UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

JEDNODIMENZIONO SLUČAJNO LUTANJE I UOPŠTENJA

Student
Marko Krstić 1113/2013

Mentor
Dr Jelena Jocković

Sadržaj

Uvod

U ovom radu biće razmatrano jednodimenzionalno slučajno lutanje kao specijalan slučaj procesa Markova. Slučajno lutanje je jedan od osnovnih pojmova u teoriji slučajnih procesa. Značaj ovoga modela ogleda se u velikom broju neočekivanih rezultata koje dobijamo prilikom njegovog izučavanja, ali i u činjenici da se slučajno lutanje nalazi u osnovi Braunovog kretanja, difuzne teorije, Itove analize… Zbog svega toga slučajno lutanje ima brojne primene u biologiji, fizici, ekonomiji, finansijama…

Jednodimenzionalno slučajno lutanje je proces koji se može opisati na sledeći način: čestica se kreće po realnoj pravoj sa celobrojnim koordinatama i u jedinici vremena pravi jedinični korak u pozitivnom ili negativnom smeru sa datim verovatnoćama. Postoje brojna uopštenja kao što su višedimenzionalno slučajno lutanje, slučajno lutanje sa pozitivnim verovatnoćama ostajanja u istoj tački, slučajno lutanje po grafu, itd.

U prvoj glavi rada, naslovljenoj „Slučajni procesi-osnovni pojmovi”, biće iznesene neke osnovne definicije vezane za pojam slučajnog procesa, zatim ćemo reći nešto o procesima sa nezavisnim priraštajima, te nešto o podeli ovih procesa, čiji je specijalni slučaj slučajno lutanje.

Druga glava počinje uvođenjem Markovljevih lanaca, a zatim i uvođenjem slučajnog lutanja kao lanca Markova. Ovde ćemo navesti neke varijacije prilikom definisanja slučajnog lutanja, reći nešto više o njegovoj primeni i dati nekoliko primera koji za cilj imaju približavanje pojma slučajnog lutanja. Nakon toga biće definisane neke karakteristike koje su nam od značaja prilikom analiziranja slučajnih procesa kao što su povratna i prolazna stanja, dostižnost stanja, period stanja... Nakon definisanja svakog od ovih pojmova pokazaćemo njihovu primenu na primeru slučajnog lutanja, nakon toga pokazaćemo kako se analizom prvog koraka rešavaju problemi vezani za slučajno lutanje kao što je da kockar zaradi A novčića pre nego sto izgubi B novčića i očekivano vreme trajanja ovog slučajnog lutanja.

Treća glava posmatra slučajno lutanje kao martingal. Na početku glave izložena su neka od osnovnih svojstava uslovnog matematičkog očekivanja, koja su potrebna iz razloga što se uslovno matematičko očekivanje pojavljuje kako u samoj definiciji martingala, tako i u teoremama i primerima koji su vezani za ovaj pojam. Na kraju ovog poglavlja izložen je princip refleksije koji je propraćen nekim važnijim posledicama i jednim primerom primene.

U četvrtoj glavi izložena su još neka svojstva slučajnog lutanja. Prvo se bavimo pitanjem koliko puta će u n rundi, igrač koji igra igru na sreću koja se može modelovati slučajnim lutanjem sa jednakim verovatnoćama gubitka i dobitka ,,biti u plusu’’. Ovde dolazimo do, pomalo iznenađujućeg, zaključka da je verovatnoća da igrač skoro nikada ne bude ,,u plusu“ ili da igrač skoro stalno bude ,,u plusu“ veća od verovatnoće da igrač bude ,,u plusu“ u $\frac{n}{2}$ rundi. U drugom delu ove glave bavimo se problemom glasačkih listića. Problem glasačkih listića se može opisati na sledeći način: Neka na izborima učestvuju dva kandidata, i neka nakon prebrojanih $n = p + q$ listića prvi kandidat ima p, a drugi kandidat q glasova, gde je $p > q$. Kolika je verovatnoća da će prvi kandidat voditi tokom celog prebrojavanja glasova?

U petoj glavi bavimo se konkretnom primenom slučajnog lutanja u finansijskoj matematici. Videćemo kako se ovaj pojam može primeniti na modelovanje cena opcija. Kako je za modelovanje cena opcija potrebno određeno poznavanje finansijske matematike, to deo ove glave sadrži i kratak uvod u finansijsku matematiku, gde su izloženi pojmovi i stavovi koji se koriste pri konstrukciji binomnog modela. Prvo ćemo navesti šta su finansijska sredstva i dati neke njihove podele, nakon toga ćemo preći na opcije i njihove osobine. Kamatne stope i vrednosti novca u zavisnosti od vremena su takođe značajni faktori prilikom modelovanja vrednosti opcija, tako da je toj temi posvećeno treće poglavlje ove glave. Najzad prelazimo na sam binomni model, u narednim poglavljima prvo ćemo videti kako se pomoću binomnog modela sa jednim korakom modeluju opcije, a nakon toga i kako izgleda binomni model sa više koraka.

Slučajni procesi – osnovni pojmovi

Ova glava ima uvodni karakter. Slučajno lutanje je slučajni proces sa nezavisnim priraštajima. U ovoj glavi nećemo dati definiciju slučajnog lutanja, ali ćemo dati definiciju i primere slučajnog procesa, procesa sa nezavisnim priraštajima i definisati neke druge, osnovne, pojmove vezane za slučajne procese. Mnogi teorijski i praktični problemi nameću potrebu da se razmatraju nizovi ili, opštije, beskonačne familije zavisnih slučajnih veličina, time se upravo bavi teorija slučajnih procesa.

