УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јулија Младеновић

НЕЈЕДНАКОСТИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНАТА ТРОУГЛА

МАСТЕР РАД

Београд, септембар 2016.

Увод

Није сва лепота у познавању појмова,
права лепота је у њиховој примени.

Кроз обавезно осмогодишње школовање, за релативно кратко време, од ученика се очекује са савладају обимну математичку материју. Оно што чини садржину те материје је резултат искуства и напора људи у дугом временском периоду. Појави првих математичких знања претходи дуг пут пун доживљаја, примања мноштва утисака преко чула, пут са обиљем запажања и искустава стицаних у борби за опстанак, а затим у настојањима да живот постане што више вредан да се проживи.

У средњој школи пак, ваљало би да ученици овладају основним знањима, те надограђују појмове, знања и вештине. Средњошколска знања су у практичне сврхе заснована на применама, које су добра основа за факултетске надоградње.

У Риндовом папирусу, поред осталог, налази се (у нешто мањем обиму) и материја из геометрије. Написао га је свештеник Ахмес и назвао га *Упутства да се знају све тајне ствари.* Из овог назива проистиче потврда чињенице да су математичка знања била доступна и позната малом броју људи у тадашњем времену и на том подручју. Поседовање знања било је везано за свештенике. Иначе, Египћани су решавали конкретне математичке проблеме које је наметала пракса, нарочито градитељство. Решавање проблема је обично било решавање једначина, а методе решавања су биле сличне методама којима их данас решавамо, док се ту није појављивало пуно теорије. Геометрија је била садржајно богатија него код осталих народа тог доба. Претпоставља се да су на то утицале временске прилике, конкретно честе поплаве Нила. На основу сачуваног записа настао је и појам *Египатски троугао*, троугао чије су странице у односу $3 : 4 : 5$ и који је правоугли.

Велики допринос геометрији су дали Грци, а на темељима Еуклидових *Елемената* геометрија добија форму коју изучавамо и данас. На овом месту издвајамо три дефиниције из Еуклидових Елемената, које су повезане са садржајем овог рада.

19. Праволинијске фигуре су оне које су ограничене правама, тростране су ограничене са три, четворостране са четири, многостране са више од четири праве.

20. Од тространих праволинијских фигура, *једнакострани* троугао има три једнаке стране, *једнакокраки* има само две једнаке стране, а *разнострани* има три неједнаке стране.

21. Даље, од тространих фигура *правоугли* троугао је онај који има прав угао, *тупоугли* онај који има туп угао, а *оштроугли* онај који има три оштра угла.

Упознајући облике, још од предшколског узраста, између осталих дете упознаје троугаони облик. Троугао као облик наставља да се појављује и даље кроз школовање. У првом разреду се уводи појам линија, те се кроз врсте линија напомене и *троугао као затворена изломљена линија*, а на потпуном усвајању и надоградњи ових појмова се инсистира у петом разреду основне школе.

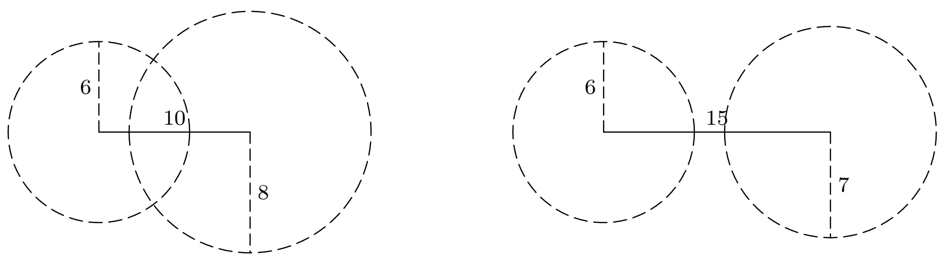
У шестом разреду основне школе појам троугла је већ усвојен, па је прави моменат да се утврди „очигледна" неједнакост троугла. Обради наставне јединице у овом периоду се не може приступити само са теоријске стране, већ је пожељно да буде и демонстративна. Уобичајна наставна средства за ову тему су штапићи; пожељно је имати бар четири штапића различитих дужина, од којих је један дужине једнаке збиру дужина нека друга два штапића из тог скупа. Избором различитих тројки штапића, демонстрирају се услови егзистенције троугла, тј. ученицима се уводи неједнакост троугла, а са овом демонстрацијом се постиже да је сваки ученик усвојио тврђење, без бојазни да ће га заборавити. Након тога се омогућује ученицима који показују више интересовања и већу математичку вештину да усвоје и одговарајућу теорему, па и доказ.

Пре саме теореме, обично се дају једноставнији примери, наводимо овде типичне задатке из одговарајућих уџбеника.

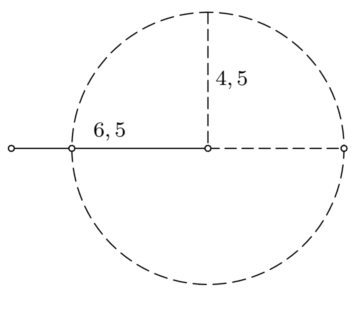
Задатак 1. Да ли

(а) $6, 8, 10$; (б) $6, 7, 15$;

могу бити странице троугла?



Задатак 2. У троуглу су две странице дужина $4,5$ и $6,5$. Колика може бити дужина треће странице?



Након оваквих примера долази до апстракције, обично се тврђење формулише на следећи начин:

Теорема 1. *У* $\triangle ABC$ *у којем је* $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, *важи:*

$$a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b.$$

И обрнуто, ако су a, b, c *позитивни реални бројеви од који задовољавају претходне релације, онда постоји троугао чије су странице* a, b *и* c.

У наставку рада биће изложене неке од основних геометријских неједнакости за елементе троугла и приказани неки од могућих праваца њиховог развитка.

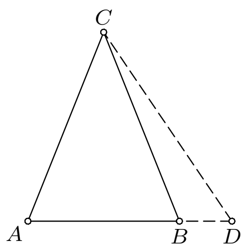
Нотација и почетни примери

Ако није наглашено другачије, кроз овај рад ће дужине страница $\triangle ABC$ бити означене са $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, углови са $\alpha = \sphericalangle A = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle B = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle C = \sphericalangle ACB$, средишта страница BC, CA, AB са A_1, B_1, C_1, редом, подножја висина из A, B, C са A', B', C', редом, пресеци одговарајућих симетрала унутрашњих углова са наспрамном страницом са A'', B'', C''.

Дужине тежишних дужи AA_1, BB_1, CC_1 ће бити обележене са t_a, t_b, t_c, редом; висине AA', BB', CC' са h_a, h_b, h_c, редом, дужине бисектриса са $l_a = AA''$, $l_b = BB''$, $l_c = CC''$. Даље, полуобим ће бити обележен са s $(s = (a + b + c)/2)$, полупречник описаног круга са R, а уписаног са r, а полупречници споља приписаних кругова са r_a, r_b, r_c, редом, док ће P или P_{ABC} бити површина $\triangle ABC$. Тачке H, T, O, S представљају, редом, ортоцентар, тежиште, центар описаног и центар уписаног круга $\triangle ABC$.

Пре свега, треба довршити започето у уводној глави. У основној школи се тврђење теореме 1 обично своди на:

Теорема 2. *У* $\triangle ABC$ *је* $AB < CA$ *ако и само ако је* $\sphericalangle BCA < \sphericalangle ABC$.



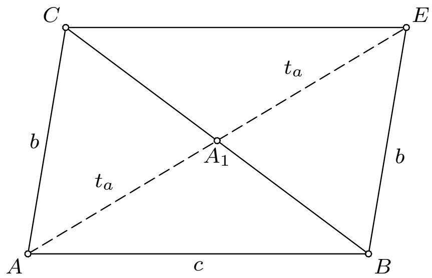
Доказ. Ако је $AB = CA$, следи да су $\triangle ABA_1$ и $\triangle A_1CA$ подударни, па је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC$. Ако је $AB < CA$, нека је D таква да је да је $A - B - D$ и $AD = AC$, следи $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DCB > \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCA > \sphericalangle BCA$. $\square$

Оно што је овде можда и важније напоменути деци је да у испитивању да ли a, b, c могу бити странице троугла, ако је познат њихов поредак (на пример, $c \leqslant b \leqslant a$), се испитивање своди на испитивање једног, а не три услова (у овом случају неједнакости $c < a+b$ и $b < c+a$ су тривијалне, док треба испитати да ли важи $a < b+c$). У наставку дајемо неке последице ове неједнакости.

