

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ**

Катарина Марјановић

**Тестови сагласности с нормалном
расподелом**

— мастер рад —

Београд, 2016.

Ментор:

др Марко Обрадовић, доцент
Математичког факултета у Београду

Чланови комисије:

проф. др Весна Јевремовић, у пензији
Математичког факултета у Београду

др Бојана Милошевић, доцент
Математичког факултета у Београду

Садржај

1	УВОД	1
1.1	Тестирање претпостављене расподеле	3
2	ТЕСТОВИ НОРМАЛНОСТИ	5
2.1	Тестови преко емпиријске функције расподеле	5
2.1.1	Колмогоровљев и Смирновљев тест и Лилифорсов тест	6
2.1.2	Крамер-фон Мизесов тест	7
2.1.3	Андерсонов и Дарлинггов тест	7
2.2	Регресиони тестови и графици	8
2.2.1	Шапиров и Вилков тест и његове модификације	8
2.2.2	Тест Шапира и Франције	10
2.2.3	Филибенова корелација	10
2.2.4	Графички метод	11
2.3	Остали тестови	16
2.3.1	Моменти расподеле обележја и узорачки моменти	17
2.3.2	Тест коефицијента асиметрије	18
2.3.3	Утхофов тест	20
2.3.4	Тест коефицијента спљоштености	21
2.3.5	Апсолутни моменти	21
2.3.5.1	Геријев тест	21
2.3.5.2	Грубсов тест	22
3	ПОРЕЂЕЊЕ ЕМПИРИЈСКИХ МОЋИ	23
3.1	Моћ теста	24
3.2	Емпиријски праг значајности	25
3.3	Алтернативне хипотезе	26
4	ЗАКЉУЧАК	34
5	ДОДАЦИ	35
6	ТАБЕЛЕ	64
	Библиографија	66

Глава 1

УВОД

Један од основних проблема у математичкој статистици је да се на основу узорка из неке популације оцени расподела самог обележја популације, односно да се на основу узорачке расподеле оцени теоријска расподела. Емпиријска функција расподеле $F_n(x)$ простог случајног узорка $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ из популације са теоријском расподелом $F(x)$, може да да, грубо, говорећи информацију о теоријској расподели са жељеном тачношћу, под условом да одаберемо узорак довољно великог обима. Међутим, нисмо увек у могућности да добијемо узорак жељеног обима, па су и наше могућности у погледу тачности ограничене.

Тема овог рада је испитивање да ли узорак има нормалну расподелу. Нормална расподела је једна од претпоставки у разним статистичким процедурама као што су, нпр. дисперзиона анализа и метода најмањих квадрата (за одређивање расподеле оцена регресионих параметара). У даљем тексту биће објашњени разни статистички тестови за утврђивање нормалности расподеле међу којима су и различити графици за приказ одређених метода.

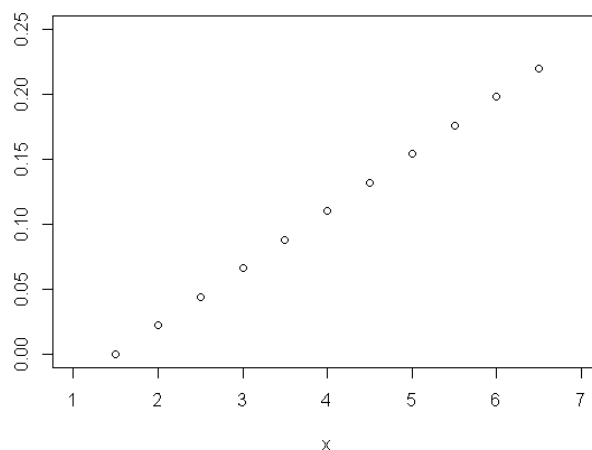
Колико је заправо важна претпоставка да подаци из случајног узорка имају нормалну расподелу, дају нам и тестови као што је Студентов тест, тестови за тестирање коефицијената регресије као и F -тест за тестирање хомогености варијансе. Ови тестови као основну претпоставку имају да подаци долазе из нормалне расподеле. Статистичке методе којима се показује нормалност расподеле захтевају добру ефикасност теста. Бројна статистичка истраживања доводе у питање значај ефикасности теста при важењу алтернативне хипотезе. Бартлет¹ је први вршио на Студентовом тесту истраживања о одступању од нормалности расподеле. Затим, Фишер² који је имао идеју да проблем одступања од нормалне расподеле реши коришћењем коефицијента асиметрије и коефицијента спљоштености.

¹Frederic Charles Bartlett (1886.- 1969), Велика Британија

²Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), Велика Британија

Један од основних мотива настанка робусних статистика јесте да се обезбеди метода која ће имати добре особине када постоје мала одступања од нормалне расподеле. Робусни тестови се примењују када неке од претпоставки за извођење „класичних“ тестова нису задовољене. Научници годинама уназад имају различите идеје за решавање овог проблема. Тако је на пример, Питман³ користио пермутације које је примењивао при анализи варијансе као доказ да расподела није нормална. Гери⁴ је показао да ненормалност расподеле може озбиљно утицати на моћ теста при тестирању дисперзије. Показано је да ако је вредност коефицијента спљоштености једнака 1,5 при алтернативној расподели, тада је стварни ниво значајности теста мањи од 0,0001, у односу на 0,05 што је вредност при нормалној расподели. Такође, алтернативне расподеле, показују да ако је вредност коефицијента спљоштености једнака 6, тада је вероватноћа одбацивања нулте хипотезе једнака 0,215. Слика 1.1 представља приказ Геријевих резултата, при чему су на x -оси приказане вредности коефицијента спљоштености, а на y -оси вероватноће одбијања нулте хипотезе:

Слика 1.1: Ниво значајности z - теста када је расподела одређена коефицијентом спљоштености



z - тест се примењује када је позната стандардно одступање. Овим тестом се проверава да ли средња вредност \bar{x} потиче из популације чија је средња вредност једнака μ .

Гери је помоћу Студентовог теста за два узорка закључио да, ако је расподела иста за обе популације, без обзира на врсту ненормалности, вероватноћа одбацивања нулте хипотезе изузетно мала. До великих

³Isaac Pitman (1813-1897), Велика Британија

⁴Roy Charles Geary (1896- 1983), Ирска

промена у значајности теста може доћи ако су дистрибуције популација различите. Бокс⁵ је показао да је моћ Бартлетовог теста за тестирање дисперзије озбиљно угрожена ако је у питању нормалност расподеле и да је неадекватно користити тај тест када је у питању дисперзиона анализа при различитим дисперзијама. Пирсонове⁶ симулације теоријски су потврдиле недостатак F-теста за испитивање хомогености варијансе на малим узорцима. Користећи узорке обима 10 и 25, они су показали да ненормалност озбиљно утиче на ниво значајности теста за испитивање хомогености дисперзије када је у питању један узорак као и на испитивање односа дисперзија за два узорка, чак и када су расподеле једнаке.

Постоји много тестова који су специфични баш за испитивање нормалне расподеле. Литература садржи многе тестове који посебно истичу баш на специфичност особина параметара ове расподеле и стога је важно утврдити који од њих најефикаснији за одређени проблем тестирања. На пример, тестови момената користе специфичност односа између момената нормалне расподеле, док Шапиров и Вилков тест користи линеарну комбинацију статистика поретка.

1.1 Тестирање претпостављене расподеле

Како се овај рад односи на тестирање хипотеза о нормалности, у овом делу даћемо основне дефиниције о избору и тестирању хипотеза.

Препоставимо да имамо реализован прост случајан узорак обима n , (x_1, x_2, \dots, x_n) , за обележје са густином $f(x)$. Генерално, проблем се састоји у тестирању нулте хипотезе:

$$H_0 : f(x) = f_0(x).$$

Функција густине $f_0(x)$ у H_0 је прецизно одређена расподела. Када су параметри потпуно одређени, нулта хипотеза се назива проста хипотеза. Ако један или више параметара у хипотези H_0 нису познати, онда се она назива сложена хипотеза.

У зависности од проблема, алтернативна хипотеза H_1 може бити потпуно одређена расподела f_1 (у случају просте нулте хипотезе), укључујући и конкретне вредности параметара θ :

$$H_1 : f(x) = f_1(x, \theta).$$

⁵George Edward Pelham Box (1919-2013), Велика Британија

⁶Karl Pearson (1857-1936), Велика Британија

За сложену нулту хипотезу, алтернативна може се односити на класу расподела када вредност параметара није позната, тј. може бити облика:

$$H_1 : f(x) = f_1(x, \theta), \theta \in \Theta,$$

али и облика:

$$H_1 : f(x) \neq f_0(x).$$

У овом раду бавићемо се тестирањем хипотезе за утврђивање нормалности расподеле:

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

при чему оба параметра μ и σ^2 нису познати. Овакав облик нулте хипотезе се најчешће примењује у пракси.

Особине нормалне расподеле су да је симетрична, унимодална, да су средња вредност, медијана и мода једнаки и крајеви јој се асимптотски приближавају x - осе. Средња вредност (μ) одређује центар, а стандардна девијација (σ) ширину расподеле. Стандардна девијација је растојање од средње вредности до тачке где крива мења облик од конкавне на доле у конкавну на горе. Променом параметара μ и σ добијају се различите нормалне расподеле и постоји бесконачно много нормалних расподела.

Неки тестови, као што су тестови количника максималне веродостојности, су направљени да детектују нормалност у односу на тачно одређену алтернативну расподелу. Они су засновани на заједничким вероватноћама нулте и алтернативне хипотезе. Недостатак оваквих тестова је што критичне вредности врло често нису доступне (нпр. не постоје одговарајуће таблице) и нема ефекта користити их уколико ни нулта ни алтернативна хипотеза нису тачне. Са друге стране, тестови количника максималне веродостојности се препоручују јер могу користити пуно различитих алтернатива.

Глава 2

ТЕСТОВИ НОРМАЛНОСТИ

У овом поглављу биће изложени тестови за тестирање нормалности расподеле. У зависности од начина рачунања тест статистика, тестови су подељени у три групе:

- Тестови преко емпиријске функције расподеле.
- Регресиони тестови и графици.
- Остали тестови.

Тестови из прве две групе коришћени су у симулацији моћи теста, док се трећа група тестова односи на тестове који се користе у свакодневној пракси. Анализа симулација се може детаљно погледати у поглављу 3.

У пракси се најчешће користе Колмогоровљев¹ и Смирновљев² тест, Лилифорсов тест³, Андерсонов⁴ и Дарлинггов⁵ тест, јер су ови тестови слободни од параметара расподеле па омогућавају тестирање сложених нултих хипотеза.

2.1 Тестови преко емпиријске функције расподеле

Основни задатак статистике је дефинисање расподеле фреквенција посматраног обележја основног скупа (популација, бесконачан скуп) на основу изабраног скупа мањег обима (статистички узорак, коначан скуп). Расподела фреквенција основног скупа се назива теоријска расподела а расподела фреквенција узорка се назива емпиријска расподела.

¹Andrey Kolmogorov, (1903-1987), Русија

²Vladimir Smirnov, (1887- 1974), Русија

³Hubert Whitman Lilliefors, (1928– 2008), САД

⁴Wilbur Anderson,(1918-),САД

⁵David J. Darling,(1953-), Велика Британија

Тестови преко емпиријске функције расподеле засновани су на поређењу емпиријске и претпостављене функције расподеле. У ову групи тестова спадају: Колмогоровљев и Смирновљев тест (заснован је на односу емпиријске и теоријске („праве“) функције расподеле), Крамер-фон Мизесов тест, Андерсонов и Дарлинггов тест, као и многи други. У скорије време су Лилифорс и Стивенс⁶ проширили ове тестове на случајеве када средња вредност и варијанса нису познате. Показали су да тада ови тестови имају моћ која је упоредива са моћи тестова Шапира и Вилка.

Емпиријска функција расподеле, у ознаци $F_n(x)$, дефинисана је формулом:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & x \leq x_{(n)} \end{cases}$$

2.1.1 Колмогоровљев и Смирновљев тест и Лилифорсов тест

Претпоставимо да смо из узорка обима n из расподеле F добили емпиријску функцију расподеле F_n . Ако је F непрекидна функција, према теорему:

Теорема 2.1. *Ако је F непрекидна функција, тада је*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\sqrt{n}|F_n(x) - F(x)| \leq t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2t^2 k^2}, t > 0.$$

тест статистика $\lambda(\sqrt{n}|F_n(x) - F(x)| \leq t)$ има за граничну вредност, кад $n \rightarrow +\infty$, K - расподелу Колмогорова.

Тестира се хипотеза:

$$H_0 : F = F_0,$$

где је H_0 непрекидна расподела, против алтернативне хипотезе:

$$H_1 : F \neq F_0,$$

са нивоом значајности α , при чему није неопходно да обим узорка буде велики. Нека је c квантил реда $1 - \alpha$ расподеле. Ако је

$$\lambda(\sqrt{n}|F_n(x) - F_0(x)| > c)$$

хипотезу H_0 одбацујемо.

Уколико се хипотеза H_0 односи на класу расподеле F_0 са неким непознатим параметрима, њих оцењујемо из узорка, али се тада не примењује

⁶Clarence F. Stephens, (1917-),САД

овај тест него неки од његових модификација.

У случајевима када средња вредност и стандардна девијација нису познате, а оцењивање се врши на основу узорка, онда уобичајени Колмогоровљев и Смирновљев тест даје резултате који нису поуздани. Лилифорс је дефинисао тест који је поузданији у овом случају.

Лилифорсов тест користи исту тест статистику као и тест Колмогорова и Смирнова, али се користи табела критичних вредности који је дефинисао Лилифорс. У табели 4.4 која се налази у прилогу приказује различите критичне вредности у зависности од обима узорка.

2.1.2 Крамер-фон Мизесов тест

Овај тест се заснива на растојању емпиријске од теоријске функције расподеле. Растојање се посматра у интегралном облику:

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \psi(F(x)) dF(x).$$

У пракси се најчешће користи да је $\psi(F(x))=1$. Тест статистика је интегрална сума за горњи интеграл у облику

$$W^2 = \frac{1}{12} + \sum \left(p_{(i)} - \frac{2i-1}{2n} \right)^2, p_{(i)} = F_0(x_{(i)}),$$

где је $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots x_{(n)}$ узорак обележја X . Често се користи и модификација:

$$W^{2*} = \left(1.0 + \frac{0.5}{n} \right) W^2.$$

Крамер-фон Мизесов⁷ тест је сличан по идеји тесту Колмогорова, који такође пореди емпиријску и теоријску функцију расподеле.

