}^2 \text{tg } x}.$$

Primer 12 Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Odredimo $(x^\alpha)'$. Pošto je $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, tada

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' \\ &= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Primer 13. Naći izvod funkcije a^x . Pošto je $a^x = e^{x \ln a}$, tada

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a.$$

5.2 Izvod inverzne funkcije

Ako funkcija f slika skup A u skup B (i ako je "1-1" na skupu A), onda inverzna funkcija f^{-1} vraća slike funkcije f u njihove originale, pa je zato njihova kompozicija identična funkcija na skupu A . Neka je

$$y = f(x) = \sin x.$$

Inverzna funkcija funkcije $y = \sin x$ definiše se na intervalima, na kojima je funkcija $y = \sin x$ "1-1", $\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$, $\text{codom}(\sin) = [-1, 1]$. Zato $\text{dom}(\sin)$ rastavljamo na disjunktne podskupove, na kojima je funkcija \sin monotona:

$$\text{dom}(\sin) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right),$$

-kopije intervala $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

Ovako je funkcija \sin rastavljena na uniju monotonih funkcija:

$$\sin = \{ (x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ (x, \sin x) \mid x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \},$$

od kojih svaka ima inverznu funkciju - granu inverzne relacije funkcije \sin . Uočimo jednu od ovih restrikcija funkcije \sin , na primer

$$f_0 = \{ (x, \sin x) \mid x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \}.$$

Imamo: $\text{dom}(f_0) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $\text{codom}(f_0) = [-1, 1)$, $f_0: x \rightarrow \sin x$.

Za inverznu funkciju funkcije f_0 , funkciju f_0^{-1} imamo:

$$\text{dom}(f_0^{-1}) = [-1, 1), \quad \text{codom}(f_0^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad f_0^{-1}: \sin x \rightarrow x.$$

Funkcija f_0^{-1} , inverzna funkcija funkcije \sin (na intervalima $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$) naziva se *arcus sinus*, u oznaci \arcsin . Zato važi

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad x \in [-1, 1).$$

Za priraštaje onda važi:

$$\begin{aligned}\Delta f_0(x) &= f_0(x + \Delta x) - f_0(x) = \Delta y, \\ \Delta f_0^{-1}(y) &= f_0^{-1}(y + \Delta y) - f_0^{-1}(y) = \Delta x.\end{aligned}$$

Za količnik

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Pošto Δx i Δy istovremeno teže nuli, dobijamo $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, odnosno $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

U ovom slučaju

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Za svaku drugu inverznu granu važiće slično.

Pogledajmo sada funkciju $y = \arccos x$. Slično kao i za $f(x) = \sin x$, ne postoji inverzna funkcija funkcije $y = \cos x$, nego inverzne grane za intervale na kojima je $\cos x$ monotona. Uzmimo jedan takav interval, na primer $[0, \pi)$. Za $x \in [-1, 1)$ očigledno važi $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, pa tada

$$\begin{aligned}(\arccos x)'_x &= \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Funkciju $y = \operatorname{arctg} x$ posmatrajmo kao inverznu funkciju funkcije $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; onda $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$ za $x \in R$,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R.$$

Za $y = \log_a x$ po definiciji logaritma $x = a^y$,

$$(\log_a x)'_x = \frac{1}{(a^y)'_y} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

5.3 Tablica izvoda

Sumirajmo prethodna razmatranja u sledeću tablicu izvoda:

1. $c' = 0$, (konstanta)
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Za određivanje limesa $\frac{f(x)}{g(x)}$, gde $f(x)$ i $g(x)$ teže nuli kada x teži a ili $\pm\infty$

često je korisno sledeće *Lopitalovo pravilo*: ako je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jednak A ili ∞ , tada

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

(slično kad x teži $+\infty$ ili $-\infty$).

Primer 14. Izračunati sledeće limese:

- $$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{1}} = 1;$$
- $$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0;$$
- $$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -1;$$
- $$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{2(x - 2)} = +\infty;$$
- $$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{e^x} = \ln a;$$
- $$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_a x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{1} = \frac{1}{\ln a};$$
- $$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} ((\operatorname{ctg} x) \cdot (\operatorname{arctg} x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1;$$
- $$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

5.4 Tejlorov red

Neka je $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ (polinom n -tog stepena). U okolini tačke x , $f(x + \Delta x) = a_0 + a_1(x + \Delta x) + \dots + a_n(x + \Delta x)^n$. Ako razvijemo binome $(x + \Delta x)^k$ i desnu stranu sredimo po stepenima Δx , dobijamo

$$f(x + \Delta x) = A_0(x) + A_1(x) \cdot \Delta x + \dots + A_n(x) \cdot (\Delta x)^n,$$

gde su $A_0(x), A_1(x), \dots, A_n(x)$ polinomi po x . U okolini tačke a , za $x = a + \Delta x$ imamo $\Delta x = x - a$ i

$$f(x) = f(a + \Delta x) = A_0(a) + A_1(a) \cdot \Delta x + \dots + A_n(a) \cdot (\Delta x)^n$$

odnosno

$$f(x) = A_0(a) + A_1(a)(x - a) + \dots + A_n(a)(x - a)^n.$$

Za $x = a$ dobijamo $f(a) = A_0(a)$. Diferenciranjem dobijamo izvode $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$:

$$f'(x) = A_1(a) + 2A_2(a)(x - a) + \dots + n \cdot A_n(a)(x - a)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2A_2(a) + 2 \cdot 3A_3(a)(x - a) + \dots + (n - 1)n \cdot A_n(a)(x - a)^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = 2 \cdot 3 \cdots k \cdot A_k(a) + \dots$$

$$+ (n - k + 1) \cdots (n - 1)n \cdot A_n(a)(x - a)^{n-k},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdots n A_n(a).$$

Odavde zamenom $x = a$ dobijamo sledeći niz vredosti:

$$f'(a) = A_1(a),$$

$$f''(a) = 2A_2(a),$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(a) = k!A_k(a),$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!A_n(a).$$

Za $k \in \{0, \dots, n\}$, $A_k(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Vraćanjem ovih vrednosti u polazni izraz $f(x)$ dobijamo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n,$$

ako stavimo $f^{(0)}(a) = f(a)$, tada

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Uočili smo ranije da za funkciju f koja ima izvod u okolini tačke a ,

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = (f'(a) + \gamma(\Delta x)) \cdot \Delta x$$

gde $\gamma(\Delta x) \rightarrow 0$ kad $\Delta x \rightarrow 0$.

Oдавde za $x = a + \Delta x$,

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \gamma(x - a) \cdot (x - a). \quad (1)$$

Ako funkcija $f(x)$ ima sve izvode u okolini tačke a , onda važi

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots, \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Red s desne strane naziva se *Tejlorov red* funkcije $f(x)$. Red (2) možemo zapisati i na sledeći način:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x), \quad (3)$$

odakle sledi da red (2) konvergira akko $R_n(x) \rightarrow 0$. Formula (3) omogućava da funkciju $f(x)$ aproksimiramo polinomom

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

koji se zove *Tejlorov polinom*. Uočimo da formula (1) predstavlja Tejlorov razvoj do prvog člana.

U okolini nule Tejlorov polinom postaje

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

koji nazivamo *Maklorenov polinom*, dok red (2) dobija oblik

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (4)$$

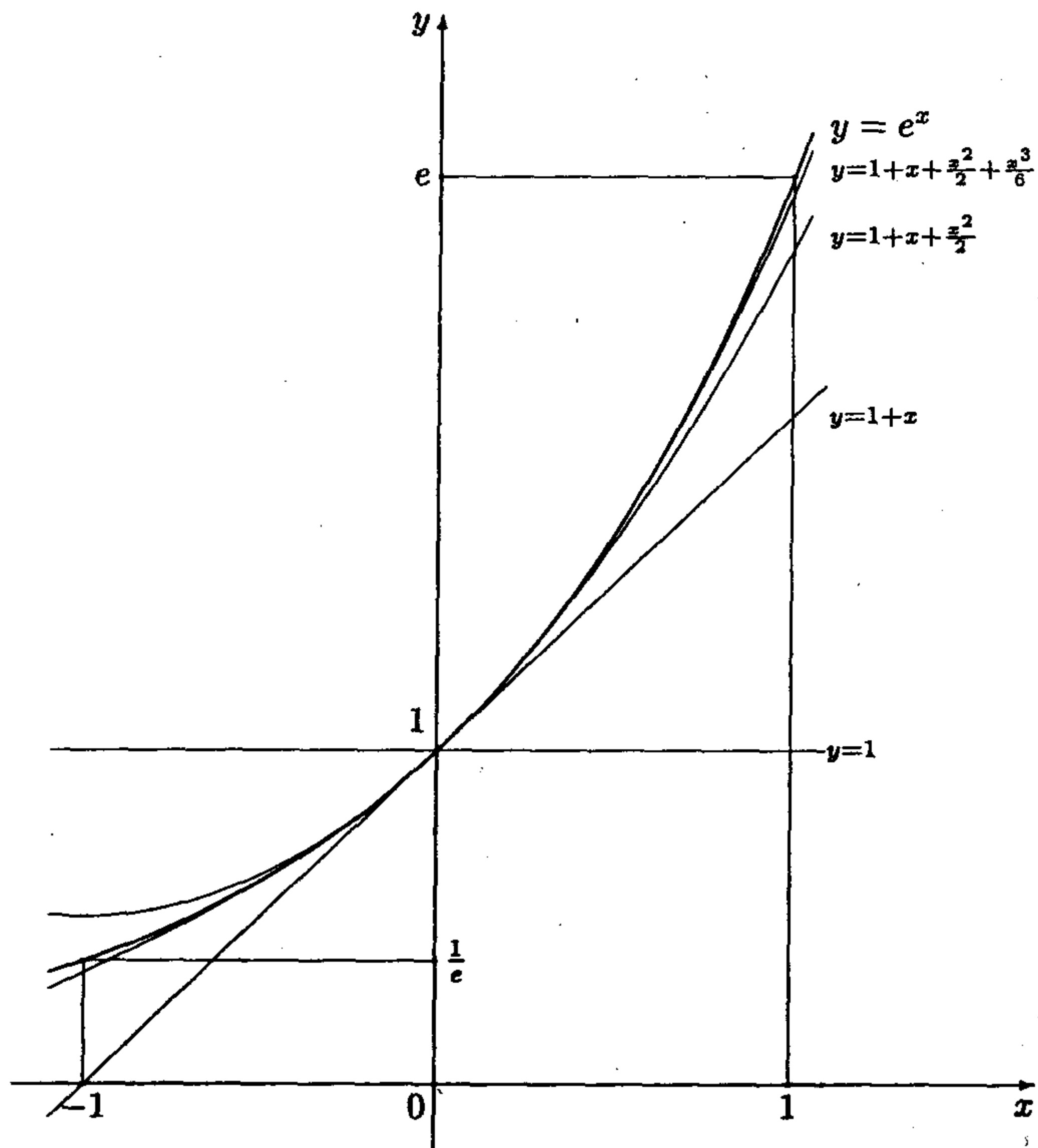
koji nazivamo *Maklorenov red*.

Primer 15. Razmotrimo Tejlorov razvoj funkcije e^x u okolini nule. Pošto važi $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = \dots$, za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno $(e^x)^{(n)} = e^x$, $n \in \mathbb{N}$. Odatle $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ itd. za svaki n $f^{(n)}(0) = 1$. Po formuli (4)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

ovaj red konvergira za $x \in \mathbb{R}$. Tako za $x = 1$ dobijamo aproksimaciju za e :

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Slika 3.

Primer 16. Za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ odrediti Maklorenov razvoj. Uočimo niz izvoda funkcije $f(x) = \ln(1+x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

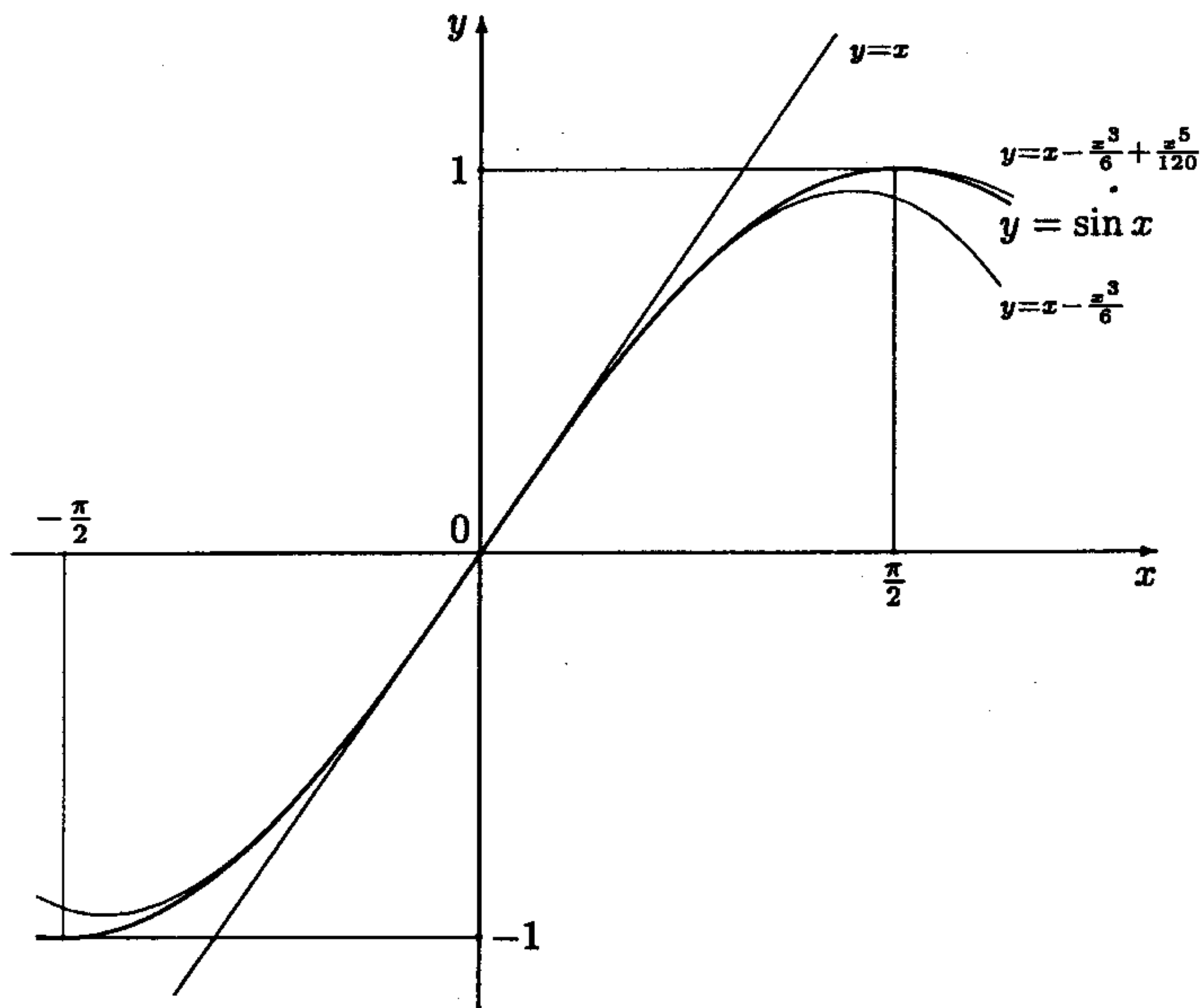
Odavde neposredno sledi:

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n}x^n + \dots,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}x^n, \quad \text{red konvergira za } x \in (-1, 1].$$

Primer 17. Odredimo Maklorenov razvoj funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Uočimo niz izvoda funkcije $\sin x$: $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$, $(\sin x)^{(4)} = \sin x$, odakle lako izvodimo

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots \end{aligned}$$



Slika 4.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

Oba reda konvergiraju za $x \in R$.

Primer 18. Upotrebimo Tejlorovu formulu za određivanje sledećih limesa:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(x - x + \frac{x^3}{3!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n-2} \right) = \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (1 - \cos x + x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) - \left(x + 1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + R_2^1 - R_2^2}{x^2} = -1,$$

gde smo sa R_2^1 označili ostatak posle drugog člana razvoja funkcije $\ln(1+x)$, a sa R_2^2 ostatak posle drugog člana razvoja funkcije $\cos x$, koristeći činjenicu da se zbog konvergencije R_2^1 može predstaviti kao $x^3 R_I$, slično $R_2^2 = x^3 R_{II}$, gde su R_I i R_{II} konvergentni redovi.

Iz Tejlorove formule sledi, dakle, da se svaka neprekidna funkcija, koja ima sve izvode, može proizvoljno fino aproksimirati polinomom. Neka je P skup svih polinoma, P_n skup polinoma stepena n (uključujući i sve niže stepene), oba (tj. i P i P_n) sa racionalnim koeficijentima. Može se proveriti da su P_n i P vektorski prostori nad poljem Q , pri čemu je dimenzija P_n jednaka n , dok je P beskonačno dimenzionalan. Neka je

$$B_n = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}, \quad B = \bigcup_{n \in N} B_n.$$

Pošto se svaki polinom stepena $\leq n$ može predstaviti kao linearna kombinacija elemenata iz B_n , sledi da je B_n baza za P_n . Slično važi za B i P . Sledi da se linearnim kombinacijama elemenata iz B (odnosno B_n za

dovoljno veliki n) mogu proizvoljno fino aproksimirati funkcije za koje važi Tejlorova formula, što ima dosta važnih praktičnih primena.

5.5 Ispitivanje funkcija

Primenićemo uvedeni aparat na ispitivanje realnih funkcija, koji je za elementarne funkcije vrlo efikasan.

Ispitajmo detaljno funkciju $f(x) = e^{-x^2}$. Već ručnim kalkulatorom možemo dobiti neku tablicu vrednosti ove funkcije. Sasvim jednostavnim programom u npr. programskom jeziku BASIC možemo je dosta dobro iscrtati i steći vizuelan uvid u ponašanje $f(x)$. Ipak, neophodno je da smo u stanju da bez pomagala odredimo sva bitna svojstva funkcija.

Primer 19. Ispitajmo, dakle, funkciju $f(x) = e^{-x^2}$.

Domen. Iz definicije funkcije jasno je da

$$\text{dom}(e^{-x^2}) = R.$$

Kodomen. Pošto važi $x \in R \Rightarrow -x^2 \in (-\infty, 0]$, odavde sledi

$$\text{codom}(e^{-x^2}) = (0, 1].$$

Ispitajmo parnost funkcije f :

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$

dakle funkcija je parna i simetrična u odnosu na y -osu. Pošto je $e^{-x^2} > 0$, $x \in R$, grafik funkcije je iznad x -ose.

Monotonost. $a < b \leq 0$ povlači $-a^2 < -b^2$ povlači $e^{-a^2} < e^{-b^2}$, pa funkcija e^{-x^2} strogo raste za $x \in (-\infty, 0]$.

$0 < a < b$ povlači $-a^2 > -b^2$ povlači $e^{-a^2} > e^{-b^2}$, pa funkcija strogo opada za $x \in (0, +\infty)$.

$$\Delta f(x) = e^{-(x+\Delta x)^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2} (e^{-(2x\Delta x + (\Delta x)^2)} - 1).$$

Neprekidnost. Pošto $\Delta x \rightarrow 0$ povlači $\Delta f(x) \rightarrow 0$, sledi da je funkcija neprekidna na domenu (i ima maksimum $f(0) = 1$).

Diferencijabilnost. Kako je $f'(x) = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$, $x \in R$, funkcija ima sve izvode sa domenom R .

Ekstremne vrednosti. Pošto $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, odavde sledi da $f(x)$ ima jedan ekstremum, već određeni maksimum.

Prevojne tačke. Ispitajmo f'' :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \cdot (-2xe^{-x^2}) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

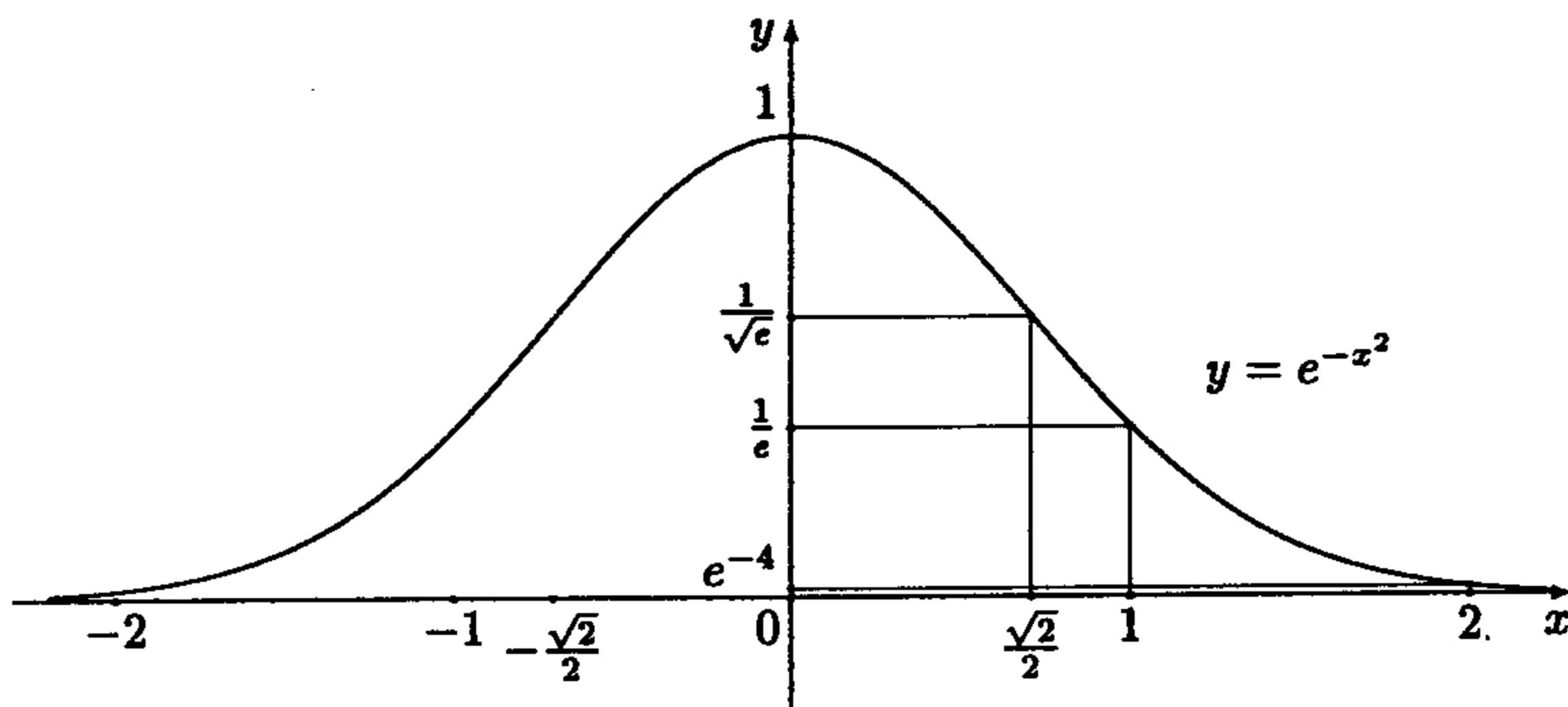
U ovim tačkama $f'(x)$ ima ekstremum (redom maksimum i minimum). Koordinate prevojnih tačaka

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right); \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

Asimptote. Limes funkcije prema "krajevima" domena.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0,$$

pa je x -osa asimptota ove funkcije na obe strane.



Slika 5.

Primer 20. Ispitajmo funkciju $f(x) = (x - 1)\ln|x - 1|$.

Domen. Domen funkcije je $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Znak funkcije utvrđujemo sledećim formulama:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\};$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 1 > 0 \wedge |x - 1| > 1) \vee (x - 1 < 0 \wedge |x - 1| < 1)$$

$$\Leftrightarrow (x \in (1, +\infty) \wedge x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)) \vee$$

$$(x \in (-\infty, 1) \wedge x \in (0, 2))$$

$$\Leftrightarrow x \in (2, +\infty) \vee x \in (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (2, +\infty);$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2).$$

Kodomen. Iz prethodnog niza formula uočavamo da $\text{codom}(f) = \mathbb{R}$ i da funkcija nije ni parna ni neparna.

Limes funkcije kada $x \rightarrow 1^-$ i $x \rightarrow 1^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1)\ln(1 - x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1 - x)}{\frac{1}{x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{1 - x} \cdot (-1)}{\frac{1}{(x - 1)^2} \cdot (-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)\ln(x - 1) = 0.$$

Sledi da se funkcija može produžiti funkcijom $g(x)$ tako da

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Diferencijabilnost. Izračunajmo prvi i drugi izvod funkcije f :

$$f'(x) = \ln|x - 1| + (x - 1) \cdot \frac{1}{(x - 1)} = \ln|x - 1| + 1,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x - 1}, \quad \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ekstremne vrednosti. Ispitajmo nule prvog izvoda:

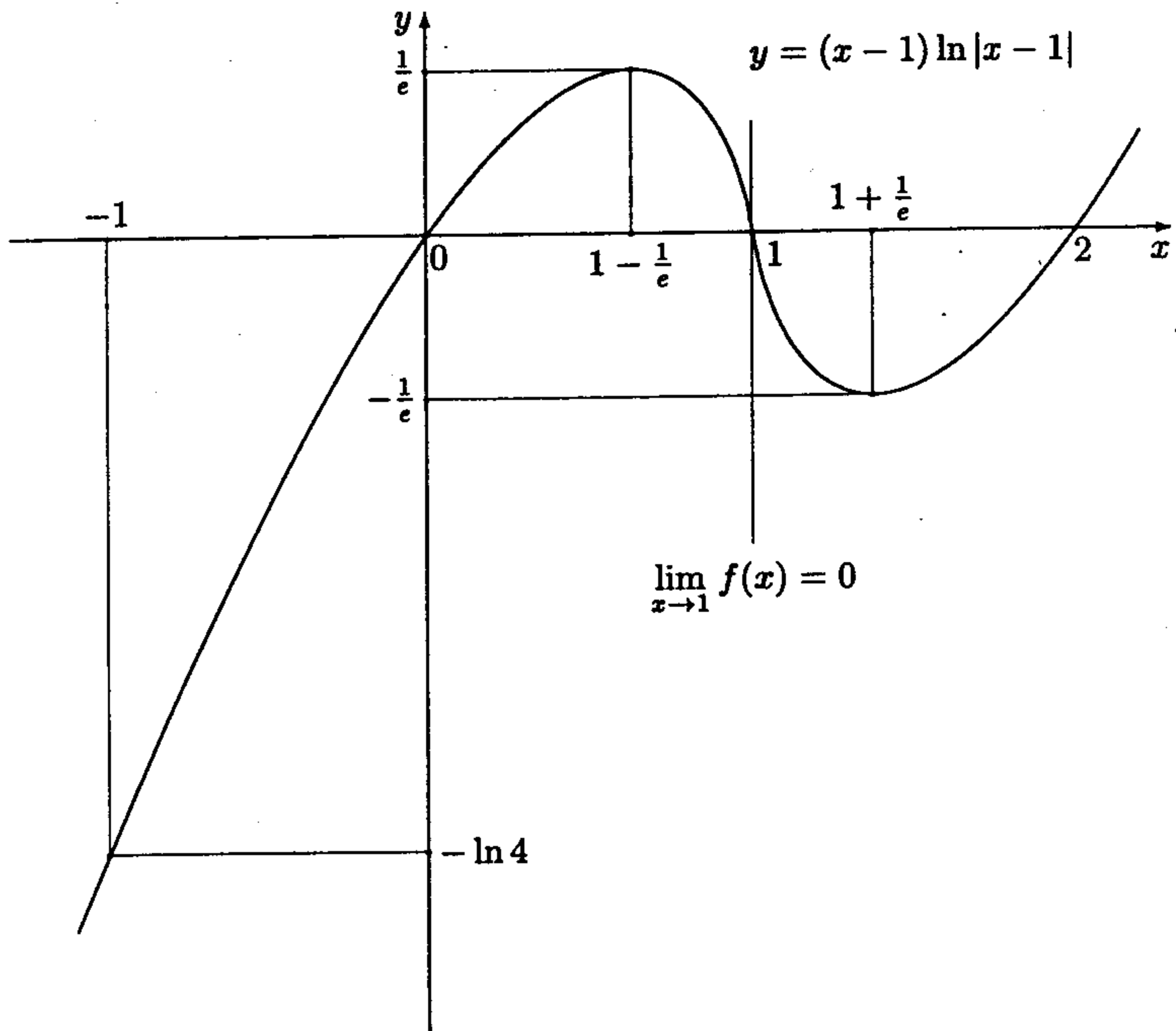
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln|x - 1| = -1 \\ &\Leftrightarrow |x - 1| = e^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = e^{-1} + 1 \vee x = 1 - e^{-1}. \end{aligned}$$

Funkcija $f(x)$ ima lokalni minimum za $x = 1 + e^{-1}$, jer:

$$f(1 + e^{-1}) = -\frac{1}{e}; \quad \left(1 + \frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right) \quad f''(1 + e^{-1}) = e > 0.$$

Funkcija $f(x)$ ima lokalni maksimum za $x = 1 - e^{-1}$, jer

$$f(1 - e^{-1}) = \frac{1}{e}; \quad \left(1 - \frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) \quad f''(1 - e^{-1}) = -e < 0.$$



Slika 6.

Prevojne tačke. Pošto $f''(x) \neq 0$, $x \in \text{dom}(f)$ funkcija nema prevojnih tačaka.

Asimptote. Pogledajmo još limese prvog izvoda u tački prekida:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln|x-1| + 1) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln|x-1| + 1) = -\infty.$$

Oдавде sledi da ako se funkcija produži funkcijom $g(x)$, produženje $g(x)$ je neprekidna funkcija na R , koja ima vertikalnu tangentu u tački $(1, 0)$ koja je onda i prevojna.

Monotonost. Funkcija $f(x)$ raste za $x \in (-\infty, 1 - \frac{1}{e}) \cup (1 + \frac{1}{e}, +\infty)$, a opada za $x \in (1 - \frac{1}{e}, 1 + \frac{1}{e}) \setminus \{1\}$.

Primer 21. Ispitajmo funkciju $f(x) = \frac{x^3}{(x+2)(x-3)}$.

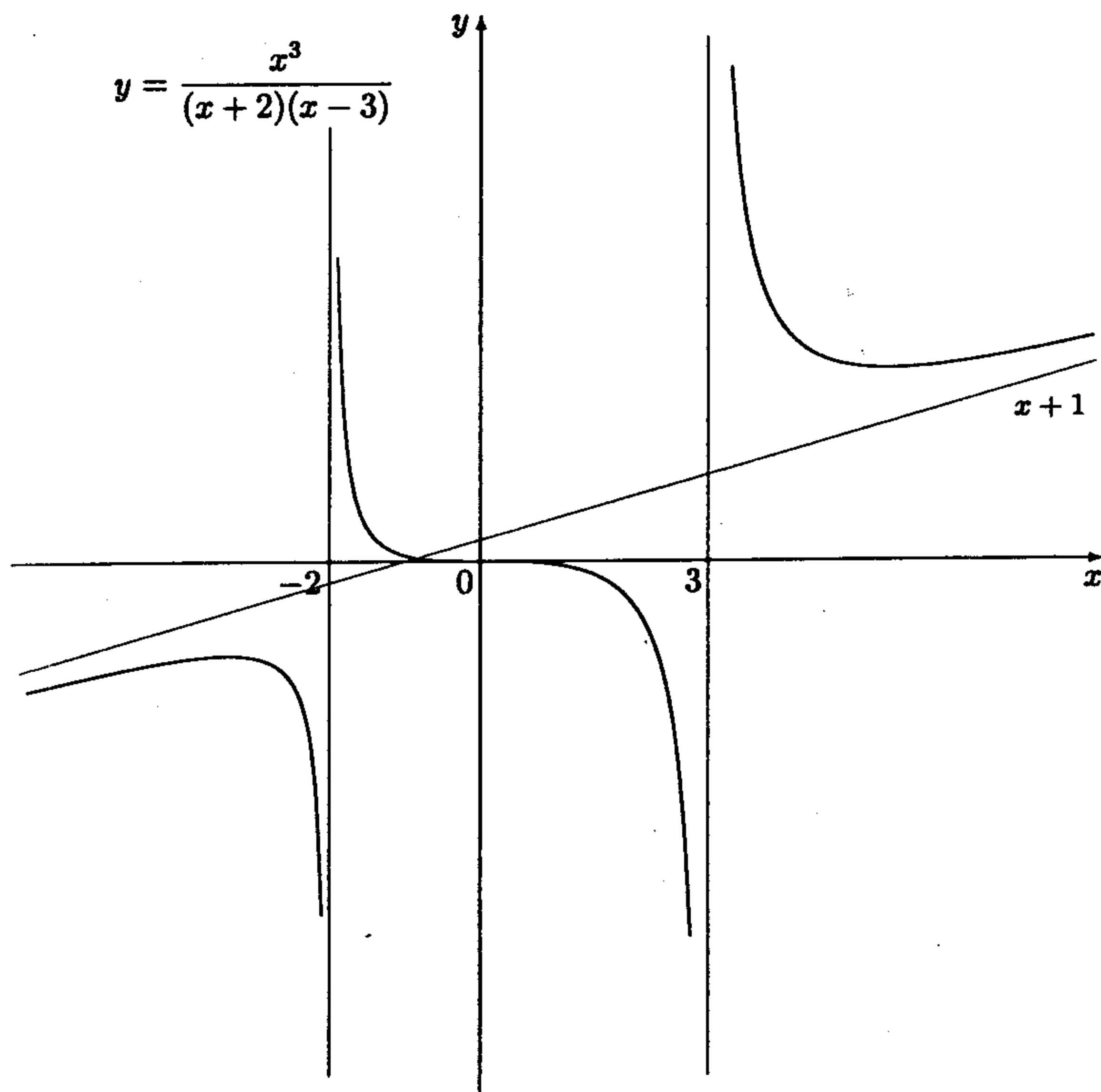
Domen. Iz definicije funkcije vidimo da $\text{dom}\left(\frac{x^3}{(x+2)(x-3)}\right) = R \setminus \{-2, 3\}$.

Kodomen. Neposredno sledi da $\text{codom}\left(\frac{x^3}{(x+2)(x-3)}\right) = R$.

Asimptote. Funkcija poseduje dve vertikalne asimptote u tačkama $x = -2$ i $x = 3$, i jednu kosu asimptotu $y = x + 1$.

Prevojne tačke. Funkcija ima prevoj u tački $x = 0$.

Odrediti za vežbu koordinate ekstrema i intervale monotonosti. Vidi sliku 7. na sledećoj strani.



Slika 7.

6. Integral

6.1 Neodređeni integral

Izvod funkcije $f(x)$ u tački a definisan je limesom

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

kada ovaj postoji. Funkcija $f'(x)$ – izvod funkcije $f(x)$ definisana je kao skup

$$\{(x, f'(x)) \mid x \in \text{dom}(f) \wedge \text{postoji } f'(x)\}.$$

Iz ove definicije sledi $\text{dom}(f') \subseteq \text{dom}(f)$. Za elementarne funkcije uočili smo da imaju izvode kao i da se domen izvoda poklapa sa domenom polazne funkcije ili da je izvod definisan na većem komadu domena polazne funkcije. Za funkciju $\chi_Q(x)$ videli smo da je $\chi'_Q(x) = \emptyset$. Ima funkcija čiji je izvod definisan u konačno mnogo tačaka ili na diskretnom skupu. Na primer

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \in Q, \\ 1 - x^2, & x \in R \setminus Q, \end{cases}$$

je neprekidna samo za $x = 0$ i u toj tački ima izvod ($f'(0) = 0$), odakle sledi $f' = \{(0, 0)\}$.

Zadatak 1. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \sin x, & x \in Q, \\ 2 - \sin x, & x \in I, \end{cases}$$

odrediti deo domena, na kome je funkcija neprekidna i deo domena na kome postoji izvod ove funkcije.

Tokom prethodnih stoleća matematička analiza se afirmisala kao deo matematike koji je omogućio rešavanje mnoštva matematičkih zadataka i problema i istovremeno brzi razvoj prvih matematizovanih nauka, u čemu

je dominantan pojam funkcija sa neprekidnim izvodima (glatke krive), naročito sa stanovišta savremene analize.

Uočimo preslikavanje (diferenciranje):

$$f \rightarrow f', \quad f \in \bigcup_{A \subseteq R} R^A, \quad \text{tj.} \quad ': \bigcup_{A \subseteq R} R^A \rightarrow \bigcup_{A \subseteq R} R^A.$$

Da se radi o preslikavanju sledi iz jedinstvenosti izvoda. Ovo preslikavanje nije "1-1", jer $(f(x) + c)' = f'(x)$ za $c \in R$. Takođe, ako su f i g svuda prekidne funkcije, onda $f' = g' = \emptyset$. Iz prethodnog sledi da preslikavanje ' nema inverznu funkciju, ali ima inverznu relaciju

$$\text{Int} = \{ (f, g) \mid f, g \in \bigcup_{A \subseteq R} R^A \wedge g' = f \}.$$

Umesto svih realnih funkcija (elemenata $\bigcup_{A \subseteq R} R^A$) posmatramo njegove jednostavnije podskupove:

$$\{ f \in R^{(a,b)} \mid \text{dom}(f') = (a, b) \}, \quad \text{gde su } a, b \in R.$$

Definicija 1. Neka je funkcija f definisana i diferencijabilna na intervalu (a, b) . Funkcija g je primitivna funkcija funkcije f akko

$$g'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Skup primitivnih funkcija funkcije f u intervalu (a, b) naziva se neodređeni integral, u oznaci

$$\int f(x)dx = \{ g \mid g'(x) = f(x), \quad x \in (a, b) \}.$$

Ako je g primitivna funkcija funkcije f onda važi

$$\int f(x)dx = \{ g + C \mid g'(x) = f(x), \quad x \in (a, b), \quad C \in R \},$$

što se još zapisuje

$$\int f(x)dx = g(x) + c, \quad (\text{integral funkcije } f \text{ po promenljivoj } x).$$

Funkcija $f(x)$ se naziva integrand ili podintegralna funkcija. Određivanje primitivne funkcije za datu funkciju f je važan zadatak kojim se bavi integralni račun. Osnovna svojstva neodređenog integrala dobijamo preko izvoda:

$$\begin{aligned}\left(\int f(x)dx\right)' &= f(x), \\ d\left(\int f(x)dx\right) &= f(x)dx, \\ \int f'(x)dx &= \int df(x) = f(x) + c, \\ \int cf(x)dx &= c \int f(x)dx, \\ \int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx, \\ \int (f(x) - g(x))dx &= \int f(x)dx - \int g(x)dx.\end{aligned}$$

Iz tablice izvoda dobijamo neposredno tablicu neodređenih integrala:

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in R \setminus \{-1\},$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$
3. $\int e^x dx = e^x + C,$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in (0, 1) \cup (1, +\infty),$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

$$8. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$9. \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,$$

$$10. \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C,$$

$$12. \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

Već poznavanje tablice izvoda omogućava određivanje nekih jednostavnijih neodređenih integrala.

Primer 1. Rešimo integral:

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 2x - 1) dx &= \int 3x^2 dx + \int 2x dx - \int 1 dx \\ &= 3 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 1 \int dx \\ &= 3 \frac{x^3}{3} + C_1 + 2 \frac{x^2}{2} + C_2 - x + C_3 \\ &= x^3 + x^2 - x + C. \end{aligned}$$

Primer 2. Rešimo integral:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \cos x dx &= \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \int \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} d2x \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 2x d2x = \frac{1}{4} \int (-\cos 2x)' dx \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C; \end{aligned}$$

malo drugačije:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \cos x dx &= \int \sin x (\sin x)' dx \\ &= \int \frac{1}{2} (\sin^2 x)' dx = \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)' dx \\ &= \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \end{aligned}$$

(zadatak: objasniti razliku u rešenju).

6.2 Smena promenljivih

U **Primeru 2.** koristili smo poznavanje izvoda složene funkcije, što se često koristi u rešavanju integrala. Neka je $h(x) = f(g(x))$. Sledi $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ i

$$h(x) + C = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int (f(g(x)))' dx = f(g(x)) + C,$$

kao i

$$h(x) + C = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f'(g(x)) dg(x),$$

što je uz $g(x) = u$ jednako $\int f'(u) du$.

Primer 3. Rešimo sledeće integrale:

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= - \int (\ln |\cos x|)' dx \\ &= - \ln |\cos x| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\ &= \int (\ln |\sin x|)' dx \\ &= \ln |\sin x| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \frac{dx}{a-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{a}}}{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{a}}} \right| + C. \end{aligned}$$

Primer 4. Rešimo dalje sledeće integrale:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \sin x \cos x dx &= (\text{smena: } \sin x = u, \quad du = (\sin x)', \quad dx = \cos x dx) \\
 &= \int u du = \frac{u^2}{2} + C \\
 &= \frac{\sin^2 x}{2} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int (2x + 3)^7 dx &= (\text{smena: } 2x + 3 = u, \quad 2dx = du, \quad dx = \frac{du}{2}) \\
 &= \int u^7 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^7 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^8}{8} + C \\
 &= \frac{1}{16} (2x + 3)^8 + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{dx}{2x + 3} &= (\text{smena: } 2x + 3 = u) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln |2x + 3| + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int \frac{\ln x}{x} dx &= (\text{smena: } \ln x = u, \quad \frac{dx}{x} = du) \\
 &= \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln^2 x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int \cos^n x \sin x dx &= (\text{smena: } \cos x = u, \quad -\sin dx = du) \\
 &= - \int u^n du = -\frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \\
 &= -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int \sin^n x \cos x dx &= (\text{smena: } \sin x = u, \quad \cos x \cdot dx = du) \\
 &= \int u^n \cdot du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \\
 &= \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \int x^2 e^{x^3} dx &= (x^3 = u, \quad 3x^2 dx = du) \\
 &= \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C \\
 &= \frac{1}{3} e^{x^3} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \int \frac{1}{\sqrt{2x+5}} dx &= (\text{smena: } 2x+5 = u, \quad 2dx = du) \\
 &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
 &= \sqrt{2x+5} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \int \frac{dx}{3x^2 + 12x + 13} &= \int \frac{dx}{3(x+2)^2 + 1} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}(x+2))^2 + 1} \\
 &= (\text{smena: } \sqrt{3}(x+2) = u, \quad dx = \frac{du}{\sqrt{3}}) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{du}{u^2 + 1} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}(x+2)) + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2}} \\
 &= (\text{smena: } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x = u, \quad dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} du) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin u + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5} \sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}} \\
 &= (\text{smena: } \frac{x+2}{\sqrt{5}} = u, \quad dx = \sqrt{5} \cdot du) \\
 &= \int \frac{\sqrt{5} du}{\sqrt{5} (\sqrt{u^2 - 1})} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\
 &= \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x+2}{\sqrt{5}} + \sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} \right| + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (12) \quad \int e^x \sqrt{e^x - 1} dx &= (\text{smena: } e^x = u, \quad x = \ln u, \quad dx = \frac{du}{u}) \\
 &= \int u \sqrt{u-1} \frac{du}{u} = \int \sqrt{u-1} du \\
 &= (\text{smena: } v = u-1, \quad dv = du) \\
 &= \int \sqrt{v} dv = \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (u-1)^{\frac{3}{2}} + C \\
 &= \frac{2}{3} (e^x - 1)^{\frac{3}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

6.3 Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije. Iz formule za izvod proizvoda $(uv)' = u'v + uv'$ sledi $uv' = (uv)' - u'v$, odnosno

$$uv' dx = (uv)' dx - v u' dx, \quad u dv = d(uv) - v du,$$

odakle integracijom

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primer 5. Rešimo sledeće integrale.

$$(1) \quad \int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ = -x \cos x + \sin x + C,$$

$$(2) \quad \int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx \\ = x e^x - e^x + C,$$

$$(3) \quad \int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) \\ = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \\ = e^x(x^2 - 2x + 2) + C,$$

$$(4) \quad \int x \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Primer 6. Rešiti integral $\int e^x \sin x dx$.

$$\int e^x \sin x dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$$

Još jednom primerom parcijalne integracije na poslednji integral dobijamo

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x d(e^x) \\ = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

odakle za polazni integral dobijamo

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

sledi

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$$

Primer 7. Rešiti integral $\int e^x \cos^2 x dx$.

Na osnovu trigonometrijskih adicionih formula i parcijalne integracije sledi

$$\begin{aligned} \int e^x \cos^2 x dx &= \int e^x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx, \\ \int e^x \cos 2x dx &= \int e^x d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \\ &= \frac{e^x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx, \\ \int e^x \sin 2x dx &= -\frac{e^x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx, \end{aligned}$$

pa važi

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x}{5} \left(\sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C,$$

i zato za polazni integral

$$\int e^x \cos^2 x dx = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{5} \left(\sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C.$$

Primer 8. Rešiti integral $\int x \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned} I = \int x \arcsin x dx &= (\text{smena: } x = \sin t, \quad dx = \cos t dt, \quad t = \arcsin x) \\ &= \int \sin t (\arcsin \sin t) \cdot \cos t dt = \int t \sin t \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} \int t \sin 2t dt. \end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int t \sin 2t dt = -t \frac{\cos 2t}{2} + \int \frac{\cos 2t}{2} dt = -\frac{t}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t + C,$$

sledi

$$\begin{aligned} I &= -\frac{t}{4} \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t + C \\ &= -\frac{t}{4} (1 - 2 \sin^2 t) + \frac{1}{8} 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} + C \\ &= -\frac{\arcsin x}{4} (1 - 2 \sin^2 \arcsin x) + \frac{1}{8} 2 \sin \arcsin x \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} + C \\ &= -\frac{\arcsin x}{4} (1 - 2x^2) + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2} + C. \end{aligned}$$

6.4 Određeni integral

Definicija 2. Neka je $\int f(x)dx (= F(x) + C)$ definisan na intervalu (a, b) , tj. (a, b) je podskup domena primitivne funkcije $F(x)$. Određeni integral u granicama a do b definiše se izrazom:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Primer 9. Rešimo integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= (-\cos x + C) \Big|_0^\pi \\ &= (-\cos \pi + C) - (-\cos 0 + C) \\ &= \cos 0 - \cos \pi = 2. \end{aligned}$$

Primer 10. Rešimo integral:

$$(1) \quad \int_{e^{-2}}^1 \frac{dx}{x} = (\ln x + C) \Big|_{e^{-2}}^1 = \ln 1 - \ln e^{-2} = 2;$$

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} \left(\frac{\cos(n-m)x}{m-n} - \frac{\cos(n+m)x}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{za } m \neq n, \\ -\frac{\cos 2mx}{2m} \Big|_{-\pi}^{\pi}, & \text{za } m = n, \end{cases} = 0, \text{ za } m, n > 0.$$

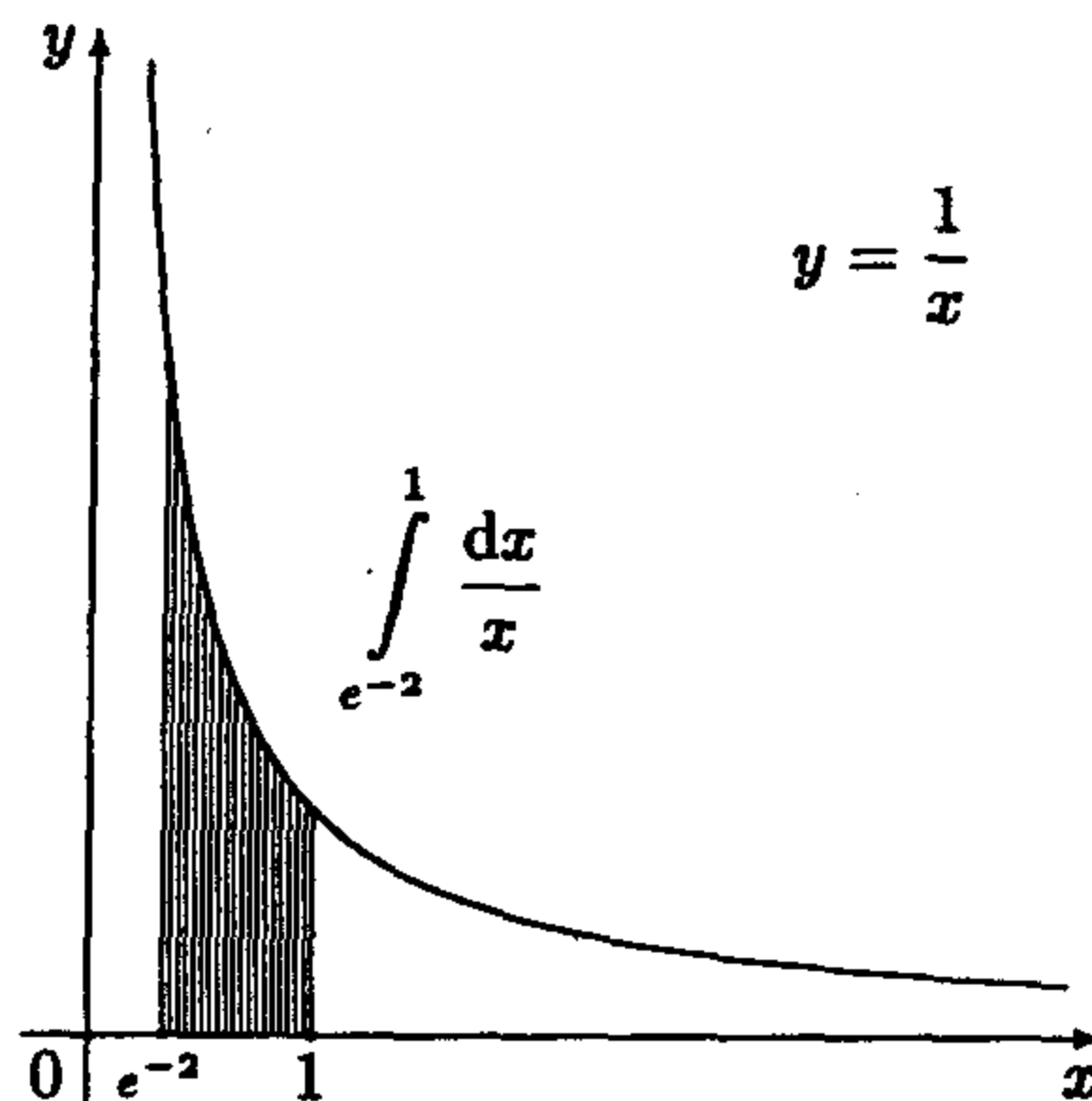
Na sličan način važi:

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{za } m = n, \\ 0, & \text{za } m \neq n, \end{cases} \text{ za } m, n \neq 0;$$

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{za } m = n, \\ 0, & \text{za } m \neq n, \end{cases} \text{ za } m, n \neq 0.$$

6.5 Geometrijsko značenje određenog integrala

Posmatrajmo grafik funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ desno od nule (slika 1).



Slika 1.

Uočimo površinu krivolinijskog trapeza određenog dužima, čije su krajnje tačke $(e^{-2}, f(e^{-2}))$, $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, f(1))$, i grafikom funkcije između

tačkaka $f(1) = 1$ i $f(e^{-2}) = e^2$. Površina ove oblasti jednaka je određenom integralu

$$\int_{e^{-2}}^1 \frac{1}{x} dx = 2.$$

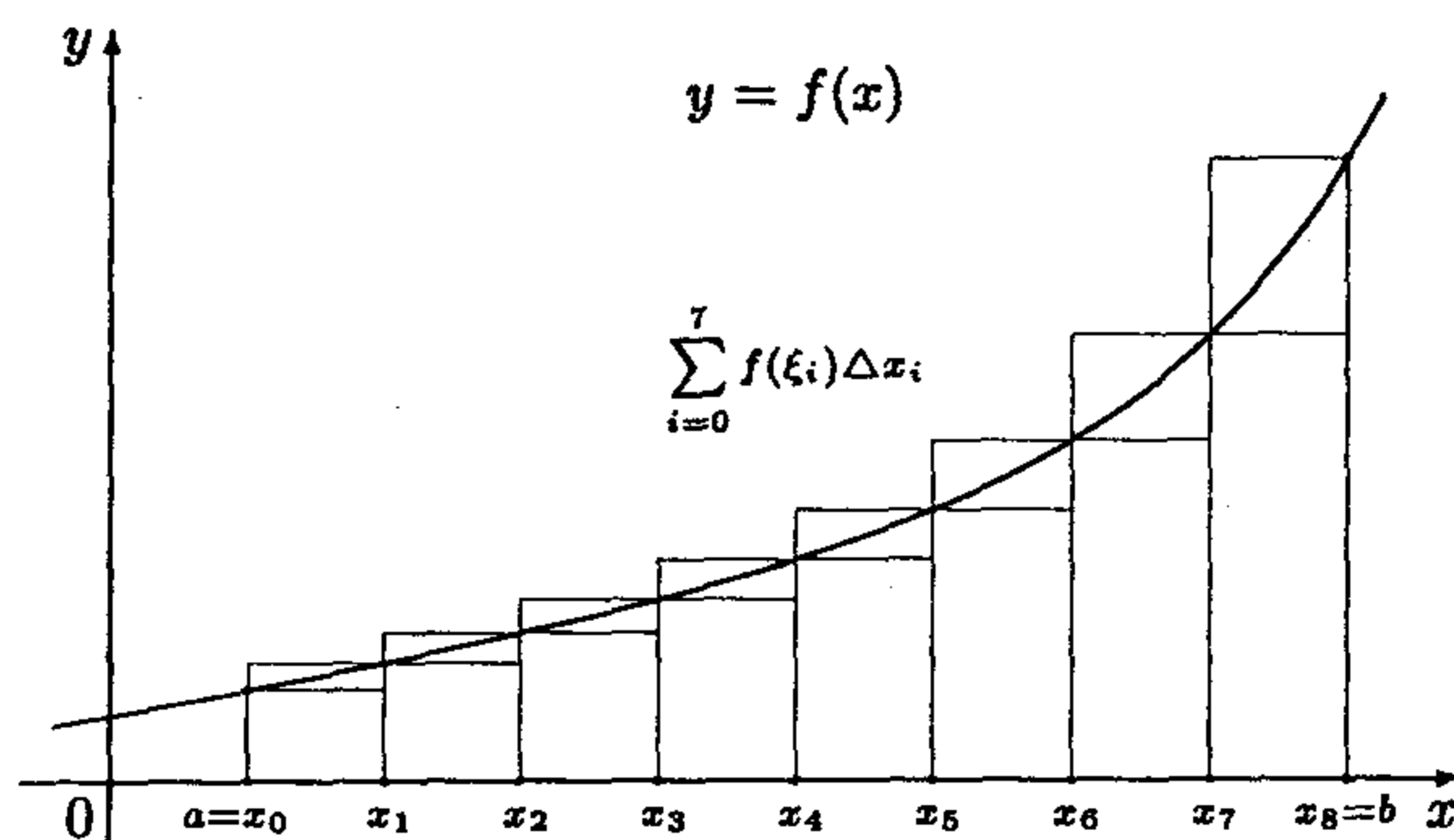
U opštem slučaju neka je $f(x) \geq 0$, ograničena i neprekidna za $x \in (a, b)$.

Površina krivolinijskog trapeza određenog dūžima $(a, f(a))$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ i grafikom funkcije između tačkaka $f(a)$ i $f(b)$ jednaka je određenom integralu $\int_a^b f(x) dx$.

Neka je funkcija $f(x)$ ograničena na intervalu (a, b) sa najviše konačno mnogo prekida. Podelimo interval (a, b) na podintervale tačkama $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$. Neka je $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \dots, n$. Označimo sa $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Izraz,

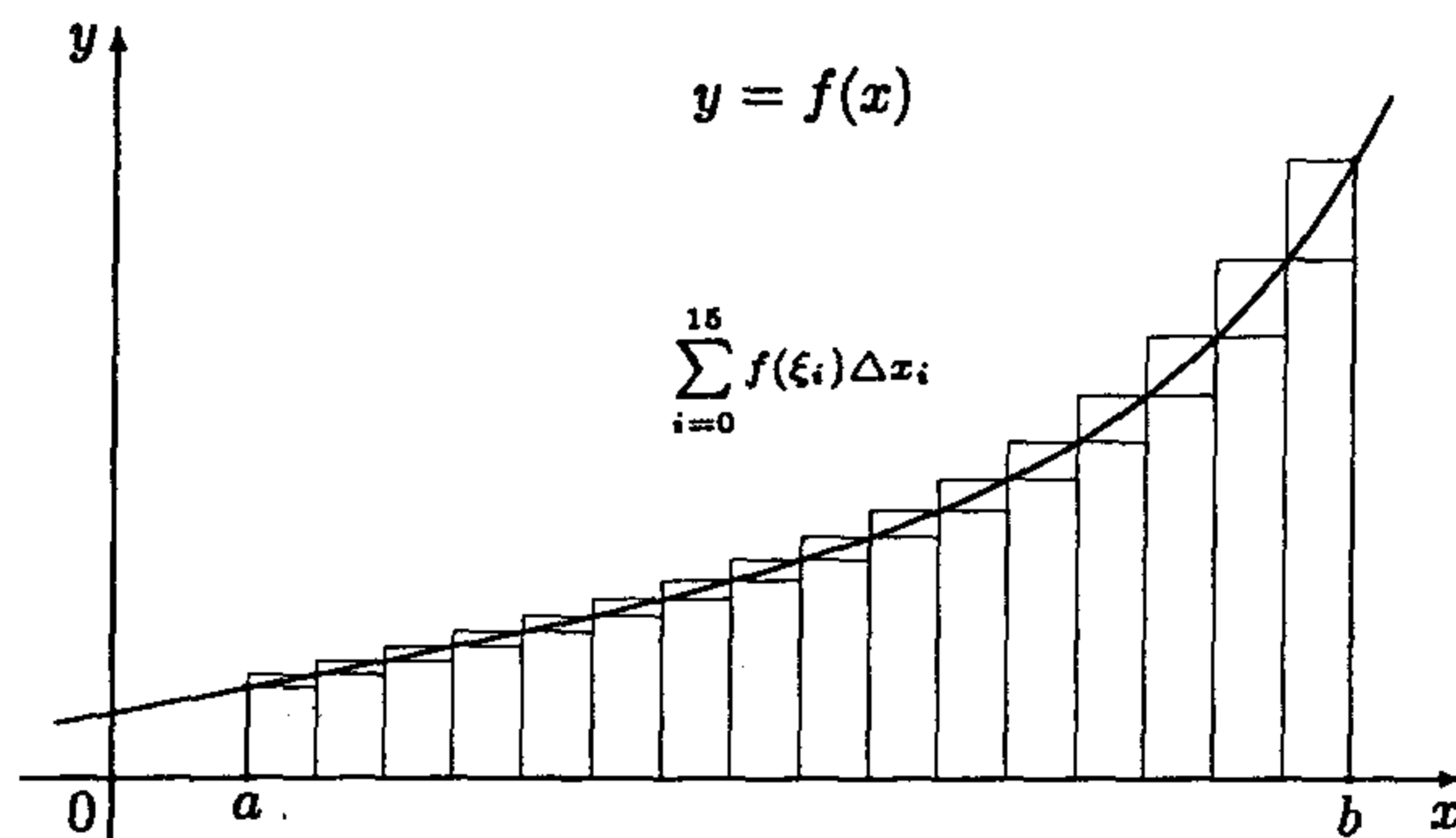
$$\sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

koji nazivamo *parcijalnom sumom*, po vrednosti je između suma površina upisanih i sume površina opisanih pravougaonika (vidi slike 2, 3 i 4) i zavisi od podele intervala (a, b) tačkama x_0, \dots, x_n i od izbora tačkaka ξ_i .