Primer 1.1: Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih veličina i neka je $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, n \geq 1$ niz parcijalnih zbirova. Jasno je da su članovi niza (S_n) zavisne slučajne veličine. U vezi sa ovim nizom primetimo sledeće: Ako su $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ prirodni brojevi, onda su slučajne veličine $S_{t_1} - S_{s_1}$ i $S_{t_2} - S_{s_2}$ nezavisne, tj. priraštaji zbira na intervalima $(s_1, t_1]$ i $(s_2, t_2]$ su nezavisne slučajne veličine. Ako slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots$ uzimaju, na primer, vrednosti u skupu celih brojeva sa verovatnoćom 1, onda su takvi i svi članovi niza (S_n). Ako su slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots$ apsolutno neprekidne slučajne veličine, onda su takvi i parcijalni zbirovi.

Primer 1.2: Proučava se neka fizička veličina koja se menja tokom vremena, na primer, temperatura vazduha na određenom mestu. Vrednost te veličine u trenutku t je slučajna veličina $X(t)$, pa se ovde prirodno pojavljuje familija slučajnih veličina $\{X(t), t \geq 0\}$ sa apsolutno neprekidnim raspodelama.

Primer 1.3: Broj isplata odšteta koje tokom vremena, počinjući od nekog trenutka, isplaćuje osiguravajuće društvo opisuje se familijom slučajnih veličina $\{N(t), t \geq 0\}$, koje zavise od parametra $t \in [0, +\infty)$. Pri tome, svaka slučajna veličina $X(t)$, koja predstavlja broj isplaćenih odšteta do trenutka t, uzima vrednosti u skupu nenegativnih celih brojeva.

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća i $(S, \mathcal{B})$ merljiv prostor. Funkcija $X: \Omega \to S$, koja je merljiva u odnosu na sigma algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, u smislu da za svaki skup $B \in \mathcal{B}$ važi $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ zove se **slučajni element** u prostoru S. Raspodela verovatnoća slučajnog elementa $X: \Omega \to S$ je verovatnosna mera $P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, koja je data sa $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ za $B \in \mathcal{B}$. Prostor $(S, \mathcal{B})$ zove se **prostor vrednosti slučajnog elementa** X ili **fazni prostor**.

U radu ćemo razmatrati familiju slučajnih elemenata $\{X_t, t \in T\}$, gde je T beskonačan skup, i pri čemu su svi slučajni elementi ove familije definisani na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a za svako $t \in T$ slučajni element X_t uzima vrednosti u nekom merljivom prostoru $(S_t, \mathcal{B}_t)$. Za svako $t \in T$ funkcija $X_t : \Omega \to S_t$ je merljiva u odnosu na σ-algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}_t$, u smislu da za skup $B \in \mathcal{B}_t$ važi $X_t^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Moguće je da za sve vrednosti t merljiv prostor $(S_t, \mathcal{B}_t)$ bude isti, na primer $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Definicija 1.1: Familija slučajnih elemenata $\{X_t, t \in T\}$ definisanih na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, gde je T beskonačan skup, zove se **slučajna funkcija**.

Skup T iz definicije 1.1 zove se **parametarski skup**. Ako je $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $T = [0, +\infty)$ ili $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, onda se parameter $t \in T$ najčešće interpretira kao vreme, a slučajna funkcija $\{X_t, t \in T\}$ zove se **slučajan proces sa neprekidnim vremenom**. Ako je $T \subset \mathbb{Z}$, gde je $\mathbb{Z}$ skup celih brojeva, onda se slučajna funkcija $\{X_t, t \in T\}$ zove **slučajni proces sa diskretnim vremenom** ili **slučajni niz**. Ako je $T \subset \mathbb{R}^d$, gde je $d \geq 2$, onda se slučajna funkcija $\{X_t, t \in T\}$ zove **slučajno polje**.

Termin slučajan proces može se koristiti i za proizvoljnu slučajnu funkciju, tj. pri proizvoljnom parametarskom prostoru T. Ako je $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ prostor vrednosti za sve $X_t, t \in T$, onda se $\{X_t, t \in T\}$ zove realan slučajan proces.

Svojstva slučajnih procesa bitno zavise od strukture parametarskog skupa T i od prostora $(S_t, B_t)_{t\in T}$, u kojima slučajni elementi X_t uzimaju vrednosti.

Neka je $\{X_t, t \in T\}$ realan slučajan proces definisan na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Za svaki element $\omega \in \Omega$, označimo sa $X_t(\omega)$ vrednost slučajne veličine X_t u tački ω.

Definicija 1.2: Pri fiksiranom $\omega \in \Omega$ funkcija $X_t(\omega)$, $t \in T$, zove se **trajektorija slučajnog procesa** $\{X_t, t \in T\}$.

Prema tome trajektorija $X_t(\omega), t \in T$, realnog slučajnog procesa je konkretna funkcija koja skup T preslikava u skup realnih brojeva, tj. element skupa $\mathbb{R}^T$.

Moguće je razmatrati i vektorski slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$. On se određuje familijom slučajnih vektora

$$X_t = \left(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}\right): \Omega \to \mathbb{R}^m, t \in T, m \geq 2$$

Koji su definisani na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, pri čemu pretpostavljamo da je T beskonačan skup. U zavisnosti od toga šta je skup T (posebno interesantni slučajevi $T \subset \mathbb{R}$ i $T \subset \mathbb{Z}$), uvodi se slična klasifikacija i terminologija za slučajne vektore, kao što je uvedena za slučajne procese.

Procesi sa nezavisnim priraštajima

Važna klasa slučajnih procesa, koja se kod procesa sa diskretnim parametrom pojavljuje u vezi sa sumiranjem nezavisnih slučajnih veličina, jeste klasa procesa sa nezavisnim priraštajima. Formalna definicija za realne slučajne procese sa neprekidnim parametrom je sledeća:

Definicija 1.3: Realan slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ zove se **proces sa nezavisnim priraštajima**, ako su za svaki prirodan broj n i proizvoljne $t_0, t_1, \dots, t_n$, pri čemu je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, slučajne veličine $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezavisne.

Definicija procesa sa nezavisnim priraštajima se prirodno može proširiti i na procese sa diskretnim parametrom. Za slučajni niz $(X_t)_{t\in N_0}$, gde je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, kažemo da ima nezavisne priraštaje ako za svaki prirodan broj n i nenegativne cele brojeve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, slučajne veličine $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne.

