Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Кооперативне игре са n играча

Студент:
Ивана Марковић, 1014/2015

Ментор:
др Александар Савић

Београд, Септембар 2016.

Апстракт:

У овом раду биће изложене кооперативне игре са n играча. У кратком уводном делу приказан је историјат теорије игара. У другом поглављу су дати основни појмови теорије игара, њихови начини приказивања и класификација игара. У трећем поглављу уводимо основне појмове кооперативних игара - појмове коалиције, импутације, доминације. Четврто поглавље се бави разним концепцијама решења кооперативних игара - $N - M$ решење, језгро, кернел, нуклеус, Шеплијев вектор. У петом поглављу су представљени примери кооперативних игара у политици и економији.

Кључне речи: Теорија игара, Кооперативне игре, Решење игре

Abstract:

This thesis describes n-person cooperative games. A short introductory section reviews the history of game theory. In the second chapter are given basic terms of game theory, their representation and classification of games. The third chapter introduces basic concepts of cooperative games - coalition, imputation, domination. The fourth chapter deals with various solution concepts of cooperative games - the $N - M$ solution, the core, the kernel, the nucleolus, the Shapley value. In the fifth chapter are presented examples of cooperative games in politics and economy.

Key words: Game theory, Cooperative games, Solution concept

Садржај

1 Увод

Теорија игара је грана примењене математике која се бави анализом конфликтних ситуација у којима учесници имају супротстављене интересе. Анализирање оваквих ситуација је названо теоријом игара јер типичне примере виђамо код друштвених игара као што су шах и разне игре са картама. Међутим, теорија игара има неупоредиво ширу примену и користи се у економији, политичким наукама, војној стратегији, еволуционој биологији, компјутерској логици и информатици, филозофији итд.

Теорија игара има два циља. Први је разумевање зашто се учесници (играчи) понашају како се понашају. Други циљ је практичнији и односи се на одређивање оптималних стратегија играча, односно правила која кажу како (шта) у некој ситуацији играч треба да одигра. Први циљ је посебно важан када игра има много играча и компликована правила. Добри примери су игре у економији и међународној политици. У идеалној ситуацији, теорија игара ће нас довести до описа стратегије сваког играча која гарантује најбољи исход игре за тог играча. Као што ћемо видети, овај циљ је исувише амбициозан. Међутим, чак и у ситуацијама када не можемо да нађемо решење игре, теорија игара може помоћи играчима дајући им савете шта је боље одиграти.

1.1 Историја теорије игара

Неки проблеми из теорије игара јављају се још у античком периоду. Платон[1] и Сократ[2] су у својим делима расправљали о стратегијама ратника током битака, али су је такође примењивали ради разумевања исправног и етичког понашања.

У светој књизи *Вавилонски Талмуд*, писаној између *III* и *V* века нове ере, јавља се проблем брачног уговора: човек има три жене чији брачни уговори кажу да у случају његове смрти оне примају 100, 200, 300 зуса редом. Међутим, шта се дешава ако човек умре са мање од 600 зуса? Уколико човек умре са 100 зуса, *Талмуд* препоручује једнаку поделу. Ако наслеђе износи 300 зуса, препоручује се пропорционална подела (50,100,150), док се за наслеђе од 200 зуса препоручује подела (50,75,75), што је за многе била мистерија. Године 1985. дошло је до објашњења: свака подела одговара нуклеусу коректно дефинисане игре. Аутори *Талмуда* су овим проблемом препознали неке критеријуме присутне у модерној теорији кооперативних игара.

У *XVII* и *XVIII* веку концепти теорије игара су били само оквирно

[1]Платон (*V* век пне), грчки филозоф
[2]Сократ (*V* век пне), грчки филозоф

разматрани у многим делима. Паскал[3] пише о трагању за најбољим решењем у односу на нека постојећа ограничења и полемише о томе на шта се треба кладити: Бог постоји или Бог не постоји. Лајбниц[4] је први направио разлику између хазардних игара (игара на срећу) и стратегијских игара. Код хазардних игара коначан резултат зависи искључиво од случаја, док резултат стратегијских игара зависи од понашања играча, односно њиховог начина игре.

У XIX веку се појављује пар радова заснованих на проблему дуопола, тј. два предузећа која међусобно конкуришу на истом тржишту.

Све до почетка XX века концепти теорије игара су, како је већ наведено, били само оквирно разматрани. Тек са радовима Борела[5] започеле су важне прекретнице у овој математичкој дисциплини. Он је наслутио опште решење антагонистичке игре у мешовитим стратегијама (*minimax* теорему), али га није могао доказати. Ову теорему је 1928. године доказао Фон Нојман[6]. Прво релевантно издање на тему теорије игара је *Теорија игара и економско понашање*, објављено 1944. године, које је било резултат плодне сарадње фон Нојмана и Моргенштерна[7]. У њој су подробно објашњене игре два играча са нултом сумом, као и коалиционе игре. Дефинисана је кључна категорија коалиционих игара - карактеристична функција и доказане су њене битне особине. Такође, аутори су дефинисали појмове импутације, стратешке еквиваленције игара и прецизирали критеријум доминације.

Фундаментални допринос теорији игара дао је Џон Неш[8]. Он је развио теорију некооперативних игара и теорију преговарања. Увео је појам равнотежне тачке и доказао да коначна бескоалициона игра има равнотежну тачку у мешовитим стратегијама. У његову част је она названа Нешова равнотежна тачка. Нешу је 1994. година додељена Нобелова награда за економију за његове изванредне идеје које су допринеле развоју теорије игара и њен значај за анализу економских појава.

Од 1950. године па надаље радови из области теорије игара су се само низали. Почела се обраћати посебна пажња на бројне примене ове теорије на остале научне дисциплине, посебно у економији и политици.

[3]Blaise Pascal (1623-1662), француски математичар и филозоф
[4]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), немачки математичар и филозоф
[5]Emile Borel (1871-1956), француски математичар
[6]John von Neumann (1903-1957), мађарско-амерички математичар
[7]Oskar Morgenstern (1902-1977), немачки математичар и економиста
[8]John Forbes Nash Jr (1928-2015), амерички математичар

2 Основни појмови

У математици, игром називамо било коју ситуацију у којој учествује два или више играча који имају различите интересе. Под појмом играч подразумева се било један играч или група учесника који заузимају исту страну у конфликту. Потез је акција коју играч спроводи у неком тренутку током игре. Стратегија је начин поступања играча. Она представља комплетан алгоритам играња, односно она је правило које каже како (шта) у било којој ситуацији да играч одигра (уради). Скуп свих стратегија једног играча чини простор стратегија. Прихватљива ситуација за неког играча је она ситуација у којој он не може остварити повољнији резултат избором неке друге стратегије. Она ситуација која је прихватљива за све играче се назива ситуација равнотеже. Оптималне стратегије су оне стратегије које доводе до ситуације равнотеже. Циљ игре је проналажење оптималне стратегије за сваког играча. Исход игре представља резултат којим се игра завршава. Он се дефинише функцијом исплате, која представља скуп добитака, односно губитака свих учесника игре.

Игре које се проучавају у теорији игара су добро дефинисани математички објекти. Да би игра била потпуно дефинисана, она мора садржати информације о следећим елементима: учесницима игре, скупу свих могућих потеза играча у сваком тренутку игре и исплатама за сваки исход игре.

2.1 Начини приказивања игара

Постоје три начина представљања игара:

1. у екстензивној форми (форми стабла),
2. у нормалној форми (форми матрице),
3. у форми карактеристичне функције.

Некооперативне игре се представљају у ектензивној и нормалној форми, док се кооперативне игре представљају у форми карактеристичне функције.

О кооперативним играма ће бити речи у следећим поглављима, па ће тада бити изложен и њихов начин представљања.

Игре се представљају у екстензивној форми уколико је познато које све потезе играч може да одигра у сваком тренутку игре и које су исплате за све могуће резулате игре.

Граф $G = (V, E)$ је уређен пар скупова, где је V скуп чворова (врхова), а E скуп грана (ивица). Стабло је повезан граф без цикла. У хијерархијском стаблу постоји јединствени чвор коме не претходи ниједан други чвор и он се назива корен стабла. Чворови који немају следбенике се називају листови. Између свака два чвора постоји јединствен пут кроз стабло, па самим тим и од корена до сваког листа. Коначна секвенца потеза се назива ланац.

Парцијално уређен скуп $(T, \leq)$ је стабло игре ако важи:

1. $(\exists x_0 \in T)(\forall x \in T) \quad x_0 \leq x$,
2. $(\forall y \in T) \quad U_y = \{x | x \leq y\}$ је ланац.

Чворови графа представљају позиције, а гране алтернативе. Завршне позиције су максимални елементи скупа T. Скуп завршних позиција означавамо са F и он углавном представља исплате. Скуп

$$S(x) = \{t \in T| \quad 1) x \leq t \wedge x \neq t; \quad 2) z \in T \wedge x \leq z \leq t \wedge t \in S(x) \Rightarrow z \in \{x, t\}\}$$

представља скуп алтернатива позиције x. Партија је максималан ланац - од корена до F. Постоји разбијање скупа $T \backslash F$ на информационе скупове тако да важи:

1. Све тачке које припадају истом информационом скупу I припадају истом играчу,
2. $(x, y \in I) \Rightarrow |S(x)| = |S(y)|$ и алтернативе су индексиране бројевима $\{1, 2, ..., |S(x)|\}$,
3. Информациони скуп случајног потеза има један елемент,
4. Пресек сваке партије и сваког информационог скупа има највише један елемент.

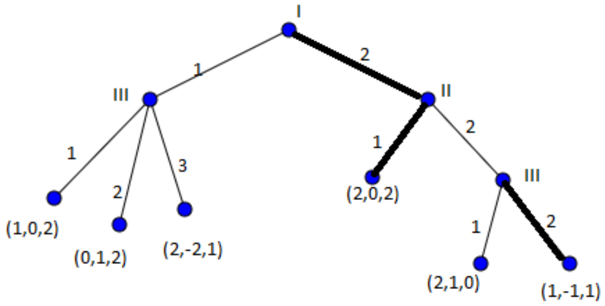
Сада стратегију можемо дефинисати као пресликавање сваког информационог скупа играча i у индекс алтернатива његових позиција.

На Слици 1 је приказана екстензивна форма игре 3 играча са назначеним стратегијама играча.

Представљање игре нормалном формом подразумева приказ свих могућих стратегија и њима одговарајућих добитака, за сваког играча. Овај приступ може да буде кориснији за одређивање доминантних стратегија и Нешових равнотежних тачака, али се одређена количина информација губи у односу на екстензивну форму.