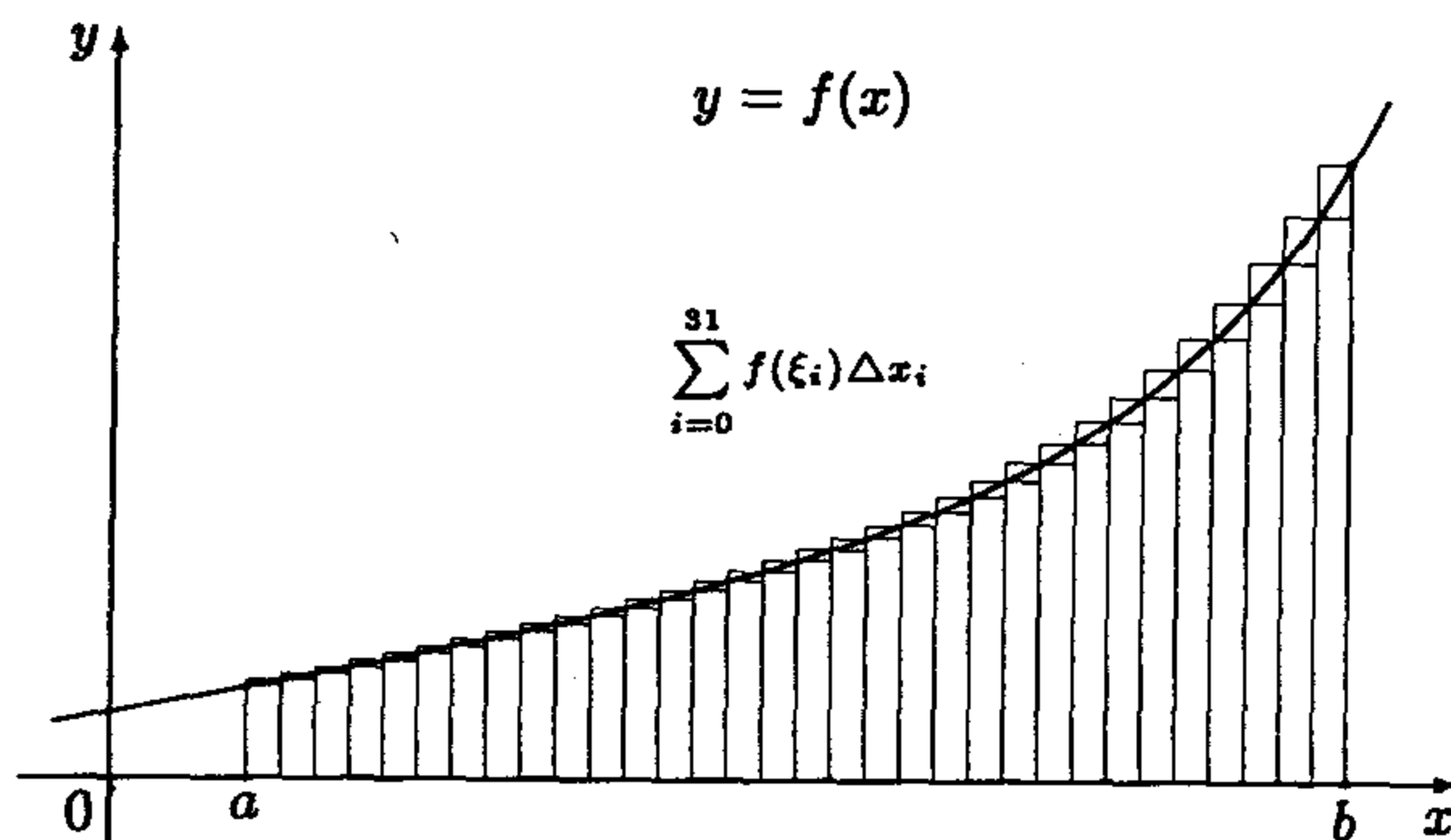


Slika 2.

Uočimo pravougaonike baze Δx_i i visine $f(\xi_i)$ $i = 0, \dots, n$. Prethodni zbir predstavlja približnu vrednost površine krivolinijskog trapeza određenog tačkama $(a, f(a))$, $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(b, f(b))$ i grafikom funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) , tj. prethodni zbir koji se naziva integralna suma funkcije $f(x)$ aproksimira vrednost određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$.



Slika 3.

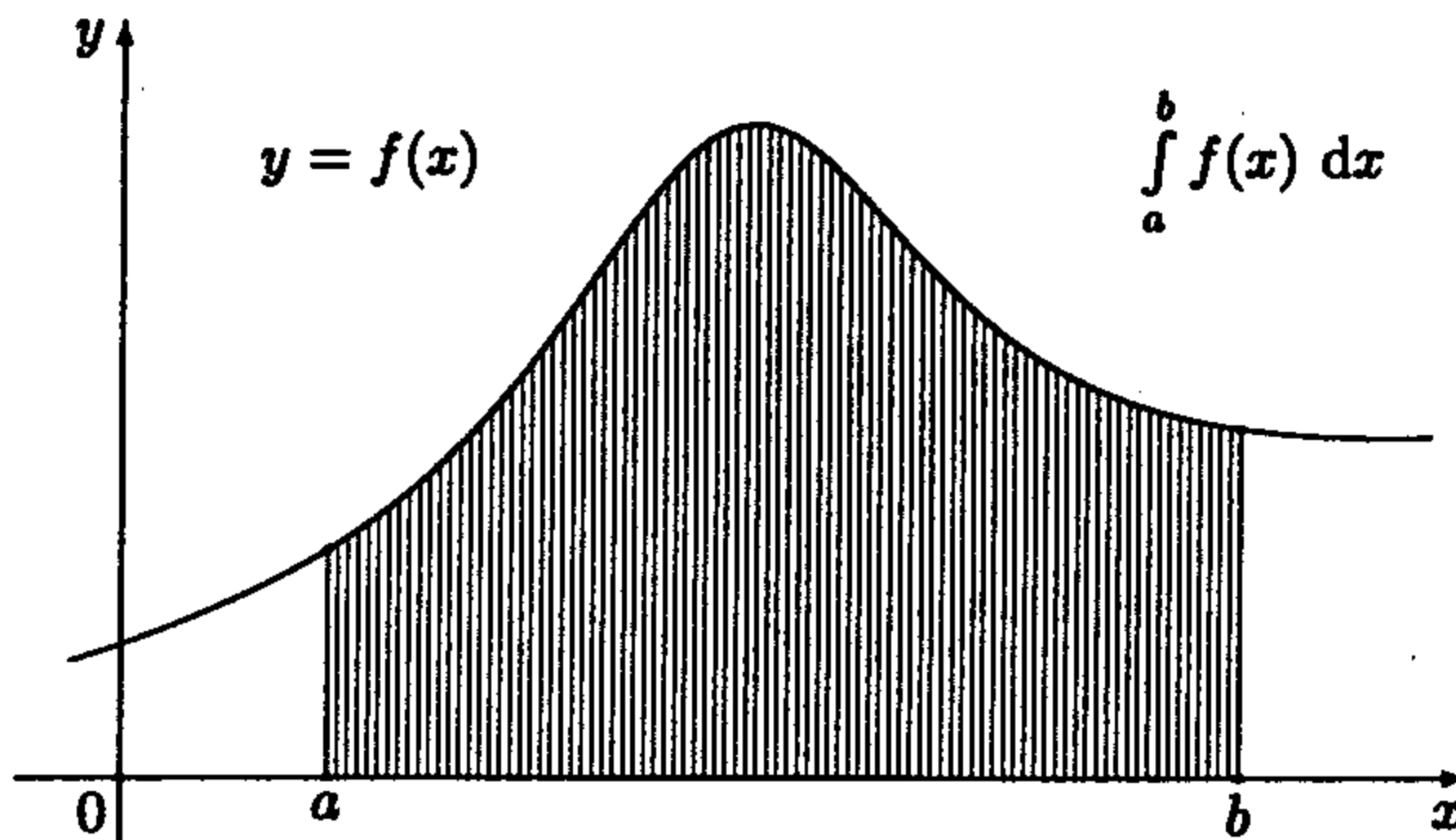


Slika 4.

Kada u integralnoj sumi broj tačaka n podele intervala (a, b) neograničeno raste i pritom rastojanje između tačaka podele teži nuli, integralna

suma neprekidne ograničene funkcije teži vrednosti određenog integrala bez obzira na izbor podele:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max(\Delta x_i) \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$



Slika 5.

Isto važi za funkciju koja ima konačno mnogo prekida na intervalu (a, b) . Gornja jednakost uzima se za alternativnu definiciju određenog integrala i u tom slučaju **Definicija 2.** postaje teorema.

Primer 11. Rešimo odredjeni integral za $a, b \neq 0$:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{b-a}{ab}.$$

Odredimo dalje $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2}$. Pošto je

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

imamo da važi

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a}.$$

Definicija 3. Ako postoji $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, taj limes označavamo sa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in (a, +\infty)$ onda je prethodni integral jednak površini oblasti ograničenoj intervalom $(a, +\infty)$, duži $(a, f(a))$ i grafikom funkcije $f(x)$ desno od tačke a .

Primer 12. Odredimo $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Pošto je

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}),$$

sledi da

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = 2\sqrt{b}.$$

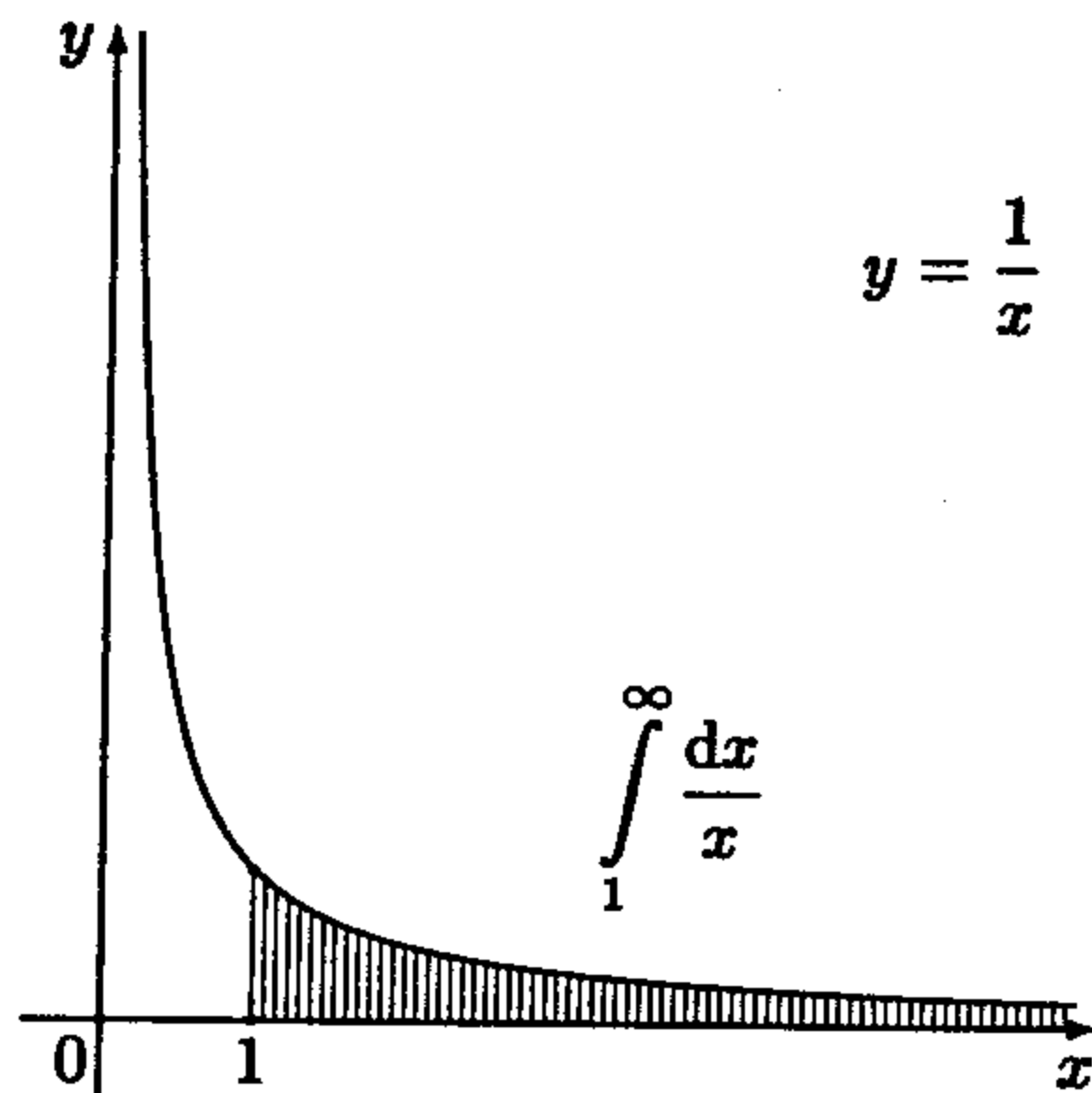
Iako funkcija $\frac{1}{\sqrt{x}}$ teži beskonačnosti kad x teži 0^+ , iz prethodnog limesa vidimo da je površina beskonačne oblasti (ograničena intervalom $(0, +\infty)$ y -ose, duži $(0, b)$ i grafikom funkcije $\frac{1}{\sqrt{x}}$ za $x \in (0, b)$) konačna i jednaka $2\sqrt{b}$. U ovom slučaju pišemo

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Poslednja dva tipa integrala nazivaju se nesvojstveni. Slično se definiše integral $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ (kada postoji).

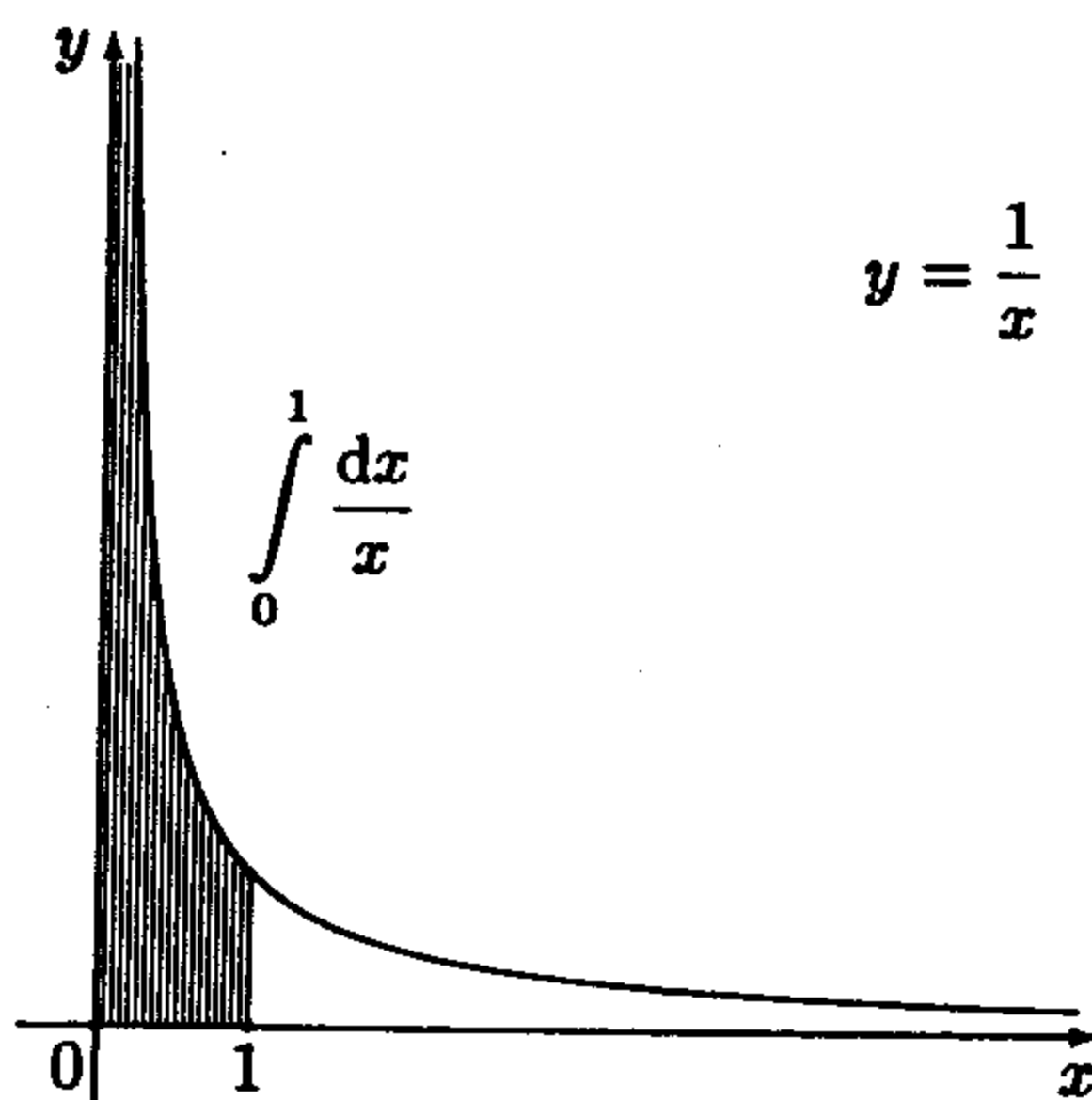
Primer 13. Ispitajmo konvergenciju sledećih nesvojstvenih integrala: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.5}}$ i $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1.5}}$, koji odgovaraju šrafiranim oblastima na slikama 6,7,8 i 9.

$$(1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln a = +\infty.$$



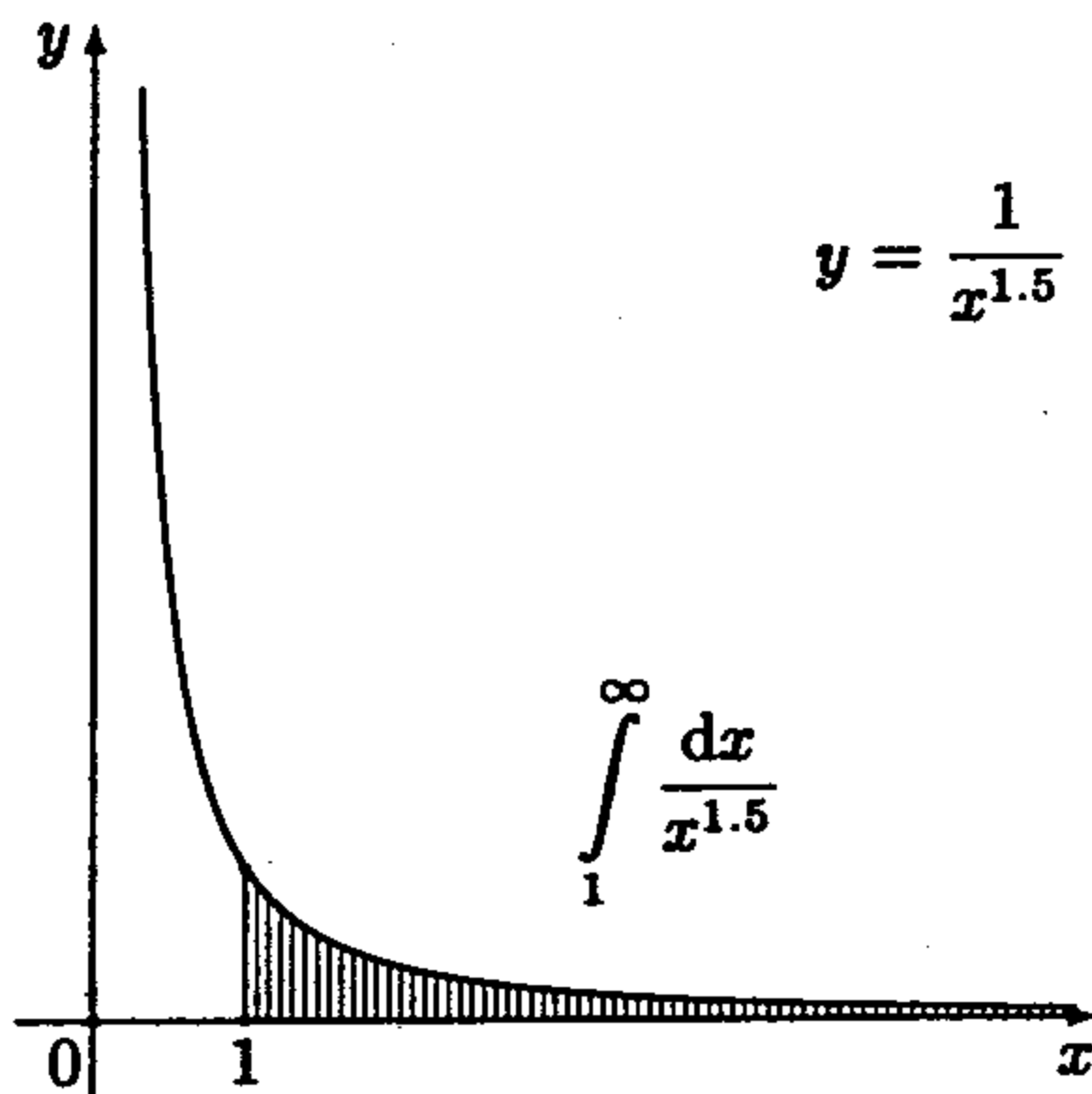
Slika 6.

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln a) = +\infty.$$



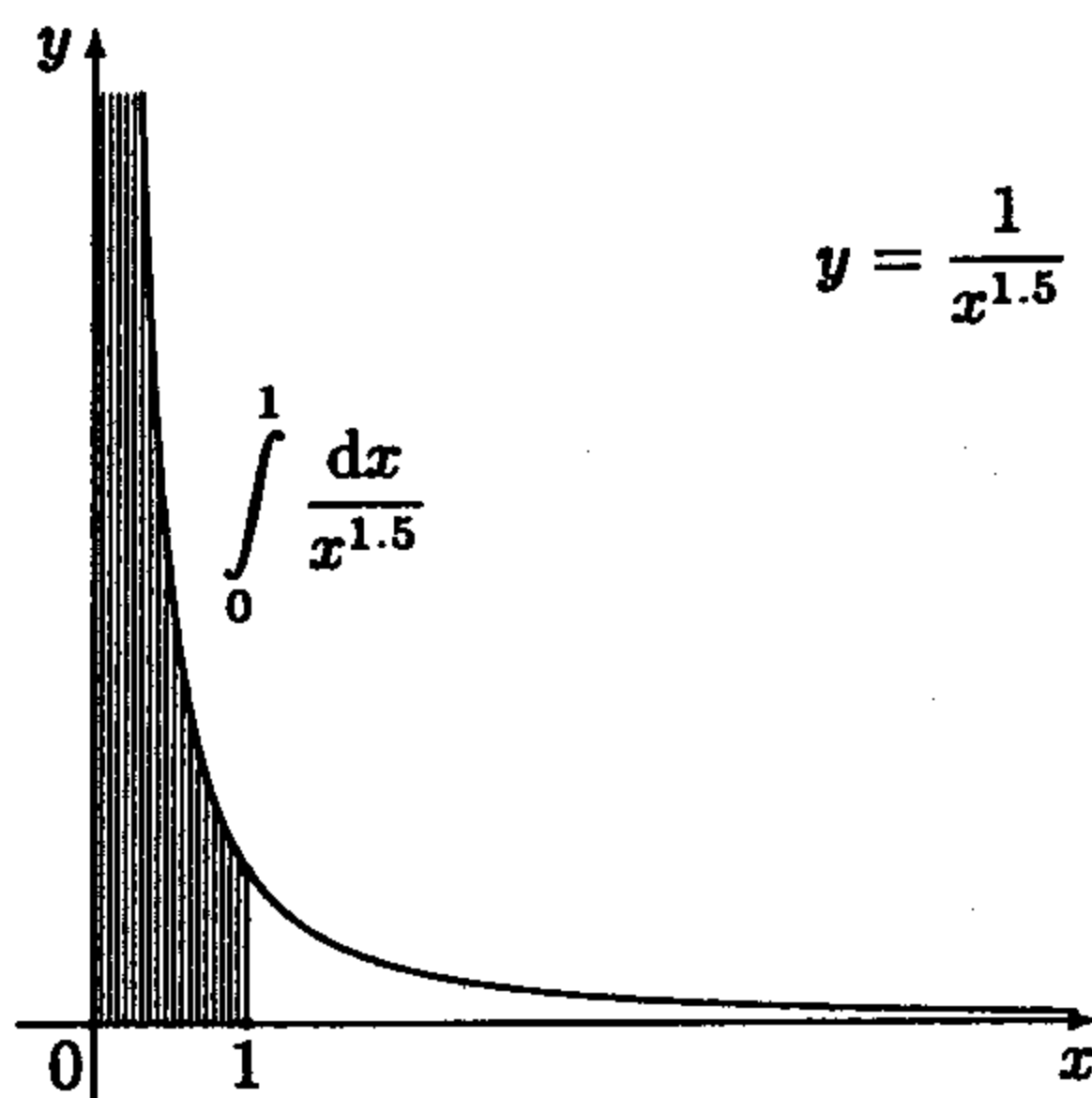
Slika 7.

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.5}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^{1.5}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left. \frac{-2}{\sqrt{x}} \right|_1^a = 2.$$



Slika 8.

$$(4) \int_0^1 \frac{dx}{x^{1.5}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x^{1.5}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left. \frac{-2}{\sqrt{x}} \right|_a^1 = +\infty.$$



Slika 9.

Primer 14. Neka je $f(x)$ monotono nerastuća nenegativna funkcija na intervalu $[1, +\infty)$ i neka su $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Onda važi (KOŠIJEV INTEGRALNI KRITERIJUM ZA REDOVE):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira akko } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergira.}$$

Iz prethodnog sledi da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ konvergentan. Slično, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+p}}$, konvergira za $p > 0$, a divergira za $p \leq 0$. Razmotrimo red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Pošto je

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} d(\ln(\ln x)) = \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln(\ln a) - \ln(\ln 2)) = +\infty,$$

sledi da gornji red divergira. Iz prethodnog imamo posledicu: za svaki n funkcija $\ln x$ sporije raste od funkcije $\sqrt[p]{x}$, odnosno

$$(\forall n)(\exists a)(\forall x) \quad x \in (a, +\infty) \Rightarrow \ln x < \sqrt[p]{x}.$$

Razmotrimo konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+p} n}$, za $p > 0$. Prema Košijevom integralnom kriterijumu, sledi

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{1+p} x} &= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+p}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{pt^p} \Big|_{\ln 2}^a \right) \\ &= \frac{1}{p \ln^p 2} - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{pa^p} \\ &= \frac{1}{p \ln^p 2}, \end{aligned}$$

pa ispitivani red konvergira.

7. Verovatnoća i statistika

7.1 Verovatnoća

Statistika omogućava prvo uobličavanje naučnih činjenica grupisanjem merenih veličina, kao i određivanje njihove uzajamne zavisnosti. Većina fizičkih zakona je najpre uočena kroz statistiku. Pored uzročno posledičnih odnosa primetimo da ima i nedeterminističkih - slučajnih pojava i procesa, što određuje praktičnu potrebu za matematičkom teorijom slučajnosti. Ima li prenos (naslednih) osobina sa roditelja na potomke nešto zajedničko sa igrama na sreću? Teorija verovatnoće odgovara na ovo, kao i na dosta složenija pitanja. Bacanjem kocke (u desnom džepu jakne) sto puta autor je došao do sledeće statistike; jedinica je pala 18 puta, dvojka 30, trojka 18, četvorka i petica po 10, šestica 14. Evidentno je da bacanje kocke završava jednim od šest mogućih ishoda (na gornjoj strani je jedna od šest strana kocke) ili rezultata. Ako sa n_k , $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ označimo ukupan broj ishoda, u kojima se na gornjoj strani kocke pojavljuje k , a sa n broj bacanja kocke, onda količnik $\frac{n_k}{n}$ predstavlja procenat pojavljivanja cifre k u ukupnom broju bacanja n . Taj količnik se naziva i relativna učestanost rezultata k i u gornjem slučaju imamo:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{18}{100}, \quad \frac{n_2}{n} = \frac{30}{100}, \quad \frac{n_3}{n} = \frac{18}{100}, \quad \frac{n_4}{n} = \frac{n_5}{n} = \frac{10}{100}, \quad \frac{n_6}{n} = \frac{14}{100}.$$

Očigledno suma učestanosti

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_4}{n} + \frac{n_5}{n} + \frac{n_6}{n} = 1.$$

Zamislimo sličan eksperiment, u kome se kocka baca n puta, pri čemu se brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6 pojavljuju redom n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , n_5 i n_6 puta. Opet ćemo imati za sumu relativnih učestanosti

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_4}{n} + \frac{n_5}{n} + \frac{n_6}{n} = 1, \text{ jer je}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = n,$$

tj. prilikom svakog bacanja kocka pada na jednu od svojih strana i sa gornje strane se pojavljuje jedan do šest, što predstavlja skup svih mogućih ishoda prilikom bacanja kocke. Uobičajeno je da se veruje da će za idealnu, slučajno bačenu kocku sve relativne učestanosti (biti ravnopravne i) težiti $\frac{1}{6}$ i taj se broj onda naziva verovatnoćom događaja "da padne k ".

Za dati eksperiment, skup svih mogućih rezultata ishoda se naziva *skup elementarnih događaja* i obično se označava sa Ω . Podskupovi skupa Ω nazivaju se događajima; skup svih događaja je $\mathcal{P}(\Omega)$, partitivni skup skupa Ω . U prethodnom primeru $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, gde je e_k -elementarni događaj: pojava broja k prilikom bacanja kocke. Uočimo događaje:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{e_1, e_3, e_5\}, && \text{"da padne neparan broj"}; \\ A_2 &= \Omega \setminus A_1 = A_1^c = \{e_2, e_4, e_6\}, && \text{"da ne padne neparan broj"}; \\ A_3 &= \{e_2, e_3, e_4, e_5\}, && \text{"da padne više od 1, a manje od 6"}; \\ A_4 &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \Omega, && \text{"da padne manje od 8"}; \\ A_5 &= \Omega^c = \emptyset, && \text{"da padne negativan broj"}. \end{aligned}$$

Ako sa $\mathcal{P}(A)$ označimo verovatnoću događaja A , onda za prethodne događaje očigledno važi:

$$\mathcal{P}(A_1) = \frac{1}{2} \mathcal{P}(\Omega) = \frac{1}{2};$$

$$\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(\{e_2, e_4, e_6\}) = \mathcal{P}(\{e_2\}) + \mathcal{P}(\{e_4\}) + \mathcal{P}(\{e_6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\mathcal{P}(A_3) = \mathcal{P}(\{e_2\}) + \mathcal{P}(\{e_3\}) + \mathcal{P}(\{e_4\}) + \mathcal{P}(\{e_5\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\mathcal{P}(A_4) = \mathcal{P}(\Omega) = 1 (= 100\%);$$

$$\mathcal{P}(A_5) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0.$$

U teoriji verovatnoće obično imamo sledeću situaciju:

- (1) ispitivanje fenomena - okolnosti vezanih za eksperiment,
- (2) određivanje skupa elementarnih događaja i skupa svih događaja,
- (3) određivanje funkcije verovatnoće,
- (4) formulacija i rešavanje zadataka, određivanje semantičke funkcije.

Za prethodni primer skup $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ je skup elementarnih događaja; $P(\Omega)$ je skup svih događaja;

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{6},$$

za $A \in P(\Omega)$ je verovatnoća događaja A .

Za ovako (precizno) postavljen okvir formulišu se i rešavaju zadaci. Formulacija zadatka se obavlja korišćenjem prirodnog jezika, u rešavanju zadatka određuju se neki događaji i njihove verovatnoće. Obično zadatak izgleda ovako: Neka su ispunjeni uslovi u_1, \dots, u_n , odrediti verovatnoću događaja A , pri čemu se događaj A opisno određuje. Nije uobičajeno da se u teoriji verovatnoće govori o semantičkoj funkciji. Semantička funkcija bi se mogla definisati kao pridruživanje matematičke formulacije zadatka prirodno jezičkoj formulaciji zadatka, odnosno kao transkripcija polaznog zadatka u matematički zadatak.

Primer 2. Uočimo eksperiment iz prvog primera sa pridruženim skupovima Ω , $P(\Omega)$ i funkcijom verovatnoće $\mathcal{P}(A)$ za $A \in P(\Omega)$.

Uočimo sledeće zadatke: odrediti verovatnoću događaja:

- (1) "da padne broj manji od 3 ili broj veći od 4";
- (2) "da padne paran broj ili da tramvaj dođe na stanicu za 5 minuta".

Oko zadatka (1) ne bi trebalo da bude previše dileme i zadatku pridružujemo skup događaja $A = \{e_1, e_2\} \cup \{e_5, e_6\} = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ čija je verovatnoća

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

pa bi odgovor: "tražena verovatnoća je $\frac{2}{3}$ ", sasvim zadovoljio.

Zadatak (2) izaziva osećaj blaže neprijatnosti. S jedne strane, sasvim je ispravno postavljen kao prirodno pitanje, s druge strane, izaziva osećaj nesigurnosti jer se ne vidi kako bi se transkripcija na matematički zadatak obavila za deo zadatka s tramvajem. Najjednostavnije odlučivanje u ovakvom slučaju navešće nas da ovakav zadatak u potpunosti odbacimo, npr. kao besmislen ili neprevodiv, zato što događaj $B =$ "tramvaj dolazi na stanicu za 5 minuta" ne postoji kao podskup od Ω , pa otuda ni ceo događaj iz zadatka (2) ne pripada skupu svih mogućih događaja $P(\Omega)$ vezanih za dati eksperiment,

zbog čega mu ne treba ni tražiti verovatnoću jer je ista definisana samo na skupu $P(\Omega)$.

Ovakvim rezonovanjem događaj “da padne negativan broj” iz prvog primera ne bismo smeli zapisati kao \emptyset , nego bismo ga morali proglasiti za nemoguć, tj. $A_5 \notin P(\Omega)$ ili preciznije za neispravan. Nemoguć događaj je jednak \emptyset i verovatnoća mu je nula. Neispravan događaj ne pripada skupu događaja, pa za njega verovatnoća nije ni definisana.

7.1.1 Formalno uvođenje

Definicija 1. $F \subseteq P(x)$ je σ -polje akko

1. $x \in F$,
2. $y \subseteq x \wedge y \in F \Rightarrow x \setminus y \in F$,
3. $x_n \in F, n \in N \Rightarrow \bigcup_{n \in N} x_n \in F$.

Neposredno se dokazuje sledeća lema.

Lema 1. Ako je $F \subseteq P(x)$ σ -polje, onda

1. $\emptyset \in F$,
2. $x_n \in F, n \in N \Rightarrow \bigcap_{n \in N} x_n \in F$.

Dokaz. Za $y = \emptyset$ iz 1. i 2. definicije sledi $\emptyset \in F$. Slično tačka 2. Leme 1. sledi iz 2. i 3. Definicije 1. \square

Primer 3. Ako je Ω skup događaja, $F \subseteq P(\Omega)$ σ -polje onda je F , σ -polje događaja. $P(\Omega)$ je σ -polje.

Definicija 2. Neka je $F \subseteq P(\Omega)$ σ -polje događaja. Funkcija $\mathcal{P}: F \rightarrow [0, 1]$ je verovatnoća nad F ako važi sledeće:

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$,
2. za $x, y \in F: x \subseteq y \Rightarrow \mathcal{P}(x) \leq \mathcal{P}(y)$,
3. ako je $\{x_n | n \in N\} \subseteq F$ disjunktna familija ($i \neq j \Rightarrow x_i \cap x_j = \emptyset$), onda

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n \in N} \{x_n | n \in N\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(x_n).$$

U teoriji verovatnoće je veoma značajan uslov 3. definicije σ -polja kao i uslov 3. definicije verovatnoće (σ -aditivnosti). Ako je prostor događaja Ω

konačan, onda je i $P(\Omega)$ konačan pa se σ -aditivnost svodi na konačnu aditivnost. Svako polje skupova $F \subseteq P(\Omega)$ je konačno pa se uslov 3. definicije σ -polja svodi na

$$3'. \quad x, y \in F \Rightarrow x \cup y \in F,$$

dok se uslov 3. definicije verovatnoće svodi na

$$3''. \quad x, y \in F \wedge x \cap y = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(x \cup y) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y).$$

Primer 4. Neka je $|\Omega| < \aleph_0$ (dakle postoji $n \in N$ takav da $|\Omega| = n$). Tada je $|P(\Omega)| = 2^n$. Definišimo verovatnoću \mathcal{P} na $P(\Omega)$: za $e \in \Omega$ neka je $\mathcal{P}(\{e\}) = \frac{1}{n}$; imamo:

$$x \subseteq \Omega \Rightarrow \mathcal{P}(x) = \frac{|x|}{n},$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

Ako su $A_1, \dots, A_k \subseteq \Omega$ disjunktni sledi:

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \frac{\left|\bigcup_{i=1}^k A_i\right|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |A_i| = \sum_{i=1}^k \frac{|A_i|}{n} = \sum_{i=1}^k \mathcal{P}(A_i).$$

Ovde su svi elementarni događaji jednako verovatni, verovatnoća događaja A se izračunava (procentualno) brojanjem elemenata skupa A (i deobom sa n), pa se zato i ova verovatnoća naziva brojna (brojeća) verovatnoća.

Primer 5. Neka je $|\Omega| = n$, $n \in N$. Neka su $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ takvi, da $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Neka je funkcija \mathcal{P}' definisana na elementarnim događajima: $\mathcal{P}'(\{e_i\}) = p_i$, tako se uveravamo da se \mathcal{P}' može proširiti do verovatnoće \mathcal{P} nad $P(\Omega)$. Definišimo \mathcal{P} na $P(\Omega)$: za $A \subseteq \Omega$ neka je

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{j=1}^k \mathcal{P}'(\{e_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^k p_{i_j}, \quad \text{pri čemu } A = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}.$$

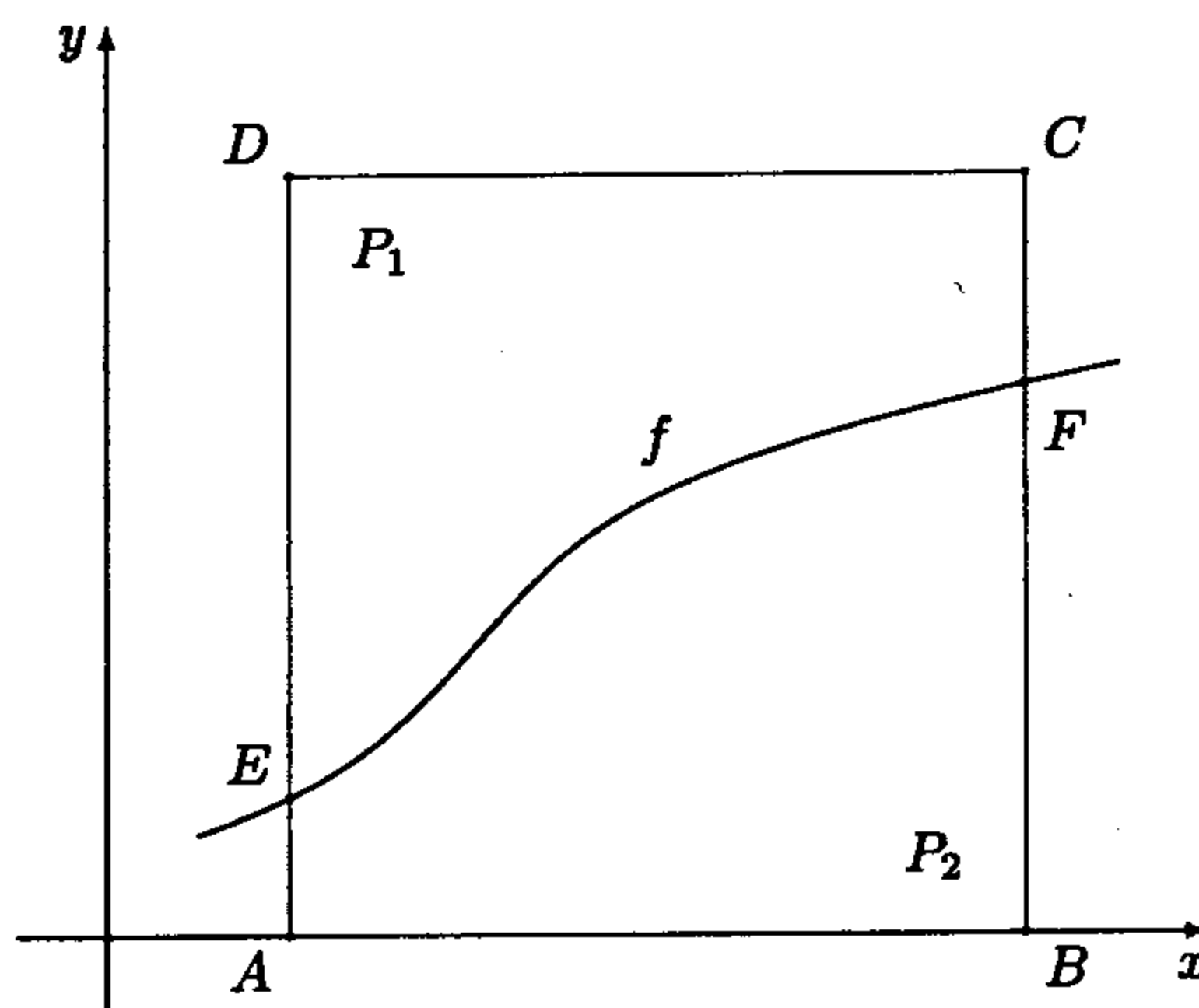
Očigledno: $\mathcal{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$; za disjunktne $A_1, \dots, A_m \subseteq \Omega$

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{e \in \bigcup_{i=1}^m A_i} \mathcal{P}(\{e\}) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{e \in A_i} \mathcal{P}(e) \right) = \sum_{i=1}^m \mathcal{P}(A_i).$$

Iz prethodna dva primera vidimo da za konačni prostor događaja Ω postoje verovatnoće na celom $P(\Omega)$ skupu svih podskupova (događaja), kao i da se verovatnoća događaja računa polazeći od atomičnih verovatnoća, verovatnoća elementarnih događaja, verovatnoća događaja A je zbir verovatnoća elementarnih događaja koji pripadaju A , što je posledica istovetnosti uslova σ -aditivnosti i konačne aditivnosti za konačni Ω .

Ako je skup događaja Ω beskonačan, situacija je nešto složenija. $P(\Omega)$ je i u ovom slučaju σ -algebra, međutim postojanje verovatnoće nad $P(\Omega)$ se ne obezbeđuje tako lako, kao u slučaju konačnog prostora događaja.

Primer 6. Neka je dat pravougaonik $ABCD$ koji linija f deli na dve zatvorene oblasti. Zamislimo da slučajno bačena tačka ravnopravno pada u pravougaonik $ABCD$. Koja je verovatnoća da slučajno bačena tačka pogodi gornju oblast ($DEFC$)? Označimo ovaj događaj sa X .



Slika 1.

Dakle, iz zadatka shvatamo da slučajno bačena tačka (koju za početak shvatimo kao vrlo sitnu kuglicu, potom kao kuglicu infinitezimalnog prečnika, tj. tačku) pada obavezno u pravougaonik $ABCD$, kao i da nema neravnopravnih mesta. Događaj "tačka pada u $ABCD$ " je siguran događaj Ω , i $\mathcal{P}(\Omega) = 1$. Neka je M tačka pravougaonika $ABCD$ na koordinatama (x, y) . Elementarni događaji $e \in \Omega$ su oblika: slučajno bačena tačka pogađa tačku M . Očigledno $\mathcal{P}(e) = 0$ za $e \in \Omega$. Tražena verovatnoća biće jednaka količniku površina $\frac{P_1}{P_{ABCD}}$ i možemo je odrediti sve dok umemo da odredimo P_1 . Neka je $P_2 = \int_B^A f dx$, onda

$$P_1 = P_{ABCD} - P_2 = d(AB)d(AD) - \int_A^B f dx,$$

pa je za rešenje zadatka neophodna izračunljivost integrala u gornjoj formuli, što je obezbeđeno, ako f zadovoljava uslove integrabilnosti. Uočimo da za razliku od prethodnih primera verovatnoća događaja X nije jednaka zbiru elementarnih događaja koji ga čine:

$$X = \{M \mid M = (x, y) \wedge x \in (A, B) \wedge y \in (A, D) \wedge y \geq f(x)\},$$

$$P_1 = \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}\left(\bigcup\{M \mid M \in X\}\right) \neq \sum_{M \in X} \mathcal{P}(\{M\}) = 0.$$

Možda ovo deluje zbunjujuće zbog uslova σ -aditivnosti verovatnoće, ali konstatujmo da je $|X| = 2^{\aleph_0}$, tj. X ima kontinuum mnogo tačaka. Neprebrojiva suma je definisana samo ako je najviše prebrojivo mnogo članova različito od nule. Dalje $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, a σ -aditivnost predstavlja \aleph_0 -aditivnost. Dakle, da bi važio da je verovatnoća događaja X jednaka zbiru verovatnoća elementarnih događaja, koji ulaze u X , neophodno je da verovatnoća \mathcal{P} bude 2^{\aleph_0} -aditivna (što je nemoguće).

Mada jednostavan i sličan mnogim praktičnim zadacima **Primer 6.** nameće još neka razjašnjenja. Ako je Ω jednak poligonu $ABCD$, $\mathcal{P}(\Omega)$ skup svih podskupova $ABCD$, onda je postojanje verovatnoće \mathcal{P} nad celim $P(\Omega)$ teže obezbeđivo i ekvivalentno vrlo jakoj aksiomi beskonačnosti i tada je kontinuum vrlo veliki ($|N| < |N|^+ < |N|^{++} < \dots < 2^{\aleph_0}$). Sledi: ako važi kontinuum hipoteza, onda ne postoji verovatnoća na celom $P(\Omega)$. Druga mogućnost je slabljenje domena verovatnoće, dopuštanje da verovatnoća

bude parcijalna funkcija. Za dovoljno bogata σ -polja (nad Ω kao u prethodnom primeru) može se dokazati da imaju verovatnoću. Neka je F jednako σ -polju nad Ω iz **Primera 6.** nad kojim postoji verovatnoća P . Znači, svaki događaj iz F ima verovatnoću (za $x \in F$, $\mathcal{P}(x) \in [0, 1]$). Pošto je $F \neq P(\Omega)$, sledi da postoji $x \subseteq \Omega$ takav da $x \notin F$. Pošto je verovatnoća definisana samo za elemente F ($\text{dom}(\mathcal{P}) = F$), sledi da x nema verovatnoću. X se razlikuje od neverovatnog događaja (verovatnoće 0), od nemogućeg događaja (prazan skup) i od neispravnog događaja, pa bismo ovakve događaje izdvojili kao (smislene - ispravne) bez verovatnoće.

7.1.2 Teorema potpune verovatnoće

Definicija 3. USLOVNA VEROVATNOĆA. Verovatnoća događaja B pod uslovima, koji dovode do realizacije događaja A , u oznaci $\mathcal{P}(B|A)$ definiše se jednakošću

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(AB)}{\mathcal{P}(A)}, \quad \text{za } \mathcal{P}(A) > 0;$$

Teorema 1. Neka su A_1, \dots, A_n disjunktni događaji takvi da

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega,$$

(kažemo još da A_1, \dots, A_n čine particiju od Ω). Za svaki događaj B (koji ima verovatnoću) važi

$$\mathcal{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i) \mathcal{P}(B|A_i).$$

Dokaz. Neposredno sledi iz $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (B \cap A_i)$ i definicije uslovne verovatnoće. \square

Posledica 1. BAJESOVA FORMULA.

$$\mathcal{P}(A_i|B) = \frac{\mathcal{P}(A_i) \mathcal{P}(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n \mathcal{P}(A_k) \mathcal{P}(B|A_k)} \quad \text{za } i = 1, \dots, n.$$

Dokaz. Uočimo

$$\frac{\mathcal{P}(A_i)\mathcal{P}(B|A_i)}{\mathcal{P}(A_i|B)} = \frac{\mathcal{P}(A_i)\frac{\mathcal{P}(B \cap A_i)}{\mathcal{P}(A_i)}}{\frac{\mathcal{P}(A_i \cap B)}{\mathcal{P}(B)}} = \mathcal{P}(B).$$

Dalje dokaz sledi neposredno iz **Teoreme 1.** \square

7.1.3 Slučajna promenljiva, raspodela verovatnoće

Neka je X funkcija, čiji je domen skup elementarnih događaja Ω , a kodomen skup $B \subseteq R$. Funkciju X nazivamo *slučajno promenljivom*. Ako je kodomen B konačan ili prebrojiv, kažemo da je slučajna promenljiva X *diskretna*. Pored diskretnih važne su i neprekidne slučajno promenljive, kod kojih je kodomen “neprekidan”, npr. interval ili unija intervala.

Primer 7. Novčić se baca tri puta. Skup mogućih ishoda (pojava pisma ili glave, redom P, G) označimo sa

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, \dots, GGG\}.$$

Funkcija X definisana sa

$$X(\omega) = \text{“broj } P\text{-ova u } \omega\text{”}$$

je diskretna slučajna promenljiva ($\text{codom}(X) = \{0, 1, 2, 3\}$).

Primer 8. Neka je $A \subseteq \Omega$; karakterističnu funkciju događaja A možemo smatrati slučajnom promenljivom

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{akko } \omega \in A, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} = I_A(\omega).$$

Ova slučajna promenljiva se naziva još i indikatorom događaja A . Neka je npr. $A \subseteq \Omega$ iz prethodnog primera takav da važi $\omega \in A$ akko ω , ima paran broj P -ova.

Očigledno, $A = \{GGG, PPG, PGP, GPP\}$ i važi (na primer)

$$I_A(PPP) = I_A(PGG) = 0; \quad I_A(GPP) = 1;$$

Uočimo da je kodomen slučajno promenljive uređen (prirodni poredak \leq u R). Prethodno dolazi do izražaja kod ispitivanja događaja oblika, slučajna promenljiva X ima vrednost u intervalu $[a, b]$ (odnosno $(a, b]$; $[a, b)$; (a, b)).

Definicija 4. Neka je X diskretna slučajna promenljiva nad Ω sa kodomenom B i neka je za $b \in B$, p_b verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost b . Neka je

$$\sum_{b \in B} p_b = 1.$$

Funkciju $p : b \rightarrow p_b$, $b \in B$, nazivamo *diskretnom raspodelom verovatnoće*, odnosno funkcijom raspodele verovatnoće slučajne promenljive X .

Prilikom bacanja kocke izdvojimo događaj: da padne 6 i označimo ga sa \check{s} . Posmatrajmo niz mogućih ishoda u n bacanja kao poseban događaj, pri čemu nas u k -tom bacanju interesuje da li jeste ili nije pala šestica (događaj \check{s} ili njegov komplement o - ostatak).

Primer 9. Pretpostavimo da se ispravna kocka baca n puta, da su bacanja nezavisna, kao i da nas interesuje pojavljivanje, odnosno nepojavlivanje šestice. Kod pojedinačnog bacanja skup svih ishoda je

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \},$$

ali nas interesuju samo događaji

$$A = \{ \omega_6 \} \quad \text{i} \quad A^c = \Omega - A = \Omega \setminus \{ \omega_6 \},$$

koje označimo respektivno sa \check{s} odnosno o (šest, ostatak). Uočimo skup svih nizova dužine n od ova dva slova. Jedan niz predstavlja jedan mogući ishod. Ovih nizova ima 2^n . Definišimo slučajnu promenljivu X kao broj pojava šestice (\check{s}) i odredimo njenu raspodelu. Dakle,

$$X : \{ \check{s}, o \}^n \rightarrow \{ 0, 1, \dots, n \} = n + 1.$$

Neka je p_k verovatnoća da X uzme vrednost k . U pojedinačnom bacanju neka je $\mathcal{P}(\check{s}) = p$, $\mathcal{P}(o) = q = 1 - p$. Sledi da je

$$p_k = p^k (1 - p)^{n-k} b,$$

gde je b broj svih n -torki u kojima se \bar{s} javlja k puta. Očigledno $b = \binom{n}{k}$, pa je

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dalje imamo

$$\sum_{k \in \text{codom}(X)} p_k = \sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1,$$

što znači da p_k , $k \in \{0, \dots, n\}$ predstavlja funkciju raspodele verovatnoća slučajne promenljive X . Ova raspodela se naziva binomna, u oznaci $B(n, p)$, sa parametrima n i p .

Ako je kocka u ovom primeru pristojno izrađena, trebalo bi da bude $p = \frac{1}{6}$, odakle, sledi

$$p_k = \binom{n}{k} \frac{1}{6^k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n}.$$

Osim binomne raspodele, koja se još naziva Bernulijeva šema, u teoriji verovatnoće su posebno važne sledeće dve raspodele, koje se dobijaju kao granični slučaj binomne raspodele kada n neograničeno raste.

7.1.4 Puasonova raspodela

Pretpostavimo da verovatnoća osnovnog ispitivanog događaja A u binomnoj raspodeli zavisi od broja bacanja n , tj. $\mathcal{P}(A) = p_n$. Pretpostavimo još da je $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$. Posmatrajmo slučajnu promenljivu X iz prethodnog primera

$$X_n: \{A, A^c\}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$$

(X je broj realizacija događaja A u n ponovljenih opita).

Neka je

$$\mathcal{P}(\{X_n = m\}) = p_{n,m} \left(= \binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} \right).$$

Iz $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \quad \left(\text{tj. } p_n \approx \frac{\lambda}{n} \text{ za veliko } n, \right),$$

odakle

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= \binom{n}{m} p_n^m \cdot (1 - p_n)^{n-m} \approx \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-m} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-m} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{\frac{n}{\lambda} \cdot \lambda}. \end{aligned}$$

Sledi, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$.

Ovde možemo reći da niz slučajnih promenljivih

$$X_n: \{A, A^c\}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, n\},$$

određuje slučajno promenljivu X^* sa raspodelom $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ koja se naziva Puasonova raspodela. Primetimo da za slučajno promenljivu X^* imamo $X^*: \{A, A^c\}^N \rightarrow N$, tj. argumenti slučajno promenljive X^* su nizovi, a kodomen skup N .

7.1.5 Normalna raspodela

Posmatrajmo gornji niz slučajno promenljivih X_n . Neka je

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Može se pokazati da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot p_{n,m}}{e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1, \quad \text{tj.}$$

za dovoljno veliko n imamo

$$p_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

što se može koristiti i za približno izračunavanje $p_{n,m}$.

Takođe se može dokazati da važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}\left(\left\{a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

i

$$\mathcal{P}(\{X^* \in [a, b]\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Poslednji izrazi određuju Gausovu ili normalnu raspodelu verovatnoće.

