МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ

НОВА СЕРИЈА

Књига 3 (18)

Антон Билимовић

ДЕСЕТ АПОЛОНИЈЕВИХ ЗАДАТАКА О ДОДИРУ КРУГОВА

БЕОГРАД
1977

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ

НОВА СЕРИЈА

Књига 3 (18)

Антон Билимовић

ДЕСЕТ АПОЛОНИЈЕВИХ ЗАДАТАКА О ДОДИРУ КРУГОВА

БЕОГРАД
1977

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ

НОВА СЕРИЈА

Књига 3 (18)

Издаје: Математички институт — Београд, Кнез Михаилова 35

Штампа: Графичко предузеће „Радиша Тимотић", Београд, Јакшићева 9

Републичка заједница науке СР Србије учествовала је у трошковима издавања ове публикације.

Према мишљењу Републичког секретаријата за културу СР Србије број 413-275/74-02 од 20. V. 1974. године, ова публикација је ослобођена пореза на промет.

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ

НОВА СЕРИЈА

Књига 3 (18)

Антон Билимовић

ДЕСЕТ АПОЛОНИЈЕВИХ ЗАДАТАКА О ДОДИРУ КРУГОВА

БЕОГРАД
1977

Уредник
академик ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ

Примљено на 49. седници Научног већа Математичког института 4. марта 1970. године.

Технички уредио и слике израдио МИЛАН ЧАВЧИЋ

Ову књигу издаје Математички институт поводом стогодишњице рођења академика

АНТОНА БИЛИМОВИЋА

1879—1970

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Грчки математичар *Аполониос* из Перге у Памфилији, који је живео од 250-те године пре наше ере, добио је математичко образовање у Египту, у Александрији, а затим је радио у Александрији, Пергамону и Ефесу. Сем свог чувеног дела о конусним пресецима (κωνικά), написао је још и друга дела геометријског садржаја. Са једним од његових радова — περὶ ἐπαφῶν — који није дошао до нас у оригиналу, упознао нас је познати математичар Папос, који је живео у трећем веку после наше ере у Александрији и који је познат по својој математичкој збирци — συναγωγή. Према Папосовим подацима садржај Аполонијевог дела је успоставио математичар Вијета (*Viète*, 1540—1603) у чијој редакцији — *De tactionibus* — су и познатих десет чувених Аполонијевих задатака о додиру кругова. Од тих задатака нарочито је познат задатак о кругу, који додирује три дата круга. Тај задатак је био предмет методске анализе од стране више геометара у току од Аполонијевог времена до нашег дана.

Пошто није позната тачна класична форма излагања садржаја овог Аполонијевог рада, слободни смо овде ради дубље систематизације и једноставнијег текста увести како нове ознаке, тако и строжију поделу, тако да текст сваког задатка има анализу, конструкцију, доказ и дискусију.

Геометријски материјал, на којем се оснивају изнесена решења, елементаран је.

Као извесно проширење обичног школског материјала уведени су само ови појмови: 1. Појам потенције (степена) тачке у односу на круг, 2. Појам радикалне осе два дата круга и 3. појам радикалног центра.

На крају чланка наведен је и списак, мање познатих, математичара, који су се бавили Аполонијевим задацима.

А. Б.

УВОД

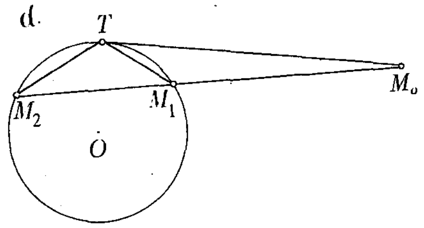
Неке претходне примедбе

Уведимо овде ради бољег разумевања текста неколико појмова и теорема из теорије кругова.

I. Појам *потенције* или *степена тачке у односу на круг* одређује се производом (сл. 1).

$$M_0 M_1 \cdot M_0 M_2 = k,$$

где је: M_0 тачка чија се потенција одређује, M_0, M_1, M_2 тачке на сечици круга кроз M_0 и k кратка ознака производа две дужи: одсечка сечице $M_0 M_2$ и спољашњег дела $M_0 M_1$.



Сл. 1

Ако са T означимо додирну тачку тангенте круга повучене из M_0 можемо саставити пропорцију

$$M_0 M_2 : M_0 T = M_0 T : M_0 M_1$$

и, као закључак, извести овај резултат:

$$\overline{M_0 T}^2 = k,$$

који изражава важну теорему:

Теорема I

Потенција тачке у односу на круг једнака је квадрату одсечка тангенте $M_0 T = T$ повучене из дате тачке на круг.

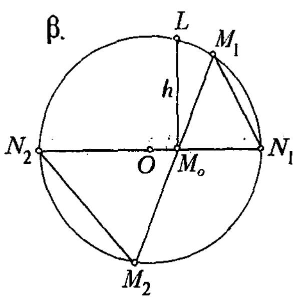
k је позитивно за тачку M_0 ван круга; дужи $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ имају исти смер.

k је нула, ако је тачка M_0 на периферији круга.

k је негативно, ако је тачка M_0 унутра у кругу; $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ су супротних смерова.

За тачку M_0 у кругу имамо (сл. 2):

$$k = M_0 M_1 \cdot M_0 M_2 = M_0 N_1 \cdot M_0 N_2,$$



Сл. 2

где су тачке N_2, O, M_0, N_1 тачке на пречнику круга, који пролази кроз тачку M_0. Троуглови $M_0 M_1 N_1$ и $M_0 M_2 N_2$ су слични.

Ако ставимо $M_0 N_1 = a$ и $M_0 N_2 = b$, имамо важан резултат:

$$k = -ab = -h^2,$$

где је h дужина нормале $M_0 L$ подигнуте из тачке M_0 на пречник $N_1 N_2$.

За општу карактеристику промене потенције тачке M_0 са растојањем $OM_0 = d$ од центра круга полупречника R може послужити ова таблица:

$d=0$	$0 < d < R$	$d=R$	$d > R$	$d \to \infty$
$k=-R^2$	$k=-ab=-h^2$	$k=0$	$k=T^2=d^2-R^2$	$k \to \infty$.

Теорема II

Ако једначину круга у Декартовим координатама напишемо у облику

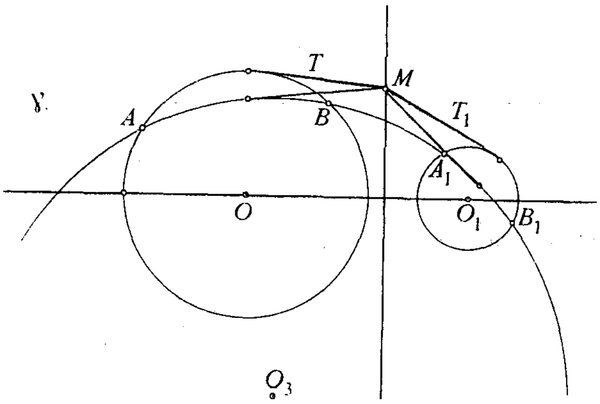
$$x^2+y^2+2ax+2by+c=\varphi\,(x, y)=0,$$

где су a, b, c дате константе, онда потенција тачке $M_0\,(x_0, y_0)$ у односу на тај круг има вредност

$$k=k\,(x_0, y_0)=\varphi\,(x_0, y_0).$$

Уведимо сад појам *радикалне осе два круга.*

II. *Радикална оса два дата круга* је геометријско место тачака, за сваку од којих је вредност потенције те тачке у односу на један круг једнака вредности потенције у односу на други круг — другим речима — једнаке су дужине тангената из сваке тачке повучене на један и други круг (сл. 3). На слици је при-



Сл. 3

казан једноставан начин конструкције тачке M радикалне осе два круга O и O_1 помоћу трећег круга O_3, који пролази кроз тачке A, B, A_1, B_1.

Теорема III

Ако су два круга дата једначинама

$$\varphi\,(x, y)=0, \quad \psi\,(x, y)=0,$$

једначина радикалне осе биће

$$\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0.$$

Ако се дати кругови секу, ова једначина је задовољена координатама пресечних тачака, па је радикална оса права одређена заједничком тетивом, а ако се кругови додирују онда је то заједничка тангента у додирној тачки.

Пример

Нека су дата два круга O и O_1 једначинама:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad \psi(x, y) = (x - d)^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Једначина радикалне осе

$$\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0$$

даје

$$x = \frac{1}{2}(d + m),$$

где је $d = OO_1$ растојање центра кругова, а

$$m = (r^2 - R^2)/d = -(R + r)(R - r)/d.$$

III. *Радикални центар три круга*

Теорема IV

Три круга са центрима O_1, O_2, O_3, чији су полупречници R_1, R_2, R_3 и централна растојања $O_2 O_3 = d_{23}$, $O_3 O_1 = d_{31}$, $O_1 O_2 = d_{12}$ имају три радикалне осе, које ћемо означити са p_{23}, p_{31}, p_{12}.

У општем случају три радикалне осе за три круга секу се у заједничкој тачки, која се зове *радикални центар три дата круга.*

Ако једначине кругова изразимо у облику

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(x, y) = 0, \quad \varphi_3(x, y) = 0,$$

једначине радикалних оса се одређују једначинама овог система:

$$\text{за } p_{23}, \quad \varphi_2(x, y) - \varphi_3(x, y) = 0,$$

$$\text{за } p_{31}, \quad \varphi_3(x, y) - \varphi_1(x, y) = 0,$$

$$\text{за } p_{12}, \quad \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y) = 0.$$

Пошто је свака од ових једначина линеарна по x и y, онда вредности x и y, које задовољавају, рецимо, прве две једначине, задовољавају и ону једначину, која се добива сабирањем тих једначина. Међутим после таквог сабирања се добива трећа једначина. На тај начин пресечна тачка прве две радикалне осе припада и трећој оси. Три радикалне осе у општем случају имају само једну пресечну тачку која и служи као радикални центар датих кругова.

Треба искључити специјалне случајеве. Нпр. у случају колинеарности центара кругова радикалне осе су паралелне и оне не одређују пресечну тачку, другим речима она одлази у бесконачност.

Ознаке

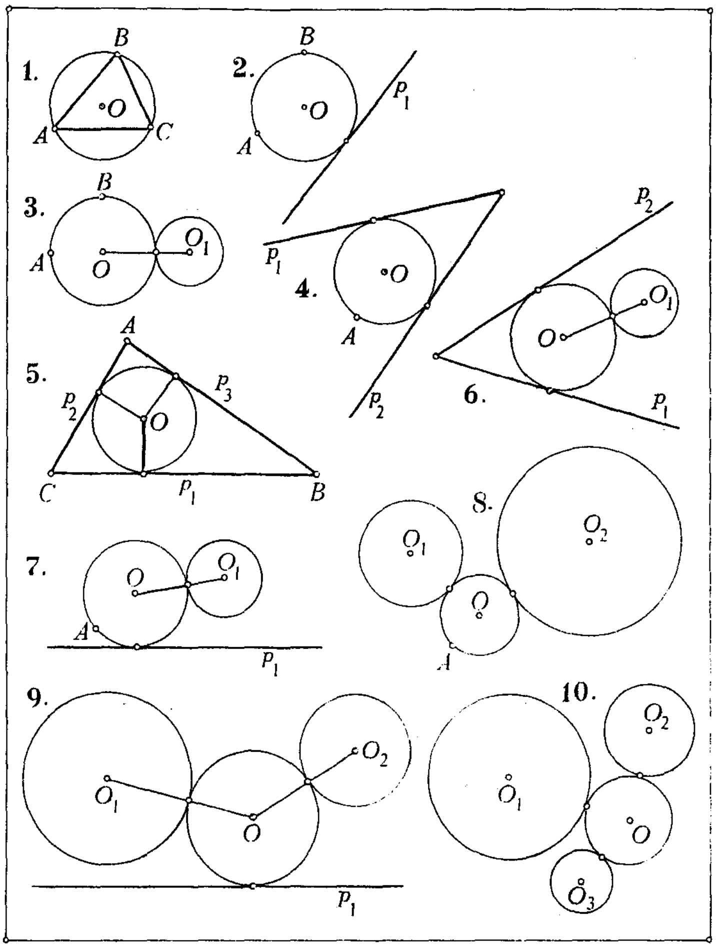
1. Дати параметри-тачке A, B, C; праве — p_1, p_2, p_3; кругови — O_1, O_2, O_3.
2. Тражени кругови — O, O', O''.
3. Помоћне тачке: $M, N, P, Q, \ldots$; помоћне праве: $p, q, r, \ldots$; помоћни кругови: $O^*, O^{**}, \ldots$ или $K, K_1, K_2, \ldots K_n$.