Игра у нормалној форми има структуру $(\Sigma_1, ..., \Sigma_n; K_1, ..., K_n)$, где је $\{1, 2, ..., n\}$ скуп играча, Σ_i скуп стратегија i-тог играча, а K_i функција исплате i-тог играча, за $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

На Слици 2 је приказана игра 2 играча у нормалној форми.



Слика 1: Екстензивна форма игре

Играч 2

Играч 1

Стратегија	А	Б	Ц
а	12,11	11,12	14,13
б	11,10	10,11	12,12
ц	10,15	10,13	13,14

Слика 2: Нормална форма игре

2.2 Класификација игара

Игре су могу класификовати према следећим критеријумима:

- Према броју учесника
  1. Игре са два учесника,
  2. Игре са више учесника;
- Према међусобном односу играча
  1. Кооперативне игре - између учесника постоји договор, односно два или више играча усклађују своје интересе, стварају коалицију и координисано се опредељују у избору стратегије,
  2. Некооперативне игре - није дозвољен договор између играча;
- Према утицају играча на исход игре
  1. Стратешке игре - играчи директно својим способностима утичу на ток и исход игре,
  2. Игре на срећу - на исход игре утичу случајни фактори;

- Према броју потеза
    1. Коначне (бројачке) игре - партија се завршава у коначном броју потеза и играч има коначан избор стратегија,
    2. Бесконачне (итеративне) игре - свака стратегија води бесконачном броју потеза и ниједан играч нема на располагању победничку стратегију;
- Према карактеристикама исхода игре
    1. Игре са нултом сумом - укупан добитак победника једнак је укупном губитку поражених у игри, односно укупна сума плаћања је једнака нули,
    2. Игре са ненултом сумом - сума исплата је различита од нуле;
- Према доступности информација
    1. Игре са потпуном информацијом - сваком играчу је позната структура игре и функције исплате, али не и сви потези осталих играча,
    2. Игре са непотпуном информацијом - играчи немају све информације о својим противницима,
    3. Игре са савршеном информацијом - сваки играч при сваком потезу зна све раније изведене потезе осталих играча,
    4. Игре са несавршеном информацијом - играчи нису обавештени о претходним потезима својих противника;
- Према начину повлачења потеза
    1. Паралелне игре - сви играчи истовремено повлаче потезе или наредни играчи немају никакву информацију о потезима претходних играча,
    2. Секвенцијалне (динамичке) игре - играчи повлаче потезе један за другим или сваки играч има неку информацију о потезима свих оних играча који су играли пре њега;
- Према типу простора стратегија
    1. Дискретне игре - играчи бирају стратегије из дискретног скупа стратегија,
    2. Континуалне игре - омогућавају играчу да изабере стратегију из континуалног простора стратегија;

- Према симетрији нормалне форме игре

    1. Симетричне игре - игре у којима можемо да заменимо идентитете играча, а да се притом не промени нормална форма те игре,
    2. Асиметричне игре - игре у којима не можемо заменити идентитете играча, а да се при томе не промени нормална форма те игре.

3 Кооперативне игре n играча у форми карактеристичне функције

Кооперативне игре су врло значајан део модерне теорије игара, а истовремено су и корисно средство за анализу бројних друштвених процеса. У њима играчи имају потпуну слободу да се међусобно договарају. Уколико имамо игру два играча са нултом сумом, нема смисла причати о формирању коалиција. Ако имамо игру два играча са ненултом сумом, играчи имају избор да сарађују или не, односно постоји само једна могућа коалиција. У случају игре са n, $n \geq 3$ играча постоји много могућих коалиција.

3.1 Коалиције и карактеристичне функције

Дефиниција 1 *Нека је $N = \{1, 2, ..., n\}, n \geq 2$ скуп учесника игре. Било који подскуп $C = \{i_1, i_2, ..., i_k\}, 0 \leq k \leq n$, скупа N је коалиција.*

Како постоји 2^n могућих подскупова скупа N, може се формирати 2^n коалиција. Играчи ће формирати коалицију само уколико као чланови коалиције постижу најмање онолико колико би постигли неудружени. У супротном, стварање коалиције не би имало смисла. Основни подстицај играча на сарадњу састоји се, дакле, у томе што се кроз сарадњу може остварити бољи резултат него што би био случај ако таква сарадња изостане. Учесници коалиције неће више независно бирати своје стратегије. Они теже да максимизују укупан профит коалиције и самим тим и свог дела.

Постављају се три основна питања:

1. Које ће се коалиције највероватније формирати?
2. Колико су оне стабилне?
3. Како се дели профит унутар њих?

Нека је $\Gamma = (\Sigma_1, ..., \Sigma_n; K_1, ..., K_n)$ игра и $C \subset N$, $C = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, коалиција. Скуп стратегија коалиције је $\Sigma_{i_1} \times \Sigma_{i_2} \times ... \times \Sigma_{i_k}$. Функција исплате је $\sum_{\alpha=1}^{k} K_{i_\alpha}(x_C, x_{I \setminus C})$, где је $I \setminus C = \{i_{k+1}, ..., i_n\}$ коалиција играча који нису у коалицији C. На овај начин добијамо игру са два играча. Коалиција C може да осигура добитак

$$v(C) = \max_{x_C} \min_{x_{I \setminus C}} \sum_{\alpha=1}^{k} K_{i_\alpha}(x_C, x_{I \setminus C}). \tag{1}$$

Дефиниција 2 *Функција* $v : C \to \mathbb{R}$ *за коју је* $v(\emptyset) = 0$ *зове се карактеристична функција игре.*

Врло корисно својство карактеристичне функције је суперадитивност:

$$(\forall C_1, C_2 \subset N)(C_1 \cap C_2 = \emptyset) \quad v(C_1 \cup C_2) \geq v(C_1) + v(C_2). \tag{2}$$

Последица суперадитивности је да за произвољан број дисјунктних коалиција важи:

$$v\left(\bigcup_k C_k\right) \geq \sum_k v(C_k),$$

где је $\bigcup\limits_k C_k \subseteq N, \quad C_k \cap C_l = \emptyset, k \neq l.$

Дефиниција 3 *Игра у форми карактеристичне функције је* $\Gamma = (N, v)$, *где је* $v(\emptyset) = 0$.

Игра Γ је суперадитивна ако и само ако је v суперадитивна, односно задовољава (2).

Игра Γ је монотона ако и само ако важи $T \subset S \Rightarrow v(T) \leq v(S)$.

Јасно је да је свака суперадитивна игра истовремено и монотона и да супротно не важи.

Игра Γ је са константном сумом ако и само ако
$(\forall C \subset N) \quad v(C) + v(N \backslash C) = v(N)$.

Уколико је кооперативна игра Γ у форми карактеристичне функције суперадитивна, онда се Γ може сматрати игром насталом из некооперативне игре n играча принципом максимума (1).

Теорема 3.1 *Нека је* $v : C \to \mathbb{R}, \ C \subset N = \{1, 2, ..., n\}$, *суперадитивна карактеристична функција. Тада постоји игра* n *играча чија је карактеристична функција баш* v.

Доказ је сложен, па ће овде бити изложена само конструкција игре чија је карактеристична функција управо v.

Нека је $\Sigma_i = \{C \subset N | i \in C\}$, $i = 1, 2, ..., n$ стратешки скуп играча i и нека су функције исплате дефинисане на следећи начин:

$$K_i(C_1, ..., C_n) = \begin{cases} \frac{v(C_i)}{|C_i|}, & \text{ако за} \quad (\forall j \in C_i) C_j = C_i \\ v(\{i\}), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Уколико је игра са константном сумом, узимају се проширене исплате:

$$\overline{K_i}(C_1, ..., C_n) = K_i(C_1, ..., C_n) + \frac{1}{n}\left(v(N) - \sum_{i=1}^{n} K_i(C_1, ..., C_n)\right). \tag{4}$$

3.2 Импутације

Постоје игре које имају различите нормалне форме, али исту карактеристичну функцију. Као што је напоменуто, питање поделе профита унутар коалиције је од изузетне важности. Зато уводимо појам импутације:

Дефиниција 4 *Импутација (деоба) је уређена n-торка* $x = (x_1, ..., x_n)$ *таква да је:*

(1) $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$ *(групна рационалност),*

(2) $x_i \geq v(\{i\}), \quad i = 1, 2, ..., n$ *(индивидуална рационалност).*

Први услов говори да збир појединачних исплата играчима у коалицији мора бити једнак укупном профиту који коалиција свих играча остварује, односно не може да се подели више него што је коалиција свих играча постигла, а нема разлога да се подели мање. Другим условом се захтева да играч у коалицији мора да оствари најмање онолики добитак који би остварио играјући самостално. Може да се деси да је x_i негативан број; то омогућава да се моделују чланови коалиције који не доприносе коалицији и чак су можда и штетни за коалицију.
Сабирајући неједнакости из другог услова добија се

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}). \tag{5}$$

Игре за које важи (5) се називају рационалним играма. Све суперадитивне игре су очигледно рационалне и скуп импутација $X(\Gamma)$ није празан, уколико је Γ рационална игра.

Дефиниција 5 *Игра* $\Gamma = (N, v)$ *је битна уколико је* $v(N) > \sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})$*, а небитна уколико је* $v(N) = \sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})$*.*

Код небитних игара нема користи од формирања било које коалиције.
Игра је адитивна уколико важи:

$$(\forall C_1, C_2 \subset N)(C_1 \cap C_2 = \emptyset) \quad v(C_1 \cup C_2) = v(C_1) + v(C_2).$$

Лема 3.1 *Игра је небитна ако и само ако је адитивна.*

Доказ.

$$\begin{aligned} v(N) &= \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \\ &= \sum_{i\in C_1} v(\{i\}) + \sum_{i\in C_2} v(\{i\}) + \sum_{i\in N\setminus(C_1\cup C_2)} v(\{i\}) \\ &\leq v(C_1) + v(C_2) + v(N\setminus(C_1\cup C_2)) \\ &\leq v(C_1\cup C_2) + v(N\setminus(C_1\cup C_2)) \\ &\leq v(N). \end{aligned}$$

Из овога следи да је $v(C_1)+v(C_2)+v(N\setminus(C_1\cup C_2)) = v(C_1\cup C_2)+v(N\setminus(C_1\cup C_2))$, из чега следи да је $v(C_1)+v(C_2) = v(C_1\cup C_2)$.

□

Свака небитна игра има само једну импутацију и то $x = (v(\{1\}), ..., v(\{n\}))$. Уколико је игра битна, она има бесконачно много импутација. Зато се јавља потреба за утврђивањем критеријума избора "разумне" импутације.