7.1.6 Matematičko očekivanje i disperzija

Neka je X diskretna slučajna promenljiva na skupu Ω sa kodomenom $B \subseteq R$. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X definiše se na sledeći način

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega).$$

Primer 10. Ako pada kiša, taksista može da zaradi 300 dinara, ako je lepo vreme, 120 dinara, ako je hladno bez kiše, 180 dinara. Ako su krajem septembra verovatnoće navedenih meteoroloških okolnosti redom: 0.4, 0.25 i 0.35, koliku zaradu taksista može da očekuje pre upoznavanja sa meteorološkim prilikama? Imamo da je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i

$$\begin{aligned} p(\omega_1) &= 0.4, & p(\omega_2) &= 0.25, & p(\omega_3) &= 0.35, \\ x(\omega_1) &= 300, & x(\omega_2) &= 120, & x(\omega_3) &= 180. \end{aligned}$$

Odavde dalje sledi da je očekivana zarada jednaka matematičkom očekivanju

$$E(X) = 0.4 \cdot 300 + 0.25 \cdot 120 + 0.35 \cdot 180 = 213.$$

Matematičko očekivanje daje očekivanu vrednost slučajne promenljive. Rasipanje, disperzija ili srednje kvadratno odstupanje slučajne promenljive X definiše se sa

$$\sigma^2(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

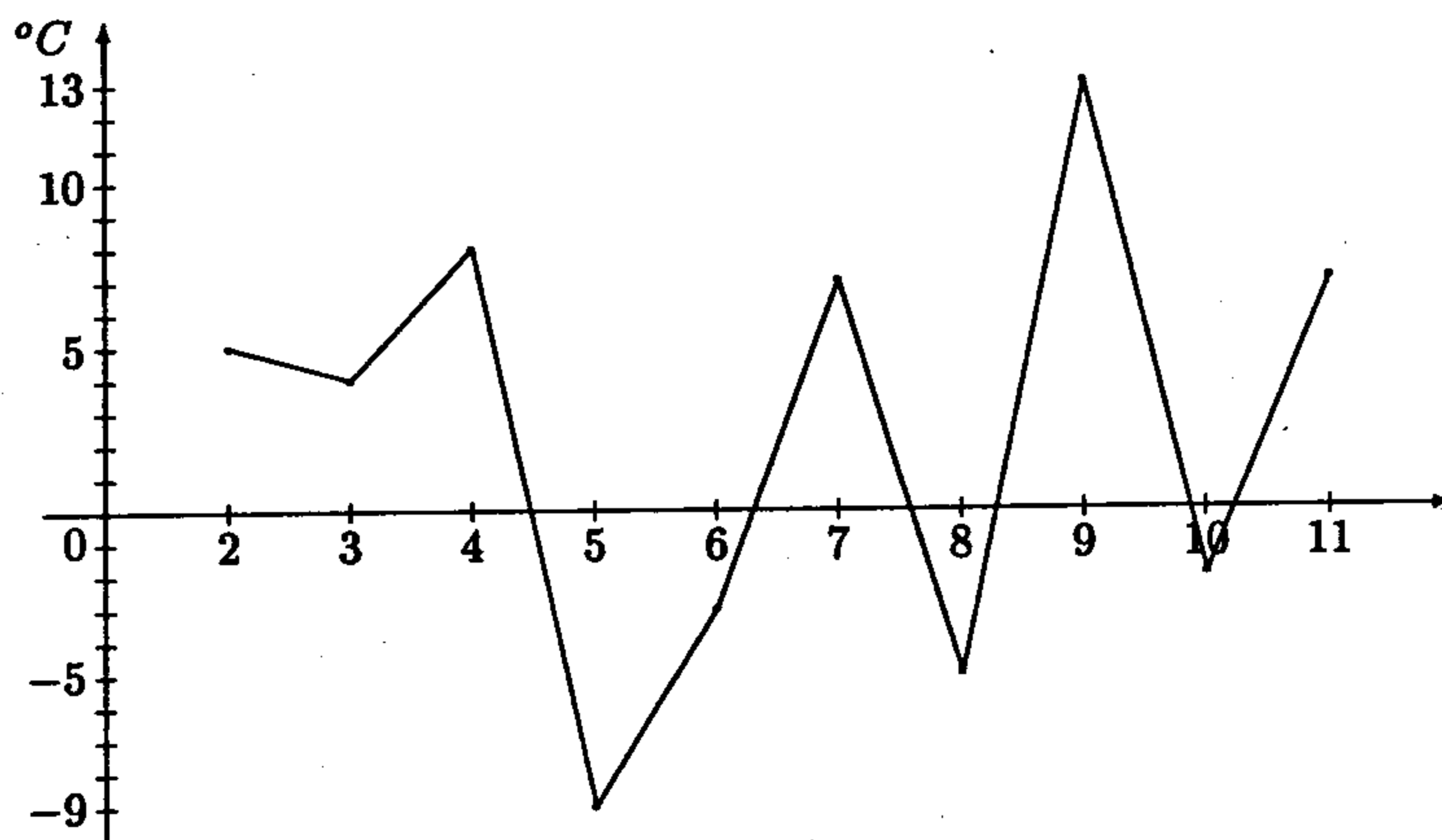
7.2 Elementi statistike

Ispitivanjem slučajnih pojava u praksi bavi se matematička statistika, u čije zadatke spadaju: organizacija podataka, dobijenih merenjem – eksperimentom, preciziranje klase događaja i slučajnih promenljivih, određivanje verovatnoća i raspodela saglasnih sa eksperimentom, ispitivanje osobina elemenata šireg skupa (populacije) proučavanjem istih na elementima reprezentativnog podskupa (uzorka).

Primer 11. Merenjem je utvrđena temperatura u delu ovog grada u periodu 2.1.1996.–11.1.1996. i podaci su prikazani u sledećoj tabeli.

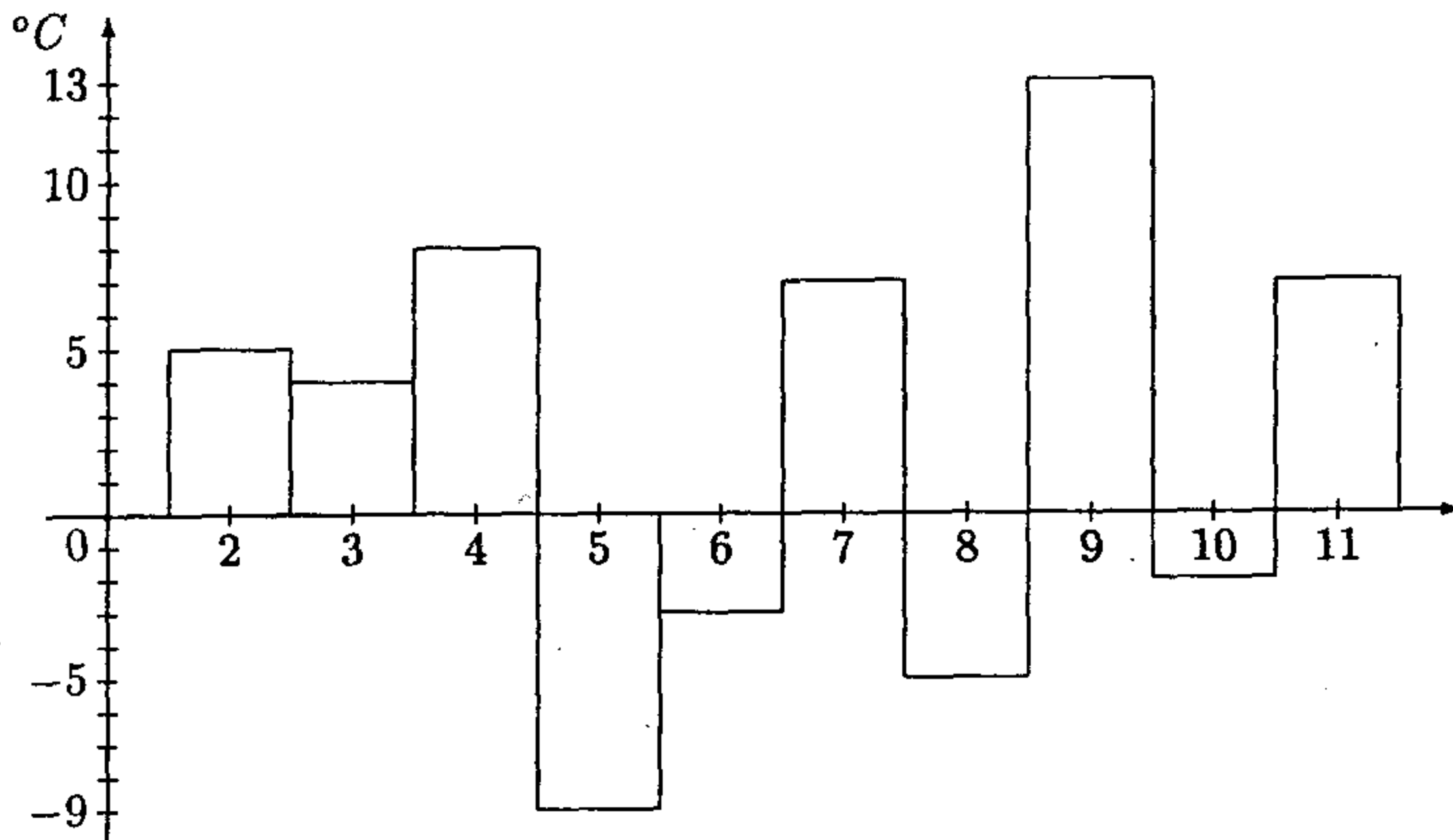
temperatura (°C)	5	4	8	-9	-3	7	-5	13	-2	7
datum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Merenje je zaokruženo na ceo stepen iako je jasno da je temperatura realna veličina. Uobičajena grafička predstavljanja data su na slikama 2. i 3.



Slika 2.

Grafik sa slike 2., dobijen je povezivanjem izmerenih vrednosti, grafik sa slike 3. (histogram) se sastoji od pravougaonika iste baze, čija visina (ili površine) predstavlja merenu veličinu.

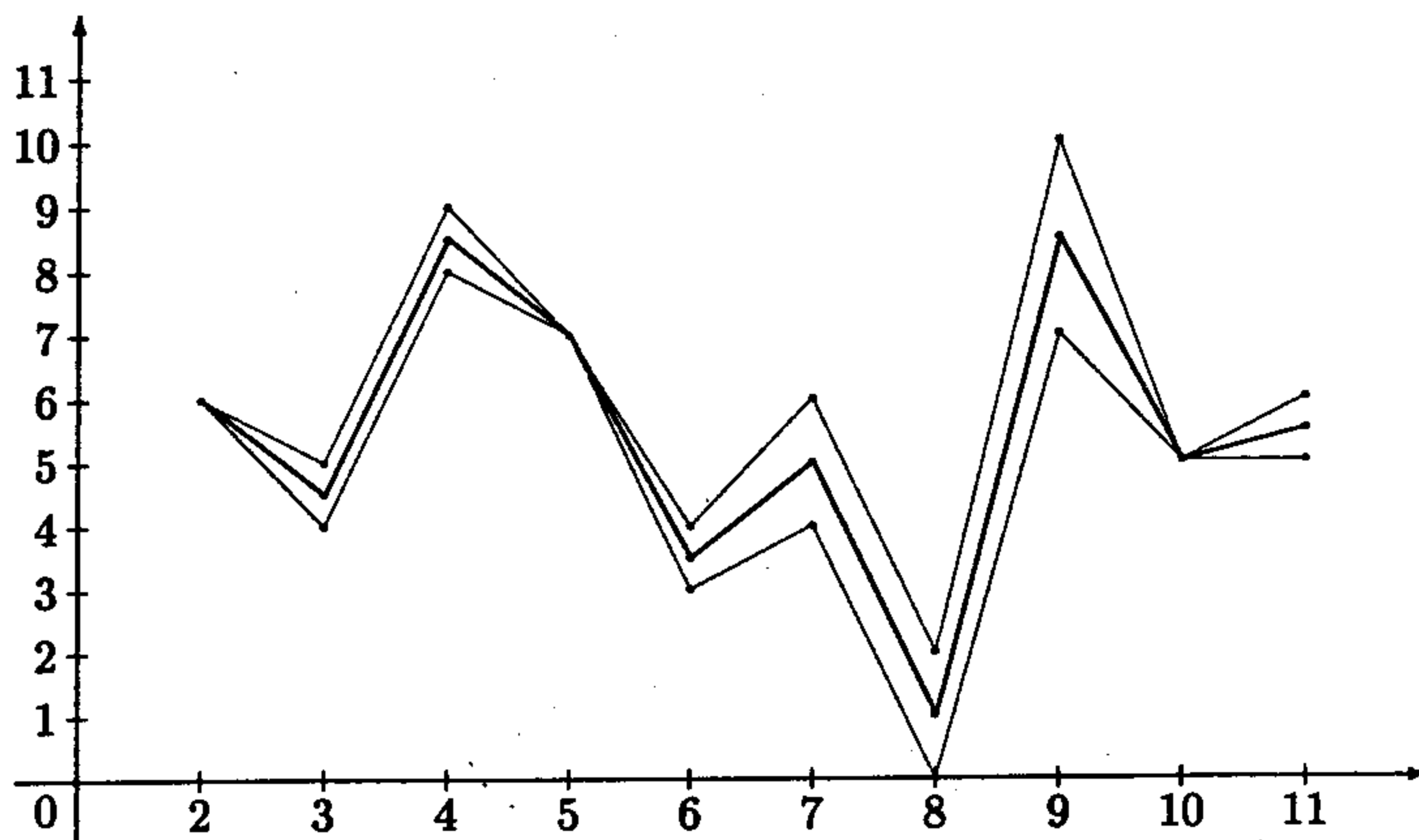


Slika 3.

Uobičajeno je da se meteorološka merenja obavljaju svakog dana u isto vreme, što u ovom merenju nije bio slučaj (neka su bila jutarnja, neka večernja i neka noćna). Očigledno da nam takvo merenje neće dati željeni uvid u npr. dnevno ponašanje temperature. Nekim drugim merenjem iste veličine istih dana u 13h na dva mesta u gradu dobijeni su sledeći rezultati:

datum	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
merno mesto 1	6	5	9	7	4	6	2	10	5	6
merno mesto 2	6	4	8	7	3	4	0	7	5	5

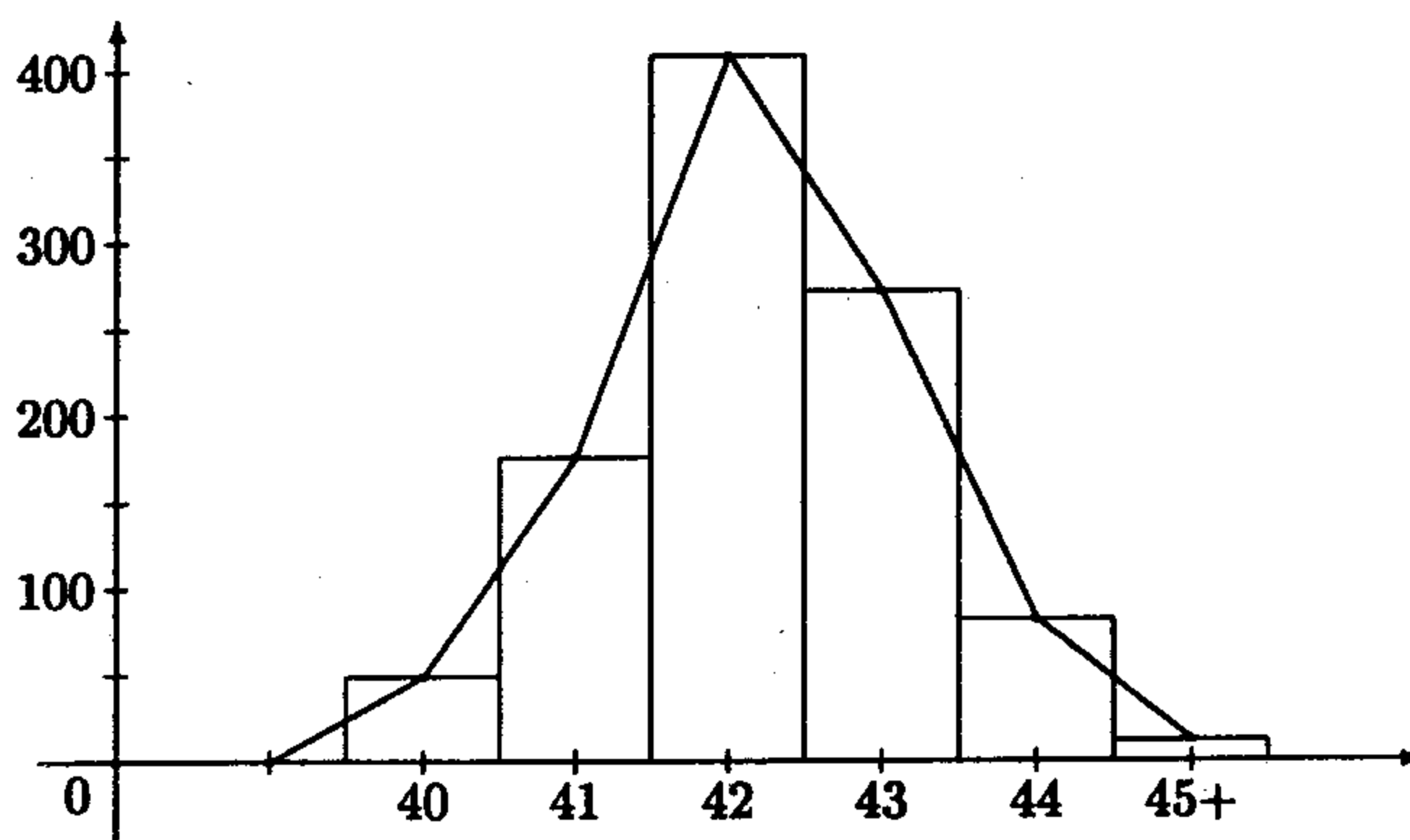
Na slici 4. prikazani su grafici merenja 1 (tanka linija), merenja 2 (tanka linija) i proseka – aritmetička sredina (debela linija). Ova merenja i njihova aritmetička sredina daju nam jasniji i kvalitetniji uvid u ponašanje dnevne temperature u ispitivanom periodu, što je ipak nedovoljno da bismo izvukli zaključke o temperaturi u nekoj drugoj sezoni ili u istom periodu prethodnih i sledećih godina.



Slika 4.

Primer 12. (1) Za potrebe snadbevanja regruta koji dolaze u grupama po 40.000 tri puta godišnje, pored pregleda iz prethodnih generacija, uzimajući uzorak od 1000 slučajno odabranih svežih regruta, planeri vojne obuće došli su do sledećih podataka o veličini (broj) obuće:

broj regruta	49	176	409	272	82	12
veličina (broj obuće)	40	41	42	43	44	45 i veće



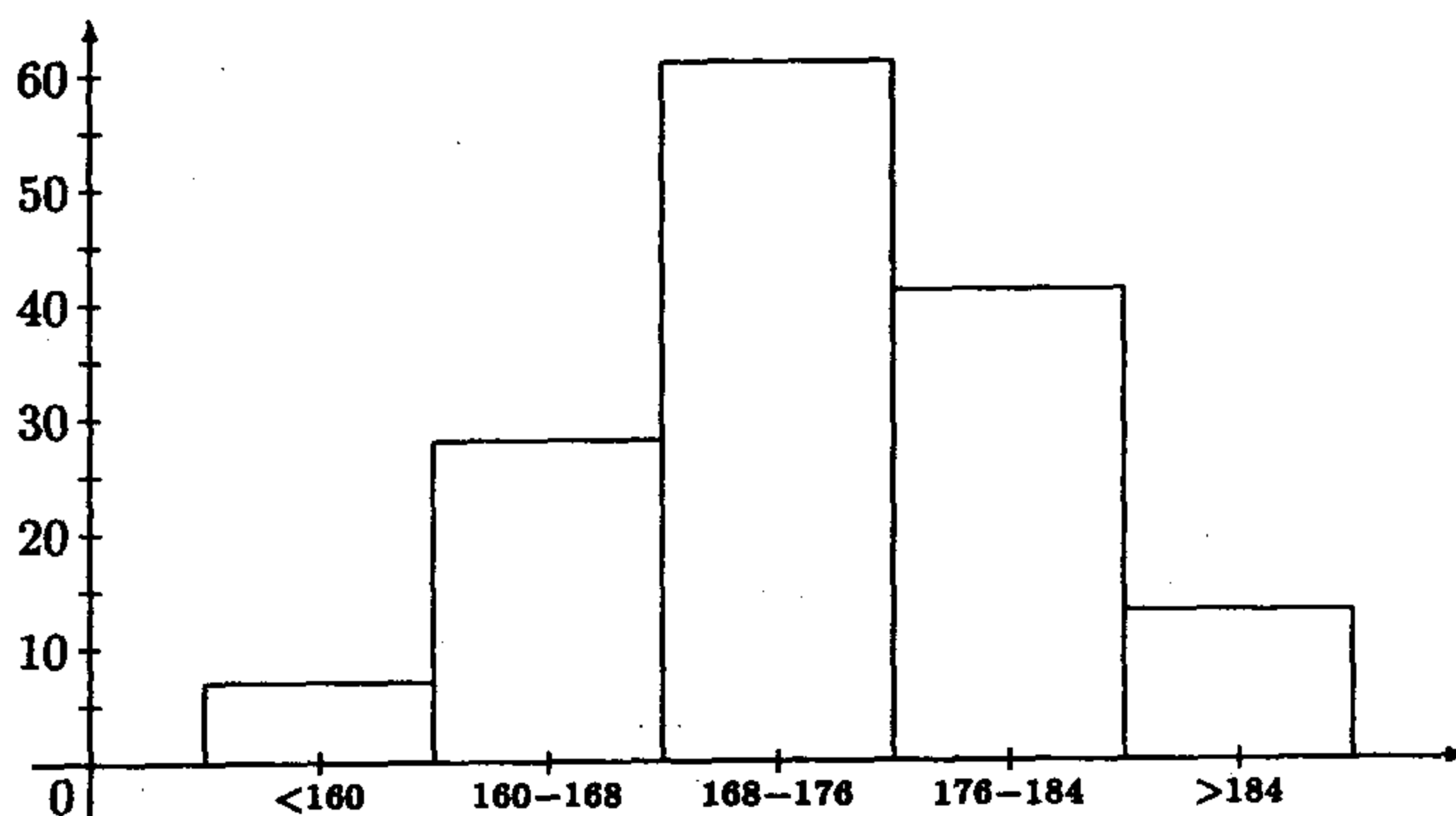
Slika 5.

Procentualna distribucija po brojevima obuće iznosi: 4.9% broj 40, 17.6% broj 41, 40.9% broj 42, 27.2% broj 43, 8.2% broj 44 i 1.2% brojevi 45 i veći. Razvrstavanje regruta obavljeno je prema standardnim obučarskim merama (koje su ekvidistantno raspoređene). Grafički prikaz prethodnih podataka dat je na slici 5. Uočimo da grafika na slici 5. iako vrlo grubo klasirana, na x osi posmatramo samo 6 tačaka i za tih 6 tačaka se određuje (meri-broji) funkcija distribucije, snažno podseća na normalnu raspodelu.

(2) Planeri vojne odeće su pravila o sličnosti trouglova primenili na podatke o obući da bi dobili distribuciju visina regruta ispitivanog uzorka. Da se ne bi oslonili samo na dedukciju, izveli su merenja na uzorku od 150 vojnika i dobili sledeće podatke.

visina	< 160	160–168	168–176	176–184	> 184
broj regruta	7	28	61	41	13

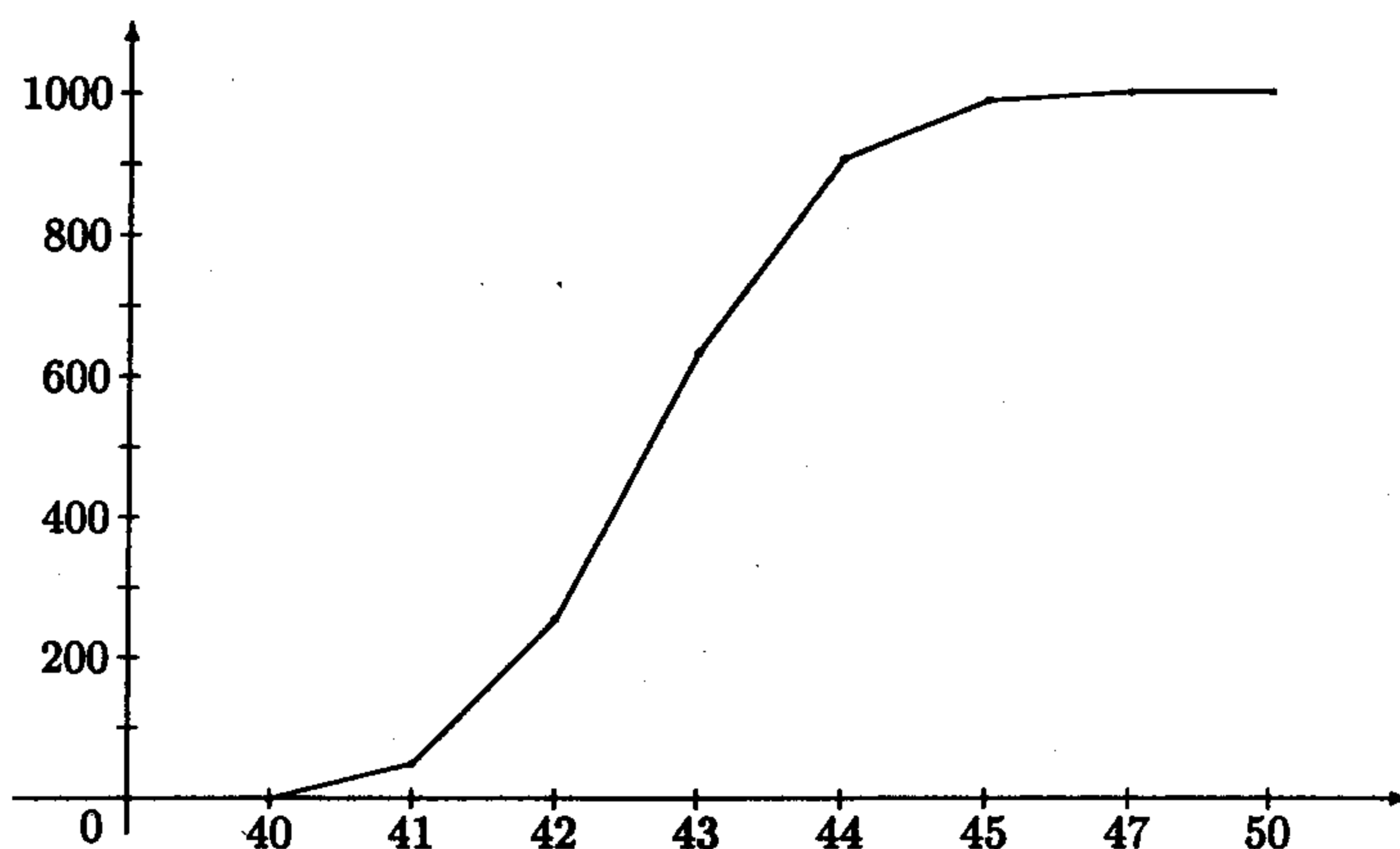
Ako na x osu nanesimo klase visina (koje korespondiraju veličinama uniformi od 1 do 5), na y osu odgovarajući broj regruta, dobijamo grafik na slici 6, koji jako dobro korespondira distribuciji veličina obuće.



Slika 6.

Često je praktično prikazivanje kumulativne distribucije, odnosno distribucije kumulativnih frekvencija. Za primer pod (1) imali bismo tabelu i grafik (slika 7.).

broj obuće	broj regruta
< 40	0
< 41	49
< 42	225
< 43	634
< 44	906
< 45	988
< 50	1000



Slika 7.

7.2.1 Mere centralne tendencije

U nekim situacijama ima smisla računanje srednje vrednosti merene veličine, što se može uzeti kao pokazatelj ponašanja ispitivane pojave. Traženje prosečne veličine uniforme (negde oko 3.14), odnosno broja cipela novodolazećih regruta (negde oko 42.31) u poslednjem primeru teško će nam dati bolji uvid u istraživanom problemu iz prostog razloga što izrada 40000 komada uniformi broja π i cipela veličine 42.31 neće kvalitetno rešiti zadatke oblačenja i obuvanja nove vojske.

Nasuprot tome, prosečna dnevna temperatura u Beogradu, merena na dvadesetak mesta svakog punog sata, može da predstavlja značajan pokazatelj ponašanja klime u pomenutom gradu.

Aritmetička sredina brojeva x_1, x_2, \dots, x_n računa se

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Ako brojevima x_1, x_2, \dots, x_n , redom pridružimo težinske faktore w_1, w_2, \dots, w_n (npr. srazmerno značaju, ponavljanju), onda dobijamo težinsku aritmetičku sredinu:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Geometrijska sredina brojeva x_1, x_2, \dots, x_n definiše se sa

$$x_g = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Značajna je i harmonijska sredina, definisana sa

$$x_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Koja od sredina će se upotrebiti u konkretnom slučaju zavisi na primer od prirode podataka i afiniteta istraživača.

Primer 13. (1) Uočimo niz $1, 2, 3, \dots, 100$. Imamo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} i}{100} = 50.5,$$

$$x_g = \left(\prod_{i=1}^{100} i \right)^{\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{100!} \approx \frac{100}{e} \sim 36.8,$$

upotrebili smo Stirlingovu formulu za aproksimaciju $n!$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(2) uočimo prvih 100 članova geometrijske progresije $2^0, 1, 2, 4, \dots, 2^{99}$.
Ovde imamo

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=0}^{99} 2^k}{100} = \frac{2^{100} - 1}{100} \approx 2^{93},$$

$$x_g = \sqrt[100]{\prod_{i=0}^{99} 2^i} = (2^{99 \cdot 50})^{\frac{1}{100}} = 2^{49.5}.$$

Ostavljamo čitaocu da računa harmonijske sredine ovih 100-rki i izvuče konačne zaključke.

7.2.2 Standardna devijacija

Odredimo standardnu devijaciju i disperziju za merenja iz **Primer** 11.

1. merenje: 5, 4, 8, -9, -3, 7, -5, 13, -2, 7

$$\bar{x} = \frac{5 + 4 + 8 - 9 - 3 + 7 - 5 + 13 - 2 + 7}{10} = 2.5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2.5^2 + 1.5^2 + 5.5^2 + 11.5^2 + 5.5^2 + 4.5^2 + 7.5^2 + 10.5^2 + 4.5^2 + 4.5^2}{10}}$$

$$= \sqrt{42.85} = 6.55$$

$$\sigma^2 = 42.85$$

2. merenje: 6, 5, 9, 7, 4, 6, 2, 10, 5, 6

$$\bar{x} = \frac{6 + 5 + 9 + 7 + 4 + 6 + 2 + 10 + 5 + 6}{10} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2 + 1^2 + 0}{10}} = \sqrt{4.8} = 2.19$$

$$\sigma^2 = 4.8$$

Standardna devijacija se koristi kao mera disperzije (rasturanja) neke numeričke veličine oko njene srednje vrednosti. Uočimo da su standardna devijacija i disperzija za drugo merenje znatno manji u odnosu na prvo merenje. To istovremeno znači da aritmetička sredina bolje reprezentuje merenu veličinu u drugom slučaju. Primetimo da bi za potrebe uvida u ponašanje temperature vazduha u nekom geografskom području najbolje bilo posmatrati niz dovoljno gustih merenja, bar na svaki sat, pa je zato dnevna temperatura reprezentovana vektorom (od npr. 24 koordinate). Dnevni prosek onda postaje upotrebljiva veličina ako nema prevelike disperzije.

7.2.3 Raspodela

Primer 14. (1) Odredimo verovatnoću da u porodici sa petoro dece bude bar jedno muško, pretpostavljajući da je verovatnoća rođenja muškog deteta 0.5.

(2) Uz uslove kao pod (1) odrediti verovatnoću da budu bar dva muška deteta.

(1) Koristimo binomnu raspodelu. Događaj "bar jedno muško dete" možemo predstaviti kao uniju pet događaja:

$$A = \{1 \text{ dečko, } 4 \text{ devojčice}\} \cup \{2 \text{ dečaka i } 3 \text{ devojčice}\} \cup \\ \{3 \text{ dečaka i } 2 \text{ devojčice}\} \cup \{4 \text{ dečaka i } 1 \text{ devojčica}\} \cup \{\text{pet dečaka}\}.$$

Verovatnoće događaja s desne strane označimo sa $P_1, P_2, P_3, P_4,$ i P_5 . Onda važi $\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^5 P_i$.

Kako je

$$P_1 = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} = P_4;$$

$$P_2 = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = P_3;$$

$$P_5 = \frac{1}{32}$$

sledi

$$\mathcal{P}(A) = \frac{31}{32}.$$

Verovatnoća događaja B (bar dva dečaka):

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) - P_1 = \frac{26}{32}.$$

Primer 15. Za koliko od 1200 porodica sa petoro dece se očekuje da imaju (1) bar dva dečaka; (2) pet sinova.

Prema prethodnom primeru, pod

$$(1) E = 1200 \cdot \mathcal{P}(B) = 975;$$

$$(2) \mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(\{\text{pet sinova}\}) = \frac{1}{32}, \text{ sledi } E = 1200 \cdot \frac{1}{32} = 37.5.$$

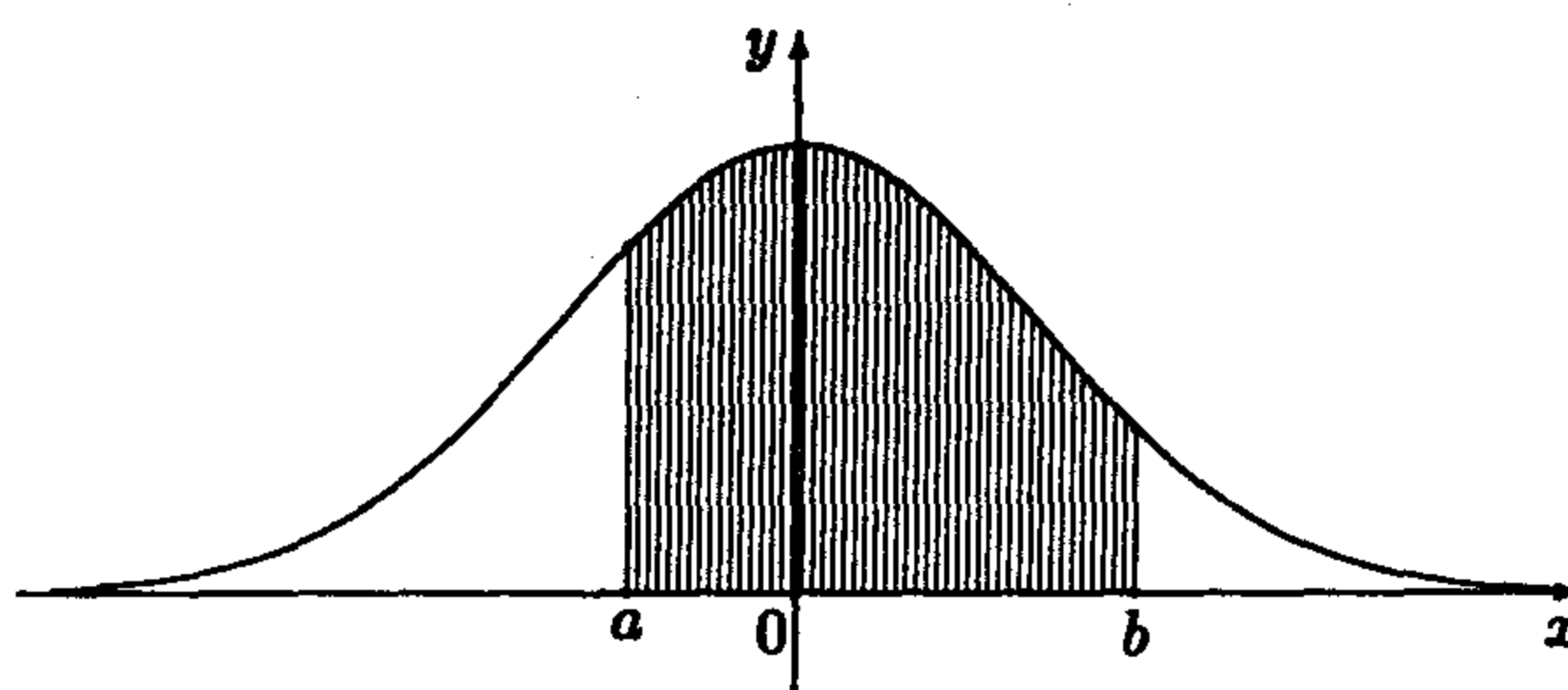
Primer 16. U proizvodnji nekih čipova ima 10% škarta koji se bez testa isporučuju fabričkoj prodavnici. Jedan majstor dođe u prodavnicu i kupi 12 slučajno izabranih čipova. Odredi verovatnoću događaja: od 12 kupljenih najviše 3 su neispravni.

Verovatnoća neispravnog čipa: $p = 0.1$; ispravnog $q = 0.9$. Verovatnoća traženog događaja jednaka je zbiru

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}(\{0 \text{ neisp.}\}) + \mathcal{P}(\{1 \text{ neisp.}\}) + \mathcal{P}(\{2 \text{ neisp.}\}) + \mathcal{P}(\{3 \text{ neisp.}\}) \\ &= \binom{12}{0} 0.1^0 0.9^{12} + \binom{12}{1} 0.1^1 0.9^{11} + \binom{12}{2} 0.1^2 0.9^{10} + \binom{12}{3} 0.1^3 0.9^9 \\ &= 0.2824293 + 1.2 \cdot 0.3138104 + 0.66 \cdot 0.3486783 + 0.22 \cdot 0.3874204 \\ &= 0.9743617. \end{aligned}$$

Primer 17. Na pijačnoj tezgi sa jabukama ima 25% (unutrašnjeg) škarta, (tj. jabuke su trule u sredini, dok spolja sve izgledaju lepo). Koliko slučajno izabranih jabuka treba da kupi kupac koji želi da sa verovatnoćom 0.9 nabavi bar 8 jabuka?

Površina između x ose i Gausove normalne krive iznosi 1, što odgovara verovatnoći sigurnog događaja. Često je potrebno da se odredi površina krivolinijskog trapeza, ograničenog delom x ose između tačaka a i b , odsečcima pravih $x = a$ i $x = b$ između x ose i Gausove krive, i samom Gausovom krivom, slika 8. (što odgovara verovatnoći da slučajno promenljiva sa normalnom raspodelom uzima vrednosti u intervalu (a, b)). Za rešavanje

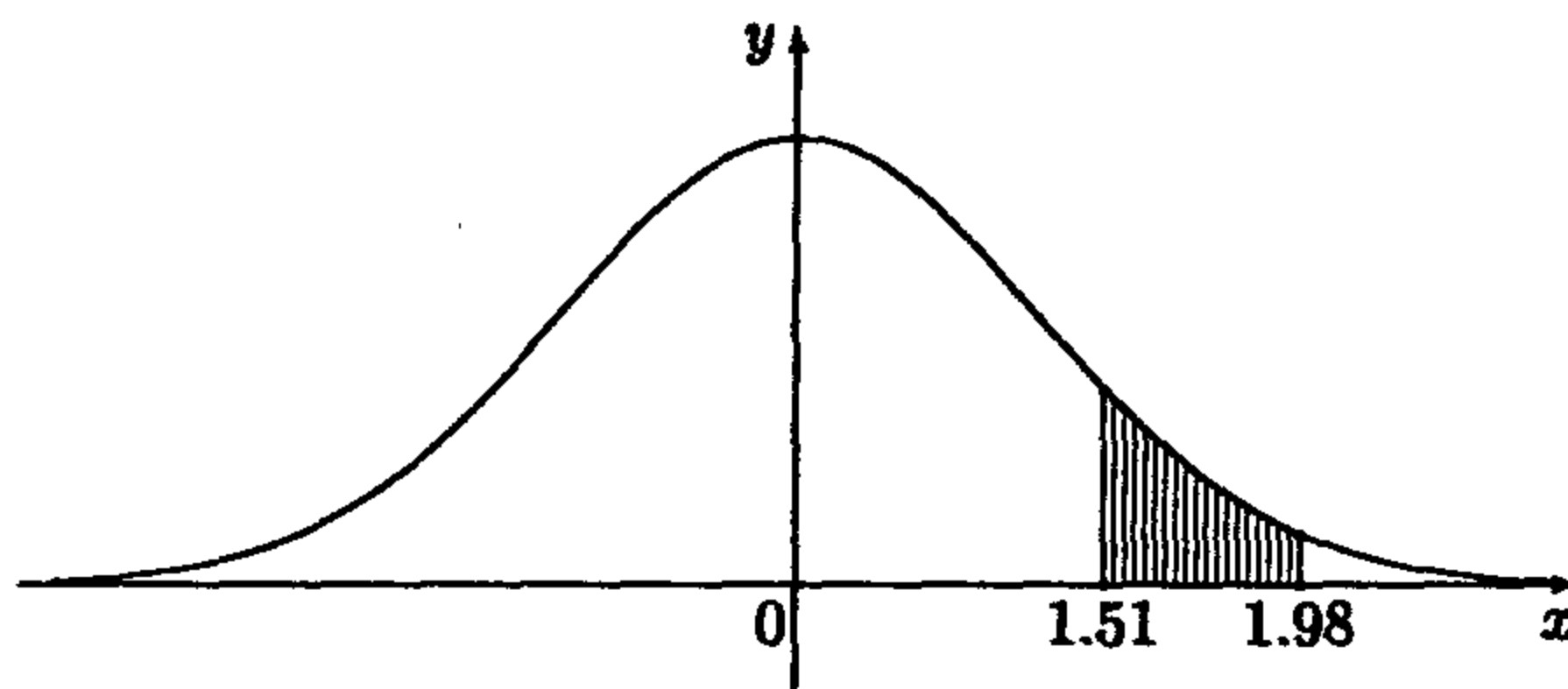


Slika 8.

ovakvog zadatka možemo se poslužiti **Dodatkom 2**.

Primer 18. Odrediti površinu krivolinijskog trapeza, određenog Gausovom krivom i tačkama -1.4 i 2.2 . Pošto je Gausova kriva parna, u **Dodatku 2** dat je račun samo za pozitivne vrednosti argumenta. Zato zadatak rešavamo sabiranjem površina krivolinijskog trapeza, određenog apscisama 0 i 1.4 i trapeza, određenog apscisama 0 i 2.2 . Prvu površinu određujemo tako, što u tabeli **Dodatka 2** tražimo vrstu, u kojoj je $z = 1.4$ i potom u koloni ispod 0 čitamo vrednost prve površine 0.4192 . Slično za drugu nađemo vrstu, u kojoj je $z = 2.2$ i u koloni 0 vrednost površine drugog trougla 0.4861 . Zbir 0.9053 je rešenje traženog zadatka.

Primer 19. (1) Za slučajnu promenljivu z sa Gausovom raspodelom odredi verovatnoću $\mathcal{P}(\{1.51 \leq z \leq 1.98\})$. Zadatak se svodi na račun osenčene površine sa slike 9, koja se dobija tako, što se od trapeza određenog



Slika 9.

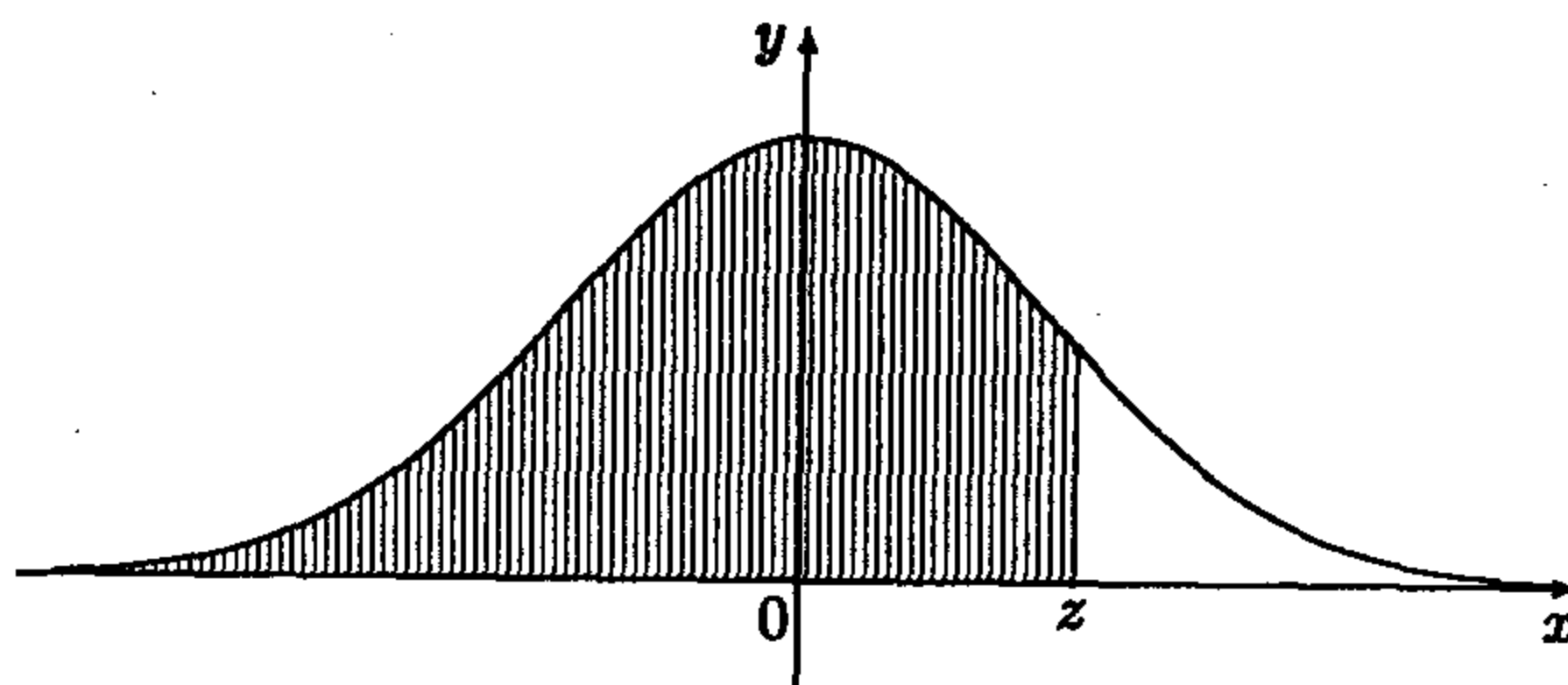
apscisama 0 i 1.98 odbije površina trapeza određenog tačkama $z = 0$ i $z = 1.51$. Za površinu prvog u koloni **Dodatka 2.** određujemo vrstu $z = 1.9$ i u koloni 8 čitamo vrednost površine prvog trapeza 0.476%. Slično za drugi u koloni 1 za $z = 1.5$ određujemo površinu drugog 0.4345, pa je tražena verovatnoća

$$\mathcal{P}(\{1.51 \leq z \leq 1.98\}) = 0.0415$$

(2) Za slučajnu promenljivu z sa Gausovom raspodelom odredi verovatnoću $\mathcal{P}(\{-0.5 \leq z < +\infty\})$.

Uočimo da je $\mathcal{P}(\{-0.5 \leq z < +\infty\}) = \mathcal{P}(\{0 \leq z \leq 0.51\}) + 0.5 = 0.1950 + 0.5 = 0.695$ (konsultujući **Dodatak 2.**).

Za određivanje vrednosti Gausove krive za određenu vrednost z slika 10, koristimo **Dodatak 1.**



Slika 10.

Primer 20. Odrediti vrednosti Gausove krive koje odgovaraju apscisama $z = 1.51$ i $z = -2.91$.

U **Dodatku 1.** nađimo vrstu $z = 1.5$ i u koloni 1 vrednost 0.1276. Zbog parnosti krive, traženo se poklapa sa vrednosti funkcije, koja odgovara $z = 2.91$, u koloni 1 vrste $z = 2.9$, iznosi 0.0058.

Primer 21. Morfometrijom lobanja uzorka od 200 šumskih miševa na jednom domaćem terenu utvrđena je prosečna dužina 15.1mm sa standardnom devijacijom 1.5mm. Pretpostavivši da je merena dužina normalno distribuirana, odredi koliko miševa ima lobanju dužine između 12 i 16mm, kao i broj miševa, kod kojih je dužina lobanje veća od 20mm.

Formula za normalnu raspodelu glasi:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

gde je μ sredina, σ standardna devijacija, σ^2 disperzija.

U standardizovanim jedinicama $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, prethodna formula dobija sledeći standardni oblik

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

koji je tabeliran u **Dodacima 1. i 2.**

Prvo je neophodna transformacija koordinata $x_1 = 12\text{mm}$ i $x_2 = 16\text{mm}$, pri čemu je $\mu = 15.1\text{mm}$, $\sigma = 1.5\text{mm}$. Sledi:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 15.1}{1.5} = -2.07, \quad z_2 = \frac{16 - 15.1}{1.5} = 0.6,$$

pa će tražena proporcija miševa biti jednaka krivolinijskom trapezu, određenom apscisama -2.07 i 0.6 , tj. zbiru površine trapeza, određenog tačkama $z = 0$ i $z = 0.6$ i površine trapeza, određenog tačkama $z = 0$ i $z = 2.07$ koje nalazimo u tabeli **Dodatka 2**: $0.2258 + 0.4808 = 0.7066$, pa množenjem sa brojem miševa u uzorku (200) dobijamo 141 za broj miševa sa dužinom lobanje u intervalu(12mm, 16mm). Za broj miševa lobanje duže od 20mm,

$$z_3 = \frac{20 - 15.1}{1.5} = 3.27,$$

traži se površina između x ose i Gausove krive, desno od $z = 3.27$. Površina trapeza određenog tačkama $z = 0$ i $z = 3.27$ iznosi 0.4995, dok površina desno od y ose, između x ose i Gausove krive iznosi 0.5, pa je tražena veličina jednaka $0.5 - 0.4995 = 0.0005$, pa množenjem sa veličinom uzorka dobijamo 0.1, što znači da u ovom uzorku nema miševa sa lobanjom od bar 20mm.

8. Analiza signala

U biološkim i medicinskim ispitivanjima rasprostranjena je upotreba merne tehnike kojom se, bez izuzetka, promena merene veličine konvertuje u promenu napona ili intenziteta struje u mernom uređaju, što se prikazuje ili registruje na neki od uobičajenih načina: raznobojnim indikatorskim lampicama, zvučnim porukama, i često, papirnim grafičkim prikazom (EKG, EEG, EMG). Veličine bez promena, odnosno sa vrlo sporim promenama se slabo i neredovno prate. Sledstveno, sve što se meri je ili dosta promenljivo u vremenu ili je od posebne važnosti. Od početka merenja do nedavno, dominantna varijanta analize signala u biologiji i medicini sastojala se od (vizuelnog) pregleda grafika ispitivanih funkcija i naknadne klasifikacije u skladu sa izgrađenom semantikom (oštećenje zaliska, proširena predkoma, angina pectoris, epileptični napad, nastupanje smrti, parcijalne lezije, uznemirenost, uspavanost, ...). Ovde uvežbani stručnjak izvršava funkciju f , koja elementima skupa uočljivih stanja (ranije klasifikovanih) – domen, pridružuje jezičke konstrukte (u medicini često latinske), čime se određuje lokalna semantika.

U poslednje vreme situacije poput ove fokusiraju pažnju na modeliranje značenja funkcija, poput f , unutar (veštačko) inteligentnih sistema koji dopunjavaju i unapređuju eksperta, između ostalog i mogućnostima bližeg određivanja semantike funkcije f . Učitavanje ispitivanih funkcija u analitički program u računaru, što se postiže upotrebom AD (analogno digitalnih) konvertora, obezbeđuje uvid u ispitivane funkcije uz upotrebu sasvim elementarnih algoritama koji kvalitetom značajno nadmašuje situaciju sa papirnatim grafičkim prikazom (npr. zumiranje – rasteženje signala po svakoj osi). Jednom učitani u računar, signali postaju dostupni za obradu masivnim matematičkim aparatom. Ispitivanjem ponašanja signala u okolini ekstremuma moguće je npr. definisati oblik talasa, zaobljeni talas u maksimumu ima nulu prvog izvoda, zašiljeni nema. Ovo se lako može pretočiti u algoritam koji prepoznaje oblik talasa i koji može da posluži za detekciju nailaska epileptičnog napada ili pokreta očne jabučice. Napomenimo još da AD konverzija konvertuje funkciju f zadatu na nekom (vremenskom)

intervalu $[a, b]$, u njenu diskretnu reprezentaciju \bar{f} definisanu na konačnom podskupu $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ domena $[a, b]$, takvu da je

$$(\forall x \in X) \bar{f}(x) = f(x).$$

Sami uzorci $\bar{f}(x_i)$ su obično vremenski ekvidistantni. Može se reći da \bar{f} , dovoljno dobro aproksimira f ako su u \bar{f} registrovani (kao različiti) svi ekstremumi funkcije f , tj. ako \bar{f} prati sve značajne promene ispitivane pojave. Podsetimo na **Primer 3.** glave 4. Za eksperimentalne potrebe ovaj primer upućuje na neophodnost razlaganja domena $[a, b]$ ispitivane funkcije f na intervale, na kojima je f monotona ili, slično, na intervale, na kojima prvi izvod funkcije ne menja znak. Onda je neophodno da u svakom od ovih podintervala imamo bar jedno merenje funkcije f . To praktično znači za ekvidistantna očitavanja, da frekvenciju očitavanja treba podesiti tako da vreme između susednih uzoraka bude kraće od najkraćeg intervala na kome je f monotona. Prethodna napomena ne obezbeđuje obavezno dovoljno dobru reprezentaciju funkcije f njenom aproksimacijom \bar{f} , ako unapred nisu zadate određene restrikcije na f . Neka je na primer

$$\bar{f} = \{(x_0, a), (x_1, -a), \dots, (x_k, (-1)^k a), \dots\}.$$

Ako je za ispitivanu pojavu f poznato da se ponaša kao na primer sinus, kao i da su uzorkovanjem "registrovane sve promene", onda bi bilo moguće odrediti f sa

$$f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{\Delta x} x + \varphi\right).$$

Ako nije obavezno da f ima sinusni oblik, onda je aproksimacija \bar{f} prilično gruba.