Систематска схема задатака са скицама (сл. 4):

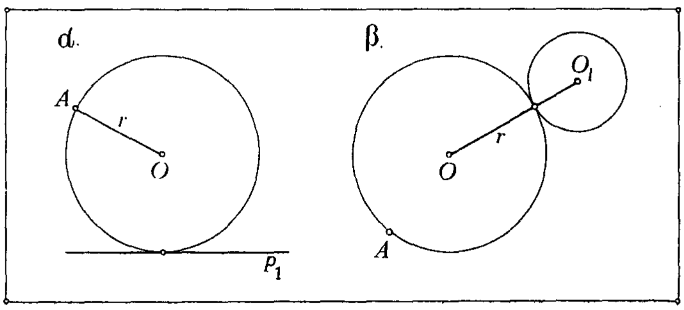
1. A B C три тачке
2. A B p_1 две тачке и права
3. A B O_1 две тачке и круг
4. p_1 p_2 A две праве и тачка
5. p_1 p_2 p_3 три праве
6. p_1 p_2 O_1 две праве и круг
7. O_1 p_1 A круг, права и тачка
8. O_1 O_2 A два круга и тачка
9. O_1 O_2 p_1 два круга и права
10. O_1 O_2 O_3 три круга

Допунски задаци (сл. 5)

α. A p_1 r тачка, права и полупречник траженог круга
β. O_1 A r круг, тачка и полупречник траженог круга.


1.
B
O
A
C
2.
B
O
A
P_1
3.
B
A
O
O_1
4.
P_1
O
A
P_2
P_2
O_1
O
6.
P_1
5.
A
P_2
P_3
O
C
P_1
B
7.
O
O_1
A
P_1
8.
O_1
O_2
O
A
9.
O_1
O
O_2
P_1
10.
O_2
O_1
O
O_3

Сл. 4


α.
A
r
O
P_1
β.
O_1
r
O
A

Сл. 5

Извођење сваке елементарне геометријске конструкције заснива се на основним геометријским конструкцијама, на постулатима геометријских конструкција, који траже да се у равни може оперисати са овим објектима:

1. са тачком као пресеком две праве,
2. са правом кроз две дате тачке,
3. са кругом датог центра и датог полупречника,
4. и да се могу одредити пресечне тачке две праве, праве и круга и два круга, ако такве тачке постоје.

За конструкцију, која се изводи само помоћу коначног броја наведених основних конструкција, кратко се каже да је изводљива само шестаром и лењиром. У својој чувеној књизи, »*Grundlagen der Geometrie*« Д. Хилберт* *(Hilbert)* проучава и аксиоматику конструктивних задатака.

При решавању конструктивних задатака у општем случају појављују се ови познати делови потпуног решења:

I. *Проучавање* или *анализа* задатака,

II. *Конструкција* задатака,

III. *Доказ*,

IV. *Расправљање* или *дискусија* задатака.

План обраде једног конструктивног задатка, изложен у ова четири дела, има огроман значај како у математичким наукама, тако уопште у случајевима проблема, малих и великих, приватних и друштвених. Примери конструктивних задатака јасно показују да је рад без потпуног плана, нпр. само извођење конструкције, недовољан. Сваки проблем је потпуно реалан, ако се могу постићи одговарајући резултати у сваком делу скицираног плана. То се примењује и на опште проблеме са одговарајућим променама у вези са природом задатака.

* Д. Хилберт: Основе геометрије, Класични научни списи МИ САН, књ. 14, превео са VIII немачког издања Ж. Гарашанин, Београд 1957.

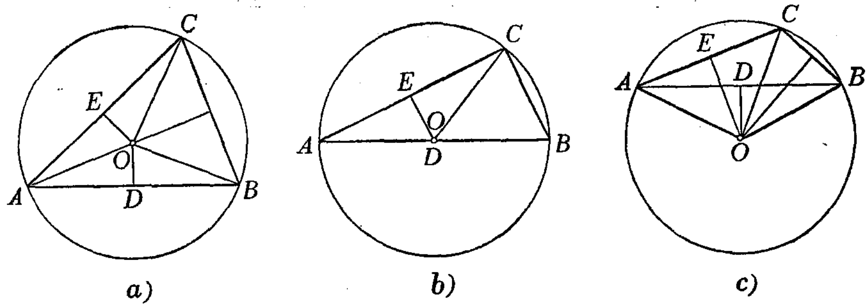
ЗАДАЦИ

1. Наћи круг који пролази кроз три дате тачке

Нека су дате три тачке *A, B, C*. Нацртати круг *O*, који пролази кроз дате тачке.

I. **Анализа.** Ако дате тачке спојимо дужима *AB, BC, CA*, долазимо до троугла *ABC*. Тражени круг *O* је тада описани круг око датог троугла *ABC*. На тај начин наш задатак се своди на Еуклидов задатак из IV књиге, 5 став Еуклидових Елемената*, који у преводу гласи: „Око датог троугла описати круг".

II. **Конструкција.** Конструкцију изводимо по Еуклиду (сл. 6).



Сл. 6

Преполовимо праве *AB, AC* тачкама *D* и *E* и кроз тачке *D* и *E* повучемо праве *DO* и *EO* под правим угловима према правима

* Еуклидови Елементи, Класични научни списи МИ САНУ, књ. 4, превео и коментар додао А. Билимовић, Београд, 1953.

AB и AC. Оне се секу или у троуглу ABC (сл. *a*), или на правој AB (сл. *b*), или са друге стране праве AB (сл. *c*), ван троугла ABC. Пресечна тачка O је центар круга који пролази кроз тачке A, B, C.

III. **Доказ.** Нека је прво O, у троуглу (сл. *a*), па повуцимо OB, OC OA. Тада, пошто је AD једнако DB, а DO заједничко и управо на AB, страница AO једнака је страници OB. На сличан начин се доказује да је CO једнако AO, па је према томе OB једнако OC. Дакле дужи OA, OB, OC су међусобно једнаке. Према томе ће круг са центром у O описан растојањем до једне од тачака A, B, C проћи и кроз остале тачке и биће круг описан око троугла ABC.

Узмимо сад да се DO и EO секу на правој AB у O (сл. *b*), као што је то случај на другој слици, па повуцимо AO. На сличан начин се доказује да ће тачка O бити центар круга описаног око троугла ABC.

Најзад, нека се DO и EO секу у тачки O ван троугла ABC, као што је то нацртано на трећој слици (сл. *c*), па повуцимо AO, BO, CO. Како је опет AD једнако DB, а DO је заједничка страница управна на AB, страница AO једнака је страници BO. На сличан начин се доказује да је CO једнако AO, према томе је и BO једнако OC. Према томе ће опет круг са центром у O описан растојањем до једне од тачака A, B, C проћи и кроз остале тачке и бити описан око троугла ABC.

На овај начин око датог троугла је описан круг. А то је требало извести.

IV. **Дискусија.** У свом излагању овог задатка Еуклид је пренео део дискусије у анализу, где је прегледао три случаја положаја круга према троуглу.

Своје излагање Еуклид је допунио — у облику „*Последице*“ — анализом вредности углова за различите положаје центра описаног круга. Његови резултати су формулисани овако: ако се угао ACB налази у кружном одсечку већем од полукруга, тај угао је мањи од правог, ако је одсечак једнак полукругу, угао је једнак првом и, најзад, ако је одсечак мањи од полукруга, угао је већи од правог. И, обрнуто, ако је угао ACB мањи од правог, праве DO, EO секу се у троуглу, ако је угао ACB једнак правом углу, праве DO и EO секу се на правој AB и, најзад, ако је угао ACB већи од правог, исте праве DO и EO секу се ван троугла.

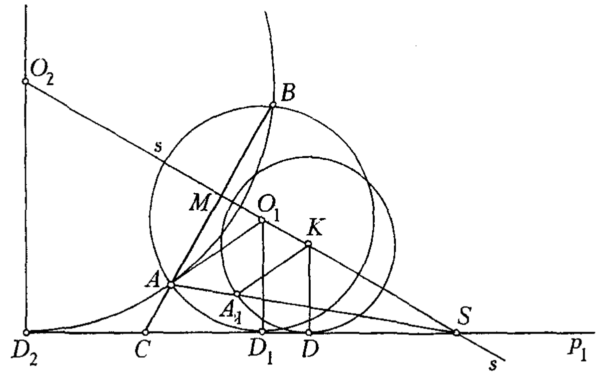
2. Наћи круг који пролази кроз две дате тачке и додирује дату праву

Нека су дате две тачке A и B и права p_1 (сл. 7).

Треба кроз тачке A и B повући круг који додирује праву p_1.

I. **Анализа.** На симетрали s дужи AB се налази центар сваког круга који пролази кроз тачке A и B. Тачка S је пресек симетрале s са датом правом p_1.

Узмимо на симетрали s произвољну тачку K и спустимо нормалу KD на праву p_1. Помоћни круг полупречника KD са центром у K додирује праву p_1, али не мора пролазити кроз тачке A и B.



Сл. 7

Нека права AS сече круг K у тачки A_1. Конструишимо дуж AO_1 паралелно A_1K. Круг са центром O_1 и полупречником O_1A је тражени круг, јер је

$$O_1 A = O_1 B = O_1 D_1,$$

ако је $O_1 D_1 \perp p_1$.

Последња једнакост следује из услова пропорционалности

$$KD : O_1 D_1 = KA_1 : O_1 A,$$

што се одмах увиђа, ако се посматрају полуправе из тачке S пресечене паралелним трансверзалама, јер је

$$KD : O_1 D_1 = SK : SO_1, \text{ односно } KA_1 : O_1A = SK : SO_1,$$

одакле проистиче претходни услов пропорционалности.

За одређивање другог траженог круга O_2 може се узети у обзир да је

$$(1) \qquad CD_1 = CD_2,$$

где је D_2 подножје нормале спуштене из O_2 на праву p_1, где је C пресек праве p_1 и праве кроз дате тачке A и B.

Једначина (1) изражава једнакост потенције тачке C у односу на круг O_1 чији је израз

$$CA \cdot CB = CD_1^2,$$

и потенције исте тачке C у односу на круг O_2

$$CA \cdot CB = CD_2^2.$$

После одређивања тачке D_2 на p_1 одређује се конструкцијом нормале на p_1 у тачки D_2 положај тачке O_2, центра другог траженог круга, а тиме и сам тражени круг.