Која се формула за тест статистику користи зависи од обима узорка и од критичних вредности које се користе. Критичне вредности за W^{2*} дате су у табели 4.1 у прилогу.

2.1.3 Андерсонов и Дарлинггов тест

Андерсонов и Дарлинггов тест користи тест статистику:

$$A^2 = -n - n^{-1} \sum_{i=1}^n [2i-1][\log(p_{(i)}) + \log(1-p_{(n-i+1)})],$$

⁷енг. Cramer-von Mises test

где је $p_{(i)} = F_0(x_{(i)})$ за било коју расподелу F_0 . Критичне вредности овог теста зависе од претпостављене расподеле.

Стивенс је предложио модификовани облик:

$$A^{2*} = \left(1.0 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right)A^2.$$

На тај начин добио је комплет свих критичних вредности које су дате у табели 4.2, у прилогу.

2.2 Регресиони тестови и графици

Пошто статистике поретка носе пуно информација о расподели обележја, било је природно увести их у процедуре тестирања.

2.2.1 Шапиров и Вилков тест и његове модификације

Шапировим и Вилковим тестом тестира се нулта хипотеза да је узорак (x_1, x_2, \dots, x_n) из популације X која има нормалну расподелу. Тест статистика је:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.1)$$

где је $x_{(i)}$ i -та статистика поретка, тј. i -та по величини реализована вредност обележја у узорку, \bar{x} . Константе a_i се добијају помоћу једнакости:

$$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}}, m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T,$$

при чему V представља коваријациону матрицу статистика поретка, m_1, m_2, \dots, m_n представљају очекиване вредности статистика поретка.

Због сложености израчунавања користи се апроксимација вектора \vec{a} која се добија помоћу једнакости:

$$\tilde{m}_i = \phi^{-1}\left(\frac{i - 0.375}{n + 0.25}\right), i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{m}^T}{\sqrt{\tilde{m}^T \tilde{m}}}.$$

Шапиров и Вилков тест се најчешће примењује на узорке малог обима. Ако се примењује на узорке већег обима, неопходно је, за верификацију нормалне расподеле користити и Q-Q график. Коришћење Q-Q графика је неопходно, јер за узорке великог обима, Шапиров тест не пружа информације о коефицијенту спљоштености, асиметрији, аутлајерима, чије вредности су од великог значаја при доношењу одлуке о претпостављеној расподели.

Најбоља линеарна непристрасна оцена за непознати параметар θ добија се из једнакости:

$$b = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n-i+1} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}).$$

Ројстон⁸ је представио трансформације тест статистике W за узорке обима $7 \leq n \leq 2000$. Та трансформација дата је једначином:

$$z = \frac{((1 - \lambda)^\lambda - \mu_y)}{\sigma_y}.$$

Пошто његова апроксимација захтева очекиване вредности статистика поретка и коваријациону матрицу, за добијање вредности a_i користио је апроксимацију $\mathbf{a}^* = m^T V^{(-1)}$ на следећи начин:

$$\hat{a}_i^* = \begin{cases} 2w_i, & 1 < i < n \\ \left(\frac{\hat{a}_1^2}{1 - 2\hat{a}_1^2} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{a}_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & i = 1, n \end{cases}$$

при чему је:

$$\hat{a}_1^2 = \hat{a}_n^2 = \begin{cases} g(n-1), & n \leq 20 \\ g(n), & n > 20, \end{cases}$$

$$g(n) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 0.5)}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

За апроксимацију функције $g(n)$ користио је и једнакост:

$$g(n) = \left[\frac{6n+7}{6n+13} \right] \left[\frac{\exp(1)}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n-2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Параметри λ, μ_y, σ_y оцењују се из модела који зависе само од обима узорка, један модел је обима $7 \leq n \leq 20$ и други $21 \leq n \leq 2000$. Ови модели су облика:

$$\sum \beta_i (\log(n) - d)^i,$$

и користе оцене параметара $\lambda, \log(\mu_y)$ и $\log(\sigma_y)$. Ове оцене се користе за трансформацију статистике W у једнакости (2.1). Коефицијенти модела и вредност d за сва три параметра, дати су у следећој табели:

⁸Royston, J.P.,(1945-), Велика Британија

параметар	λ	$\log(\mu_y)$	$\log(\sigma_y)$
d	3	3	3
β_0	0.11893	-0.37542	-3.15805
β_1	0.133414	-0.492145	0.729399
β_2	0.327907	-0.124332	3.01855
β_3	-	-0.199422	1.55876
$21 \leq n \leq 2000$			
d	5	5	5
β_0	0.480384	-1.91487	-3.73538
β_1	0.318828	-1.37888	-1.01507
β_2	0	-0.04183209	-0.331885
β_3	-0.0241665	0.1066339	0.173538
β_4	0.00879701	-0.0513666	-0.163872
β_5	0.002989646	-0.01504614	-0.03215018
β_6	-	-	0.003852646

Када се израчунају λ , μ_y и σ_y , рачуна се:

$$z = \frac{(((1 - W)^\lambda - \mu_y))}{\sigma_y},$$

Нормалност се одбацује ако је z веће од горње критичне вредности α из стандардне нормалне расподеле.

2.2.2 Тест Шапира и Франције

Шапиро и Франција су за апроксимацију тест статистике W претпостављали да су за велике узорке статистике поретка независне. Задали су апроксимацију

$$W' = \frac{(a \cdot x)^2}{(n - 1)s^2},$$

где је $a^* = \frac{m^T}{\sqrt{(m^T m)}}$. Дакле, W' представља квадрат Пирсоновог коефицијента корелације између \mathbf{x} и \mathbf{a}^* . Видимо да тест Шапира и Франције за тестирање хипотезе о нормалности, изискује само познавање очекиваних вредности статистика поретка m_i . Висберг и Бинхам дали су апроксимацију за m_i :

$$\tilde{m}_i = \phi^{-1}\left(\frac{i - 0.375}{n + 0.25}\right),$$

и када се претходна формула убаци у тест статистику W' , добиће се апроксимација која је много лакша за рачунање.

2.2.3 Филибенова корелација

За тестирање хипотезе о нормалности, Филибен препоручује да се посматра корелација између узорачке статистике поретке и оцењене

вредности медијане из теоријске расподеле. За узорак обима n , Фи-либен користи:

$$m_i = \begin{cases} 1 - (0.5)^{\frac{1}{n}}, & i = 1, \\ \frac{i-0.375}{n+0.365}, & 1 < i < n, \\ (0.5)^{\frac{1}{n}}, & i = n. \end{cases}$$

Затим је, користећи нормалну расподелу, дефинисао следећу променљиву:

$$M_i = \phi^{-1}(m_i).$$

Тест статистика је:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_{(i)} M_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n M_i^2} \sqrt{(n-1)s^2}}.$$

Предност овог теста у односу на Шапиров и Вилков тест је што не треба израчунавати очекиване вредности статистика поретка из нормалне расподеле.

2.2.4 Графички метод

Значај графика не сме бити занемарен у статистици. Постоје препоручени графици за скоро сваки статистички метод. На пример, постоје графици за представљање резидуала, графици за тачкасто представљање података, као и многи други. Они пружају детаље о узорку који нису доступни у самој тест статистици. Графици обично не сигнализирају одбијање нулте хипотезе нити имају способност да замаскирају неке ефекте да би се прихватила нулта хипотеза. Графици нису и не могу бити доказ, али могу давати значајне информације о расподели обележја.

Описаћемо графичка приказивања података која су специфичне за одређивање нормалности. Ове методе представљају графичке процедуре у којима се статистички подаци пореде по некој теоријској или очекиваној вредности. Ово омогућава субјективне судове о расподели. Посебно, графици квантила тзв. Q-Q графици, апроксимирају праве линије ако узорак долази из нормалне расподеле. Појава нелинеарности у овим графицима сигнализира одступање од нормалности. Препоручује се да било која статистичка анализа укључи и графичко приказивање података (било да се ради о испитивању нормалности или не). У програмском језику R постоји много већ уграђених графика: хистограми, стабло и лишће⁹ графици као и тзв. Q-Q и бокс дијаграми¹⁰. Осим што сваки од њих омогућава субјективни суд о подацима, могуће је идентификовати и аутлајере. Хистограми и стабло и лишће графици

⁹енг. stem-and-leaf

¹⁰енг. box-plot

већ својим обликом показују сличност узорачке расподеле са нормалном, па ћемо нешто више рећи о бокс дијаграму и графику квантила (Q-Q дијаграм).

Претпоставимо да је обим узорка велики број, тада се најчешће вредности обележја задају по интервалима (класама). Овакав начин приказивања података доводи до губљења једног знатног дела информације о посматраном обележју. При оваквом представљању вредности обележја прво се одреде најмања и највећа вредност у узорку. Затим се одаберу бројеви: a_m који је мало мањи од најмање вредности у узорку и a_M који је нешто већи од највеће вредности у узорку. Затим се интервал $[a_m, a_M)$ подели на k дисјунктних подинтервала, чије дужине могу, али не морају, бити једнаке: $[a_1, a_2), [a_2, a_3), \dots, [a_k, a_{k+1})$, при чему је $a_1 = a_m$ и $a_{k+1} = a_M$. Такође, користе се и следећа правила:

1. да средине интервала буду једнаке неким подацима из узорка,
2. да границе интервала буду различите од података из узорка.

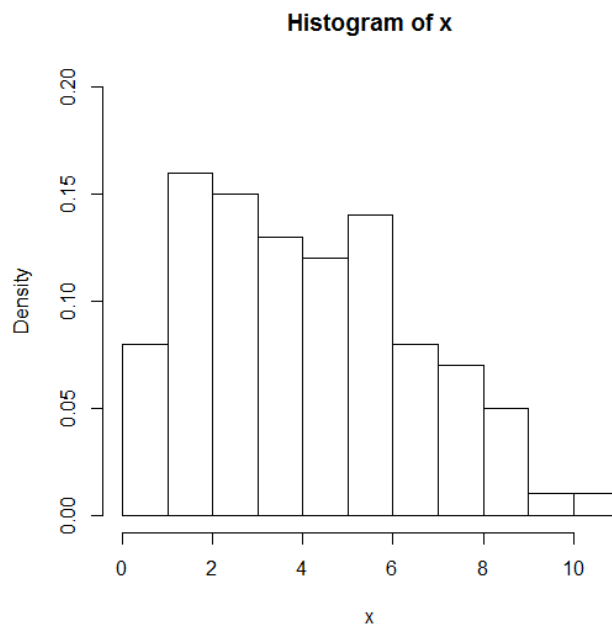
Након дефинисаних интервала формира се табела:

Вредност обележја	$[a_1, a_2)$	$[a_2, a_3)$	$[a_3, a_4)$	$[a_4, a_5)$	\dots	$[a_k, a_{k+1})$
Фреквенција	n_1	n_2	n_3	n_4	\dots	n_k

Вредности n_1, n_2, \dots, n_k представљају број елемената узорка који се налазе у сваком од интервала.

На следећем хистограму (слика 2.1) представљени су случајни бројеви који имају χ^2 расподелу са 4 степени слободе:

Слика 2.1: Пример хистограма



Стабло и лишће дијаграми пружају сличне информације као и хистограми уз додатне детаље при испитивању података. Слично хистограмима, они показују учесталост опсервација, показују вредности података, омогућавају идентификацију средње вредности, екстрема и других параметара.

Бокс дијаграм или правоугаони дијаграм представља начин графичког приказивања података, нарочито погодан за поређења са нормалном расподелом као и са другим симетричним расподелама. Овај дијаграм се добија тако што се на изабраној оси одреде узорачка медијана и квартили q_1 и q_3 , а затим се помоћу формула:

$$f_1 = q_1 - 1.5(q_3 - q_1),$$

$$f_3 = q_1 + 1.5(q_3 - q_1),$$

рачунају унутрашње границе. Спољашње границе F_1 и F_3 рачунају формулама:

$$F_1 = q_1 - 3(q_3 - q_1),$$

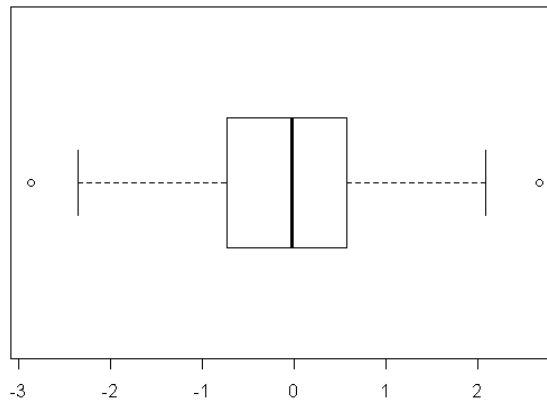
$$F_3 = q_1 + 3(q_3 - q_1).$$

Након тога, одређује се број a_1 који представља најмањи међу елементима узорка, а који је већи од f_1 и број a_3 који је највећи међу елементима узорка али мањи од f_3 .

Дијаграм се састоји од правоугаоника чија је једна страна паралелна изабраној оси и једнака одсечку (q_1, q_2) . Димензија друге стране правоугаоника није од значаја, па се бира произвољно. У правоугаонику се нацрта права линија која одговара узорачкој медијани m_e . Ако је ова права линија близу средине правоугаоника, онда би расподела обележја узорка могла бити нека симетрична расподела, у супротном реч је о некој асиметричној расподели.

На слици 2.1 кружићем \bigcirc приказани су елементи у узорку који се налазе у интервалима $[F_1, f_1]$ и $[f_3, F_3]$.

Слика 2.2: Пример Бокс дијаграма



Овај дијаграм се интерпретира у складу са нормалном расподелом код које се ван интервала (f_1, f_3) налази само 0,7% вредности обележја и код које линија која одговара медијани дели правоугаоник на два једнака дела. Стога, по аналогији са нормалном расподелом, све вредности из узорка које се налазе ван интервала (f_1, f_3) сматрају се за вредности обележја које неуобичајено много одступају од очекиване вредности и оне се називају издвојене вредности (аутлајери¹¹, на горњој слици су то сви \circ). Бокс дијаграми су корисни и за истовремени приказ више једнодимензионалних скупова података.

Q-Q графици су графици који представљају узорачке статистике поретка у односу на вредност квантила из неке расподеле f (нпр. стандардне нормалне расподеле). Теоријски под нултом хипотезом, график квантила ће бити линеаран осим у случајним флукуацијама. Свако одступање од линеарности графика указује да вредности обележја нису из расподеле f (односно нису нормално расподељене).