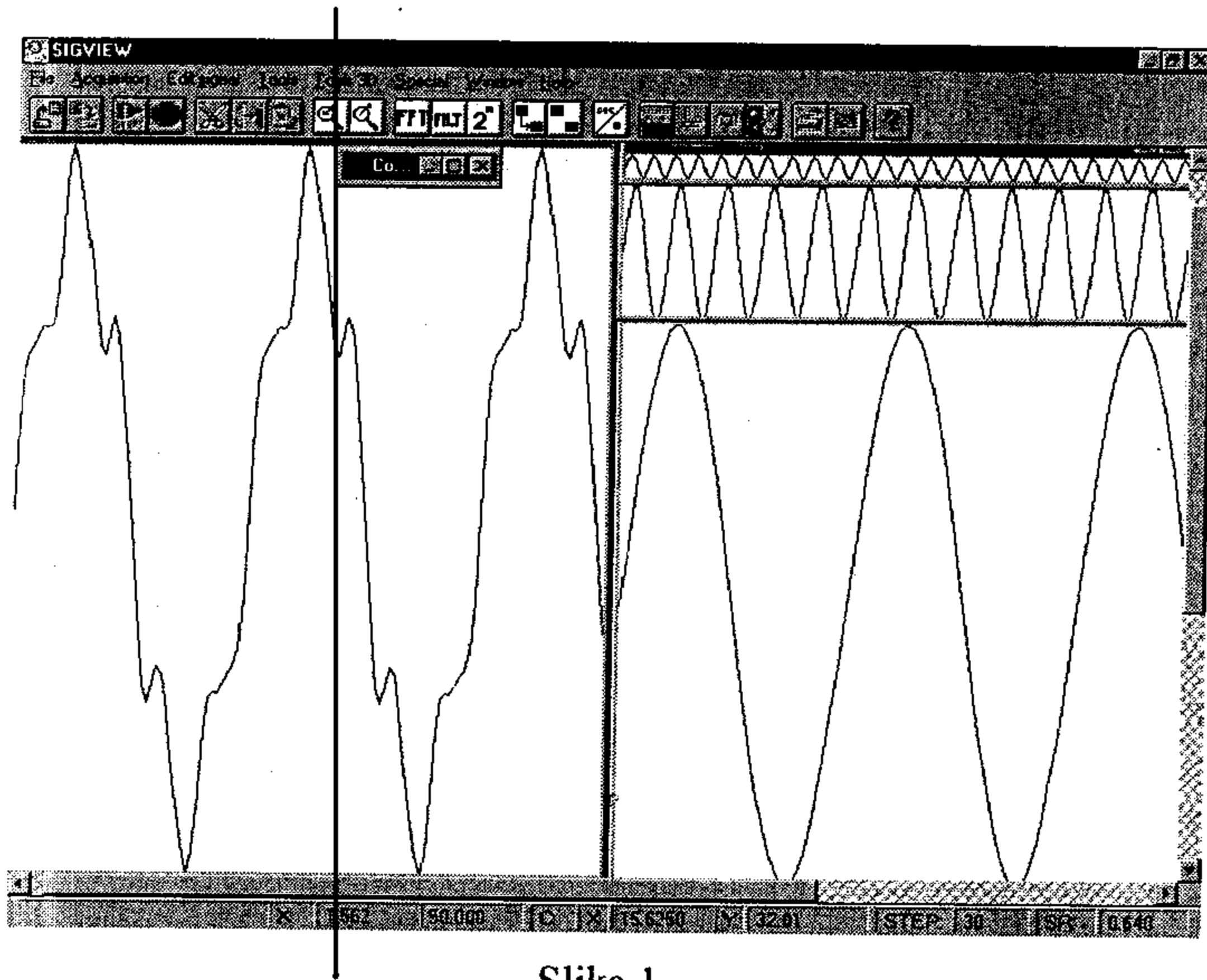
8.1 Mikroskopija signala

Primer 1. Uočimo funkcije $f(x)$ i $g(x)$, definisane sa

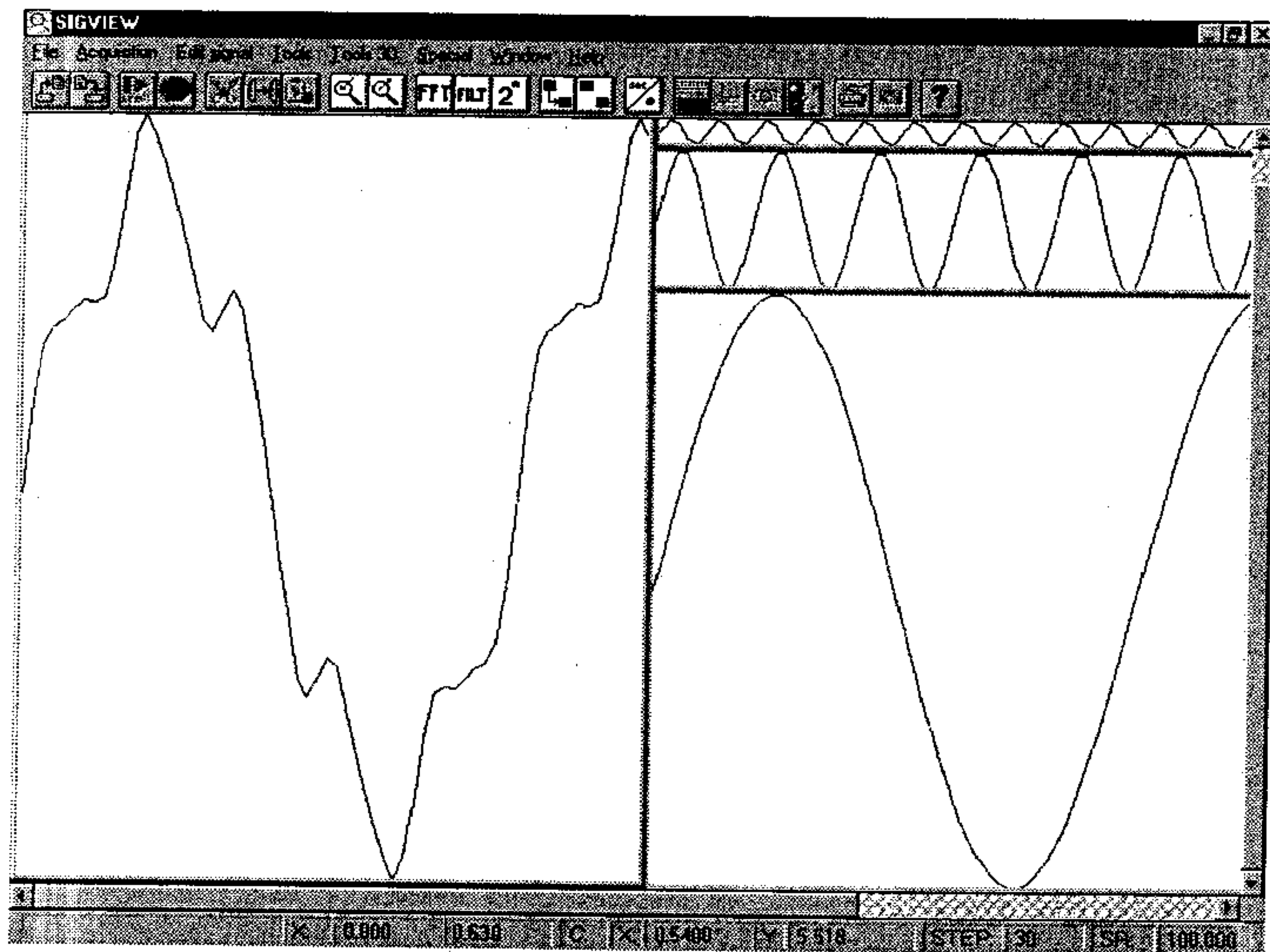
$$f(x) = 10 \sin 2x + 2 \sin 10x + 0.5 \sin 20x$$

$$g(x) = 10 \sin 2x + 2 \sin 10x + 0.5 \sin 20x + 0.2 \sin 30x,$$

tj. $g(x) = f(x) + 0.2 \sin 30x$, odnosno $g(x) - f(x) = 0.2 \sin 30x$.



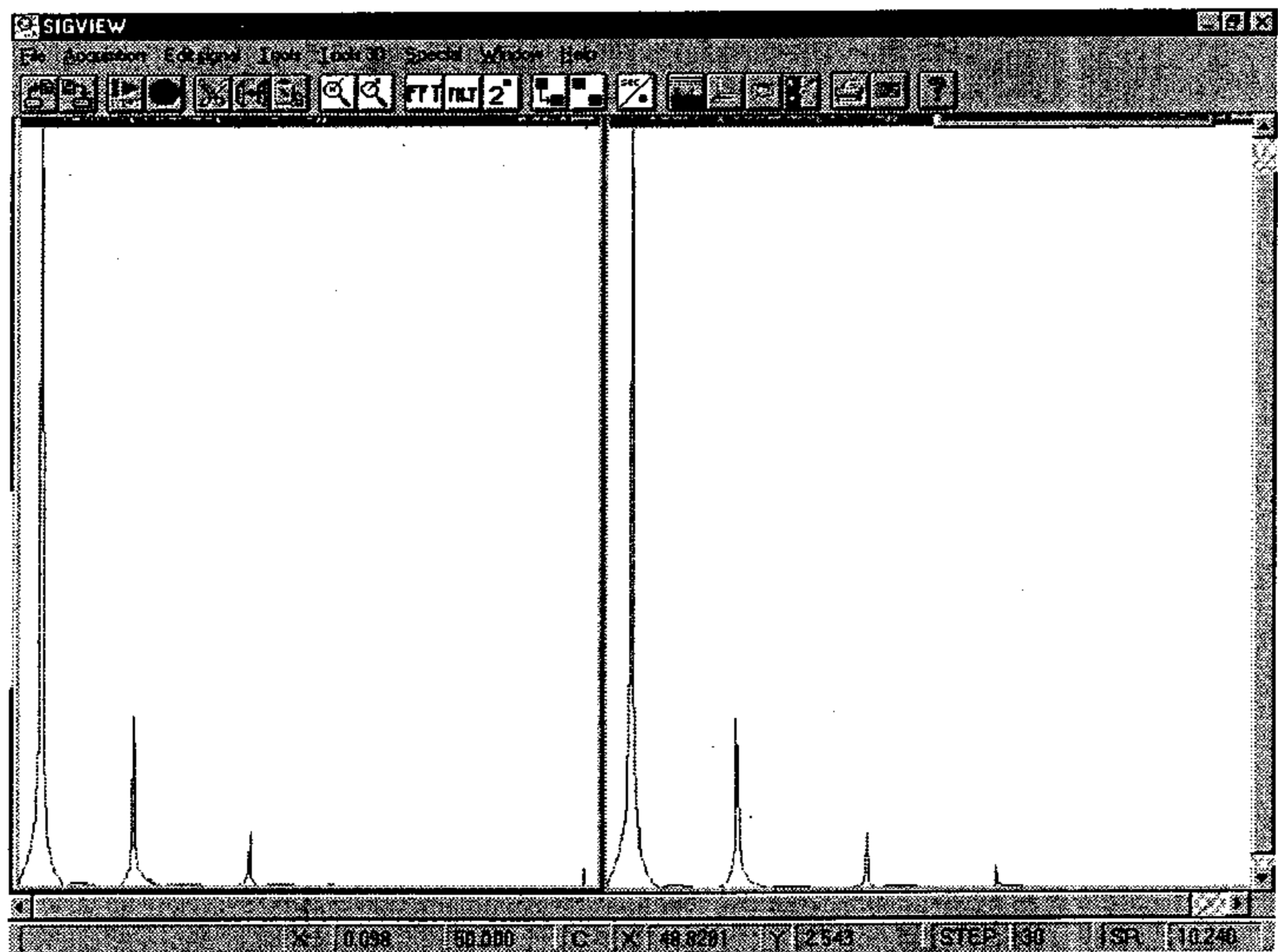
Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Na slikama 1. i 2. prikazana je funkcija $f(x)$, na slici 3. levo je prikazana funkcija $g(x)$, dok je $f(x)$ desno.

U odnosu na prave eksperimentalne signale funkcije f i g su izuzetno jednostavne i pravilne. Pa ipak, detaljnim vizuelnim pregledom teško je razlikovati ove dve funkcije. Ako se f i g sabiju po y osi na ispod santimetarske amplitude, što je tipično za prikazivanje npr. EEG signala, onda pojave poput $g - f$ definitivno prestaju da postoje za posmatrača.

Dok ne naučimo da registrujemo ovu vrstu fenomena, biće nam van domašaja i sva semantika, vezana za suptilnije promene i stanja. Situacija bez matematike bila bi praktično beznadežna, a ni sa svom analizom nismo lišeni svih problema.

Potrebno je ispitivanu funkciju – signal f na nekom intervalu $[a, b]$, predstaviti adekvatnim zbirom elementarnih, tako da se dobije bolji uvid u ispitivanu funkciju f .

Za funkcije iz prethodnog primera ovaj zadatak bi glasilo: odredi komponente funkcija f i g . U većem broju različitih situacija reč je o varijantama ovog primera, naravno, složenijim. EEG signali sadrže periodične komponente, slično u moždanim signalima prisutna je superpozicija raznovrsnih periodičnih signala. Zato, za ozbiljna analiza ovih i drugih bioloških signala otežana je bez sledeće teoreme i njome inspirisanih dodataka i metoda.

8.2 Furijeova transformacija

Označimo sa $C_0[-\pi, \pi]$ skup funkcija sa domenom $[-\pi, \pi]$ koje imaju najviše konačno mnogo prekida prve vrste. Lako se proverava da je $C_0[-\pi, \pi]$ vektorski prostor nad R (sabiranje vektora je uobičajeno sabiranje funkcija, množenje vektora skalarom je množenje funkcije realnim brojem). Za $f, g \in C_0[-\pi, \pi]$ izraz

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

određuje skalarni proizvod na prostoru $C_0[-\pi, \pi]$. Iz primera 10 glave 6. sledi da je skup

$$\{1\} \cup \{\sin mx \mid m \in N^+\} \cup \{\cos mx \mid m \in N^+\},$$

ortogonalan, kao i da je skup

$$E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\},$$

ortonormiran.

Može se pokazati da je E baza prostora $C_0[-\pi, \pi]$. Za svaku funkciju $f \in C_0[-\pi, \pi]$

$$\sum_{e \in E} \langle f, e \rangle \cdot e, \quad (1)$$

predstavlja razvoj funkcije f u Furijeov red po ortonormiranoj bazi E , što se može zapisati i na sledeći način

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

gde je

$$\frac{a_0}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Dakle, skup $C_0[-\pi, \pi]$ predstavlja beskonačno dimenzioni vektorski prostor sa ortonormiranom bazom E i skalarnim proizvodom, definisanim na prethodni način, što omogućava da se uvedu norma $\|f\|$ i rastojanje $d(f, g)$ u C_0 , nešto opštije nego u uvodnoj glavi (**Primer 15**):

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primer 2. Odredimo Furijeov razvoj funkcije $f(x) = A \sin kx$, gde su $A, k > 0$ (u odnosu na ortonormiranu bazu E). Prema prethodnom, za koeficijente imamo

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin kx dx = -\frac{A \cos kx}{\sqrt{2\pi} \cdot k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin kx \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} A \sin kx \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = \begin{cases} A, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Imamo da je za ovu funkciju Furijeov razvoj

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = A \sin kx,$$

tj. polazna funkcija i njen Furijeov razvoj se poklapaju. Na sličan način uočavamo da, ako je

$$g(x) = \sum_{i=1}^n A_i e_{j_i},$$

gde su $e_i \in E$, onda je takođe funkcija $g(x)$ istovetna svom Furijeovom redu, tj.

$$\langle g, e_j \rangle = \begin{cases} A_i & \text{akko } e_j = e_{j_i}, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Označimo sa $F(h)$ Furijeov razvoj funkcije $h(x)$. Onda za funkcije f i g iz prethodnog primera važi da je

$$\begin{aligned} F(f) &= f, & \text{tj. } d(f, F(f)) &= 0, \\ F(g) &= g, & \text{tj. } d(g, F(g)) &= 0. \end{aligned}$$

Sledeća Dirihleova teorema daje značajna svojstva Furijeovih redova:

Teorema 1. *Ako $f(x)$ ima najviše konačno ekstrema i prekida prve vrste u intervalu $(-\pi, \pi)$, onda*

1. *Furijeov red funkcije f konvergira svuda na $(-\pi, \pi)$ i jednak je $f(x)$, ako je f neprekidna u tački x ;*
2. *ako je $a \in (-\pi, \pi)$ tačka prekida funkcije f , onda je*

$$F(f)(a) = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)}{2};$$

3. *na krajevima intervala suma reda jednaka je*

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Posledica 1. Označimo sa S_n n -tu delimičnu sumu Furijeovog reda funkcije f . Ako za f važe uslovi prethodne teoreme, onda

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n) d(f, S_n) < \varepsilon,$$

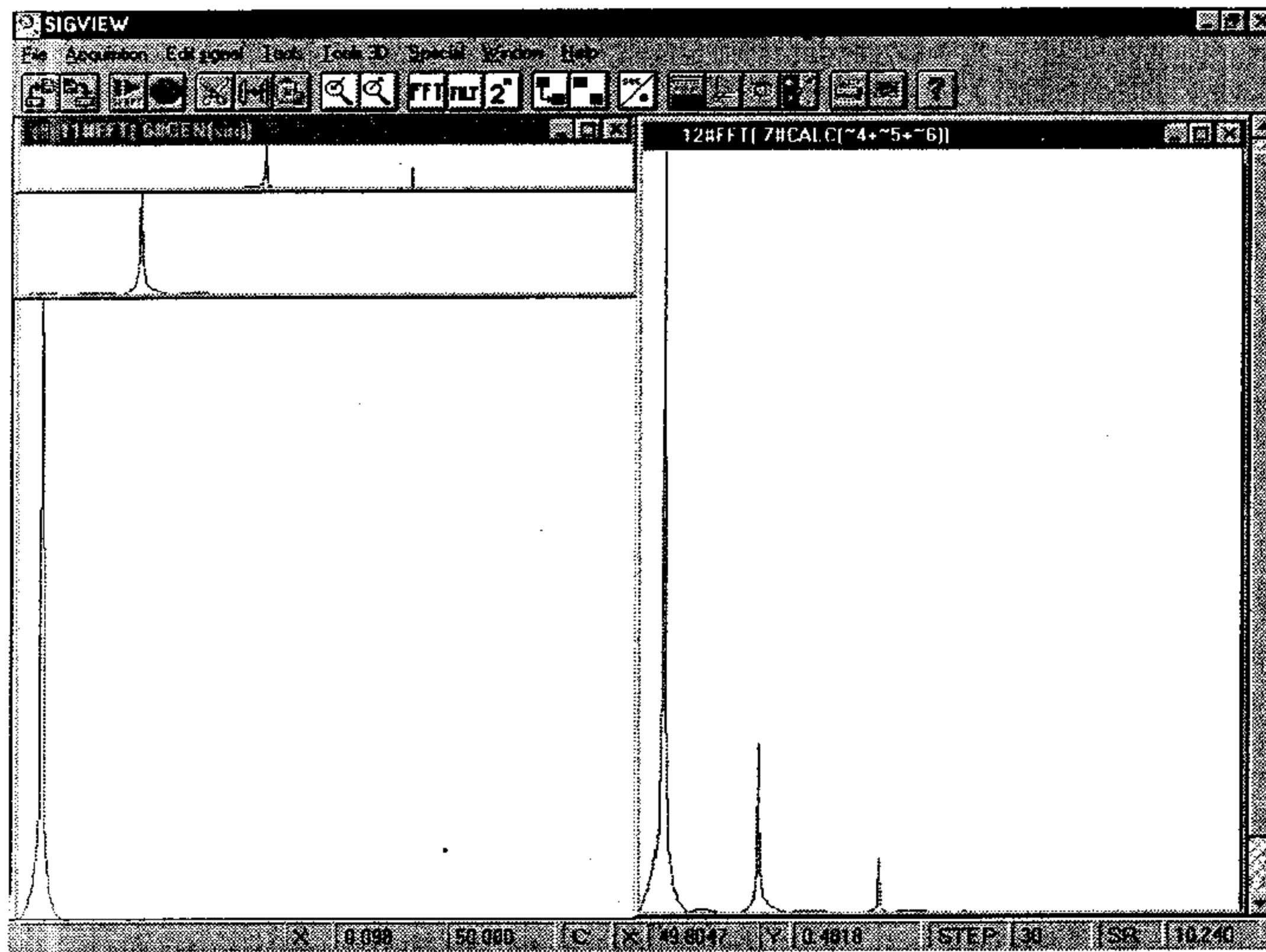
što znači da se trigonometrijskim polinomom može proizvoljno fino aproksimirati funkcija f .

Primer 3. Pretpostavimo da je $h(x) = g(x) + u(x)$, gde je g linearna kombinacija iz primera 1. Onda pod uslovima kao u **Teoremi 1.** biće

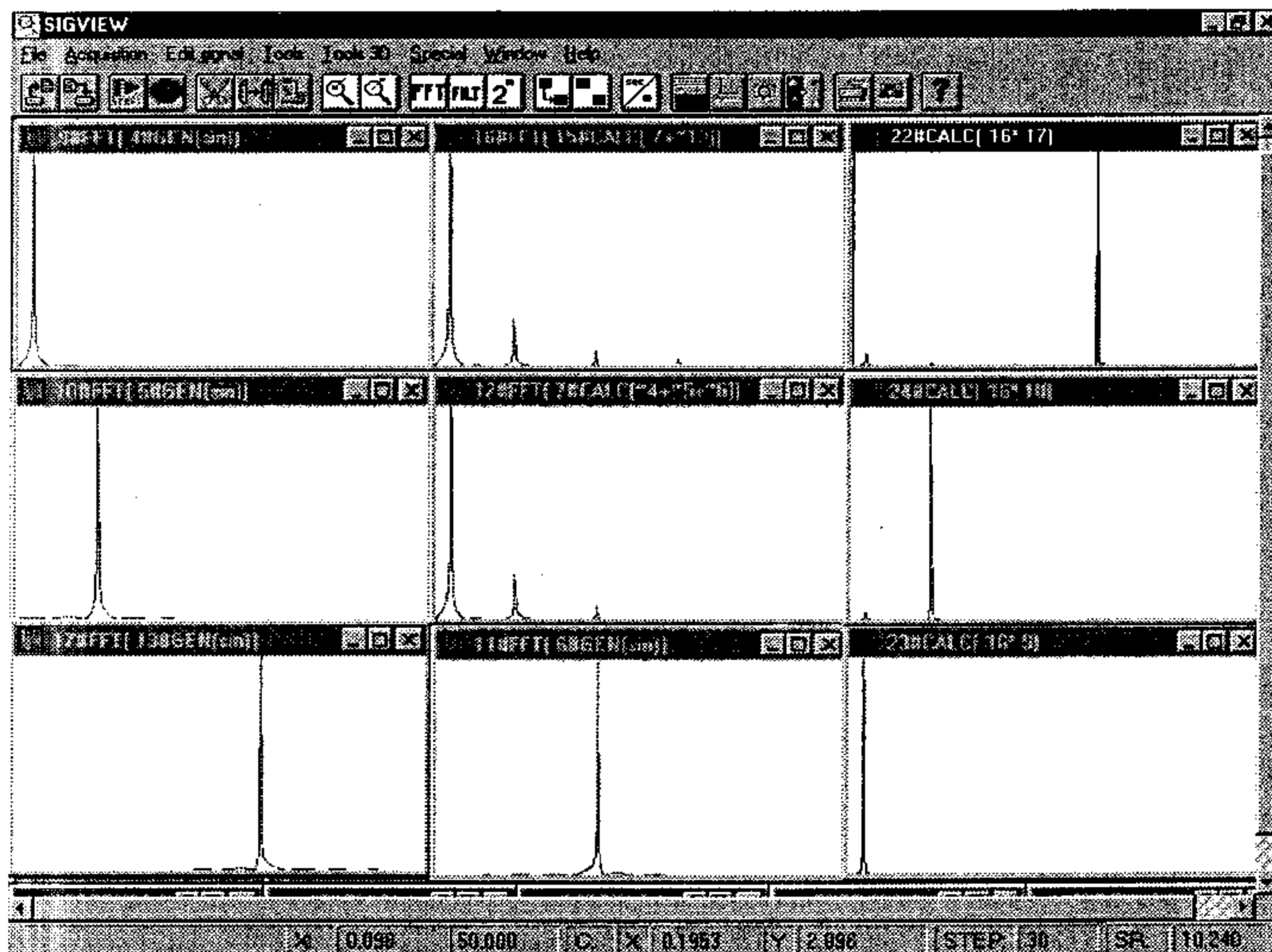
$$F(h) = F(g) + F(u) = g + F(u).$$

Šezdesetih i sedamdesetih godina razvijena je efikasna numerička metoda za računanje koeficijenata Furijeovog razvoja, brza Furijeova transformacija *FFT* (*fast Furie transformation*), koja predstavlja osnovu moderne računarske analize signala. Za eksperimentalnu funkciju može biti važno brzo približno određivanje koeficijenata Furijeovog razvoja. U slučaju kada eksperimentalna funkcija – signal sadrži periodične komponente, čije frekvencije i amplitude, kao i promene istih u vremenu treba odrediti, jer se možda tim načinom ostvaruje bolji uvid u ispitivane pojave, praktično smo suočeni sa situacijom, koja liči na **Primer 1**, pri čemu su obično koeficijenti Furijeovog reda takođe vremenske funkcije, ponekad takođe periodične, što znači da su i sami koeficijenti podobni za Furijeov razvoj.

Razvoj funkcije u Furijeov red daje nam i \bar{F} aproksimaciju Furijeovim polinomom n -tog stepena koji je jednak n -toj parcijalnoj sumi Furijeovog



Slika 5.



Slika 6.

reda. Brzom Furijeovom transformacijom, efikasno se računaju Furijeovi koeficijenti, čak više hiljada u realnom vremenu.

Dobar vizuelan uvid u komponente signala daje Furijeov spektar koji se dobija iscrtavanjem amplitude frekventne komponente za datu frekvenciju. Na slikama 4. i 5. dati su spektri funkcija f i g iz primera, kao i polaznih trigonometrijskih funkcija i nekih njihovih linearnih kombinacija.

Za praksu je od posebnog značaja sledeći fenomen (rezonance). Ako je ispitivana funkcija oblika

$$f(x) = f_1(x) + A \sin \omega x,$$

i ako je funkcija $f_1(x)$ "ravna" u okolini frekvencije ω , u Furijeovom razvoju funkcije $f(x)$, za član $\sin \omega x$ koeficijent će biti A . Sledstveno, spektar linearne kombinacije sinusa i kosinusa, efektivno se sastoji od spektralnih linija na frekvencijama i sa intenzitetima, prisutnim u linearnoj kombinaciji.

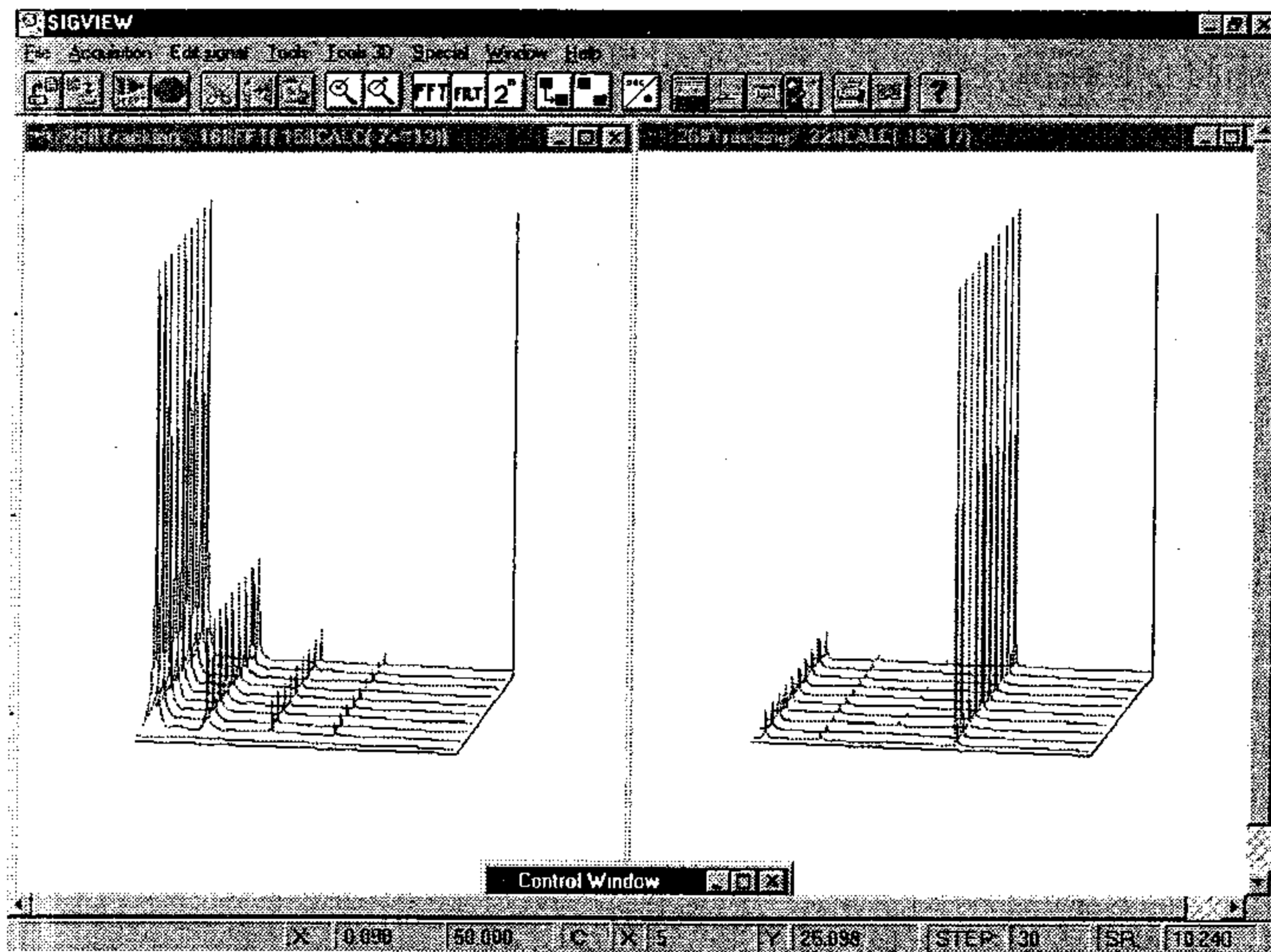
Pokoordinantnim množenjem spektara relativno se izdižu one koordinate koje su prisutne u oba spektra, a anuliraju, odnosno prigušuju koordinate na kojima jedan od članova ima nulu, odnosno male vrednosti, što je prikazano na slici 6. uz napomenu da su prikazi intenziteta relativni u odnosu na prozor.

Signali se menjaju u vremenu, iz perspektive posmatrača koji meri, prilično ili sasvim slučajno, što znači da izložena priča nema praktično smisla bez posmatranja promene spektra u vremenu. Na slici 7. dati su vremenski ili 3D (trodimenzioni) spektri funkcija $f(x)$, $g(x)$ i $0.2 \sin 30x$, koji se ne menjaju u vremenu (jer im se ne menjaju sastojci kao ni doprinosi sastojaka).

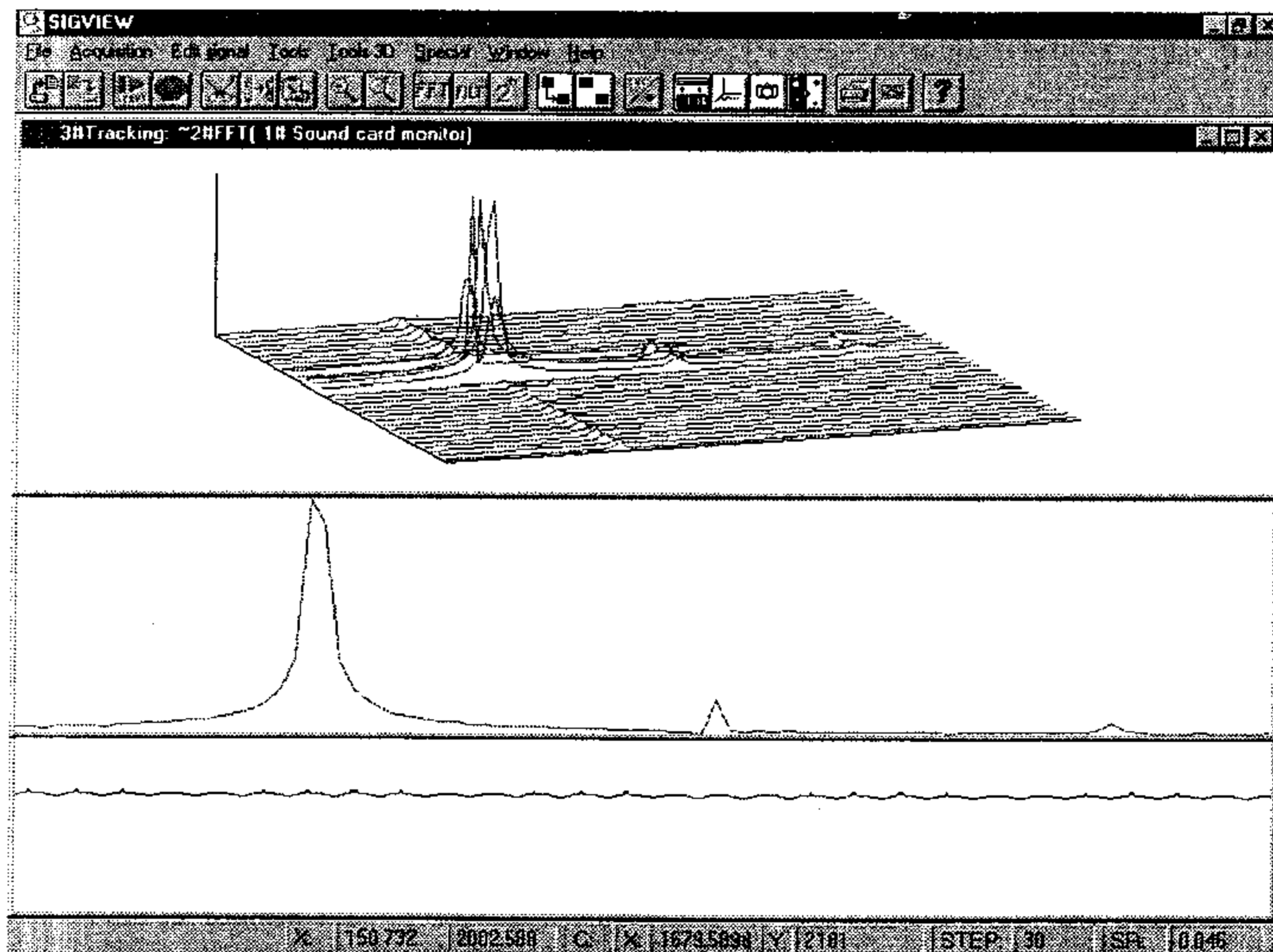
Spektar funkcije F se može smatrati jednostavnim, ako je F razređena linearna kombinacija sinusa i kosinusa, tj. ako je

$$F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cos \omega_i x + b_i \sin \omega_i x, \quad (3)$$

pri čemu su učestanosti ω_i , $i \leq n$ dobro separirane, a intenziteti a_i , b_i unutar ne prevelikog raspona, na primer 2 reda veličine, ako su učestanosti ω_i dovoljno lokalno razdvojene. Za funkcije sa jednostavnim spektrima znamo od čega se u prirodi sastoje čim im vidimo spektar; to su upravo periodične funkcije koje čine gornju linearnu kombinaciju.



Slika 7.



Slika 8.

Ako se (a_i, b_i, ω_i) menjaju u vremenu, 3D Furijeova spektroskopija obezbeđuje sadržajan uvid u ispitivanu pojavu.

8.3 Primer iz akustike

Primer snimka odsviranog tona d^2 na sintisajzeru, sa 11000 semplova (merjenja) u sekundi dat je na slici 8. Vide se signal, spektar i spektar u vremenu (osa po dubini). Na spektru se uočavaju prva tri harmonika tona d^2 , početak, trajanje i prestanak emitovanja. Takođe uočavamo da su za sve vreme proizvodjenja tona d^2 njegov intenzitet i frekvencija stabilni. Na slici 9, imamo prikaz 3D spektra istog snimka u takozvanoj muzičkoj (nalik na note) prezentaciji. Po vertikalnoj osi, odozgo na dole je frekvencija, vreme je po horizontali, levo starije, desno mlađe, intenzitet je kodiran intenzitetom svetla (crna-nula, bela-jedan), odnosno bojom.

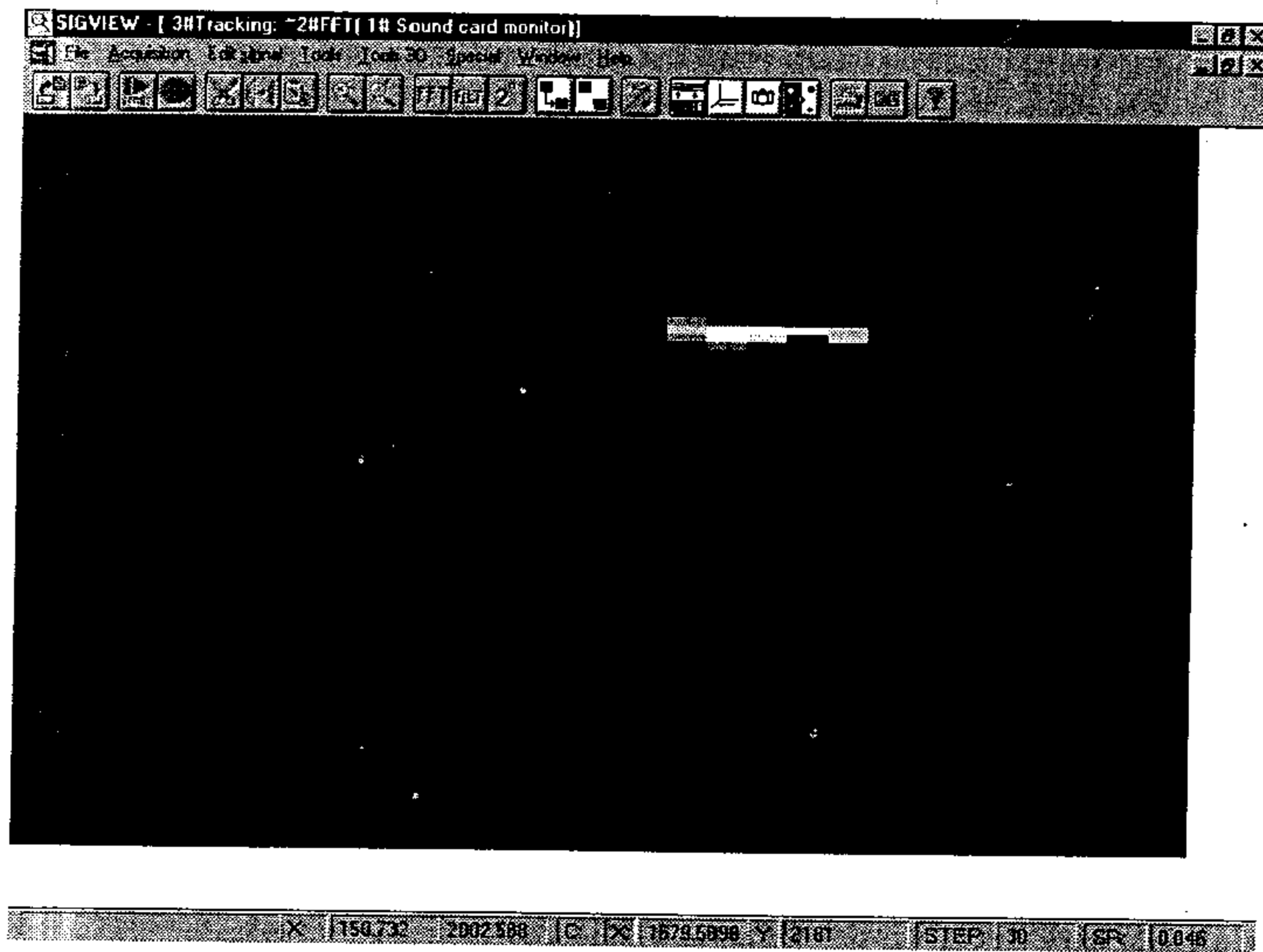
Na slikama 10, 11. i 12. je prikazan eksperiment snimanja melodije: $d^2 e^2 c^2 c^1 g^1$, sa 3D spektrom, (slika 10), uvećanim segmentom 3D spektra, koji sadrži interesantan deo prethodne slike i 3D spektar, muzički prikaz (melodija ispisana s leva).

Napominjemo da su sve 3D strukture dobijene u realnom vremenu, "zaleđene" i snimljene. Za *FFT* ulaz je 512 tačaka vremenskog signala. Ukupno trajanje ovih 512 merenja iznosi cca $\frac{1}{22}$ sekunde, račun i iscrtavanje još kraće, vremenski tok 3D spektra ostvaruje se sa preko 11 spektara u sekundi, čime je skoro dostignuta filmska brzina.

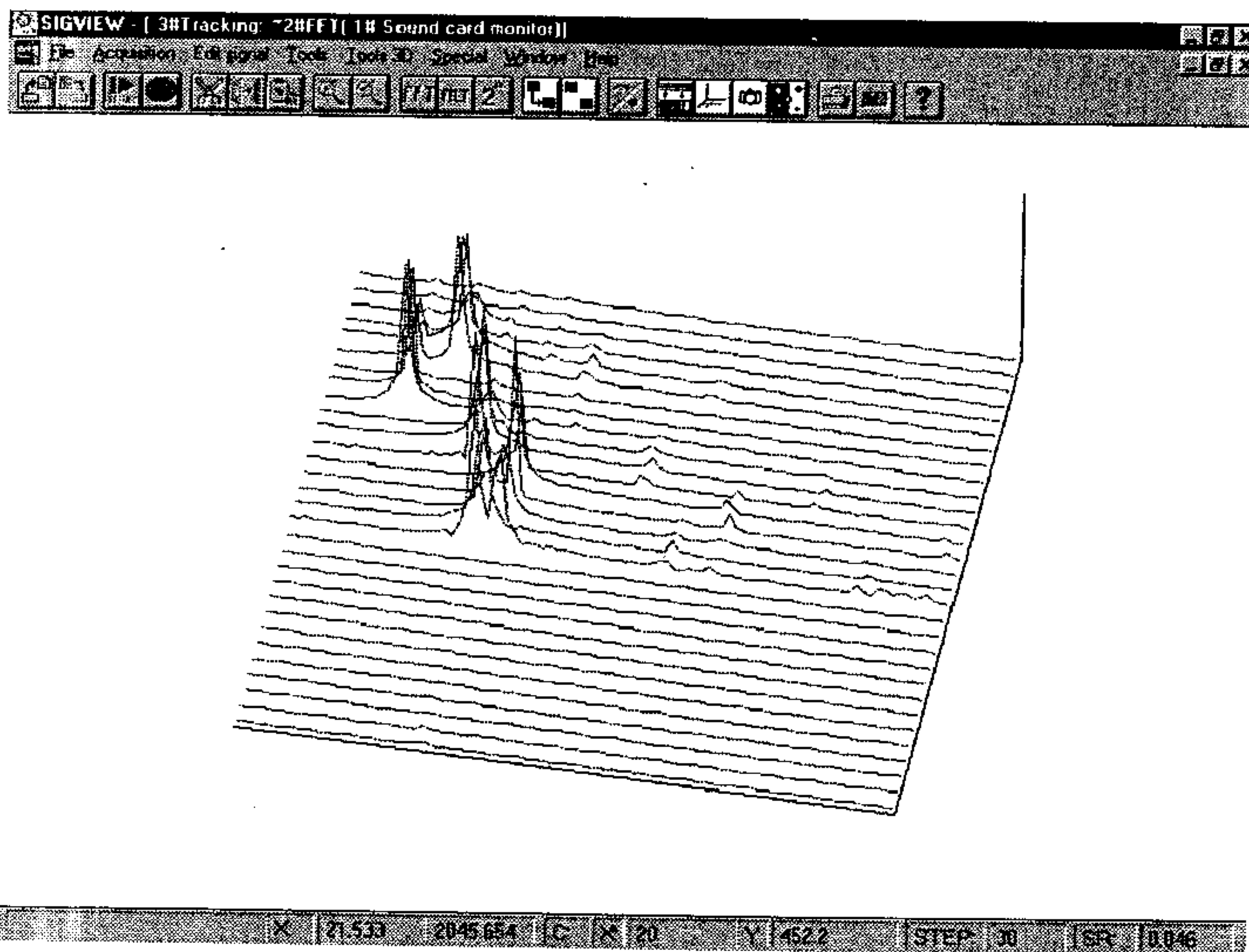
Brzinom akvizicije od 11000 semplova u sekundi, može se registrovati frekvencija izvora do 5500 Hz. Vreme od $\frac{1}{22}$ sekunde (= 512 tačaka) je dovoljno za dobro razdvajanje sporijih tonova u 3D spektru i nije iznad praga percepcije. Frekventna preciznost računatog spektra iznosi

$$\Delta\nu = \frac{5500}{\frac{512}{2}} = 21.5 \text{ Hz.}$$

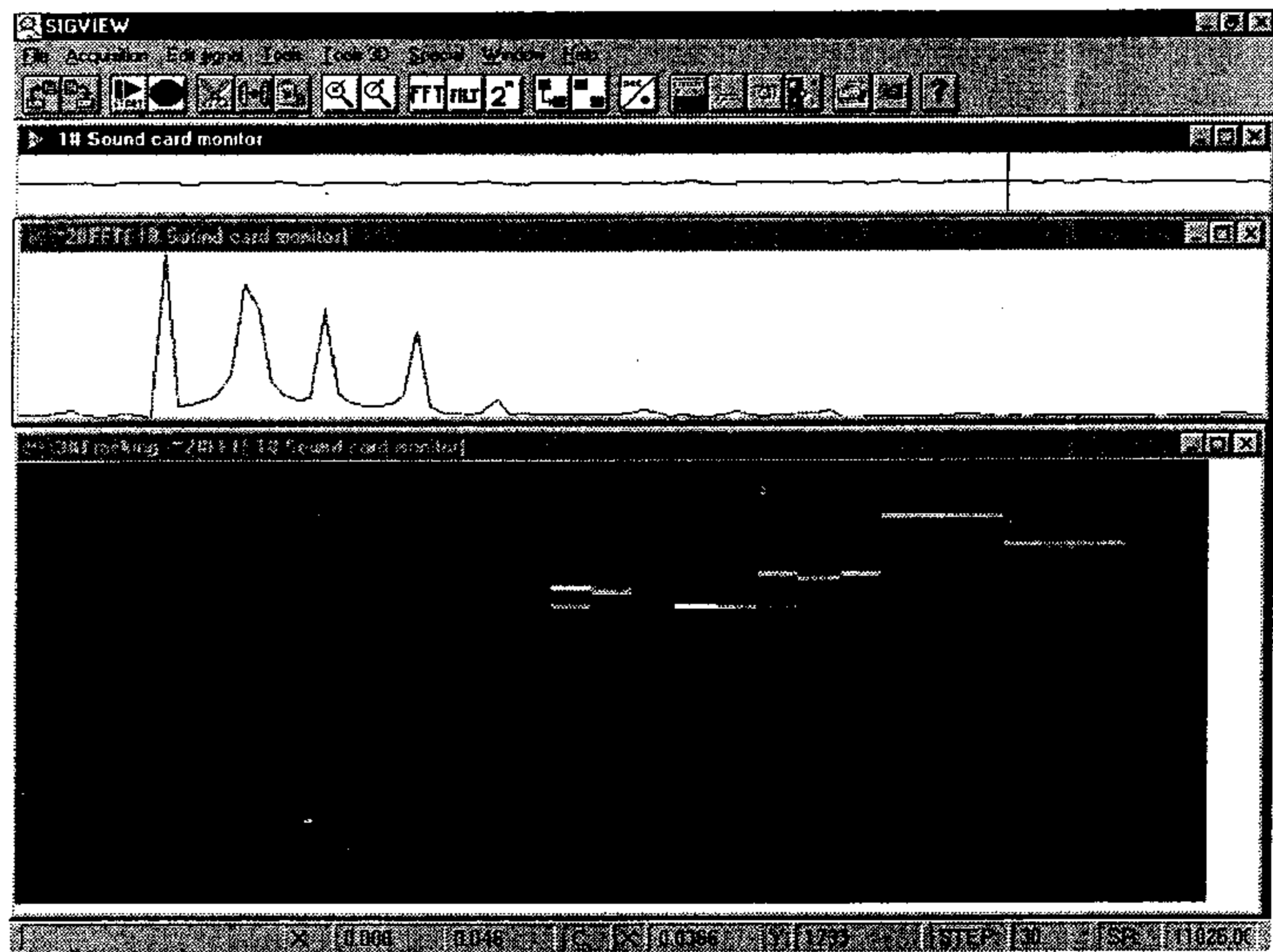
Drugim rečima, pomak po domenu spektra iznosi $\Delta\nu$, dok se frekvencije, koje se razlikuju za manje od $\Delta\nu$ prikazuju kao jedna. $(d^2, e^2, c^2, c^1, g^1) = (588, 660, 527, 263, 392)$, pa upotrebljena rezolucija razlikuje dobro polustepene i skoro četvrtstepene u opsegu početka melodije, što se sve može proceniti posmatranjem muzičkog prikaza 3D spektra.



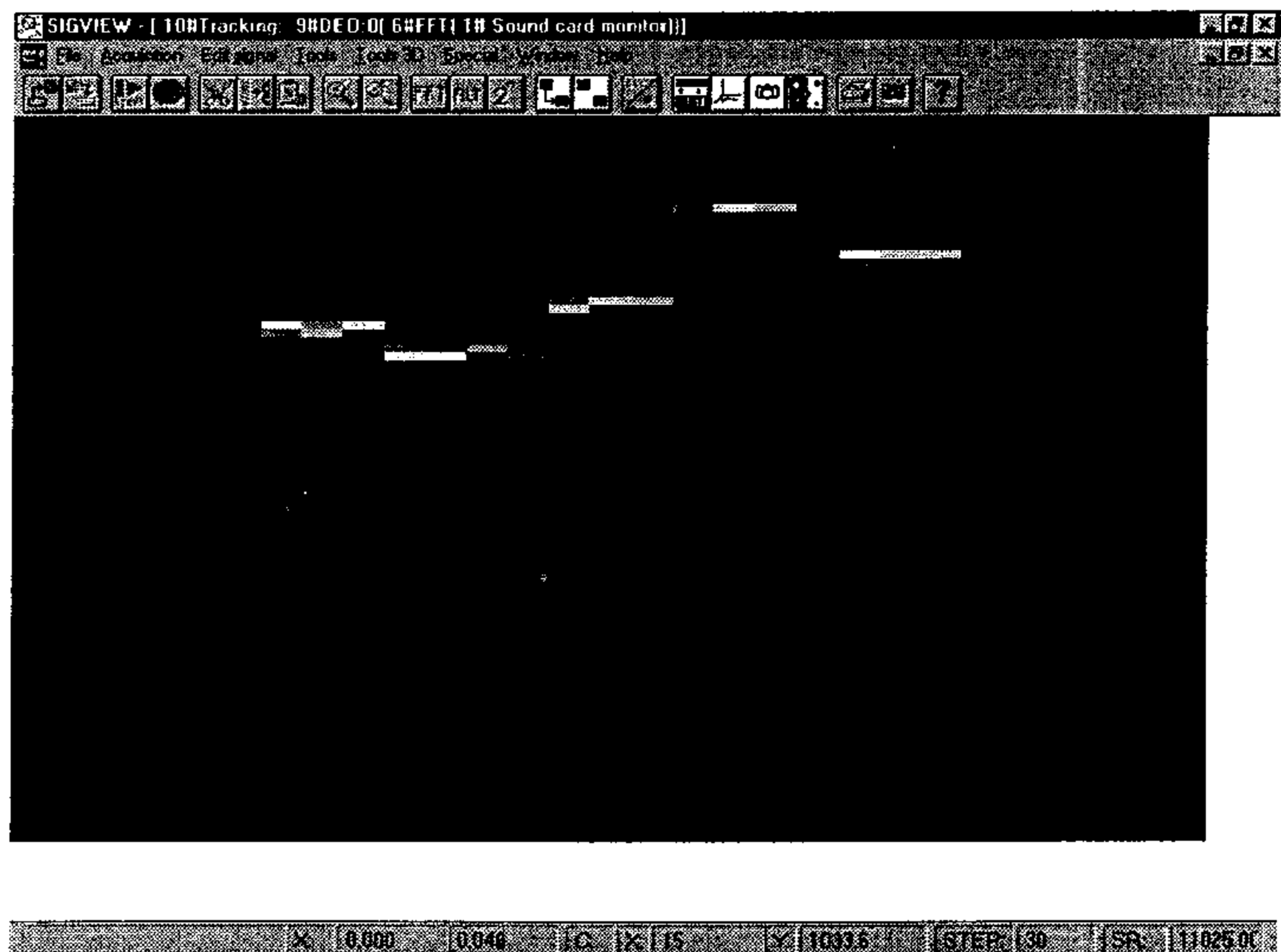
Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.



Slika 12.

Povećanje *FFT* rezolucije (iz računskih razloga uzima se interval oblika 2^n tačaka), na primer 1024 tačke na ulazu, smanjuje $\Delta\nu$ na pola 10.7 Hz ($\frac{2}{3}$ četvrtstepena na 527 Hz). Međutim, 1024 tačke ovde traju $\frac{1}{11}$ sekunde, čime raste vremensko razmazivanje (neodređenost) fenomena, kao i kašnjenje u procesiranju spektra u realnom vremenu. Sve što se dešava unutar ulazne *FFT* preciznosti ne može se lako razlikovati u vremenu. Označimo sa Δ_{f^2t} ulaznu preciznost *FFT*, tj. broj ulaznih tačaka merene funkcije. Onda (u opštem slučaju) imamo sledeću relaciju neodređenosti

$$\Delta_{f^2t\nu} \cdot \Delta_{f^2t} = \text{const.}$$

Za datu brzinu semplovanja *SR* imamo

$$\Delta_{fft\nu} \cdot \Delta_{f^2t} = \frac{SR}{\Delta_{f^2t}} \cdot \Delta_{f^2t} = SR.$$

Potrebnu brzinu semplovanja definišu faktori: brzina promene signala (tj. maksimalna frekvencija u signalu), kao i potrebna stabilnost spektara u vremenu i potrebna brzina računanja spektara.

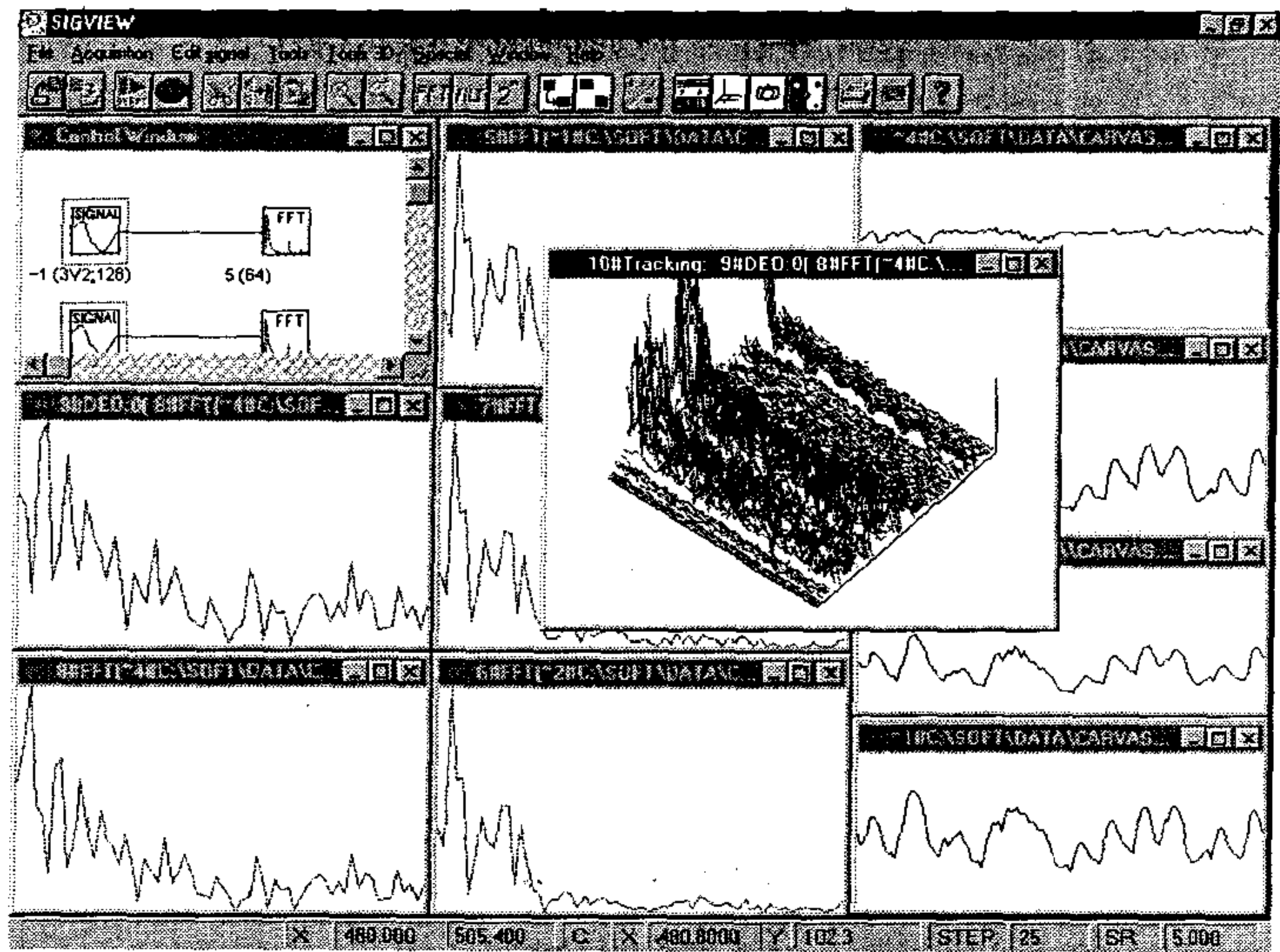
Za jednostavne spektre gornja neodređenost kolapsira računanjem parametara od značaja po spektralnoj liniji, što je izvodljivo. Za spektre koji ne ulaze u ovu klasu, situacija je vrlo komplikovana.

Na bazi izloženog akustičkog primera i sistema SIGVIEW, koji obezbeđuje raznovrsnu višekanalnu akviziciju, spektroskopiju, 3D spektroskopiju, kao i razne operacije na spektrima. Lako se mogu koncipirati i izgraditi sistemi upotrebljivi u dijagnostici patologije sluha.

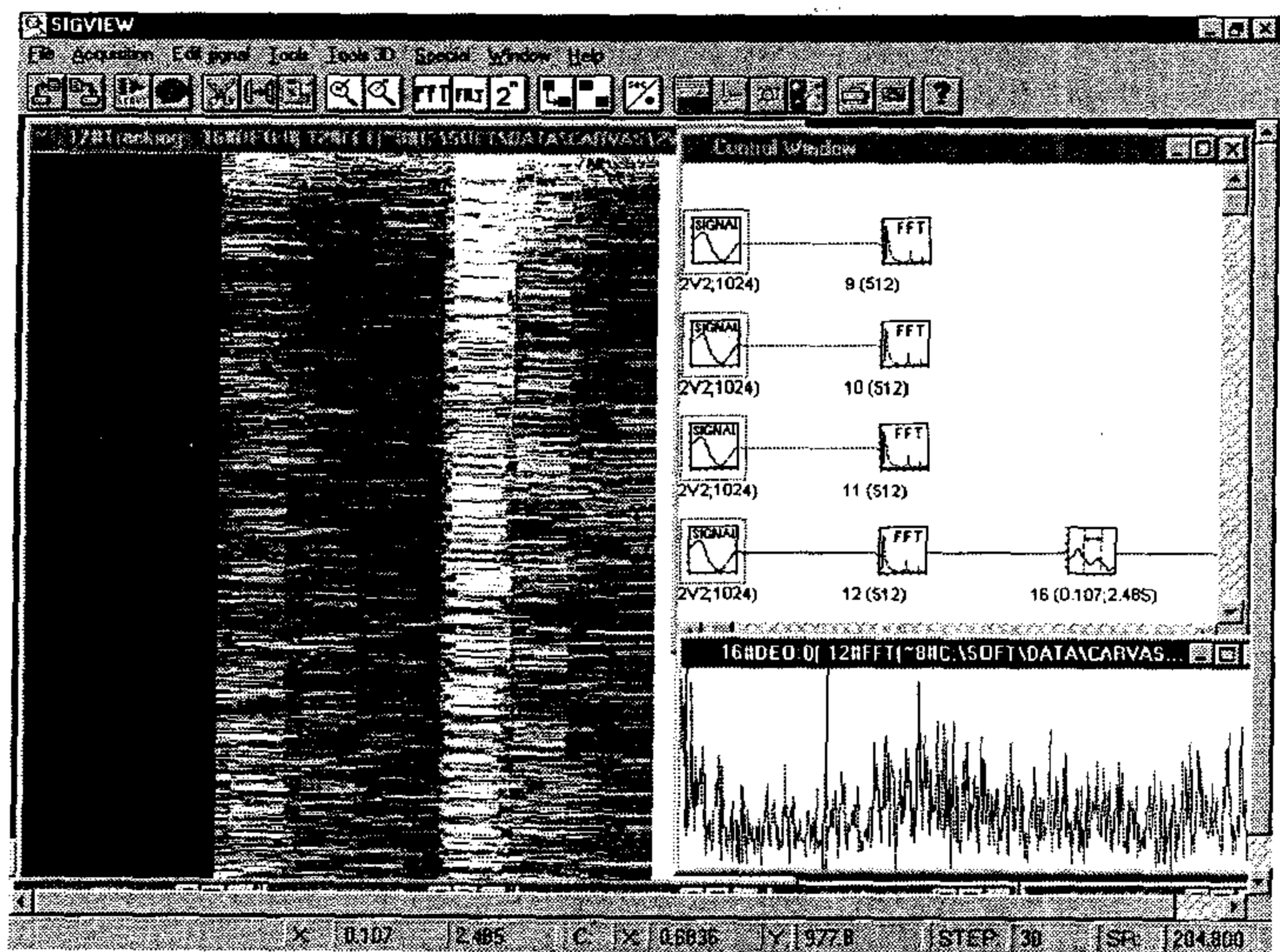
8.4 Kardio vaskularne promene

3D *FFT* spektroskopija je postala značajna u farmakološkim eksperimentalnim i kliničkim ispitivanjima. Kruži informacija da se u 3D spektru vidi nastupanje smrti.