Задатак 3. Доказати да у сваком троуглу важи

$$s < t_a + t_b + t_c < 2s.$$

Решење. Нека је E тачка таква да је $ABEC$ паралелограм. Онда AE садржи A_1 и $AE = 2t_a$. Из $\triangle ABE$ следи $AE < AB + BE$, а пошто је $BE = AC = b$, следи $2t_a < b + c$. Аналогно, $2t_b < c + a$, $2t_c < a + b$, па сабирањем следи $2t_a + 2t_b + 2t_c < 2a + 2b + 2c = 4s$, тј. друга неједнакост.

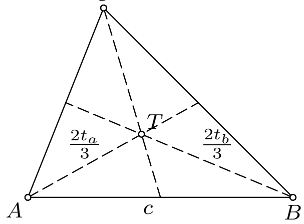


Из $\triangle AA_1B$ следи $c = AB < AA_1 + BA_1 = t_a + \frac{a}{2}$. Аналогно, из $\triangle AA_1C$ следи $b < t_a + \frac{a}{2}$, па, сабирањем, $b+c < a+2t_a$. Аналогно је $c+a < b+2t_b$ и $a+b < c+2t_c$, па, сабирањем, $2a + 2b + 2c < a + b + c + 2t_a + 2t_b + 2t_c$, одакле је $s < t_a + t_b + t_c$.

Обе неједнакости су строге. $\triangle$

На овом месту није лоше прокоментарисати колико је неједнакост троугла прецизна. Грешка у овој неједнакости је мања уколико се примењује на две мање странице и што је угао између њих „тупљи”, а у примени на симетричне неједнакости елемената троугла (чији је приказ главни мотив овог рада), не може се обезбедити да сви углови буду „много тупи”. Као добра илустрација, ученицима је, непосредно након претходног, пожељно дати следећи задатак (који је очигледно профињење претходног резултата):

Задатак 4. Доказати да у произвољном троуглу важи и $\frac{3}{2} \cdot s < t_a + t_b + t_c$.



Решење. Из $\triangle TAB$ и неједнакости троугла следи $TA+TB > AB$, тј. $\frac{2}{3}\cdot t_a+\frac{2}{3}\cdot t_b > c$. Аналогно је $\frac{2}{3}\cdot t_b+\frac{2}{3}\cdot t_c > a$ и $\frac{2}{3}\cdot t_c+\frac{2}{3}\cdot t_a > b$, одакле се, сабирањем, добија тражена неједнакост. $\triangle$

Анализа зашто је, наизглед истим начином рада, добијен бољи резултат је добра основа за разумевање прецизности неједнакости троугла. У наставку дајемо избор неких историјски познатих геометријских неједнакости. Напомињемо да је у раду направљен покушај приказа што већег броја метода решавања проблема, тако да неће на сваком месту бити приказано решење које ученици виде у првом сусрету са одговарајућом неједнакошћу.

Теорема 3 (*Птоломеј*)**.** Ако су A, B, C, D тачке у равни, важи

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Једнакост важи ако и само ако је $ABCD$ тетиван четвороугао са дијагоналама AC и BD или ако су A, B, C, D колинеарне и тачно једна од B и D се налази између A и C.

Доказ. Нека је M тачка равни таква да су $\triangle CMB$ и $\triangle CDA$ слични и исте оријентације. Онда је $\frac{CM}{BC} = \frac{CD}{AC}$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACD$. Следи $\sphericalangle DCM = \sphericalangle ACB$, одакле је $\triangle DCM \sim \triangle ACB$, па је $BM = \frac{BC\cdot AD}{AC}$ и $MD = \frac{CD\cdot AB}{AC}$. Следи

$$BD \leqslant BM + MD = \frac{BC \cdot AD + CD \cdot AB}{AC}.$$

Ако се достиже једнакост, онда су B, M и D колинеарне, па је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$, што доводи до горе наведених веза. $\square$

Теорема 4 (*Неједнакост паралелограма*)**.** За произвољне тачке A, B, C, D у простору важи

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2.$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $ABCD$ паралелограм (могуће дегенерисан).

Доказ. Нека је конфигурација смештена у тродимензиони Декартов координатни систем и координате тачака $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

Треба доказати да је

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2 \geqslant (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2$$

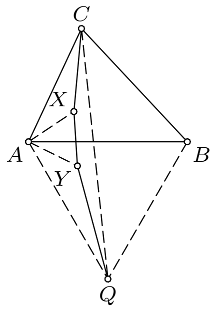
(и аналогно за y и z), што је еквивалентно са $0 \leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_3x_4-2x_4x_1+2x_1x_3+2x_2x_4 = (x_1-x_2+x_3-x_4)^2$.

Једнакост важи ако и само ако је $x_1+x_3 = x_2+x_4$, $y_1+y_3 = y_2+y_4$, $z_1+z_3 = z_2+z_4$, тј. ако и само ако је $ABCD$ паралелограм. $\square$

Овде је у неједнакости паралелограма приказано решење које није прво решење које виде ученици. Но то решење има велику предност, пошто се без проблема преноси у просторе призвољне димензије, тако да не чуди да се појављује и у градиву факултета. Важност ове неједнакости биће приказана и у каснијим примерима (видети одељак посвећен неједнакостима у Хилбертовом простору).

У току школовања обично се избегава доказ егзистенције неког објекта (типично за такве ситуације на факултету је позивање на непрекидност и/или компактност). То се обично избегава позивањем на „очигледност” или конструкцијом.

Задатак 5 (*Торичелијева тачка*)**.** Нека је $\triangle ABC$ оштроугли. Конструисати тачку M унутар $\triangle ABC$ за коју $MA + MB + MC$ има најмању могућу вредност.



Решење. Нека је X произвољна тачка унутар $\triangle ABC$, а Q тачка ван троугла, тако да је $\triangle BAQ$ једнакостранични, тј. Q се добија ротацијом тачке B са центром у A за $60°$. Ако је Y слика X при овој ротацији, $\triangle XAY$ је једнакостраничан и важи $\triangle QAY \equiv \triangle BAX$, па је $QY = BX$ и $YX = AX$. Следи $AX + BX + CX = QY + YX + CX \geqslant QC$.

Дакле, довољно је одредити M за које је $MA + MB + MC = QC$, а то се може постићи, пошто је могуће конструисати M и M' на QC, тако да је $M'AM$ једнакостраничан. $\triangle$

По претходном M је пресек правих AQ_A, BQ_B и CQ_C, где су Q_A, Q_B, Q_C тачке ван $\triangle ABC$ за које су $\triangle BAQ_C$, $\triangle ACQ_B$, $\triangle BQ_AC$ једнакостранични. Често се претходно тврђење јавља у оваквој формулацији.

Задатак 6. Нека су a, b, c странице троугла. Доказати:

(1) збир квадрата страница троугла мањи је од површине квадра чије су странице једнаке страницама тог троугла;

(2) $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

Решење. (1) По неједнакости троугла је $b-c < a$, $c-a < b$, $a-b < c$. Квадрирањем и сабирањем добијених неједнакости добија се $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$, што је тврђење задатка. Како су неједнакости троугла строге, једнакост се не достиже никад.

(2) По неједнакости троугла је $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$. Множењем ових неједнакости са a^2, b^2, c^2, редом, и сабирањем, добија се $a^3 + b^3 + c^3 < a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$, одакле је

$$2(a^3 + b^3 + c^3) < a^2(a + b + c) + b^2(b + c + a) + c^2(c + a + b) = (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c).$$

Како су неједнакости троугла строге, једнакост се не достиже никад. $\triangle$

Иако је неједнакост троугла „груба”, неједнакости које се добијају њеном употребом се често не могу поправити. То показује и наредни пример.

Задатак 7. Одредити све $\alpha \in \mathbb{R}$, тако да за све троуглове важи

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \alpha(ab + bc + ca),$$

где су a, b, c странице троугла.