Дефиниција 6 *Нека је $C \subset N$ произвољна коалиција. За импутацију x кажемо да доминира импутацију y по коалицији C, у ознаци $x \succ_C y$, уколико важи:*

(1) $x_i > y_i$,

(2) $\sum_{i\in C} x_i \leq v(C)$.

Дефиниција 7 *Импутација x доминира импутацију y, у ознаци $x \succ y$, уколико постоји коалиција $C \subset N$ за коју је $x \succ_C y$.*

Теорема 3.2 *Нека је $x = (x_1, ..., x_n)$ импутација у суперадитивној игри $\Gamma = (N, v)$ и $C \subset N$ било која коалиција. Следећи искази су еквивалентни:*

(1) $\sum_{i\in C} x_i < v(C)$,

(2) *постоји импутација y таква да је $y \succ_C x$.*

Доказ. (2) ⇒ (1): $v(C) \geq \sum_{i\in C} y_i > \sum_{i\in C} x_i$

(1) ⇒ (2): Нека је $\epsilon = v(C) - \sum_{i\in C} x_i > 0$.

Дефинишимо

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{\epsilon}{|C|}, & i \in C \\ v(\{i\}) + \frac{v(N)-v(C)-\sum_{j\notin C} v(\{j\})}{|N-C|}, & i \notin C \end{cases}$$

Проверавамо да је y импутација:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in C} y_i + \sum_{j\in N\setminus C} y_j &= \sum_{i\in C} x_i + \epsilon + \sum_{j\in N\setminus C} y_j \\ &= \cancel{\sum_{i\in C} x_i} + \cancel{v(C)} - \cancel{\sum_{i\in C} x_i} + \cancel{\sum_{j\in N\setminus C} v(\{j\})} + v(N) - \cancel{v(C)} - \cancel{\sum_{j\in N\setminus C} v(\{j\})} \\ &= v(N),\end{aligned}$$

$y(i) > x(i) \geq v(\{i\}), \quad i \in C$, јер је x импутација;
$y(j) \geq v(\{j\}), \quad j \in N\setminus C$ због суперадитивности;
$\sum\limits_{i\in C} y_i \leq \sum\limits_{i\in C} x_i + \epsilon = v(C) \Rightarrow y_i$ су оствариве импутације.
Следи,$y \succ_C x$.

$\square$

Дефиниција 8 *Игре* $\Gamma = (N, v)$ *и* $\Gamma' = (N, v')$ *су изоморфне ако и само ако постоји бијекција скупова импутације која чува доминацију, тј.*

$$(\forall C \subset N) \quad x \succ_C y \Leftrightarrow f(x) \succ_C f(y). \tag{6}$$

Из ове дефиниције је тешко одредити да ли су две игре изоморфне. Зато уводимо следећи критеријум:

Дефиниција 9 *Игре* $\Gamma = (N, v)$ *и* $\Gamma' = (N, v')$ *су стратешки еквивалентне уколико постоје* $\alpha > 0$ *и* $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ *такви да је*

$$(\forall C \subset N) \quad v'(C) = \alpha v(C) + \sum_{j\in C} \beta_j. \tag{7}$$

Јасно се види да је релација стратешке еквиваленције уједно и релација еквиваленције. Самим тим се простор карактеристичних функција, за фиксан скуп играча N, може на јединствен начин разбити на међусобно дисјунктне класе стратешке еквиваленције.

Теорема 3.3 (фон Нојман) *Игре су изоморфне ако и само ако су стратешки еквивалентне.*

Дефиниција 10 *За игру* $\Gamma = (N, v)$ *се каже да је у (0,1) форми ако је*
$(\forall i \in N) \quad v(\{i\}) = 0$ *и* $v(N) = 1$.

За битне игре важи

$$(\exists_1 \quad \alpha > 0, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}) \quad \begin{aligned} &\alpha v(\{j\}) + \beta_j = 0, \quad j = 1, ..., n \\ &\alpha v(N) + \sum_{j\in N} \beta_j = 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.4 *Свака битна игра је стратешки еквивалентна тачно једној игри у (0,1) форми.*

Доказ. Нека је v карактеристична функција битне игре. Посматрајмо систем $n+1$ једначине са $(n+1)$-ом непознатом $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n$:

$$v'(\{i\}) = \alpha v(\{i\}) + \beta_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \tag{8}$$

$$v'(N) = \alpha v(N) + \sum_{i \in N} \beta_i = 1. \tag{9}$$

Сумирањем (8) добијамо

$$\alpha \sum_{i \in N} v(\{i\}) + \sum_{i \in N} \beta_i = 0.$$

Одузимањем (8) од (9) имамо

$$\alpha \left(v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) \right) = 1.$$

Како је игра битна то важи

$$v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}) > 0.$$

Следи,

$$\alpha = \frac{1}{v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})} > 0.$$

Заменом у (8) добијамо

$$\beta_i = \frac{-v(\{i\})}{v(N) - \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})}.$$

Овим су непознате $\alpha, \beta_1, ..., \beta_n$ јединствено одређене једначинама (8) и (9), игре (N, v) и (N, v') су стратешки еквивалентне и (N, v') је у (0,1) форми.

□

Из ове теореме следи да игре у (0,1) форми представљају класе еквиваленције битих игара.

Нека је N фиксирано. Тада је игра у (0,1) форми дата (карактеристичном) функцијом v за коју важи:

1. $v(\emptyset) = 0$,
2. $(\forall i \in N) \quad v(\{i\}) = 0$,
3. $v(N) = 1$,
4. $(\forall C_1, C_2 \subset N)(C_1 \cap C_2 = \emptyset) \quad v(C_1 \cup C_2) \geq v(C_1) + v(C_2)$.

Јасно је да ако функције v и v' задовољавају ова четири услова, тада их задовољава и њихова конвексна линеарна комбинација, што значи да је простор могућих карактеристичних функција конвексан.

4 Концепције решења кооперативних игара n играча

У овом поглављу ћемо се бавити најважнијим концепцијама решења рационалних кооперативних игара n играча. Главни проблем је одредити које импутације треба размотрити тако да оне репрезентују неку врсту "стабилности" или "еквилибријума". Како су ови појмови поприлично нејасни и могу бити интерпретирани на много различитих начина, у разним литературама је предложен одређен број различитих концепција решења. Иако је сваки од њих добро теоретски поткрепљен и базиран на одређеним претпоставкама као што је рационално понашање учесника игре, ниједан од њих није једногласно прихваћен као "решење" кооперативне игре са n играча. Из тог разлога овде ће бити изложено неколико различитих концепција решења.

4.1 Фон Нојман-Моргенштернова концепција решења

Прва концепција решења кооперативне игре $\Gamma = (N, v)$ је предложена од стране фон Нојмана и Моргенштерна 1944. године.

Дефиниција 11 *Скуп $S \subset X(\Gamma)$, где је $X(\Gamma)$ скуп импутација, је фон Нојман-Моргенштерново решење (скраћено, $N - M$ решење) или стабилан скуп ако*

1. $(\forall x, y \in S) \quad x \not\succ y$ *(унутрашња стабилност),*
2. $(\forall x \notin S)(\exists y \in S) \quad y \succ x$ *(спољашња стабилност).*

Теорема 4.1 *Уколико се $N - M$ решење кооперативне игре састоји од једне једине импутације, игра је небитна.*

Главни недостаци $N - M$ решења су што не може да се утврди његово постојање, нити јединственост. Већина игара има много стабилних скупова, па се јавља проблем: који од њих изабрати за "решење". Неке игре немају $N - M$ решење. Стабилне скупове је често тешко одредити, што је још један проблем.

Пример 4.1 *Године 1967. Лукас[9] је открио кооперативну игру 10 играча која нема $N - M$ решење:*

$$v(\{1,2\}) = v(\{3,4\}) = v(\{5,6\}) = v(\{7,8\}) = v(\{9,10\}) = 1$$

[9] William F. Lucas (1933-2010), амерички математичар

$$v(\{3,5,7\}) = v(\{1,5,7\}) = v(\{1,3,7\}) = 2$$

$$v(\{3,5,9\}) = v(\{1,5,9\}) = v(\{1,3,9\}) = 2$$

$$v(\{1,4,7,9\}) = v(\{3,6,7,9\}) = v(\{2,5,7,9\}) = 2$$

$$v(\{3,5,7,9\}) = v(\{1,5,7,9\}) = v(\{1,3,7,9\}) = 3$$

$$v(\{1,3,5,7,9\}) = 4$$

$$v(N) = 5, \quad N = \{1,2,...,10\}$$

$$v(S) = 0, \quad \text{за све остале коалиције } S \subset N.$$

4.2 Језгро

Појам језгра као концепције решења су увели Шепли[10] и Гилиз[11] 1953. године.

Дефиниција 12 *Језгро игре* $\Gamma = (N, v)$, *у ознаци* $C(v)$, *је скуп недоминирајућих импутација те игре.*

Теорема 4.2 *Нека је* S *стабилан скуп, односно* $N-M$ *решење кооперативне игре* $\Gamma = (N, v)$.

1. *Уколико у игри постоји језгро* $C(v)$, *онда је* $C(v) \subset S$,
2. *Уколико је језгро* $C(v)$ *стабилан скуп, онда је* $S = C(v)$.

Према овој теореми, сваки стабилан скуп садржи језгро и, ако је само језгро стабилан скуп, онда је то јединствен стабилан скуп.

Теорема 4.3 *Језгро* $C(v)$ *рационалне игре* $\Gamma = (N, v)$ *је скуп импутација* $x = (x_1, ..., x_n)$ *које задовољавају следеће услове:*

(а) $(\forall S \subset N) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$,

(б) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

[10]Lloyd Stowell Shapley (1923-2016), амерички математичар и економиста
[11]Donald Bruce Gillies (1928-1975), канадски математичар

Теорема 4.4 *Ако је* (N, v) *битна игра са константном сумом, онда је* $C(v) = \emptyset$.

Доказ. Претпоставимо да $x \in C(v)$. Тада, према услову (а) претходне теореме

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v(N \setminus \{i\}) = v(N) - v(\{i\}), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Сумирањем по $i \in N$ добијамо

$$(n-1) \sum_{i \in N} x_i \geq nv(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Користећи услов (б) претходне теореме имамо

$$(n-1)v(N) \geq nv(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\}).$$

Следи,

$$v(N) \leq \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N), \quad \text{јер је игра битна.}$$

Добијамо

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N),$$

што је контрадикција са претпоставком теореме да је игра битна. Следи, $x \notin C(v)$, односно, $C(v)$ је празно.