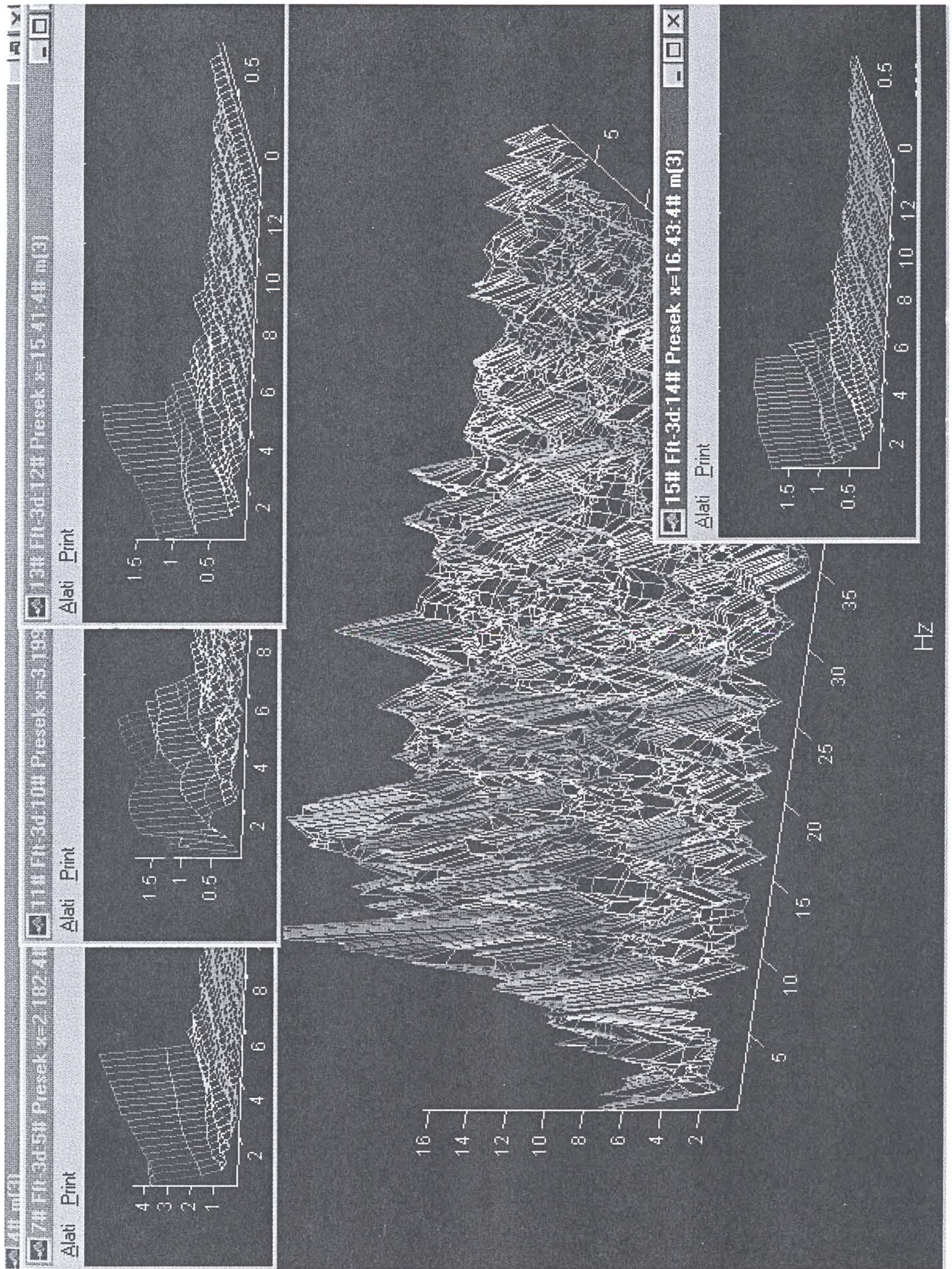
Na slikama 13. i 14. prikazana je analiza signala, dobijenih merenjem srčanog pritiska pacova. 3D spektrogrami su dobijeni računom 800 puta *FFT*, preciznosti 1024. Na 3D



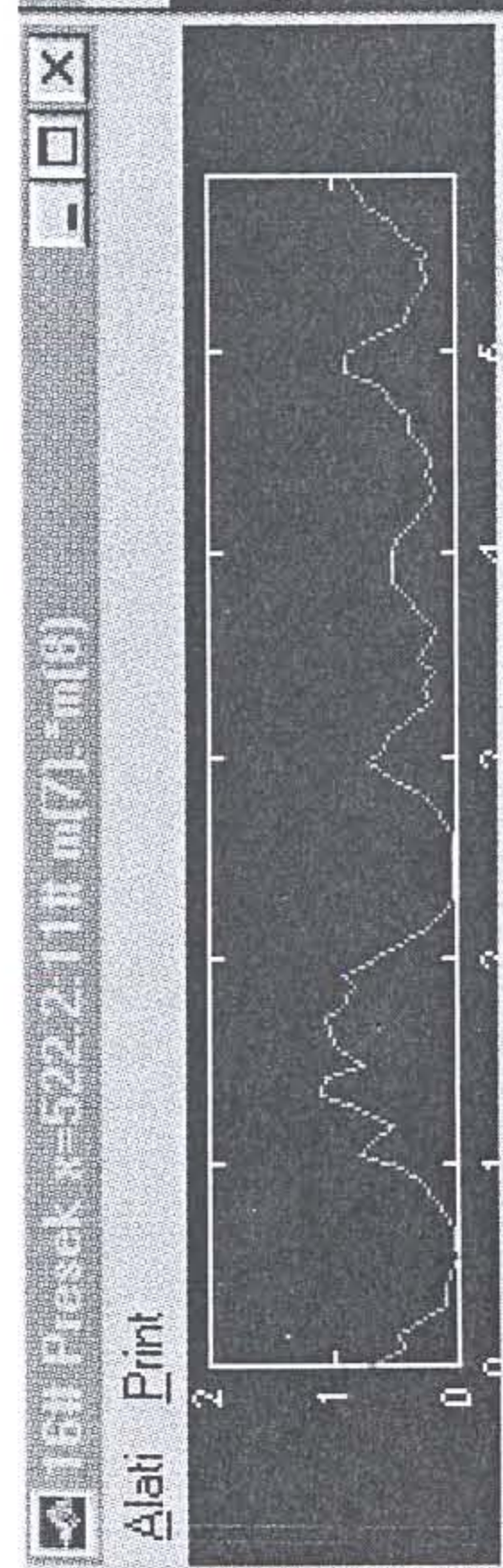
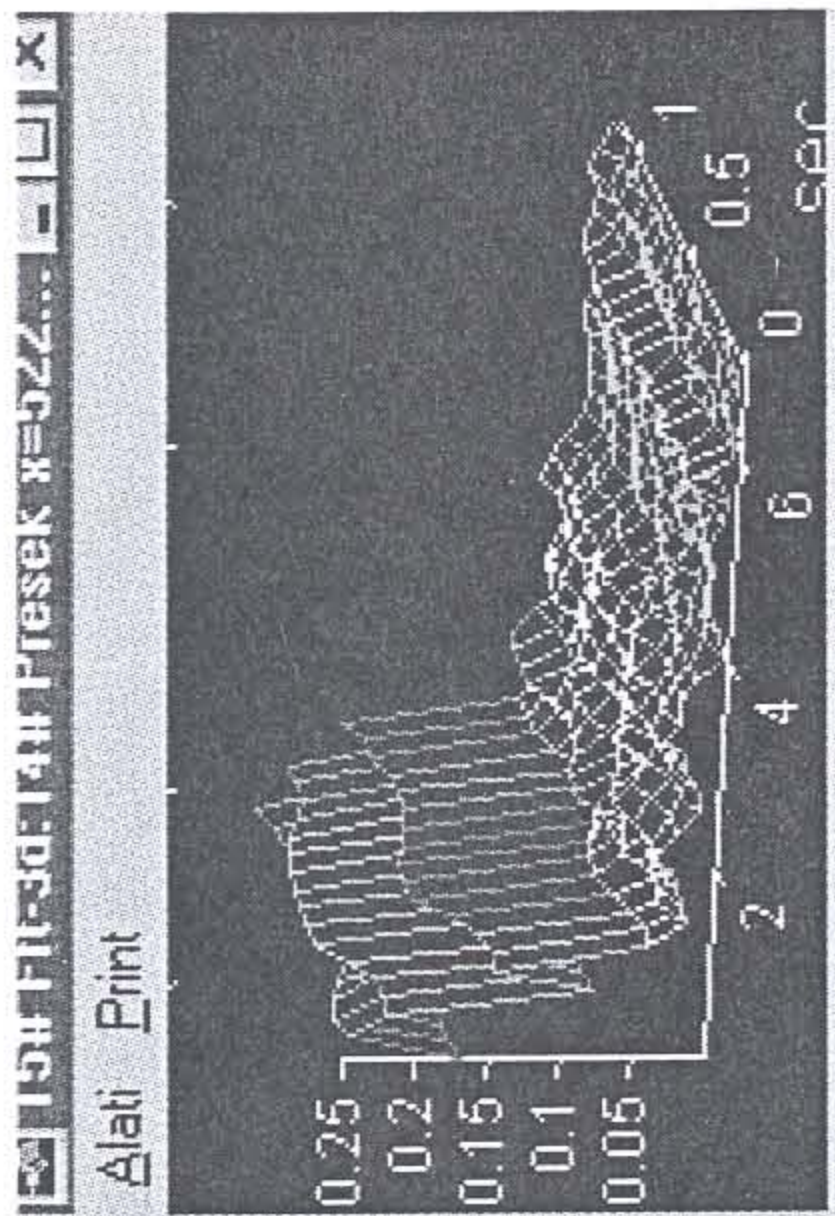
Slika 13.



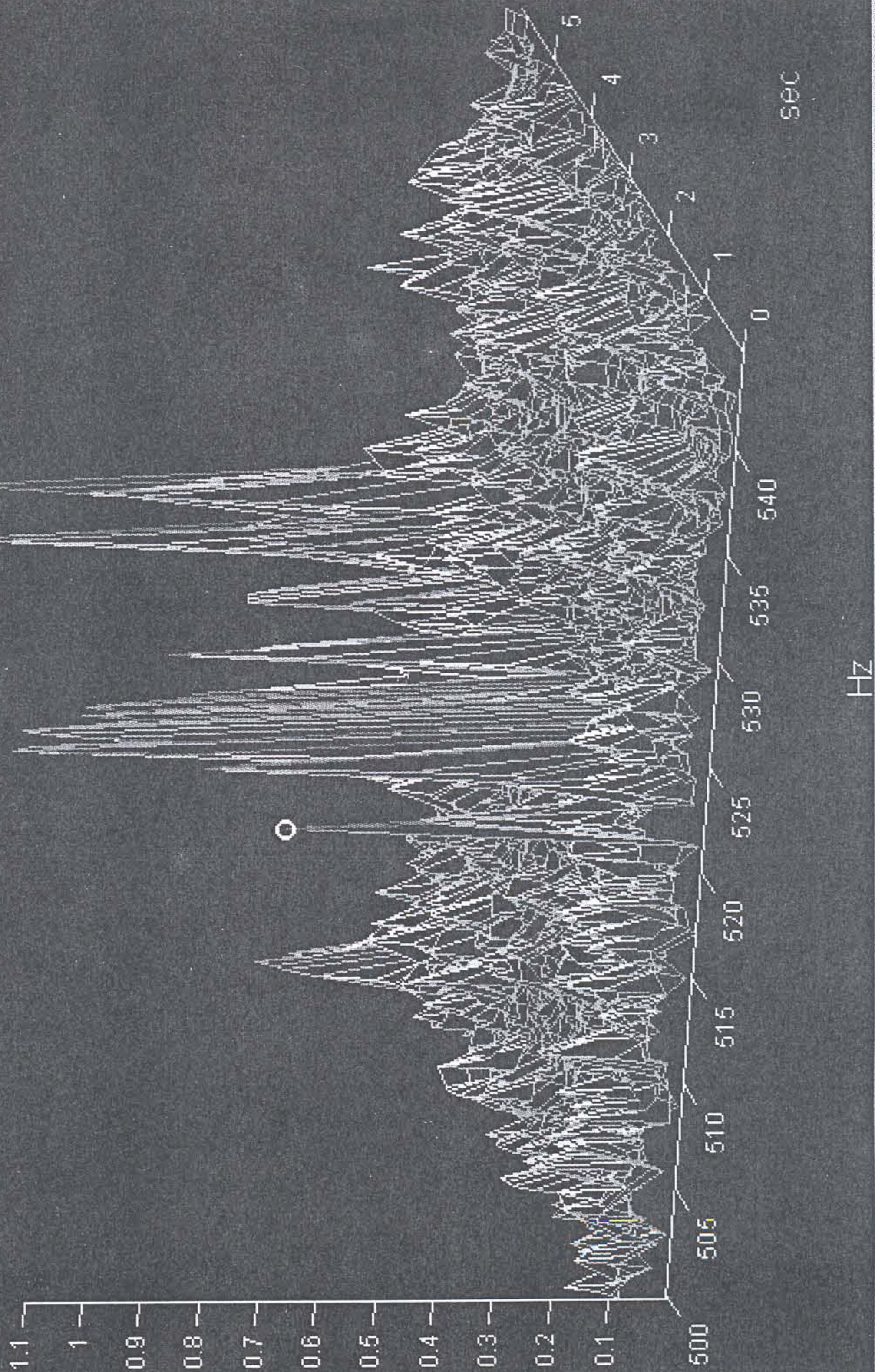
Slika 14.



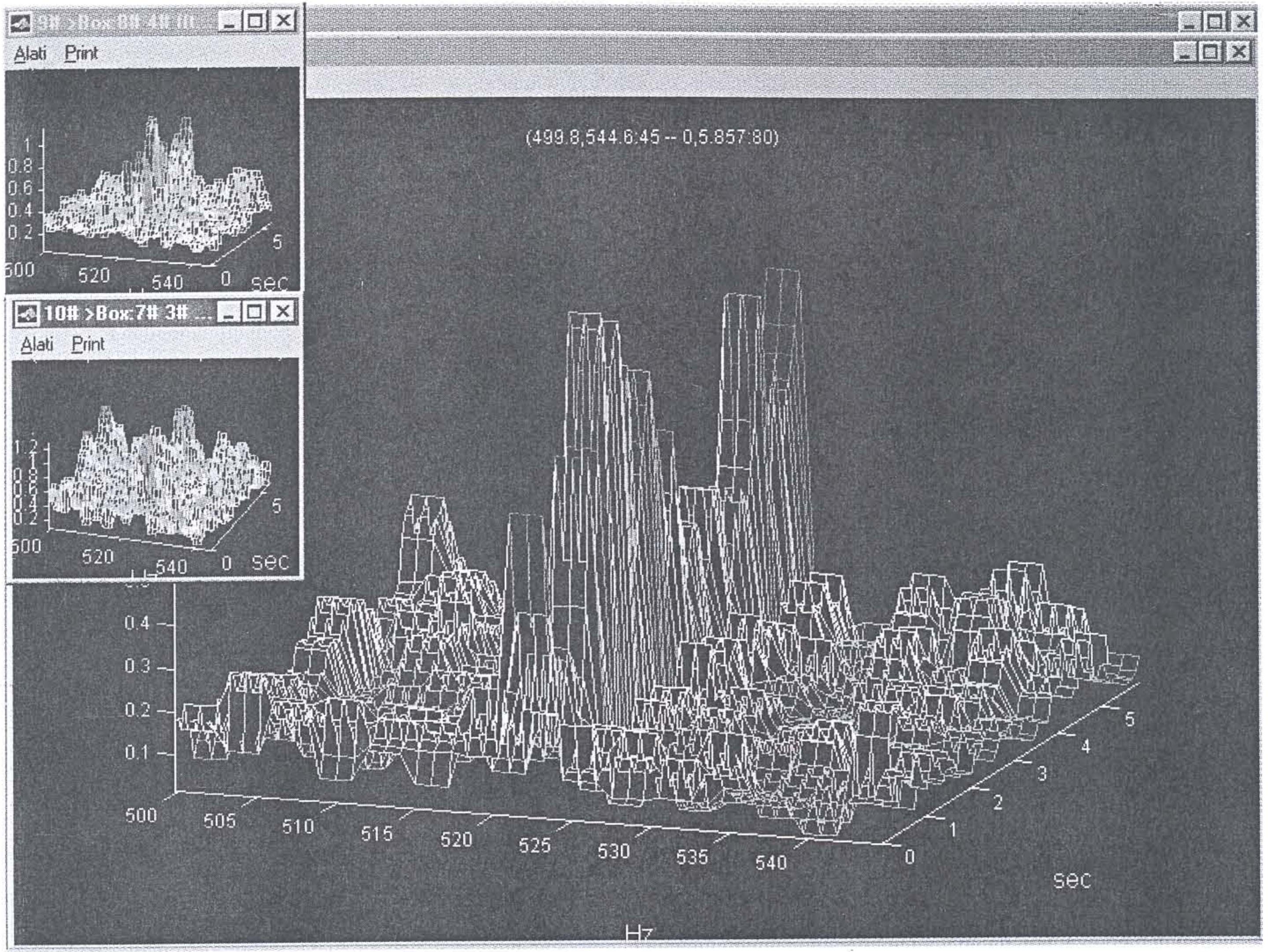
Slika 15.



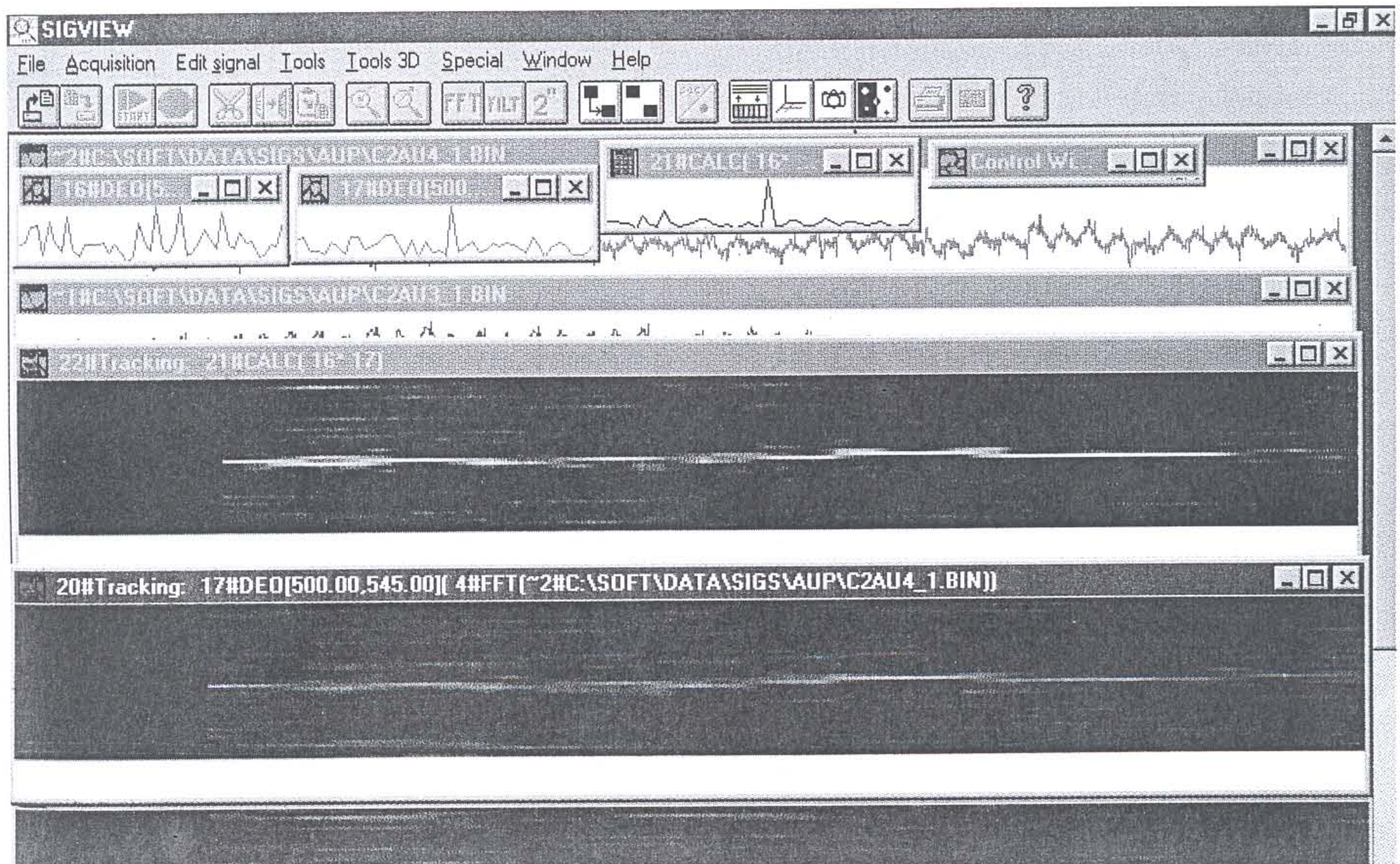
544.6:45 -- 0,5.857:80)



Slika 16.



Slika 17.



spektrima se uočavaju specifične super strukture, čije je poreklo u pomeranju eksperimentalnog pacova.

Pojava organizovanih oblika u 3D spektrima može biti izuzetno značajna jer možda manifestuje ispoljavanje primarnih upravljačkih struktura.

8.5 Elektroencefalografija-EEG

Analiza moždanih signala, danas pretežno EEG, spada u najozbiljnija tekuća i predstojeća ispitivanja signala. Sami EEG spektri spadaju u najstroženije vrste signala (spektara). Ipak, spektroskopija signala, verovatno za duže vreme, predstavlja najjači metod za ispitivanje složenijih procesa u mozgu.

Klasična encefalografija ispituje signale do nekoliko desetina Hz-a, uz filtriranje-odstranjivanje frekvencija preko 50 Hz. Prethodno je verovatno uslovljeno antičkom registracijom na papiru, gde posle nekoliko desetina Hz nastupa razmaz tuša po hartiji. Posmatrane amplitude su retko veće od jednog centimetra i, uopšte uzev, najlepši EEG signali su najjednostavniji, po mogućstvu nalik na čisti sinus. U pomenutim uslovima nije ni moguće registrovanje ičega van ispitivanog redukovanog domena.

Namernim odstupanjem od prethodno zadatih ograničenja sa bržim semplovanjima od 4100 semplova u sekundi, ustanovili smo da u donjem delu spektra (0 do 40 Hz) ima ozbiljnih promena pojedinačnih istaknutih linija na nivou jedne do dve milisekunde. Vreme stabilnosti – spore promenljivosti spektra treba da se respektuje u 3D spektroskopiji. Argumentacija je slična kao i za određivanje neophodne brzine akvizicije.

Na slici 15. prikazan je 3D spektrogram jednog kraćeg eksperimenta, sa frekventnim opsegom (0,50) Hz. U manjim prozorima u smeru kretanja skazaljke na satu su 3D spektri spektralnih linija prethodnog spektra na redom: 2.182; 3.199; 15.41 i 16.43 Hz. Frekventni domen sekundarnih spektara je ovde ograničen na 16 Hz, jer je rađen *FFT* u 32 tačke sa pomakom u vremenu, na ukupno 50 tačaka po spektralnoj liniji. Uočimo sličnost energetske distribucije u 2, 3. i 4. spektru, kao i sličnost linijskih profila u 1, 3. i 4. spektru. Spektroskopija višeg reda poput prethodne, samo finija, može da ima vrlo interesantnu semantiku i da bude vezana za vremenske strukture.

Na slici 16. prikazan je opseg (500, 547) Hz 3D spektra istog eksperimenta, dobijen pokoordinatnim množenjem istih takvih struktura za dva

ulazna kanala. Uočimo efekte "čišćenja", za linearno nezavisne komponente spektara, kao i relativno isticanje linearno zavisne strukture (tj. frekventne komponente, prisutne u oba signala). Iznad proizvod-spektra prikazan je vremenski profil linije na 522.2 Hz, kao i njen vremenski spektar u kome uočljivo dominira linija od 0.5 Hz.

Na slici 17, u malim prozorima, prikazan je rezultat lokalnog usrednjavanja i pokoorinatni proizvod ovih struktura u velikom prozoru, što malo bolje izdvaja u vremenu fenomen sa prethodne slike.

Na slici 18. prikazan je za isti eksperiment rezultat sličnog postupka, 800 pokoorinatnih proizvoda sinhronih spektara u vremenu (gornji 3D spektar je proizvodni), kojim se lokalno linearno zavisni fenomen izdiže (lokalno) iznad "šuma".

U visoko složenom spektru segmentirano ispitivanje može da ima smisla. Fenomen (npr. linija 522), koji je u individualnim spektrima dosta slabiji (ovde 16 puta) od energetske linije, u proizvodu $\frac{1}{256}$ puta slabiji od istih, ali frekventno dovoljno udaljen od istih, može biti izdvojen opisanim numeričkim mikroskopiranjem i finijim postupcima.

8.6 Zigurat

Skrenimo pažnju ovde na još jedan semantički detalj. Neka je npr. *FFT* preciznost 2048 tačaka. Neka je unutar uzorka za *FFT* prisutna periodična komponenta - impuls $A \sin \omega t$ sa početkom u tački t_i i krajem u tački t_j , u ukupno k tačaka (vremenska baza impulsa), $k \leq 2048$. Onda će u spektru amplituda ovog impulsa biti $A \cdot \frac{k}{2048}$. Recimo da su u uzorku (za *FFT*) signala prisutna dva impulsa, $A_1 \sin \omega_1 t$ u k_1 tačaka i $A_2 \sin \omega_2 t$ u k_2 tačaka i neka važi $A_1 \cdot k_1 = A_2 \cdot k_2$, za $k_1, k_2 \leq 2048$. Onda će amplitude ovih impulsa u spektru biti približno jednake. Da bi se izbeglo pogrešno zaključivanje, potrebna je varijanta spektralne rekonstrukcije u pravcu dobijanja "realnih" spektara, t.j. u kojima se anulira prethodna anomalija. Jedan način: podešavanje parametara akvizicije tako da svaki prisutan impuls praktično bude dužine (bar) *FFT* uzorka. Drugi metod: kliznom spektroskopijom se određuje profil spektralne linije u vremenu, koja u opštem slučaju podseća na zigurat, ako nema ozbiljnije interferencije posmatrane spektralne linije sa ostatkom spektra (i ako su impulsi koji odgovaraju ispitivanoj liniji, konstantnih frekvencija i amplituda), onda je moguća rekonstrukcija realnih amplituda impulsa, uz određivanje vremena nastanka, trajanja i prestanka čime bi se mogla obaviti željena rekonstrukcija spektra.

9. Obrada mikroskopskih slika

Klasična vizuelno fotografska upotreba mikroskopa dala je veliki doprinos nauci u prethodnih 100 godina. Pred kraj milenijuma mikroskop dobija kvalitetnu dopunu uvođenjem CCD čipa, fotoosetljivog elementa, koji, smešten u fokus optičkog sistema, registruje sliku u elektronskom obliku. Slika se učitava u računar, gde se obrađuje, analizira, arhivira.

Ovde prikazane slike dobijene su CCD kamerom, čiji CCD čip, veličine $6.8\text{mm} \times 4.8\text{mm}$ ima 750×510 fotodetektora-piksela, veličine $9 \times 9\mu\text{m}$, koji razlikuju 2^{14} nijansi (intenziteta svetla između minimuma i maksimuma). Kamera je adapterima povezana sa nekoliko mikroskopa. Slika dobijena u računaru predstavlja matricu dimenzija 750×510 , čiji su elementi u skupu $[0, 2^{14} - 1] \subset N$, što skoro odgovara punom ekranu računarskog monitora zadovoljavajuće rezolucije. Na tržištu postoje CCD kamere rezolucije 1500×1000 piksela, postoje $4K \times 4K$ čipovi, a očekuje se da gustina čipova i dalje raste. Veličina monitorskog piksela podeljena veličinom piksela CCD elementa, koji je smešten u fokus mikroskopa, predstavlja faktor dodatnog uvećanja, a u ovom slučaju $0.3\text{mm}/9\mu\text{m} = 33.3$ puta.

Slike u računaru dopuštaju neke nove mogućnosti: softversku obradu, preciznu analizu, formiranje velikih slikovnih baza, poređenja dobijenih slika sa bazama, matematičko modeliranje, definiciju objekata u slici, automatizaciju izdvajanja objekata, što sve treba da unapredi kvalitet i efikasnost rada u mikroskopiji.

9.1 Fotomorfologija

Označimo sa $F_{m \times n}$ ($m \leq 750; n \leq 510$), matricu – CCD konvertovanu sliku ili neki njen segment. F je diskretna funkcija, čiji je domen (diskretan),

$$D = \{(i, j) \mid i \leq m; j \leq n\} \subseteq R^2,$$

a vrednosti (u diskretnom skupu):

$$f_{i,j} = f(i, j) \in \{0, 1, \dots, 2^{14} - 1\}.$$

Na taj način, matricu F možemo smatrati (finom) aproksimacijom realne funkcije od dva argumenta, površi u prostoru

$$S = \{(i, j, f_{i,j}) \mid (i, j) \in D\}.$$

U raznovrsnom eksperimentisanju, gde se meri intenzitet svetla u vremenu, što se predstavlja funkcijom $I(t)$, argumenta t , obično u diskretnim tačkama vremena $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, radi se o fotometriji. Može se još reći da je fotometrija merenje–ispitivanje funkcije intenziteta svetla po jednom argumentu. Ovde se ispituje funkcija u prostoru R^3 , koja je rezultat foto merenja, pa smo slobodni da isto nazovemo fotomorfologijom. Neka svojstva funkcija ovde mogu biti od koristi, što ilustrujemo uključenim primerima. Na slici 1. levo prikazan je hromozom sa krupnom svetlom tačkom blizu sredine, tzv. FISH markerom. U desnom delu slike vide se jedra sa FISH markerima – svetlim tačkama. Prisutnim markerima registruje se prisustvo određenih gena. Od značaja je određivanje broja, položaja, međusobnog rasporeda–rastojanja markera, hromozoma sa markerom. Na slici 2. levo vidi se ispravljen hromozom sa markerom sa slike 1. Desno na slici prikazana je fotomorfološka struktura ovog hromozoma, iscrtavanjem uzdužnih preseka – kolona matrice-slike ovog hromozoma. Isti prizor imamo i na slici 3. uz senčenja, koja ističu detalje hromozoma. Poprečni nabori definišu strukturu hromozoma. Centar markera se poklapa sa maksimumom fotomorfološke funkcije $F(x, y)$, što je posebno istaknuto dodatnim uvećanjem centralne formacije, na slici 4. i položajem presečnih linija $x = 11, y = 80$. Funkcija $F(11, y)$ je funkcija jednog argumenta i u maksimumu je

$$\frac{dF(11, y)}{dy} = 0.$$

Slično,

$$\frac{dF(x, 80)}{dx} = 0,$$

u maksimumu. Iz veličine piksela, oko 5mm sledi da je ispitivani segment hromozoma uvećan 300 000 do 500 000 puta. Ovakvim uvećanjima se vizuelno ništa ne postiže. Ipak, gledano na alternativan način može se najpreciznije odrediti položaj najsvetlijeg piksela markera. Slike 5. i 6. prikazuju jedro iz gornjeg desnog ugla slike 1. Fina struktura fotomorfologije u okolini označenog markera se vrlo lepo uočava (slika 5, desno) pri uvećanju oko

150 000 puta. Uža okolina markera (slika 6, desno) uvećana je oko 300 000 puta.

Osetljivost CCD elementa prevazilazi osetljivost fotoemulzije, pa se može očekivati detekcija slabih markera koje film ne registruje. Uočimo da je površina fotomorfoloških funkcija nenazubljena, što ukazuje na odsustvo šûma. Poslednje obećava mogućnost ispitivanja područja od svega nekoliko piksela u prečniku.

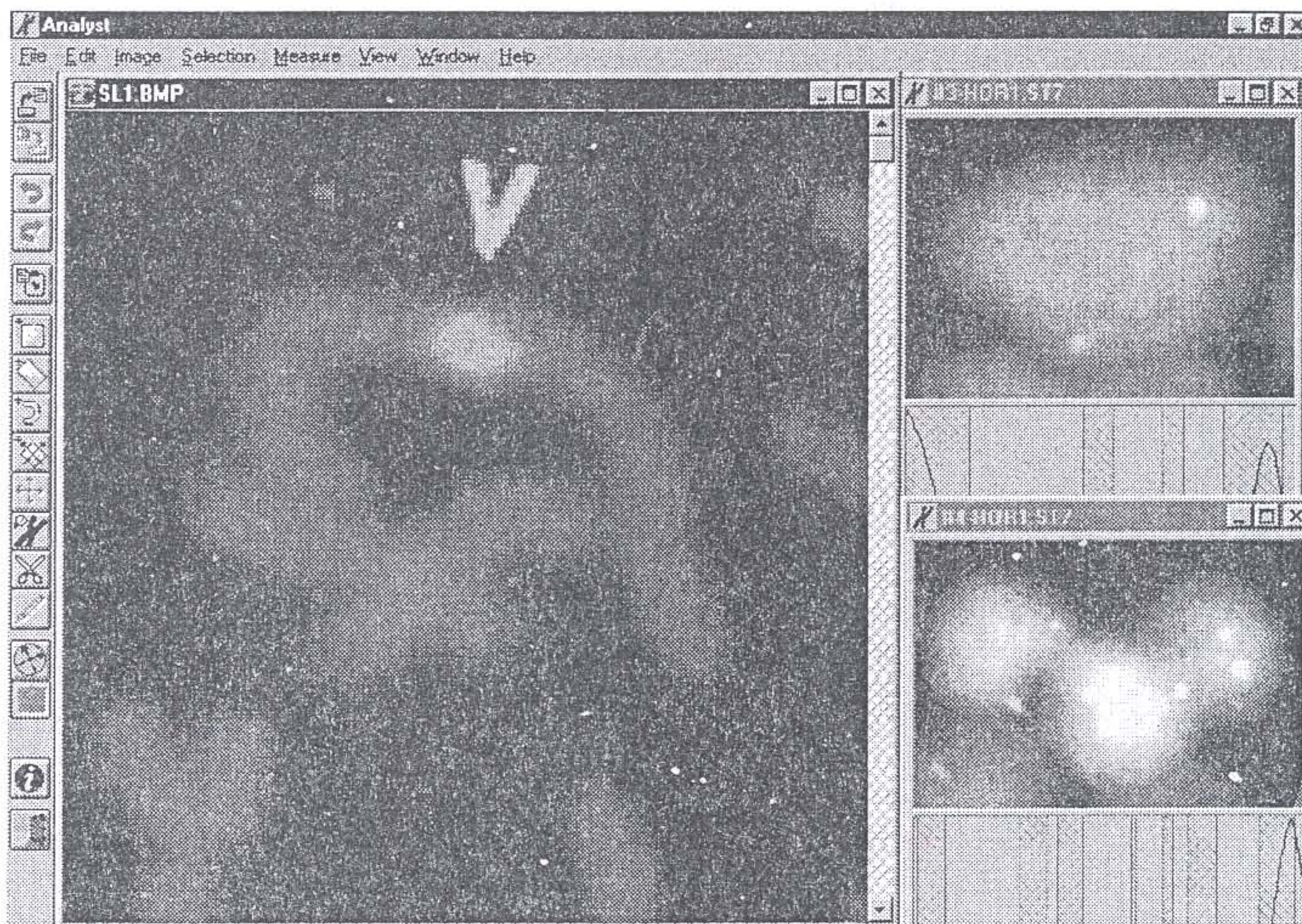
9.2 Analiza hromozoma

Neki od važnijih zadataka u ispitivanju hromozoma su sortiranje hromozoma – određivanje kariotipa, a potom ispitivanje pojedinačnih hromozoma, upoređivanjem sa odgovarajućim i određivanjem porekla hromozomskog materijala. Neke, značajne karakteristike, veličina i specifičnosti oblika pojedinačnih hromozoma, koriste se u početnom određivanju kariotipa. Sličnost pojedinih hromozoma po obliku i veličini znatno otežava precizno određivanje kariotipa. Postoje standardizovane tehnike bojenja hromozoma, koje omogućavaju dopunsko razlikovanje sličnih. Jedna od najvažnijih tehnika bojenja je indukcija *G* traka, tamnih poprečnih pruga, čiji raspored i širina karakterišu hromozom. Za humani kariotip je urađena etalonizacija za normalne hromozome u tri faze ćelijske deobe, koja određuje gornji genetski adresni prostor. Raznim tehnikama se utvrđuje prisustvo pojedinih gena, za koje je potom važno da se adresiraju u kariotipu, što znači određivanje hromozoma, trake i pozicije na traci, gde je gen lociran. Etalon *G*-traka humanog kariotipa, dobijen je statistički iz analize kariotipa, velike populacije. Za više malignih obolenja, kao i većinu naslednih obolenja, uočena je ekspresija na nivou kariotipskih promena. Za kvalitetan rad neophodni su sve bolji etaloni. Solidniji cilj je izgradnja adekvatnog koordinatnog sistema i integralnog opisa geometrije i topografije kariotipa, koji uključuje sve značajne geometrijske i softverske aspekte, od rasporeda nukleotida do morfologije kariotipa. Iz mikroskopskih posmatranja struktura hromozoma izgleda kontinualno. Nanoskopskim posmatranjima utvrđuje se detaljna diskretna struktura osnovne formacije DNK, pri čemu su značajni i globalni i lokalni aspekti–strukture integralne funkcije, rasute preko 3 do 4 reda veličine, koju nazivamo kariotip. Zamislimo npr. soliter od 100 spratova, visok oko 400m, širok oko 80m, sa svim neophodnim strukturama i sistemima: armatura, ambalaža spoljna i unutrašnja, ventilacija, energija, dostava energije, fizička-geometrijska komunikacija, sistem za prikupljanje,

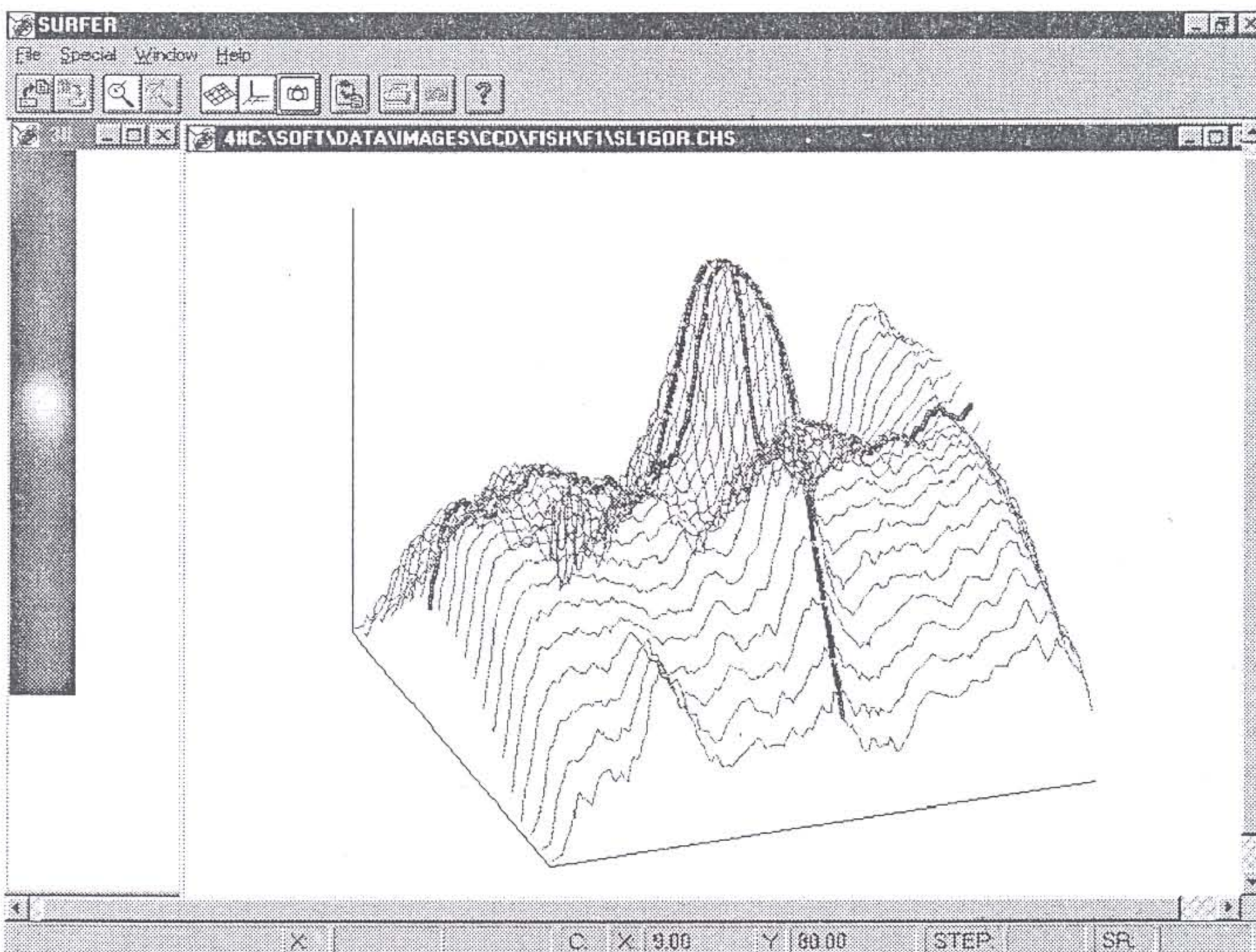
obradu-preradu i odstranjivanje otpada i otpadaka, vodovod, kanalizacija, svetlo, telefonija, distribucija TV slika i muzike, inter i ekster net, bankarske mreže, sistemi za održavanja struktura i sistema i sistemi za održavanje sistema za održavanje. Sa oko 600000m² i dvadeset do trideset hiljada stanara i korisnika, ovakav soliter teško da može da funkcioniše bez integrisanog upravljanja, oličenog u načelniku i službama, koje on kontroliše iz svojih kancelarija na vrhu solitera. Zamislimo džinove, za koje je ovaj soliter mali kao nama hromozom. Nekom mikroskopijom (uz neophodno uništenje mnoštva solitera), strpljivim radom mogli bi se odrediti grublji aspekti globalnih struktura. Nekom nanoskopijom mogla bi se odrediti rasprostranjenost hemijskih elemenata i prisustvo elemenata finijih struktura i sistema, što bi uz dodatno veliko strpljenje, teorije i eksperimente moglo konvergirati prema solidnoj semantičkoj aproksimaciji "svrhe" i funkcionisanja solitera, pri čemu sâmo načelništvo ostaje identifikovano ili ne. A šta se desilo sa svim softverom u načelnikovom kompjuteru, koji je jedini stvarni upravljač solitera, jer načelnik služi za protokol i reprezentaciju. Možda je softver neopaziv instrumentima i teorijama džinova?

Da bi se postigao napredak u ispitivanju hromozoma, koji zahtevaju i molekularno genetička istraživanja, neophodan je model koji dovoljno dobro predstavlja hromozom sa stanovišta naprednog ispitivanja. Vratimo se na fotomorfologiju. Sistem G traka je fotometrijski, pri čemu se hromozom deli u dve boje, što odgovara vizuelnom utisku (pri uvećanjima u kojima je vizuelna gustina očuvana). Ako presečemo hromozom uzdužno i posmatramo funkciju intenziteta po tom preseku (meridijanski presek), uočavamo da raspored lokalnih maksimuma treba da odgovara rasporedu svetlih traka, dok komplementarni raspored minimuma korespondira rasporedu tamnih G traka. Eventualna pojava kvržica, sitnijih ekstrema, određuje subtrake. Pošto je kriva-polinom intenziteta praktično neprekidna funkcija, što znači da su tamno i svetlo mesto na hromozomu povezani monotono rastućom lepezom sivih nijansi, pošto su intenziteti maksimuma i minimuma eksperimentalno dosta zavisni i varijabilni, za očekivati je da su relativni odnosi ekstrema prilično stabilni. Za meridijanske preseke dva istotipna hromozoma, fotometrijske polinone $M_1(x)$ i $M_2(x)$, sa istim rasporedom i proporcijama ekstrema, onda važi

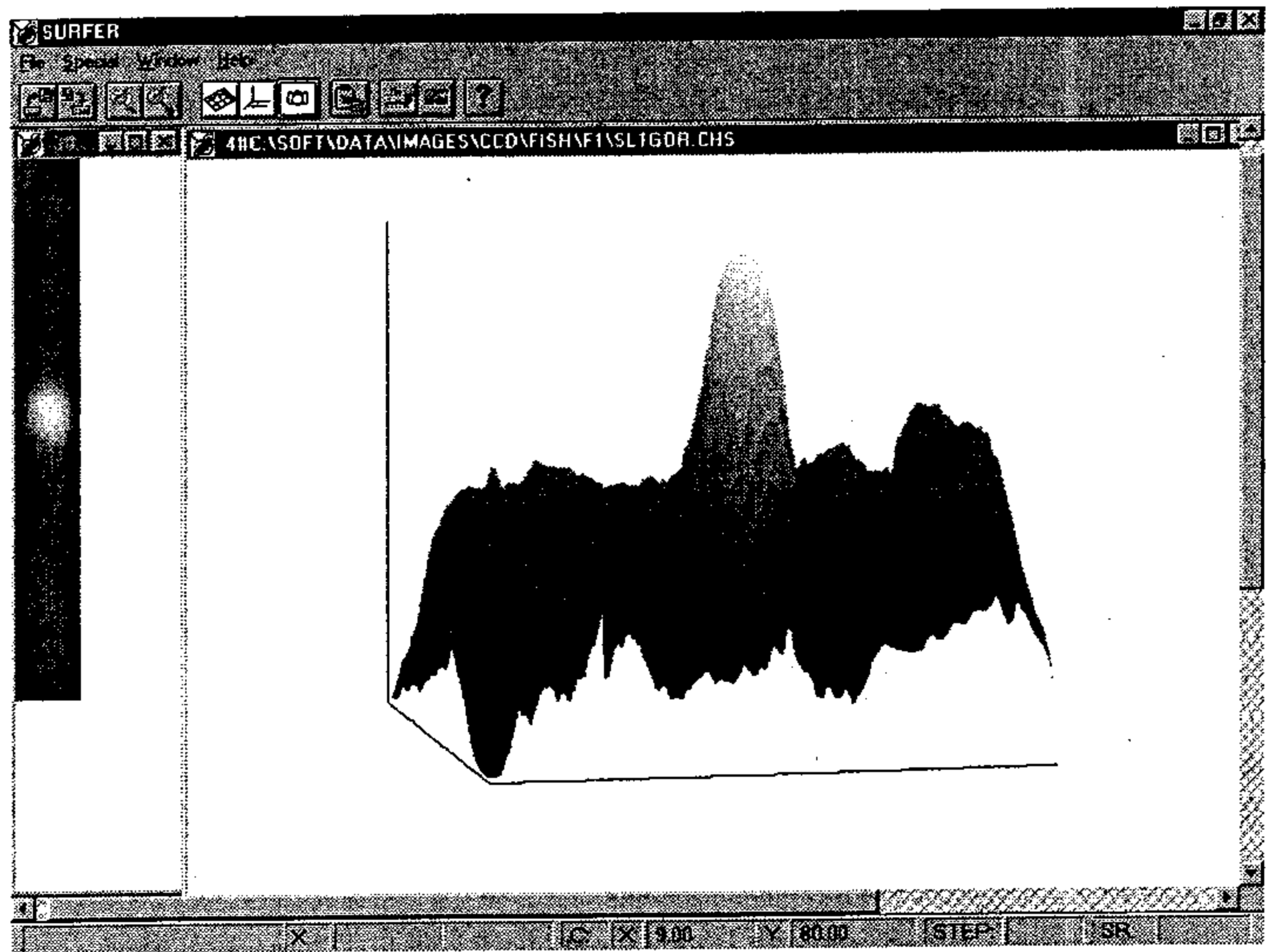
$$(1) \quad (\exists \varepsilon > 0)(\forall x) |M_1(x) - aM_2(x) + c| < \varepsilon,$$



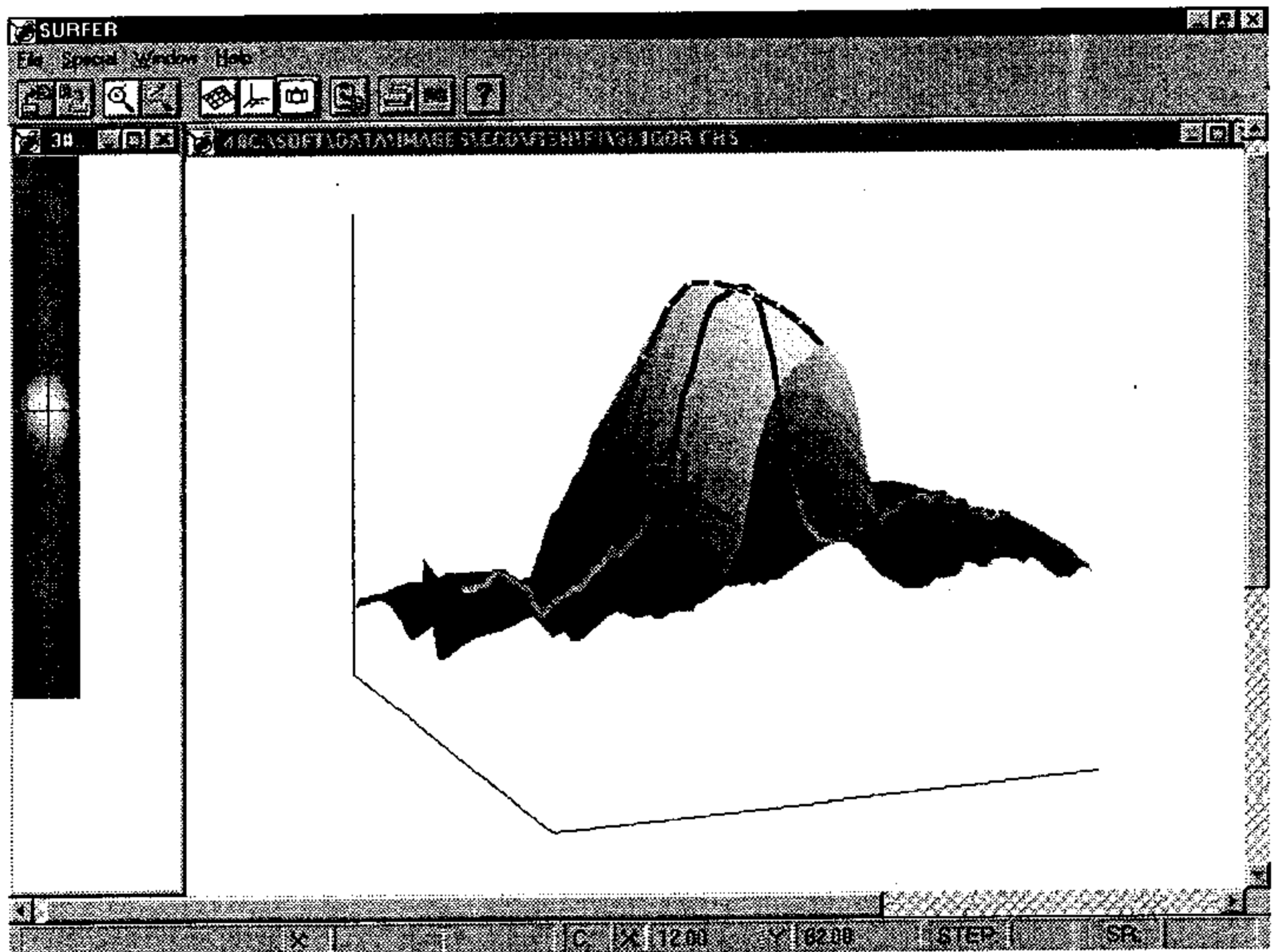
Slika 1.



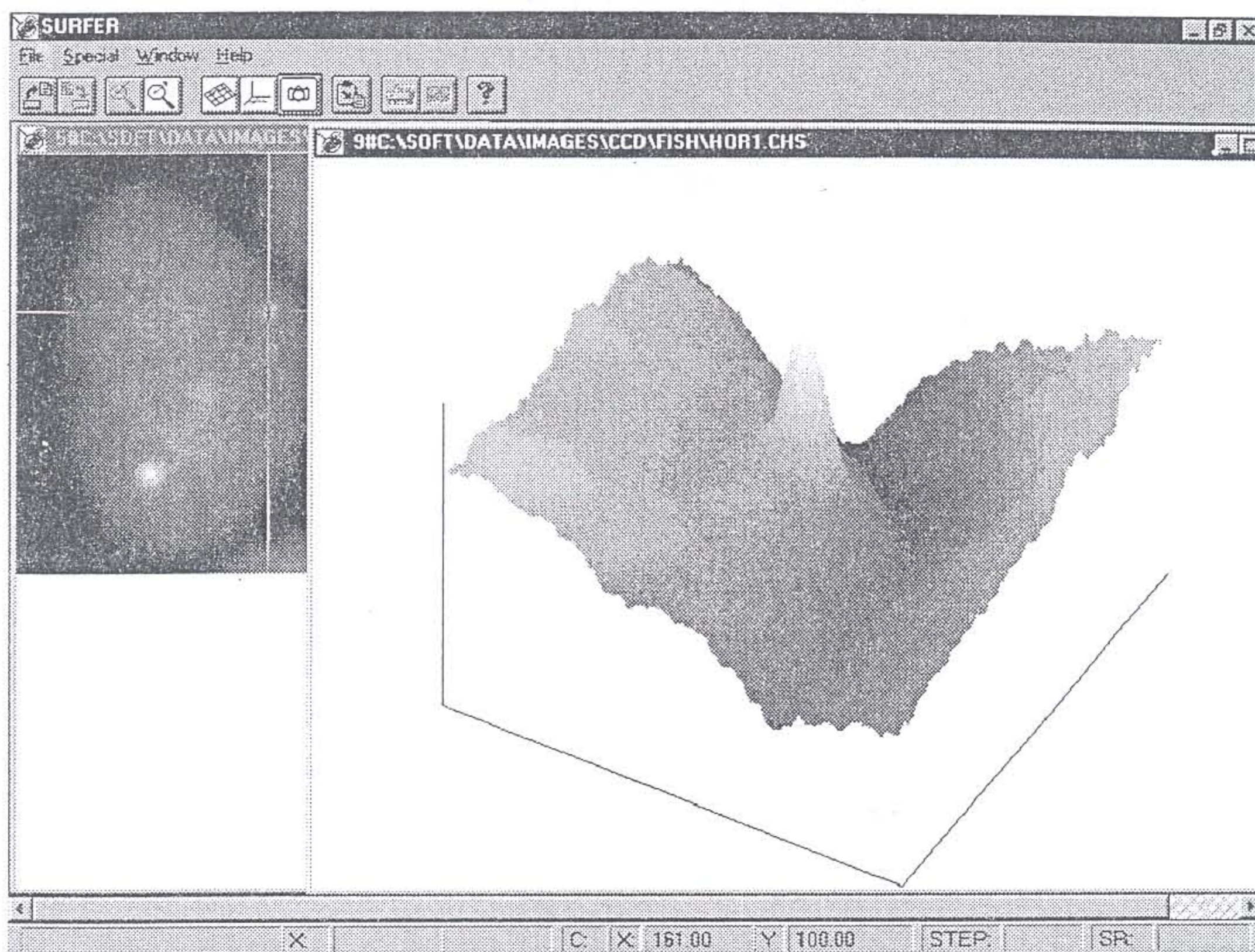
Slika 2.