Dva vrlo važna procesa sa nezavisnim priraštajima, koji se iz mnogih razloga smatraju osnovnim u teoriji slučajnih procesa, jesu Puasonov[1] i Vinerov[2] proces . Puasonov proces koristi se kao osnovni model u teoriji masovnog opsluživanja, aktuarskoj matematici, itd. Vinerov proces se posebno koristi u modeliranju vremenskih serija u finansijskoj matematici.

Definicija 1.4: Slučajni proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je **Puasonov proces**, ako ima sledeća svojstva:

1. $N(0) = 0$ s.s.
2. Slučajni proces N ima nezavisne priraštaje, tj. za sve prirodne brojeve n i sve realne brojeve $t_1, \dots, t_n$ gde je $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, nezavisne su sledeće slučajne veličine:

$$N(t_k) - N(t_{k-1}), \ \ k = 1,2, \dots, n$$

3. Postoji neopadajuća funkcija μ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, koja je neprekidna s desne strane, $\mu(0) = 0$ i takva da za proizvoljne $0 < s < t$ važi $N(t) - N(s) \in P(\mu(t) - \mu(s))$. Funkcija μ zove se funkcija srednje vrednosti Puasonovog procesa N.
4. Sa verovatnoćom 1 trajektorije $\{N(t, \omega), t \geq 0\}$ slučajnog procesa N neprekidne su sa desne strane za $t \geq 0$ i imaju levu graničnu vrednost za $t > 0$.

Definicija 1.5: Slučajni proces $\{W(t), t \geq 0\}$ definisan na nekom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **Vinerov proces** ili **Braunovo[3] kretanje**, ako važi:

1. $W(0) = 0$ s.s.
2. Slučajan proces W ima nezavisne priraštaje.
3. Za sve realne brojeve $0 \leq s < t < +\infty$ važi $W(t) - W(s) \in \mathcal{N}(0, t - s)$, tj. slučajna veličina $W(t) - W(s)$ ima normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem 0 i disperzijom $t - s$.

U ovoj glavi predstavili smo neke osnovne pojmove vezane za slučajne procese, sa posebnim osvrtom na slučajne procese sa nezavisnim priraštajima. Cilj ove glave bio je teorijski uvod za definisanje slučajnog lutanja, tako da su pomenute samo osnovni pojmovi vezani za slučajne procese, više o ovoj temi može se naći u literaturi [5], [2]. Za pisanje ove glave korišćena je literatura [5].

[1] Siméon Denis Poisson (1781 –1840) – francuski matematičar
[2] Norbert Wiener (1894 –1964) – američki matematičar
[3] Robert Brown (1773 – 1858) – škotski botaničar

Slučajno lutanje kao lanac Markova

U ovoj glavi opisaćemo slučajno lutanje kao lanac Markova. Nakon prve glave u kojoj smo uveli pojam slučajnog procesa i procesa sa nezavisnim priraštajima, sada nam pre uvođenja slučajnog lutanja kao lanca Markova preostaje definisanje Markovljevih lanaca. U prva dva poglavlja ove glave definisaćemo pojam Markovljevih lanaca i predstaviti neke karakteristike ovih lanaca. Treće poglavlje uvodi pojam slučajnog lutanja kao lanca Markova, pored definicije slučajnog lutanja date su i neke varijacije definicija, jer u zavisnosti od problema koji rešavamo pomoću slučajnog lutanja često se razlikuju i modeli koji te probleme opisuju, pa stoga postoji puno varijacija prilikom definisanja slučajnog lutanja. Prilikom posmatranja nekog slučajnog procesa često se pitamo: ,,kolika je verovatnoća da proces koji se sada nalazi u nekom stanju nekada u budućnosti ponovo dođe u to stanje?"; ,, da li proces koji se sada nalazi u stanju i može nekada preći u stanje j?"... Na ova pitanja dali smo odgovor u četvrtom poglavlju ove glave, kako generalno za slučajne procese, tako i kroz primere za slučajno lutanje. Poslednje poglavlje ove glave nosi odgovor na pitanje: ,, koja je verovatnoća da igrač koji igra igru na sreću osvoji A novčića pre nego što izgubi B novčića?"

Markovljevi lanci

Pretpostavimo da razmatramo fizički sistem koji u diskretnim trenucima vremena, koje ćemo označiti sa 0, 1, 2, … , prelazi iz jednog stanja u drugo. Pretpostavimo takođe da je fazni prostor prebrojiv i da su njegovi elementi numerisani celim brojevima, tj. elementima skupa $\mathbb{Z}$. Neka je X_t stanje sistema u trenutku t, koje nastaje kao rezultat slučajnih promena stanja $X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_t \longrightarrow \cdots$.

Homogen lanac Markova[4] je slučajni proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, koji ima Markovljevo svojstvo:

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_{t+1} = j | \, X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i) \qquad (2.1)$$

Formalna definicija homogenog lanca Markova glasi:

Definicija 2.1: Slučajni niz $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ zove se **homogeni Markovljev lanac** sa faznim prostorom $\mathbb{Z}$, ako za svako $t \in \mathbb{N}_0$ i sve $i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}$ važi jednakost (2.1). Verovatnoća p_{ij} zove se **verovatnoća prelaska sistema** iz stanja i u stanje j, a matrica $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ zove se **matrica verovatnoća prelaska**.

Matrica verovatnoća prelaska ima sledeći oblik:

$$\boldsymbol{P} = \begin{Vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & p_{i4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{Vmatrix}$$

Matrica verovatnoće prelaska je stohastička, tj. ima svojstva:

[4] Андре́й Андре́евич Ма́рков (1856–1922) – ruski matematičar

$$p_{ij} \geq 0 \text{ za sve } i, j \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_j p_{ij} = 1 \text{ za svako } i \in \mathbb{Z}$$

Ako verovatnoća prelaska sistema iz stanja i u stanje j zavisi od trenutka t, onda se radi o nehomogenom lancu Markova, tada verovatnoću prelaska obeležavamo sledećom notacijom:

$$p_{ij}^{t,t+1} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) \tag{2.2}$$

Mi ćemo u radu, ukoliko se drugačije ne naglasi, koristiti homogene lance Markova i zvati ih kratko lanac Markova. U ovom slučaju $p_{ij}^{t,t+1} = p_{ij}$ ne zavisi od t, pa p_{ij} predstavlja verovatnoću da proces pređe iz stanja i u stanje j u jednom koraku.