□

Теорема 4.5 *Језгро небитне игре* $\Gamma = (N, v)$ *се састоји од импутације*

$$(x_1, ..., x_n) = (v(\{1\}), ..., v(\{n\}))\,.$$

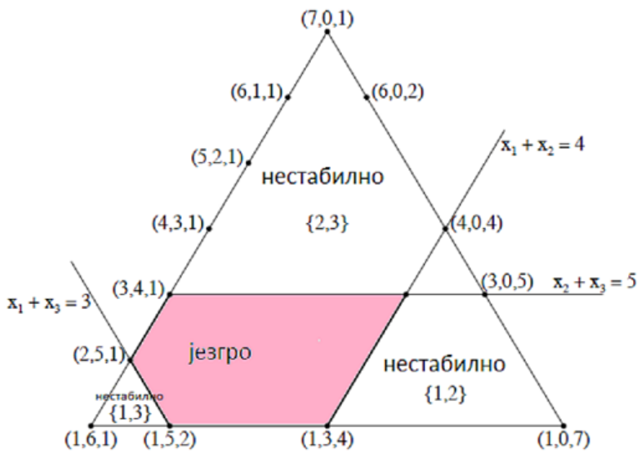
Доказ. Игра је небитна, па је $v(N) = \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})$. Према услову (б) претходне теореме $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$, па следи да је $x_i = v(\{i\})$.

□

Пример 4.2 *Одредити језгро игре са 3 играча која је задата својом карактеристичном функцијом v:*

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 8 \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 & \end{array}$$

Импутације су вредности (x_1, x_2, x_3) *такве да је* $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 1$. *Овај скуп представља троугао са теменима (7,0,1), (1,6,1) и (1,0,7). Претпоставимо да се троугао налази на равни* $x_1 + x_2 + x_3 = 8$. *Свака тачка равни има три координате чији је збир 8.*



Слика 3: Језгро игре

Нађимо сада нестабилне импутације. Коалиција {2,3} може себи да гарантује минимални износ $v(\{2,3\}) = 5$, па су све тачке (x_1, x_2, x_3) за које важи $x_2 + x_3 < 5$ нестабилне. На дијаграму су то тачке изнад линије $x_2 + x_3 = 5$. Како коалиција {1,2} себи може да гарантује минимални износ $v(\{1,2\}) = 4$, све тачке (x_1, x_2, x_3) за које важи $x_1 + x_2 < 4$, односно све тачке испод и десно од праве $x_1 + x_2 = 4$ на дијаграму, су нестабилне. Коначно, коалиција {1,3} може себи да гарантује минимални износ $v(\{1,3\}) = 3$, те су све тачке (x_1, x_2, x_3) за које важи $x_1 + x_3 < 3$, тј. све тачке испод и лево од праве $x_1 + x_3 = 3$ на дијаграму, нестабилне.

Језгро представљају преостале тачке простора импутација, и видимо на Слици 3 да оне формирају петоугао.

Као што видимо, важна класа игара има празно језгро, које не може бити сматрано решењем. Неопходан и довољан услов да игра Γ има непразно језгро је дат у погледу балансираних скупова.

Дефиниција 13 *Нека су $S_1, ..., S_p$, $1 \le p \le n$, дисјунктни и непразни прави подскупови скупа играча $N = \{1, 2, ..., n\}$. Скуп $\mathfrak{S} = \{S_1, ..., S_p\}$ је балансиран ако постоје позитивни коефицијенти $\gamma_1, ..., \gamma_p$ такви да је*

$$(\forall i \in N) \sum_{\substack{j \\ i \in S_j}} \gamma_j = 1, \quad 1 \le j \le p. \tag{10}$$

Бројеви $\gamma_1, ..., \gamma_p$ се називају тежине и каже се да балансирају скуп $\mathfrak{S}$.

Уколико су све тежине једнаке 1, тада је скуп $\mathfrak{S}$ партиција скупа N. Из овога следи да се балансирани скупови могу посматрати и као уопштене партиције.

Дефиниција 14 *Игра* $\Gamma = (N, v)$ *је балансирана уколико за сваки балансирани скуп* $\mathfrak{S}$ *са тежинама* $\{\gamma_S\}$ *важи*

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}} \gamma_S v(S) \leq v(N). \tag{11}$$

Игру Γ називамо слабом уколико има непразно језгро.

Теорема 4.6 *Игра има непразно језгро ако и само ако је балансирана.*

Дефиниција 15 *Пред-импутација је уређена n-торка* $x = (x_1, ..., x_n)$ *за коју важи* $\sum\limits_{i \in N} x_i = v(N)$.

Како језгро може бити празан скуп, уводимо следећи појам:

Дефиниција 16 *Нека су дати игра* $\Gamma = (N, v)$ *и број* $\epsilon > 0$. *Јако* ϵ*-језгро, у ознаци* $C_\epsilon(v)$, *је скуп свих пред-импутација таквих да, за сваку коалицију* $S \subset N$, *важи*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \epsilon. \tag{12}$$

Појам јаког ϵ- језгра су увели Шепли и Шубик[12] 1966. године.

Очигледно је $C_0(v) = C(v)$. Без обзира на то да ли је језгро празан скуп, јако ϵ-језгро то неће бити за довољно велику вредност ϵ. Такође, важи $C_\delta(v) \subset C_\epsilon(v)$ за $\delta < \epsilon$.

Дефиниција 17 *Пресек свих непразних јаких* ϵ*-језгара је најмање-језгро, у ознаци* $LC(v)$.

Најмање-језгро се може сматрати јаким ϵ-језгром за најмање ϵ такво да је то јако ϵ-језгро непразан скуп.

Пример 4.3 *Одредити језгро и јако* ϵ*-језгро игре 3 играча која је задата својом карактеристичном функцијом* v, *ако је* $\epsilon = 15$:

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 20 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 10 & v(\{1,2,3\}) = 60 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 50 & \end{array}$$

[12] Martin Shubik (1926-), амерички математичар и економиста

Обележимо са

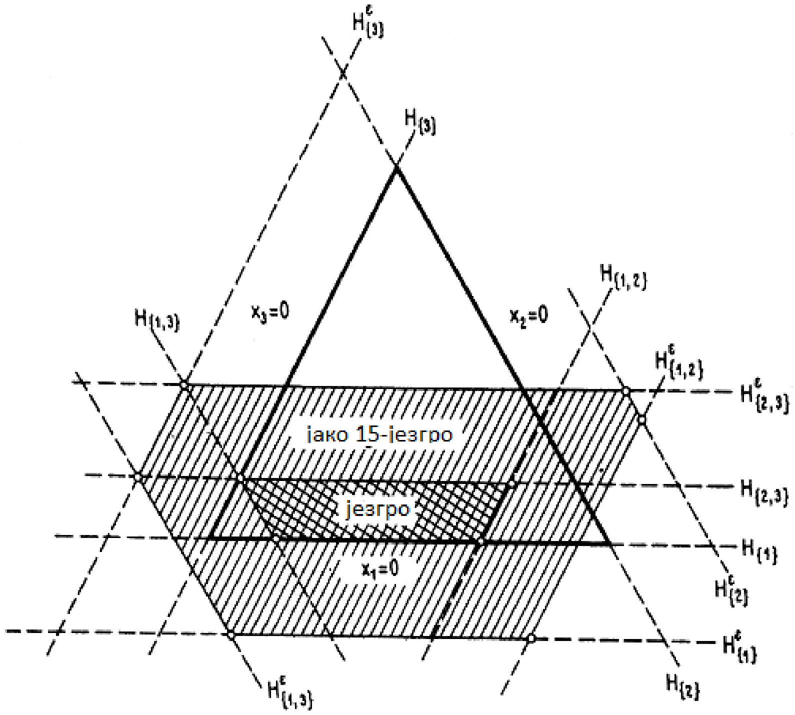
$$H_S = \{x | x_S = v(S)\}$$

и

$$H_S^{\epsilon} = \{x | x_S = v(S) - \epsilon\}$$

за све коалиције $S \subset N, \quad S \neq \{\emptyset, N\}$

Претпоставимо да се троугао налази на равни $x_1 + x_2 + x_3 = 60$. *Свака тачка равни има три координате чији је збир 60.*



Слика 4: Језгро и јако 15-језгро игре

Одредимо прво нестабилне импутације за језгро. Коалиција $\{2,3\}$ *може себи да гарантује минимални износ* $v = (\{2,3\}) = 50$, *те су све тачке* (x_1, x_2, x_3) *за које важи* $x_2 + x_3 < 50$ *нестабилне. Како коалиција* $\{1,2\}$ *себи може да гарантује минимални износ* $v(\{1,2\}) = 20$, *све тачке* (x_1, x_2, x_3) *за које важи* $x_1 + x_2 < 20$ *су нестабилне. Коначно, коалиција* $\{1,3\}$ *може себи да гарантује минимални износ* $v(\{1,3\}) = 10$, *те су све тачке* (x_1, x_2, x_3) *за које важи* $x_1 + x_3 < 10$, *нестабилне.*

Језгро представљају преостале тачке простора импутација, и видимо на Слици 4 да оне формирају четвороугао.

Одредимо сада нестабилне импутације за јако 15-језгро. Сада коалиција {2,3} може да гарантује себи минимални износ $v = (\{2,3\}) = 35$*, тако да су све тачке* (x_1, x_2, x_3) *за које важи* $x_2 + x_3 < 35$ *нестабилне. Коалиције {1,2} и {1,3} могу себи да гарантују минималне износе* $v(\{1,2\}) = 5$ *и* $v(\{1,3\}) = -5$*, редом, па су све тачке* (x_1, x_2, x_3) *за које важи* $x_1 + x_2 < 5$ *и* $x_1 + x_3 < -5$ *нестабилне.*

Јако 15-језгро представљају преостале тачке простора импутација, и видимо на Слици 4 да оне формирају шестоугао.

Приметимо да се јако ϵ*-језгро простире и изван простора импутација. Такође, језгро и јако* ϵ*-језгро се разликују и у фигурама које их представљају на дијаграму.*

4.3 Кернел

Појам кернела су увели Дејвис[13] и Машлер[14] 1965. године.

Нека је $\Gamma = (N, v)$ рационална игра n играча. За свако $i, j \in N, \quad i \neq j$ означимо са T_{ij} скуп коалиција које садрже играча i, а не садрже играча j, односно:

$$T_{ij} = \{S | S \subset N, \quad i \in S, \quad j \notin S\}.$$

Дефиниција 18 *Нека је* $S \subset N$ *коалиција и* $x \in X(\Gamma)$*. Вишак (ексцес) коалиције* S *за импутацију* x *је*

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i. \tag{13}$$

За импутацију $x = (x_1, ..., x_n)$ и коалицију $S \subset N$ укупан износ додељен коалицији S је $x_S = \sum_{i \in S} x_i$. Вишак у ствари представља разлику до исплате која би била „фер”. Функција вишка $e(S, x) > 0$ је мера незадовољства коалиције S импутацијом x. Циљ је да се исплата коригује тако да незадовољство исплатама буде минимално.