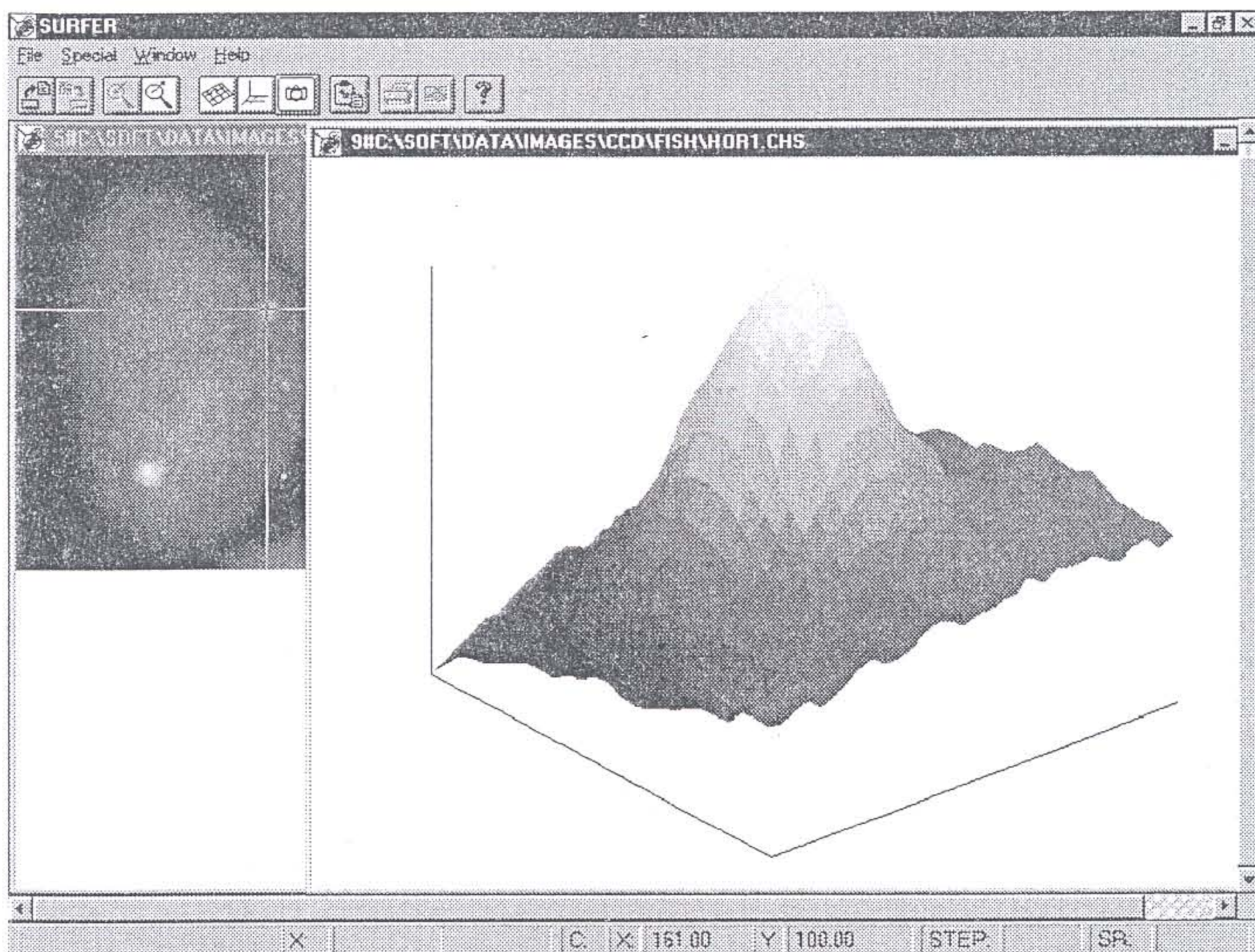
Slika 3.



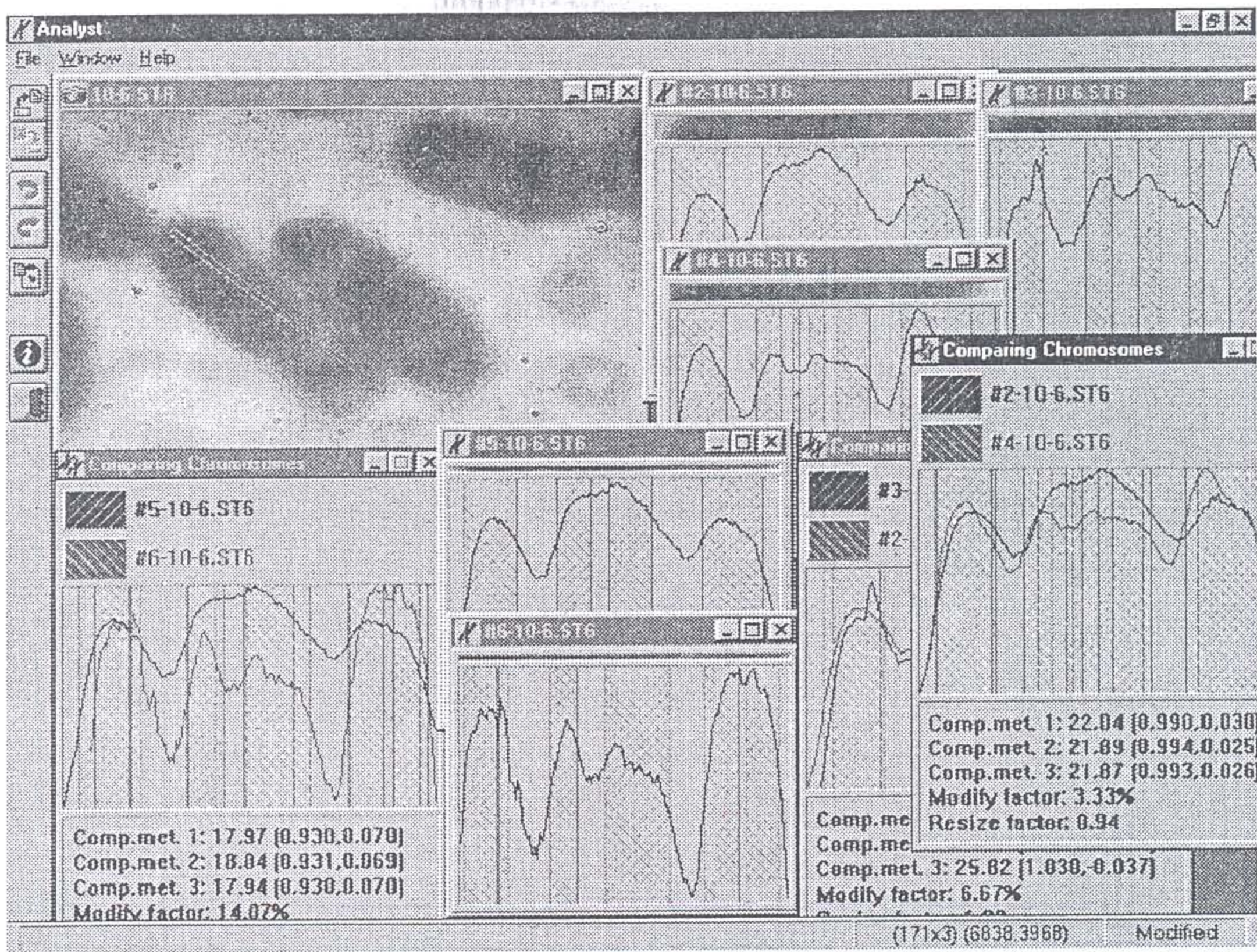
Slika 4.



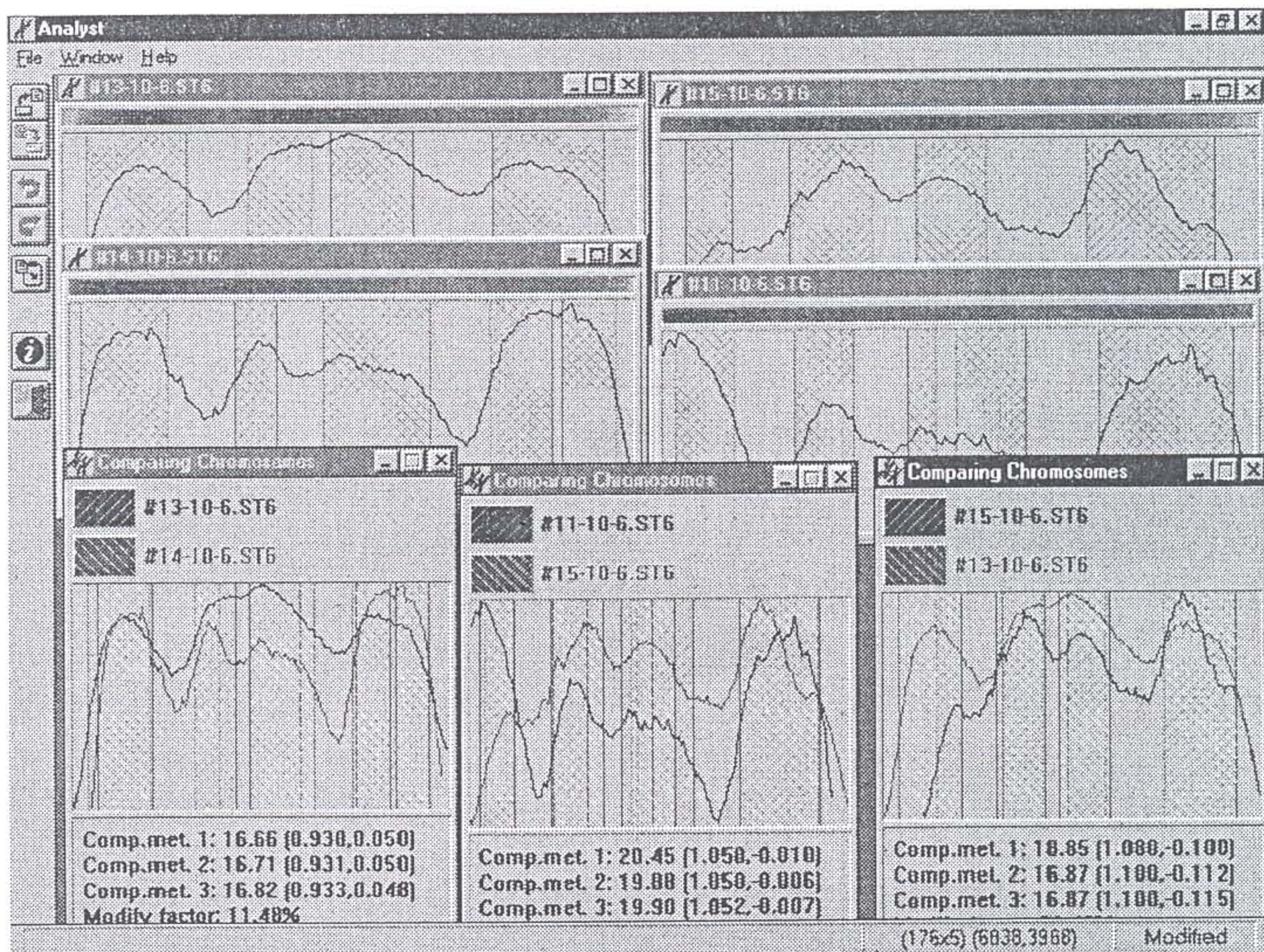
Slika 5.



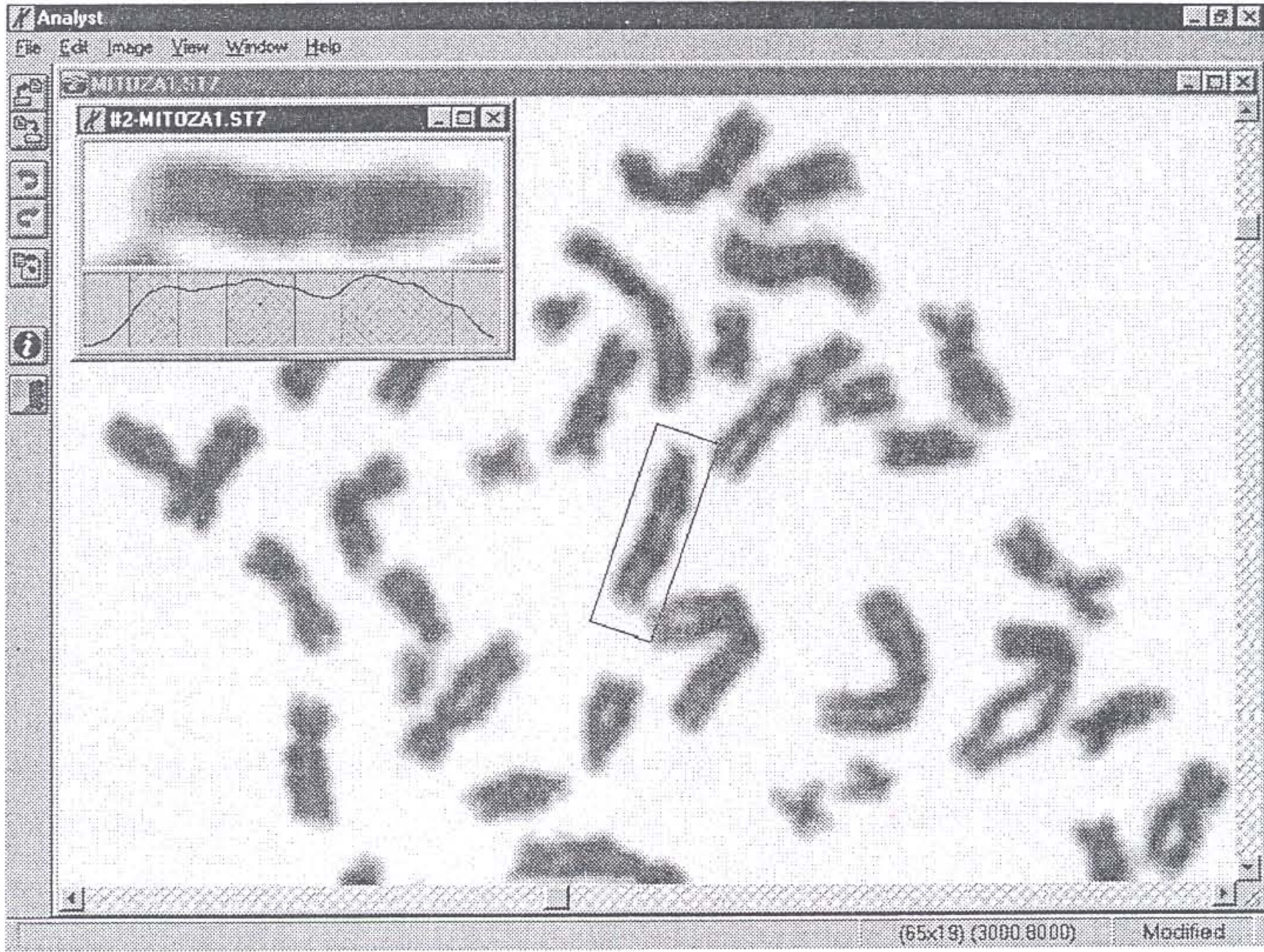
Slika 6.



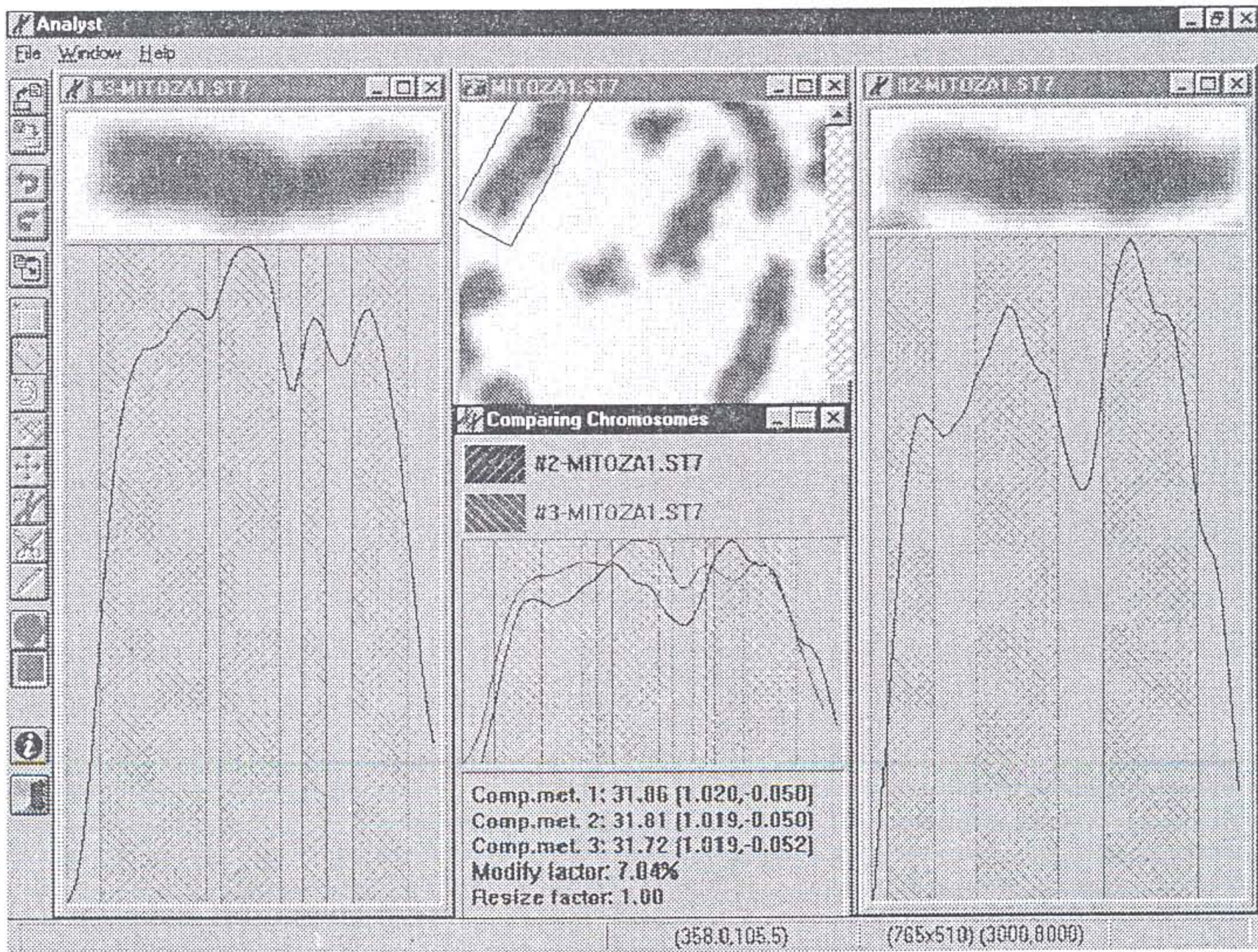
Slika 7.



Slika 8.



Slika 9.



Slika 10.

za neke $a > 0$ i $c \in R$. Očigledno, prethodno je uvek tačno jer su M_1 i M_2 konačni. Zato smo i upotrebili ε , jer gornja formula postaje interesantna za malo ε . Prethodno omogućava da u skup fotometrijskih reprezentacija $\mathcal{M} = \{M_i(x) \mid i \in I\}$ uvedemo aproksimaciju prirodne relacije ekvivalencije ρ : $\rho(M_i, M_j)$ akko važi (1).

Ako se u \mathcal{M} uključe etaloni (dobijeni npr. statistički na velikom uzorku), onda ρ "još više postaje relacija ekvivalencije". Umesto ρ stavimo ρ_ε . Za različite ε onda se dobija različita finoća relacije ρ . Označimo sa $E = \{M_{e_1}, \dots, M_{e_n}\}$ etalon. Neka je ε takav, da za članove etalona važi

$$\rho_{2\varepsilon}(M_{e_i}, M_{e_j}) = \neg\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

Onda dobijamo da se klase ekvivalencije centriraju na članovima etalona, čime dobijamo metričke kugle

$$K_{e_i}^\varepsilon = \{M_j \mid \rho_\varepsilon(M_{e_i}, M_j)\}, \quad \mathcal{K}_\varepsilon = \{K_{e_i}^\varepsilon \mid e_i \in E\}.$$

Neka je

$$R_\varepsilon = \mathcal{M} \setminus \bigcup_{e_i \in E} K_{e_i}^\varepsilon.$$

Znači, u R_ε su fotometrijski polinomi, koji za dati ε odudaraju od etalona (mutanti). Neka je $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Onda sistem kugli $\mathcal{K}_{\varepsilon_2}$ pokriva sistem kugli $\mathcal{K}_{\varepsilon_1}$ i

$$\mathcal{R}_{\varepsilon_1} = \mathcal{M} \setminus \bigcup \mathcal{K}_{\varepsilon_1} \supseteq \mathcal{M} \setminus \bigcup \mathcal{K}_{\varepsilon_2} = \mathcal{R}_{\varepsilon_2}.$$

U obradi slika hromozoma, nakon uzimanja reprezentativnih meridijanskih fotometrijskih preseka, treba prvo identifikovati hromozome po tipu, tj. klasifikaciji po grubljem ε da bi se potom, profinjenjem ε , detaljnije odredila struktura hromozoma u odnosu na etalon. Iz prethodnog, dva hromozoma su ε -ekvivalentna akko su ε -slični. U softveru za analizu hromozoma ANALYST, umesto fotometrijskih polinoma, određuju se karakteristične funkcije G traka, npr. funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$, pri čemu je jedna G -traka definisana prevojnima tačkama oko korespondentnog minimuma. Onda se definiše

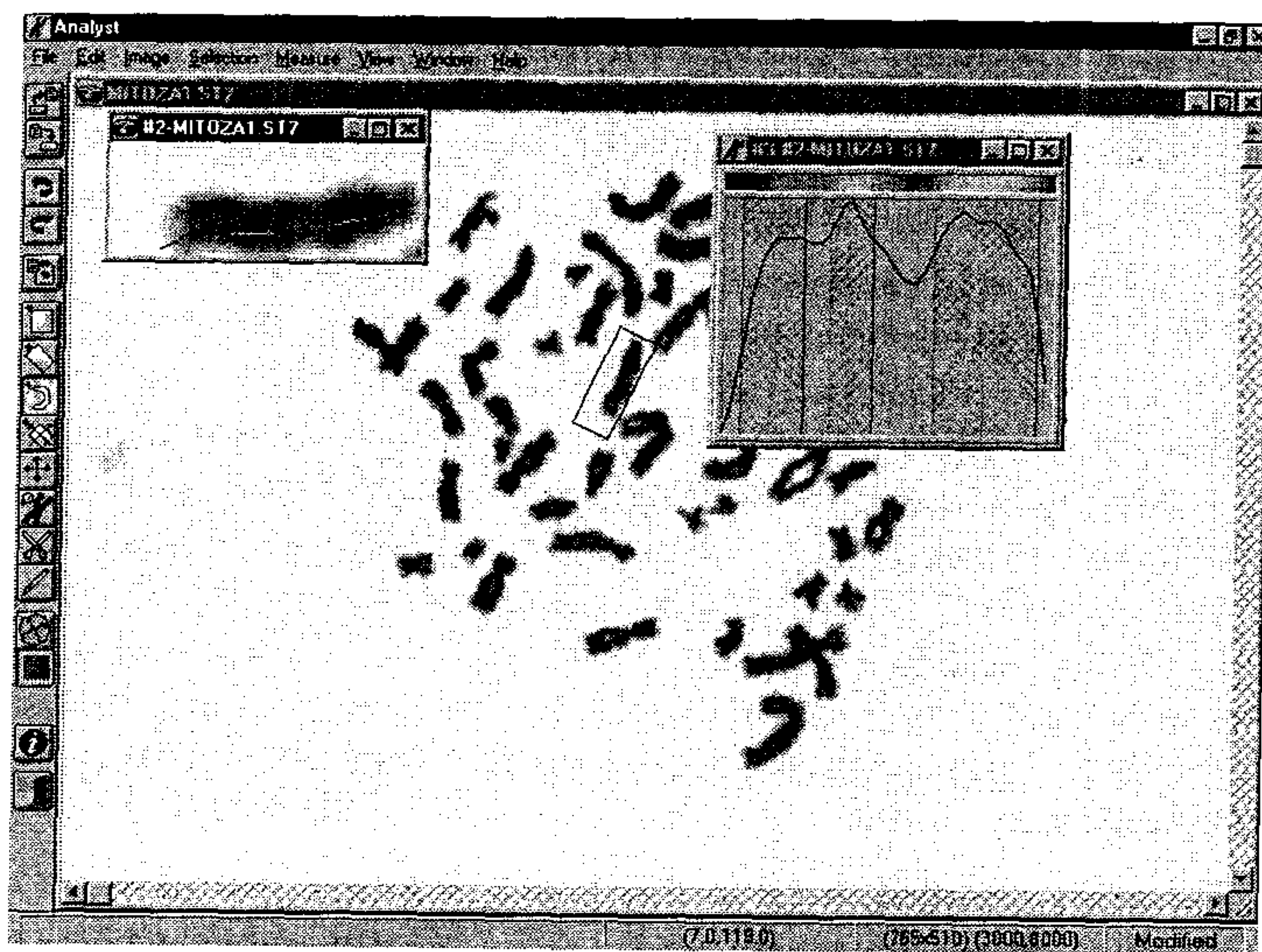
$$d_{A,B}(C_1, C_2) = \min_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \int_{x \in D} \left| C_1(bx) - C_2\left(\frac{x}{b} + a\right) \right| \frac{dx}{m(D)}$$

gde je $m(D)$ dužina od D , D domen reprezentanata hromozoma, što vrlo fino određuje funkciju rastojanja (različitosti) hromozoma, koja dopušta translaciju i istežanje (finoće $A \times B$). Slično kao i pre, ova definicija sličnosti se može primeniti na cele (dužine) hromozome, kao i na neke njihove delove.

U prethodnom razmatranju fotometrijski polinomi M_i , odnosno (iz M_i izvedena karakteristična funkcija) C_i se mogu uzeti statistički iz pojasa oko centralnog meridijana, čime se postiže bolje predstavljanje hromozoma. Na slikama 7. i 8. dati su primeri različitih isecanja meridijanskih pojaseva i njihovog poređenja za prikazane homologne hromozome. Funkcija sličnosti d je normirana i rezultati su izraženi za tri varijante ove funkcije u centima. Ako je $d(C_1, C_2) \leq 0.2$, ispitivani hromozomi su isti (ekvivalentni). Za $d(C_1, C_2) \in (0.2, 0.3)$ ispitivanje treba profiniti, odnosno uključiti razmatranje istežanja. Ako je $d(C_1, C_2) \in (0.3, 1]$, upoređivani hromozomi su različiti. Prethodna skala je eksperimentalno utvrđena ispitivanjem većeg uzorka hromozoma.

Situacija u praksi je može biti dosta složenija. Po pravilu, ispitivani hromozomi su često krivi (slike 9. i 10). Za poređenje po celoj dužini, prethodno opisani metod gubi na kvalitetu i zahteva dopune. Umesto ravnog meridijanskog merenja moguće je ručno postavljanje izlomljene linije (slika 11), koja prati krivinu hromozoma, čime je definisana krivina meridijanskog pojasa, na koju se dodaje širina isecanja. Rektifikacijom ovog pojasa dobija se ravan isečak, koji je merodavniji za ispitivanje. "Subjektivnost" izbora krivog meridijana, kao i pojava viška uskih traka, vezanih za lomljenja, u nekoj meri ograničavaju preciznost ove metode.

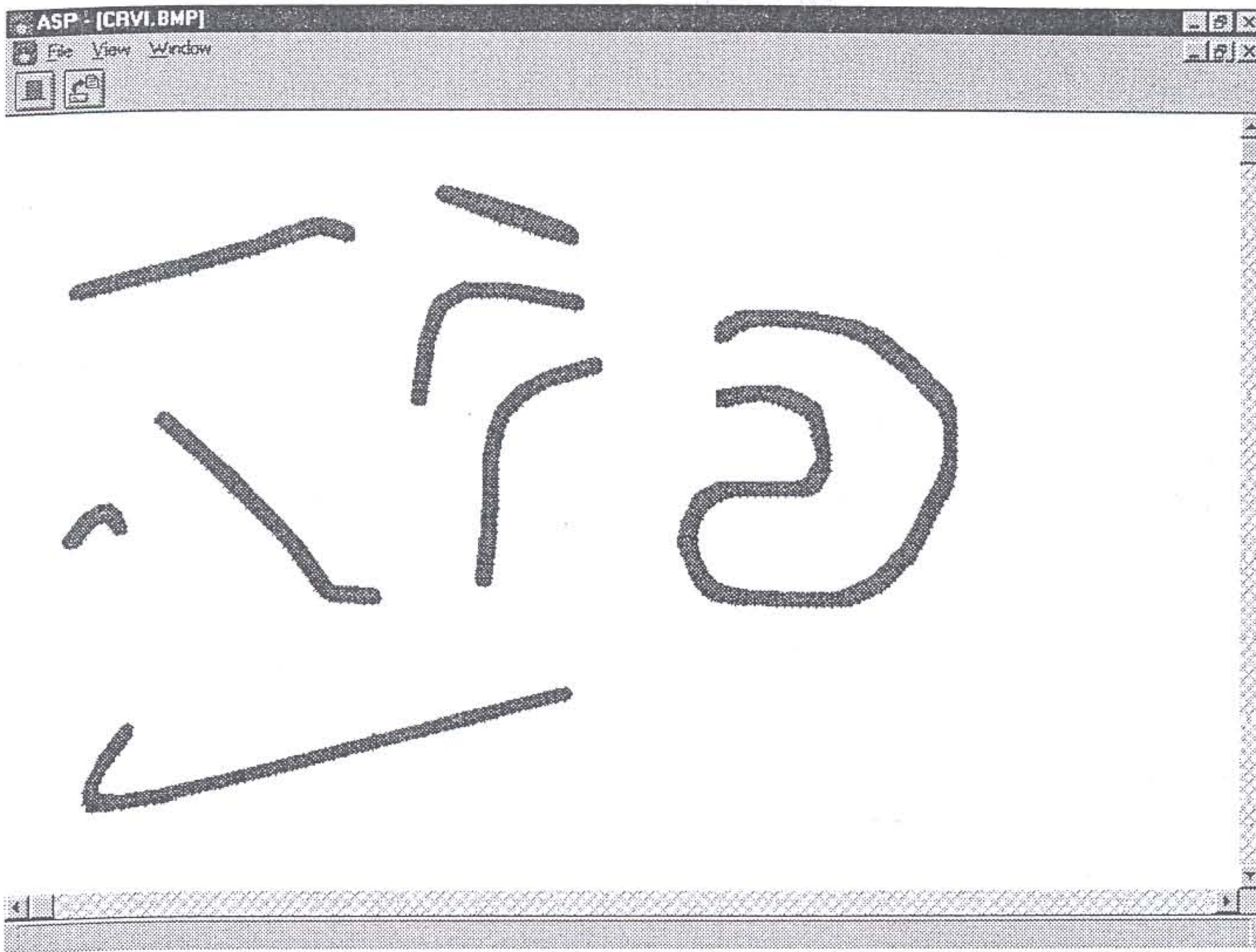
Prethodno ukazuje na neophodnost automatizovanog, stabilnog, finog određivanja krivine meridijana i rektifikacije hromozoma. Za rešavanje ovog zadatka potrebno je automatizovano određivanje konture objekta (ovde hromozoma). Razuman kontrast između objekta i okoline neophodan je da bi prethodno bilo moguće. Opisani zadaci spadaju u teže rešive u opštem slučaju, između ostalog i zbog što se dešava da svetla traka na hromozomu bude po intenzitetu slična sa okolinom. Na sledećim slikama prikazano je delovanje algoritma za određivanje kontura na prethodnu mitozu, kao i još neusavršenog algoritma za definiciju centralnog meridijana (kičme) i rebara hromozoma.



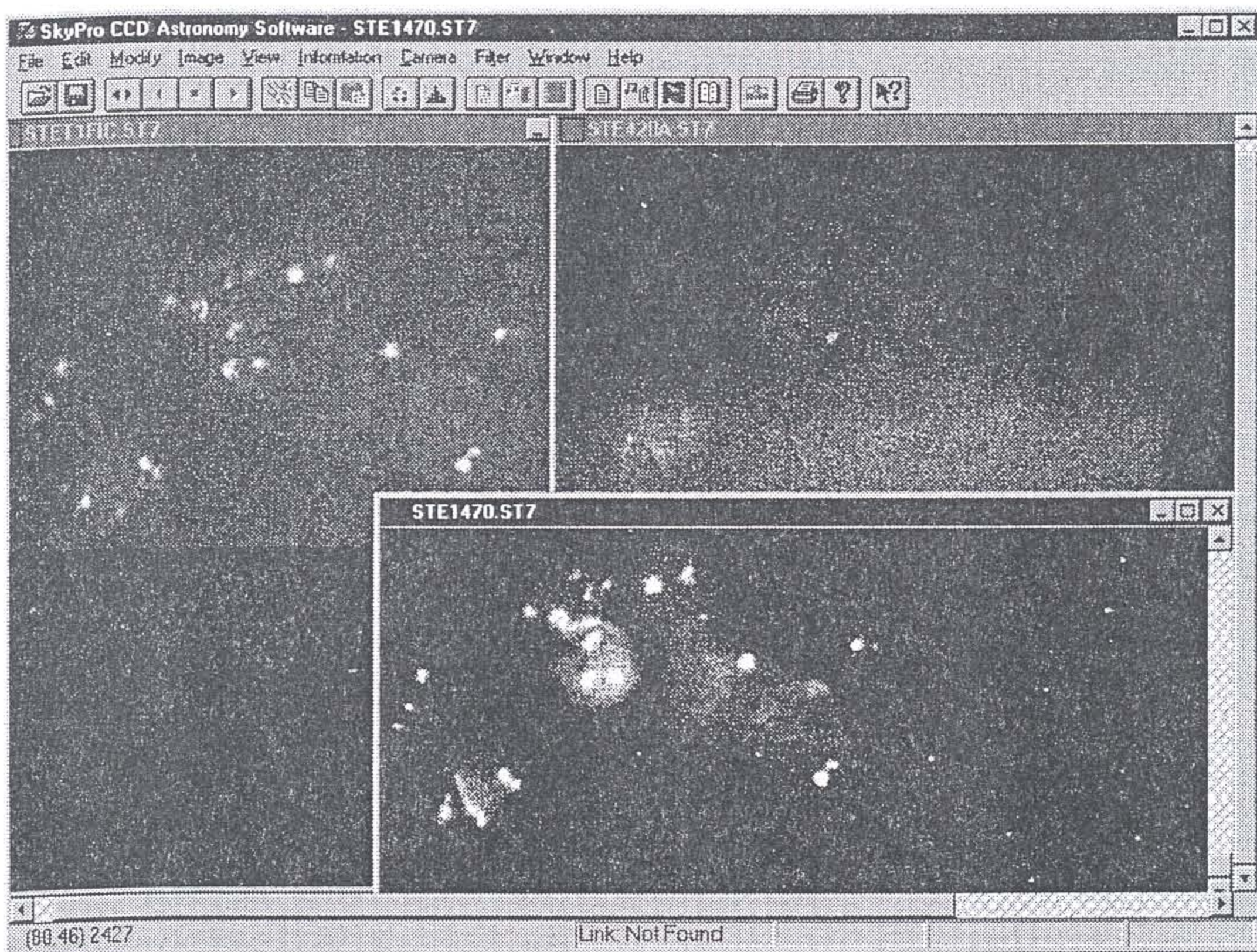
Slika 11.



Slika 12.



Slika 13.



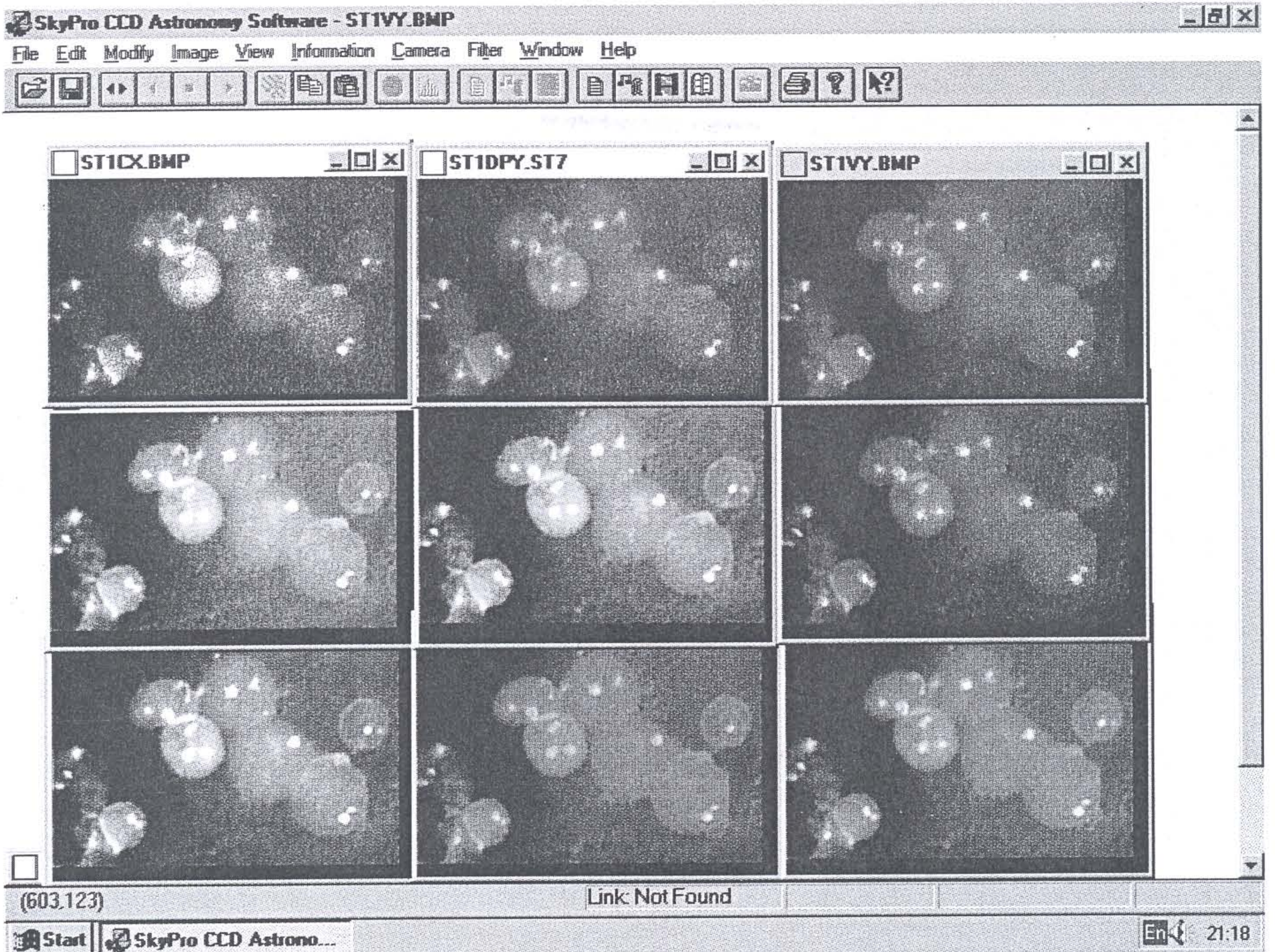
Slika 14.

Usavršavanje ovih algoritama uz ručno isecanje hromozoma u kontaktu, odnosno dogradnju algoritma za rasklapanje, teži visoko automatizovanom sistemu za analizu hromozoma, koji se dalje može dograđivati automatskim komparatorima sa više nivoa etalona, što bi bila kvalitetna osnova za budući inteligentni analizator hromozoma. Uključivanje 3D strukture u razmatranje, tj. cele fotomorfološke površi, polinoma od dva argumenta, dosta je komplikovanije od prethodnog metoda, koji je praktično realizovan, ali je izvodljivo i desiće se.

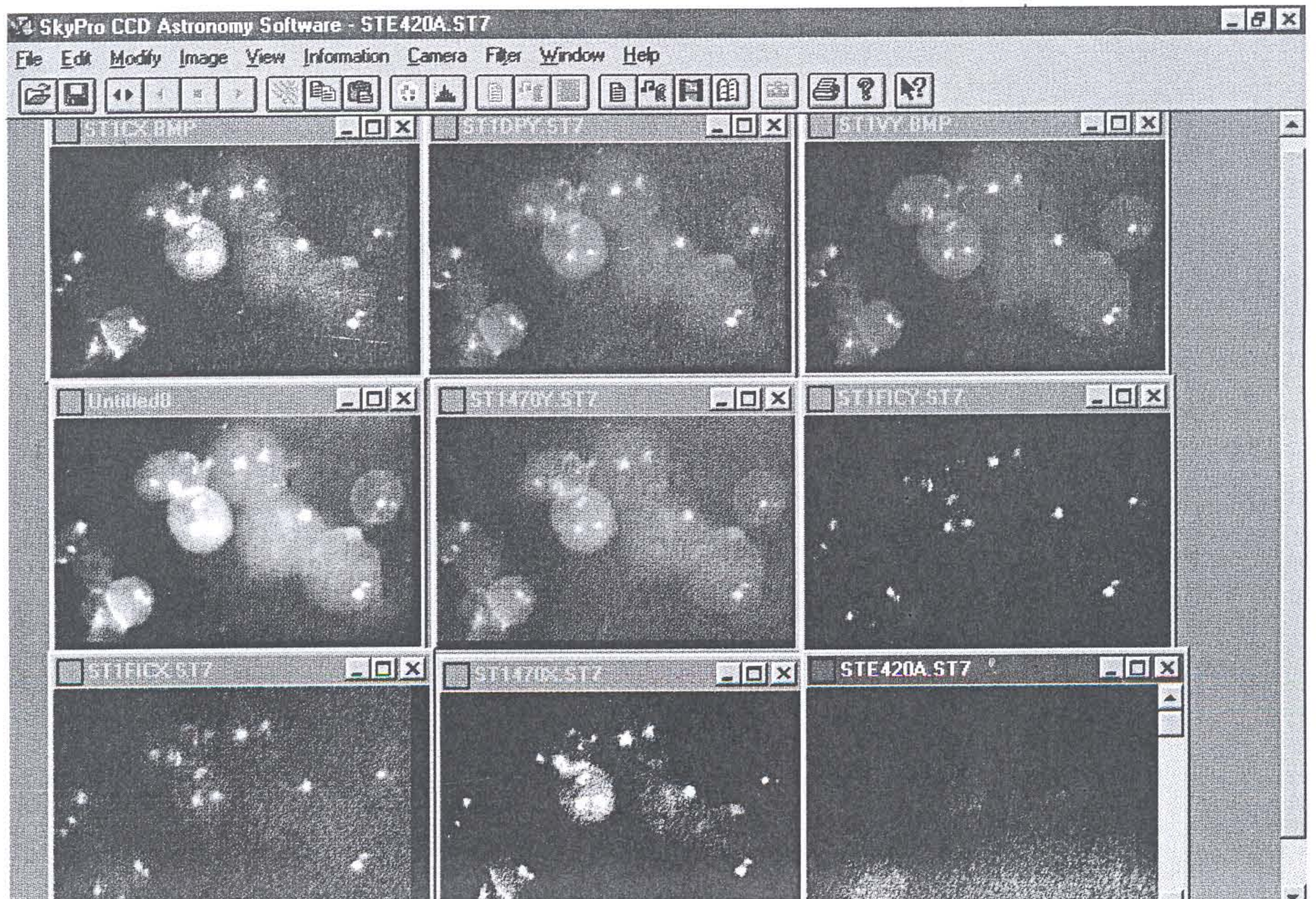
Izloženi primer analize hromozoma sadrži komponente – postupke, korisne i u drugim mikroskopskim ispitivanjima. Definicija objekta – konture, određivanje geodezije (delova) fotomorfološke strukture, klasifikacija objekta, funkcije sličnosti i rastojanja, definicije etalona su korisni i u drugim zadacima u mikroskopiji.

9.3 Kompoziti

Preparati, dobijeni fluorescentnom *in situ* hibridizacijom – FISH, koja se koristi za markiranje gena, nevidljivi su pod običnim svetlom. Osvetljeni UV svetlom na nekim talasnim dužinama prikazuju genske markere u jedrima ili hromozomima. Prisustvo, odsustvo, broj, kao i fotomorfološka svojstva markera, povezuju se sa određenim naslednim obolenjima i malignitetima. Talasne dužine svetla na kojima se markeri najbolje vide, razlikuju se od talasnih dužina, na kojima se najbolje uočavaju konture jedara i hromozoma. Takođe, upotreba filtera obezbeđuje bolje posebno isticanje markera i jedara – hromozoma. Finijim – slabijim markerima obezbeđuje se kvalitetnija izdiferenciranost ispitivanih fenomena. Zbog toga fotoaparati na mikroskopima omogućavaju ponovljene ekspozicije. Put od eksponiranog filma do kolor fotografije traje, intervencije na filmu koji je razvijen su otežane ili nemoguće. Monohromatskom CCD kamerom mogu se postići izvesna poboljšanja kvaliteta u odnosu na klasični foto rad i u ovom slučaju, što ilustrujemo sledećim primerom. FISH preparati su snimljeni (monohromatskom) CCD kamerom u tri talasne dužine, 420nm, 470nm i 590nm, što je prikazano na slici 14. Snimak na 420nm je praktično neupotrebljiv jer sadrži više šuma nego korisnih informacija. Ove ekspozicije prikazane su i u donjem redu slike 15. U redu iznad vidi se inicijalna elementarna obrada pojedinačnih snimaka, prikazanih istim redom, osim desnog snimka koji je dobijen iz levog umanjenjem osvetljenosti. U dobijanju prikazanih snimaka u srednjem redu upotrebljena je još operacija centriranja. Na polaznim



Slika 15.



snimcima sa slike 14. može se primetiti da jedan svetli objekt (npr. svetla tačka najbliža donjem levom uglu) ima različite koordinate na različitim snimcima. Slično važi i za ostale objekte. Da bi mešanje u kolor imalo smisla, neophodno je transformisati koordinate uočene tačke tako, da postanu iste na svim snimcima, zbog čega je neophodno isecanje jednakih delova slike na različitim pozicijama pomenute dve slike. Prethodnim postupcima omogućeno je mešanje u kompozitne kolor slike, za čije se komponente, crvenu, zelenu i plavu, koriste slike iz srednjeg reda slike 15.

Označimo sa A , B , C matrice tipa 750×510 sa slike 14. Matrice A' i C' su podmatrice matrice A dok je matrica B' podmatrica matrice B . Tipovi matrica A' , B' i C' se poklapaju, $m \times n$, $m < 750$, $n < 510$. Elementi A' i C' dobijeni su transformacijom

$$c'_{ij} = a'_{ij} = a_{i-p, j-q},$$

dok je

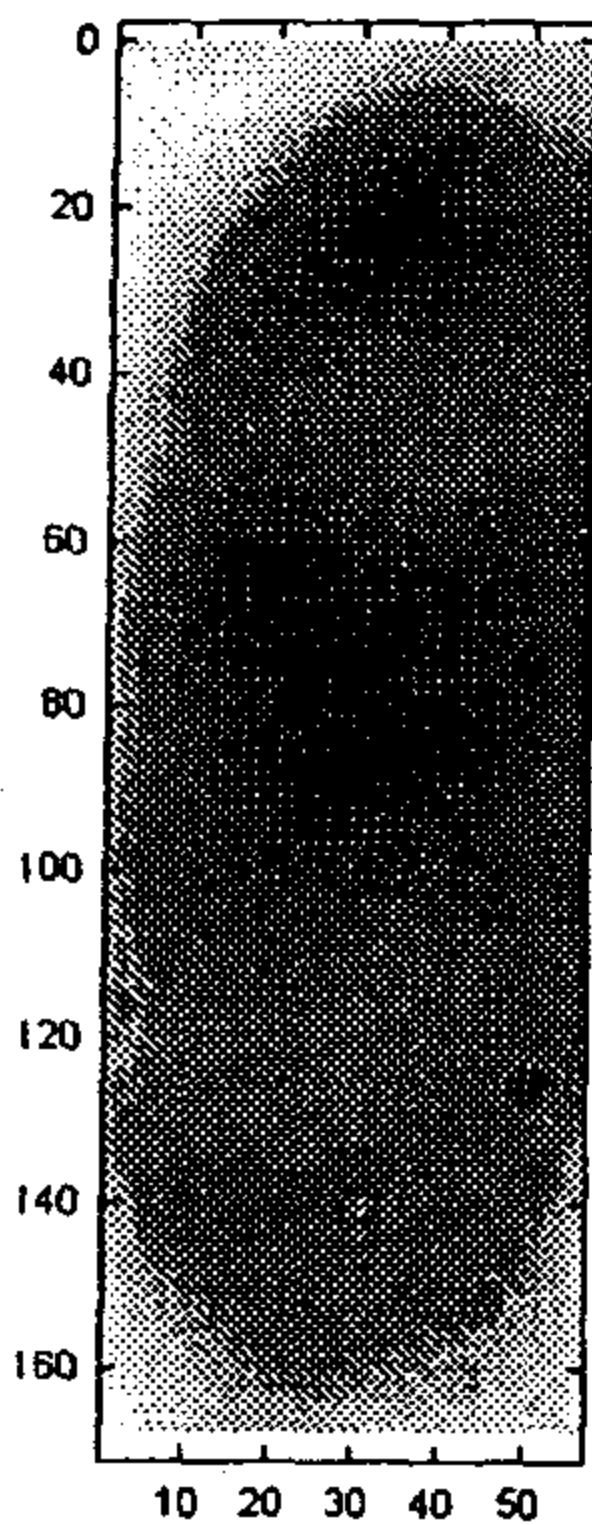
$$b'_{ij} = b_{i-p', j-q'},$$

tako da su koordinate pomenute svetle tačke iste u matricama A' i B' . Na matrice A' , B' i C' je primenjen postupak slabog lokalno-statističkog ujednačenja i podešavanje osvetljenosti dodavanjem-oduzimanjem matrica oblika λH gde je $h_{ij} = 1$ za $i \leq m$, $j \leq n$, čime su dobijene matrice A'' , B'' , C'' (srednji red slike 15). Gornji red slike 15. i slike na slici 16. su oblika

$$(k_1 R, k_2 G, k_3 B),$$

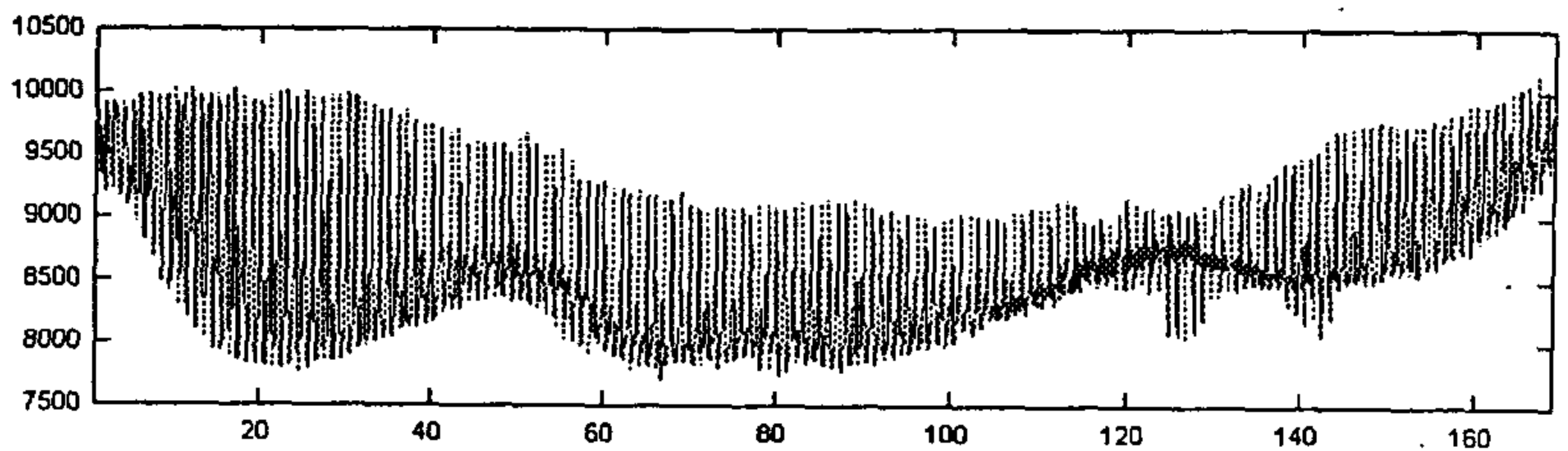
gde su $R, G, B \in \{A'', B'', C''\}$ različiti. Različitim izborom R , G , B i promenom parametara k_1 , k_2 , k_3 dobijaju se različita kompozitna bojenja sa mogućnostima promena i podešavanja koje fotografija ne dopušta. Za očekivati je da će se dogradnjom prikazanih načina obezbediti uvid i u detalje, koji su vizuelno i fotografski potpuno nedostupni.

9.4 Spektroskopija slika

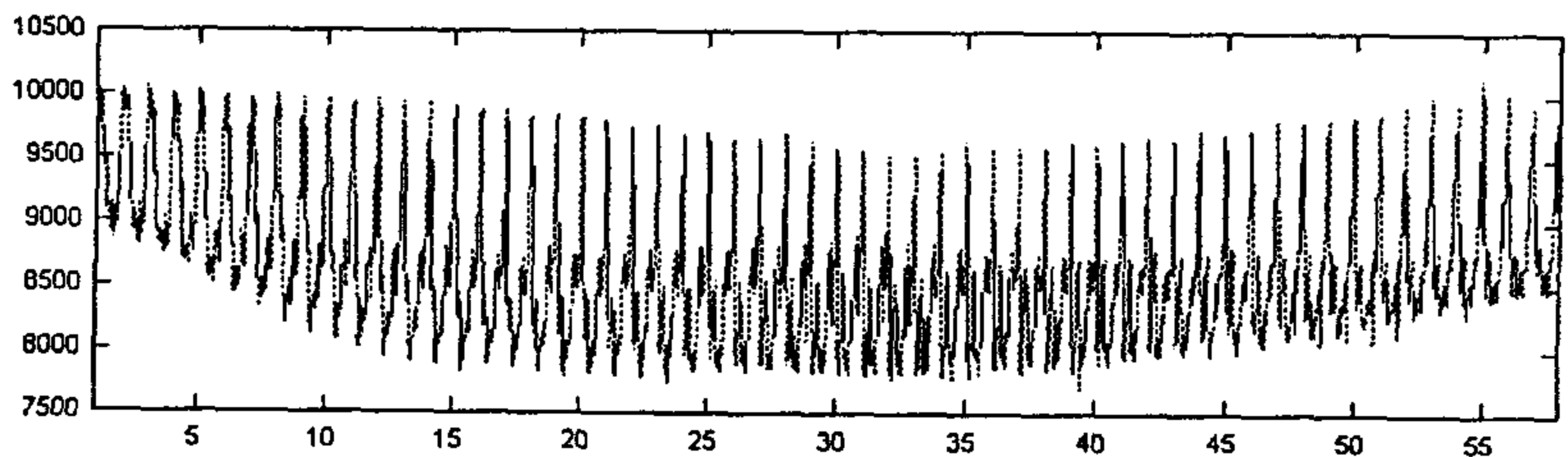


Slika 17.

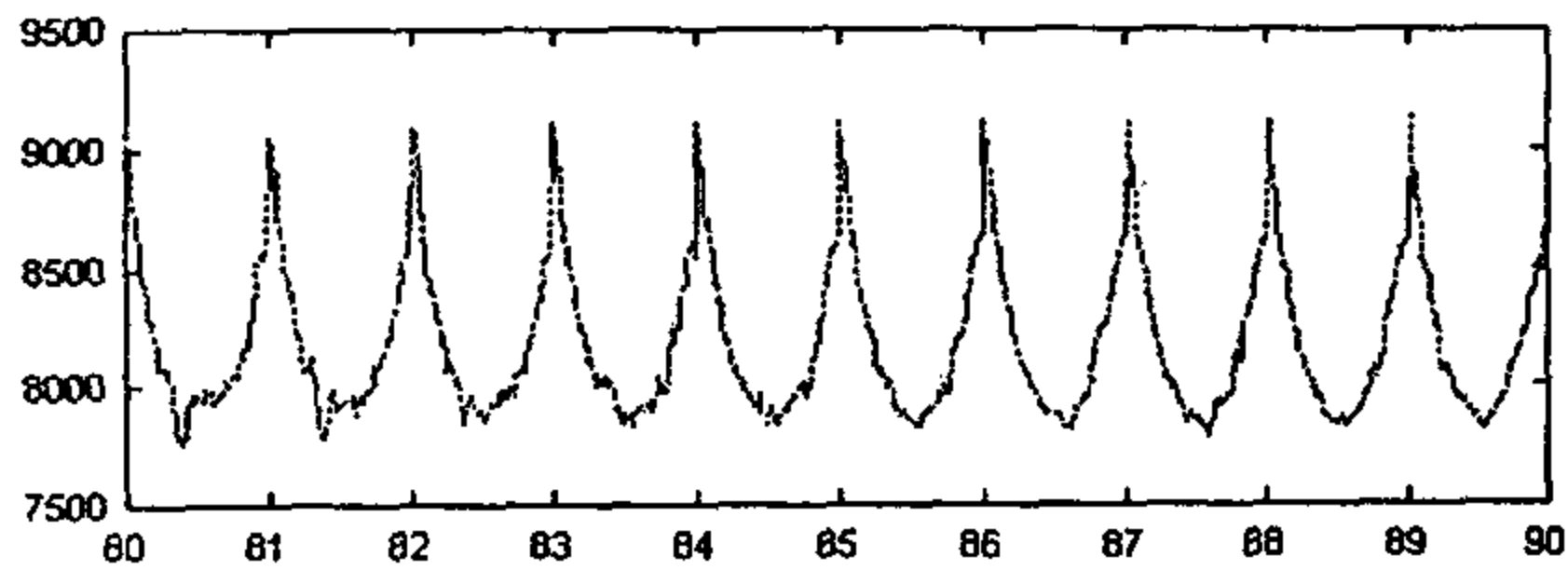
Sečenjem matrice-slike po susednim vrstama, dobijaju se susedni fotometrijski preseki koji su vrlo slični. Ako matricu-sliku $F_{m \times n}$ isečemo u vrste, koje nadovezujemo (npr. u desno), dobijamo funkciju od m segmenata sa $m \cdot n$ tačaka, koja je “visoko”, “lokalno” periodična, što znači da su susedni segmenti vrlo slični. Na sličan način sečenjem po kolonama dobijamo funkciju iste dužine ($m \cdot n$), u kojoj se izdvajaju segmenti dužine m , susedni vrlo slični, pa je i ova funkcija visoko lokalno periodična. Prethodno je ilustrovano slikom hromozoma (slika 17), horizontalnim i vertikalnim isecanjima slike 17. na opisani način, slike 18. i 19, čiji su uvećani segmenti prikazani na slici 20. (vrste) i slici 21. (kolone).