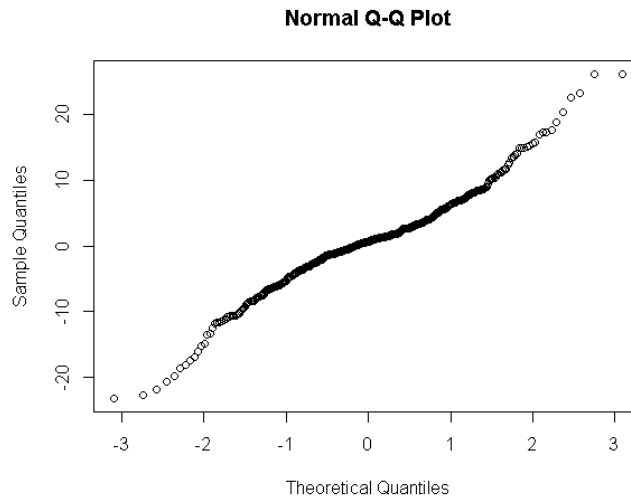
Поред пружања увида у нормалност или одступања од нормалности, Q-Q графици могу да обезбеде и процену средње вредности, стандардне девијације и перцентила, уколико подаци имају приближно нормалну расподелу.

Први корак у креирању Q-Q графика је добијање реализованих статистика поретка $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Ове вредности представљају квантиле из емпиријске расподеле. Представљају се на ординати и на основу њих израчунавају се вредности на апсиси. Најчешће коришћена формула за избор нивоа квантила на Q-Q графику је $p_i = \frac{i-0.5}{n}$ и $p_i = \frac{i}{n+1}$. Једнакост $p_i = \frac{i}{n}$ за избор нивоа онемогућава цртање нај-

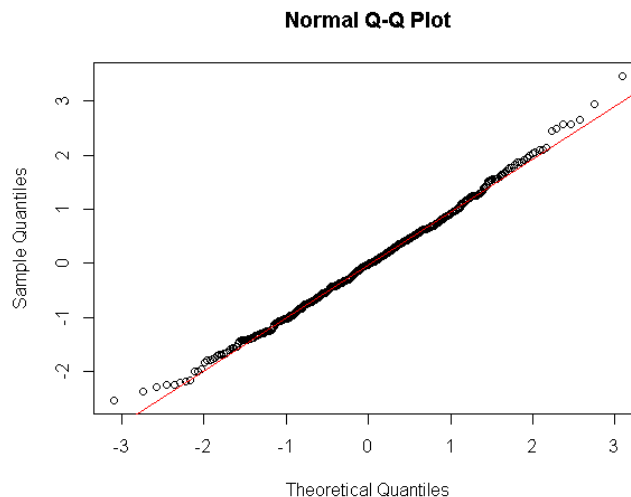
¹¹енг. outliers

веће вредности на графику. Затим се цртају тачке са координатама $(\phi^{(-1)}(p_i), X_{(i)})$, где је $\phi^{(-1)}$ инверзна функција претпостављене расподеле. На основу ових тачака констатује се постојање линеарности: ако се ове тачке налазе на или у близини праве $y = x$, тада се констатује линеарност. Ако је вредност коефицијента спљоштености већа од 3, онда се доњи крак криве окреће наниже а горњи навише. Ако је коефицијент спљоштености мањи од 3, онда се доњи крак криве креће навише а горњи наниже. На сликама 2.2, 2.3, 2.4 представљени су Q-Q графици случајног узорка са двоструком експоненцијалном расподелом (коефицијент спљоштености једнак је 6), нормалном и Студентовом расподелом:

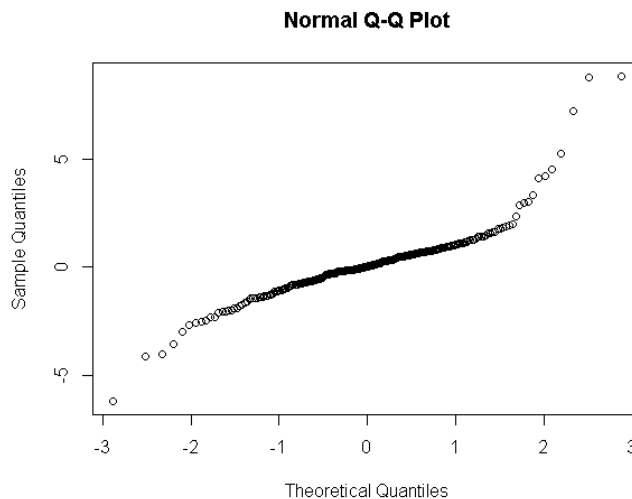
Слика 2.3: Пример двостуке експоненцијалне расподеле



Слика 2.4: Пример нормалне расподеле



Слика 2.5: Пример Студентове расподеле



Неопходно је бити пажљив у проценама високих и ниских перцентила или стандардне девијације. Ако се реп на графику наставља даље, може доћи до неслагања у тим проценама. Ако подаци нису линеарни, онда се не може констатовати ништа сем медијане.

Иако су графичке методе драгоцене за идентификацију карактеристика расподеле, Q-Q графици нису осетљиви на одређене појаве у подацима и ако се ослањамо само на њих, може доћи до неадекватних закључака. Стога је потребно имати више објективних метода које се могу користити за проверу карактеристика претпостављене расподеле. Релације између $x_{(i)}$ и $\phi^{(-1)}(p_i)$ могу користити за утврђивање нормалности за одређене тестове.

2.3 Остали тестови

У даљем тексту приказаћемо још неке тестове којима се може тестирати нормална расподела. Ови тестови нису коришћени у симулацијама моћи теста.

Карл Пирсон је први уочио да се одступање расподеле од нормалне, може испитивати помоћу трећег и четвртог момента, тако што се при тестирањима узорачки momenti пореде са теоријским.

2.3.1 Моменти расподеле обележја и узорачки моменти

Један од начина којим се могу окарактерисати одступања неке расподеле од нормалне је на основу првог обичног и другог централног момента. Први обични и други централни моменат случајне променљиве са густином расподеле $f(x)$ дефинисани су једнакостима:

$$\mu = m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Дакле, ови моменти заправо представљају параметре нормалне расподеле и нису од превеликог значаја за тестирање претпостављене расподеле.

Централни моменти вишег реда дефинишу се на следећи начин:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx,$$

при чему је k цео број већи од 1. Ако је $f(x)$ симетрична, k -непаран број, тада је $\mu_k = 0$.

Стандардизовани моменти су важне вредности када се пореде емпијска и теоријска расподела. Стандардизовани k -ти моменат можемо дефинисати и на следећи начин:

$$\psi_k = \frac{\mu_k}{\mu_2^{\frac{k}{2}}}.$$

Дакле, k -ти стандардизовани моменат зависи од дисперзије целе популације. Такође, уочавамо да су ψ_k величине без димензија што је корисно при поређењу расподела разних обележја. При тестирању хипотеза за нормалност, акценат је стављен на трећи и четврти стандардизовани моменат. Ти параметри се називају коефицијент асиметрије односно спљоштености и рачунају се по формулама:

$$K_A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

$$K_E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Ако је расподела нормална, тада је $K_A = 0$ и $K_E = 3$.

Проблеми који могу настати када се пореде стандардизовани моменти из узорка са теоријским стандардизованим моментима нормалне расподеле су:

- моменти у популацији не морају бити јединствени. На пример, непарни моменти за симетричне расподеле једнаки су нули, али такође постоје неке „искривљене“ расподеле чији је непарни момент вишег реда једнак нули. Са друге стране, већина ненормалних симетричних расподела има четврти момент различит од 3, али постоје и неке ненормалне симетричне расподеле чији је коефицијент спљоштености једнак 3,
- различити моменти расподеле, указују на различите карактеристике. Тест коефицијента асиметрије не одбацује нулту хипотезу о нормалној расподели, али такође и не гарантује да је реч о нормалности. У пракси је врло честа комбинација различитих тестова за идентификацију карактеристика нормалне расподеле,
- ако је $k > 4$, сматра се да је варијанса оцене момента превише велика да би тест био ефикасан, међутим, Тод¹² је пронашао тест код кога је $k > 4$ али је моћ теста изузетно велика у појединим случајевима.

За обележје X и прост случајан узорак (X_1, X_2, \dots, X_n) k -ти узорачки момент се дефинисати на следећи начин:

$$M_k = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^k}{n},$$

а његова реализована вредност на узорку је:

$$m_k = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^k}{n},$$

при чему $x_i, i = 1, \dots, n$ представља n опсервација случајне променљиве X , \bar{x} представља аритметичку средину тих опсервација и k је цео број такав да $k \geq 2$. Видимо да се m_2 једино у имениоцу разликује од кориговане дисперзије s^2 .

2.3.2 Тест коефицијента асиметрије

Тест статистика је дефинисана са:

$$\sqrt{b_1} = \frac{M_3}{M_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Ако је $\sqrt{b_1} > 0$ тада је реп расподеле закривљен удесно, а ако је $\sqrt{b_1} < 0$ тада је реп расподеле закривљен улево. У случајевима када правац репа није познат, користе се двосмерни тестови. Статистика $\sqrt{b_1}$

¹²Thode, Jr., H.C., (1956-), САД

омогућава врло користан тест за детекцију закривљених расподела, а може се користити и за откривање симетричних расподела код малих узорака. Дисперзија се рачуна по формули:

$$D(\sqrt{b_1}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}.$$

Четврти моменат расподеле статистике $\sqrt{b_1}$ дефинисан је изразом:

$$K_E(\sqrt{b_1}) = 3 + \frac{36(n-2)(n^2+2n-5)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}.$$

Следећа табела показује прва четири момента расподеле статистике $\sqrt{b_1}$ за узорке обима од 25 до 2000:

n	$E(\sqrt{b_1})$	$D(\sqrt{b_1})$	$K_1(\sqrt{b_1})$	$K_E(\sqrt{b_1})$
25	0	0.190	0	3.58
50	0	0.107	0	3.45
100	0	0.057	0	3.28
500	0	0.012	0	3.07
1000	0	0.006	0	3.04
5000	0	0.00	0	3.02
асимптотски	0	$\frac{6}{n}$	0	3.00

Може се уочити да примењивање нормалне апроксимације за израчунавање критичне вредности може дати нетачне резултате за узорке обима мањег од 100. За узорке обима преко 500 $K_E(\sqrt{b_1})$ конвергира ка 3.

Д'Агостино¹³ је приказао трансформацију расподеле $\sqrt{b_1}$ у нормалну. Ова трансформација се користи за узорке обима већег од 8. Нека је

$$Y = \sqrt{b_1} \left(\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$B_2 = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}.$$

Тада

$$X(\sqrt{b_1}) = \delta \log \left(\frac{Y}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{Y}{\alpha} \right)^2 + 1} \right),$$

има $N(0, 1)$ расподелу при чему су параметри α и β одређени једнакостима:

$$W = \sqrt{2(B_2 - 1)} - 1,$$

¹³Ralph D'Agostino, (1968-), Бостон, САД

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\log(W)}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{(W^2 - 1)}}.$$

2.3.3 Утхофов тест

Нека је x_α α -ти квантил опсервације. Тада се коефицијент асиметрије рачуна као:

$$T_2 = \frac{x_{0.5} - x_\alpha}{x_{1-\alpha} - x_\alpha}.$$

Утхоф¹⁴ предлаже да се користи $\alpha \approx 0.1$.

Дефинишимо функцију $h_m(x_{(i)} : x_{(j)})$ која користи статистике поретка $x_{(i)}$ кроз $x_{(j)}$ такве да је $i < j, i + j = m, m$ - цео број, $m < \frac{n}{2}$:

$$h_n(x_{(1)} : h_{(n)}) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n+1-2i)(x_{(n+1-i)} - x_{(i)}).$$

Тада се асиметрија може проценити формулом:

$$S_2 = \frac{h_{n-n_3+1}(x_{(n_3)} : x_{(n)})}{h_{n_3}(x_{(1)} : x_{(n_3)}) + h_{n-n_3+1}(x_{(n_3)} : x_{(n)})},$$

при чему је $n_3 = \frac{n}{2}$. Статистике T_2 и S_2 представљају U - статистике и имају асимптотски нормалну расподелу.

Нека је x_β β -ти квантил опсервације. Дефинишимо статистику T_1 формулом:

$$T_1 = \frac{(x_{1-\beta} - x_\beta)}{(x_{1-\alpha} - x_\alpha)},$$

при чему се за α и β узима 0.01 и 0.25, респективно. Очекивана вредност статистике T_1 под нормалношћу је 0.289. Утхоф препоручује да се за α и β користе вредности 0.32 и 0.04, и тада је вредност статистике, под нормалношћу, једнака 0.269.

Дефинишимо статистику S_1 на следећи начин:

$$S_1 = \frac{h_{n_2-n_1+1}(x_{(n_1)} : x_{(n_2)})}{h_{n_1}(x_{(1)} : x_{(n_1)}) + h_{n_2-n_1+1}(x_{(n_1)} : x_{(n_2)}) + h_{n-n_2+1}(x_{(n_2)} : x_{(n)})},$$

при чему је $n_1 = \beta n$ и $n_2 = (1 - \beta)n$. При нормалној расподели обележја X , вредност тест статистике S_1 је 0.290. Обе статистике, S_1 и T_1 , представљају U - статистике и имају асимптотски нормалну расподелу.

¹⁴Uthoff, V.A.,(1943-2016), Тексас

2.3.4 Тест коефицијента спљоштености

За тестирање симетричног одступања од нормалне расподеле користи се тест статистика:

$$b_2 = \frac{M_4}{M_2^2}.$$

Тестирања коришћењем b_2 и $\sqrt{b_1}$ сматрају се најстаријим и најмоћнијим тестовима за тестирање нормалности и користе велики спектар алтернатива. Пирсон и Гери сматрају да је тест који за тестирање користи коефицијент спљоштености најмоћнији тест за симетричне ненормалне расподеле, нарочито за велике узорке и мала одступања од нормалности.

2.3.5 Апсолутни моменти

Апсолутни моменат реда c за обележје X је $E|X - E(X)|^c$ и у случају непрекидне расподеле са густином $f(x)$ рачуна се на следећи начин:

$$\nu_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \bar{x}|^c f(x) dx, c \neq 0,$$

где је c било који реалан број. Узорачки апсолутни моменат реда c за узорак обима n дефинише се као:

$$\nu = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}|^c}{n}.$$

Тест статистика која користи апсолутне моменте је облика:

$$a(c) = \frac{\nu_c}{\nu_2^{\frac{c}{2}}} = \frac{\nu_c}{m_2^{\frac{c}{2}}},$$

при чему је c произвољан цео број различит од 0 и 2.