Дефиниција 19 *Максималан вишак играча* i *над неким другим играчем* j *у односу на импутацију* $x \in X(\Gamma)$ *у игри* $\Gamma = (N, v)$ *је дат са*

$$s_{ij}(x) = \max_{S \in T_{ij}} \quad e(S, x). \tag{14}$$

[13] Morton David Davis (1930-), амерички математичар
[14] Michael Bahir Maschler (1927-2008), израелски математичар

Ненегативан (непозитиван) максимални вишак играча i над играчем j у односу на импутацију x представља максимални (минимални) износ који играч i може да добије (изгуби) без сарадње играча j повлачећи се из x и формирајући коалицију у којој није играч j, претпостављајући да су остали чланови новоформиране коалиције задовољни профитом који им је додељен импутацијом x. Играч i може, на пример, да подмити остале чланове коалиције да напусте x дајући им мали бонус. Другим речима, максималан вишак $s_{ij}(x)$ представља меру моћи играча i да прети играчу j у односу на импутацију x.

Кажемо да је играч i важнији од играча j у односу на x уколико је

$$x_j > v(\{j\}) \quad \wedge \quad s_{ij}(x) > s_{ji}(x).$$

Кажемо да су играчи i и j у равнотежи у односу на x уколико ниједан од њих није важнији од другог.

Кернел је дефинисан на скупу импутација за које ниједан играч није важнији од неког другог играча. Пред-кернел чине пред-импутације у којима су свака два играча подједнако важна у погледу њихових међусобних претњи. Формално,

Дефиниција 20 *Нека је дата игра* $\Gamma = (N, v)$.

Кернел $K(v)$ *игре* Γ *је скуп свих импутација* $x \in X(\Gamma)$ *таквих да за свако* $i, j \in N, \quad i \neq j$ *важи:*

$$(s_{ij}(x) - s_{ji}(x))\,(x_j - v(\{j\})) \leq 0 \quad \text{и} \quad (s_{ji}(x) - s_{ij}(x))\,(x_i - v(\{i\})) \leq 0. \qquad (15)$$

Пред-кернел $K^*(v)$ *игре* Γ *је скуп свих пред-импутација* x *за које важи*

$$s_{ij}(x) = s_{ji}(x), \quad \text{за свако} \quad i, j \in N, \quad i \neq j. \qquad (16)$$

Појам пред-кернела су увели Машлер, Пелег[15] и Шепли 1972. године.

Кернел је прихваћен као концепција решења углавном због примамљивих математичких особина, најпре због његове егзистенције и блиске везе са језгром.

Очигледно је $K^*(v) \cap X(\Gamma) \subset K(v)$. Кернел и пред-кернел се поклапају за многе игре, укључујући суперадитивне игре. У ствари, делови кернела и пред-кернела унутар језгра се увек поклапају. Импутација се налази у језгру ако и само ако су сви њени вишкови једнаки нули.

Теорема 4.7 *Нека је* $\Gamma = (N, v)$ *рационална игра и нека* $x \in C(v)$. *Тада* $x \in K(v)$ *ако и само ако* $x \in K^*(v)$.

[15] Bezalel Peleg (1936-), израелски математичар

Доказ. Јасно је да уколико $x \in K^*(v)$ онда $x \in K(v)$.

Обратно, претпоставимо да $x \in K(v) \cap C(v)$ и нека је $i, j \in N, \quad i \neq j$.

Довољно је показати $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$. Заиста, ако је $s_{ij}(x) > s_{ji}(x)$, онда је $x_j = v(\{j\})$, зато што за сваку импутацију x важи $x_j \geq v(\{j\})$. Како $\{j\} \in T_{ij}$, онда је $s_{ji}(x) \geq v(\{j\}) - x_j = 0$. Следи, $s_{ij} > 0$, што је у контрадикцији са $x \in C(v)$.

□

Пример 4.4 *Одредити кернел игре 3 играча задате у форми карактеристичне функције:*

$$\begin{array}{cccc} & v(\{1\}) = -1 & v(\{1,2\}) = 3 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 4 & v(\{1,2,3\}) = 5 \\ & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 2 & \end{array}$$

Нека је $x = (x_1, x_2, x_3)$ *импутација.*

Одредимо прво вишкове за свако $S, S \subset N$*:*

$e(\{1\}, x) = -1 - x_1, \quad e(\{2\}, x) = -x_2, \quad e(\{3\}, x) = 1 - x_3,$

$e(\{1,2\}, x) = 3 - x_1 - x_2 = x_3 - 2, \quad e(\{1,3\}, x) = 4 - x_1 - x_3 = x_2 - 1,$

$e(\{2,3\}, x) = 2 - x_2 - x_3 = x_1 - 3.$

Нађимо сада скупове T_{ij}

$T_{12} = \{\{1\}, \{1,3\}\}, \quad T_{13} = \{\{1\}, \{1,2\}\}, \quad T_{21} = \{\{2\}, \{2,3\}\},$

$T_{23} = \{\{2\}, \{1,2\}\}, \quad T_{31} = \{\{3\}, \{2,3\}\}, \quad T_{32} = \{\{3\}, \{1,3\}\}.$

Максимални вишкови s_{ij} *су:*

$s_{12} = \max\{-1 - x_1, x_2 - 1\}, \quad s_{13} = \max\{-1 - x_1, x_3 - 2\},$

$s_{21} = \max\{-x_2, x_1 - 3\}, \quad s_{23} = \max\{-x_2, x_3 - 2\},$

$s_{31} = \max\{1 - x_3, x_1 - 3\}, \quad s_{32} = \max\{1 - x_3, x_2 - 1\}.$

Кернел $K(v)$ *ове игре је скуп свих импутација* x *које задовољавају следећи систем неједначина:*

$$\begin{aligned} (\max\{-1 - x_1, x_2 - 1\} - \max\{-x_2, x_1 - 3\}) \cdot x_2 \leq 0 \\ (\max\{-x_2, x_1 - 3\} - \max\{-1 - x_1, x_2 - 1\}) \cdot (x_1 + 1) \leq 0 \\ (\max\{-1 - x_1, x_3 - 2\} - \max\{1 - x_3, x_1 - 3\}) \cdot (x_3 - 1) \leq 0 \\ (\max\{1 - x_3, x_1 - 3\} - \max\{-1 - x_1, x_3 - 2\}) \cdot (x_1 + 1) \leq 0 \\ (\max\{-x_2, x_3 - 2\} - \max\{1 - x_3, x_2 - 1\}) \cdot (x_3 - 1) \leq 0 \\ (\max\{1 - x_3, x_2 - 1\} - \max\{-x_2, x_3 - 2\}) \cdot x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Једна импутација која припада кернелу је $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.

4.4 Нуклеус

Шмајдлер[16] је увео појам нуклеуса 1969. године.

Нека је $\Gamma = (N, v)$ рационална игра n играча. За свако $x \in X(\Gamma)$ нека је $\Theta(x)$ 2^n-торка чије су компоненте бројеви $e(S, x)$, $S \subset N$, поређани у нерастућем поретку. Дакле,

$$\theta_i(x) \geq \theta_j(x), \quad 1 \leq i \leq j \leq 2^n. \tag{17}$$

Ови вишкови су углавном непозитивни, па се сматрају губицима, те се вектор $\Theta(x)$ може интерпретирати као вектор губитака.

Уводимо релацију лексикографског поретка. За свако $x, y \in X(\Gamma)$ пишемо $\theta(x) <_L \theta(y)$ ако постоји цео број $1 \leq k \leq 2^n$ такав да је $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ за $1 \leq i < k$ и $\theta_k(x) < \theta_k(y)$.

Дефиниција 21 *Нуклеус $N(v)$ игре $\Gamma = (N, v)$ је скуп свих импутација $x \in X(\Gamma)$ за које је $\Theta(x)$ минимално у лексикографском поретку, односно*

$$N(v) = \{x \in X(\Gamma) | (\forall y \in X(\Gamma)) \quad \Theta(x) \leq_L \Theta(y)\}. \tag{18}$$

Нуклеус у ствари минимизира највеће одступање од износа који коалиција може да обезбеди не узимајући у обзир понашање осталих играча.

Дефиниција 22 *Нека је $\Gamma = (N, v)$ игра са $n \geq 2$ играча. Означимо $\Sigma_0 = \{S \subset N | S \neq \emptyset, N\} = \Sigma^0$ и $X_0 = X(\Gamma)$ и за $i = 1, 2, ..., l$ дефинишимо рекурзивно*

$$\Sigma^{i-1} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup ... \cup \Sigma_{i-1}, \tag{19}$$

$$\epsilon_i = \min_{x \in X_{i-1}} \max_{\substack{S \\ S \notin \Sigma^{i-1}}} e(S, x), \tag{20}$$

$$X_i = \{x \in X_{i-1} | (\forall S \notin \Sigma^{i-1}) \quad e(S, x) \leq \epsilon_i\}, \tag{21}$$

$$\Sigma_i = \{S \notin \Sigma^{i-1} | (\forall x \in X_i) \quad e(S, x) = \epsilon_i\}, \tag{22}$$

где је l такво да важи $\Sigma^l = \mathcal{P}(N)$, где је $\mathcal{P}(N)$ партитивни скуп скупа N. Тада се X_l назива лексикографским центром игре Γ.

Лема 4.1 *За свако $i = 1, 2, ..., l$ важи*

(a) *ϵ_i су добро дефинисани,*

[16] David Schmeidler (1939-), израелски математичар

(б) *скупови X_i су непразни, компактни и конвексни,*

(в) $X_0 \supset X_1 \supset ... \supset X_l$,

(г) $\Sigma_i \neq \emptyset$,

(д) $l < \infty$,

(ђ) $\epsilon_1 > \epsilon_2 > ... > \epsilon_l$.

Доказ. (в) следи директно из (21).

(а) имплицира (б), и обратно (б) имплицира (а) када i заменимо са $i+1$. Како је ϵ_1 добро дефинисано, (а) и (б) се доказују индукцијом.

Претпоставимо сада да је $\Sigma_i = \emptyset$ и $\Sigma^{i-1} \neq \mathcal{P}(N)$. Ово значи да за свако $S \in \mathcal{P}(N) - \Sigma^{i-1}$ постоји импутација $x^{(S)} \in X_i$ таква да је $e(S, x^{(S)}) < \epsilon_i$. Нека је m број таквих коалиција. Тада је $m \geq 1$ и због конвексности X_i важи

$$\tilde{x} = \frac{1}{m} \sum_{R \notin \Sigma^{i-1}} x^{(R)} \in X_i \subset X_{i-1}. \tag{23}$$

Сада, за $S \notin \Sigma^{i-1}$, имамо

$$s(S, \tilde{x}) = v(S) - \frac{1}{m} \sum_{R \notin \Sigma^{i-1}} X^{(R)}(S) = \frac{1}{m} \sum_{R \notin \Sigma^{i-1}} e(S, x^{(R)}) < \epsilon_i, \tag{24}$$

што је у контрадикцији са (20). Значи, (г) важи.