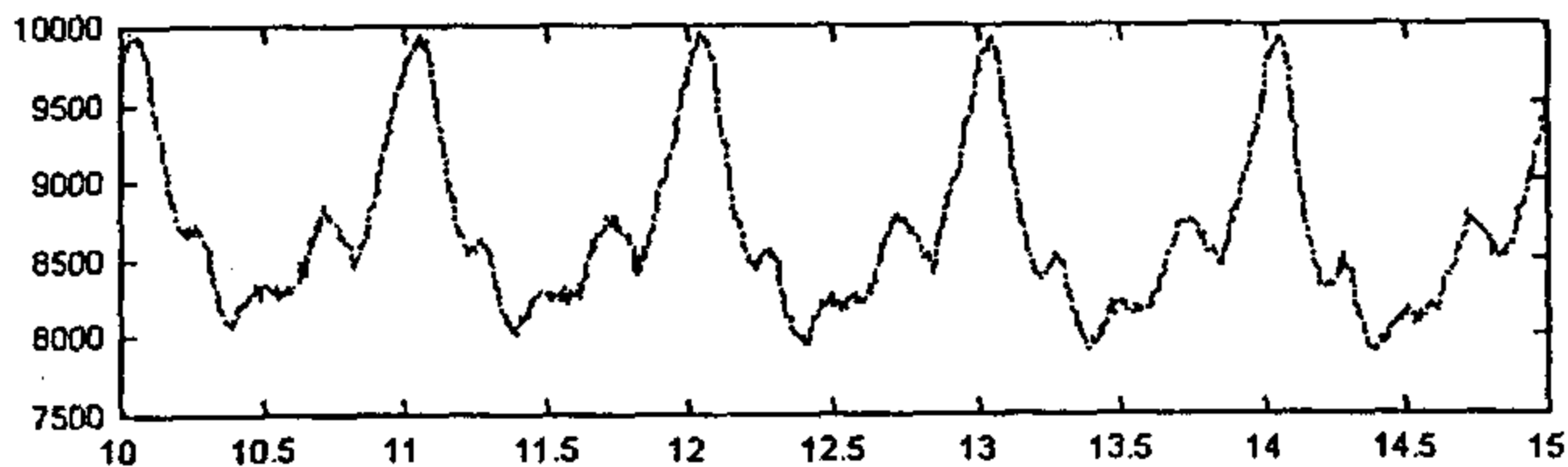
Slika 18.



Slika 19.



Slika 20.

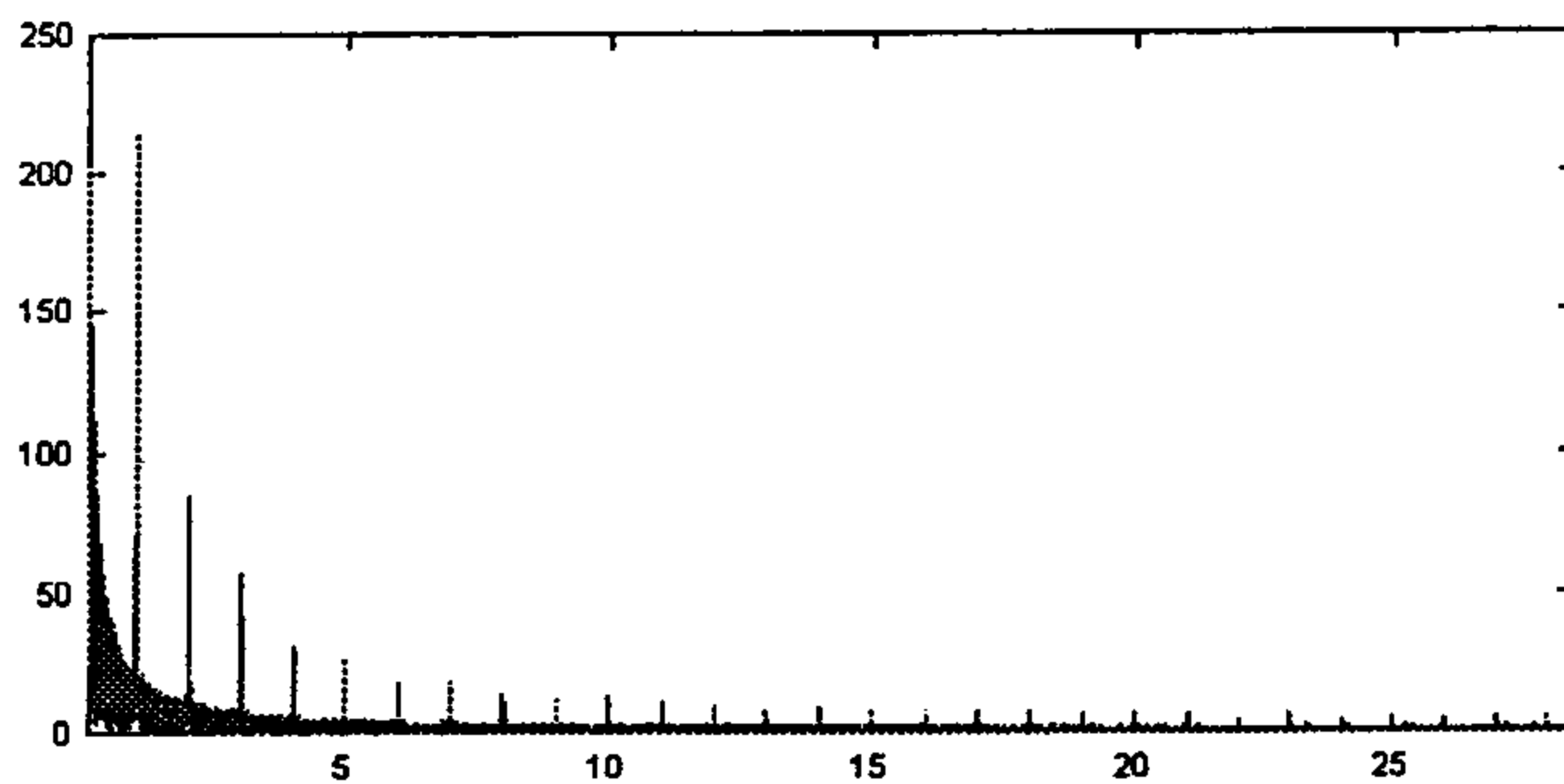


Slika 21.

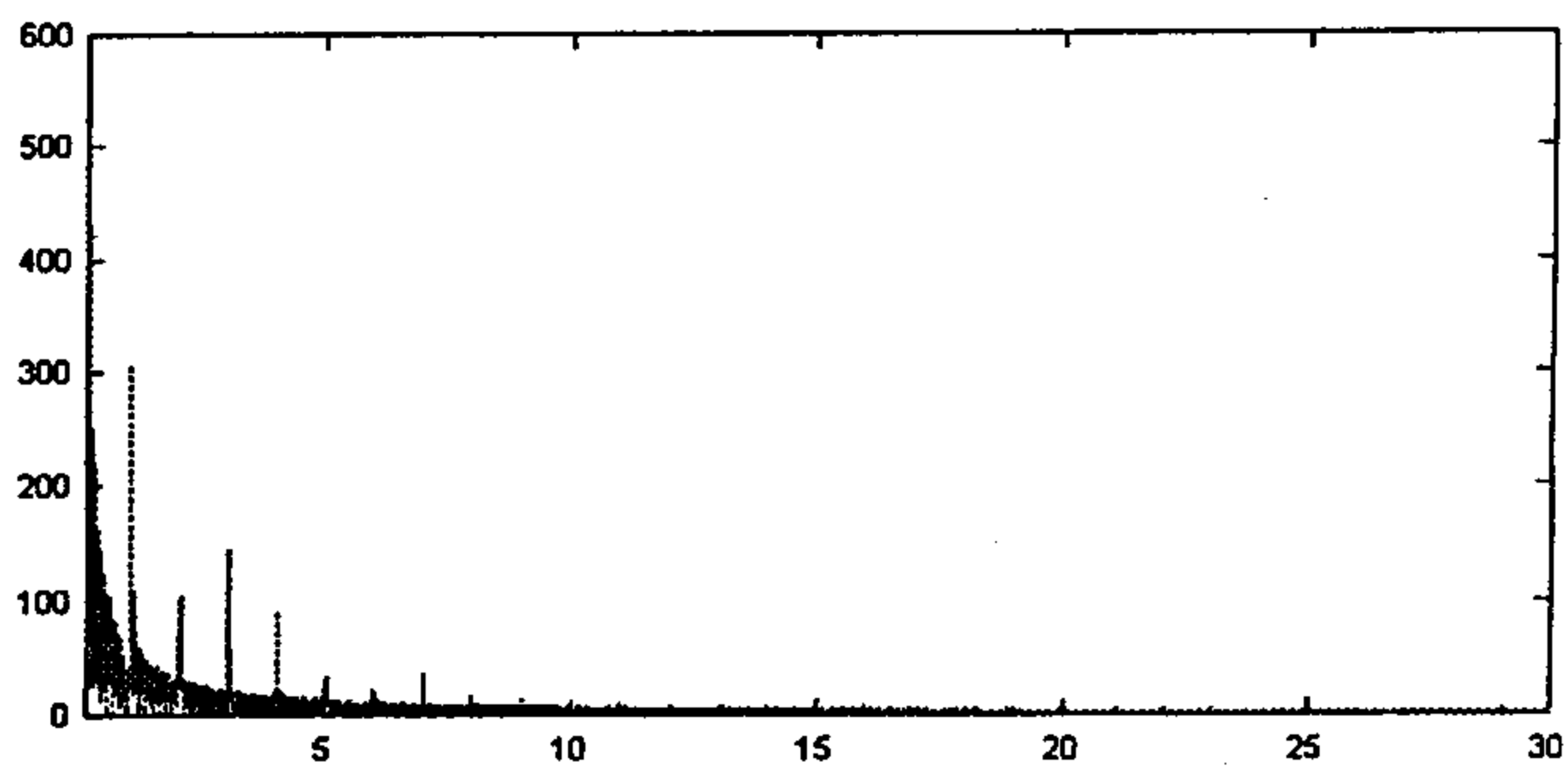
Funkcije ovih svojstava su posebno podobne za spektroskopiju. Za očekivati je da lokalna periodičnost pojavi u spektru, kao i da se u spektru izdvoje nosioci kako lokalnih tako i globalnih svojstava slike.

Da bismo na konvertovane signale slike primenili brzu Furijeovu transformaciju, potrebna je neka definicija brzine smplovanja-SR, koja nema originalni smisao. Za sečenje slike po vrstama, za SR uzimamo dužinu vrste. Za sečenje slike po kolonama, za SR uzimamo dužinu kolone. Primenom *FFT* na signale slike dobijene na prethodni način, dobijaju se spektri ovih signala, slike 22. i 23. Na ovim spektrima obavljena je sledeća procedura filtriranja (čišćenja frekvencija): intervali između celobrojnih frekvencija kojima odgovaraju izražene linije (slike 24. i 25), preciznije intervali oblika $(i + \varepsilon, i + 1 - \varepsilon)$ za $\varepsilon > 0$ i $i > 1$ se anuliraju. Rezultat su spektri koji se sa polaznim spektrima poklapaju na početnom komadu, $(0, 2 + \varepsilon)$ i u ε okolini celobrojnih frekvencija, a na ostatku (domena) imaju vrednost 0.

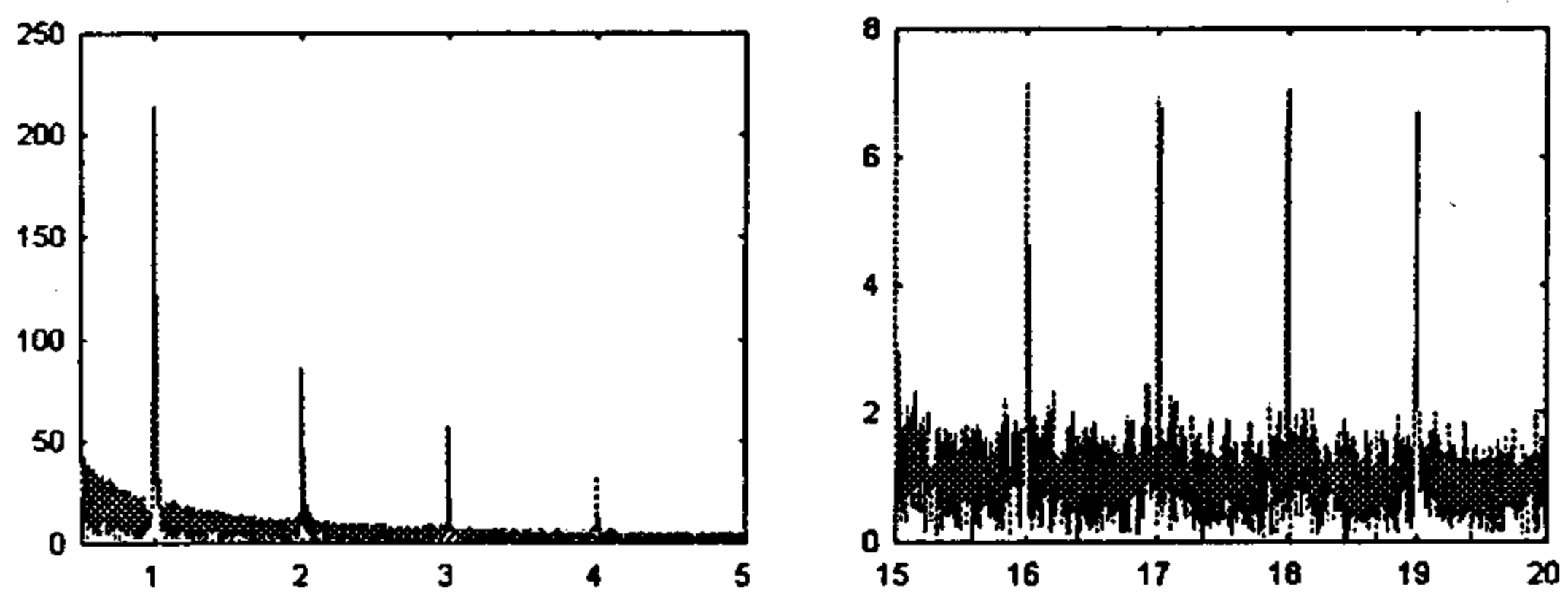
Inverznom Furijeovom transformacijom od transformisanih spektara dobijaju se dve funkcije, filtrirane polazne, koje vraćamo u matrice na isti način na koji su obavljena sečenja polazne slike. Linearnom kombinacijom ovih matrica ili pokoordinatnim množenjem, dobija se filtrirana polazna slika.



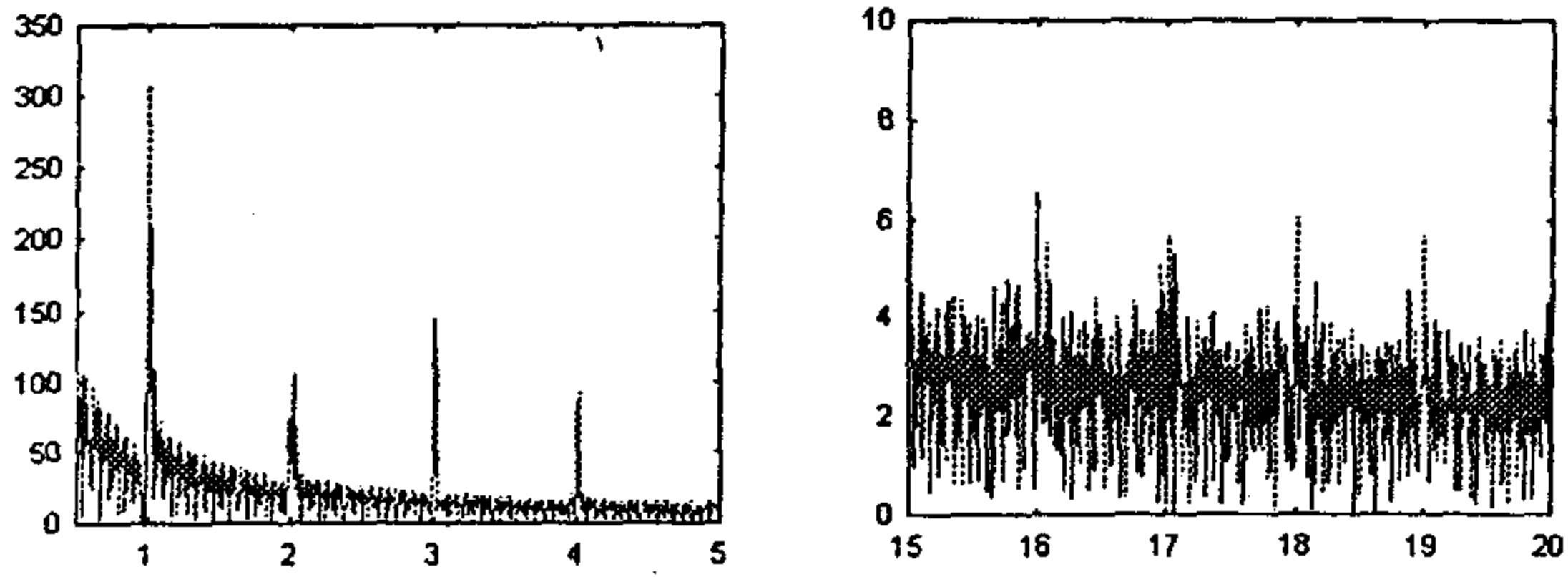
Slika 22.



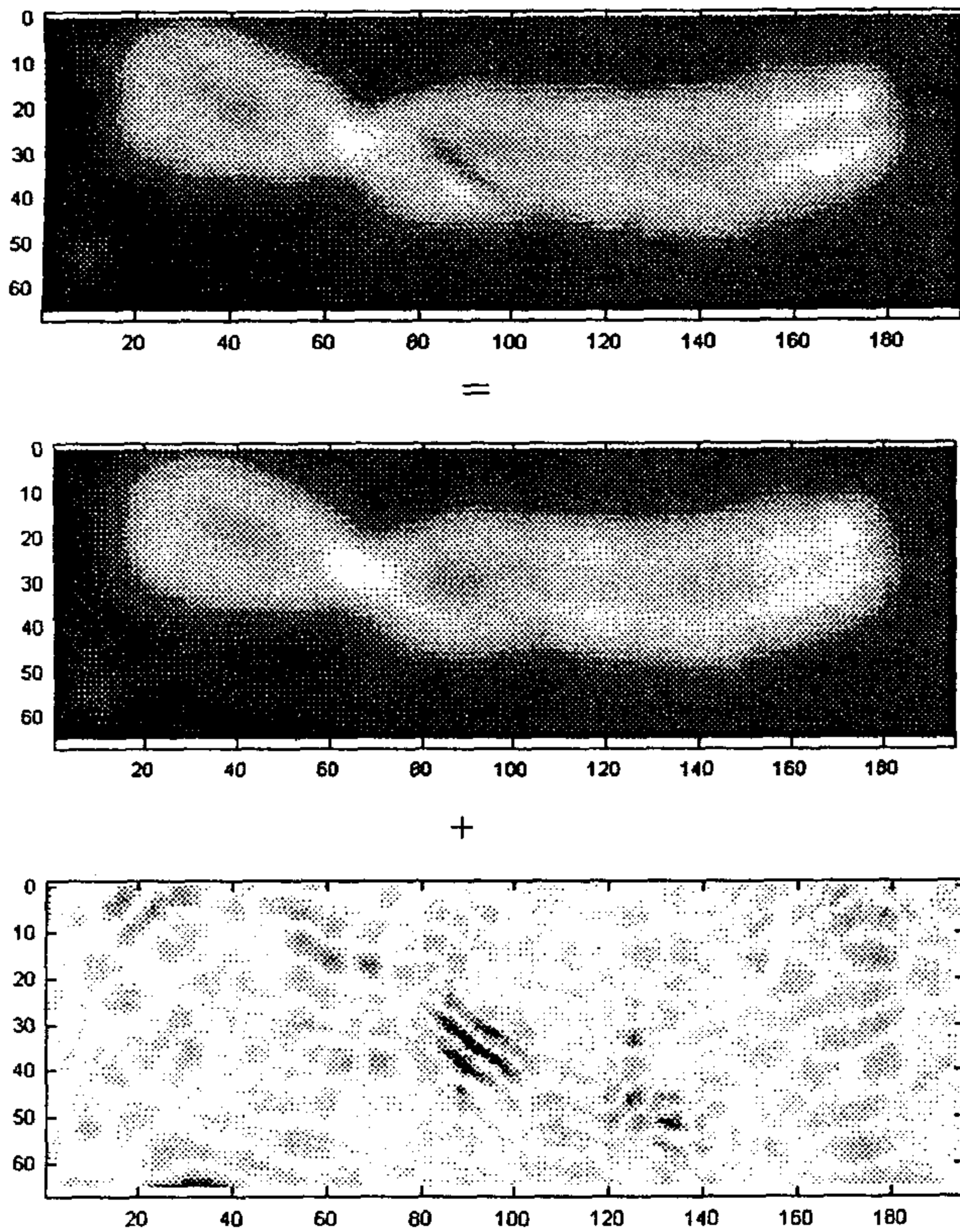
Slika 23.



Slika 24.



Slika 25.



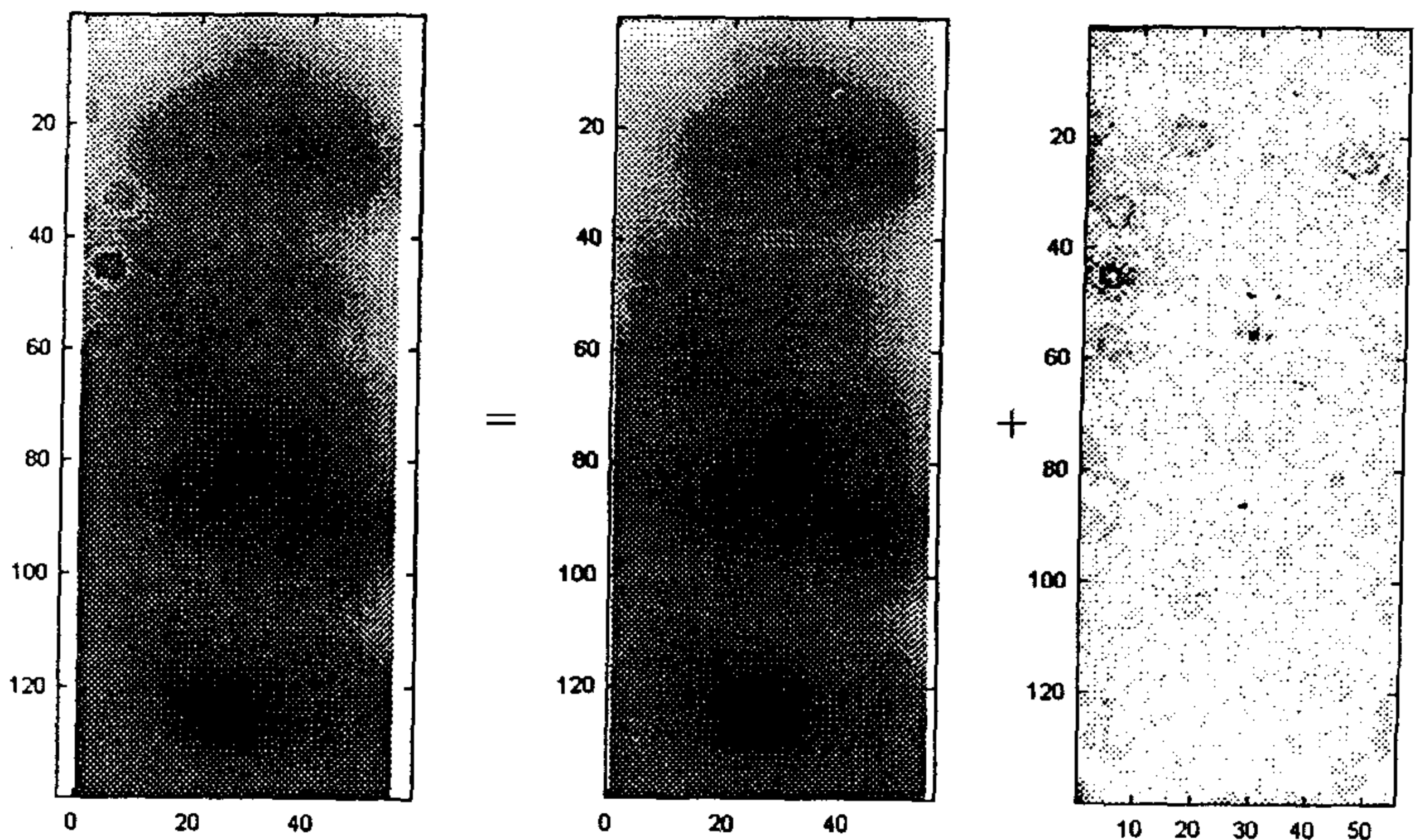
Slika 26.

Na slici 26. (gore) prikazana je originalna slika F , rastavljena na opisan način na zbir slika na donjoj strani jednakosti,

$$F = F^T + F^C,$$

pri čemu je F^T filtrirana slika, dok je F^C dobijena kao razlika polazne i filtrirane slike. Na polaznoj slici F (uvećani segment hromozoma), prisutan je šûm – mehurići u imerzionom ulju.

Možemo konstatovati da su na polaznoj slici prisutne dve vrste formacija, difuzne sive konture polaznog hromozomskog materijala i artefakta indukovanih mehurićima i organizovanih u grupe koncentričnih krugova. Dakle, može se reći da su u F prisutni objekti sa difuznim konturama kao i oštrokonturni objekti. Prikazana spektroskopska transformacija omogućila je razdvajanje ove dve klase objekata smeštanjem u različite slike. Konture difuznih objekata su neznatno izgubile na oštrini. Takođe, u slici F^T od cirkularnih formacija zaostao je samo još po neki jedva vidljivi trag.



Slika 27.

Dekompozicija slike prethodno opisanom metodom prikazana je i na slikama 27, 28. i 29, poštujući redosled u jednačini $F = F^T + F^C$.

Na slici 26. iz (negativa) slike hromozoma izdvojene su kose formacije (artefakt). Na slikama 27. i 28. artefakti sličnog porekla, kao na slici 26, nalaze se na raznim delovima hromozoma, koji su prilično tamni.

U svim primerima ostvarena je visoka separabilnost dve vrste objekata. Prema prethodnom,

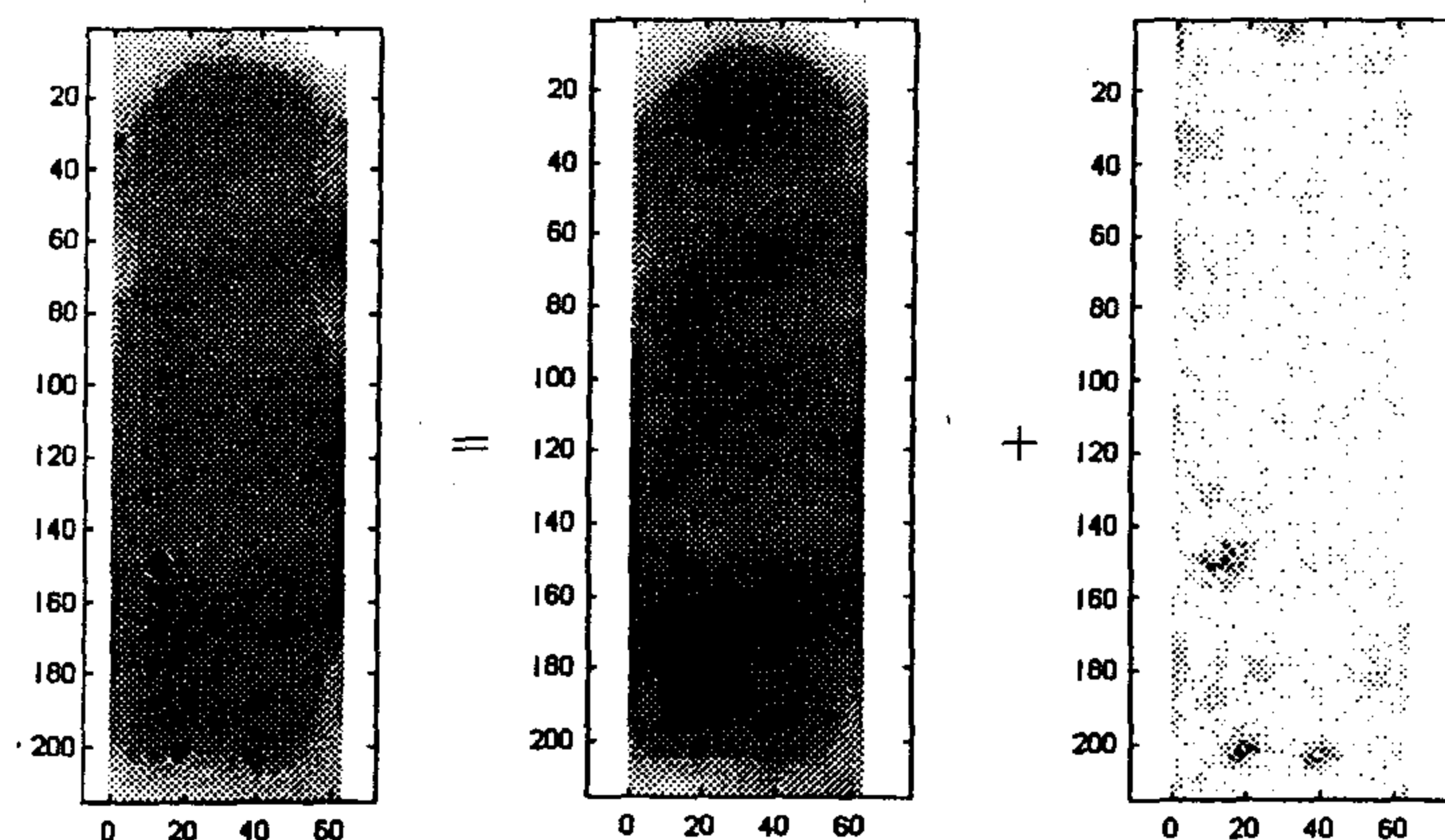
$$F^T = g(F) = k_1 f_\varepsilon^V(F) + k_2 f_\varepsilon^k(F),$$

gde je f_ε^V -transformacija slike u oba pravca po vrstama, ε kao u prethodnom tekstu, f_ε^k transformacija po kolonama, k_1 i k_2 skalari; možemo pisati

$$F^T = g(\varepsilon, k_1, k_2, F),$$

gde su ε , k_1 i k_2 podesivi parametri.

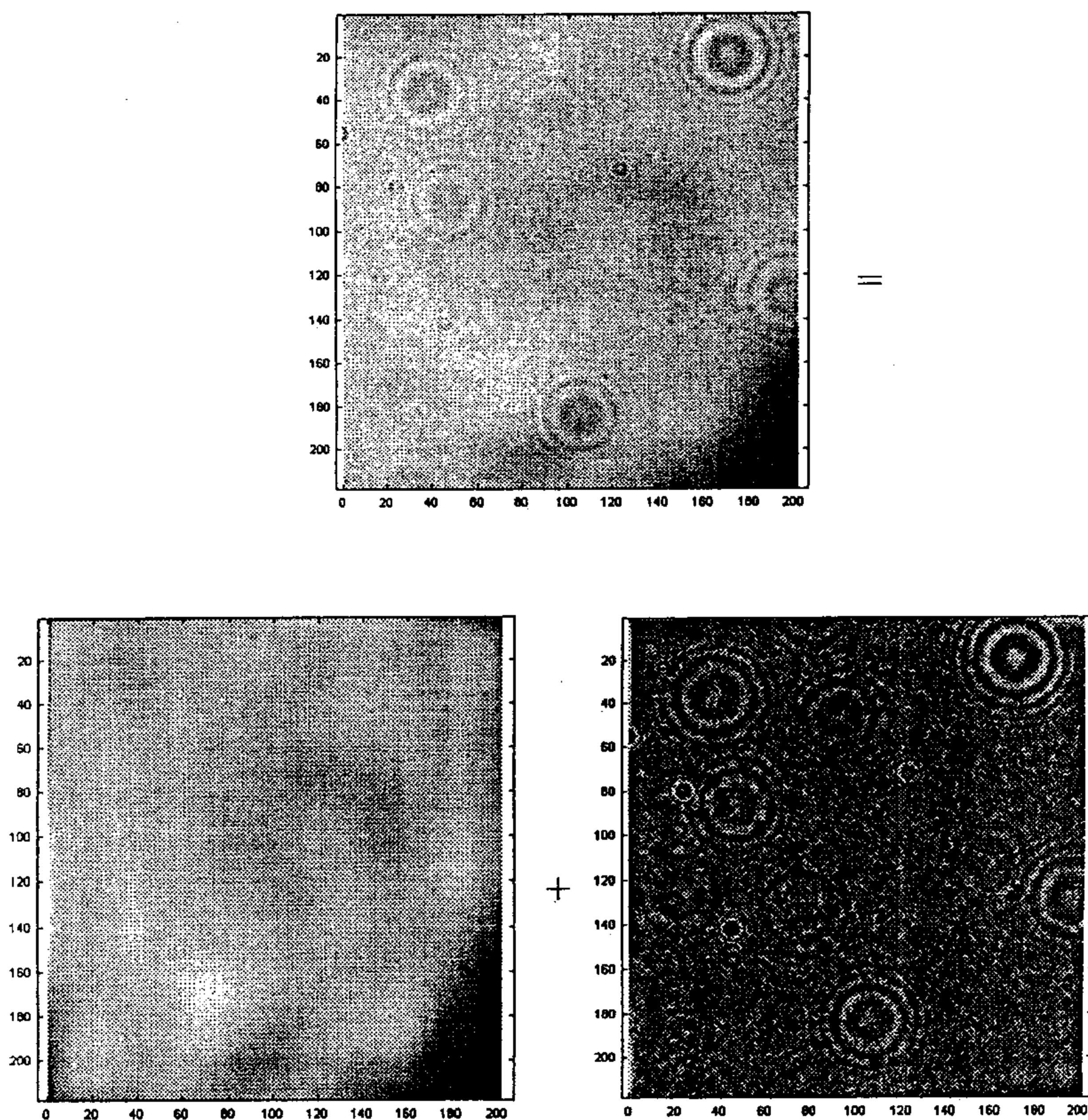
Prethodni metod ugrađen u softver sa parametrima ε , k_1 i k_2 , podesivim u realnom vremenu, predstavlja fotolaboratoriju sa dodatnim mogućnostima.



Slika 28.

Primeri sa slika 26, 27, 28. i 29. ilustruju ekstrakciju artefakata uz "mikrohiruršku plastiku", operisanih mesta, pri čemu je poželjno da se izbegnu oštećenja struktura na mestima intervencije. Pristup je takođe upotrebljiv za izdvajanje mikrostrukturnih elemenata, npr. markera, kao i za druge namene. Pristup je više alhemijski nego analitički. Podešavanjem

parametara ε , k_1 i k_2 , ostvaruju se neke želje na slikama, a ne analizom analitičkog oblika funkcija i Furijeovih transformacija i delovanjem na iste na osnovu razgovetno utvrđenih matematičkih činjenica. Jedan od razloga za pomenuto je glomaznost izraza Furijeovih transformacija i teškoća analitičkog povezivanja lokalnih, odnosno globalnih svojstava slike i članova Furijeovog reda odgovornih za iste. Drugi razlog je u upotrebi postupaka sa pragmatičnim ocenama kvaliteta, gde je pomenuto analitičko ispitivanje bez značaja, što izloženi metod smešta u domen matematičkog eksperimentisanja.

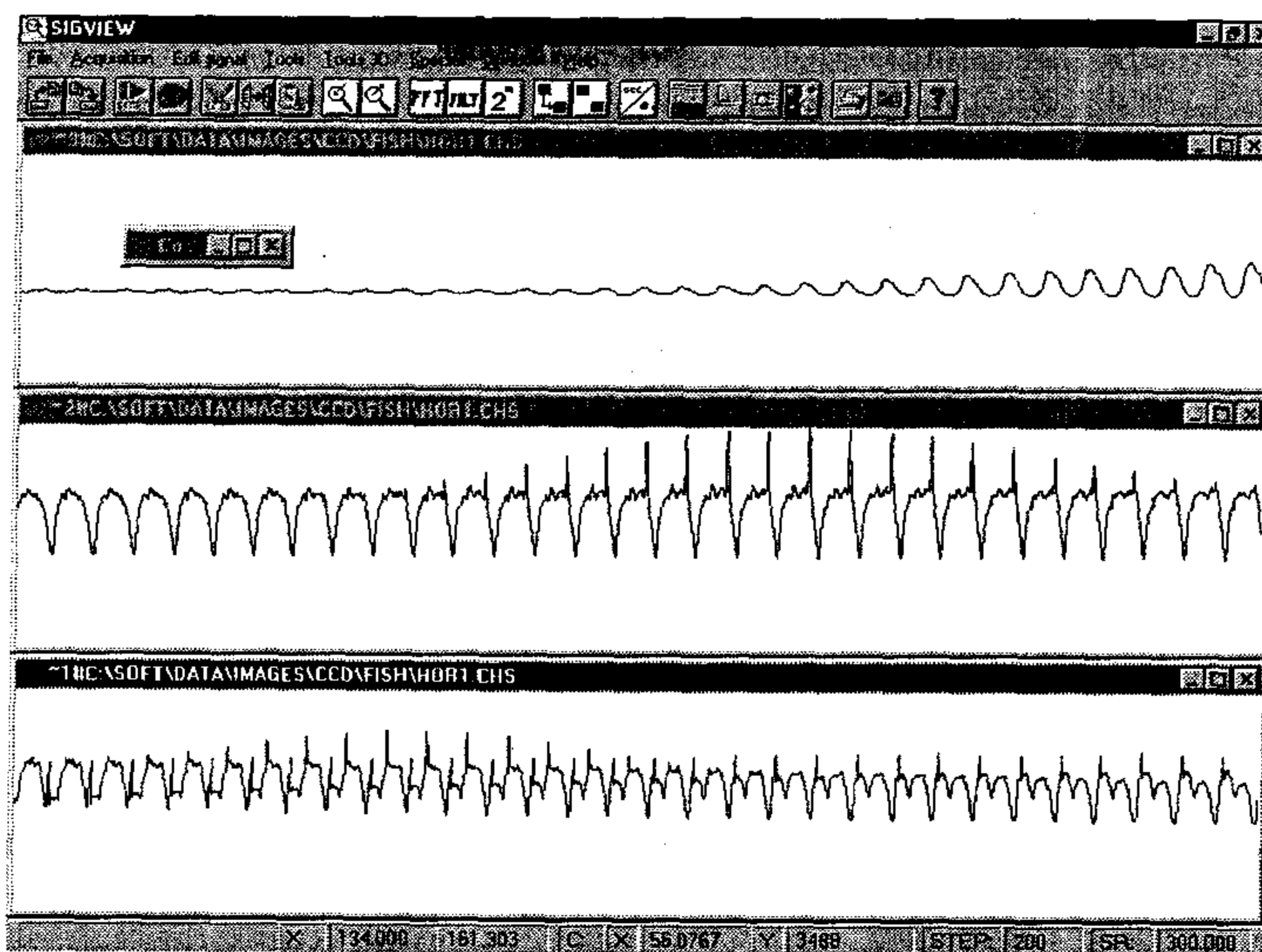


Slika 29.

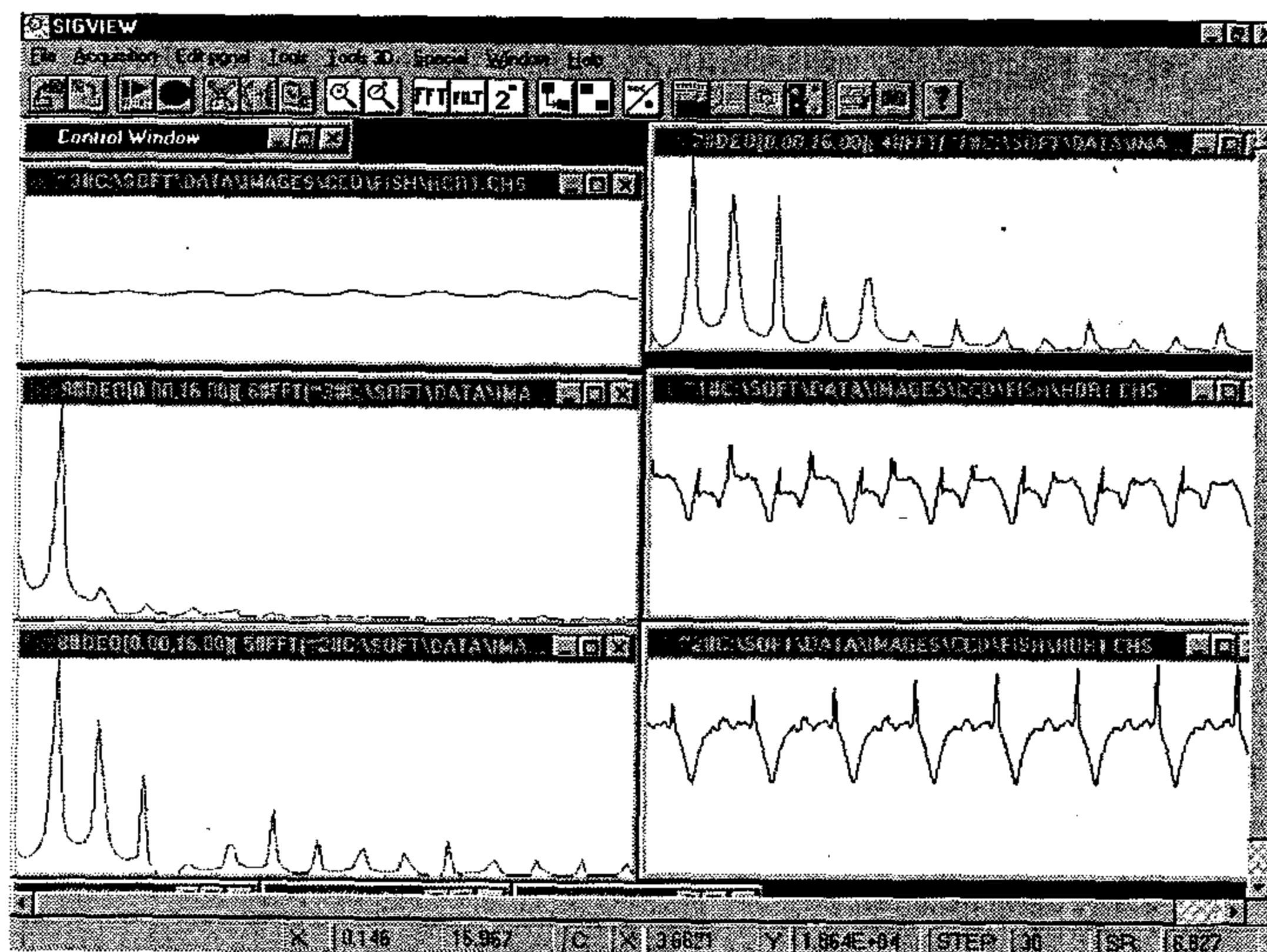
Produžetak prethodnog eksperimentisanja je u parametrizaciji *FFT* preciznosti i vremenskoj spektroskopiji. Za ovu priliku zadovoljićemo se samo opisom funkcionisanja metoda linearnog spektroskopskog kliznog skeniranja, koji je ugrađen u softver SIGVIEW, iz koga potiču preostale ilustracije. Jedro sa dva FISH signala na slikama 1. i 5. se seče po vrstama i konvertuje u signal. Na slici 30. prikazana su tri dela konvertovane funkcije sa jasno ispoljenim signalima i njihovim promenama. Slika 31. sadrži segmente signala sa slike 30. i njihove spektre. Klizanjem kroz signal (fiktivno vreme) uočavaju se promene spektra u realnom vremenu, koje odgovaraju promeni u signalu, tj. slici.

Na slikama 32. do 47. prikazani su kadrovi promene istovremeno na signalu, njegovom spektru i 3D spektrogramu u muzičkoj varijanti. Kompletan spektrogram, uz 3D fotomorfološki prikaz ispitivanog ćelijskog jedra prikazan je na slici 48.

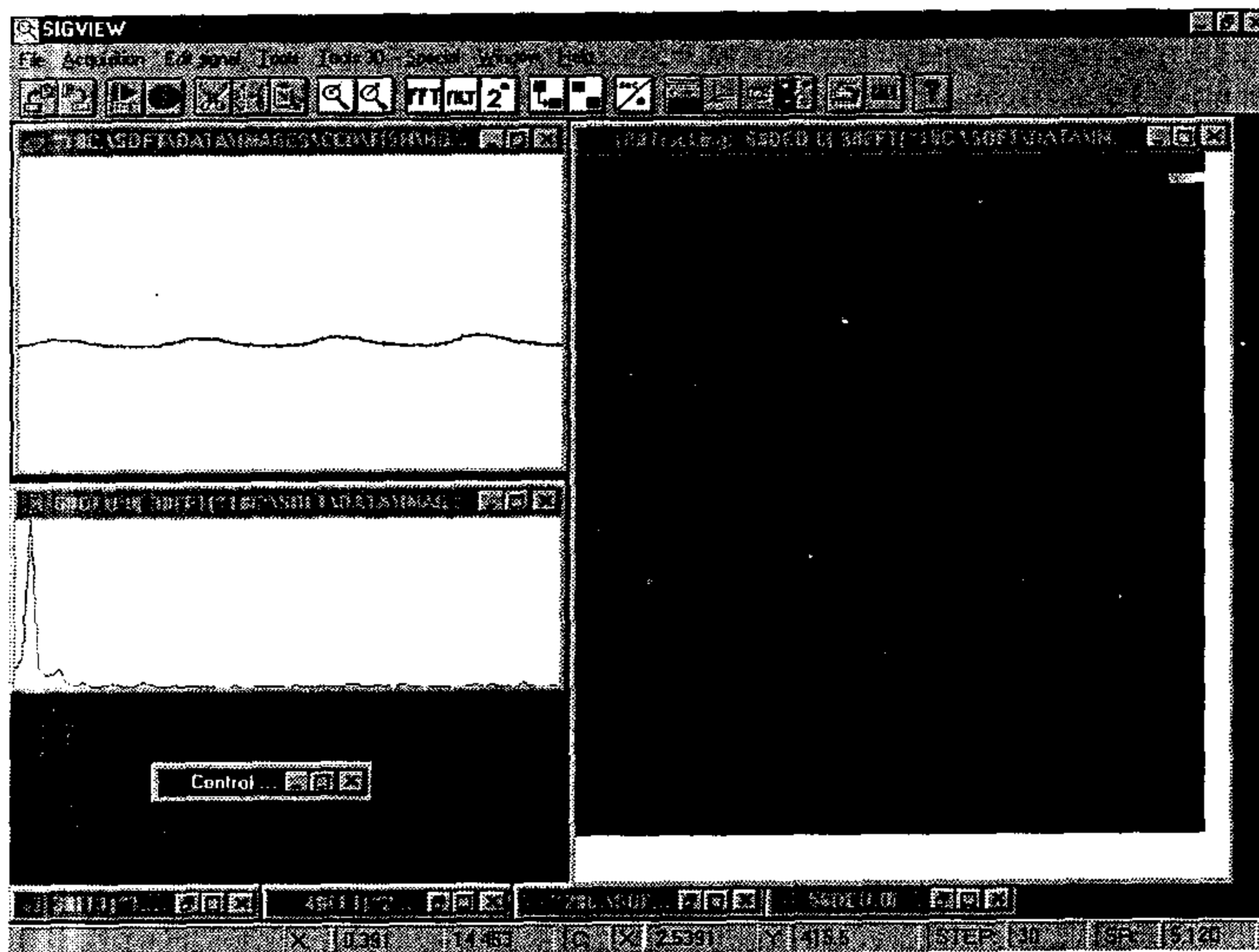
Sečenjem slike na 750 kolona, koje se nadovezuju u niz, dobija se funkcija (u ovom slučaju) u 382 500 tačaka. Za netačkaste objekte susedni preseci se malo razlikuju, zbog čega je dobijena konverzija izraženo lokalno periodična. Slično važi i za sečenje slike po vrstama. Navedeno je uzrok značajnih specifičnosti spektra, računatih za različite preciznosti koje odražavaju, kako lokalna, tako i globalna svojstva slike. U određenom smislu može se reći da se spektralnim operacijama uvode i softverske, odnosno matematičke komponente (sočiva) u optički sistem (koji je i u originalu matematički – sastoji se od “geometriskih operatora” – klasičnih opto elemenata), o čijim se mogućnostima i značaju očekuje izjašnjenje u dogledno vreme.



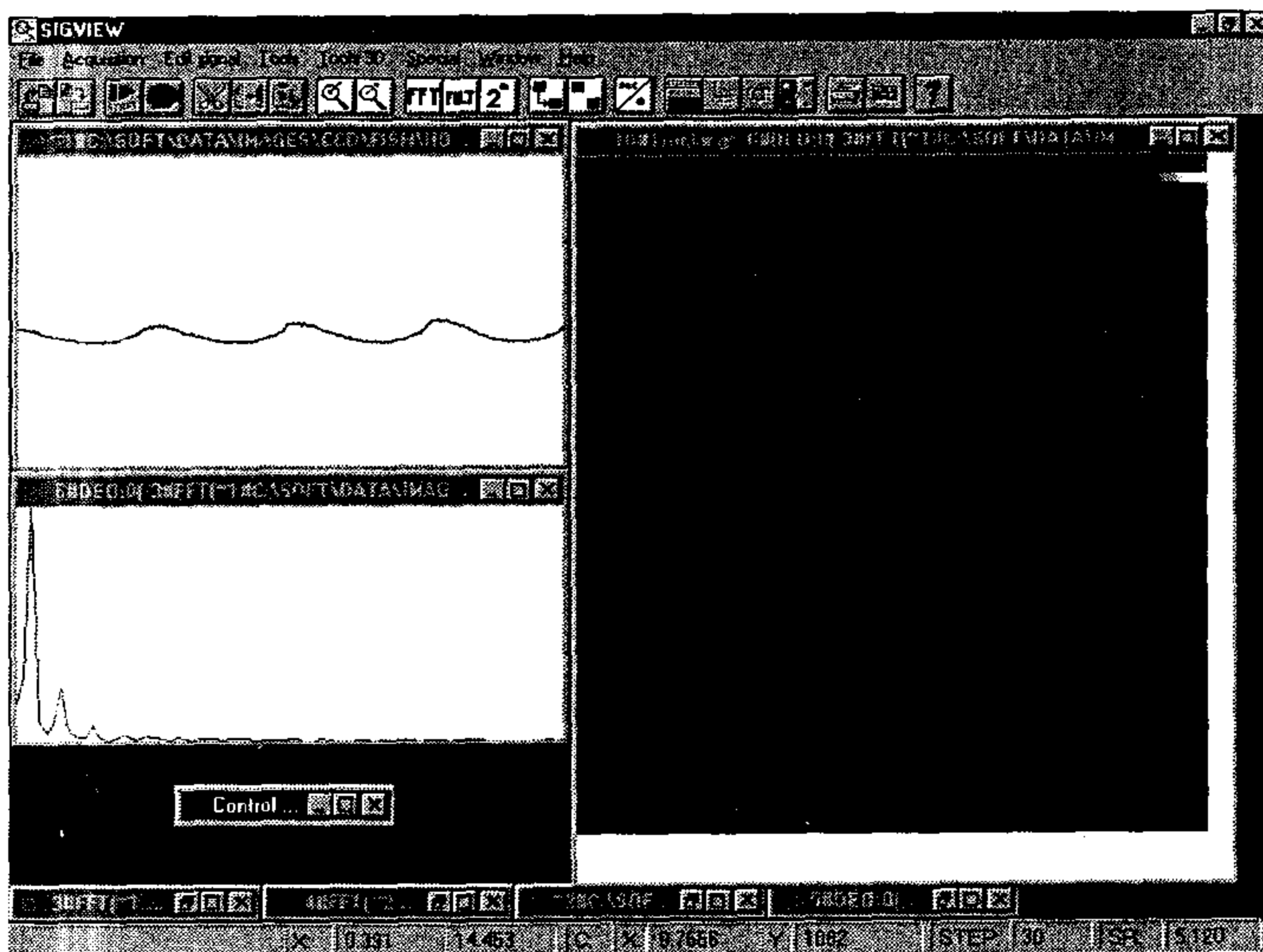
Slika 30.



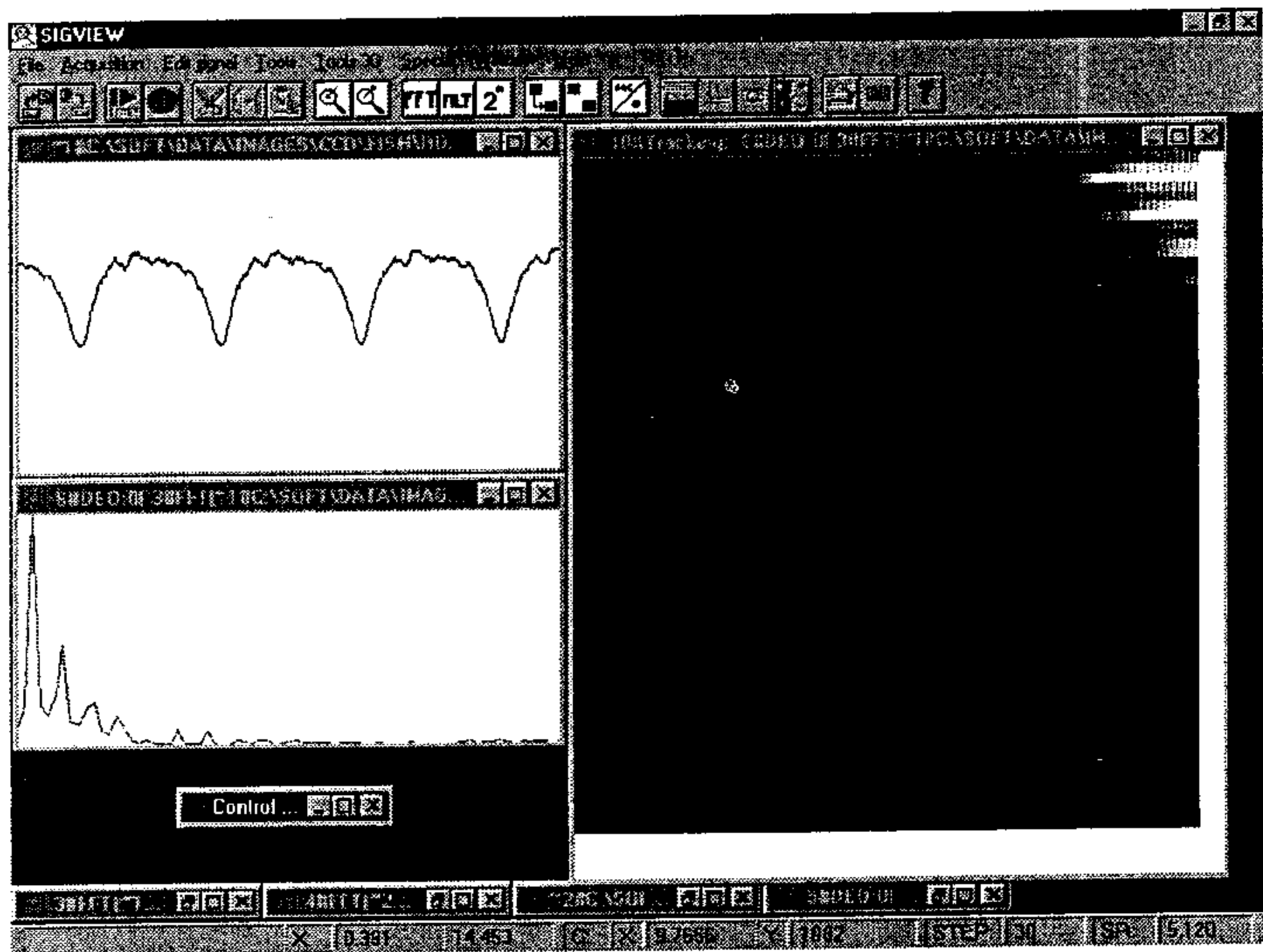
Slika 31.