Решење. По делу (1) претходног задатка, тврђење је тачно за $\alpha \in [2, \infty)$. Са друге стране, постоји троугао чије су странице $a = b = 1$ и $c = \varepsilon \in (0, 2)$, па је $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \dfrac{2+\varepsilon^2}{1+2\varepsilon} \to 2$ кад $\varepsilon \to 0+$, па тврђење није тачно за $\alpha < 2$. △

Задатак 8. Доказати да у $\triangle ABC$ важи $h_a \leqslant l_a \leqslant t_a$.

Решење. Тврђење $h_a \leqslant l_a$ је тачно, пошто је висина најкраће растојање тачке A од тачака праве BC.

Ако је $AB = AC$ следи $l_a = t_a$. Иначе, нека је (без умањења општости) $AC > AB$ и M симетрична са A у односу на A_1. $BMCA$ је паралелограм у којем је $BM = AC$, па је $BM = AC > AB$, тј. $\sphericalangle BMA < \sphericalangle BAM$, па је $\sphericalangle A_1AC < \sphericalangle BAA_1$. Следи да AA'' припада унутрашњости $\sphericalangle BAA_1$. $\sphericalangle AA''C$ је туп, јер је $\sphericalangle AA''C + \sphericalangle BA''A = 180^\circ$ и $\sphericalangle AA''C = \sphericalangle A''BA + \sphericalangle BAA'' = \sphericalangle A''BA + \alpha/2 > \sphericalangle A''CA + \alpha/2 = \sphericalangle BA''A$, па је AA_1 најдужа страница $\triangle AA''A_1$. Следи $AA_1 > AA''$, тј. $t_a > l_a$. △

Смена $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$

Како је приказано у задацима 3 и 4 (и коментарима уз њих), непријатно је контролисати прецизност неједнакости троугла. Такође, ако се посматра скуп $\mathcal{T}$ свих тројки (a, b, c), тако да су a, b и c странице троугла, онда је ово прави подскуп од $(0, \infty)^3$. Међутим, границе тог скупа су равни у $\mathbb{R}^3$, тако да је логично запитати да ли се нешто може постићи погодно изабраном сменом координата, која би границе ове области претворила у делове координатних равни.

Конкретно, једначинама $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ дата је бијекција са $\mathcal{T}$ на $(0, \infty)^3$ (наравно, и инверзне једначине су линеарне, конкретно $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{c+a-b}{2}$ и $z = \frac{a+b-c}{2}$) и ово за овај рад има посебну важност, пошто се линеарном сменом неједнакости страница троугла могу свести на неједнакости позитивних бројева (који нису везани условима). Ипак, у школи се ово обично не прича на овакав начин, него се даје геометријско тумачење претходног резултата. Будући да је то геометријско тумачење прилично природно, то повећава значај овакве трансформације.

Теорема 5. Нека су A''', B''', C''' додирне тачке уписане кружнице и страница троугла BC, CA, AB, редом. Онда је $AB''' = AC'''$ (нека је то x), аналогно $y = BC''' = BA'''$, $z = CB''' = CA'''$, па је $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Важи:

Позитивни реални a, b, c су странице троугла ако и само ако постоје позитивни реални x, y, z тако да је $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

Задатак 9. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Решење. Применом поменуте смене, добија се еквивалентно тврђење

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geqslant 3, \text{ за позитивне реалне } x, y, z.$$

Последње следи из $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2$ (неједнакост аритметичке и геометријске средине) и, аналогно, $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geqslant 2$, сабирањем.

Једнакост се достиже ако и само ако је $x = y = z$, односно ако и само ако је $a = b = c$. △

Као што и наслућује претходни пример, у раду са симетричним неједнакостима елемената троугла, природно је очекивати да се оне могу повезати са неким симетричним неједнакостима бројева. У примеру је коришћена неједнакост између аритметичке и геометријске средине, а овде наводимо неке од неједнакости симетричних средина, оне које се најчешће јављају кроз школовање у Србији.

Теорема 6. (а) [*Основне неједнакости средина*]. Ако су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви, важи

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Уочени изрази се називају, редом, хармонијска, геометријска, аритметичка, и квадратна средина. Једнакост у свакој од уочених неједнакости се достиже ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$.

(б) [*Неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског*]. Ако су $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ реални бројеви, важи

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Притом се једнакост достиже ако и само ако постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да је $(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(y_1, \ldots, y_n)$ или $(y_1, \ldots, y_n) = \lambda(x_1, \ldots, x_n)$ (тј. ако и само ако су уочени вектори линеарно зависни).

(в) [*Неједнакост Чебишева*]. Ако су $x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ и $y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ реални бројеви, важи

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqslant \Big(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\Big) \text{ и } \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1} \leqslant \Big(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k\Big).$$

Напомињемо да је дат специјалан облик неједнакости Чебишева, који је довољан за овај рад. Будући да се претходне неједнакости доказују коришћењем индукције и анализе (особине конвексних функција), што се обично проучава у старијим разредима средње школе, а да је проучавање елементарне геометрије у нашем школском систему углавном везано за основну и млађе разреде средње школе, у школама се ове неједнакости често не доказују или се доказују њихови специјални случајеви (за „мале” n), најчешће приликом рада са трансформацијом алгебарских израза. За примене у геометрији троугла посебно је важан случај

$n = 3$, па овде дајемо доказе тврђења (а) и (б) претходне теореме за $n = 3$, на начин како се то најчешће јавља по школама у Србији.

Доказ. Како је $(x-y)^2 \geqslant 0$, $(y-z)^2 \geqslant 0$, $(z-x)^2 \geqslant 0$, сабирањем ових неједнакости и сређивањем, добија се

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 0. \qquad (*)$$

Множењем добијене неједнакости са $x + y + z > 0$, следи $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$. Сменом $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $c = \sqrt[3]{c}$, добија се $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, тј. неједнакост између аритметичке и геометријске средине.

Сменом $a = \frac{1}{a_1}$, $b = \frac{1}{b_1}$, $c = \frac{1}{c_1}$, добија се $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{c_1} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{a_1 b_1 c_1}}$, што је еквивалентно неједнакости између геометријске и хармонијске средине.

На основу $(*)$, следи $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \leqslant 3(x^2 + y^2 + z^2)$, одакле следи неједнакост између аритметичке и квадратне средине.

У свим претходно доказаним неједнакостима једнакости важе ако и само ако су одговарајући бројеви једнаки.

Како је $(x_1 - \lambda y_1)^2 \geqslant 0$, $(x_2 - \lambda y_2)^2 \geqslant 0$, $(x_3 - \lambda y_3)^2 \geqslant 0$, сабирањем следи $f(\lambda) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2\lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + \lambda^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \geqslant 0$. Ако је $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског (за $n = 3$) је тривијално тачна. Иначе, $f(\lambda)$ је ненегативна реална квадратна функција, па је њена дискриминанта непозитивна, односно важи $4(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \leqslant 0$, одакле следи тражена неједнакост. Као и малопре, лако је видети када се достиже једнакост. □

Одељак завршавамо примером примене неједнакости Чебишева.

Задатак 10. Доказати да је збир растојања ортоцентра од страница троугла мањи од $3r$.

Решење Ако су d_a, d_b, d_c растојања H до BC, CA, AB, следи $ad_a + bd_b + cd_c = 2(P_{BCH} + P_{ACH} + P_{ABH}) = 2P_{ABC}$.

Ако је (без умањења општости) $a \geqslant b \geqslant c$, важи $d_a \geqslant d_b \geqslant d_c$ (из $a \geqslant b$ следи $\sphericalangle CAB \geqslant \sphericalangle ABC$, па је $\sphericalangle HCB' \leqslant \sphericalangle HCA'$, одакле је $HB' \leqslant HA'$), па на основу неједнакости Чебишева следи

$$(a + b + c)r = 2P_{ABC} = ad_a + bd_b + cd_c \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)(d_a + d_b + d_c). \qquad \triangle$$

Основне неједнакости елемената троугла

У овом одељку ће бити приказане нијансу сложеније неједнакости елемената троугла од претходно поменутих. У тврђењима ће се користити делови „Великог задатка”, које овде наводимо.