II. **Конструкција.** Изнесена анализа задатка толико је једноставна да се може дати конструкција овим поретком једноставних операција:

1. За дате тачке A, B и дату праву p_1 се конструише симетрала s дужи A и B и пресечна тачка S те симетрале са правом p_1. На правој s још се узме произвољна тачка K и тачка M средина дужи AB.

2. Из тачке K спуштамо нормалу на p_1 и подножје означавамо са D. Круг са полупречником KD додирује праву p_1.

3. Из тачке A цртамо праву AS и са A_1 означавамо пресечну тачку те праве са кругом K.

4. Пресек O_1 праве AO_1 паралелне са A_1K, одређује центар првог траженог круга.

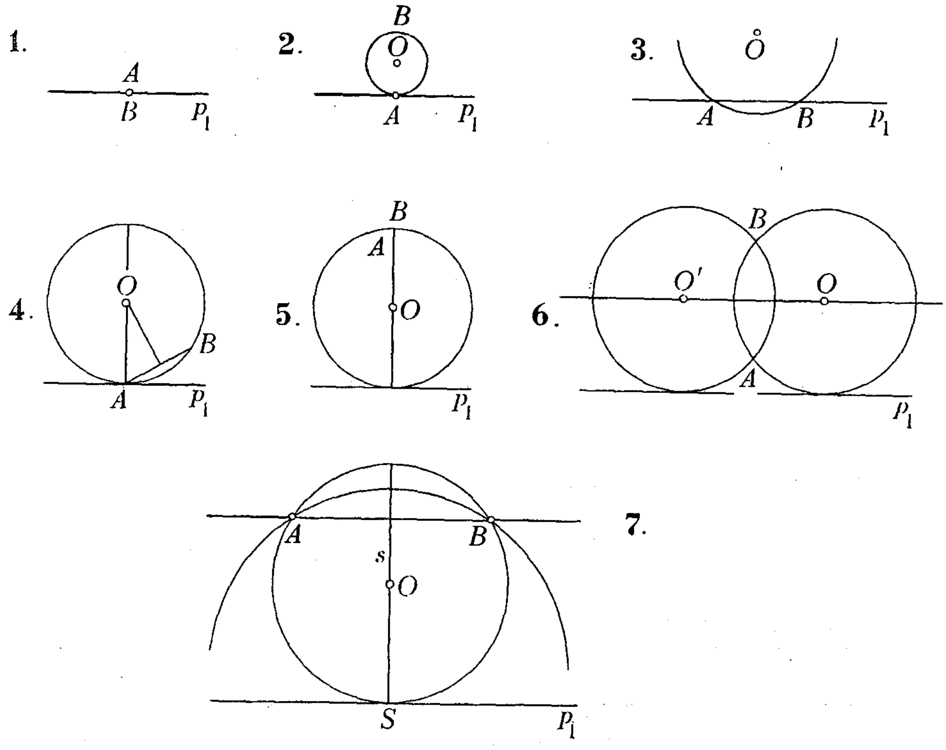
5. За други круг одмеримо од C дуж $CD_2 = CD_1$.

6. Из D_2 дижемо нормалу на праву p_1. Пресек те нормале са симетралом s одређује центар O_2 другог траженог круга.

III **Доказ.** Операције конструкције овог задатка толико су једноставне да су готово очигледне. Само једно место због примене мало познате теорије појма потенције тачке према кругу може захтевати објашњење, које је већ било наведено у анализи. Реч је о ставу да две потенције исте тачке које се односе на два круга са заједничком тетивом имају исте вредности изражене помоћу квадрата тангентних одсечака.

IV. **Дискусија.** Као што је познато дискусија конструктивног задатка састоји се у проучавању једног или више начина за решавање задатка у вези са променом датих података.

Услови овог задатка се изражавају положајем одређене дужи AB према датој правој p_1. Лако је видети да за параметре тих података можемо узети ове три величине: одстојање h тачке A од



Сл. 8

праве p_1, одстојање H тачке B од исте праве p_1 и растојање d између h и H, при томе означене величине треба да задовољавају услове

$$0 \leqslant h \leqslant H, \ d \geqslant 0.$$

Резултати дискусије могу се свести у ову таблицу (сл. 8).

$h=0$	$d=0$	$H=0$, 1.	Бескрајно много двоструких тачака на правој p_1.
		$H>0$, 2.	Једно решење. Круг са пречником H.
	$d>0$	$H=0$, 3.	Круг дегенерише у праву p_1.
		$H>0$, 4.	Круг са центром у пресеку нормале из A на p_1 и симетрале дужи AB.
$h>0$	$d=0$	$H=h$, 5.	Круг са пречником H који пролази кроз двоструку тачку.
		$H>h$, 6.	Два једнака круга који додирују праву p_1 и имају центре на симетрали дужи AB.
	$d>0$	$H=h$, 7.	Круг који додирује праву p_1 у пресеку симетрале дужи AB са том правом.
		$H>h$, 8.	То је општи случај, који је проучен у анализи.

3. Наћи круг који пролази кроз две дате тачке и додирује дати круг

Нека су дате две тачке A и B и круг O_1 (сл. 9). Треба кроз тачке A и B повући круг који додирује дати круг O_1.

I. **Анализа.** За што једноставније решење овог задатка искористимо појмове потенције тачке у односу на круг и појам радикалне осе за два круга. Примена тих појмова је врло једноставна и изванредно корисна нарочито у овом задатку.

Схему решења можемо скицирати наредним кратким реченицама.

1. За дате тачке A и B цртамо праву AB.

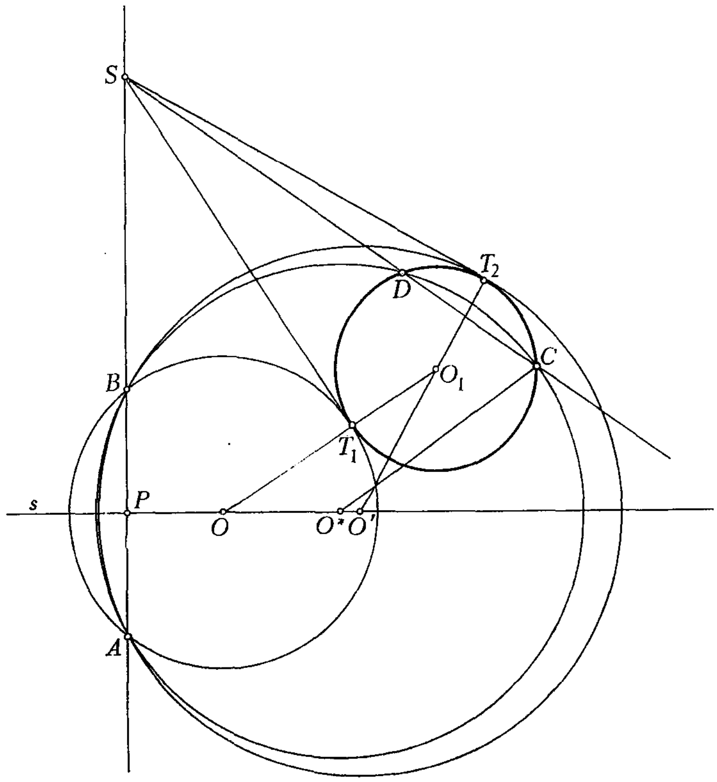
2. Кроз средину P дужи AB цртамо, на познати начин, симетралу s те дужи. На тој симетрали мора да се налази центар O траженог круга, који пролази кроз тачке A и B.

3. На симетрали s узимамо неку тачку O^* за центар неког помоћног произвољног круга, који пролази кроз дате тачке A и B,

али при томе пресеца и дати круг. O_1. Означимо тачке тог пресека са C и D.

4. Пресечну тачку правих AB и CD означимо са S.

5. Потенција тачке S у односу на круг O_1 има вредност квадрата одсечка тангенте ST_1 повучене из тачке S на круг O_1.



Сл. 9

6. Продужење полупречника O_1T_1 до пресека са симетралом s одређује центар O траженог круга полупречника T_1O. Права ST_1 одређује радикалну осу кругова O_1 и O.

7. Друга тангента ST_2 на круг O_1 одређује тачку додира T_2 датог круга O_1 и другог траженог круга, који пролази кроз тачке A и B и при додиру обухвата дати круг O_1. Центар тог другог круга се налази у пресеку продужења полупречника O_1T_2 и симетрале s, у тачки O'.

Ова конструкција је независна од избора помоћног круга O^*.

Наведене геометријске особине задатка су довољне за извођење конструкције.

II. **Конструкција.** Пошто су теоријски елементи решења овог задатка објашњени у анализи, у тачкама 1—7, потпуно елементарно, конкретно извођење конструкције не представља тешкоће.

Може се само још приметити да употреба појмова потенције тачке у односу на круг и радикалне осе двају кругова служи за дубље размишљање о важним геометријским појмовима у теорији кругова.

III. **Доказ.** Тачност наведене конструкције готово аутоматски следује из употребљене методе помоћног круга.

IV. **Дискусија.** Пошто су основни геометријски објекти у нашем задатку: 1. дати круг O_1 датог полупречника R и 2. две тачке A и B, кроз које треба да прође тражени круг, онда у дискусији треба да се проуче могуће промене сваког од тих објеката и, сем тога, као 3. да се испита релативни положај једног објекта-круга, према другом објекту-двема тачкама A и B, а то значи и према правој која пролази кроз ове две тачке.

Круг, сам по себи, одређује се само једним својим параметром — параметром величине, полупречником R, који може узимати само позитивне вредности и то од 0 до $+\infty$. За прву крајњу вредност круг се претвара у тачку и наш задатак дегенерише у први задатак овог рада кад тражени круг мора да прође кроз три дате тачке. У другом случају, за $R \to +\infty$, кад круг дегенерише у праву, наш задатак се претвара у задатак о кругу, који пролази кроз две дате тачке A и B и додирује праву, која је постала од круга у случају $R \to +\infty$.

Други геометријски објект чине две дате тачке A и B. Параметром величине тог геометријског објекта служи растојање $AB = 2b$ између тих тачака. Израз тог параметра у облику $2b$ згодан је из тог разлога што нарочиту улогу игра половина тог растојања и тачка P, средине дужи AB. При $b=0$ тачке се поклапају, а при $b \to \infty$, једна или обе тачке одлазе у бесконачност, а средина, тачка P, може да остане на месту. Ако тачке A и B имају одређени коначни положај и права AB има одређени правац, онда има одређени положај и симетрала тачака A и B, права нормална на праву AB, која пролази кроз тачку P. У теорији кругова та симетрала игра врло важну улогу, јер центар сваког круга, који пролази кроз две тачке A и B мора да се налази на симетрали дужи одређене тим тачкама.

При проучавању могућних положаја тачака A и B према датом кругу O_1 могу се разликовати ови случајеви.

1. Тачке A и B су ван круга O_1,
2. Једна од тачака је на кругу, друга ван круга,
3. Једна од тачака је на кругу, друга у кругу,
4. Обе тачке су у кругу.

Од интереса је поставити геометријске услове за могућност одговарајућих решења.

За проучавање различитих положаја тачака A и B према сталном кругу O_1 згодно је узети у обзир праву што пролази кроз тачке A и B.

Та права може 1. бити ван круга,
2. додиривати круг и
3. сећи круг.

Дискусија свих могућих случајева не задаје тешкоће, али захтева велику пажњу.