Темеље за ове тестове поставио је Гери, који је првобитно предложио облик $a(1)$. Гери је $a(1)$ користио као алтернативу за тестирања коефицијента спљоштености али само на малим узорцима, јер је за мале узорке тешко одабрати добру критичну вредност при тестирању коефицијента спљоштености.

2.3.5.1 Геријев тест

Тест статистика Геријевог теста је облика:

$$a = a(1) = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - \bar{x}|}{n\sqrt{m_2}}.$$

Теоријска вредност за тест статистику овог теста је $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Д'Агустино је дефинисао трансформацију за добијање стандардизоване нормалне расподеле. Користио је асимптотску средњу вредност и стандардну девијацију тест статистике a . Трансформација је облика:

$$Z = \frac{\sqrt{n}(a - 0.7979)}{0.2123}.$$

2.3.5.2 Грубсов тест

У ситуацијама када се користе велике вредности c примењује се Грубсов¹⁵ тест. Тест статистика је тада:

$$a(\infty) = \frac{x_L}{\sqrt{m_2}} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} T,$$

при чему је:

$$T = \max(T_1, T_2),$$

$$T_1 = \frac{(\bar{X} - X_{(1)})}{s},$$

$$T_2 = \frac{(X_{(n)} - \bar{X})}{s}$$

$$x_L = \max(X_{(n)} - \bar{X}, \bar{X} - X_{(1)}),$$

при чему је s стандарда девијација. Када се статистика T користи за тестирање, хипотеза о нормалности се одбацује ако је T или $a(\infty)$ исувише велико. Критичне вредности за овај тест се могу наћи у табели 4.3 у прилогу.

¹⁵Grubbs F.E., (1919-), Бостон

Глава 3

ПОРЕЂЕЊЕ ЕМПИРИЈСКИХ МОЂИ

Као што је већ речено, у овом раду бавимо се тестирањем нулте хипотезе да прост случајан узорак обима n има нормалну расподелу, тј. нулта хипотеза је да функција густине $f(x)$ има следећи облик:

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

а алтернативна хипотеза је да расподела није нормална, тј. хипотеза H_1 је облика:

$$H_1 : f(x) \neq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty.$$

Први корак при тестирању је налажење критичне области која се налази као квантил расподеле тест статистике који одговара одређеном прагу значајности. Поступак налажења граничне вредности је следећа:

1. Изаберемо функцију расподеле која је нормална.
2. Изаберемо прост случајан узорак n из те расподеле.
3. Израчунамо вредност тест статистике за тај узорак.
4. Поновимо кораке 2. и 3. 10000 пута, како бисмо добили 10000 вредности тест статистика.
5. Задамо праг значајности α .
6. Израчунамо квантиле $1 - \frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\alpha}{2}$ како бисмо одредили двострану критичну област.
7. Вредности квантила које добијемо су границе наше критичне области.

За одређивање граница критичне области изабрали смо $N(0, 1)$ расподелу, а рачунање коришћен је програмски језик R (код се може погледати у поглављу Додаци).

У табели 3.1 приказане су доње и горње границе критичних области наших тест статистика. Све тест статистике имају двострану критичну област.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.99 0.85	0.99 0.93	0.99 0.89	0.99 0.95	0.98 0.90	0.99 0.95
Лилифорсов тест	0.24 0.07	0.15 0.05	0.21 0.08	0.13 0.05	0.19 0.09	0.13 0.06
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.12 0.10	0.52 0.12	0.83 0.15	0.85 0.15	0.72 0.16	0.74 0.17
Утхофов T_2	0.67 0.17	0.55 0.22	0.61 0.21	0.51 0.25	0.57 0.24	0.49 0.27
Утхофов S_2	0.77 0.27	0.67 0.35	0.71 0.33	0.63 0.38	0.68 0.36	0.61 0.40
Утхофов T_1	0.72 0.19	0.59 0.24	0.65 0.24	0.54 0.27	0.62 0.27	0.52 0.29
Утхофов S_1	0.71 0.19	0.54 0.21	0.65 0.24	0.50 0.24	0.62 0.27	0.47 0.26

Табела 3.1: Границе критичних области тестова

3.1 Моћ теста

Налажењем граница критичних области одредили смо и целу критичну област сваке од статистика. Познавање критичне области сваке тест статистике је неопходно да бисмо одредили моћ теста за одређене алтернативе.

Емпиријску моћ теста рачунамо на основу узорка и за одређене алтернативе. Поступак је следећи:

1. Изаберемо конкретну алтернативну расподелу за коју желимо да израчунамо моћ.
2. Изаберемо прост случајан узорак, обима n .
3. Израчунамо вредност тест статистике за изабрани узорак.
4. Поновимо кораке 2. и 3. 10000 пута како би имали 10000 различитих тест статистика, за различите узорке.

5. За дати праг значајности одредимо колико од тих 10000 вредности је мање, односно веће, од граничне вредности критичне области за дати праг значајности.
6. Процент оних вредности тих статистика који припадају критичној области представља моћ теста за конкретну алтернативну расподелу.

У случају повећања обима узорка или повећања прага значајности, повећаће се и моћ теста.

3.2 Емпиријски праг значајности

Како бисмо проверили да ли смо исправно одредили границе критичне области, неопходно је да одредимо емпријски праг значајности. Емпиријски праг значајности се одређује на исти начин као и емпиријска моћ, само што ћемо за алтернативне хипотезе изабрати нормалну расподелу. Уколико је критична област правилно одређена, емпиријски праг значајности би требало да буде једнак или приближно једнак задатом прагу значајности.

Посматраћемо узорке обима 20 и 50, а прагови значајности су 0.01, 0.05 и 0.1. Расподеле које ћемо тестирати су $N(0, 10)$ и $N(-3, 0.5)$.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.01	0.02	0.04	0.07	0.08	0.14
Лилифорсов тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.11
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов T_2	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов S_2	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов T_1	0.01	0.01	0.05	0.06	0.1	0.11
Утхофов S_1	0.00	0.01	0.05	0.06	0.1	0.11

Табела 3.2: Емпиријски праг значајности за $N(0, 10)$

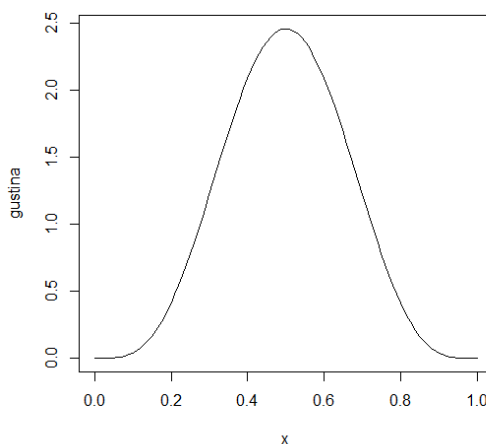
α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.09
Лилифорсов тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.11
Утхофов T_2	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов S_2	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов T_1	0.01	0.01	0.05	0.05	0.11	0.1
Утхофов S_1	0.01	0.00	0.05	0.06	0.1	0.1

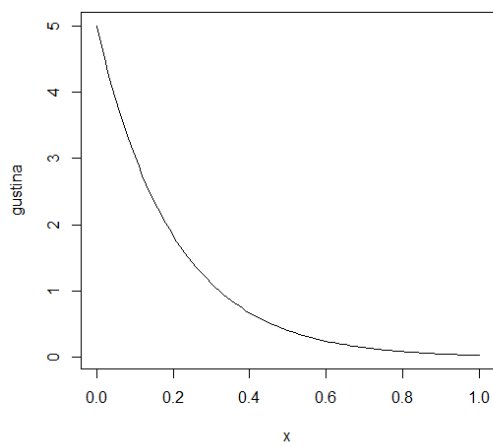
Табела 3.3: Емпиријски праг значајности за $N(-3,0.5)$

За све тестове, емпиријски праг значајности је једнак или приближно једнак задатом прагу значајности, стога можемо можемо закључити да смо на исправан начин одредили границе критичне области.

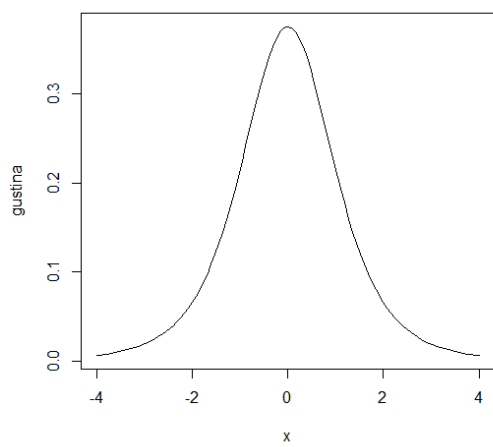
3.3 Алтернативне хипотезе

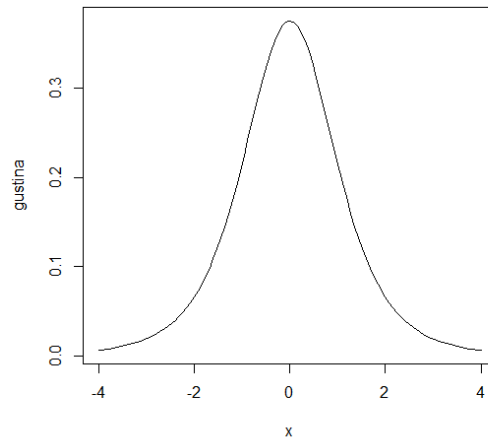
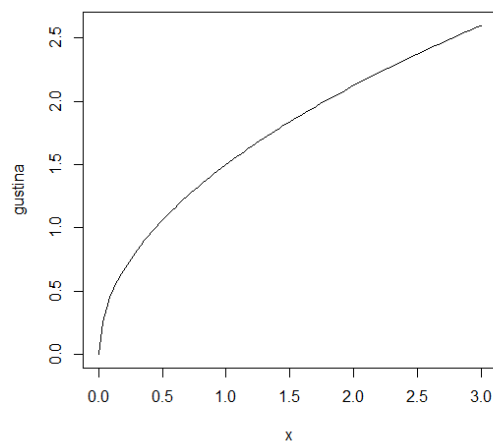
За расподеле из алтернативне хипотезе бираћемо бета расподелу ($\mathbf{B}(5,5)$), експоненцијалну расподелу ($\mathbf{E}(5)$), Студентову расподелу (са четири степена слободe), униформну расподелу ($\mathbf{U}(0,1)$), Кошијеву расподелу ($\mathbf{C}(0,1)$), логистичку расподелу ($\mathbf{LG}(0,1)$), гама расподелу ($\mathbf{\Gamma}(1)$) и Вејбулову расподелу ($\mathbf{W}(1,1.5)$). У даљем тексту биће приказани графици за неке од ових расподела:

Слика 3.1: График бета расподеле $\mathbf{B}(5,5)$ 

Слика 3.2: График експоненцијалне расподеле $E(5)$ 

Слика 3.3: График Студентове расподеле са 4 степена слободе



Слика 3.4: График Кошијеве расподеле $C(0,1)$ Слика 3.5: График Вејбулове расподеле $W(1,1.5)$ 

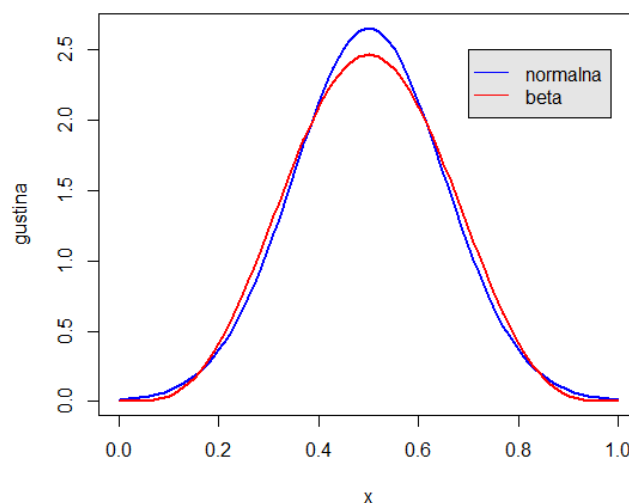
Резултати нашег тестирања су:

Када је алтернативна хипотеза бета расподела, из табеле се види да су моћи за све тестове приближно једнаке са теоријским прагом значајности. Дакле, $W(5,5)$ расподела је врло блиска са нормалном расподелом, што се може закључити и са графика 3.6.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.11
Лилифорсов тест	0.01	0.01	0.06	0.05	0.11	0.1
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.01	0.01	0.05	0.05	0.1	0.1
Утхофов T_2	0.01	0.01	0.05	0.05	0.09	0.1
Утхофов S_2	0.01	0.01	0.04	0.04	0.09	0.08
Утхофов T_1	0.01	0.01	0.05	0.06	0.11	0.12
Утхофов S_1	0.00	0.00	0.06	0.07	0.1	0.13

Табела 3.4: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза бета расподела

Слика 3.6: График бета и нормалне расподеле



α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.57	0.69	0.78	0.9	0.86	0.96
Лилифорсов тест	0.27	0.8	0.48	0.94	0.59	0.97
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.47	0.97	0.69	0.99	0.77	1
Утхофов T_2	0.44	0.9	0.66	0.97	0.74	0.98
Утхофов S_2	0.68	0.99	0.85	1.00	0.9	1.00
Утхофов T_1	0.1	0.31	0.24	0.48	0.33	0.56
Утхофов S_1	0.06	0.04	0.19	0.14	0.27	0.23

Табела 3.5: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза експоненцијална расподела

За узорке обима 50, када је алтернативна хипотеза експоненцијална

расподела, највећу моћ имају Андерсоном и Дарлингов тест и Утхофов S_2 тест са прагом значајности 0.01, 0.05 и 0.1. За исте прагове значајности, Лилифорсов тест има нешто мање моћи теста 0.80, 0.94 и 0.97. У случају Утхофовог T_2 теста, вредност моћи теста је 0.9. Утхофов T_1 има знатно мање моћи теста у односу на претходне тестове, али се са повећањем обима узорка и ова вредност знатно повећава. Најмању моћ теста има Утхофов S_1 тест 0.04, 0.14 и 0.23, са прагом значајности 0.01, 0.05 и 0.1, респективно.

За узорке обима 20, највећу моћ теста има Утхофов S_2 тест, док најмању моћ има Утхофовог S_1 тест. Вредности емпиријске моћи за Шапиров тест су нешто мање у односу на Утхофов S_2 тест, али повећањем прага значајности, повећавају се и вредности емпиријских моћи.