Uvedimo još oznake verovatnoća početnih stanja, tj. za verovatnoće događaja da se sistem u početnom trenutku nalazi u nekom od stanja:

$$p_i^{(0)} = P(X_0 = i), \quad i \in \mathbb{Z}$$

I za ove verovatnoće očigledno važi jednakost $\sum_i p_i^{(0)} = 1$.

Primer 2.1: Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ lanac Markova. Kako izračunati $P(\mathrm{X}_0 = i_0, \dots, \mathrm{X}_n = i_n)$?

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})\ P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

Pa po definiciji Markovljevog procesa

$$P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = p_{i_{n-1} i_n}$$

Pa zamenom dobijamo

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_{n-1} i_n} P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1})$$

Dalje se indukcijom dobija

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_{n-1} i_n}\, p_{i_{n-2} i_{n-1}} \dots p_{i_0 i_1} p_i^{(0)}$$

Verovatnoće prelaska u n koraka

Pri razmatranju Markovljevih lanaca javlja se potreba i za razmatranjem verovatnoća prelaska iz jednog stanja u neko drugo stanje u većem broju koraka. Kako se potreba za računanjem ove verovatnoće javlja i prilikom izučavanja slučajnog lutanja u ovom poglavlju ćemo se pozabaviti time.

Definicija 2.2: Matrica $\boldsymbol{P}_n = [p_{ij}(n)]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ čiji su članovi određeni jednakostima:

$$p_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

zove se **matrica verovatnoće prelaska u $\boldsymbol{n}$ koraka**.

Očigledno je da važi $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}$. Za određivanje verovatnoća prelaska u većem broju koraka koristi se sledeća teorema:

Teorema 2.1: Za proizvoljne prirodne brojeve m i n važe sledeće **jednačine Čepmen-Kolmogorova**:

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n) \tag{2.3}$$

Važe i jednakosti $\boldsymbol{P}_{m+n} = \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{P}_n$ i $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}^n$, gde je $\boldsymbol{P}^n$ oznaka za n-ti stepen matrice $\boldsymbol{P}$.

Dokaz: Za proizvoljne događaje A, B, C važi jednakost:

$$P(AB|C) = P(A|BC)P(B|C).$$

Koristeći ovu jednakost i Markovljevo svojstvo dobijamo da za verovatnoću $p_{ij}(m+n)$ važe jednakosti:

$$p_{ij}(m+n) = P(X_{m+n} = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_{m+n} = j, X_m = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_{m+n} = j \mid X_m = k, X_0 = i)\, P(X_m = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_k P(X_{m+n} = j \mid X_m = k)\, P(X_m = k \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n)$$

Time je dokazana jednakost (2.3), a jednakosti $\boldsymbol{P}_{m+n} = \boldsymbol{P}_m \boldsymbol{P}_n$ i $\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}^n$ su jednostavne posledice.

■

Označimo $p_i^{(n)} = P(X_n = i)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada za proizvoljne prirodne brojeve m i n važi jednakost:

$$p_j^{(m+n)} = P(X_{m+n} = j) = \sum_i P(X_{m+n} = j, X_m = i)\, P(X_m = i)$$

$$= \sum_i p_i^{(m)} p_{ij}(n)$$

Slučajno lutanje kao lanac Markova

Razmotrimo **slučajno lutanje** čestice koja polazi iz tačke 0 i u jedinici vremena pravi jedinični korak u pozitivnom smeru sa verovatnoćom p i u negativnom smeru sa verovatnoćom $1-p$. Koraci u lutanju predstavljaju niz nezavisnih slučajnih veličina $X_1, X_2, \dots$ sa istom raspodelom verovatnoća:

$$P(X_k = 1) = p, \quad P(X_k = -1) = 1 - p$$

Položaj čestice posle n koraka je slučajna veličina $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, pri čemu je $S_0 = 0$ sa verovatnoćom 1. Niz $S_0, S_1, S_2, \dots$ je homogen Markovljev lanac. Verovatnoće prelaska određene su jednakostima:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & ako\ je\ j = i+1 \\ 1-p & ako\ je\ j = i-1 \\ 0 & ako\ je\ j \notin \{i-1, i+1\} \end{cases}$$

Početna raspodela verovatnoće po stanjima je data sa $p_0^{(0)} = 1$, $p_i^{(0)} = 0$ za $i \neq 0$.

Verovatnoća $p_{ij}(n)$ prelaska iz tačke i u tačku j u n koraka lako se određuje. Neka je čestica pri kretanju iz i do j napravila x koraka u pozitivnom smeru i y koraka u negativnom smeru. Tada je $x + y = n$ i $x - y = j - i$, odakle dobijamo da je $x = (n+j-i)/2$, $y = (n-j+i)/2$. Dakle broj $n+j-i$ mora biti paran. Za $p_{ij}(n)$ dobijamo: $p_{ij}(n) = 0$ ako je $n+j-i$ neparan broj, ako je $n+j-i$ paran:

$$p_{ij}(n) = \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} (1-p)^{(n-j+i)/2}$$