4. Наћи круг који додирује две дате праве и пролази кроз дату тачку

Нека су дате две праве p_1 и p_2 и тачка A (сл. 10). Треба конструисати круг који додирује праве p_1 и p_2 и пролази кроз тачку A.

I. **Анализа.** Уочимо праве p_1 и p_2 и њихову пресечну тачку S. Претпоставимо да се тачка A налази на слици у показаном углу.

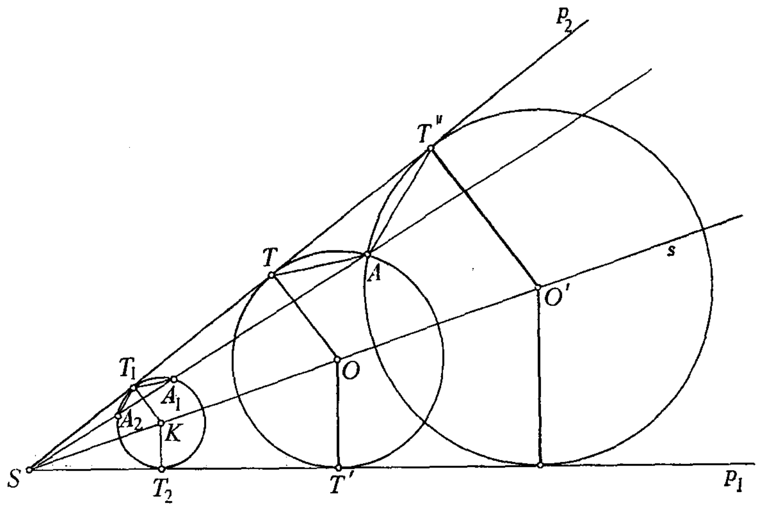
Повуцимо симетралу s датог угла и узмимо на њој неку тачку K за центар круга који додирује праве p_1 и p_2. Додирне тачке означимо са T_1 и T_2.

Дату тачку A спојимо са тачком S правом AS и пресечне тачке те праве са кругом K означимо са A_1 и A_2. Из тачке A повуцимо праву AT паралелну са A_1T_1. Нека она сече праву p_1 у тачки T. Права из T, нормална на p_1, сече симетралу s у тачки O, која је центар траженог круга.

На слици је скициран и други круг који пролази кроз тачку A и додирује праве p_1 и p_2. Тај други круг се добива повлачењем $AT'' \parallel A_2T_1$ и конструкцијом нормале $T''O' \perp p_2$.

II. **Конструкција** је толико једноставна да нема потребе допуњавати оно што је наведено у анализи.

III. **Доказ.** Доказ сваког посебног случаја не представља тешкоће.



Сл. 10

IV. **Дискусија.** Праве p_1 и p_2 могу бити у овим положајима:

1. да се секу,
2. да су паралелне,
3. да се поклапају.

Тачка A може бити у овом положају:

1. Било где у равни између паралелних, сем на правим p_1 и p_2,
2. На једној од правих, сем тачке S прсесека правих.
3. У тачки S пресека правих.

Наведимо и решења поменутих случајева. Случајеве ћемо означавати са два броја тако да први број означава услов за праве, а други услов за тачку. Односне елементарне слике лако може скицирати сам читалац.

1.1. Два круга који пролазе кроз тачку A и додирују праве p_1 и p_2.

1.2. Два круга који пролазе кроз тачку A на правој p_1 и додирују праве p_1 и p_2.

1,3. Круг дегенерише у тачку A.
2,1. Два круга.
2,2. Један круг.
2,3. Случај је немогућ.
3,1. Два система кругова са једне стране двоструке праве.
3,2. Два система кругова.
3,3. Круг дегенерише у тачку A.

5. Наћи круг који додирује три дате праве

Нека су дате три праве p_1, p_2, p_3 (сл. 11). Треба нацртати круг који додирује те три праве.

I. **Анализа.** Овај задатак формулисан речима:

„У дати троугао уписати круг".

такође се налази у IV књизи, став 4, Еуклидових елемената.*

Дајемо текст овог става у преводу.

Нека је дат троугао $AB\Gamma$ (сл. 11*a*). Треба у дати троугао $AB\Gamma$ уписати круг. Преполовимо углове $AB\Gamma$ и $A\Gamma B$ правима $B\Delta$ и $\Gamma\Delta$ и нека се те праве секу у тачки Δ, па повуцимо из тачке Δ на праве AB, $B\Gamma$, ΓA, нормале ΔE, ΔZ, ΔH. Како је угао $AB\Delta$ једнак углу $\Gamma B\Delta$, а прави угао $BE\Delta$ једнак правом углу $BZ\Delta$, два троугла $EB\Delta$ и $ZB\Delta$, имаће по два угла једнака и по једну страницу једнаку, и то наспрам једнаких углова, наиме заједничку страницу $B\Delta$, према томе ће и остале странице једног бити једнаке осталим страницама другог; биће, дакле, ΔE једнако ΔZ. На основу истих разлога и ΔH је једнако ΔZ. Значи да су три дужи ΔE, ΔZ, ΔH међусобно једнаке. Према томе ће круг са центром у Δ описан растојањем до једне од тачака E, Z, H као полупречником проћи и кроз остале тачке и у тачкама E, Z, H додиривати праве AB, $B\Gamma$, ΓA, јер су углови у тим тачкама прави. Заиста, кад би он секао те праве, онда би нормала на пречник, што пролази кроз његов крај, била у кругу, а то је, као што је доказано, немогуће. Према томе круг с центром у Δ описан растојањем до које било од тачака E, Z, H не сече праве AB, $B\Gamma$, ΓA. Дакле он их додирује и биће круг уписан у троугао $AB\Gamma$. Нека је он уписан као ZHE.

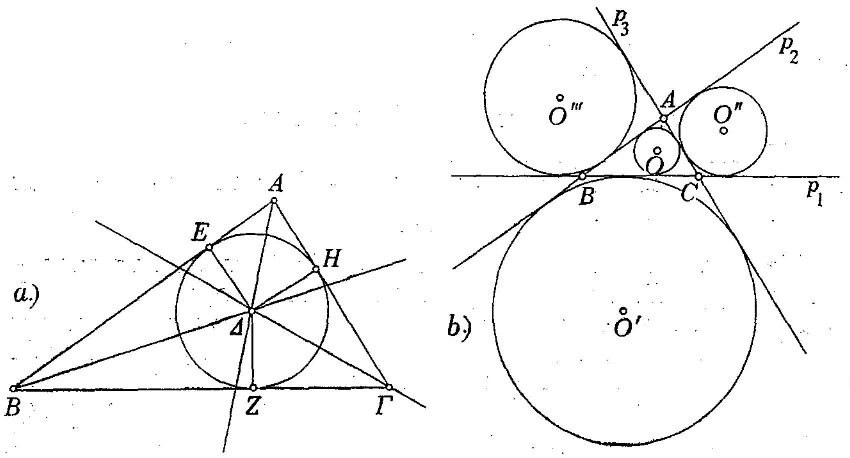
---

* В. примедбу на стр. 19.

На овај начин је у дати троугао $AB\Gamma$ уписан круг EZH. А то је требало извести.

Анализа овог задатка може се извести и на овај начин.

Како центар сваког круга, који додирује две праве, мора да се налази на симетрали угла између тих правих, центар сваког круга, који додирује три праве мора се налазити у пресеку таквих симетрала, које се све три секу у истој одговарајућој тачки, при чему су узете симетрале унутрашњих или спољашњих углова. Тако ћемо добити у општем случају 4 круга: круг O уписан у троугао ABC (сл. 11*b*) и три круга O', O'', O''' споља дописаних том троуглу.



Сл. 11

II. **Конструкција.** Конструишимо симетрале s_A, s_B, s_C углова A, B, C и нормале на те праве n_A, n_B, n_C које служе симетралама спољашњих углова. Пресеци правих (s_A, s_B, s_C), (s_A, n_B, n_C), (n_A,s_B,n_C),($n_A n_B s_C$) дају центре O, O', O'', O''' кругова уписаног и споља дописаних.

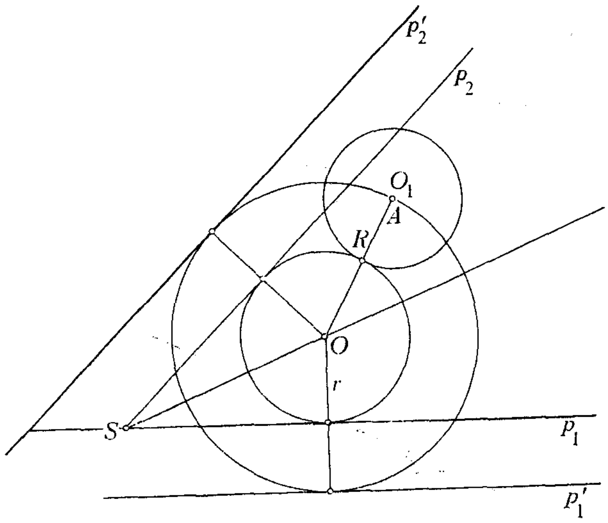
III. **Доказ.** Доказ се заснива на томе да се сваки центар налази на истом одстојању од три одговарајуће праве.

IV. **Дискусија.** Лако је проучити све могуће положаје правих p_1, p_2, p_3 и у вези са тим положај четири горе наведена круга.

6. Наћи круг који додирује две дате праве и дати круг

Нека су p_1 и p_2 две дате праве и O_1 је дати круг (сл. 12).

I. **Анализа.** Ако треба нацртати круг који додирује дате праве p_1 и p_2 и круг O_1 полупречника R, онда са њим концентрични круг полупречника $r+R$ пролази кроз Центар O_1 датог круга и додирује праве p_1' и p_2' паралелне правима p_1 и p_2 на одстојању R од њих. Према томе задатак се своди на конструисање



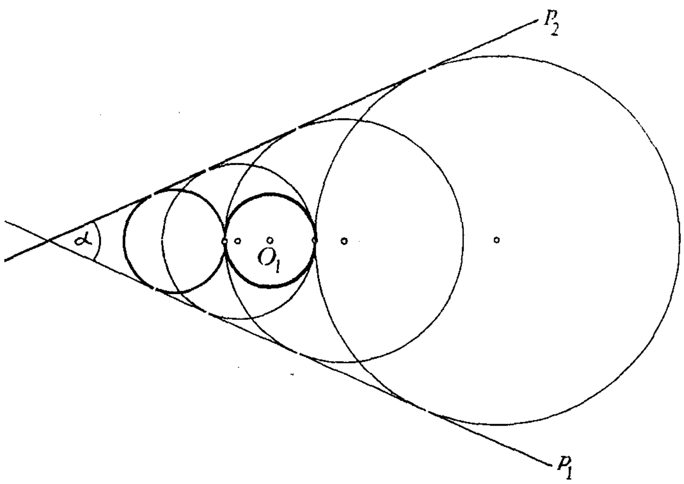
Сл. 12

круга који додирује две дате праве p_1' и p_2' и пролзи кроз дату тачку O_1, односно тачку A. А тај задатак је био решен под 4. Прилагођавање решења задатка 4. овом задатку долази тек у дискусији у вези са проучавањем различитих положаја круга O_1 према правима p_1 и p_2 У овој анализи приметимо још да, како смо видели у случају 4, кроз тачку A можемо повући два круга који додирују праве p_1' и p_2', према томе имамо и два круга који додирују праве p_1 и p_2 и спољa круг O_1. Сем тога, повукли смо две праве p_1' и p_2' изван угла датих правих p_1 и p_2 али можемо узети у обзир кругове који исто тако додирују праве p_1 и p_2, али круг O_1 додирују унутрашњим додиром. За тај случај концентричне кругове додирују праве паралелне правима p_1 и p_2 не оне које се налазе спољa већ у углу, тј. праве p_1'', p_2'' (ове две праве нису нацртане на слици).