У случају када је алтернативна хипотеза гама расподела, највећу моћ теста имају Андерсонов и Дарлингов тест и Утхофов S_2 тест за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1 и узорак обима 50. Вредности емпиријске моћи за ове тестове када је алтернативна хипотеза гама расподела је 1.00. Најмању вредност моћи теста има Утхофов S_1 тест како за узорке обима 50 тако и за узорке обима 20. За узорке обима 20 највећу вредност моћи теста има Утхофов S_2 тест а затим, Шапиров тест(0.55,0.76, 0.84, за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1, респективно). Дакле, и у случају узорка обима 20 и обима 50 најбољим тестом за тестирање када је алтернативна расподела гама, сматрамо Утхофов S_2 тест.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.55	0.76	0.76	0.94	0.84	0.97
Лилифорсов тест	0.27	0.77	0.48	0.91	0.59	0.96
Андерсонов и Дарлингов тест	0.50	0.96	0.70	0.99	0.78	1.00
Утхофов T_2	0.43	0.90	0.66	0.97	0.76	0.98
Утхофов S_2	0.68	0.99	0.85	1.00	0.90	1.00
Утхофов T_1	0.12	0.31	0.25	0.48	0.34	0.57
Утхофов S_1	0.07	0.04	0.18	0.14	0.27	0.22

Табела 3.6: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза гама расподела

За узорке обима 50 и 20 у случају Кошијеве расподела, најбољим тестом сматраћемо Андерсонов и Дарлингов тест и Утхофов S_1 тест. За узорке обима 50, Лилифорсов тест има незнатно мање вредности емпиријских моћи у односу на тест Андерсона и Дарлинга. Вредности емпиријских моћи за ове тестове су 0.98, 0.99 и 1.00, за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1, респективно. За узорке обима 50, најмању моћ има Утхофов S_2 тест 0.58, 0.67 и 0.72, за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1, респективно, док за узорке обима 20 најмање вредности емпиријских моћи има Утхофовог S_2 тест, 0.44, 0.54 и 0.61 за исте прагове

значајности.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.77	0.95	0.84	0.98	0.87	0.98
Лилифорсов тест	0.72	0.98	0.81	0.99	0.85	0.99
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.79	0.99	0.86	1.00	0.89	1.00
Утхофов T_2	0.42	0.72	0.54	0.80	0.61	0.84
Утхофов S_2	0.44	0.58	0.56	0.67	0.62	0.72
Утхофов T_1	0.60	0.94	0.72	0.97	0.77	0.98
Утхофов S_1	0.78	0.98	0.86	0.99	0.90	1.00

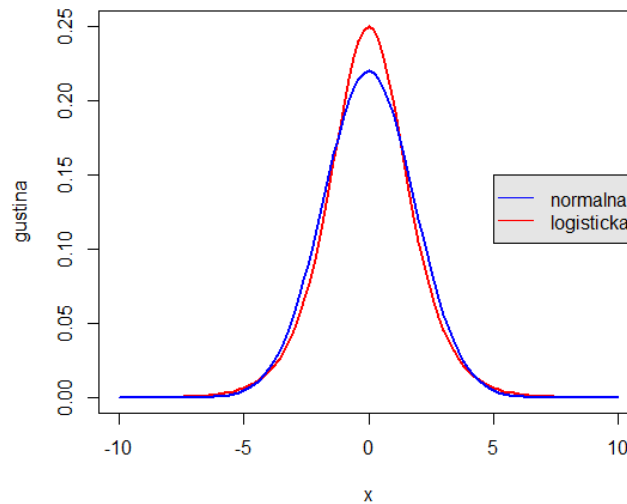
Табела 3.7: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза Кошијева расподела

Када је алтернативна хипотеза логистичка расподела, за обим узорка 50 и праг значајности 0.1 најмоћнијим тестовима сматраћемо Утхофов T_1 тест и Утхофов S_1 тест, а за праг значајности 0.05 тест са највећом вредношћу моћи теста је Утхофов T_1 тест. За праг значајности 0.01 сви тестови имају моћ која је блиска прагу значајности, стога можемо закључити да је ова расподела превише блиска нормалној расподели (погледати график 3.7).

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.03	0.02	0.10	0.07	0.16	0.12
Лилифорсов тест	0.02	0.02	0.07	0.08	0.12	0.14
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.03	0.04	0.08	0.13	0.15	0.2
Утхофов T_2	0.02	0.03	0.07	0.09	0.13	0.17
Утхофов S_2	0.02	0.02	0.07	0.08	0.13	0.15
Утхофов T_1	0.02	0.04	0.08	0.13	0.14	0.20
Утхофов S_1	0.02	0.04	0.09	0.12	0.15	0.21

Табела 3.8: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза логистичка расподела

Слика 3.7: График логистичке и нормалне расподеле



Када је алтернативна расподела Студентова, за узорак обима 50 и прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1 највећу емпиријску моћ има Андерсонов и Дарлингов тест, а најмању моћ имају Утхофов T_2 тест и Шапиров тест, за све прагове значајности.

За узорак обима 20 најмоћнији је Шапиров тест, за све прагове значајности. За праг значајности 0.1 најмању емпиријску моћ имају Лилифорсов тест и Утхофов T_2 тест. За праг значајности 0.05 и 0.01 најмању моћ има Утхофов T_2 тест.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.11	0.11	0.2	0.21	0.27	0.28
Лилифорсов тест	0.06	0.12	0.13	0.23	0.20	0.32
Андерсонов и Дарлингов тест	0.09	0.23	0.18	0.35	0.25	0.44
Утхофов T_2	0.04	0.11	0.12	0.21	0.20	0.29
Утхофов S_2	0.05	0.06	0.13	0.15	0.21	0.23
Утхофов T_1	0.05	0.19	0.14	0.29	0.21	0.38
Утхофов S_1	0.06	0.17	0.17	0.32	0.26	0.42

Табела 3.9: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза Студентова расподела

За узорке обима 20 и 50, када је алтернативна расподела униформна, за праг значајности 0.01 немамо никаквих информације о моћи Утхофов S_1 теста за дату алтернативу јер смо као вредност моћи теста добили 0.00. Док за праг значајности 0.05 и 0.1, за узорке истог обима, овај тест сматрамо најмоћнијим. Такође, за узорак обима 50 и праг значајности

0.01 немамо никаквих информација о моћи Шапировог теста.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.02	0.00	0.11	0.03	0.21	0.1
Лилифорсов тест	0.01	0.05	0.06	0.16	0.12	0.27
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.03	0.19	0.10	0.45	0.18	0.6
Утхофов T_2	0.03	0.08	0.11	0.22	0.17	0.32
Утхофов S_2	0.03	0.03	0.09	0.10	0.15	0.17
Утхофов T_1	0.08	0.38	0.22	0.60	0.31	0.72
Утхофов S_1	0.00	0.00	0.33	0.72	0.46	0.81

Табела 3.10: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза униформна расподела

Када је алтернатива Вејбулова расподела, за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1 најмоћнији су Утхофов S_2 тест, и Андерсонов и Дарлинггов тест, како за узорке обима 20 тако и за узорке обима 50. Најмању моћ за све прагове значајности, има Утхофов S_1 . За узорке обима 50, високу моћ тест показује Утхофов S_2 тест, 0.89, 0.96 и 0.98, за прагове значајности 0.01, 0.05 и 0.1, респективно.

α	0.01		0.05		0.1	
n	20	50	20	50	20	50
Шапиров тест	0.56	0.76	0.75	0.93	0.83	0.97
Лилифорсов тест	0.26	0.77	0.46	0.92	0.57	0.96
Андерсонов и Дарлинггов тест	0.49	0.97	0.68	0.99	0.77	1.00
Утхофов T_2	0.45	0.89	0.65	0.96	0.75	0.98
Утхофов S_2	0.69	0.99	0.84	1.00	0.90	1.00
Утхофов T_1	0.10	0.31	0.22	0.48	0.31	0.56
Утхофов S_1	0.06	0.05	0.17	0.15	0.26	0.22

Табела 3.11: Емпиријске моћи када је алтернативна хипотеза Вејбулова расподела

Глава 4

ЗАКЉУЧАК

У овом раду приказани су само неки од тестова који се баве тестирањем да ли је нека расподела нормална. Као што смо могли видети, испитивању нормалности је посвећена велика пажња. Многи научници базирали су своја истраживања на овим тестовима. За детекције ненормалности (или нормалности) поред тестирања нулте хипотезе, неопходно је проверити да ли важе и друге карактеристике нормалне расподеле, па треба истражити коефицијенте асиметрије и спљоштености, проверити независност узорачке средине и дисперзије, примену правила „ 3σ “, график квантила (Q-Q графици) итд.

Колика је заправо примена ових тестова у статистици, видимо на основу прегледа већ уграђених функција у програмском језику R. За већину тестова већ постоје уграђене функције које истраживачу олакшавају рад.

Глава 5

ДОДАЦИ

Коришћен је исти код за узорак обима $n=20$ и $n=50$.

```
n3<-n/2
beta<-0.25
n1<-beta*n
n2<-(1-beta)*n

H_Utoff<-function(m,y){
a<-2/(m*(m-1))
b<-0
for(i in 1:trunc(m/2))
b<-b+(m-1-2*i)*(y[m+1-i]-y[i])

b<-b*a
}

#H0
library(nortest)
library(moments)
x_H0<-c()
W_H0<-c()
D_H0<-c()
A_H0<-c()
T2_H0<-c()
T1_H0<-c()
S1_H0<-c()
S2_H0<-c()
for (i in 1:10000){
x_H0<-rnorm(n,0,1)

#Shapiro test
W_H0<-c(W_H0,shapiro.test(x_H0)$statistic)
```

```

#Liliforov test
D_H0[i]<-lillie.test(x_H0)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H0[i]<-ad.test(x_H0)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H0<-quantile(x_H0,probs=0.5)
x_alfa_H0<-quantile(x_H0,probs=0.1)
x_0.99_H0<-quantile(x_H0,probs=0.99)
T2_H0[i]<-(x_0.5_H0-x_alfa_H0)/(x_0.99_H0-x_alfa_H0)

X_H0_varijacioni<-x_H0[order(x_H0)]

#Uthoff's S2
S2_H0[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H0_varijacioni[n3:n])
      /(H_Utoff(n3,X_H0_varijacioni[1:n3])
      +H_Utoff(n-n3+1,X_H0_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H0<-quantile(x_H0,probs=(1-beta))
x_beta_H0<-quantile(x_H0,probs=beta)
T1_H0[i]<-(x_0.75_H0-x_beta_H0)/(x_0.99_H0-x_alfa_H0)

#Uthoff's S1
S1_H0[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H0_varijacioni[n1:n2])
      /(H_Utoff(n1,X_H0_varijacioni[1:n1])
      +H_Utoff(n-n2+1,X_H0_varijacioni[n2:n])
      +H_Utoff(n2-n1+1,X_H0_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
#kriticne vrednosti nakon Shapiro testa za alpha=0.1
alpha_0.95_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.95)
alpha_0.05_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.05)

#kriticne vrednosti nakon Liliforov testa za alpha=0.1
alpha_0.95_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.95)
alpha_0.05_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.05)

#kriticne vrednosti nakon Anderson- Darling testa za alpha=0.1
alpha_0.95_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.95)
alpha_0.05_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.05)

#kriticne vrednosti za T2

```

```
alpha_0.95_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.95)
alpha_0.05_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.05)

#kriticne vrednosti za S2
alpha_0.95_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.95)
alpha_0.05_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.05)

#kriticne vrednosti za T1
alpha_0.95_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.95)
alpha_0.05_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.05)

#kriticne vrednosti za S1
alpha_0.95_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.95)
alpha_0.05_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.05)

##### alpha=0.05 #####
#kriticne vrednosti nakon Shapiro testa za alpha=0.05
alpha_0.975_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.975)
alpha_0.025_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.025)

#kriticne vrednosti nakon Liliforovog testa za alpha=0.05
alpha_0.975_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.975)
alpha_0.025_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.025)

#kriticne vrednosti nakon Anderon- Darling testa za alpha=0.05
alpha_0.975_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.975)
alpha_0.025_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.025)

#kriticne vrednosti za T2
alpha_0.975_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.975)
alpha_0.025_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.025)

#kriticne vrednosti za S2
alpha_0.975_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.975)
alpha_0.025_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.025)

#kriticne vrednosti za T1
alpha_0.975_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.975)
alpha_0.025_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.025)

#kriticne vrednosti za S1
alpha_0.975_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.975)
alpha_0.025_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.025)

##### alpha=0.01 #####
#kriticne vrednosti nakon Shapiro testa za alpha=0.01
```



```
alpha_0.995_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.995)
alpha_0.005_H0_W<-quantile(as.numeric(W_H0),probs=0.005)

#kriticne vrednosti nakon Liliforovog testa za alpha=0.01
alpha_0.995_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.995)
alpha_0.005_H0_D<-quantile(as.numeric(D_H0),probs=0.005)

#kriticne vrednosti nakon Anderson- Darling testa za alpha=0.01
alpha_0.995_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.995)
alpha_0.005_H0_A<-quantile(as.numeric(A_H0),probs=0.005)

#kriticne vrednosti za T2
alpha_0.995_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.995)
alpha_0.005_H0_T2<-quantile(T2_H0,probs=0.005)

#kriticne vrednosti za S2
alpha_0.995_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.995)
alpha_0.005_H0_S2<-quantile(S2_H0,probs=0.005)

#kriticne vrednosti za T1
alpha_0.995_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.995)
alpha_0.005_H0_T1<-quantile(T1_H0,probs=0.005)

#kriticne vrednosti za S1
alpha_0.995_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.995)
alpha_0.005_H0_S1<-quantile(S1_H0,probs=0.005)

#H1:N(0,10)
x_H1<-c()
W_H1<-c()
D_H1<-c()
A_H1<-c()
T1_H1<-c()
T2_H1<-c()
S1_H1<-c()
S2_H1<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1<-rnorm(n,0,10)

#Shapiro test
W_H1<-c(W_H1,shapiro.test(x_H1)$statistics)

#Liliforov test
D_H1[i]<-lillie.test(x_H1)$statistic

#Anderson- Darling test
```

```

A_H1[i]<-ad.test(x_H1)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1<-quantile(x_H1,probs=0.5)
x_alfa_H1<-quantile(x_H1,probs=0.1)
x_0.99_H1<-quantile(x_H1,probs=0.99)
T2_H1[i]<-(x_0.5_H1-x_alfa_H1)/(x_0.99_H1-x_alfa_H1)

X_H1_varijacioni<-x_H1[order(x_H1)]

#Uthoff's S2
S2_H1[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_varijacioni[n3:n])
/(H_Utoff(n3,X_H1_varijacioni[1:n3])
+H_Utoff(n-n3+1,X_H1_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1<-quantile(x_H1,probs=(1-beta))
x_beta_H1<-quantile(x_H1,probs=beta)
T1_H1[i]<-(x_0.75_H1-x_beta_H1)/(x_0.99_H1-x_alfa_H1)

#Uthoff's S1
S1_H1[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_varijacioni[n1:n2])
/(H_Utoff(n1,X_H1_varijacioni[1:n1])
+H_Utoff(n-n2+1,X_H1_varijacioni[n2:n])
+H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.05_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.05_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1<-(sum(T2_H1<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1<-sum(S2_H1<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1<-(sum(T1_H1<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1>alpha_0.95_H0_T1))/10000