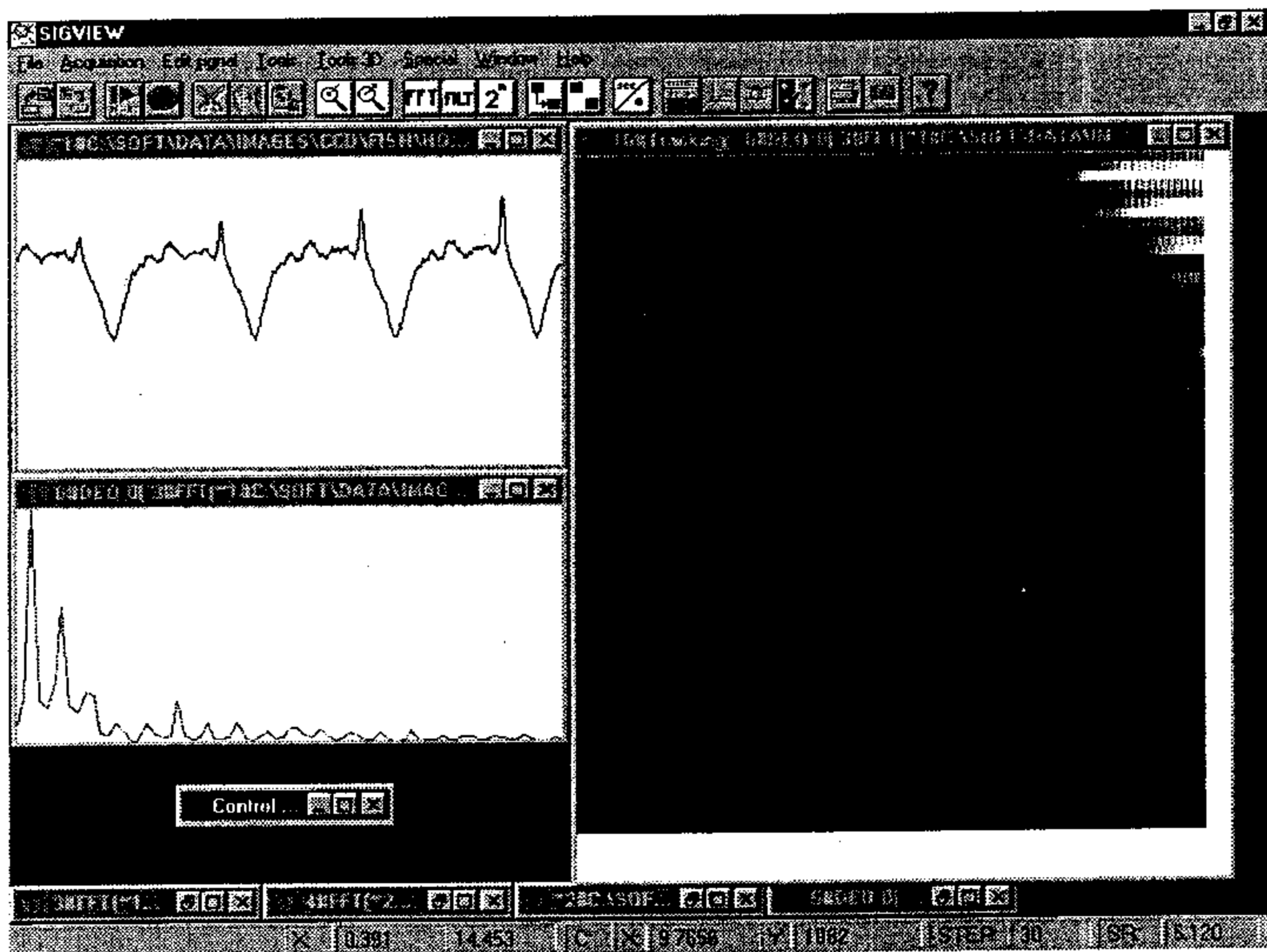
Slika 32.



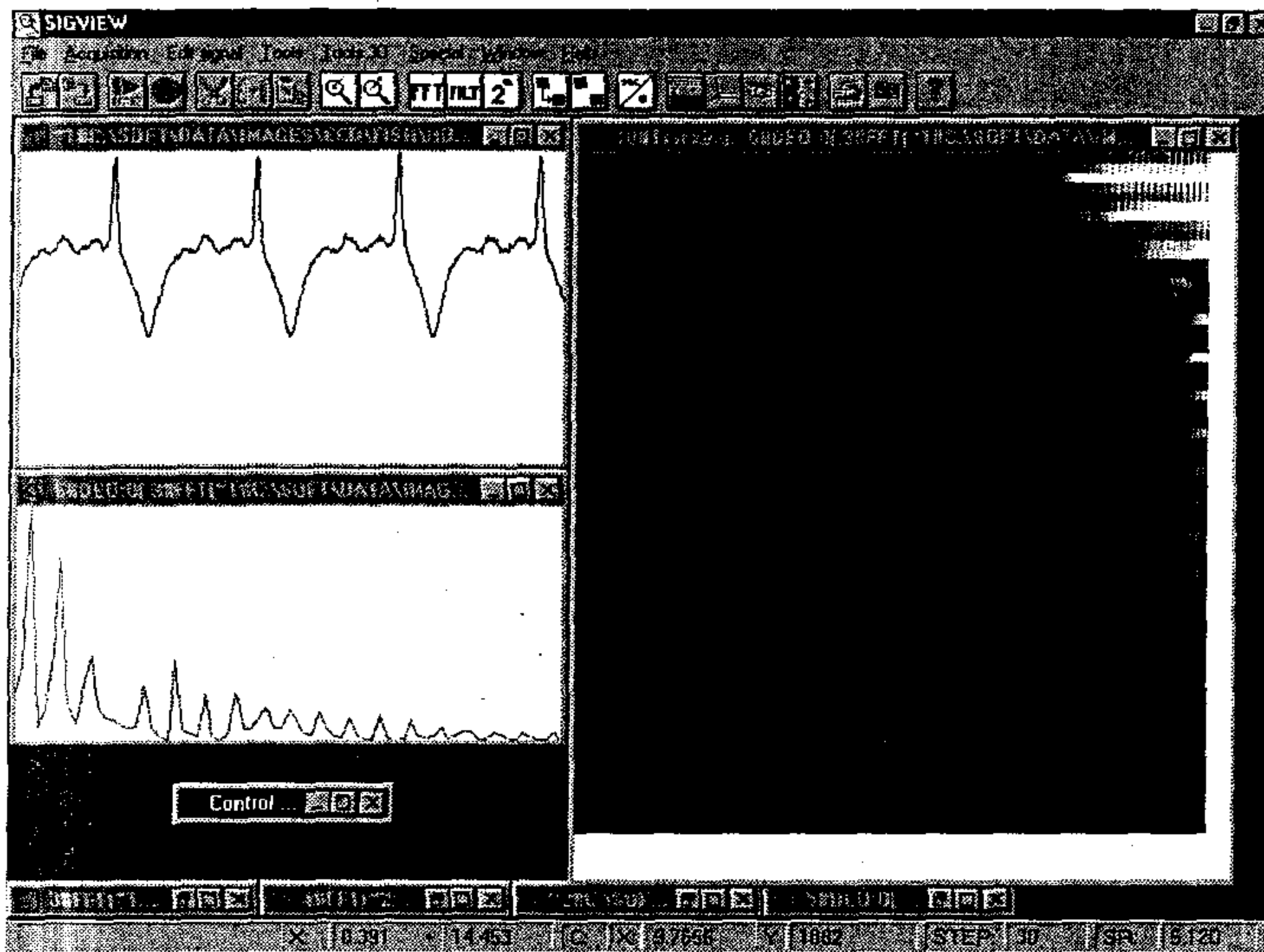
Slika 33.



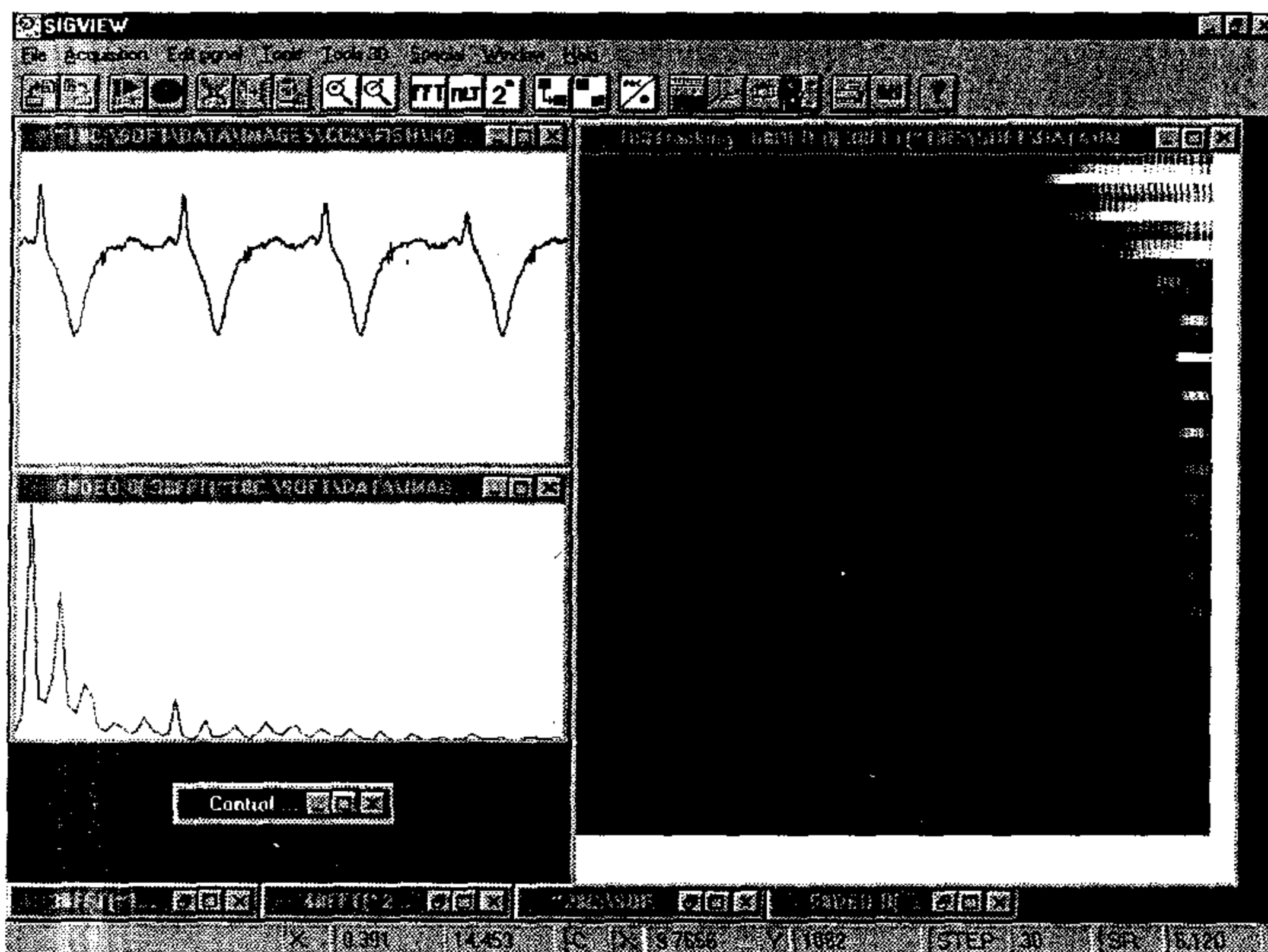
Slika 34.



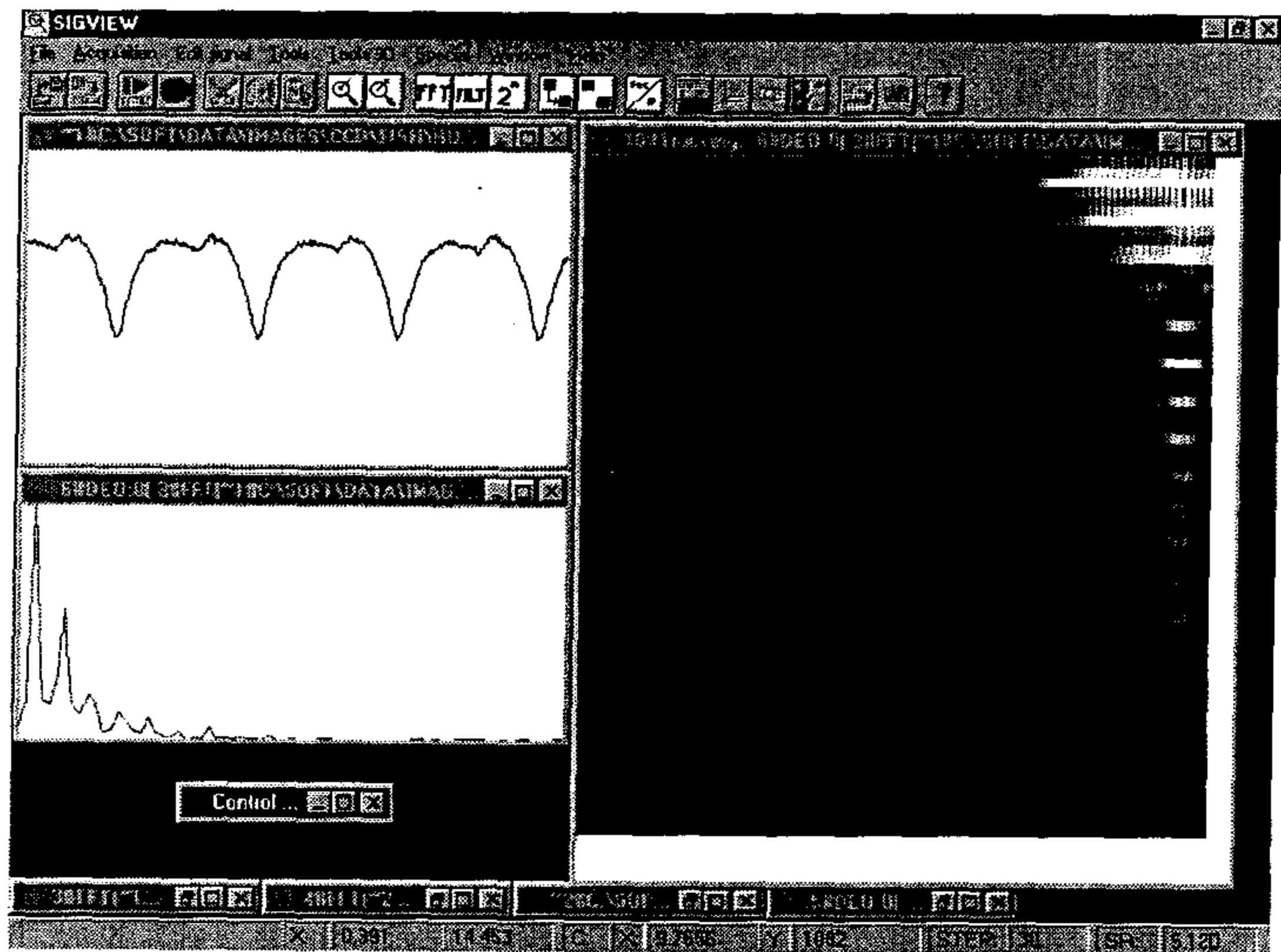
Slika 35.



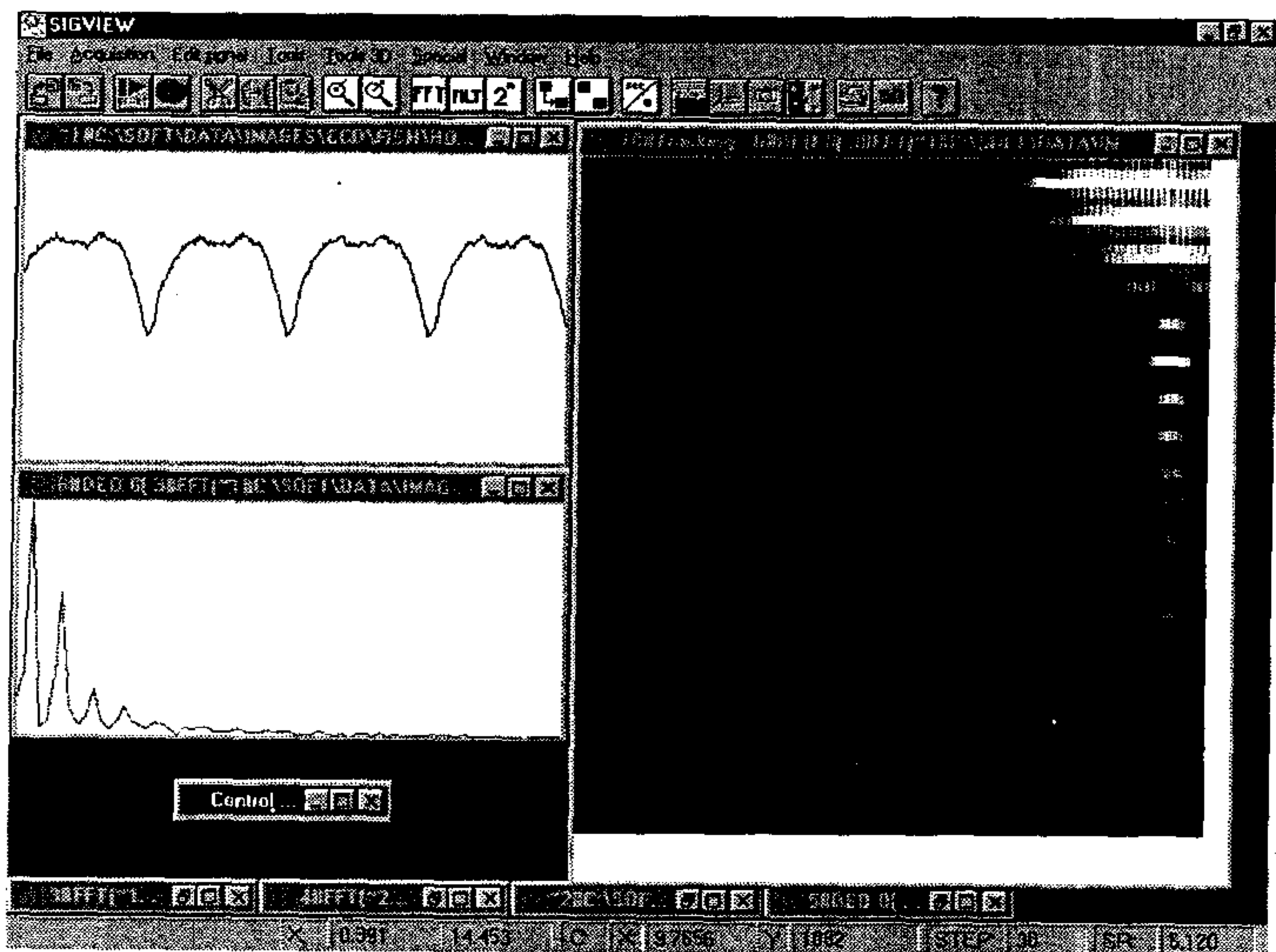
Slika 36.



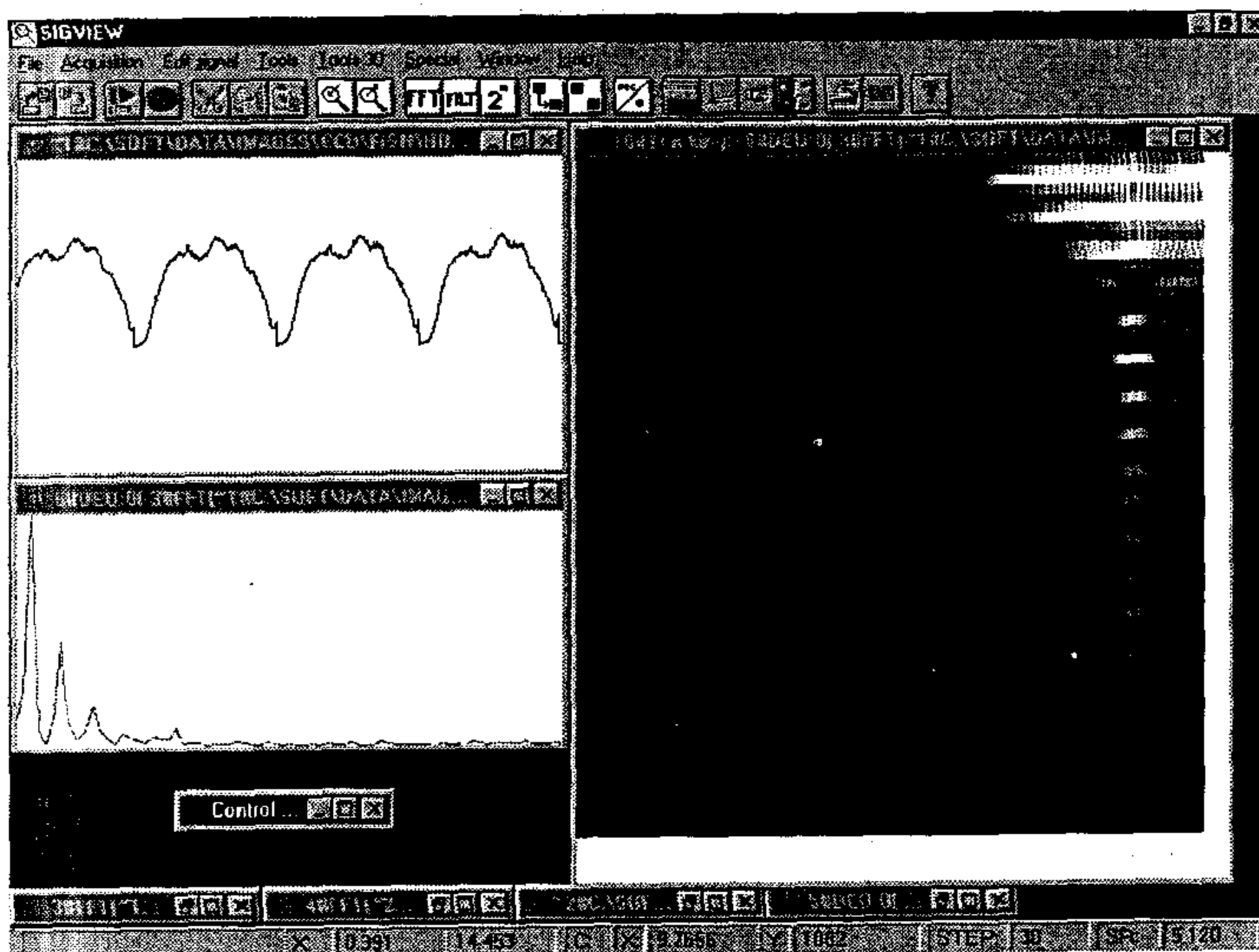
Slika 37.



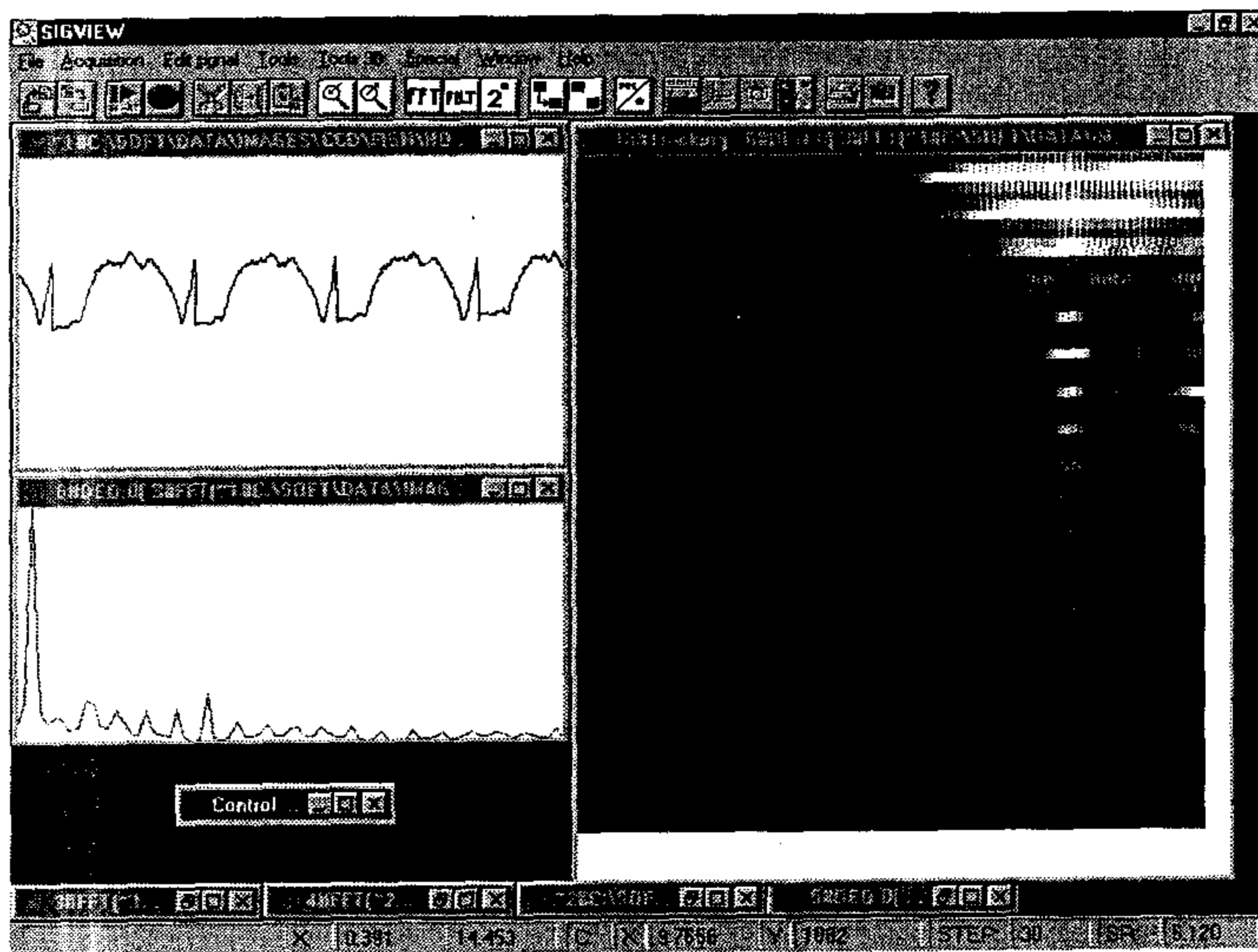
Slika 38.



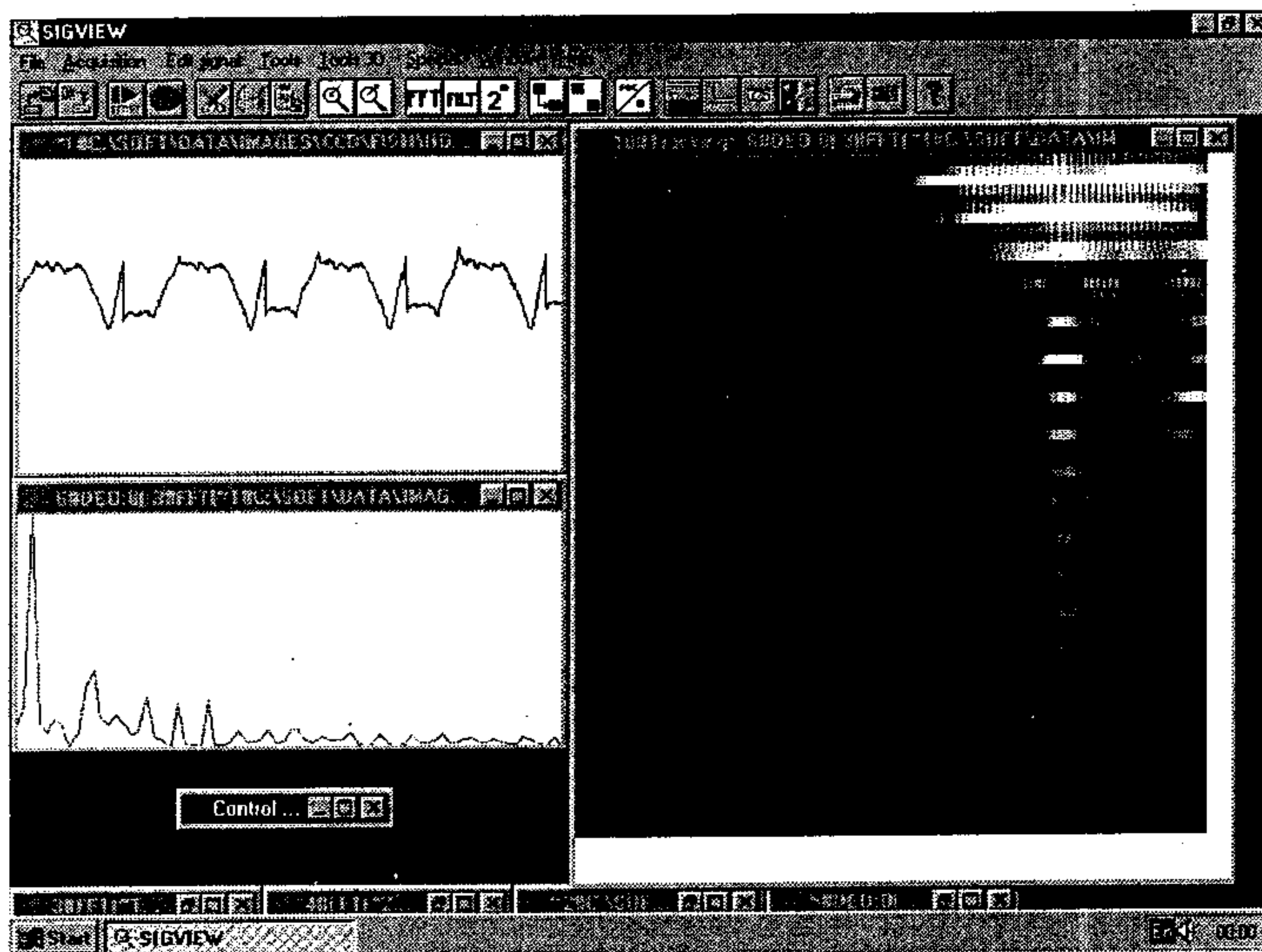
Slika 39.



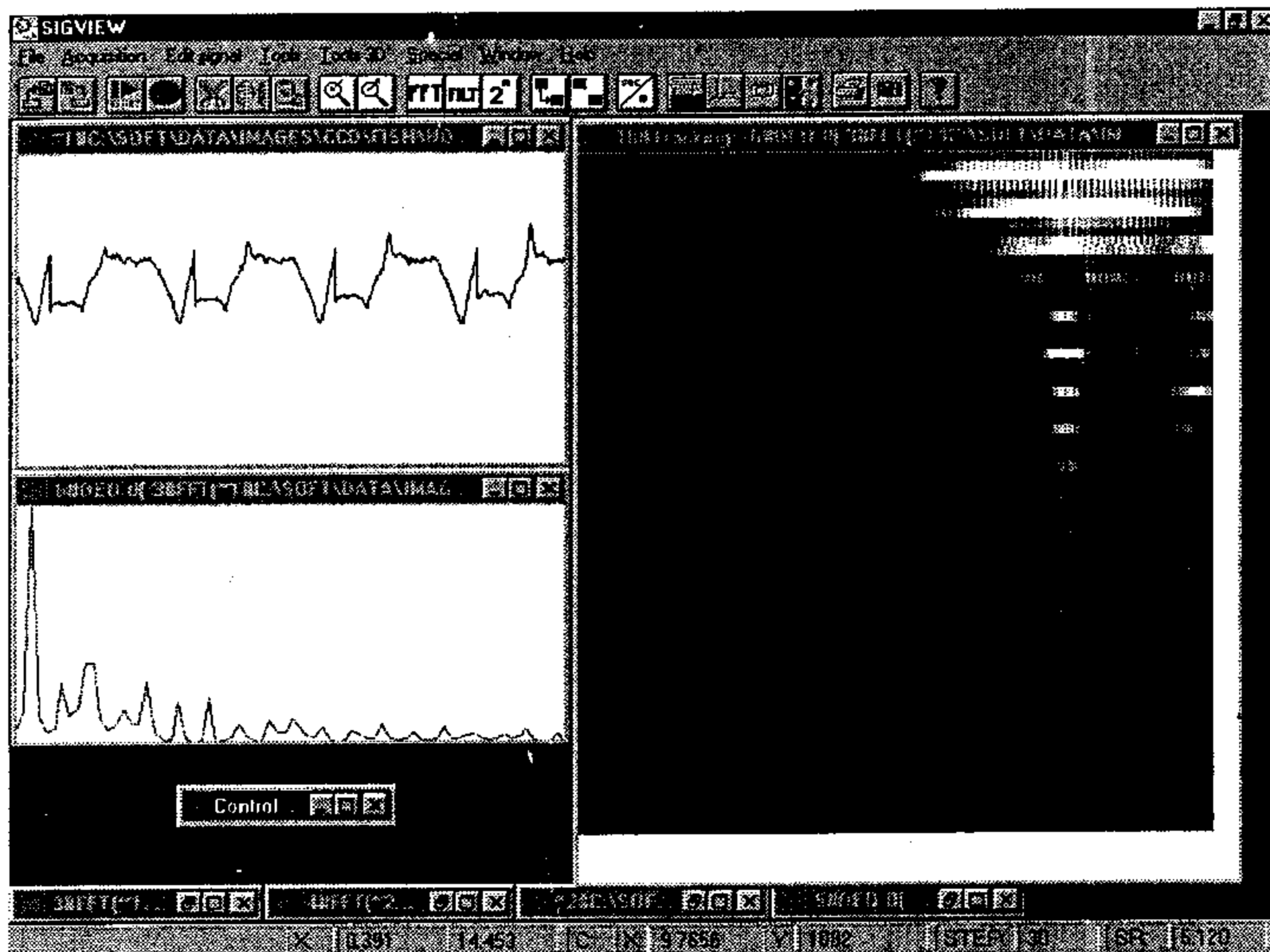
Slika 40.



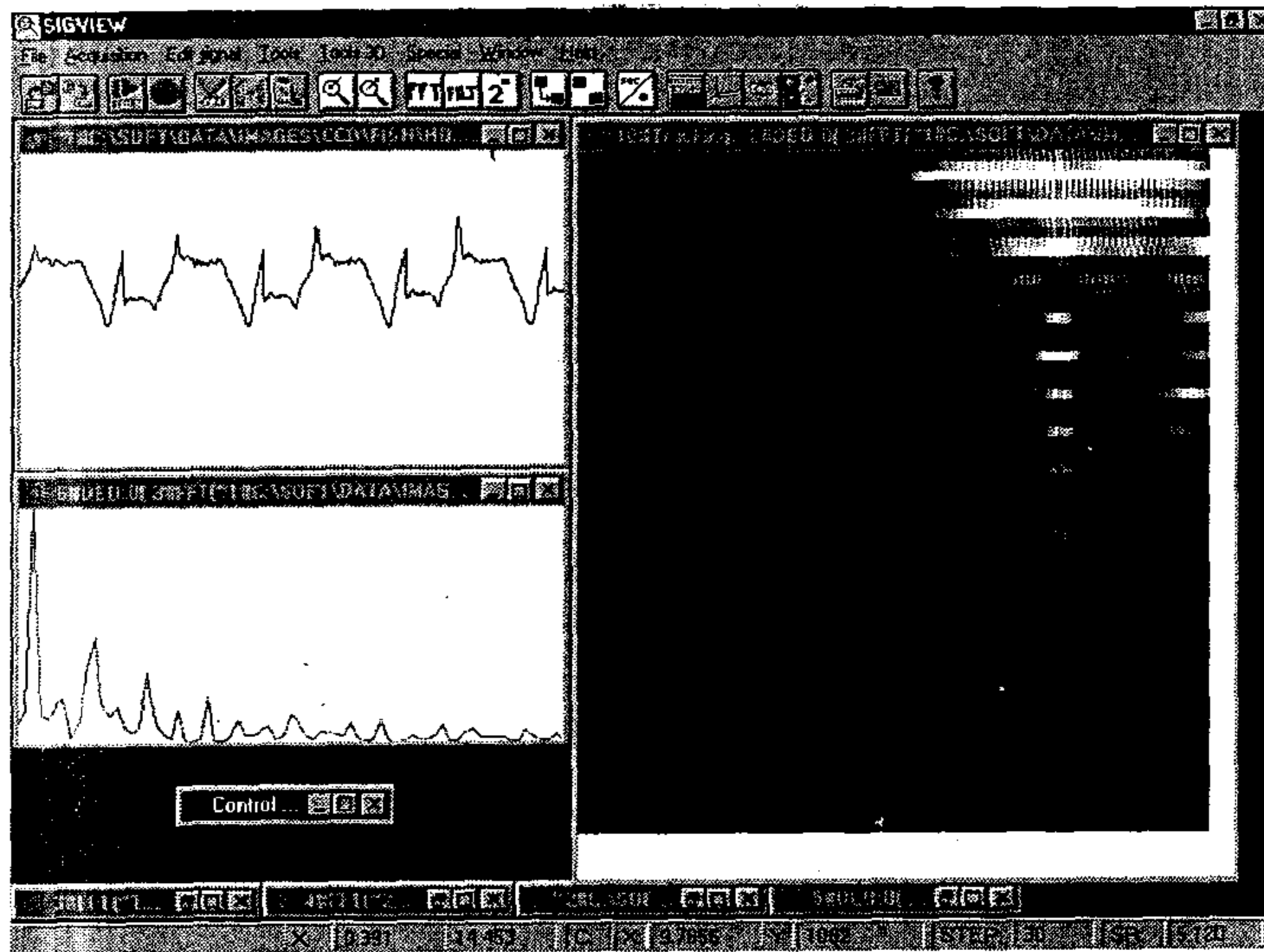
Slika 41.



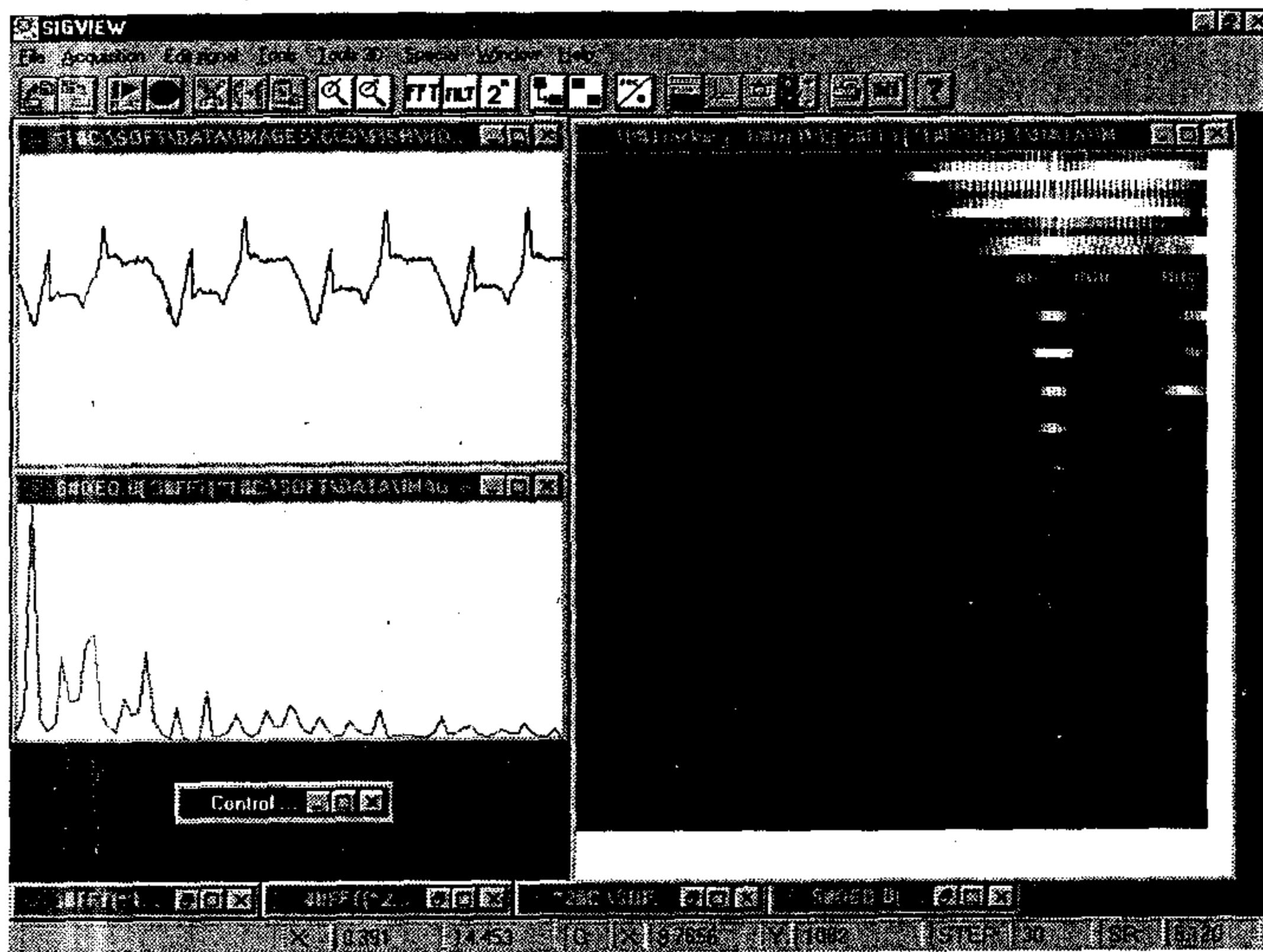
Slika 42.



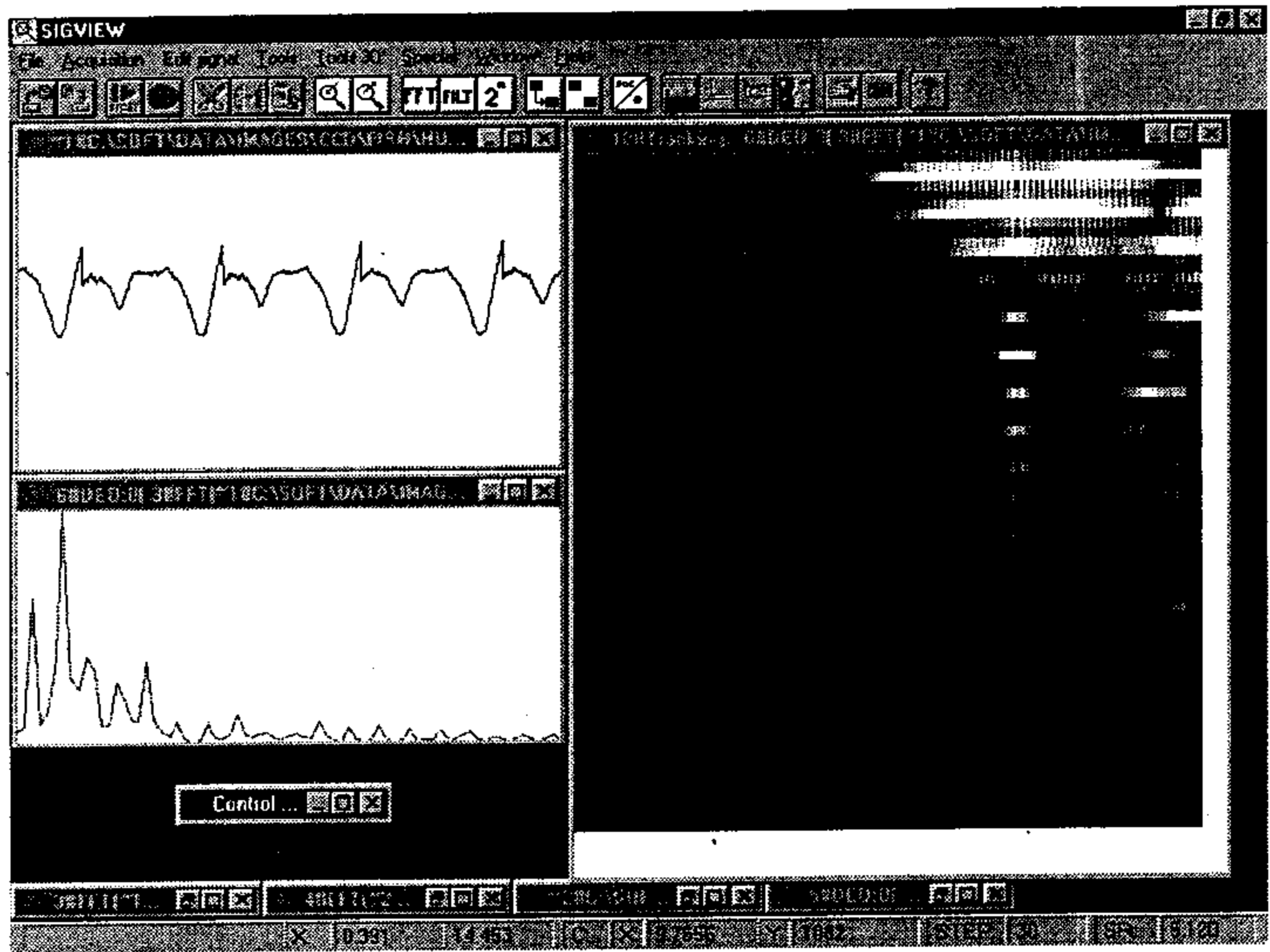
Slika 43.



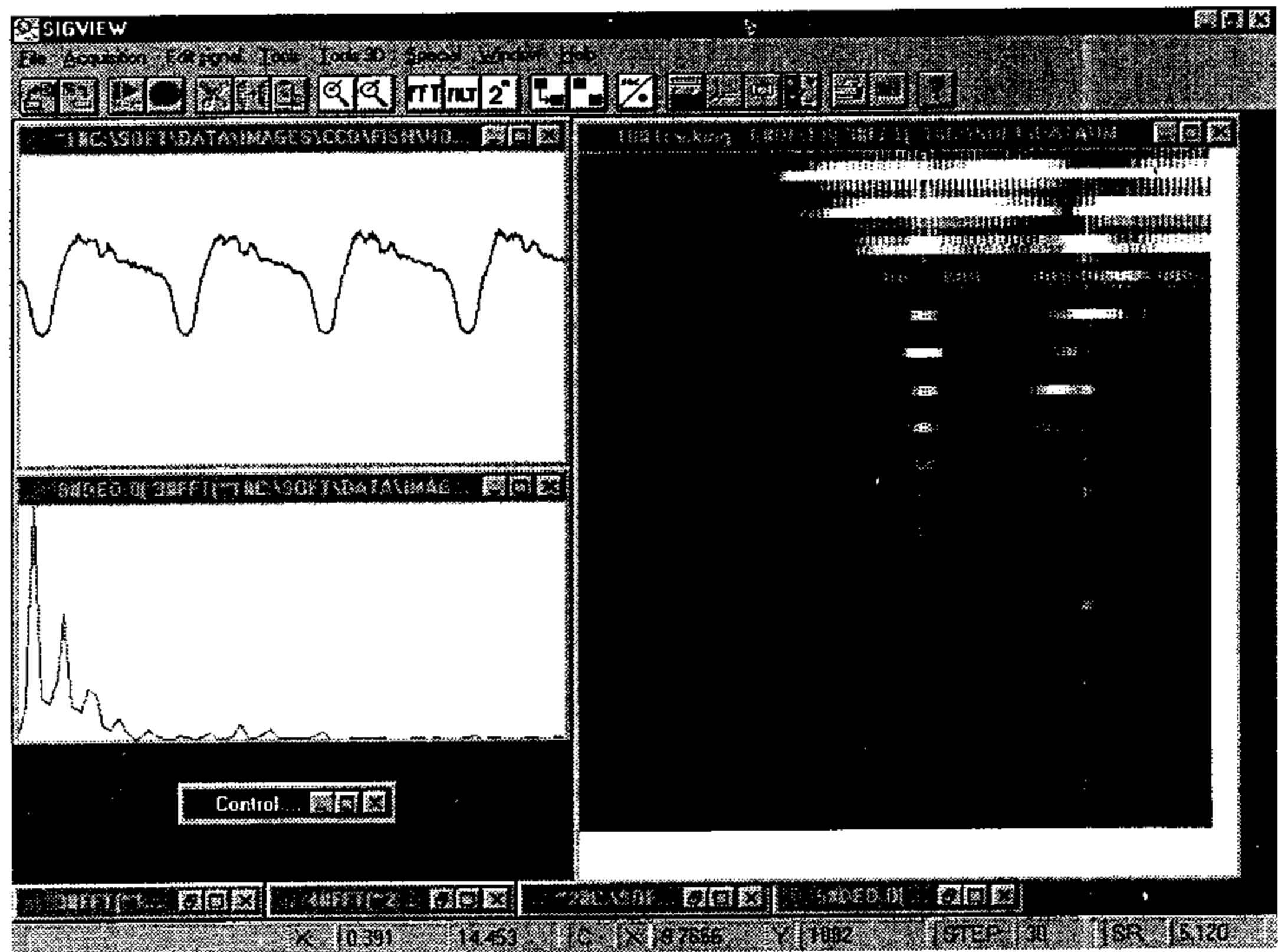
Slike 44.



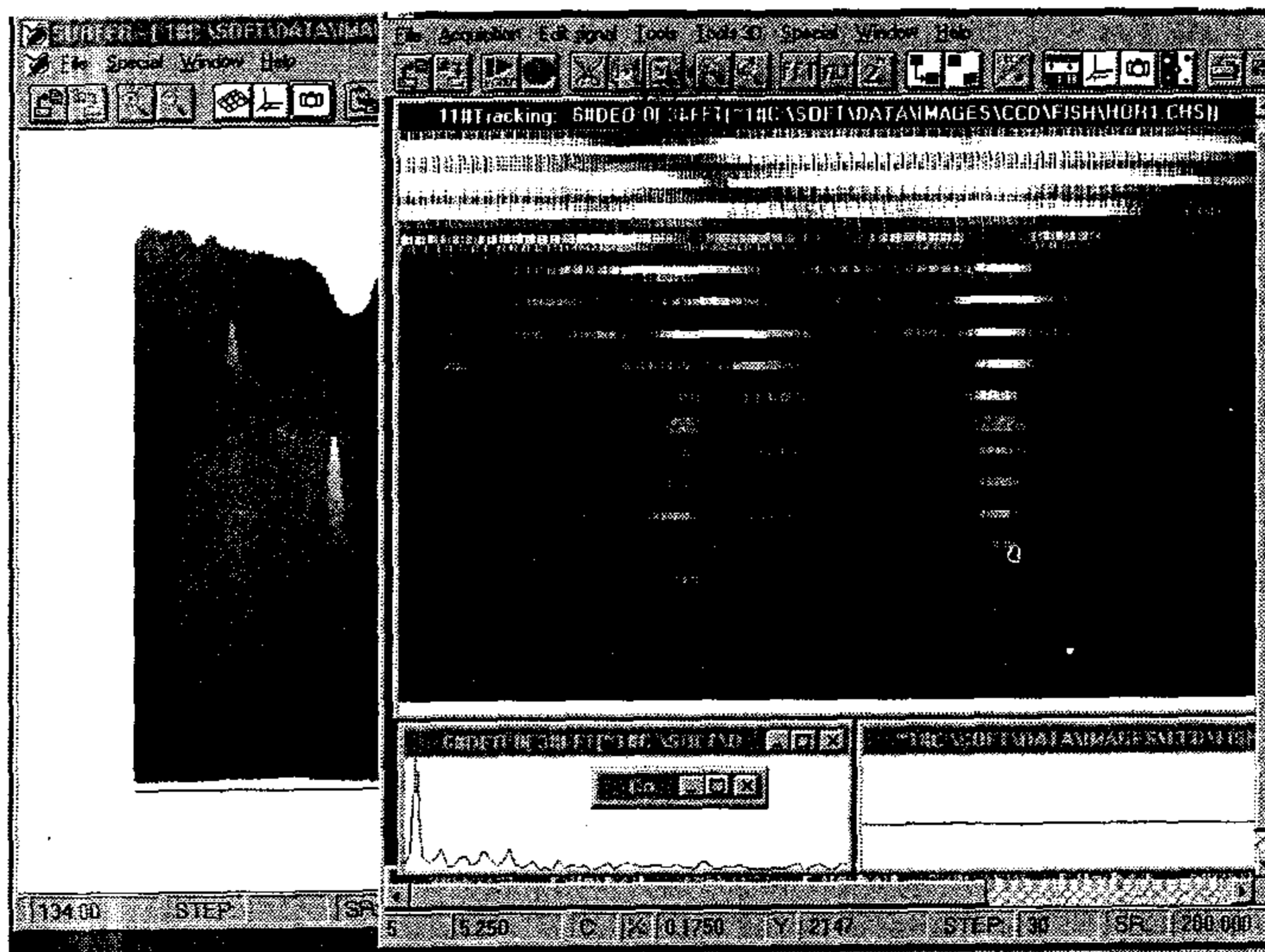
Slike 45.



Slike 46.



Slike 47.



Slika 48.

Indeks

Abel,	12	-granična vrednost, limes,	54
AD konverzija,	137	-inverzna,	48
Bajes,	118	-kompozicija,	9
Bernuli,	121	-karakteristična,	22
beskonačnost:		-maksimum,	44
-aksiome,	5	-minimum,	44
-hijerarhije,	30	-na,	9
Bolcano,	23	-n-arna,	9
Dalamber,	36	-neograničena,	44
Dirihle,	143	-neparna,	44
disperzija,	123	-neprekidna,	60
dogadaj:		-ograničena,	44
-slučajni,	112	-opadajuća,	43
-bez verovatnoće,	118	-parna,	44
-elementarni,	112	-periodična,	44
-neispravan,	114	-prekid,	61
-nemoguć,	114	-primitivna,	92
elektroencefalografija, EEG,	159	-rastuća,	43
FISH marker,	162	-realna,	41
fotometrija,	162	-singularitet,	44
fotomorfologija,	161	Furije,	144
funkcija,	9	Furijeova transformacija,	144
-“1-1”,	9	-brza, FFT,	144
-bijekcija,	9	grupa,	12
		-Abelova,	12
		Galilej,	11
		Gaus,	123
		hromozom,	163
		-ekvivalencija,	170
		-etaloni,	170
		-fotometrijski polinom,	164
		-kičma i rebra,	171
		-krivina,	171
		-meridijan,	164

-rektifikacija,	171	mere centralne tendencije,	128
integral,	91	mikroskopija,	138
-integrand,	92	niz,	21
-neodređeni,	92	-divergentan,	24
-nesvojstveni,	106	-donja ograda,	22
-određeni,	101	-gornja ograda,	22
-tablica,	93	-granična vrednost, limes,	24
izvod,	65	-konvergentan,	24
-inverzne funkcije,	76	-monoton,	23
-tablica,	78	-neograničen,	22
Kantor,	29	-ograničen,	22
kardinalnost,	10	-tačka nagomilavanja,	22
kontinuum:		normalna kriva,	197,198
-hipoteza,	31	operacija,	10
-problem,	29	permutacija,	10
kompoziti,	174	polje,	12
Koši,	29	prostor:	
Lajbnic,	38	-Euklidski,	11
logičke konstante,	3	-metrički,	10
logički kvantori,	4	-vektorski,	13
logički veznici,	3	-baza,	14
-disjunkcija,	4	-dimenzija,	14
-ekvivalencija,	4	Puason,	121
-implikacija,	4	rastojanje,	10
-konjunkcija,	4	relacija,	6
-negacija,	4	-antisimetrična,	7
-tablice istinitosti,	4	-binarna,	6
Lopital,	78	-domen,	9
Makloren,	81	-dobro uređenje,	8
matematičko očekivanje,	123	-dobro zasnovana,	8
matrice,	16	-ekvivalencije,	6
-operacije,	16,17,18	-klasa ekvivalencije,	7
		-inverzna,	9

-kodomien,	9	-neuređen par,	5
-kompozicija,	9	-partitivan,	5
- n -arna,	6	-podskup,	5
-poretka,	7	-prazan,	5
-poretka gustog,	8	-prirodan broj,	5
-refleksivna,	6	-unija,	5
-simetrična,	6	-uređen par,	5
-tranzitivna,	6	standardna devijacija,	130
red,	33		
-divergentan,	33	Tejlor,	79
-Furijev,	142		
-konvergentan,	33	Vajerštras,	23
-konvergentan apsolutno,	34	varijacija,	10
-kriterijum:		vektor:	
-Dalamberov,	36	-linearna nezavisnost,	14
-Košijev,	35	-linearna zavisnost,	14
-Košijev integralni,	109	-norma,	15
-Lajbnicov,	38	-skalarni proizvod,	14
-majoranta,	35	verovatnoća,	133
-Maklorenov,	81	-aditivnost,	114
-minoranta,	35	- \aleph_0 -aditivnost,	117
-niz parcijalnih suma,	33	- σ -aditivnost,	114
-ostatak,	38	-raspodela,	120
-Tejlorov,	79	-binomna,	121
rezonanca,	146	-Gausova-normalna,	123
		-Puasonova,	121
signal,	137	-uslovna,	118
-spektar,	137		
slika:			
-spektar,	179		
-transformacija u signal,	178		
slučajna promjenljiva,	119		
skup,	5		
-beskonačan,	5		
-Dekartov proizvod,	6		
- n -torka,	6		

Literatura

- [1] **V.I. Smirnov**, *Kurs visšjoj matematiki*, Nauka, Moskva, 1965.
- [2] **S. Aljančić**, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
- [3] **W. Rudin**, *Real and complex analysis*, McGraw-hill, 1970.
- [4] **A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer**, *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall.
- [5] **M. Vujošević, S. Malkov, A. Jovanović**, *One method for chromosome analysis and comparison*, Proceedings of the conference: Mathematics and other sciences, Greek mathematic society, Krit, 1995.
- [6] **G. Obradović, S. Malkov, A. Jovanović**, *One application of FFT algorithm in image analysis*, Scientific review (1996) 21-22.