Теорема 7. У $\triangle ABC$ важи:

(а) [*Херонова формула*]. $P_{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

(б) $t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$;

(в) $l_a = AA'' = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bcs(s-a)}$;

(г) [*Ојлерова веза*]. $OT^2 = R^2 - \frac{OA^2+OB^2+OC^2}{9}$;

(д) $r_a + r_b + r_c = r + 4R$.

Поменимо да и докази ових тврђења зависе од нивоа образовања. На пример, веза (б) се по литератури обично изводи применом Стјуартове теореме (која је „нетригонометријска” варијанта косинусне теореме), док ретко који наставник изводи овакве везе приликом обраде косинусне теореме (пошто су примене косинусне теореме у геометрији, које се јављају по пријемним испитима у Србији, углавном праволинијске).

Задатак 11. Доказати да у $\triangle ABC$ важи $s^2 \leqslant t_a^2 + t_b^2 + t_c^2$.

Решење. Важи $t_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ и слично за t_b и t_c, па је $t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{4} = s^2$, по неједнакости између квадратне и аритметичке средине. Једнакост се достиже ако и само ако је $a = b = c$, тј. ако и само ако је троугао једнакостраничан. $\triangle$

Задатак 12. Доказати да у $\triangle ABC$ важи

$$\begin{aligned} 9r &\leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant \sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} \\ &\leqslant s\sqrt{3} \leqslant r_a + r_b + r_c = r + 4R. \end{aligned}$$

Решење. Из $2P_{ABC} = \frac{1}{3}(ah_a + bh_b + ch_c)$ и неједнакости Чебишева следи $r(a+b+c) = 2P_{ABC} \leqslant \frac{1}{9}(a+b+c)(h_a+h_b+h_c)$, тј. прва неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Како је $l_a \geqslant h_a$, $l_b \geqslant h_b$, $l_c \geqslant h_c$ (задатак 8), следи друга. Једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Како је $l_a = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{bsc(s-a)}$, и, аналогно, за l_b и l_c. Користећи Херонову формулу, следи

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{s(s-a)} \leqslant \sqrt{s(s-a)} = \frac{P_{ABC}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{s-b} \cdot \frac{P_{ABC}}{s-c}} = \sqrt{r_b r_c}.$$

Сабирањем са аналогно добијеном неједнакошћу за l_b и l_c добија се трећа неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине, следи $\sqrt{r_a r_b} + \sqrt{r_b r_c} + \sqrt{r_c r_a} \leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}$. Како је

$$\begin{aligned} r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a &= P^2 \cdot \left(\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} \right) \\ &= P^2 \cdot \frac{s-a+s-b+s-c}{(s-a)(s-b)(s-c)} = s^2, \end{aligned}$$

из претходне две следи четврта неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Из $s^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \leqslant \frac{1}{3}(r_a + r_b + r_c)^2$ следи $s\sqrt{3} \leqslant r_a + r_b + r_c$. Једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Последња једнакост је теорема 7 (д). $\triangle$

Задатак 13. Доказати да у $\triangle ABC$ важи

$$27r^2 \leqslant h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant s^2 \leqslant t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2.$$

Решење. Из прве неједнакости задатка 12 и неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи $9r \leqslant h_a+h_b+h_c \leqslant 3\sqrt{\frac{h_a^2+h_b^2+h_c^2}{3}}$, одакле је $27r^2 \leqslant h_a^2+h_b^2+h_c^2$.

Друга неједнакост следи из $h_a \leqslant l_a$ (и аналогно за b и c, задатак 8).

Како је $l_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2} \leqslant s(s-a)$ (на основу неједнакости између геометријске и аритметичке средине), сабирањем ове и две аналогне неједнакости, следи $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant s(s-a+s-b+s-c) = s^2$, тј. трећа неједнакост.

Четврта је неједнакост је доказана у задатку 11.

Пета неједнакост је еквивалентна са $\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4} \leqslant \frac{27R^2}{4}$, тј. са $a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2$, што следи из Ојлерове везе (теорема 7, део (г)).

У свакој неједнакости једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан. $\triangle$

Задатак 14. Доказати да у $\triangle ABC$ важи

$$9r \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant l_a + l_b + l_c \leqslant t_a + t_b + t_c \leqslant \frac{9}{2}R.$$

Решење. Прве две неједнакости су доказане у задатку 12, а трећа следи из задатка 8.

На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине, следи

$$\frac{t_a+t_b+t_c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{t_a^2+t_b^2+t_c^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{3R}{2}\,.$$

У свакој неједнакости једнакост се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан. $\triangle$

Задатак 15. Доказати да у $\triangle ABC$ важи

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geqslant \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geqslant \frac{1}{t_a} + \frac{1}{t_b} + \frac{1}{t_c} \geqslant \frac{2}{R}.$$

Последње наведени задатак остављамо без доказа. Приметимо да ако посматрамо почетне и крајње чланове у последња четири задатка, добијамо чувену Ојлерову везу, тј. тврђење да је $2r \leqslant R$, односно сва четири задатка се могу схватити као профињења Ојлерове везе. Она има варијанту и у три димензије (па и више димензија), коју наводимо на крају овог одељка.

Задатак 16. Ако је R полупречник описане, а r уписне сфере тетраедра $ABCD$, онда је $R \geqslant 3r$.

Решење. Нека су T_A, T_B, T_C, T_D тежишта троуглова BCD, CDA, DAB, ABC, редом, а T тежиште тетраедра $ABCD$. Онда је T и тежиште тетраедра $T_AT_BT_CT_D$ и важи $AT : TT_A = BT : TT_B = CT : TT_C = DT : TT_D = 3 : 1$, па је тетраедар $T_AT_BT_CT_D$ хомотетична слика тетраедра $ABCD$ при хомотетији са центром у T и коефицијента $\frac{1}{3}$. Следи $R = 3\rho$, где је ρ полупречник описане сфере тетраедра $T_AT_BT_CT_D$, па како ова сфера има додирне тачке са свим странама тетраедра, следи $\rho \geqslant r$, одакле је $R \geqslant 3r$. $\triangle$

Изопериметријски проблем за троугао

Изопериметријски проблем је један од проблема који је оставио прилично утицаја у развоју математике. Иако је полазна мотивација, као и прва формулација, геометријска, решење проблема су дали елементи математичке анализе. У основном облику захтев је да се међу површима у равни фиксног обима одреди она којој је површина највећа, међутим, већ ова неформална формулација наслућује многе проблеме (дефиниција области, обима, површине,...). Облик који се најчешће јавља по тренутним универзитетским уџбеницима је везан за области са део по део глатком границом, но треба поменути да се често виђају непотпуни (па чак и нетачни докази), а позната су и уопштења у више димензија, у просторима са мером, у класи једнолисних аналитичких функција...

У средњој школи се обично формулише проблем за троугао и математички апарат који је приказан у претходном делу рада је довољан да га реши, но можда и важнија ствар је што се на овај начин ученици доста рано могу упознати са проблемима који су доста захтевнији. Уобичајан облик формулације овог проблема код средњошколских ученика је:

Од свих троуглова фиксног обима ($2s$) одредити онај (ако постоји) који има највећу површину.

Доказаћемо јаче тврђење:

Теорема 8. У $\triangle ABC$ важи

$$r \leqslant \frac{\sqrt{\sqrt{3}P}}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot s \leqslant \frac{1}{2} \cdot R.$$

Доказ. Прва неједнакост је еквивалентна са $9r^2 \leqslant \sqrt{3}P = \sqrt{3}sr \Leftrightarrow 9r \leqslant \sqrt{3}s$ и следи из задатка (12). Друга је еквивалентна са $\sqrt{3}P \leqslant \frac{1}{3} \cdot s^2 \Leftrightarrow \sqrt{3}r \leqslant \frac{1}{3} \cdot s \Leftrightarrow \sqrt{3}s \geqslant 9r$.

По неједнакости између квадратне и аритметичке средине, следи $\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leqslant \sqrt{\frac{9R^2}{3}} = R\sqrt{3}$, па је $s = \frac{a+b+c}{2} \leqslant \frac{3R\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}s}{9} \leqslant \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3R \cdot 3 = \frac{R}{2}$, односно добија се трећа неједнакост.