```

```
sumaS1_0.1<-(sum(S1_H1<alpha_0.05_H0_S1)
             +sum(S1_H1>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.025_H0_W)
             +sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.025_H0_D)
             +sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.025_H0_A)
             +sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05<-(sum(T2_H1<alpha_0.025_H0_T2)
             +sum(T2_H1>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05<-(sum(S2_H1<alpha_0.025_H0_S2)
             +sum(S2_H1>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05<-(sum(T1_H1<alpha_0.025_H0_T1)
             +sum(T1_H1>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05<-(sum(S1_H1<alpha_0.025_H0_S1)
             +sum(S1_H1>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.005_H0_W)
             +sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.005_H0_D)
             +sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.005_H0_A)
             +sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01<-(sum(T2_H1<alpha_0.005_H0_T2)
             +sum(T2_H1>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01<-(sum(S2_H1<alpha_0.005_H0_S2)
             +sum(S2_H1>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01<-(sum(T1_H1<alpha_0.005_H0_T1)
             +sum(T1_H1>alpha_0.995_H0_T1))/10000
```

```
sumaS1_0.01<-(sum(S1_H1<alpha_0.005_H0_S1)
                +sum(S1_H1>alpha_0.995_H0_A))/10000

#H1: N(-3,0.5)
x_H1<-c()
W_H1<-c()
D_H1<-c()
A_H1<-c()
T1_H1<-c()
T2_H1<-c()
S1_H1<-c()
S2_H1<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1<-rnorm(n,-3,0.5)

#Shapiro test
W_H1<-c(W_H1,shapiro.test(x_H1)$statistics)

#Liliforov test
D_H1[i]<-lillie.test(x_H1)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1[i]<-ad.test(x_H1)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1<-quantile(x_H1,probs=0.5)
x_alfa_H1<-quantile(x_H1,probs=0.1)
x_0.99_H1<-quantile(x_H1,probs=0.99)
T2_H1[i]<-(x_0.5_H1-x_alfa_H1)/(x_0.99_H1-x_alfa_H1)

X_H1_varijacioni<-x_H1[order(x_H1)]

#Uthoff's S2
S2_H1[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_varijacioni[n3:n])
                /(H_Utoff(n3,X_H1_varijacioni[1:n3])
                +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1<-quantile(x_H1,probs=(1-beta))
x_beta_H1<-quantile(x_H1,probs=beta)
T1_H1[i]<-(x_0.75_H1-x_beta_H1)/(x_0.99_H1-x_alfa_H1)

#Uthoff's S1
S1_H1[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_varijacioni[n1:n2])
                /(H_Utoff(n1,X_H1_varijacioni[1:n1])
                +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_varijacioni[n2:n]))
```

```
+H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.05_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.05_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1<-(sum(T2_H1<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1<-(sum(S2_H1<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1<-(sum(T1_H1<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1<-(sum(S1_H1<alpha_0.05_H0_S1)
+sum(S1_H1>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05<-(sum(T2_H1<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05<-(sum(S2_H1<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05<-(sum(T1_H1<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05<-(sum(S1_H1<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1>alpha_0.975_H0_S1))/10000
```

```
##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01<-(sum(as.numeric(W_H1)<alpha_0.005_H0_W)
             +sum(as.numeric(W_H1)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01<-(sum(as.numeric(D_H1)<alpha_0.005_H0_D)
             +sum(as.numeric(D_H1)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01<-(sum(as.numeric(A_H1)<alpha_0.005_H0_A)
             +sum(as.numeric(A_H1)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01<-(sum(T2_H1<alpha_0.005_H0_T2)
             +sum(T2_H1>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01<-(sum(S2_H1<alpha_0.005_H0_S2)
             +sum(S2_H1>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01<-(sum(T1_H1<alpha_0.005_H0_T1)
             +sum(T1_H1>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01<-(sum(S1_H1<alpha_0.005_H0_S1)
             +sum(S1_H1>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Eksponencijalna raspodela: E(5)
x_H1_exp<-c()
W_H1_exp<-c()
D_H1_exp<-c()
A_H1_exp<-c()
T1_H1_exp<-c()
T2_H1_exp<-c()
S1_H1_exp<-c()
S2_H1_exp<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_exp<-rexp(n,5)

#Shapiro test
W_H1_exp<-c(W_H1_exp,shapiro.test(x_H1_exp)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_exp[i]<-lillie.test(x_H1_exp)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_exp[i]<-ad.test(x_H1_exp)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_exp<-quantile(x_H1_exp,probs=0.5)
```

```

x_alfa_H1_exp<-quantile(x_H1_exp,probs=0.1)
x_0.99_H1_exp<-quantile(x_H1_exp,probs=0.99)
T2_H1_exp[i]<-(x_0.5_H1_exp-x_alfa_H1_exp)/(x_0.99_H1_exp-x_alfa_H1_exp)

X_H1_exp_varijacioni<-x_H1_exp[order(x_H1_exp)]

#Uthoff's S2
S2_H1_exp[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_exp_varijacioni[n3:n])
      /(H_Utoff(n3,X_H1_exp_varijacioni[1:n3])
      +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_exp_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_exp<-quantile(x_H1_exp,probs=1-beta)
x_beta_H1_exp<-quantile(x_H1_exp,probs=beta)
T1_H1_exp[i]<-(x_0.75_H1_exp-x_beta_H1_exp)/(x_0.99_H1_exp-x_alfa_H1_exp)

#Uthoff's S1
S1_H1_exp[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_exp_varijacioni[n1:n2])
      /(H_Utoff(n1,X_H1_exp_varijacioni[1:n1])
      +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_exp_varijacioni[n2:n])
      +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_exp_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_exp<-(sum(as.numeric(W_H1_exp)<alpha_0.05_H0_W)
      +sum(as.numeric(W_H1_exp)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_exp<-(sum(as.numeric(D_H1_exp)<alpha_0.05_H0_D)
      +sum(as.numeric(D_H1_exp)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_exp<-sum(as.numeric(A_H1_exp)<alpha_0.05_H0_A)
      +sum(as.numeric(A_H1_exp)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_exp<-(sum(T2_H1_exp<alpha_0.05_H0_T2)
      +sum(T2_H1_exp>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_exp<-(sum(S2_H1_exp<alpha_0.05_H0_S2)
      +sum(S2_H1_exp>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_exp<-(sum(T1_H1_exp<alpha_0.05_H0_T1)
      +sum(T1_H1_exp>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_exp<-(sum(S1_H1_exp<alpha_0.05_H0_S1)
      +sum(S1_H1_exp>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####

```

```
sumaW_0.05_exp<-(sum(as.numeric(W_H1_exp<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_exp>alpha_0.975_H0_W)))/10000

sumaD_0.05_exp<-(sum(as.numeric(D_H1_exp<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_exp>alpha_0.975_H0_D)))/10000

sumaA_0.05_exp<-(sum(as.numeric(A_H1_exp<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_exp>alpha_0.975_H0_A)))/10000

sumaT2_0.05_exp<-(sum(T2_H1_exp<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_exp>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_exp<-(sum(S2_H1_exp<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_exp>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_exp<-(sum(T1_H1_exp<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_exp>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_exp<-(sum(S1_H1_exp<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_exp>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_exp<-(sum(as.numeric(W_H1_exp<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_exp>alpha_0.995_H0_W)))/10000

sumaD_0.01_exp<-(sum(as.numeric(D_H1_exp<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_exp>alpha_0.995_H0_D)))/10000

sumaA_0.01_exp<-(sum(as.numeric(A_H1_exp<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_exp>alpha_0.995_H0_A)))/10000

sumaT2_0.01_exp<-(sum(T2_H1_exp<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_exp>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_exp<-(sum(S2_H1_exp<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_exp>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_exp<-(sum(T1_H1_exp<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_exp>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_exp<-(sum(S1_H1_exp<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_exp>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Beta raspodela: B(5,5)
x_H1_beta<-c()
W_H1_beta<-c()
```



```

D_H1_beta<-c()
A_H1_beta<-c()
T1_H1_beta<-c()
T2_H1_beta<-c()
S1_H1_beta<-c()
S2_H1_beta<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_beta<-rbeta(n,5,5)

#Shapiro test
W_H1_beta<-c(W_H1_beta,shapiro.test(x_H1_beta)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_beta[i]<-lillie.test(x_H1_beta)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_beta[i]<-ad.test(x_H1_beta)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_beta<-quantile(x_H1_beta,probs=0.5)
x_alfa_H1_beta<-quantile(x_H1_beta,probs=0.1)
x_0.99_H1_beta<-quantile(x_H1_beta,probs=0.99)
T2_H1_beta[i]<-(x_0.5_H1_beta-x_alfa_H1_beta)
              /(x_0.99_H1_beta-x_alfa_H1_beta)

X_H1_beta_varijacioni<-x_H1_beta[order(x_H1_beta)]

#Uthoff's S2
S2_H1_beta[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_beta_varijacioni[n3:n])
              /(H_Utoff(n3,X_H1_beta_varijacioni[1:n3])
              +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_beta_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_beta<-quantile(x_H1_beta,probs=1-beta)
x_beta_H1_beta<-quantile(x_H1_beta,probs=beta)
T1_H1_beta[i]<-(x_0.75_H1_beta-x_beta_H1_beta)
              /(x_0.99_H1_beta-x_alfa_H1_beta)

#Uthoff's S1
S1_H1_beta[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_beta_varijacioni[n1:n2])
              /(H_Utoff(n1,X_H1_beta_varijacioni[1:n1])
              +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_beta_varijacioni[n2:n])
              +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_beta_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####

```

```
sumaW_0.1_beta<-(sum(as.numeric(W_H1_beta)<alpha_0.05_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_beta)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_beta<-(sum(as.numeric(D_H1_beta)<alpha_0.05_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_beta)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_beta<-(sum(as.numeric(A_H1_beta)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_beta)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_beta<-(sum(T2_H1_beta<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1_beta>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_beta<-(sum(S2_H1_beta<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1_beta>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_beta<-(sum(T1_H1_beta<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1_beta>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_beta<-(sum(S1_H1_beta<alpha_0.05_H0_S1)
+sum(S1_H1_beta>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_beta<-(sum(as.numeric(W_H1_beta)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_beta)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_beta<-(sum(as.numeric(D_H1_beta)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_beta)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_beta<-(sum(as.numeric(A_H1_beta)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_beta)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_beta<-(sum(T2_H1_beta<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_beta>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_beta<-(sum(S2_H1_beta<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(T2_H1_beta>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_beta<-(sum(T1_H1_beta<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_beta>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_beta<-(sum(S1_H1_beta<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_beta>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_beta<-(sum(as.numeric(W_H1_beta)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_beta)>alpha_0.995_H0_W))/10000
```

```
sumaD_0.01_beta<-(sum(as.numeric(D_H1_beta)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_beta)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_beta<-(sum(as.numeric(A_H1_beta)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_beta)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_beta<-(sum(T2_H1_beta<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_beta>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_beta<-(sum(S2_H1_beta<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_beta>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_beta<-(sum(T1_H1_beta<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_beta>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_beta<-(sum(S1_H1_beta<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_beta>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#Studentova raspodela.
x_H1_studentova<-c()
W_H1_studentova<-c()
D_H1_studentova<-c()
A_H1_studentova<-c()
T1_H1_studentova<-c()
T2_H1_studentova<-c()
S1_H1_studentova<-c()
S2_H1_studentova<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_studentova<-rt(n,4)

#Shapiro test
W_H1_studentova<-c(W_H1_studentova.test(x_H1_studentova)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_studentova[i]<-lillie.test(x_H1_studentova)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_studentova[i]<-ad.test(x_H1_studentova)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_studentova<-quantile(x_H1_studentova,probs=0.5)
x_alfa_H1_studentova<-quantile(x_H1_studentova,probs=0.1)
x_0.99_H1_studentova<-quantile(x_H1_studentova,probs=0.99)
T2_H1_studentova[i]<-(x_0.5_H1_studentova-x_alfa_H1_studentova)
/(x_0.99_H1_studentova-x_alfa_H1_studentova)
```

```

X_H1_studentova_varijacioni<-x_H1_studentova[order(x_H1_studentova)]

#Uthoff's S2
S2_H1_studentova[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_studentova_varijacioni[n3:n])
      /(H_Utoff(n3,X_H1_studentova_varijacioni[1:n3])
      +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_studentova_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_studentova<-quantile(x_H1_studentova,probs=(1-beta))
x_beta_H1_studentova<-quantile(x_H1_studentova,probs=beta)
T1_H1_studentova[i]<-(x_0.75_H1_studentova-x_beta_H1_studentova)
      /(x_0.99_H1_studentova-x_alfa_H1_studentova)

#Uthoff's S1
S1_H1_studentova[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_studentova_varijacioni[n1:n2])
      /(H_Utoff(n1,X_H1_studentova_varijacioni[1:n1])
      +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_studentova_varijacioni[n2:n])
      +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_studentova_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_studentova<-(sum(as.numeric(W_H1_studentova)<alpha_0.05_H0_W)
      +sum(as.numeric(W_H1_studentova)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_studentova<-(sum(as.numeric(D_H1_studentova)<alpha_0.05_H0_D)
      +sum(as.numeric(D_H1_studentova)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_studentova<-(sum(as.numeric(A_H1_studentova)<alpha_0.05_H0_A)
      +sum(as.numeric(A_H1_studentova)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_studentova<-(sum(T2_H1_studentova<alpha_0.05_H0_T2)
      +sum(T2_H1_studentova>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_studentova<-(sum(S2_H1_studentova<alpha_0.05_H0_S2)
      +sum(S2_H1_studentova>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_studentova<-(sum(T1_H1_studentova<alpha_0.05_H0_T1)
      +sum(T1_H1_studentova>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_studentova<-(sum(S1_H1_studentova<alpha_0.05_H0_S1)
      +sum(S1_H1_studentova>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####