II. **Конструкција.** Повуцимо, прво, ван датог угла две праве p_1' и p_2' паралелне правима p_1 и p_2 на растојању R и кроз центар датог круга повуцимо два круга који додирују праве p_1' и p'_2 (на слици 12 је приказан само један). Конструкција тих кругова је изједначена у 4. задатку. Нека центри тих кругова буду у тачкама O_1 и O_2. Најзад, са тим центрима конструишемо концентричне кругове полупречника смањених за полупречник датог круга. Добивена два концентрична круга одговарају условима задатка.

На сличан начин, ако повучемо паралелне праве p_1'' и p_2'' у датом углу и поново према 4. задатку конструишемо два круга који додирују те праве и пролазе кроз центар датог круга, онда ћемо добити два центра O_3 и O_4. Кругови истих центара са полупречницима повећаним за полупречник датог круга додирују дате праве p_1 и p_2 и дати круг O_1 али унутрашњим додиром.

III. **Доказ.** Тачност конструкције круга који додирује две дате праве и пролази кроз дату тачку била је потврђена у претходном задатку. За доказ тачности конструкције кругова у овом задатку довољно је навести две особине кругова: 1. ако имамо



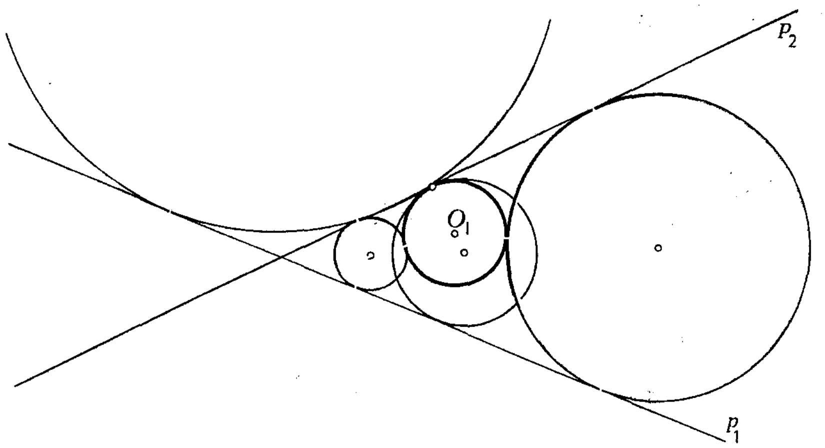
Сл. 13

круг O који пролази кроз центар O_1 другог круга, онда после смањења полупречника круга O за дужину полупречника круга O_1, концентрични круг додирује круг O_1, и 2. ако имамо круг O, који додирује праву p_1', онда после смањења полупречника круга O за дужину растојања између паралелних правих p_1 и p_1', нови концентрични круг ће додиривати праву p_1. Сличне особине кругова важе и за кругове чији се полупречници повећавају.

IV. **Дискусија.** Пошто смо видели да је дискусија и релативно простијих задатака у довољној мери гломазна, а не задаје нарочитих тешкоћа, нећемо изводити дискусију овог задатка са свима детаљима, већ ћемо се зауставити на навођењу неколико карактеристичних случајева, који ће у довољној мери карактерисати слику могућих решења овог задатка.

a. Ако дати круг O_1 сав лежи у углу правих p_1, p_2, који кратко означимо са α, онда наведене конструкције дају четири круга, два спољашњег додира и два унутрашњег (сл. 13).

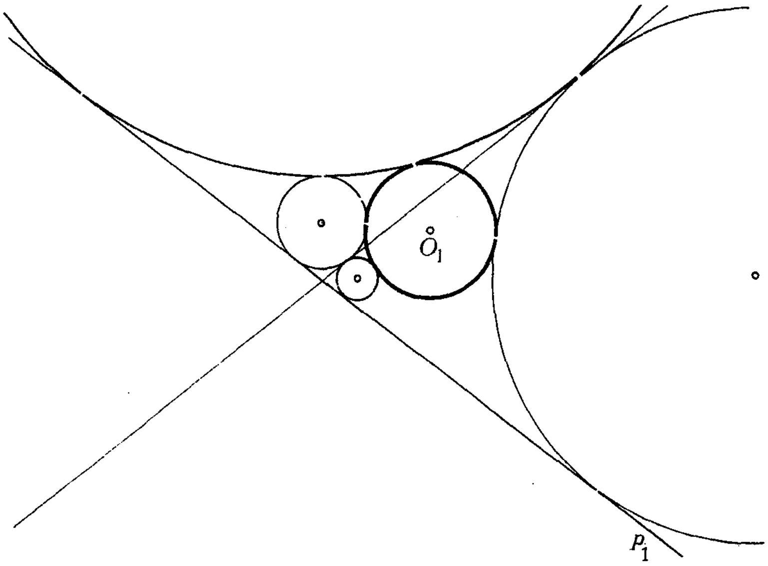
b. Ако круг O_1 додирује праву p_2, а лежи у углу, лако је видети да се кругови са унутрашњим додиром поклапају. Појављује се још један круг спољашњег додира, (свега три), за који је права p_2 заједничка тангента круга O_1 и тог новог додирног круга (сл. 14).



Сл. 14

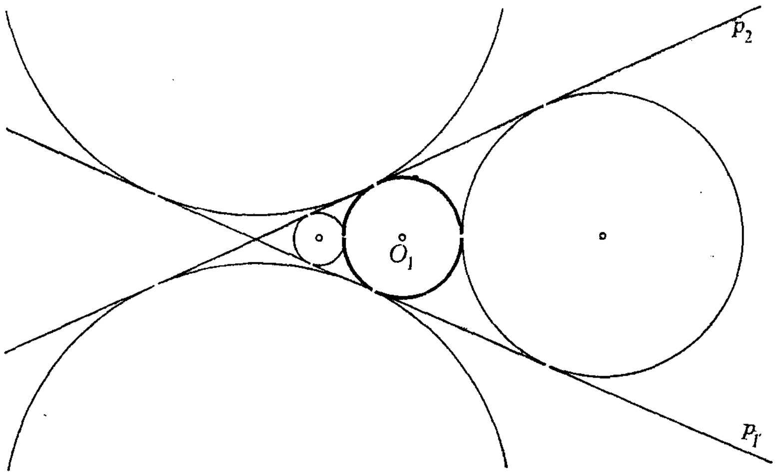
c. Ако круг O_1 сече само праву p_2, кругови унутрашњег додира су немогући, али се појављују место њих два круга спољашњег додира (укупно четири) сл. 15.

d. Ако круг O_1 додирује обе дате праве p_1 и p_2, круг унутраш-



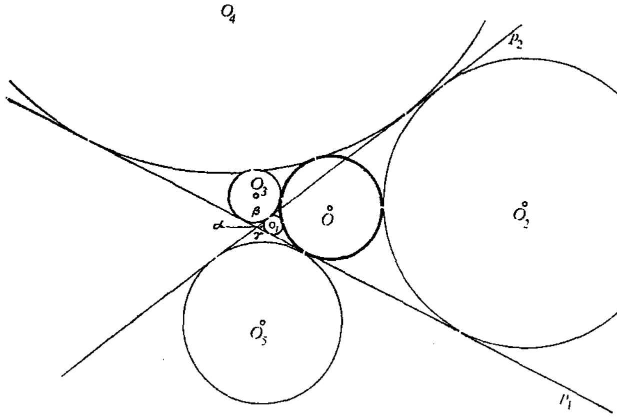
Сл. 15

њег додира дегенерише у сам дати круг O_1, али се појављују још два круга спољашњег додира (сл. 16).



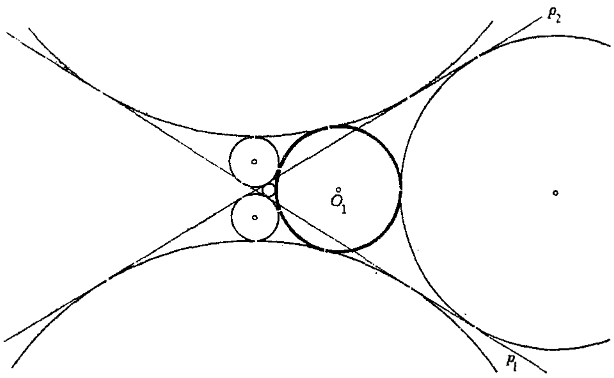
Сл. 16

e. Ако круг O сече неку праву, рецимо p_2 и додирује другу, кругова унутрашњег додира нема, али има пет кругова спољаш њег додира: два у углу α, O_1 и O_2, два у углу β, где се налази други део датог круга O_1 и то O_3 и O_4 и један у углу γ, супротном углу β — круг O_5 (сл. 17).



Сл. 17

f. Ако круг O_1 сече обе праве, али се пресечна тачка датих правих налази ван датог круга, има шест кругова спољашњег додира (сл. 18).

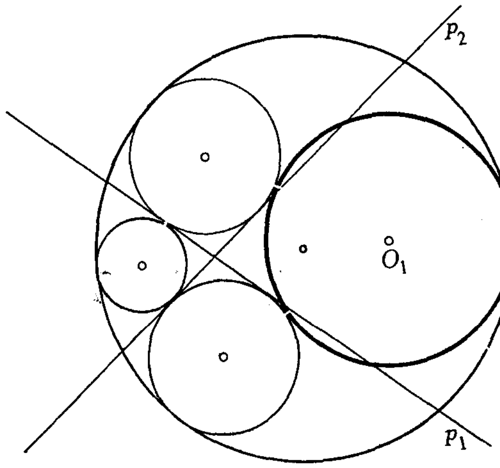


Сл. 18

g. Ако круг O_1 сече обе праве и пресечена тачка правих се налази у кругу, имамо четири круга унутрашњег додира и то по један круг у сваком од четири угла који образују те праве (сл. 19).

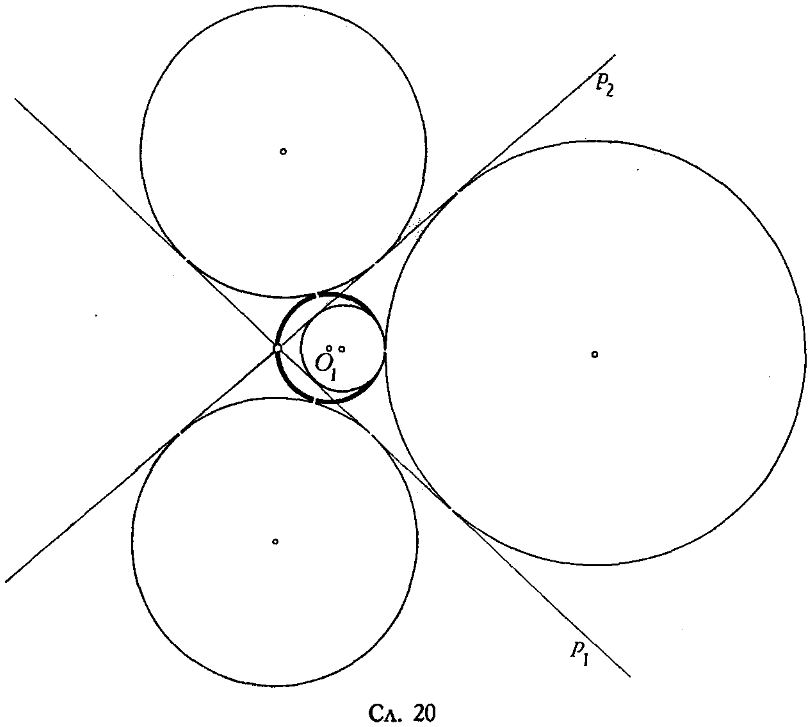
h. Као последњи случај наведимо случај кад круг O_1 пролази кроз пресечну тачку правих p_1 и p_2 и не додирује ниједну од њих.