Postoje brojne varijacije definicija slučajnog lutanja koje se često koriste za definisanje modela pri opisivanju nekog prirodnog fenomena. Možemo na primer promeniti korak slučajnog lutanja pa reći da je:

$$P(X_k = u) = p, \quad P(X_k = -u) = 1 - p \ \ u \neq 0{,}1 \qquad (2.4)$$

Ovo slučajno lutanje se lako transformiše u slučajno lutanje kako smo ga mi definisali i zadržava većinu osobina koje naše slučajno lutanje ima. Još jedna od mogućnosti je da slučajno lutanje ima ograničen fazni prostor, tada govorimo o slučajnom lutanju sa jednom ili dve barijere. Barijere mogu biti, reflektujuće, apsorbujuće i delimično reflektujuće (kasnije će biti objašnjeno šta svaki od ovih termina predstavlja). Takođe možemo pretpostaviti da je Markovljev lanac S_n nehomogen, tada su verovatnoće prelaska date sa:

$$P(X_k = 1) = p_k, \quad P(X_k = -1) = 1 - p_k = q_k$$

Specijalan slučaj slučajnog lutanja je i slučajno lutanje sa pozitivnom verovatnoćom ostajanja u istom stanju. Ako se proces u trenutku n nalazi u stanju i, u trenutku $n+1$ proces se može naći u stanju $i-1, i+1$ ili ostati u stanju i.

Primer 2.2: Moguće je kombinovati ove osobine. Ako uzmemo da fazni prostor čine samo nenegativni prirodni brojevi, matrica verovatnoće prelaska nehomogenog slučajnog lutanja sa pozitivnom verovatnoćom ostajanja u istom stanju ima formu:

$$P = \begin{Vmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots & & & \\ & & \ddots & & & & 0 & \\ & & 0 & q_i & r_i & p_i & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & \end{Vmatrix} \quad (2.5)$$

Gde je $p_i > 0, q_i > 0, r_i > 0$ i $p_i + q_i + r_i = 1, i = 1,2, \dots$

$p_0 \geq 0, r_0 \geq 0, r_0 + p_0 = 1$. Ako je $S_n = i$, tada za $i \geq 1$ važi:

$$P(S_{n+1} = i + 1 | \, S_n = i) = p_i \, ; \, P(S_{n+1} = i - 1 | \, S_n = i) = q_i ; \, P(S_{n+1} = i | \, S_n = i) = r_i$$

Termin „slučajno lutanje” dobio je to ime jer podseća na kretanje čoveka koji se slučajno kreće jedan korak napred, odnosno jedan korak nazad.

Primer 2.3: Ovim procesom može se opisati bogatstvo igrača koji igra igru protiv beskonačno bogatog protivnika (kuće). Pretpostavimo da igrač A u početku ima bogatstvo k novčića, i neka je verovatnoća da u sledećem koraku osvaja novčić p_k, a verovatnoća da izgubi novčić $q_k = 1 - p_k (k \geq 1)$ (izbor igre može zavisiti od njegovog bogatstva u tom trenutku, pa zbog toga verovatnoće nisu jednake u svakom trenutku). Ovde je $r_0 = 1$ jer igrač kada izgubi sav novac ne može preći ni u jedno drugo stanje. Dakle proces $\{S_t, t \in \mathbb{N}_0\}$, gde S_t predstavlja bogatstvo igrača u trenutku t je slučajno lutanje. Ovaj proces je takođe poznat i kao „propast kockara”.

Najčešće se posmatra slučaj $p_k = p$, $q_k = 1 - p = q$, za sve $k \geq 1$ i $r_0 = 1$, odnosno kada igrač svaki put igra istu igru. Ako je $p > q$ kažemo da igrač A ima prednost. Ako je $p < q$ tada prednost ima kuća. Ako je $p_k = q_k = \frac{1}{2}$ kažemo da je igra fer.

Ako kuća (igrač B) takođe startuje sa ograničenim bogatstvom Y, dok igrač A ima ograničeno startno bogatstvo X (neka je $X + Y = a$), tada ponovo možemo razmatrati bogatstvo igrača A pomoću slučajnog lutanja S_n. Sada su moguća stanja u kojima se slučajni proces može naći $0,1, \dots, a$. Bogatstvo igrača B u trenutku n je $a - S_n$. Ako ostavimo mogućnost nerešenog ishoda, odnosno da u nekoj igri ni jedan igrač ne pobedi, tada matrica verovatnoće prelaska ima oblik:

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots & \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 & q_{a-1} & r_{a-1} & p_{a-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (2.6)$$

Dakle p_i predstavlja verovatnoću uvećanja bogatstva igrača A za 1 novčić, q_i predstavlja verovatnoću smanjenja bogatstva igrača A za jedan novčić, odnosno verovatnoću povećanja bogatstva igrača B za 1 novčić, dok r_i predstavlja verovatnoću nerešenog ishoda. Kažemo da je igrač A „propao” ukoliko je proces došao u stanje 0, odnosno da je igrač B propao ukoliko je proces došao u stanje a.

■

Slučajna lutanja nisu korisna samo prilikom simulacije kockanja, ona se, između ostalog, mogu primeniti i u fizičkim procesima, prilikom opisivanja difuznog kretanja čestice.

Prilikom kretanja, čestice se sudaraju i tako dobijaju slučajne impulse, koji menjaju pravac njihovog kretanja, međutim ovde se radi o procesima sa neprekidnim vremenom, koji se mogu aproksimirati slučajnim lutanjem, ukoliko buduća pozicija zavisi samo od trenutne pozicije, odnosno ako je proces lanac Markova. Diskretna verzija Braunovog kretanja je simetrično slučajno lutanje. Pod simetričnim slučajnim lutanjem podrazumevamo slučajno lutanje na skupu celih brojeva sa verovatnoćom prelaska definisanom na sledeći način:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & ako \ \ j = i+1 \\ p & ako \ \ j = i-1 \\ r & ako \ \ j = i \\ 0 & inače \end{cases}$$

Gde je $p > 0, r \geq 0$ i $2p + r = 1$. Po konvenciji, simetrično slučajno lutanje podrazumeva slučaj kada je $r = 0, p = \frac{1}{2}$.