```

```
sumaW_0.05_studentova<-(sum(as.numeric(W_H1_studentova)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_studentova)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_studentova<-(sum(as.numeric(D_H1_studentova)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_studentova)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_studentova<-(sum(as.numeric(A_H1_studentova)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_studentova)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_studentova<-(sum(T2_H1_studentova<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_studentova>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_studentova<-(sum(S2_H1_studentova<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_studentova>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_studentova<-(sum(T1_H1_studentova<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_studentova>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_studentova<-(sum(S1_H1_studentova<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_studentova>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_studentova<-(sum(as.numeric(W_H1_studentova)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_studentova)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_studentova<-(sum(as.numeric(D_H1_studentova)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_studentova)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_studentova<-(sum(as.numeric(A_H1_studentova)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_studentova)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_studentova<-(sum(T2_H1_studentova<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_studentova>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_studentova<-(sum(S2_H1_studentova<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_studentova>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_studentova<-(sum(T1_H1_studentova<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_studentova>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_studentova<-(sum(S1_H1_studentova<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_studentova>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1: U(0,1)
x_H1_uniformna<-c()
```

```
W_H1_uniformna<-c()
D_H1_uniformna<-c()
A_H1_uniformna<-c()
T1_H1_uniformna<-c()
T2_H1_uniformna<-c()
S1_H1_uniformna<-c()
S2_H1_uniformna<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_uniformna<-runif(n,0,1)

#Shapiro test
W_H1_uniformna<-c(W_H1_uniformna,shapiro.test(x_H1_uniformna)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_uniformna[i]<-lillie.test(x_H1_uniformna)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_uniformna[i]<-ad.test(x_H1_uniformna)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_uniformna<-quantile(x_H1_uniformna,probs=0.5)
x_alfa_H1_uniformna<-quantile(x_H1_uniformna,probs=0.1)
x_0.99_H1_uniformna<-quantile(x_H1_uniformna,probs=0.99)
T2_H1_uniformna[i]<-(x_0.5_H1_uniformna-x_alfa_H1_uniformna)
                /(x_0.99_H1_uniformna-x_alfa_H1_uniformna)

X_H1_uniformna_varijacioni<-x_H1_uniformna[order(x_H1_uniformna)]

#Uthoff's S2
S2_H1_uniformna[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_uniformna_varijacioni[n3:n])
                /(H_Utoff(n3,X_H1_uniformna_varijacioni[1:n3])
                +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_uniformna_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_uniformna<-quantile(x_H1_uniformna,probs=1-beta)
x_beta_H1_uniformna<-quantile(x_H1_uniformna,probs=beta)
T1_H1_uniformna[i]<-(x_0.75_H1_uniformna-x_beta_H1_uniformna)
                /(x_0.99_H0-x_alfa_H1_uniformna)

#Uthoff's S1
S1_H1_uniformna[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_uniformna_varijacioni[n1:n2])
                /(H_Utoff(n1,X_H1_uniformna_varijacioni[1:n1])
                +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_uniformna_varijacioni[n2:n])
                +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_uniformna_varijacioni[n1:n2]))
}
```

```
##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_uniformna<-(sum(as.numeric(W_H1_uniformna)<alpha_0.05_H0_W)
      +sum(as.numeric(W_H1_uniformna)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_uniformna<-(sum(as.numeric(D_H1_uniformna)<alpha_0.05_H0_D)
      +sum(as.numeric(D_H1_uniformna)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_uniformna<-(sum(as.numeric(A_H1_uniformna)<alpha_0.05_H0_A)
      +sum(as.numeric(A_H1_uniformna)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_uniformna<-(sum(T2_H1_uniformna<alpha_0.05_H0_T2)
      +sum(T2_H1_uniformna>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_uniformna<-(sum(S2_H1_uniformna<alpha_0.05_H0_S2)
      +sum(S2_H1_uniformna>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_uniformna<-(sum(T1_H1_uniformna<alpha_0.05_H0_T1)
      +sum(T1_H1_uniformna>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_uniformna<-(sum(S1_H1_uniformna<alpha_0.05_H0_S1)
      +sum(S1_H1_uniformna>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_uniformna<-(sum(as.numeric(W_H1_uniformna)<alpha_0.025_H0_W)
      +sum(as.numeric(W_H1_uniformna)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_uniformna<-(sum(as.numeric(D_H1_uniformna)<alpha_0.025_H0_D)
      +sum(as.numeric(D_H1_uniformna)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_uniformna<-(sum(as.numeric(A_H1_uniformna)<alpha_0.025_H0_A)
      +sum(as.numeric(A_H1_uniformna)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_uniformna<-(sum(T2_H1_uniformna<alpha_0.025_H0_T2)
      +sum(T2_H1_uniformna>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_uniformna<-(sum(S2_H1_uniformna<alpha_0.025_H0_S2)
      +sum(S2_H1_uniformna>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_uniformna<-(sum(T1_H1_uniformna<alpha_0.025_H0_T1)
      +sum(T1_H1_uniformna>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_uniformna<-(sum(S1_H1_uniformna<alpha_0.025_H0_S1)
      +sum(S1_H1_uniformna>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_uniformna<-(sum(as.numeric(W_H1_uniformna)<alpha_0.005_H0_W)
```

```
+sum(as.numeric(W_H1_uniformna)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_uniformna<-(sum(as.numeric(D_H1_uniformna)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_uniformna)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_uniformna<-(sum(as.numeric(A_H1_uniformna)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_uniformna)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_uniformna<-(sum(T2_H1_uniformna<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_uniformna>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_uniformna<-(sum(S2_H1_uniformna<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_uniformna>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_uniformna<-(sum(T1_H1_uniformna<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_uniformna>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_uniformna<-(sum(S1_H1_uniformna<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_uniformna>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Kosijeva raspodela
x_H1_cauchy<-c()
W_H1_cauchy<-c()
D_H1_cauchy<-c()
A_H1_cauchy<-c()
T1_H1_cauchy<-c()
T2_H1_cauchy<-c()
S1_H1_cauchy<-c()
S2_H1_cauchy<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_cauchy<-rcauchy(n,0,1)

#Shapiro test
W_H1_cauchy<-c(W_H1_cauchy,shapiro.test(x_H1_cauchy)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_cauchy[i]<-lillie.test(x_H1_cauchy)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_cauchy[i]<-ad.test(x_H1_cauchy)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_cauchy<-quantile(x_H1_cauchy,probs=0.5)
x_alfa_H1_cauchy<-quantile(x_H1_cauchy,probs=0.1)
x_0.99_H1_cauchy<-quantile(x_H1_cauchy,probs=0.99)
T2_H1_cauchy[i]<-(x_0.5_H1_cauchy-x_alfa_H1_cauchy)
```



```

/(x_0.99_H1_cauchy-x_alfa_H1_cauchy)

X_H1_cauchy_varijacioni<-x_H1_cauchy[order(x_H1_cauchy)]

#Uthoff's S2
S2_H1_cauchy[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_cauchy_varijacioni[n3:n])
/(H_Utoff(n3,X_H1_cauchy_varijacioni[1:n3])
+H_Utoff(n-n3+1,X_H1_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_cauchy<-quantile(x_H1_cauchy,probs=1-beta)
x_beta_H1_cauchy<-quantile(x_H1_cauchy,probs=beta)
T1_H1_cauchy[i]<-(x_0.75_H1_cauchy-x_beta_H0)/(x_0.99_H1_cauchy-x_alfa_H0)

#Uthoff's S1
S1_H1_cauchy[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_cauchy_varijacioni[n1:n2])
/(H_Utoff(n1,X_H1_cauchy_varijacioni[1:n1])
+H_Utoff(n-n2+1,X_H1_cauchy_varijacioni[n2:n])
+H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_cauchy_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_cauchy<-(sum(as.numeric(W_H1_cauchy)<alpha_0.05_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_cauchy)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_cauchy<-(sum(as.numeric(D_H1_cauchy)<alpha_0.05_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_cauchy)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_cauchy<-(sum(as.numeric(A_H1_cauchy)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_cauchy)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_cauchy<-(sum(T2_H1_cauchy<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1_cauchy>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_cauchy<-(sum(S2_H1_cauchy<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1_cauchy>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_cauchy<-(sum(T1_H1_cauchy<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1_cauchy>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_cauchy<-(sum(S1_H1_cauchy<alpha_0.05_H0_S1)
+sum(S1_H1_cauchy>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_cauchy<-(sum(as.numeric(W_H1_cauchy)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_cauchy)>alpha_0.975_H0_W))/10000

```

```
sumaD_0.05_cauchy<-(sum(as.numeric(D_H1_cauchy)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_cauchy)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_cauchy<-(sum(as.numeric(A_H1_cauchy)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_cauchy)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_cauchy<-(sum(T2_H1_cauchy<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_cauchy>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_cauchy<-(sum(S2_H1_cauchy<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_cauchy>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_cauchy<-(sum(T1_H1_cauchy<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_cauchy>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_cauchy<-(sum(S1_H1_cauchy<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_cauchy>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_cauchy<-(sum(as.numeric(W_H1_cauchy)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_cauchy)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_cauchy<-(sum(as.numeric(D_H1_cauchy)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_cauchy)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_cauchy<-(sum(as.numeric(A_H1_cauchy)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_cauchy)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_cauchy<-(sum(T2_H1_cauchy<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_cauchy>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_cauchy<-(sum(S2_H1_cauchy<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_cauchy>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_cauchy<-(sum(T1_H1_cauchy<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_cauchy>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_cauchy<-(sum(S1_H1_cauchy<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_cauchy>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Logisticka raspodela
x_H1_logisticka<-c()
W_H1_logisticka<-c()
D_H1_logisticka<-c()
A_H1_logisticka<-c()
```

```

T1_H1_logistica<-c()
T2_H1_logistica<-c()
S1_H1_logistica<-c()
S2_H1_logistica<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_logistica<-rlogis(n,0,1)

#Shapiro test
W_H1_logistica<-c(W_H1_logistica,shapiro.test(x_H1_logistica)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_logistica[i]<-lillie.test(x_H1_logistica)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_logistica[i]<-ad.test(x_H1_logistica)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_logistica<-quantile(x_H1_logistica,probs=0.5)
x_alfa_H1_logistica<-quantile(x_H1_logistica,probs=0.1)
x_0.99_H1_logistica<-quantile(x_H1_logistica,probs=0.99)
T2_H1_logistica[i]<-(x_0.5_H1_logistica-x_alfa_H1_logistica)
                /(x_0.99_H1_logistica-x_alfa_H1_logistica)

X_H1_logistica_varijacioni<-x_H1_logistica[order(x_H1_logistica)]

#Uthoff's S2
S2_H1_logistica[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_logistica_varijacioni[n3:n])
                /(H_Utoff(n3,X_H1_logistica_varijacioni[1:n3])
                +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_logistica_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_logistica<-quantile(x_H1_logistica,probs=1-beta)
x_beta_H1_logistica<-quantile(x_H1_logistica,probs=beta)
T1_H1_logistica[i]<-(x_0.75_H1_logistica-x_beta_H1_logistica)
                /(x_0.99_H1_logistica-x_alfa_H1_logistica)

#Uthoff's S1
S1_H1_logistica[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_logistica_varijacioni[n1:n2])
                /(H_Utoff(n1,X_H1_logistica_varijacioni[1:n1])
                +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_logistica_varijacioni[n2:n])
                +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_logistica_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_logistica<-(sum(as.numeric(W_H1_logistica)<alpha_0.05_H0_W)
                +sum(as.numeric(W_H1_logistica)>alpha_0.95_H0_W))/10000

```

```
sumaD_0.1_logistica<-(sum(as.numeric(D_H1_logistica)<alpha_0.05_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_logistica)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_logistica<-(sum(as.numeric(A_H1_logistica)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_logistica)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_logistica<-(sum(T2_H1_logistica<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1_logistica>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_logistica<-(sum(S2_H1_logistica<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1_logistica>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_logistica<-(sum(T1_H1_logistica<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1_logistica>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_logistica<-(sum(S1_H1_logistica<alpha_0.05_H0_S1)
+sum(S1_H1_logistica>alpha_0.95_H0_S1))/1000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_logistica<-(sum(as.numeric(W_H1_logistica)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_logistica)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_logistica<-(sum(as.numeric(D_H1_logistica)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_logistica)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_logistica<-(sum(as.numeric(A_H1_logistica)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_logistica)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_logistica<-(sum(T2_H1_logistica<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_logistica>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_logistica<-(sum(S2_H1_logistica<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_logistica>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_logistica<-(sum(T1_H1_logistica<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_logistica>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_logistica<-(sum(S1_H1_logistica<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_logistica>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_logistica<-(sum(as.numeric(W_H1_logistica)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_logistica)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_logistica<-(sum(as.numeric(D_H1_logistica)<alpha_0.005_H0_D)
```

```

+sum(as.numeric(D_H1_logisticka)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_logisticka<-(sum(as.numeric(A_H1_logisticka)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_logisticka)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_logisticka<-(sum(T2_H1_logisticka<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_logisticka>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_logisticka<-(sum(S2_H1_logisticka<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_logisticka>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_logisticka<-(sum(T1_H1_logisticka<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_logisticka>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_logisticka<-(sum(S1_H1_logisticka<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_logisticka>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Gama raspodela
x_H1_gama<-c()
W_H1_gama<-c()
D_H1_gama<-c()
A_H1_gama<-c()
T1_H1_gama<-c()
T2_H1_gama<-c()
S1_H1_gama<-c()
S2_H1_gama<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_gama<-rgamma(n,1)

#Shapiro test
W_H1_gama<-c(W_H1_gama,shapiro.test(x_H1_gama)$statistic)

#Liliforov test
D_H1_gama[i]<-lillie.test(x_H1_gama)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_gama[i]<-ad.test(x_H1_gama)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_gama<-quantile(x_H1_gama,probs=0.5)
x_alfa_H1_gama<-quantile(x_H1_gama,probs=0.1)
x_0.99_H1_gama<-quantile(x_H1_gama,probs=0.99)
T2_H1_gama[i]<-(x_0.5_H1_gama-x_alfa_H1_gama)
/(x_0.99_H1_gama-x_alfa_H1_gama)

X_H1_gama_varijacioni<-x_H1_gama[order(x_H1_gama)]