(д) следи из (г), јер је број коалиција коначан.

Приметимо да за сваку коалицију $R \in \mathcal{P}(N) - \Sigma^{i-1}$ мора да постоји тачка $x^{(R)} \in X_i$ за коју је $e(R, x^{(R)}) < \epsilon_i$. Према томе, ако $\mathcal{P}(N) - \Sigma^{i-1}$ садржи t коалиција, тада

$$\hat{x} = \frac{1}{t} \sum_{R \in \Sigma^i} x^{(R)} \tag{25}$$

припада X_i и важи $e(T, \hat{x}) < \epsilon_i$ кад год $T \in \Sigma^i$. Дакле, $\epsilon_{i+1} < \epsilon_i$, за $i < l$.

□

Лема 4.2 *Импутација $x \in X(\Gamma)$ припада скупу X_i, $\quad i = 1, 2, ..., l$ ако и само ако*

$$\theta^*(x) = (\epsilon_1, ..., \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_2, ..., \epsilon_i, ..., \epsilon_i, e(R_1, x), ..., e(R_p, x)) \tag{26}$$

и

$$e(R_v, x) \leq \epsilon_i, \quad v = 1, 2, ..., p, \tag{27}$$

где су коалиције са вишком ϵ_μ управо коалиције Σ_μ $(\mu = 1, ..., i)$. Вектор $\theta^*(x)$ је добијен од $\theta(x)$ избацивањем елемената $e(N, x)$ и $e(\emptyset, x)$, а p је број коалиција које нису садржане у $\bigcup_{\mu=1}^{i} \Sigma_\mu$.

Теорема 4.8 *Лексикографски центар се састоји из јединствене тачке.*

Доказ. Према конструкцији, лексикографски центар је непразан. Према Леми 4.2, вишак сваке коалиције је константан за све тачке из лексикографског центра. Специјално, вишак коалиције која се састоји од једног играча је такође константан. Стога, координате тачки у лексикографском центру су константне, што значи да се он састоји из јединствене тачке.

□

Теорема 4.9 *Лексикографски центар се поклапа са нуклеусом.*

Доказ. Покажимо прво да уколико $x \in X_i$ и $y \in X(\Gamma)\backslash X_i$, онда $\Theta(x) <_L \Theta(y)$.

За $i = 1$ ово тврђење тривијално важи (из дефиниције).

Претпоставимо да теорема важи за $i = 1, ..., k-1, \quad 2 \leq k \leq l$. Према делу (в) Леме 4.1 треба само да испитамо случај $x \in X_k, \quad y \in X_{k-1}\backslash X_k$.

Из Леме 4.2 и (21), за $i = k$, следи $\Theta^*(x) <_L \Theta^*(y)$, па $\Theta(x) <_L \Theta(y)$. Дакле, $\Theta(x_l) <_L \Theta(y)$ за свако $y \in X(\Gamma), \quad x_l \neq y$, где је $X_l = \{x_l\}$ (јединствени) лексикографски центар. Али, ово је управо дефиниција нуклеуса.

□

Пример 4.5 *Одредити нуклеус игре са 3 играча задате у форми карактеристичне функције:*

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 30 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 100 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 80 & \end{array}$$

Обележимо са

$$H_S^0 = \{x | x_S = v(S)\}$$

и

$$H_S^{\epsilon_i} = \{x | x_S = v(S) - \epsilon_i\}$$

за све коалиције $S \subset N, \quad S \neq \{\emptyset, N\}$. *Нека је* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *импутација.*

Одредимо прво вишкове за свако $S, S \subset N$*:*

$e(\{1\}, x) = -x_1, \quad e(\{2\}, x) = -x_2, \quad e(\{3\}, x) = -x_3,$

$e(\{1,2\}, x) = 30 - x_1 - x_2 = x_3 - 70, \quad e(\{1,3\}, x) = 30 - x_1 - x_3 = x_2 - 70,$

$e(\{2,3\}, x) = 80 - x_2 - x_3 = x_1 - 20.$

Тада је $\epsilon_1 = -10$, *па је*

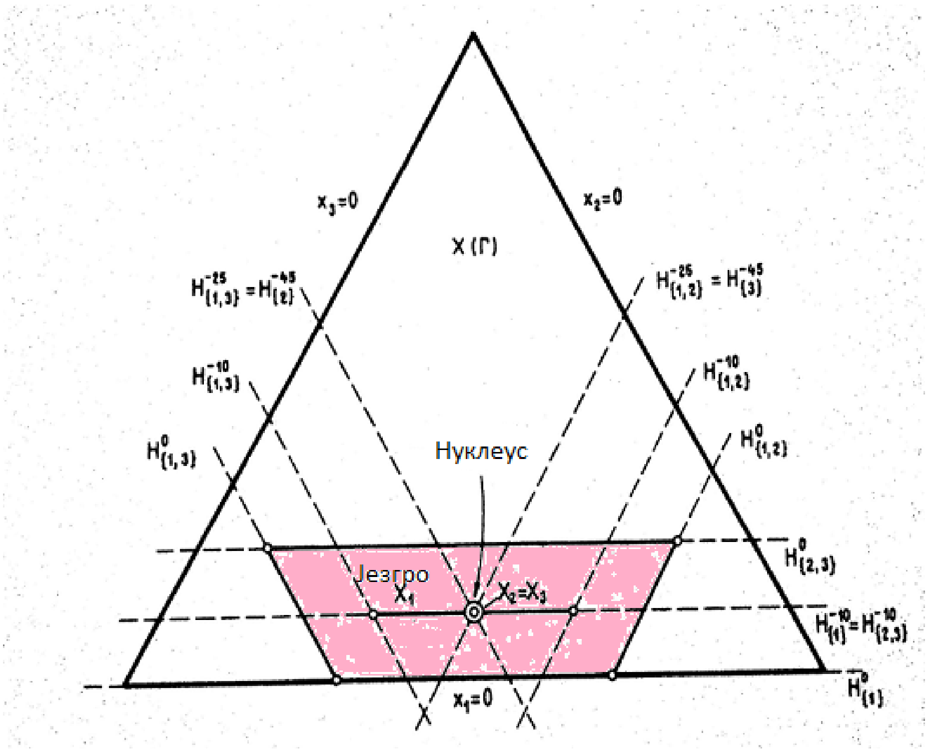
$X_1 = \{x | x_1 = 10, \quad x_2 \leq 60, \quad x_3 \leq 60, \quad x_2 + x_3 = 90\},$

$\Sigma_1 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$, *а* $\Sigma^1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, N\}$.

Даље је $\epsilon_2 = -25$, $X_2 = \{(10,45,45)\}$, $\Sigma_2 = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$ *и* $\Sigma^2 = \{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},N\}$.

Коначно, $\epsilon_3 = -45$, $X_3 = \{(10,45,45)\}$, $\Sigma_3 = \{\{2\},\{3\}\}$ *и* $\Sigma^3 = \mathcal{P}(N)$

Ово значи да је {10,45,45} лексикографски центар игре, па уједно и нуклеус игре (Слика 5).



Слика 5: Нуклеус игре

4.5 Шеплијев вектор

Игри $\Gamma = (N, v)$ са n играча се придружује вектор исплате играчима $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ при чему треба да важе следеће аксиоме:

(A1) ако играч i не доприноси ништа ниједној коалицији $S \subset N$, односно $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, онда је $\phi_i = 0$,

(A2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i = v(N)$,

(A3) играчи i и j су равноправни ако

$(\forall S \subset N) \quad v((S \backslash \{i\}) \cup \{j\}) = v((S \backslash \{j\}) \cup \{i\})$ и тада је $\phi_i = \phi_j$,

(A4) ако су u и v карактеристичне функције и $w = u + v$, онда је

$$(\forall i \in N) \quad \phi_i(w) = \phi_i(u) + \phi_i(v).$$

Теорема 4.10 *Постоји тачно један вектор ϕ који задовољава (A1)-(A4). Он се зове Шеплијев вектор, а његове компоненте*

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\})) \tag{28}$$

Шеплијеве вредности.

Напомена: Шеплијева вредност се може записати и на следећи начин:

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \notin T}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{i\}) - v(T)). \tag{29}$$

Доказ. (A1): очигледно важи, јер ако је $(\forall S \subset N) \quad v(S) = v(S \backslash \{i\})$, тада је $\phi_i(v) = 0$ за свако $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
(A2): \sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{S \subset N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\})) \right) \\
&= \sum_{S \subset N} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\})) \right) \\
&= \sum_{S \subset N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left(nv(S) - \sum_{i \notin S} v(S \backslash \{i\}) - \sum_{i \in S} v(S \backslash \{i\}) \right) \\
&= \sum_{S \subset N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left(|S|v(S) - \sum_{i \in S} v(S \backslash \{i\}) \right) \\
&= \sum_{S \subset N} \frac{v(S)}{\binom{n}{|S|}} - \sum_{S \subset N} \sum_{i \in S} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} v(S \backslash \{i\}) \\
&= \sum_{S \subset N} \frac{v(S)}{\binom{n}{|S|}} - \sum_{\substack{T \subset N \\ |T| \leq n-1}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(n-|T|)v(T) \\
&= \sum_{S \subset N} \frac{v(S)}{\binom{n}{|S|}} - \sum_{\substack{T \subset N \\ |T| \leq n-1}} \frac{v(T)}{\binom{n}{|T|}} = \frac{v(N)}{\binom{n}{n}} + \cancel{\sum_{\substack{S \subset N \\ |S| \leq n-1}} \frac{v(S)}{\binom{n}{|S|}}} - \cancel{\sum_{\substack{T \subset N \\ |T| \leq n-1}} \frac{v(T)}{\binom{n}{|T|}}} \\
&= v(N)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(A3) : \phi_i(v) &= \sum_{\substack{T \subset N \\ i \notin T}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{i\}) - v(T)) \\
&= \left(\sum_{\substack{i \notin T \\ j \notin T}} + \sum_{\substack{i \notin T \\ j \in T}} \right) \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{i\}) - v(T)) \\
&= \{R = T \cup \{i\}\} \\
&= \sum_{T \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{j\}) - v(T)) \\
&+ \sum_{R \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|R \cup \{i\}|)!(n-1-|R \cup \{i\}|)!}{n!}(v(R \cup \{i,j\}) - v(R \cup \{i\}) \\
&= U = R \cup \{i\} \\
&= \sum_{T \subset N \setminus \{i,j\}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{j\}) - v(T)) \\
&+ \sum_{U \subset N \setminus \{j\}} \frac{(|U|)!(n-1-|U|)!}{n!}(v(U \cup \{j\}) - v(U)) \\
&= \sum_{T \subset N \setminus \{j\}} \frac{(|T|)!(n-|T|-1)!}{n!}(v(T \cup \{j\}) - v(T)) \\
&= \phi_j(v)
\end{aligned}
$$

(А4) тривијално важи, јер је ϕ линеарно по аргументу

Остало је да докажемо јединственост:

Свака карактеристична функција v се може на јединствен начин приказати као линеарна комбинација функција $v_S(S), \quad S \subset N$ облика

$$
v_S(T) = \begin{cases} 1, & S \subset T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{30}
$$

Овакве карактеристичне функције се називају простим. Игра $\Gamma = (N, v)$ се тада назива простом игром. Код простих игара, свака коалиција S је или победничка ($v(S) = 1$) или губитничка ($v(S) = 0$).