Једнакост се у све три неједнакости достиже ако и само ако је $a = b = c$. $\square$

Специјално, на основу друге неједнакости следи да је $P \leqslant \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$, као и да се једнакост достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

На крају овог одељка дајемо и једну примену изопериметријске неједнакости.

Задатак 17. Нека је M тачка унутар $\triangle ABC$. Доказати да је $MA+MB+MC \geqslant 6r$.

Решење. Ако је B' тачка таква да је $\triangle BAB'$ једнакостраничан и у различитој полуравни одређеној правом AB од тачке C. Онда важи $MA + MB + MC \geqslant CB'$ и, применом две косинусне теореме, $B'C^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(60^\circ + \alpha) = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ \cos\alpha + 2bc\sin 60^\circ \sin\alpha = b^2 + c^2 - bc\cos\alpha + 2\sqrt{3} \cdot P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3} \cdot P_{ABC}$.

Из претходних задатака следи $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) \geqslant \frac{2}{3} \cdot s^2$ и $s\sqrt{3} \geqslant 9r$, па је $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 18r^2$. Такође је $2\sqrt{3} \cdot P_{ABC} \geqslant 9r^2 \cdot 2 = 18r^2$ (изопериметријска неједнакост), па је $B'C^2 \geqslant 36r^2$. $\triangle$

Неједнакост Erdös-Mordell

Растојања неке тачке од страница и темена троугла спадају у најприродније објекте за проучавање, не само математичара, тако да природно место у овом раду налазе и симетричне неједнакости ових величина.

Задатак 18. Нека је M тачка унутар $\triangle ABC$, A_1, B_1, C_1 подножја висина из M на BC, CA, AB, редом. Доказати да је

$$MA \cdot MB \cdot MC \geqslant 8 \cdot MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1.$$

Решење. Како је $AM + MA_1 \geqslant h_a$, следи $a \cdot MA_1 + b \cdot MB_1 + c \cdot MC_1 = 2P = ah_a \leqslant a \cdot AM + a \cdot MA_1$, па је $a \cdot AM \geqslant b \cdot MB_1 + c \cdot MC_1 \geqslant 2\sqrt{bc \cdot MB_1 \cdot MC_1}$ (неједнакост између аритметичке и геометријске средине). Множењем ове и две аналогне везе следи $abc \cdot AM \cdot BM \cdot CM \geqslant 8 \cdot abc \cdot MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1$, одакле следи неједнакост тражена у задатку. $\triangle$

Посебну популарност у средњошколској математици донео је задатак који се 1996–те појавио на Међународној математичкој олимпијади. Иако од стране међународног жирија процењен као задатак средње тежине, ово је био један од најлошије урађених задатакау историји овог такмичења. Од 424 ученика, потпуно га је решило само 6, а више од половине поена на том задатку (тј. бар 4 поена од 7 могућих) је имало 14 ученика. Од ученика српске екипе, петоро је имало 0, а један 1 поен (иако је те године српска екипа заузала 24–то место (од 75 земаља), што је у рангу просечног резултата Србије на овом такмичењу).

Ово је утицало да овакве неједнакости о тада у још већем обиму постану саставни део припрема већине екипа које се припремају за ово такмичење. У наставку дајемо решење овог задатка, чувена *Erdös-Mordell*-ова теорема (која је углавном саставни део постдипломских студија), као и још неколико сличних примера. У решавању овог задатка је избегнуто позивање на теорему; напротив, искоришћено је тврђење задатка у доказу теореме.

Задатак 19. [*ММО 96*] Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао у којем је $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$ и R_A, R_C, R_E полупречници описаних кружница троуглова FAB, BCD, DEF, редом, а O обим шестоугла. Доказати да је

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{O}{2}.$$

Решење. Нека су a, b, c, d, e, f дужине страница AB, BC, CD, DE, EF, FA, редом. Важи $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$. Нека су PQ и RS праве које садрже A и D, редом, нормалне на BC и EF, редом ($P, R \in BC$, $Q, S \in EF$). Онда је $BF \geqslant PQ = RS$.

Следи $2BF \geqslant PQ + RS$, односно

$$2BF \geqslant (a \sin\sphericalangle B + f \sin\sphericalangle C) + (c \sin\sphericalangle C + d \sin\sphericalangle B),$$

и, аналогно, $$2BD \geqslant (c \sin\sphericalangle A + b \sin\sphericalangle B) + (e \sin\sphericalangle B + f \sin\sphericalangle A),$$

и $$2DF \geqslant (e \sin\sphericalangle C + d \sin\sphericalangle A) + (a \sin\sphericalangle A + b \sin\sphericalangle C).$$

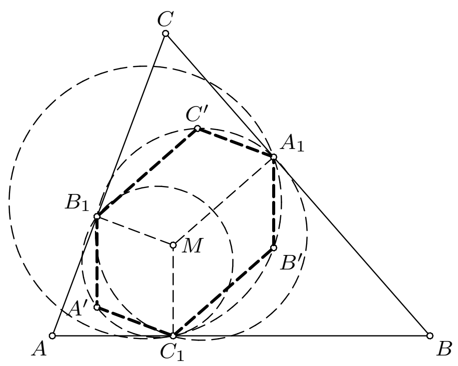
Како је $R_A = \frac{BF}{2\sin\sphericalangle A}$, $R_C = \frac{BD}{2\sin\sphericalangle C}$, $R_E = \frac{DF}{2\sin\sphericalangle E}$, следи

$$\begin{aligned} R_A + R_C + R_E &\geqslant \frac{1}{4}\cdot a\cdot\left(\frac{\sin\sphericalangle B}{\sin\sphericalangle A} + \frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle B}\right) + \frac{1}{4}\cdot b\cdot\left(\frac{\sin\sphericalangle C}{\sin\sphericalangle B} + \frac{\sin\sphericalangle B}{\sin\sphericalangle C}\right) + \ldots \\ &\geqslant \frac{1}{2}\cdot(a+b+\ldots) = \frac{O}{2}. \end{aligned}$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 120^\circ$ и $FB \perp BC$, односно ако и само ако је $ABCDEF$ правилан шестоугао. $\triangle$

Теорема 9. *[Erdös-Mordell]* Нека је M тачка унутар $\triangle ABC$, а A_1, B_1, C_1 подножја висина из M на BC, CA, AB, редом. Доказати да важи

$$MA + MB + MC \geqslant 2(MA_1 + MB_1 + MC_1).$$

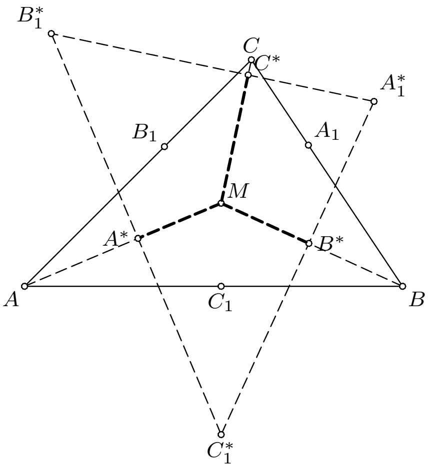


Доказ. Нека су A', B', C' тачке такве да су C_1MB_1A', A_1MC_1B', $MA_1C'B_1$ паралелограми. На основу претходног задатка примењеног на шестоугао $A_1C'B_1A'C_1B'$, следи $R_{A'} + R_{B'} + R_{C'} \geqslant MA_1 + MB_1 + MC_1$. Како је $\triangle C_1B_1A' \equiv \triangle C_1MB_1$ и како је полупречник описане кружнице $\triangle C_1MB_1$ једнак $\frac{AM}{2}$ (AM је пречник кружнице описане око тетивног четвороугла AB_1MC_1, следи $\frac{AM+BM+CM}{2} \geqslant MA_1 + MB_1 + MC_1$, тј. тврђење теореме. $\square$

Задатак 20. Нека је M тачка унутар $\triangle ABC$, а A_1, B_1, C_1 подножја висина из M на BC, CA, AB, редом. Доказати да важи

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{MA_1} + \frac{1}{MB_1} + \frac{1}{MC_1}\right).$$

Решење. Нека су A^*, B^*, C^*, A_1^*, B_1^*, C_1^* слике тачака A, B, C, A_1, B_1, C_1, редом, при инверзији са центром M, у односу на круг полупречника 1. Како C_1 и B_1 припадају кружници над MA, следи да су C_1^*, B_1^*, A^* колинеарне и да је $C_1^*B_1^* \perp MA^*$. Аналогно, колинеарне су A_1^*, C_1^*, B^*, као и B_1^*, A_1^*, C^* и важи $C_1^*A_1^* \perp MB^*$ и $B_1^*A_1^* \perp MC^*$.