Vratimo se sada na nehomogeno slučajno lutanje sa pozitivnom verovatnoćom ostajanja u istom stanju čiji fazni prostor čine nenegativni celi brojevi (primer 2.2). Ako u matrici (2.5) stavimo da je $p_0 = 1$, a time i $r_0 = 0$ imamo slučaj gde se nula ponaša kao reflektivna barijera. Kada čestica dostigne stanje nula, u sledećem koraku se automatski vraća u stanje 1. Ovo odgovara fizičkim procesima sa elastičnim zidom u nuli, od koga se čestice odbijaju.

Ako je $p_0 = 0$ u $r_0 = 1$ tada se stanje nula ponaša kao apsorbujuća barijera, jednom kada čestica dostigne stanje nula, ona u tom stanju ostaje zauvek. Ako je $p_0 > 0$ i $r_0 > 0$, tada je 0 delimično reflektivna barijera. Kada se slučajno lutanje može naći u konačnom broju stanja $0,1,\dots,a$, tada svako od stanja 0 i a može biti reflektujuće, apsorbujuće ili delimično reflektujuće. U slučaju kada posmatramo bogatstvo kockara gde kuća ima ograničeno bogatstvo, govorimo o slučajnom lutanju sa dve apsorbujuće barijere (0 i a).

Primer 2.4: Klasičan matematički model difuznog kretanja je čuveni Ehranfetsov[5] model, slučajno lutanje sa konačnim brojem stanja i reflektujućim barijerama. Skup stanja je $i = -a, -a+1, \dots, a$, a verovatnoće prelaska određene su jednakostima:

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a-i}{2a} & ako\ \ j = i+1 \\ \dfrac{a+i}{2a} & ako\ \ j = i-1 \\ 0 & inače \end{cases}$$

Fizička interpretacija ovog modela je sledeća. Zamislimo da dve kutije sadrže ukupno $2a$ loptica. Pretpostavimo da prva kutija označena sa A sadrži k loptica, a da druga kutija, označena sa B sadrži $2a - k$ loptica. Biramo lopticu na slučajan način , tako da svaka od $2a$ loptica ima podjednaku verovatnoću izbora i premeštamo je iz kutije u kojoj se nalazi u drugu kutiju.

∎

Napomenimo još da pored jednodimenzionalnih postoje i slučajna lutanja u više dimenzija. Simetrično slučajno lutanje u n dimenzija, definisano na prostoru E^n, ima za skup stanja n-torke $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, gde su $k_1, k_2, \dots, k_n$ prirodni brojevi. Verovatnoće prelaska određene su jednakostima:

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & ako\ \ \sum_{i=1}^{n} |l_i - k_i| = 1 \\ 0 & inače \end{cases}$$

Ovakva slučajna lutanja nisu tema ovog rada, pa stoga dalje o njima neće biti govora.

Primer 2.5: Neka je S_n slučajno lutanje, tako da važi $P(S_{n+1} = i+1 |\, S_n = i) = p$; $P(S_{n+1} = i - 1 |\, S_n = i) = q$, $0 < p \leq q < 1$, $p + q = 1$. Pronađimo verovatnoću $v_{0i} = P(S_n = i\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = 0), i \in \mathbb{N}$.

U skladu sa notacijom iz primera je $v_{01} = P(S_n = 1\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = 0)$, važi:

$$v_{01} = p + q v_{02} \tag{2.7}$$

Za prethodnu jednakost koristili smo svojstvo homogenosti lanca Markova:

$$v_{-11} = P(S_n = 1\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = -1) = P(S_n = 2\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = 0) = v_{02}$$

Takođe zbog homogenosti važi:

$$v_{12} = P(S_n = 2\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = 1) = P(S_n = 1\ za\ bar\ jedno\ n \in \mathbb{N} | S_0 = 0) = v_{01}$$

Važi:

$$v_{02} = v_{01} * v_{01} \tag{2.8}$$

[5] Paul Ehrenfest (1880 – 1933)–austrijski fizičar

Iz jednačina (2.7) i (2.8) dobijamo:

$$p + qv_{01}^2 = v_{01}$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo:

$$v_{01} = \frac{p + q \pm (p - q)}{2q} = \begin{cases} \frac{p}{q} & p < q \\ 1 & p = q \end{cases}$$

Dalje je:

$$v_{0i} = v_{01}^i = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^i & p < q \\ 1 & p = q \end{cases}$$

Klasifikacija stanja

Definicija 2.3: Neka je $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Markovljev lanac. Stanje i je **povratno**, ako je:

$$P(X_n = i \,, za\; neko\; n \geq 1 | X_0 = i) = 1$$

tj. ako verovatnoća povratka sistema u stanje i pri uslovu da je on u početnom trenutku u tom stanju, jednaka 1. Stanje i je **prolazno** ako važi stroga nejednakost $P(X_n = i, za\; neko\; n \geq 1 | X_0 = i) < 1$.

Prirodno se postavlja pitanje određivanja potrebnog i dovoljnog uslova da je neko stanje i povratno. U tom cilju uvešćemo još neke oznake i dokazati jednu pomoćnu teoremu. Neka je $v_{ij}(n)$ verovatnoća događaja da sistem prvi put dođe u stanje j u trenutku n, ako je u početnom trenutku bio u stanju i, tj.

$$v_{ij}(n) = P(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i)$$

Tada je verovatnoća događaja da će sistem bilo kada doći u stanje j, ako je i početno stanje data sa

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n)$$

Po definiciji smatramo da je $v_{ij}(0) = 0$ za sve i i j. Definišemo generatorne funkcije

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) s^n \tag{2.9}$$

$$V_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{ij}(n) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n) s^n \tag{2.10}$$

gde je

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ je\ i = j \\ 0, & ako\ je\ i \neq j \end{cases}$$

Teorema 2.2: Važe sledeće jednakosti

$$P_{ii}(s) = 1 + V_{ii}(s)P_{ii}(s) \tag{2.11}$$

$$P_{ij}(s) = V_{ij}(s)P_{jj}(s), ako\ je\ i \neq j \tag{2.12}$$

Dokaz: Neka su i i j fiksirana stanja. Za svako $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$A_n = \{X_n = j\}, \quad B_n = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$$