Тада је

$$
\phi_i(v_S) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & i \in S \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{31}
$$

Заиста, из (A2) следи $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(v_S) = v_S(N) = 1$, јер је $S \subset N$. Према (A3), $\phi_i(v_S) = \phi_j(v_S)$ за $i, j \in S$. Како њих има $|S|$ и њихова сума је 1, то је $\phi_i(v_S) = 1$ ако $i \in S$. Ово значи да је $\phi_i(v_S) = 0$ за $i \notin S$.

Ако је $c > 0$, тада је $\phi_i(cv_S) = \begin{cases} \frac{c}{|S|}, & i \in S \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Скуп свих карактеристичних функција чини векторски простор над пољем $\mathbb{R}^{2^n-1}$, јер се свакој карактеристичној функцији v може придружити $(2^n - 1)$-торка реалних бројева:

$$v \to (v(\{1\}), ..., v(\{n\}), v(\{1, 2\}), ..., v(\{n-1, n\}), ..., v(N))$$

Покажимо да постоји $2^n - 1$ реалних бројева c_S за $S \subset N$ таквих да је $v = \sum\limits_{S \subset N} c_S v_S$. Нека је $c_S = \sum\limits_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T)$, где је $s = |S|, t = |T|$.

$$\sum_{S \subset N} c_S v_S(U) = \sum_{S \subset U} c_S \cdot 1 = \sum_{S \subset U} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) = \sum_{T \subset U} \left(\sum_{T \subset S \subset U} (-1)^{s-t} \right) v(T)$$

Посматрајмо $\sum\limits_{T \subset S \subset U} (-1)^{s-t}$:

За сваку вредност $t \leq s \leq u$, постоји $\binom{u-t}{u-s}$ скупова S са s елемената таквих да је $T \subset S \subset U$. Следи,

$$\sum_{T \subset S \subset U} (-1)^{s-t} = \sum_{s=t}^{u} \binom{u-t}{u-s} (-1)^{s-t} \cdot 1^{u-s} = \sum_{s=t}^{u} (1 + (-1))^{u-t} = \begin{cases} 0, & t < u \\ 1, & t = u \end{cases}$$

Добијамо, $\sum\limits_{S \subset N} c_S v_S(U) = \sum\limits_{T \subset U} 1 \cdot v(T) = v(U)$, за све $U \subset N$.

Знамо да је $v = \sum\limits_{S \subset N} c_S v_S$, па је $\phi_i(v) = \sum\limits_{S \subset N} c_S \phi_i(v_S) = \sum\limits_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} c_S \frac{1}{s}$. Следи

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{1}{s} \left(\sum_{T \subset S} (-1)^{s-t} v(T) \right) = \sum_{T \subset N} \left(\sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} \frac{1}{s} v(T) \right)$$

Означимо са

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} \frac{1}{s} \tag{32}$$

Ако $i \notin T'$ и $T = T' \cup \{i\}$, онда

$$\gamma_i(T') = \sum_{\substack{S \subset N \\ T' \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t'} \frac{1}{s} = \sum_{\substack{S \subset N \\ T' \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t+1} \frac{1}{s} = \sum_{\substack{S \subset N \\ T \cup \{i\} \subset S}} (-1)^{s-t} \frac{1}{s},$$

јер је $t = t' + 1$ и $T' \cup \{i\} = T = T \cup \{i\}$. Следи, $\gamma_i(T') = -\gamma_i(T)$.

Изрази са десне стране (32) ће се међусобно потрети и остаће једино члан када је $t = t' + 1$. Следи,

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \gamma_i(T)(v(T) - v(T\backslash\{i\}) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \left(\sum_{\substack{S\subset N\\ T\cup\{i\}\subset S}} (-1)^{s-t}\frac{1}{s} \right) (v(T) - v(T\backslash\{i\}).$$

Ако $i \in T$, постоји $\binom{n-t}{s-t}$ коалиција S са s елемената тако да је $T \subset S$.

$$\begin{aligned}
\gamma_i(T) &= \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\frac{1}{s} \\
&= \sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t}\int_0^1 x^{s-1}dx \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t} x^{s-1} \right) dx \\
&= \{s - 1 = s - t + t - 1\} \\
&= \int_0^1 x^{t-1} \left(\sum_{s=t}^{n} (-1)^{s-t}\binom{n-t}{s-t} x^{s-t} \right) dx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx \\
&= B(t, n-t+1) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(n-t+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}
\end{aligned}$$

Коначно, добијамо $\phi_i(v) = \sum\limits_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}(v(T) - v(T\backslash\{i\})$

Из овога следи да је функција ϕ је јединствено дефинисана. Неки од коефицијената c_S су негативни, али то не представља проблем, јер из (А4) следи да важи $\phi(u - v) = \phi(u) - \phi(v)$, наравно, уколико су $u, v, u - v$ карактеристичне функције.

□

Вектор из Теореме 4.10 је 1963. године увео Шепли, те је у његову част и назван по њему.

Идеја ове концепције решења је да дефинише, на фер начин, импутацију која каже колики износ би сваки играч требало да добије, узимајући у обзир допринос играча успеху коалиције којој припада. Сасвим је природно да се пође од претпоставке да играчи не доприносе подједнако коалицији. То се, по правилу, најбоље види преко онога што се догађа са коалицијом када остане без неког играча. Величина $\delta(i,S) = v(S) - v(S\backslash\{i\})$ мери допринос играча i коалицији S. Коалиција од n чланова може да буде формирана на $n!$ начина. Нека је S коалиција s играча. Коалиција S, пре него што јој се придружио играч i, може да се формира на $(s-1)!$ начина. Осталих $(n-s)$ играча, који не припадају коалицији S, може да формира коалицију на $(n-s)!$ начина. Односно, израз $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ представља вероватноћу да је пре доласка играча i формирана коалиција $S\backslash\{i\}$, претпостављајући да су све коалиције од n играча једнако вероватне. Из овога видимо да Шеплијева вредност представља ништа друго до математичко очекивање величине $v(S) - v(S\backslash\{i\})$.

Теорема 4.11 *Шеплијев вектор је импутација.*

Доказ. (A2) управо представља услов групне рационалности.

Остало је да покажемо индивидуалну рационалност. Користећи услов супераддитивности имамо $v(S) = v((S\backslash\{i\}) \cup \{i\}) \geq v(S\backslash\{i\}) + v(\{i\})$, односно $v(S) - v(S\backslash\{i\}) \geq v(\{i\})$.

Следи,

$$\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S\backslash\{i\})) \\
&\geq \sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} v(\{i\}) \\
&= \left(\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}\right) v(\{i\}) \\
&= 1 \cdot v(\{i\})
\end{aligned}$$

Пример 4.6 *Одредити Шеплијев вектор следеће игре са 3 играча представљене у форми карактеристичне функције:*

$$\begin{array}{llll}
 & v(\{1\}) = 1 & v(\{1,2\}) = 4 & \\
v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 8 \\
 & v(\{3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 5 &
\end{array}$$

Шеплијев вектор се може одредити на два начина:

I **начин:**

$c_{\{1\}} = v(\{1\}) = 1,$

$c_{\{2\}} = v(\{2\}) = 0,$

$c_{\{3\}} = v(\{3\}) = 1,$
$c_{\{1,2\}} = v(\{1,2\}) - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} = 4 - 1 - 0 = 3,$
$c_{\{1,3\}} = v(\{1,3\}) - c_{\{1\}} - c_{\{3\}} = 3 - 1 - 1 = 1,$
$c_{\{2,3\}} = v(\{2,3\}) - c_{\{2\}} - c_{\{3\}} = 5 - 0 - 1 = 4,$
$c_N = v(N) - c_{\{1,2\}} - c_{\{1,3\}} - c_{\{2,3\}} - c_{\{1\}} - c_{\{2\}} - c_{\{3\}} = 8-3-1-4-1-0-1 = -2.$
Сада карактеристичну функцију v *можемо записати у следећем облику:*
$v = \sum\limits_{S \subset N} c_S v_S = v_{\{1\}} + v_{\{3\}} + 3v_{\{1,2\}} + v_{\{1,3\}} + 4v_{\{2,3\}} - 2v_{\{1,2,3\}}.$
Шеплијеве вредности рачунамо по формули $\phi_i(v) = \sum\limits_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{c_S}{|S|}.$

Добијамо
$\phi_1 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$
$\phi_2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{2}{3} = \frac{17}{6},$
$\phi_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - \frac{2}{3} = \frac{17}{6}.$
Коначно, Шеплијев вектор је $\phi = (\frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{17}{6}).$

II **начин:**

Користимо формулу $\phi_i(v) = \sum\limits_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\}))$

$\phi_1 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(1-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(4-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(3-1) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(8-5)$
$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3},$

$\phi_2 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(0-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(4-1) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(5-1) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(8-3)$
$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{17}{6},$

$\phi_3 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(1-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(3-1) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(5-0) + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(8-4)$
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}.$

Шеплијев вектор је $\phi = (\frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{17}{6}).$

5 Примери кооперативних игара

5.1 Савет безбедности Организације уједињених нација

Савет безбедности Организације уједињених нација (СБ ОУН) је најважније тело Организације уједињених нација, задужено за одржавање мира и безбедности у свету. Савет безбедности ОУН има 15 чланова. Постоје две категорије чланства у Савету безбедности ОУН: то су сталне земље чланице и изабране земље чланице. Сталних земаља чланица има 5 и то су САД, Русија, Кина, Француска и Уједињено краљевство и оне имају право вета. Осталих 10 земаља чланица се бирају на период од две године, са заменом пет чланица сваке године.