По Ердош–Мореловој неједнакости примењеној на тачку M у $\triangle A_1^*B_1^*C_1^*$ следи $MA_1^*+MB_1^*+MC_1^* \geqslant 2(MA^*+MB^*+MC^*)$, а како је $MX^* = \frac{1}{MX}$ за сваку тачку X, следи тврђење. $\triangle$

На крају одељка дајемо профињење неједнакости из задатка 18. Иако тврђење задатка 18 следи непосредно из наредног задатка, остављен је његов оригинални доказ, да би се и упоредила тежина тврђења.

Задатак 21. Нека је M тачка унутар $\triangle ABC$, а A_1, B_1, C_1 подножја висина из M на BC, CA, AB, редом. Доказати да важи

$$MA \cdot MB \cdot MC \geqslant (MB_1+MC_1)\cdot(MC_1+MA_1)\cdot(MA_1+MB_1).$$

Решење. Нека су A', B', C' подножја висина из A, B, C на BC, CA, AB, редом. Како је $MA+MA_1 \geqslant AA'$, следи $a\cdot MA_1 + b\cdot MB_1 + c\cdot MC_1 = 2P_{ABC} = a\cdot AA' \leqslant a\cdot(MA+MA_1)$, па је $a\cdot MA \geqslant b\cdot MB_1 + c\cdot MC_1$.

Ако је M' тачка симетрична са M у односу на симетралу $\sphericalangle CAB$, а A_1', B_1', C_1' подножја висина из M' на BC, CA, AB, редом, следи $MA = M'A$, $MB_1 = MC_1'$, $MC_1 = MB_1'$, па се као и претходно добија $a\cdot MA \geqslant b\cdot MC_1 + c\cdot MB_1$.

Сабирањем претходно добијених веза добија се $2a\cdot MA \geqslant (b+c)\cdot(MB_1+MC_1)$. Аналогно је $2b\cdot MB \geqslant (c+a)\cdot(MC_1+MA_1)$ и $2c\cdot MC \geqslant (a+b)\cdot(MA_1+MB_1)$, па је $8abc\cdot MA\cdot MB\cdot MC \geq (a+b)(b+c)(c+a)\cdot(MB_1+MC_1)\cdot(MC_1+MA_1)\cdot(MA_1+MB_1)$, па се тврђење добија применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине.

Да би важила једнакост, AA_1 мора бити висина $\triangle ABC$ (аналогно BB_1 и CC_1), па M мора бити ортоцентар $\triangle ABC$, док из последње примењених неједнакости средина следи $a=b=c$, тј. $\triangle ABC$ мора бити једнакостранични и тачка M његов центар. $\triangle$

Неједнакости у Хилбертовом простору

У градиву факултета се често појављују идеје које су настале у елементарној геометрији. Једно од најприроднијих места (због саме мотивације настанка, која има везе са „геометријским” начином размишљања) је теорија Хилбертових простора, тако да се рад са једнакостима и неједнакостима које имају очигледну геометријску позадину јавља већ у првим тврђењима ове области.

Теорема 10. Нека је $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор. Онда важи:

(а) за све $x, y \in H$ важи $\big|\langle x,y\rangle\big| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y,y\rangle}$ (неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског);

(б) са $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ је дефинисана норма на H.

Доказ. Како за све $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ важи $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$, следи да је $f(\lambda, x, y) = \langle x,x\rangle + 2\operatorname{Re}\big(\lambda\langle y,x\rangle\big) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle \geqslant 0$. Ако је $\langle x,y\rangle = 0$, уочена неједнакост је тривијална. Ако је $\langle x,y\rangle \neq 0$, онда је $\langle y,x\rangle = e^{-i\varphi}|\langle x,y\rangle|$ за тачно једно $\varphi \in [0, 2\pi)$, па како је $f(\lambda, x, e^{i\varphi}y) \geqslant 0$, посматрајући $\lambda = \mu e^{i\varphi}$, $\mu \in \mathbb{R}$, следи да је квадратна функција $g(\mu) = \langle x,x\rangle + 2\big|\langle y,x\rangle\big| \cdot \mu + \mu^2\langle y,y\rangle$ ненегативна, па је њена дискриминанта непозитивна, тј. важи $4\big|\langle y,x\rangle\big|^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leqslant 0$. Једнакост се достиже ако и само ако је $x - \lambda y = 0$ за неко λ, тј. ако и само ако су x и y линеарно зависни.

Једино нетривијално у делу (б) је доказати неједнакост троугла, а она важи јер је $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\operatorname{Re}\big(\langle y,x\rangle\big) + \langle y,y\rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Овде дајемо два примера који обично представљају уводне примере у овој теорији. Напомињемо да су ти примери заправо једнакости, али да баш то доноси да већина претходно поменутих примера има свој аналогон у овој теорији, као и да је други од њих природно повезан са Теоремом 4.

Задатак 22. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор. Доказати да:

(а) за све $x, y \in H$ важи $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x + ye^{\frac{2\pi ik}{n}}\|^2 e^{\frac{2\pi ik}{n}}$;

(б) за све $x, y \in H$ важи $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{2\pi} \|x + ye^{it}\|^2 e^{it} dt$.

Решење. Како је $\|x + ye^{\frac{2\pi ik}{n}}\|^2 = \langle x + ye^{\frac{2\pi ik}{n}}, x + ye^{\frac{2\pi ik}{n}}\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\big(e^{\frac{-2\pi ik}{n}}\langle x,y\rangle\big) + \|y\|^2$, следи $\|x + ye^{\frac{2\pi ik}{n}}\|^2 e^{\frac{2\pi ik}{n}} = (\|x\|^2 + \|y\|^2)e^{\frac{2\pi ik}{n}} + \langle y,x\rangle e^{\frac{-4\pi ik}{n}} + \langle x,y\rangle$ сабирањем (и коришћењем својства n-тих корена из јединице) се добија тврђење дела (а).

Слично, $\|x + ye^{it}\|^2 e^{it} = \big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)e^{it} + \langle y,x\rangle e^{2it} + \langle x,y\rangle$ и како је $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = 0$ и $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi$, интеграцијом следи тврђење дела (б). △

Теорема 11. Нека је $(H, \|\cdot\|)$ простор са нормом. Та норма је индукована скаларним производом ако и само ако је задовољена једнакост паралелограма, тј. ако и само ако за све $x, y \in H$ важи

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Пре свега да оправдамо назив *једнакост паралелограма.* Наиме, ако посматрамо паралелограм са једним теменом у 0 и страницама одређеним векторима x и y, онда су његове дијагонале $x+y$ и $x-y$ (па леву страну једнакости можемо схватити као збир квадрата дужина дијагонала овог паралелограма) и по две странице дужина $\|x\|$ и $\|y\|$ (да се десна страна може видети као збир квадрата дужина страница овог паралелограма).

Доказ. Ако за неке $x, y \in H$ није задовољена неједнакост паралелограма, норма не може бити индукована скаларним производом. Заиста, ако би била индукована са $\langle\cdot,\cdot\rangle$, следило би $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, што је контрадикција.

Ако је за свако $x, y \in H$ испуњена једнакост паралелограма, докажимо да је са $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^k\|x+i^k y\|^2\big)$ дефинисан скаларни производ који индукује уочену норму. Пре свега, приметимо да је ово специјалан случај идентитета из (а) дела претходног задатка за $n=4$. Како је $\langle y, x\rangle = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^k\|y+i^k x\|^2\big) = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^k\|x+i^{-k}y\|^2\big) = \overline{\frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^{-k}\|x+i^{-k}y\|^2\big)} = \overline{\langle x, y\rangle}$, довољно је доказати линеарност по првој координати (да би доказали да је уочени израз скаларни производ). Важи и $\langle 0, x\rangle = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^k\|i^k x\|^2\big) = \frac{1}{4}\cdot\sum\limits_{k=0}^{3}\big(i^k\|x\|^2\big) = 0$.