Tada važi $A_n = A_nB_1 \cup \dots \cup A_nB_n$, pri čemu su $A_nB_1, \dots, A_nB_n$ međusobno disjunktni događaji, pa dobijamo

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} P(A_nB_k | X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B_k | X_0 = i)\, P(A_n | B_k, X_0 = i)$$

pa koristeći Markovljevo svojstvo, dobijamo:

$$= \sum_{k=1}^{n} P(B_k | X_0 = i)\, P(A_n |\, X_k = j)$$

pa je:

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{n} v_{ij}(k)p_{jj}(n-k) \tag{2.13}$$

Pa koristeći (2.9), (2.10) i (2.13):

$$V_{ij}(s)P_{jj}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n)s^n \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}(n)s^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (v_{ij}(1)p_{jj}(n-1) + \dots + v_{ij}(n-1)p_{jj}(1) + v_{ij}(n)p_{jj}(0))\, s^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)\, s^n = \begin{cases} P_{ij}(s), & ako\ je\ i \neq j \\ P_{ii}(s) - 1, & ako\ je\ i = j \end{cases}$$

Posledica 2.1: Stanje i je povratno ako i samo ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty \tag{2.14}$$

Dokaz:

Jednakost (2.11) može se zapisati u obliku $P_{ii}(s)\big(1 - V_{ii}(s)\big) = 1$. Neka je i povratno stanje. Tada je $v_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n) = 1$. Koristeći Abelovu teoremu dobijamo da je

$$V_{ii}(1) = \lim_{s\uparrow 1} V_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ii}(n) = 1$$

Sada iz jednakosti $P_{ii}(s)\big(1 - V_{ii}(s)\big) = 1$ pri $s \uparrow 1$ dobijamo da $P_{ii}(s) \to \infty$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$. Slično se dokazuje i obrnuto tvrđenje.

Posledica 2.2:

(1.) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \infty$ i $v_{ij} > 0$ za neko i, onda je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) = \infty$.
(2.) Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty$, onda za svako i važi $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$.

Dokaz: Na osnovu Abelove teoreme iz jednakosti (2.12) dobijamo da je $v_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)$, pa navedena tvrđenja lako slede.

Napomena: Abelova teorema koja se ovde pominje glasi: Ako je $a_n \geq 0$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i ako red $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ konvergira za $|s| < 1$, onda važi $\lim_{s\uparrow 1} G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, nezavisno od toga da li je zbir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konačan ili beskonačan.

Označimo sa τ_j trenutak prvog dolaska sistema u stanje j, tj.

$$\tau_j = \min\{n \geq 1, X_n = j\}$$

Po definiciji smatramo da je $\tau_j = \infty$, ako sistem nikada ne dostigne stanje j. Pri tome $P(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$ važi ako i samo ako je stanje i prolazno i u tom slučaju smatramo da je $E(\tau_i | X_0 = i) = \infty$.

Definicija 2.4: **Srednje vreme čekanja povratka stanja** i definiše se sledećim jednakostima:

$$m_i = E(\tau_i | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n v_{ii}(n) \text{ ako je } i \text{ povratno stanje,} \tag{2.15}$$

$$m_i = E(\tau_i | X_0 = i) = \infty \text{ ako je } i \text{ prolazno stanje.} \tag{2.16}$$

Primetimo da zbir koji figuriše na desnoj strani u jednakosti (2.15) može biti i konačan i beskonačan.

Definicija 2.5: Neka je $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ Markovljev lanac sa skupom stanja $\mathbb{Z}$. Stanje $j \in \mathbb{Z}$ je **dostižno** iz stanja $i \in \mathbb{Z}$, ako je $v_{ij} > 0$. U tom slučaju kažemo da i **komunicira** sa j. Ako je $v_{ij} > 0$ i $v_{ji} > 0$ onda kažemo da stanja i i j **međusobno komuniciraju**.

Dakle, stanje j je dostižno iz stanja i ukoliko je verovatnoća da se iz stanja i može preći u stanje j u konačnom broju promena stanja veća od nule. Dok stanja i i j komuniciraju, ukoliko je svako od ovih stanja dostižno iz onog drugog, tada pišemo $i \leftrightarrow j$.

Ako stanja i i j ne komuniciraju, tada važi bar jedna od sledećih jednakosti:

$$p_{ij}(n) = 0 \qquad za\ svako\ \ n \geq 0$$

$$p_{ji}(n) = 0 \qquad za\ svako\ \ n \geq 0$$

Definicija 2.6: Neka je E podskup skupa svih stanja. Skup E je **zatvoren** ako je $p_{ij} = 0$, za svako $i \in E$ i $j \notin E$, tj. ako je verovatnoća nula da se iz stanja koje pripada skupu E pređe u stanje koje nije u skupu E. Ako zatvoren skup sadrži samo jedno stanje, onda se taj skup i to stanje zovu **apsorbujućim**. Skup E je **nerazloživ** ako proizvoljna stanja $i, j \in E$ međusobno komuniciraju.

Relacija $i \leftrightarrow j$ je relacija ekvivalencije. Sva stanja možemo podeliti u klase ekvivalencije, tako da sva stanja koja komuniciraju međusobno pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Ako je verovatnoća da iz jedne klase pređemo u drugu veća od nule, tada je verovatnoća da iz te druge klase pređemo u prvu jednaka 0, u suprotnom bi ove dve klase zajedno činile jednu. Kažemo da je lanac Markova nesvodljiv ukoliko sva stanja pripadaju istoj klasi.

Primer 2.6: Posmatrajmo slučajno lutanje sa dve apsorbujuće barijere i sledećom matricom prelaska:

$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Imamo tri klase $\{0\}$, $\{1,2, \dots, a-1\}$ i $\{a\}$. U ovom slučaju, moguće je dostići prvu klasu i treću klasu iz druge klase, ali se iz prve klase i treće klase nije moguće vratiti u drugu klasu.