У овом случају имамо само један круг унутрашњег додира; три



Сл. 19

остала круга таквог додира дегенеришу у пресечну тачку датих правих. Сем тога има још три круга спољашњег додира (сл. 20).



Сл. 20

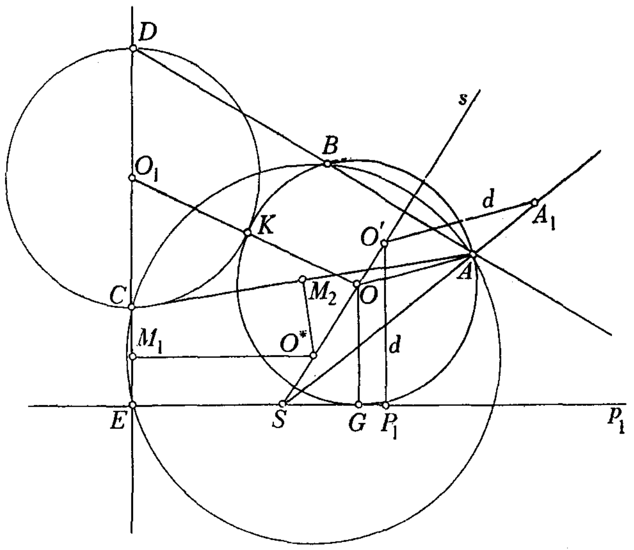
У овом задатку има још интересантних релативних положаја круга и правих, али то може послужити читаоцу за самостална размишљања.

7. Наћи круг који додирује дати круг и дату праву и пролази кроз дату тачку

Нека је дато: круг O_1, права p_1 и тачка A. Тражени круг O треба да додирује дати круг O_1, дату праву p_1 и пролази кроз дату тачку A (сл. 21).

I. **Анализа.** Анализу овог задатка изложимо конспективно према слици.

Ако из центра O_1 датог круга спустимо нормалу O_1E на дату праву p_1 и крајеве одговарајућег пречника означимо са C и D, поједине операције можемо тумачити овако:



Сл. 21

1. Дат је круг O_1 са тачком E, пројекцијом тачака CO_1D на правој p_1. Тачка M_1 је средина дужи CE и тачка M_2 средина дужи CA.

2. Круг ACE са центром O^* одређује се на познати начин (види зад. 1).
3. Пресечена тачка праве DA и круга ACE одређује тачку B на том кругу.
4. Две тачке A и B одређују симетралу s тетиве AB а пресечна тачка ове симетрале са правом p_1 је S.
5. На симетрали s узмимо произвољну тачку O'.
6. Одмеравамо растојање тачка O' од праве p_1. Означимо то растојањем са $O'P_1=d$.
7. На продужењу SA одређујемо тачку A_1 са растојањем d од тачке O'.
8. Из тачке A конструишимо праву паралелну са A_1O'. Ова права се сече са симетралом s у тачки O, а то је центар траженог круга, који пролази кроз A, B, K, G, где су K и G додирне тачке са датим кругом и датом правом.

II. **Конструкција** непосредно следује из изложене анализе и кад тражени круг унутра додирује дати круг O_1. То је добра вежба из ове категорије геометријских проблема.

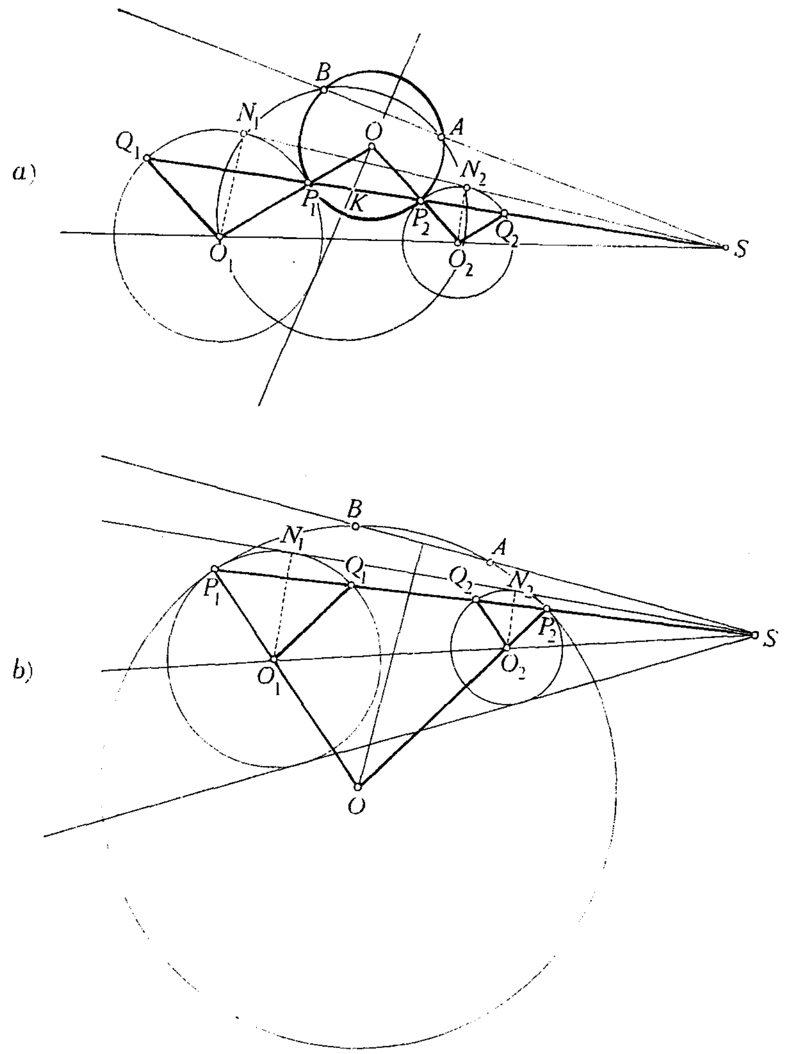
III. **Доказ.** У излагању овог задатка елементи доказа толико су улазили у анализу да нема потребе издвајати их засебно.

IV. **Дискусија.** У дискусији према општем правилу обично се проучавају специјални случајеви датог проблема. Али у овом задатку, због разноликости датих елемената круг, права и тачка, у произвољним положајима, специјални случајеви су веома многобројни, а релативно једноставни, па нећемо овде улазити у читав тај посао. Међутим, обратићемо пажњу на методу која је била примењена при решавању овог задатка. Она се састоји у увођењу неког новог геометријског објекта који спаја разноврсне дате елементе. При решавању овог проблема био је уведен круг ACE, помоћне улоге, који спаја дату тачку A, дату праву p_1 и дати круг O_1. Спајање тачке A са D одређује тачку B, која решава проблем.

8. Наћи круг који пролази кроз дату тачку и додирује два дата круга

Нека су дата два круга O_1 и O_2 и тачка A. Треба кроз тачку A повући круг који додирује та два круга (сл. 22).

I. **Анализа.** Претпоставимо да је проблем решен и нека тражени круг O пролази кроз тачку A и додирује кругове O_1 и O_2 у тачкама P_1 и P_2.



Сл. 22

Конструишимо праву $O_1 O_2$ кроз центре датих кругова и спољашњу тангенту $N_1 N_2$ са тачкама додира N_1 и N_2, које се одређују на познати начин. Пресечна тачка S праве $O_1 O_2$ и тангенте $N_1 N_2$ је центар сличности датих кругова.

Три тачке N_1, N_2, A одређују круг, који пролази кроз те три тачке. Нека права SA сече тај круг у тачки коју означимо са B. Пошто за тај круг знамо сад четири тачке A, B, N_1, N_2 за две секанте из S имамо ову једнакост.

$$SB \cdot SA = SN_1 \cdot SN_2. \tag{1}$$

Ова једнакост даје могућност одредити положај тачке B.

Лако је закључити да је и

$$SP_1 \cdot SP_2 = SN_1 \cdot SN_2, \tag{2}$$

јер за тражени круг O имамо

$$SP_1 \cdot SP_2 = SB \cdot SA.$$

У једначини (1) је неодређен само један члан SB, па, према томе, можемо конструисати ту дужину према познатом поступку за четврту пропорционалу. На један или други начин се одређује тачка B, друга тачка, кроз коју треба да пробе тражени круг. На тај начин наш задатак се своди на конструисање круга, који треба да пробе кроз две тачке A и B и да додирује круг, рецимо, O_1. И тада постоји права $O_1 O$ која спаја центар O_1 датог круга са центром O траженог круга. Та права одређује тачку P_1 додира кругова. Са своје стране, тачка P_1 одређује положај секанте SP_1, која одређује и тачку P_2 додира круга O са другим датим кругом O_2. Тиме се решава дати задатак. При решавању искористили смо задатак 3. о конструисању круга који пролази кроз две дате тачке и додирује дати круг.

На слици 22*a* дата тачка А и тражени круг O се налазе ван области датих кругова O_1 и O_2.

На слици 22*b* имамо схему случаја кад тражени круг, пролазећи кроз дату тачку A, обухвата дате кругове.

II. **Конструкција.** Конструкцију овог задатка можемо поделити у три дела.

1. Конструкцију тачке B као допуне тачке A, кроз које треба да пробе тражени круг.
2. Примену трећег задатка о конструкцији круга који пролази кроз две дате тачке и додирује један од датих кругова.
3. Проширење додира на други круг.

Садржај сваког дела наведене конструкције непосредно је јасан из оног што је било наведено у анализи задатка.

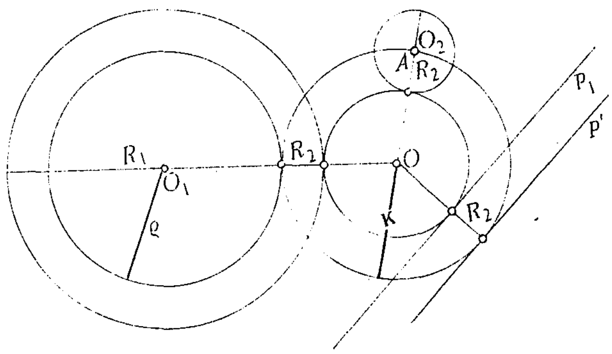
III. **Доказ.** Нећемо наводити детаље доказа, јер после изведене анализе доказ би садржао само понављање већ наведених аргумената.

IV. **Дискусија.** Дискусија овог задатка може бити врло опширан материјал, али она, на жалост, захтева и много времена и много слика.