```

```

#Uthoff's S2
S2_H1_gama[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_gama_varijacioni[n3:n])
              /(H_Utoff(n3,X_H1_gama_varijacioni[1:n3])
              +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_gama_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_gama<-quantile(x_H1_gama,probs=1-beta)
x_beta_H1_gama<-quantile(x_H1_gama,probs=beta)
T1_H1_gama[i]<-(x_0.75_H1_gama-x_beta_H1_gama)
              /(x_0.99_H1_gama-x_alfa_H1_gama)

#Uthoff's S1
S1_H1_gama[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_gama_varijacioni[n1:n2])
              /(H_Utoff(n1,X_H1_gama_varijacioni[1:n1])
              +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_gama_varijacioni[n2:n])
              +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_gama_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_gama<-(sum(as.numeric(W_H1_gama)<alpha_0.05_H0_W)
                 +sum(as.numeric(W_H1_gama)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_gama<-(sum(as.numeric(D_H1_gama)<alpha_0.05_H0_D)
                 +sum(as.numeric(D_H1_gama)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_gama<-(sum(as.numeric(A_H1_gama)<alpha_0.05_H0_A)
                 +sum(as.numeric(A_H1_gama)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_gama<-(sum(T2_H1_gama<alpha_0.05_H0_T2)
                 +sum(T2_H1_gama>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_gama<-(sum(S2_H1_gama<alpha_0.05_H0_S2)
                 +sum(S2_H1_gama>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_gama<-(sum(T1_H1_gama<alpha_0.05_H0_T1)
                 +sum(T1_H1_gama>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_gama<-(sum(S1_H1_gama<alpha_0.05_H0_S1)
                 +sum(S1_H1_gama>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_gama<-(sum(as.numeric(W_H1_gama)<alpha_0.025_H0_W)
                 +sum(as.numeric(W_H1_gama)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_gama<-(sum(as.numeric(D_H1_gama)<alpha_0.025_H0_D)

```

```
+sum(as.numeric(D_H1_gama)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_gama<-(sum(as.numeric(A_H1_gama)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_gama)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_gama<-(sum(T2_H1_gama<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_gama>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_gama<-(sum(S2_H1_gama<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_gama>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_gama<-(sum(T1_H1_gama<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_gama>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_gama<-(sum(S1_H1_gama<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_gama>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_gama<-(sum(as.numeric(W_H1_gama)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_gama)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_gama<-(sum(as.numeric(D_H1_gama)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_gama)>alpha_0.995_H0_D))/10000

sumaA_0.01_gama<-(sum(as.numeric(A_H1_gama)<alpha_0.005_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_gama)>alpha_0.995_H0_A))/10000

sumaT2_0.01_gama<-(sum(T2_H1_gama<alpha_0.005_H0_T2)
+sum(T2_H1_gama>alpha_0.995_H0_T2))/10000

sumaS2_0.01_gama<-(sum(S2_H1_gama<alpha_0.005_H0_S2)
+sum(S2_H1_gama>alpha_0.995_H0_S2))/10000

sumaT1_0.01_gama<-(sum(T1_H1_gama<alpha_0.005_H0_T1)
+sum(T1_H1_gama>alpha_0.995_H0_T1))/10000

sumaS1_0.01_gama<-(sum(S1_H1_gama<alpha_0.005_H0_S1)
+sum(S1_H1_gama>alpha_0.995_H0_S1))/10000

#H1. Vejbuloва raspodela W(5)
x_H1_weibull<-c()
W_H1_weibull<-c()
D_H1_weibull<-c()
A_H1_weibull<-c()
T1_H1_weibull<-c()
T2_H1_weibull<-c()
```

```

S1_H1_weibull<-c()
S2_H1_weibull<-c()
for (i in 1:10000){
x_H1_weibull<-rweibull(n,1,1.5)

#Shapiro test
W_H1_weibull[i]<-shapiro.test(x_H1_weibull)$statistic

#Liliforov test
D_H1_weibull[i]<-lillie.test(x_H1_weibull)$statistic

#Anderson- Darling test
A_H1_weibull[i]<-ad.test(x_H1_weibull)$statistic

#Uthoff's T2
x_0.5_H1_weibull<-quantile(x_H1_weibull,probs=0.5)
x_alfa_H1_weibull<-quantile(x_H1_weibull,probs=0.1)
x_0.99_H1_weibull<-quantile(x_H1_weibull,probs=0.99)
T2_H1_weibull[i]<-(x_0.5_H1_weibull-x_alfa_H1_weibull)
                /(x_0.99_H1_weibull-x_alfa_H1_weibull)

X_H1_weibull_varijacioni<-x_H1_weibull[order(x_H1_weibull)]

#Uthoff's S2
S2_H1_weibull[i]<-H_Utoff(n-n3+1,X_H1_weibull_varijacioni[n3:n])
                /(H_Utoff(n3,X_H1_weibull_varijacioni[1:n3])
                +H_Utoff(n-n3+1,X_H1_weibull_varijacioni[n3:n]))

#Uthoff's T1
x_0.75_H1_weibull<-quantile(x_H1_weibull,probs=1-beta)
x_beta_H1_weibull<-quantile(x_H1_weibull,probs=beta)
T1_H1_weibull[i]<-(x_0.75_H1_weibull-x_beta_H1_weibull)
                /(x_0.99_H1_weibull-x_alfa_H1_weibull)

#Uthoff's S1
S1_H1_weibull[i]<-H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_weibull_varijacioni[n1:n2])
                /(H_Utoff(n1,X_H1_weibull_varijacioni[1:n1])
                +H_Utoff(n-n2+1,X_H1_weibull_varijacioni[n2:n])
                +H_Utoff(n2-n1+1,X_H1_weibull_varijacioni[n1:n2]))
}

##### alpha=0.1 #####
sumaW_0.1_weibull<-(sum(as.numeric(W_H1_weibull)<alpha_0.05_H0_W)
                +sum(as.numeric(W_H1_weibull)>alpha_0.95_H0_W))/10000

sumaD_0.1_weibull<-(sum(as.numeric(D_H1_weibull)<alpha_0.05_H0_D)

```



```
+sum(as.numeric(D_H1_weibull)>alpha_0.95_H0_D))/10000

sumaA_0.1_weibull<-(sum(as.numeric(A_H1_weibull)<alpha_0.05_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_weibull)>alpha_0.95_H0_A))/10000

sumaT2_0.1_weibull<-(sum(T2_H1_weibull<alpha_0.05_H0_T2)
+sum(T2_H1_weibull>alpha_0.95_H0_T2))/10000

sumaS2_0.1_weibull<-(sum(S2_H1_weibull<alpha_0.05_H0_S2)
+sum(S2_H1_weibull>alpha_0.95_H0_S2))/10000

sumaT1_0.1_weibull<-(sum(T1_H1_weibull<alpha_0.05_H0_T1)
+sum(T1_H1_weibull>alpha_0.95_H0_T1))/10000

sumaS1_0.1_weibull<-(sum(S1_H1_weibull<alpha_0.05_H0_S1)
+sum(S1_H1_weibull>alpha_0.95_H0_S1))/10000

##### alpha=0.05 #####
sumaW_0.05_weibull<-(sum(as.numeric(W_H1_weibull)<alpha_0.025_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_weibull)>alpha_0.975_H0_W))/10000

sumaD_0.05_weibull<-(sum(as.numeric(D_H1_weibull)<alpha_0.025_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_weibull)>alpha_0.975_H0_D))/10000

sumaA_0.05_weibull<-(sum(as.numeric(A_H1_weibull)<alpha_0.025_H0_A)
+sum(as.numeric(A_H1_weibull)>alpha_0.975_H0_A))/10000

sumaT2_0.05_weibull<-(sum(T2_H1_weibull<alpha_0.025_H0_T2)
+sum(T2_H1_weibull>alpha_0.975_H0_T2))/10000

sumaS2_0.05_weibull<-(sum(S2_H1_weibull<alpha_0.025_H0_S2)
+sum(S2_H1_weibull>alpha_0.975_H0_S2))/10000

sumaT1_0.05_weibull<-(sum(T1_H1_weibull<alpha_0.025_H0_T1)
+sum(T1_H1_weibull>alpha_0.975_H0_T1))/10000

sumaS1_0.05_weibull<-(sum(S1_H1_weibull<alpha_0.025_H0_S1)
+sum(S1_H1_weibull>alpha_0.975_H0_S1))/10000

##### alpha=0.01 #####
sumaW_0.01_weibull<-(sum(as.numeric(W_H1_weibull)<alpha_0.005_H0_W)
+sum(as.numeric(W_H1_weibull)>alpha_0.995_H0_W))/10000

sumaD_0.01_weibull<-(sum(as.numeric(D_H1_weibull)<alpha_0.005_H0_D)
+sum(as.numeric(D_H1_weibull)>alpha_0.995_H0_D))/10000
```

```
sumaA_0.01_weibull<-(sum(as.numeric(A_H1_weibull)<alpha_0.005_H0_A)  
+sum(as.numeric(A_H1_weibull)>alpha_0.995_H0_A))/10000
```

```
sumaT2_0.01_weibull<-(sum(T2_H1_weibull<alpha_0.005_H0_T2)  
+sum(T2_H1_weibull>alpha_0.995_H0_T2))/10000
```

```
sumaS2_0.01_weibull<-(sum(S2_H1_weibull<alpha_0.005_H0_S2)  
+sum(S2_H1_weibull>alpha_0.995_H0_S2))/10000
```

```
sumaT1_0.01_weibull<-(sum(T1_H1_weibull<alpha_0.005_H0_T1)  
+sum(T1_H1_weibull>alpha_0.995_H0_T1))/10000
```

```
sumaS1_0.01_weibull<-(sum(S1_H1_weibull<alpha_0.005_H0_S1)  
+sum(S1_H1_weibull>alpha_0.995_H0_S1))/10000
```

Глава 6

ТАБЕЛЕ

n	0.1	0.075	0.05	0.025	0.01
10	2.03	2.1	2.18	2.29	2.42
20	2.38	2.46	2.56	2.71	2.88
30	0	0	2.75	2.91	999
40	0	0	2.87	3.04	999
60	0	0	3.03	3.2	999
70	0	0	3.09	3.26	999
80	0	0	3.14	3.31	999
90	0	0	3.18	3.35	999
100	0	0	3.21	3.38	999

Табела 6.1: Критичне вредности за Крамер-фон Мисесов тест

	90%	95%	97.50%	99%
A^{2*}	0.656	0.787	0.918	1.092
W^{2*}	0.104	0.126	0.148	0.178

Табела 6.2: Критичне вредности за Андерсон и Дарлинггов тест и Крамер-фон Мисесов тест

Где је:

- A^{2*} модификација Андерсоновог и Дарлингговог теста.
- W^{2*} модификација Крамер-фон Мисес теста .

n	0.50%	1%	2.50%	5%	10%
10	0.607	0.633	0.663	0.689	0.716
20	0.663	0.677	0.7	0.718	0.738
50	0.714	0.721	0.736	0.746	0.759
100	0.74	0.745	0.754	0.762	0.771
250	0.762	0.766	0.771	0.775	0.78
500	0.773	0.775	0.779	0.782	0.786
n	90%	95%	97.50%	99%	99.50%
10	0.88	0.9	0.917	0.935	0.916
20	0.855	0.869	0.88	0.803	0.901
50	0.835	0.845	0.853	0.861	0.868
100	0.825	0.832	0.838	0.845	0.849
250	0.815	0.819	0.823	0.827	0.831
500	0.81	0.813	0.816	0.819	0.821

Табела 6.3: Критичне вредности за Грубсов тест

$\frac{\alpha}{n}$	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20
4	0.417	0.381	0.352	0.319	0.300
5	0.405	0.337	0.315	0.299	0.285
6	0.364	0.319	0.294	0.277	0.265
7	0.348	0.300	0.276	0.258	0.247
8	0.331	0.285	0.261	0.233	0.223
9	0.311	0.271	0.249	0.233	0.23
10	0.294	0.258	0.239	0.224	0.215
11	0.284	0.249	0.230	0.217	0.206
12	0.275	0.242	0.223	0.212	0.119
13	0.268	0.234	0.214	0.202	0.190
14	0.261	0.227	0.207	0.194	0.183
15	0.257	0.220	0.201	0.187	0.177
16	0.250	0.213	0.195	0.182	0.173
17	0.245	0.206	0.189	0.177	0.169
18	0.239	0.200	0.184	0.173	0.166
19	0.235	0.195	0.179	0.169	0.163
20	0.231	0.190	0.174	0.166	0.160
25	0.203	0.180	0.165	0.153	0.149
30	0.187	0.161	0.144	0.136	0.131
преко 30	1.031	0.886	0.805	0.768	0.736
	\sqrt{n}	\sqrt{n}	\sqrt{n}	\sqrt{n}	\sqrt{n}

Табела 6.4: Критичне вредности за Лилифорсов тест

Библиографија

- [1] Geary, R.C. (1935). The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality. *Biometrika* 27.
- [2] D'Agostino, R.B., and Pearson, E.S. (1973). Tests for departure from normality. Empirical results for the distributions of b_2 and $\sqrt{b_1}$. *Biometrika* 60
- [3] Јевремовић, В. (2009). Вероватноћа и статистика. Београд: Математички факултет.
- [4] Меркле, М. (2010). Вероватноћа и статистика. Београд: Академска мисао.
- [5] Стојановић, С. М. (1980). Математичка статистика. Београд: Научна књига.
- [6] Shapiro, S.S., and Francia, R.S. (1972). Approximate analysis of variance test for normality. *Journal of the American Statistical Association* 67.B11
- [7] Shapiro, S.S., and Wilk, M.B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika* 5.
- [8] Тодоровић, С. (2015), Истраживање разумевања основних појмова дескриптивне статистике код ученика основних школа методичке импликације, мастер рад.
- [9] Thode, Jr., H.C. (1985). Power of absolute moment tests against symmetric non-normal alternatives. Ph.D. dissertation, University Microfilms, Ann Arbor MI.
- [10] Uthoff, V.A. (1968). Some scale and invariant tests for distributional assumptions. Ph.D. dissertation, University Microfilms, Ann Arbor MI.D13
- [11] Henry C. Thode, J. (2002). Testing for normality. New York: MARCEL DEKKER, INC.

Биографија

Рођена 14.11.1989. године у Јагодини. Основу школу завршила у Великом Поповићу. Завршила гимназију „Светозар Марковић“, Јагодини. 2011. године дипломирала на Математичком факултету у Крагујевцу. 2014. године дипломирала на Математичком факултету у Београду, смер: статистика, актуарска и финансијска математика. Запослена у Републичком заводу за статистику, Сектор за индикаторе одрживог развоја и Анкета о приходима и условима живота.