Како је

$$\begin{aligned}
\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3} i^k\big(\|x+i^k z\|^2 + \|y+i^k z\|^2\big)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{3} i^k\big(\|x+y+2i^k z\|^2 + \|x-y\|^2\big)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\sum_{k=0}^{3} i^k\big(\|x+y+2i^k z\|^2\big) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{3}\Big(i^k\Big\|\frac{x+y}{2}+i^k z\Big\|^2\Big)\\
&= 2\cdot\Big\langle\frac{x+y}{2}, z\Big\rangle,
\end{aligned}$$

заменом $y=0$, следи $\langle x, z\rangle = 2\big\langle\frac{x}{2}, z\big\rangle$, па је $\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\cdot\Big\langle\frac{x+y}{2}, z\Big\rangle = \langle x+y, z\rangle$ (адитивност).

Такође је $\langle 2x, z\rangle = 2\langle x, z\rangle$, одакле, индукцијом, следи $\langle nx, z\rangle = n\langle x, z\rangle$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Заменом $\frac{1}{m}\cdot x$ уместо x, следи $\langle\frac{1}{m}\cdot x, z\rangle = \frac{1}{m}\cdot\langle x, z\rangle$ (па, опет индукцијом, хомогеност важи за позитивне рационалне скаларе), а како (по адитивности), важи $\langle rx, z\rangle + \langle -rx, z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$, важи $\langle rx, z\rangle = r\langle x, z\rangle$ за све $r\in\mathbb{Q}$.

Коначно, ако је $\lambda\in\mathbb{R}$, постоји $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ тако да је $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lambda$, па је

$$\begin{aligned}
\big|r_n\langle x, z\rangle - \langle\lambda x, z\rangle\big| &= \big|\langle r_n x, z\rangle - \langle\lambda x, z\rangle\big| = \Big|\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3} i^k\big(\|r_n x+i^k z\|^2 - \|\lambda x+i^k z\|^2\big)\Big|\\
&\leqslant \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3}\Big|\|r_n x+i^k z\|^2 - \|\lambda x+i^k z\|^2\Big|.
\end{aligned}$$

Како је $\|r_n x + i^k z\| - \|\lambda x + i^k z\| \leqslant \|(r_n - \lambda)x\|$ и $\|r_n x + i^k z\| + \|\lambda x + i^k z\|$ ограничено (неком константом $C = C(x,z)$), пошто $r_n \to \lambda$ кад $n \to \infty$, следи

$$\big|r_n\langle x,z\rangle - \langle \lambda x, z\rangle\big| \leqslant C \cdot |r_n - \lambda| \cdot \|x\|,$$

па како последњи израз тежи ка 0, кад $n \to \infty$, следи и хомогеност за реалне скаларе. Како је $\langle ix, z\rangle = \dfrac{1}{4}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\big(i^k\|ix + i^k y\|^2\big) = \dfrac{i}{4}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\big(i^{k-1}\|x + i^{k-1}y\|^2\big) = i\cdot\langle x,z\rangle$ (и важи адитивност), следи и хомогеност за комплексне скаларе.

Треба још доказати да овај скаларни производ индукује баш норму која га генерише на описан начин. Међутим, то следи из

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{3}\big(i^k\|x + i^k x\|^2\big) = \frac{1}{4}\cdot\big(\|2x\|^2| + i\|x + ix\|^2 - \|x - x\|^2 - i\|x - ix\|^2\big)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\big(4\|x\|^2| + 2i\|x\|^2 - 2i\|x\|^2\big) = \|x\|^2. \qquad \square
\end{aligned}$$

Због претходних једнакости, већина уводних неједнакости имају своје варијанте и у Хилбертовом простору. Овде издвајамо два примера.

Задатак 23. Нека је $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор и $x, y, z, t \in H$. Доказати да важи

$$8\cdot \mathrm{Re}\big(\langle x,z\rangle + \langle y,t\rangle\big) \leqslant 16\cdot\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) + \big(\|z\|^2 + \|t\|^2\big).$$

Када се достиже једнакост?

Решење. За $v, w \in H$ важи $0 \leqslant \|4v - w\|^2 = 16\cdot\|v\|^2 + \|w\|^2 - 8\cdot\mathrm{Re}\langle v,w\rangle$.Притом, једнакост се достиже ако и само ако је $w = 4v$. Тражена неједнакост се добија сабирањем претходних неједнакости за $(v,w) = (x,y)$ и $(v,w) = (y,t)$, а једнакост се достиже ако и само ако је $z = 4x$ и $t = 4y$. $\triangle$

Задатак 24. Нека је H Хилбертов простор (са индукованом нормом $\|\cdot\|$), $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_n \in H$такви да је $x_1 + \ldots + x_n = 0$ и $\|x_1\| = \ldots = \|x_n\| = 1$. Одредити $\displaystyle\min_{x\in H}\sum_{k=1}^{n}\|x - x_k\|^2$.

Решење. Како је $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\|x - x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\big(\|x\|^2 + \|x_k\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, x_k\rangle\big) = n\|x\|^2 + n + 2\,\mathrm{Re}\Big\langle x, \sum_{k=1}^{n}x_k\Big\rangle = n\|x\|^2 + n \geqslant n$ (и, притом, једнакост се достиже ако и само ако је $x = 0$, па тражени минимум постоји), следи да је $\displaystyle\min_{x\in H}\sum_{k=1}^{n}\|x - x_k\|^2 = n$. $\triangle$

Неједнакост Brunn-Minkowski

У последњем делу рада дат је приказ неједнакости Брун–Минковског, која у овом моменту није саставни део редовних студија на Математичком факултету у

Београду, али се у специфичном облику јавила на средњошколским такмичењима и добар је пример да се мататматика не може раздвајати на „средњошколску", „факултетску",...

У наставку одељка $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ представљају скупове у равни, O „истакнута тачка равни" (координатни почетак; подразумева се да је ова тачка фиксирана у целом одељку), а $\overrightarrow{\mathcal{U}} = \{\overrightarrow{OX} \mid X \in \mathcal{U}\}$.

Дефиниција 1. *Полусума скупова $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ је скуп*

$$\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \{X \mid X \textit{је средиште } AB, \textit{ где је } A \in \mathcal{U} \textit{ и } B \in \mathcal{V}\}.$$

Дефиниција 2. *Сума скупова (вектора) $\overrightarrow{\mathcal{U}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ је*

$$\overrightarrow{\mathcal{U}} + \overrightarrow{\mathcal{V}} = \{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{U}}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}\}.$$

Скуп крајњих тачака вектора из $\overrightarrow{\mathcal{U}} + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ се обележава са $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ и назива сума Минковског скупова $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Први примери су добри за упознавање ученика са новоуведеним дефиницијама и показују да су оне природна уопштења већ постојећих објеката. Докази следе непосредно из дефиниција, па су овде изостављени.

Задатак 25. Ако је $\mathcal{U} = \{U\}$ једночлан скуп $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ је слика скупа $\mathcal{V}$ при хомотетији са центром U и коефицијентом $\frac{1}{2}$.

Задатак 26. Ако је $\mathcal{U} = \{U\}$ једночлан скуп, онда је $\overrightarrow{\mathcal{U}} + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ скуп добијен транслацијом скупа $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ за вектор $\overrightarrow{OU}$.

Теорема 12. Скуп крајњих тачака вектора из $\overrightarrow{\mathcal{U}} + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ је сличан са $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Притом је коефицијент сличности $\frac{1}{2}$.

Доказ. Нека је $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ и O координатни почетак. Онда је $\overrightarrow{OU} \in \overrightarrow{\mathcal{U}}$ и $\overrightarrow{OV} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$. Ако је W' средиште UV, а W тачка за коју је $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV}$, онда W припада правој OW' и важи $\overrightarrow{OW'} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OW}$. □

Теорема 13. Ако су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ конвексни, онда су и $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ и $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ конвексни.

Доказ. По претходној леми, довољно је показати да је $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ конвексан. Нека су $A, B \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$ и $A_U, B_U \in \mathcal{U}$, $A_V, B_V \in \mathcal{V}$ такве да је $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_U} + \overrightarrow{OA_V}$ и $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_U} + \overrightarrow{OB_V}$ (по дефиницији суме Минковског, овакве тачке постоје).