9. Наћи круг који додирује два дата круга и дату праву

Нека су дата два круга O_1 и O_2 полупречника R_1 и R_2 $(R_1 > R_2)$ и права p_1. Треба конструисати круг, који додирује кругове O_1 и O_2 и праву p_1 (сл. 23*a*).

a)

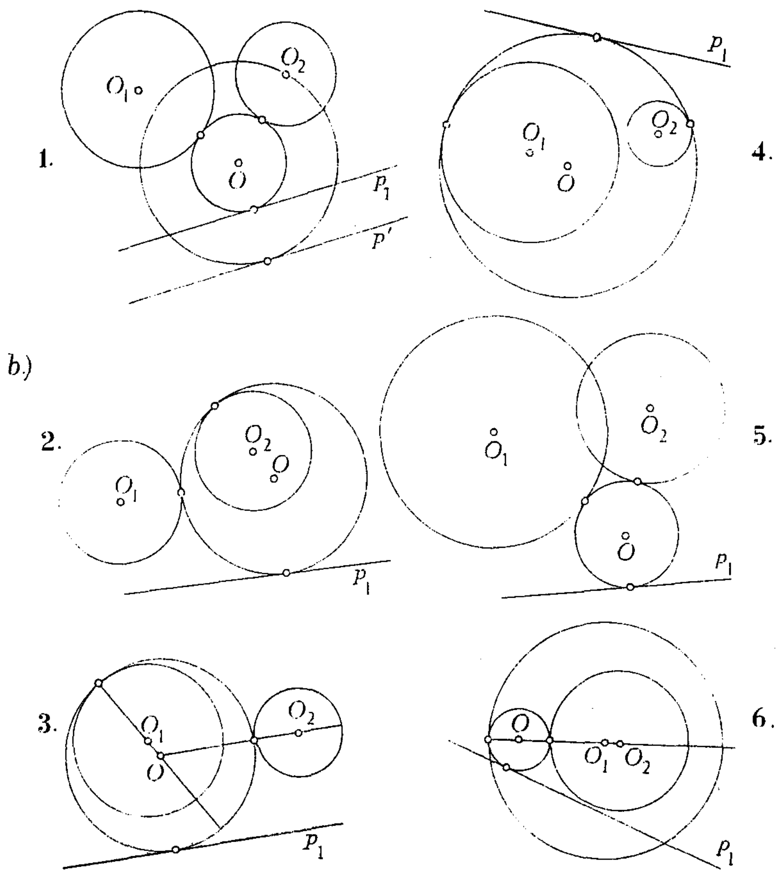


Сл. 23*a*

I. **Анализа.** Ако повучемо праву p' паралелну правој p_1 на растојању R_2 са супротне стране од оне на којој су кругови O_1 и O_2, можемо тврдити да се наш задатак своди на конструисање круга који пролази кроз тачку O_2 и додирује праву p' и круг полупречнека $R_1 - R_2 = \rho$.

II. **Конструкција.** Конструишимо праву p' паралелну правој p на растојању R_2 и то са друге стране од оне на којој су дати кругови. Код дата два круга O_1 и O_2 смањимо полупречнике за дужину R_2, тада од првог круга O_1 остане круг полупречника $R_1 - R_2 = \rho$, а од другог само центар, који као тачку означимо са A. После извршене ове конструкције наш задатак се своди на конструкцију круга O који треба да додирује круг полупречника ρ и праву p', што пролази кроз тачку A. Такав задатак смо решавали под бројем 7. Ако у резултату решења овог задатка добијемо круг одређеног положаја и неког полупречника $\varkappa$, онда је одговор на дати задатак концентрични круг полупречника $\varkappa - R_2$.

III. **Доказ.** Доказ добивеног решења је очигледан.



Сл. 23*b*

IV. **Дискусија.** Дискусија овог задатка је врло опширна. Пошто не можемо тој дискусији посветити сувише много места, показаћемо само неколико слика (сл. 23*b*) за један конкретан случај, које дају представу о карактеру решења.

10. Наћи круг који додирује три дата круга

Овај класични задатак о додиру кругова зове се *Аполонијев задатак*.

Тај задатак је од времена Аполонија из Перге (650—190 до н. е.) предмет проучавања више геометара а проучава се и данас.

Приметимо да се овај задатак може сматрати као општи задатак, а остале задатке из теорије додира кругова можемо сматрати као специјалне случајеве овог општег задатка, кад одговарајући круг дегенерише или у тачку или у праву са полупречником круга који тежи нули или бесконачно великој вредности.

Аполонијев задатак има низ различитих решења. Већина од њих захтева дубље познавање геометрије кругова. Не улазећи сад у третирање тих решења наведимо овде само једно врло елементарно решење, које припада Viète-у.*

Означимо полупречнике датих кругова O_1, O_2, O_3 са R_1, R_2, R_3 и претпоставимо да је $R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3$. Зауставимо се прво на случају, кад су услови једнакости изостављени и тада је R_3 најмањи полупречник.

I. **Анализа.** Анализирајмо случај, кад се три дата круга не секу.

Из центра круга O_1 нацртајмо два круга: један O_1' полупречника $R_1 - R_3$ и други O_1'' полупречника $R_1 + R_3$. Исто то урадимо из центра круга O_2: нацртајмо круг O_2' полупречника $R_2 - R_3$ и O_2'' полупречника $R_2 + R_3$. Сад узмимо у обзир центар круга O_3 који означимо са A и поставимо задатке одређивања круга који пролази кроз тачку A и додирује два круга у овим комбинацијама

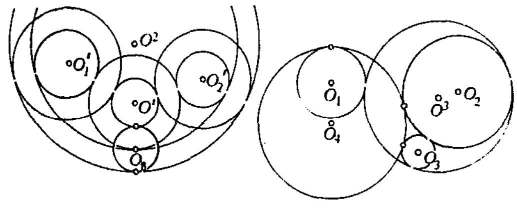
$$O_1' \text{ и } O_2',$$
$$O_1' \text{ и } O_2'',$$
$$O_1'' \text{ и } O_2',$$
$$O_1'' \text{ и } O_2''.$$

Сваки од тих задатака спада у задатке под бројем 8 (тачка и два круга). У општем случају такав задатак може имати више решења, али треба узимати само оно, које одговара основном постављеном проблему. Наредно излагање је конспективно.

---

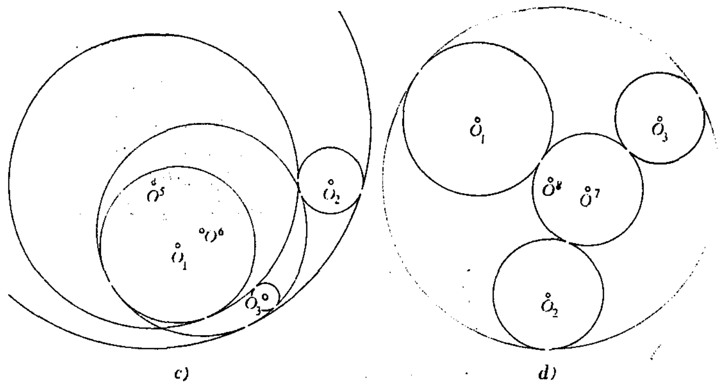
* Viète, Apollonius Gallus, 1600.

Сл. 24*a* показује да таква два круга могу бити: круг O^1, који додирује кругове O_1' и O_2' споља и круг O^2, који обухвата те кругове. Кад се кругу O^1 смањи полупречник за R_3, онда ће њему концентрични круг додиривати споља кругове O_1'' (то је већи круг са центром у O_1'), O_2'' (већи круг са центром у O_2') и O_3. Ако се кругу O^2 повећа полупречник за R_3, он ће додиривати споља кругове O_1'', O_2'' и O_3



Сл. 24*a*, *b*

Са слике 24*b* на сличан начин добивамо: круг O^3, који додирује круг O_1 споља, а кругове O_2 и O_3 својом унутрашњом страном и круг O^4 који додирује кругове O_2 и O_3 споља и круг O_1 својом унутрашњом страном.



Сл. 24*c*, *d*

На слици 24*c* имамо: круг O^5 који додирује кругове O_2 и O_3 споља и круг O_1 унутра и круг O^6, који додира круг O_2 споља и кругове O_1 и O_3 унутрашњом страном.

Најзад, на слици 24*d* имамо: круг O^7, који додирује сва три круга O_1, O_2 и O_3 споља, а круг O^8 који исто сва три круга додирује унутрашњим додиром, тј. обухвата сва три круга.

Према томе све случајеве можемо обухватити овом таблицом:

Назив помоћних кругова	Назив решења	Назив кругова које обухвата тражени круг	За добивање решења круг кроз тачку треба:
O_1', O_2'	O^1	O_3	повећати
	O^2	O_1, O_2	смањити
O_1', O_2''	O^3	O_2, O_3	повећати
	O^4	O_1	смањити
O_1'', O_2'	O^5	O_2	смањити
	O^6	O_1, O_3	повећати
O_1'', O_2''	O^7	—	смањити
	O^8	O_1, O_2, O_3	повећати

Извршена анализа показује да у општем случају, кад се дати кругови не секу, проблем има осам решења.

II. **Конструкција.** Из извршене анализе можемо закључити да се овај задатак своди на 8. задатак: наћи круг који додирује два дата круга и пролази кроз дату тачку. Али од четири решења 8. задатка за овај задатак се могу искористити само два решења.

III. **Доказ.** Доказ конструкције овог задатка непосредно се своди на доказ претходног 8. задатка и на закључак да круг концентричан са нађеним помоћним кругом, који пролази кроз дату тачку и додирује два помоћна круга, треба нацртати полупречником већим за R_3 или мањим за ту исту дужину у зависности од тога какве је природе додир са помоћним круговима концентричним са круговима O_1 и O_2.

IV. **Дискусија.** Дискусија овог задатка за све могуће положаје и величине датих кругова представља врло опширан проблем. Овај задатак је детаљније проучен у опширним курсевима аналитичке геометрије у вези са теоријом система кругова. Овде се нећемо заустављати на тој дискусији.

Навешћемо само два специјална случаја.

Први, кад два круга додирују један други, рецимо, споља, а трећи има произвољан положај. Од осам решења општег случаја отпадају два случаја и то у зависности од положаја трећег круга према заједничкој тангенти кругова O_1 и O_2.

Други, кад се сва три круга налазе у спољашњем додиру. Тада имамо само два решења: O^7 и O^8, спољашњег и унутрашњег додира.

Разни други случајеви специјалног положаја могу представљати добар материјал за проучавање геометријског задатка са еволуционог гледишта.

Овим завршавамо наше елементарно проучавање чувених Аполонијевих задатака о додиру кругова.

*

* *

ПРИМЕРИ

α

Наћи круг датог полупречника, који пролази кроз дату тачку и додирује дату праву.

Нека су дати: тачка A, права p_1 и дужина r једнака полупречнику траженог круга (сл. 25). Треба кроз тачку A повући круг полупречника r, који додирује праву p_1.

I. **Анализа.** Претпоставимо да круг O додирује праву p_1 и пролази кроз тачку A. Ако тада повучемо праву p' паралелну са p_1 на одстојању r од праве p_1 и то са стране, где се налази тачка A, онда се може тврдити да се тачка O, центар траженог круга, налази 1. на правој p' и 2. на кругу полупречника r са центром у тачки A.

II. **Конструкција.** Повуцимо на растојању r од праве p_1 са оне стране, где се налази тачка A, прву p' паралелну правој p_1. Из тачке A, као центра, полупречником r опишемо круг A, нека он сече праву p' у тачкама O и O_1. Кругови O и O_1 полупречника r одговарају условима задатка.

III. **Доказ.** И један и други круг пролази кроз тачку A; сваки од њих додирује праву p_1, јер је растојање њихових центара од те праве једнако полупречнику круга; најзад, сваки круг има за полупречник дату дужину r.