Да би се нека резолуција изгласала потребно је девет или више гласова и да ниједна од сталних земаља чланица није уложила вето.

Третирајмо овај проблем као просту игру 15 играча $N = \{1, 2, ..., 15\}$ и претпоставимо да првих пет има право вета. Уместо природне дефиниције победничке коалиције као оне која може да усвоји резолуцију, лакше ју је дефинисати као коалицију која може да доведе до неусвајања резолуције. Ако је коалиција S победничка, онда је $v(S) = 1$, а иначе $v(S) = 0$.

Карактеристична функција изгледа овако:

$$\text{ако } i \in S \text{ за неко } i, 1 \leq i \leq 5 \text{ онда } v(S) = 1,$$

$$\text{иначе, } v(S) = \begin{cases} 1, & |S| \geq 7 \\ 0, & |S| < 7. \end{cases}$$

Довољно је израчунати $\phi_1(v)$, због симетричности игре.

$$\begin{aligned}
\phi_1 = {} & \frac{14!0!}{15!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \binom{10}{1}\frac{13!1!}{15!}(v(\{1,6\}) - v(\{6\})) \\
& + \binom{10}{2}\frac{12!2!}{15!}(v(\{1,6,7\}) - v(\{6,7\})) \\
& + \binom{10}{3}\frac{11!3!}{15!}(v(\{1,6,7,8\}) - v(\{6,7,8\})) \\
& + \binom{10}{4}\frac{10!4!}{15!}(v(\{1,6,7,8,9\}) - v(\{6,7,8,9\})) \\
& + \binom{10}{5}\frac{9!5!}{15!}(v(\{1,6,7,8,9,10\}) - v(\{6,7,8,9,10\})) \\
& + \binom{10}{6}\frac{8!6!}{15!}(v(\{1,6,7,8,9,10,11\}) - v(\{6,7,8,9,10,11\})).
\end{aligned}$$

Израз $\binom{k}{j}$ означава број начина да се изабере j чланица од k чланица. То значи да ће се изрази као што је $v(\{1,6,7\}) - v(\{6,7\})$ јавити у формули за израчунавање ϕ_1 $\binom{10}{2}$ пута, пошто постоји 10 чланица које немају право вета, а ми бирамо коалиције са два члана.

Дакле,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{15} + \frac{10}{15 \cdot 14} + \frac{10 \cdot 9}{15 \cdot 14 \cdot 13} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} \\ &+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} \\ &= 0.19627\end{aligned}$$

Значи,

$$\phi_i = \begin{cases} 0.19627, & 1 \leq i \leq 5 \\ 0.00186, & 6 \leq i \leq 15 \end{cases}$$

Као што можемо видети, 98.1% моћи се налази у рукама пет сталних земаља чланица, и свака од њих засебно је више од 105 пута моћнија од изабране земље чланице.

5.2 Проблем расподеле трошкова

Претпоставимо да имамо дужника који дугује новац више него једном повериоцу. Проблем настаје када дужник нема довољно новца да отплати износе које дугује свим повериоцима. Стога, дужник мора да преговара са повериоцима како би постигли договор о томе колики део укупне имовине дужника ће бити исплаћен сваком од поверилаца.

Посматрајмо следећи проблем: Нека дужник D има \$100,000 које треба да исплати повериоцима A, B и C. Дужик D дугује повериоцу A \$50,000, повериоцу B \$65,000, а повериоцу C \$10,000.

Могуће је поделити \$100,000 процентуално: A би добио \$40,000, B \$52,000, а C \$8,000. Али шта се дешава уколико повериоци формирају коалицију у покушају да добију више?

Посматрајмо карактеристичну функцију. Она изгледа овако (у хиљадама долара):

$$\begin{array}{cccc} & v(\{A\}) = 25 & v(\{A,B\}) = 90 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{B\}) = 40 & v(\{A,C\}) = 35 & v(\{A,B,C\}) = 100 \\ & v(\{C\}) = 0 & v(\{B,C\}) = 50 & \end{array}$$

Како смо дошли до ове карактеристичне функције? Посматрајмо коалицију у којој је само A. Ако гледамо шта је најгоре што може да се деси, то је да повериоци B и C буду у потпуности исплаћени, а да A добије остатак, ако је ишта остало. Ако су B и C исплаћени, поверилац A може да добије $100,000 - 65,000 - 10,000 = 25,000$ долара, па је $v(\{A\}) = 25$. Аналогно се добија да је $v(\{B\}) = 40$ и $v(\{C\}) = 0$. Уколико повериоци A и C ступе у коалицију, у најгорем случају поверилац B ће бити у потпуности исплаћен, па њима остаје \$35,000, те је $v(\{A, C\}) = 35$. По овом принципу је $v(\{B, C\}) = 50$ и $v(\{A, B\}) = 90$.

Израчунајмо сада Шеплијеве вредности:

$$\phi_A = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(25-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(90-40) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(35-0)$$
$$+\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(100-50) = \frac{25}{3} + \frac{50}{6} + \frac{35}{6} + \frac{50}{3} = \frac{235}{6} = 39.17,$$

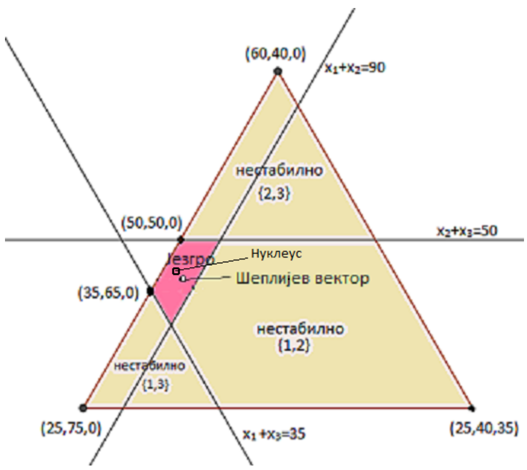
$$\phi_B = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(40-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(90-25) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(50-0)$$
$$+\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(100-35) = \frac{40}{3} + \frac{65}{6} + \frac{50}{6} + \frac{65}{3} = \frac{325}{6} = 54.17,$$

$$\phi_C = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}(0-0) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(50-40) + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}(35-25)$$
$$+\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}(100-90) = 0 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3} = 6.67.$$

Шеплијев вектор је $\phi = (39.17, 54.17, 6.67)$.

Процентуална расподела је (40,52,8). Разумно је поставити питање зашто је Шеплијева расподела боља од процентуалне? Уосталом, процентуална расподела даје сасвим разуман одговор, зар не? Заправо, она игнорише основну чињеницу да се играчи могу удружити како би избацили неког другог играча из игре. Играчи немају исту преговарачку моћ, а процентуална расподела то не узима у обзир, за разлику од Шеплијеве расподеле.

Како изгледа језгро овог проблема? Импутације су вредности (x_A, x_B, x_C) такве да је $x_A + x_B + x_C = 100, \quad x_A \geq 25, x_B \geq 40, x_C \geq 0$. Овај скуп представља троугао са теменима $(60, 40, 0), (25, 75, 0), (25, 40, 35)$.



Слика 6: Шеплијев вектор, језгро и нуклеус игре

Језгро представљају тачке простора импутација за које важи:

$$\{x_A + x_B \geq 90, x_A + x_C \geq 35, x_B + x_C \geq 50\}$$

и овај скуп представља четвороугао.

Одредимо сада нуклеус. Вишкови за свако S, $\quad S \subset N$ су:
$e(\{A\}, x) = 25 - x_A, \quad e(\{B\}, x) = 40 - x_B, \quad e(\{C\}, x) = -x_C,$
$e(\{A, B\}, x) = 90 - x_A - x_B = x_C - 10, \quad e(\{A, C\}, x) = 35 - x_A - x_C = x_B - 65,$
$e(\{B, C\}, x) = 50 - x_B - x_C = x_A - 50.$

Нуклеус је тачка $(\frac{125}{3}, \frac{170}{3}, \frac{5}{3})$.

Видимо да и Шеплијев вектор и нуклеус припадају језгру игре (Слика 6).

6 Закључак

Теорија игара представља специфични метод анализе друштвених процеса и појава. Она је један од могућих начина тумачења људског понашања и избора у карактеристичним ситуацијама, односно свим оним ситуацијама у којима се поред властитог понашања мора узети у обзир и понашање других. Ова понашања су међузависна, утичу једна на друге, али и на исход процеса одлучивања. Теорија игара је мултидисциплинарна наука, јер поред математичких знања укључује и знања из других наука која могу да допринесу бољем разумевању човековог понашања. У тумачењу интерактивног процеса одлучивања до сада ниједан алтернативан приступ није ни близу резултата које је постигла теорија игара, мада ни теорија игара није у стању да успешно објасни све могуће ситуације, тј. стања која представљају последицу процеса интерактивног одлучивања.

Неко би се усудио да помисли да би постојање могућности договора између играча појендоставило анализу проблема. Међутим, као што смо могли да видимо, то обично није случај и ови договори изузетно компликују анализу игара. Због великог спектра проблема којима се бави теорија игара не можемо јасно да дефинишемо шта је решење игре. Такође, један од проблема је и немогућност предвиђања људског понашања у свакодневним ситуацијама, као и чињеница да је део економских проблема по својој унутрашњој структури неподесан за овакву формализацију коју изискује теорија игара.

Дефинисани циљ овог рада био је да се прикажу концепције решења кооперативних игара. Реализација тог циља је захтевала да се дефинишу и анализирају карактеристичне функције и импутације. Анализа је показала да сваки концепт решења има своје предности, али и мане, које се углавном односе на проблем егзистенције и јединствености тог решења.

Литература

[1] Barron E.N. (2008), Game Theory: An Introduction, Wiley-Interscience

[2] Driessen T. (1988), Cooperative games, Solutions and Applications, Springer Netherlands

[3] Ferguson T.S (2008), Game Theory, UCLA

[4] Jones A.J. (2000), Game Theory: Mathematical Models of Conflict, Woodhead Publishing Limited

[5] Morris P. (1994) Introduction to Game Theory, Springer-Verlag New York

[6] Owen G. (1999), Discrete Mathematics and Game Theory, Springer US

[7] Owen G. (1995), Game Theory, Emerald Group Publishing Limited

[8] Stojanović B. (2005), Teorija igara: Elementi i Primene, Službeni glasnik, Beograd

[9] Szép J., Forgó F. (1985), Introduction to the Theory of Games, Springer Netherlands

[10] Von Neumann J., Morgenstern O. (1953), Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press

[11] http://www.econ.canterbury.ac.nz/personal_pages/paul_walker/gt/hist.htm/