Ако $X \in AB$, постоји $\lambda \in (0,1)$ тако да је $\overrightarrow{OX} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$. Ако је $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA_U} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB_U}$ и $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OA_V} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB_V}$, из конвексности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ следи да $P \in \mathcal{U}$ и $Q \in \mathcal{V}$. Следи $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \in \overrightarrow{\mathcal{U}} + \overrightarrow{\mathcal{V}}$, а како је $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OX}$, следи да $X \in \mathcal{U} + \mathcal{V}$. □

Следи главно тврђење овог одељка. Дато је у специјалном, дводимензионалном случају (са „стандардном" мером), али треба напоменути да се природно шири и на општију ситуацију.

Теорема 14. *[Brunn-Minkowski].* Ако су $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ конвексни скупови равни, онда је

$$\sqrt{P_{\mathcal{U}+\mathcal{V}}} \geqslant \sqrt{P_{\mathcal{U}}} + \sqrt{P_{\mathcal{V}}}.$$

Доказ. Како се површина скупа не мења транслацијом, довољно је доказати тврђење под претпоставком да је пројекција $\mathcal{U}$ на x-осу $[0,a]$, а $\mathcal{V}$ на y-осу $[0,b]$. Нека је $\mathcal{W} = \mathcal{U}+\mathcal{V}$, $A = P_{\mathcal{U}}$, $B = P_{\mathcal{V}}$, и $C = P_{\mathcal{W}}$.

За свако $p \in [0,a]$ нека је $f(p)$ дужина пресека праве паралелне y-оси која садржи $(p,0)$ и $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ је компактан, па је f добро дефинисано), а тај пресек $\mathcal{U}(p)$. Аналогно се дефинишу $g(p)$ и $\mathcal{V}(p)$ (за $\mathcal{V}$) и $h(p)$ и $\mathcal{W}(p)$ (за $\mathcal{W}$).

Следи $A = \int_0^a f(x)\,dx$, $B = \int_0^b g(x)\,dx$, $C = \int_0^{a+b} h(x)\,dx$. Ако је $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ и $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, онда су $\alpha(t) = F^{-1}(At)$ и $\beta(t) = G^{-1}(Bt)$ неопадајуће функције са $[0,1]$ на $[0,a]$ и $[0,b]$, редом, па је $\gamma(t) = \alpha(t)+\beta(t)$ неопадајућа са $[0,1]$ у $[0,a+b]$ и важи $C = \int_0^1 h(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Како је $\mathcal{W}(\gamma(t)) \supseteq \mathcal{U}(\alpha(t)) + \mathcal{V}(\beta(t))$, следи $h(\gamma(t)) \geqslant f(\alpha(t)) + g(\beta(t))$, па је $C \geqslant \int_0^1 [f(\alpha(t)) + g(\beta(t))] \cdot [\alpha'(t) + \beta'(t)]\,dt$. Како је $f(\alpha(t))\alpha'(t) = [F(\alpha(t))]' = [At]' = A$ и (аналогно) $f(\beta(t))\beta'(t) = B$, следи

$$f(\alpha(t))\beta'(t) + g(\beta(t))\alpha'(t) \geqslant 2\sqrt{f(\alpha(t))\alpha'(t) \cdot g(\beta(t))\beta'(t)} = 2\sqrt{AB},$$

па је $[f(\alpha(t))+g(\beta(t))]\cdot[\alpha'(t)+\beta'(t)] \geqslant A+B+2\sqrt{AB} = (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$. Коначно, важи

$$C \geqslant \int_0^1 \left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2 dt = \left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2. \ \square$$

Облик претходног тврђења, прилагођен средњој школи, појавио се ка Међународној математичкој олимпијади 2006. године. Напомињемо да ученици који су решавали тај задатак нису имали универзитетско образовање, тако да су већина решења која су виђена била практично еквивалентна извођењу претодне теореме. Наравно, само неколико ученика је било у стању да (у ограниченом времену и уз још два задатка) и реши овај задатак, просечан број поена на овом задатку је био $0,187$ (од максималних 7, учествовало је 498 ученика), а не мање од 4 поена на овом задатку имало је 10 ученика. Овде је дато решење свођењем на претходно доказану теорему.

Задатак 27. [*ММО 2006*] Нека је свакој страници b конвексног многоугла придружена највећа површина троугла који је садржан у $\mathcal{P}$ и чија је једна страница b. Доказати да збир свих површина придружених страницама $\mathcal{P}$ није мањи од двоструке површине $\mathcal{P}$.

Решење. Нека је $\mathcal{P} = A_1A_2\dots A_n$ и A_1 координатни почетак. Нека је $\mathcal{P}'$ многоугао симетричан са $\mathcal{P}$ у односу на A_1, а $\mathcal{Q} = \mathcal{P}+\mathcal{P}'$. Онда је $\mathcal{Q} = B_1B_2\dots B_{2n}$ централно–симетричан многоугао (нека је његов центар симетрије C), а дужине страница $\mathcal{Q}$ су дужине страница $\mathcal{P}$ (притом се свака појављује два пута).

Ако је B_iB_{i+1} страница $\mathcal{Q}$ (која одговара страници A_jA_{j+1} многоугла $\mathcal{P}$), важи $B_{i+n}B_{i+n+1} \parallel B_iB_{i+1}$, $B_{i+n}B_{i+n+1} = B_iB_{i+1}$. Растојење правих $B_{i+n}B_{i+n+1}$

и B_iB_{i+1} је два пута веће од дужине највеће висине на A_jA_{j+1} у $\mathcal{P}$, па је површина придружена овој страници $\frac{1}{4} \cdot P_{B_iB_{i+1}B_{n_i}B_{n+i+1}}$. Како је $P_{B_iB_{i+1}B_{n_i}B_{n+i+1}} = 2(P_{B_iB_{i+1}C} + P_{B_{n+i}B_{n+i+1}C})$, следи да је тражени збир једнак $\frac{1}{4} \cdot 2P_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{2}P_{\mathcal{Q}}$, па треба доказати да је $\frac{1}{2}P_{\mathcal{Q}} \geqslant 2P_{\mathcal{P}}$. Међутим, ово следи из неједнакости Брун–Минковског, пошто је $\sqrt{P_{\mathcal{Q}}} \geqslant \sqrt{P_{\mathcal{P}}} + \sqrt{P_{\mathcal{P}'}} = 2\sqrt{P_{\mathcal{P}}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_{\mathcal{Q}} \geqslant 2P_{\mathcal{P}}$. $\triangle$

Закључак

У раду је приказан низ неједнакости које се појављују у геометрији. Већ само помињање неједнакости и геометрије у истој реченици наслућује да се ту не ради само о геометрији. Кроз овај рад смо покушали да илуструјемо основне идеје анализе, алгебре, комбинаторике,... које се јављају код ових неједнакости, као и да прикажемо да прелаз са „школске” на „факултетску” математику не мора бити толико велик (примери приказани у задњим поглављима рада користе исте идеје као „школски” примери са почетка рада).

Литература

[1] С. Аљанчић, *Увод у реалну и функционалну анализу*, Грађевинска књига, Београд, 1979.

[2] В. Балтић, Д. Ђукић, Ђ. Кртинић, И. Матић, *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији*, Материјали за младе математичаре, свеска 49, Друштво математичара Србије, 2011.

[3] З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић, *Неједнакости*, Материјали за младе математичаре, свеска 42, Друштво математичара Србије, 2003.

[4] Ђ. Кртинић, *Математичке олимпијаде средњошколаца 2007–2011. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 52, Друштво математичара Србије, 2012.

[5] И. Матић, *Геометријске неједнакости*, Материјал за припреме олимпијске екипе Србије, 2007.

[6] П. Младеновић, Ђ. Кртинић, *Међународне и Балканске олимпијаде средњошколаца 1996–2006. године*, Материјали за младе математичаре, свеска 48, Друштво математичара Србије, 2003.

[7] P. Halmos, *A Hilbert Space Probem Book* (second edition), Graduate texts in mathematics 19, Springer–Verlag, New York (1982).