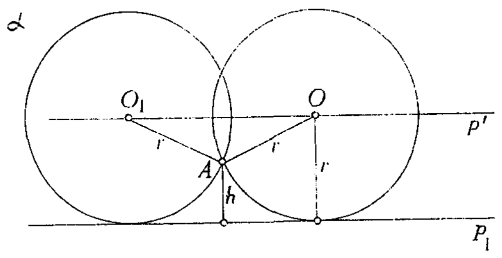
IV. **Дискусија.** При дискусији овог задатка можемо претпоставити да је величина r стална, јер увек можемо слику цртати тако да величина r остане иста.

Према томе је довољно мењати само вредност одстојања тачке A од дате праве p_1 које означимо са h. Довољно је проучавати само позитивне вредности h, јер негативним вредностима одговара решавање истог задатка само са положајем тачке A са друге стране од праве p_1.

Ако је $h=0$, тачка А лежи на правој p_1. Центри O и O_1 се поклапају и леже на нормали из тачке A на растојању r од праве p_1. Према томе имамо једно решење.

Ако узмемо у обзир и другу страну равни од праве p_1, можемо тврдити, да овде можемо нацртати два круга полупречника r који пролазе кроз тачку A и додирују дату праву.

Ако је $0 < h < r$ имамо два решења, како то показује слика 25α.



Сл. 25

Ако је $h=r$, тачка A се налази на правој p'; имамо два решења, при чему се кругови O и O_1 додирују у тачки A.

Ако је $r < h < 2r$, исто тако имамо два пресека кругова O и O_1, али условима задатка одговара само горња тачка A.

Ако је $h=2r$, тачке O и O_1 поново се поклапају. Тражени круг има за пречник дужину нормале спуштене из тачке A на праву p_1. Једно решење.

Ако је $h < 2r$, круг из центра A са полупречником r не сече праву p', задатак је немогућ.

Резултат дискусије даје ова таблица:

$h=0$	— једно решење, односно два са разних страна од дате праве,
$O < h < r$	— два решења, кругови се секу,
$h=r$	— два решења, кругови се додирују,
$r < h < 2r$	— два решења, кругови се секу,
$h=2r$	— једно решење,
$h > 2r$	— решење не постоји.

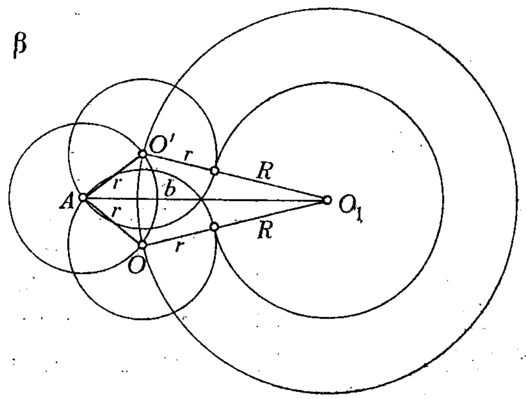
β

Наћи круг датог полупречника, који пролази кроз дату тачку и додирује дати круг.

Нека је дат круг O_1 полупречника R и тачка A. Треба кроз тачку A повући круг датог полупречника r тако да он додирује круг O_1 (сл. 26).

I. **Анализа.** Ако изоставимо услов да тражени круг мора да прође кроз тачку A, геометријско место центара кругова полупречника r који додирују круг O_l је круг концентрични том кругу са полупречником $R+r$, ако се тачка A налази ван круга O_1. Са друге стране, ако изоставимо услов да тражени круг мора

β



Сл. 26

да додирује круг O_1, његов центар мора да се налази на растојању r од тачке A, тј. припадати другом геометријском месту, кругу полупречника r са центром у A. Пресеци наведена два геометријска места, ако постоје, тачке O и O' су центри тражених кругова.

II. **Конструкција.** Нацртајмо 1. круг полупречника $R+r$ концентричан кругу O_1 и 2. круг полупречника r са центром A. Тачке O и O' пресека нацртаних кругова дају положаје центара тражених кругова. У нацртаном конкретном случају проблем има два решења.

III. **Доказ.** Прво, нацртани кругови пролазе кроз тачку A, јер су центри O и O' на растојању r од те тачке. Друго, нацртани кругови додирују круг O_1, јер растојање центара кругова O_1 и O односно O' износи $R+r$, а то је услов спољашњег додира кругова.

IV. **Дискусија.** У дискусији проблема учествују три величине: R — полупречник датог круга, r — дати полупречник траженог круга и растојање, које означимо са d, између центра O_1 датог круга и дате тачке A.

Пре свега приметимо да, рецимо, полупречник R можемо сматрати исте величине за све могуће случајеве, јер је увек могуће променити димензије слике.

Не наводећи одговарајућа образложења наведимо само таблицу решења. Бројна ознака са десне стране показује нумере стубаца из услова с леве стране.

$d > R,\ r > R,$	$d > R+2r$	1,1,1	нема решења,
	$d = R+\mathrm{d}r$	1,1,2	једно решење,
	$d < R+2r$	1,1,3	два спољашња круга,
	$d = 2R - R$	1,1,3,1	два спољашња и један унутрашњи додир,
	$d < 2R - R$	1,1,3,2	два спољашња и два унутрашњег додира,
$d > R,\ r = R,$	$d > 3R$	1,2,1	нема решења,
	$d = 3R$	1,2,2	једно решење,
	$d < 3R$	1,2,3	два спољашња круга,
$d > R,\ r < R,$	$d > R+2r$	1,3,1	нема решења,
	$d = R+2r$	1,3,2	једно решење,
	$d < R+2r$	1,3,3	два спољашња круга,
	$d = R,\ r > R$	2,1	један круг спољашњег додира и један круг унутрашњег додира, који обухвата дати круг,
	$r = R$	2,2	један круг спољашњег додира, други круг се поклапа са датим кругом,
	$r < R$	2,3	један круг спољашњег додира и један круг унутрашњег додира, који је обухваћен датим кругом,

$d < R,\ r > R$	3,1 немогуће је,
$r = R$	3,2 немогуће је,
$r < R,\ r > \frac{1}{2} R$	3,3,1 два решења,
$r = \frac{1}{2} R$	3,3,2 два решења, изузетан случај 3,3,2,1 кад је $d=0$; имамо бескрајно много решења,
$r < \frac{1}{2} R,\ d > R - 2r$	3,3,3,1 два решења,
$d = R - 2r$	3,3,3,2 једно решење,
$d < R - 2r$	3,3,3,3 нема решења.

Ови резултати показују да у релативно једноставном задатку, као што је овај, дискусија може бити доста гломазна, због већег броја параметара. Сем тога се из дискусије овог задатка види да и сама конструкција, која, како у први мах изгледа, решава задатак у потпуности, може бити недовољна и мора бити проширена и на разне случајеве дискусије.

* *
*

БИБЛИОГРАФСКЕ ПРИМЕДБЕ

Овде ћу навести ону литературу о додиру кругова, са којом сам се упознао непосредно или посредно у Београду.

[1] Еуклидови елементи. *О додиру два круга.* 26—29 теореме, Класични научни списи МИ САНУ, књ. III, Београд 1953.

[2] Quaestiones Archimedeae, Hauniae, 1879, S. 29. *О додиру кругова* Архимед је написао специјалну расправу, коју је обрадио T. L. Heiberg.

[3] Рад Аполонија „Περὶ ἐπαφῶν" — према Папосу је изгубљен. Pappos- ed. Hultsch II, S. 647.

[4] Viète: *Apollonius Gallus,* Paris 1600, Viète, Opera, S. 325—346.

[5] Папос: четврта књига зобрника Συναγωγή Pappous, N. 15, ed Hultsch, I. стр. 200.

[6] E. Koetter: *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie*, Jahresber. d. Dtsch. Math. Verein. 5, II, Leipzig 1901. S. 109 ff.

[7] J. A. Grunert (1834): *Lehrbuch der Math. f. mittl. Klasse, II. Ebene Geometrie.* 404-407.

[8] A. L. Crelle (1826): *Elemente. I.* 1826, § 290 und 399 Gauss, Werke 4. Gött. 1880, S. 399 f.

[9] Herm. Bodenstedt (1906).: *Geometrografische Lösungen der zehn Hauptfälle. — Das Berührungssystem des Apollonius. Z. math. nat. Unt.* 37, 1906, S. 89—102.

[10] Genauere Geschichte vgl. W. Killing und H. Hovestadt-Handbuoh des mathematischen Unterrichts. B. 1. 1901. S. 414 ff. 24.

[11] H. Thieme: *Die Elemente der Geometrie.* Leipzig und Berlin. 1909. Ed 13. S. Teubner.

[12] M. Zacharias: *Encykl. d. math. Wiss.* III. AB 9. Leipzig 1921. S. 1102—1103.

[13] Э. Кольман: *История математики в древности.* Москва, 1961 г.

[14] А. П. Юшкевич: *История математики в средние века.* Москва 1961 г.

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ

Књ. 1. — **Еуклидови елементи** — В. 1949. 8°, стр. 66
Књ. 2. — **Еуклидови елементи** — В. 1950. 8°, стр. 29
Књ. 3. — **Еуклидови елементи** — В. 1953. 8°, стр. 48
Књ. 4. — **Еуклидови елементи** — В. 1953. 8°, стр. 31
Књ. 5. — **Еуклидови елементи** — В. 1953. 8°, стр. 58
Књ. 6. — **Еуклидови елементи** — В. 1953. 8°, стр. 56
Књ. 7. — **Еуклидови елементи** — В. 1955. 8°, стр. 58
Књ. 8. — **Еуклидови елементи** — В. 1955. 8°, стр. 44
Књ. 9. — **Еуклидови елементи** — В. 1956. 8°, стр. 48
Књ. 10. — **Еуклидови елементи** — В. 1956. 8°, стр. 19
Књ. 11. — **Еуклидови елементи** — В. 1957. 8°, стр. 64
Књ. 12. — **Еуклидови елементи** — В. 1957. 8°, стр. 58
Књ. 13. — **Еуклидови елементи** — В. 1957. 8°, стр. 80

Превео, коментар додао и поговор написао *Антон Билимовић*

Свих 13 књига повезано је у једну књигу.

Књ. 14. — **D. Hilbert**, Основе геометрије. — В. 1957. 8°, стр. 232
Превео са осмог немачког издања *Ж. Гарашанин*

Књ. 15. — **Лобачевски**, Геометријска испитивања из теорије паралелних линија. — В. 1951. 8°, стр. 81
Превео и напомене додао *Бранислав Петронијевић* (друго проширено издање).

НОВА СЕРИЈА

Књ. 1(16) — **Руђер Бошковић**, О закону континуитета и његовим последицама у односу на основне елементе материје и њихове силе. — В. 1975. 8°, стр. 170
С латинског превела *Даринка Невенић-Грабовац*
Предговор и коментар написао и превод стручно редиговао *Ернест Стипанић*

Књ. 2(17) — **Richard Dedekind**, Непрекидност и ирационални бројеви и Шта су и чему служе бројеви?
Georg Cantor, О проширењу једног става из теорије геометријских редова. В. 1976. 8°, стр. 93.
С немачког превео *З. П. Мамузић*

Књ. 3(18) — **Антон Билимовић**, Десет Аполонијевих задатака о додиру кругова. В. 1977., 8° стр. 53

Технички уредник: Милан ЧАВЧИЋ