Definicija 2.7: Povratno stanje i je **nulto** ako je $m_i = \infty$, tj. ako je beskonačno vreme čekanja povratka stanja i pri uslovu da se u početnom trenutku sistem nalazi u tom stanju. Povratno stanje i je **nenulto** ako je $m_i < \infty$.

Definicija 2.8: Najveći zajednički delilac $d(i)$ brojeva koraka posle kojih je moguć povratak u stanje i zove se **period** stanja i:

$$d(i) = NZD\{n: p_{ii}(n) > 0\}$$

Stanje i je **periodično** ako je $d(i) > 1$, odnosno **neperiodično** ako je $d(i) = 1$.

Primer 2.7: Ako ne govorimo o slučajnom lutanju sa pozitivnom verovatnoćom ostajanja u istom stanju (odnosno ako je $r = 0$), tada svako stanje ima period 2. Jer je $p_{ii}(2n+1) = 0$, $p_{ii}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$>0.

Kod slučajnog lutanja sa pozitivnom verovatnoćom ostajanja u istom stanju, važi $r > 0$, pa svako stanje ima period 1.

Primer 2.8: Posmatrajmo slučajno lutanje sa skupom stanja $\mathbb{Z}$, gde je $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q = 1 - p$

Ovde je

$$p_{ii}(2n+1) = 0, \quad n = 0,1,2,\dots, \quad i \quad p_{ii}(2n) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n q^n \tag{2.17}$$

Pozivamo se sada na Stirlingovu formulu

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}, \quad n \to \infty \tag{2.18}$$

Pa iz (2.17) i (2.18) imamo:

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \to \infty$$

Kako je $pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, gde jednakost važi ako je $p = q = \frac{1}{2}$, to je za $p = q = \frac{1}{2}$ $p_{ii}(2n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ pa je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(2n) = \infty$. Dakle u ovom slučaju su sva stanja povratna. Ako je $p \neq \frac{1}{2}$ onda je $4pq < 1$ pa je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(2n) < \infty$, a sva stanja su prolazna.

Napomenimo da ako svaki element nekog skupa stanja ima neko svojstvo, onda kažemo da taj skup stanja ima to svojstvo. Na primer, skup povratnih stanja E je nulti, ako su sva stanja iz E nulta, skup stanja E je periodičan, ako su sva stanja iz E priodična, itd. Ako je čitav skup stanja $\mathbb{Z}$ nerazloživ, onda kažemo da je Markovljev lanac nerazloživ.

Teorema 2.3: Neka stanja i i j međusobno komuniciraju. Stanje i je prolazno (povratno) ako i samo ako je stanje j prolazno (povratno).

Dokaz: Ako stanja i i j međusobno komuniciraju, onda postoje prirodni brojevi m i n, takvi da važi $p_{ij}(m) = \alpha > 0$ i $p_{ji}(n) = \beta > 0$. Na osnovu jednačina Čepmen-Kolmogorov dobijamo da je

$$p_{ii}(m+k+n) \geq p_{ij}(m)p_{jj}(k)p_{ji}(n) = \alpha\beta p_{jj}(k) \tag{2.19}$$
$$p_{jj}(m+k+n) \geq p_{ji}(m)p_{ii}(k)p_{ij}(n) = \alpha\beta p_{ii}(k) \tag{2.20}$$

Ako sumiramo nejednakosti (2.19) i (2.20) po k, dobijamo da redovi $\sum_k p_{ii}(k)$ i $\sum_k p_{ii}(k)$ istovremeno konvergiraju ili divergiraju. Tvrđenje teoreme sada jednostavno dobijamo ako primenimo posledicu 2.1.

Teorema 2.4: Skup stanja $\mathbb{Z}$ može se jednoznačno predstaviti u obliku

$$\mathbb{Z} = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots$$

Gde je E_0 skup prolaznih stanja, a E_1, E_2,... su nerazloživi zatvoreni skupovi povratnih stanja.

Dokaz: Relacija $\leftrightarrow$ razbija skup svih povratnih stanja na međusobno disjunktne klase ekvivalencije E_1, E_2... Dovoljno je dokazati da su ove klase zatvorene u smislu definicije 2.6. Pretpostavimo suprotno: neka za neko k i stanje $i \in E_k$ i $j \notin E_k$ važi $p_{ij} > 0$. Pošto i i j nisu u istoj klasi, to ova stanja ne komuniciraju i j nije dostižno iz i. Zato je:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X_n \neq i\}|X_0 = i\right) \geq P\{X_1 = j|X_0 = i\} = p_{ii} > 0$$

Što protivreči pretpostavci da je stanje i povratno.

Analiza prvog koraka

Posmatrajmo slučajno lutanje za koje je $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$, $S_0 = 0$. Ako se vratimo na primer bogatstva igrača, u ovom slučaju igrač igra fer igru, sa istom verovatnoćom dobitka i gubitka. Sada hoćemo da izračunamo verovatnoću da igrač osvoji A novčića pre nego što izgubi B novčića. Početno bogatstvo igrača je 0 novčića, igrač se može zadužiti, odnosno njegovo bogatstvo može otići ,,u minus“. Neka je τ prvi trenutak u kojem slučajno lutanje S_n dostigne A ili $-B$:

$$\tau = min\{n \geq 0 : S_n = A \; ili \; S_n = -B\}$$

Dakle, u trenutku τ je $S_\tau = A$ ili je $S_\tau = -B$, hoćemo da izračunamo verovatnoću $P(S_\tau = A|\, S_0 = 0)$. Do rešenja ovog problema možemo doći na nekoliko načina, jedan od osnovnih je analiza prvog koraka. Prednost ovog načina je činjenica da je sasvim elementaran, u smislu da ne zahteva nikakvu naprednu matematiku, pored toga, analiza prvog koraka je jedan od osnovnih metoda za rešavanje problema računanja verovatnoća kod slučajnih lutanja. Analiza prvog koraka zasniva se na posmatranju bogatstva igrača nakon jedne runde igre. Nakon jedne runde bogatstvo igrača može se povećati ili smanjiti za 1 novčić, u našem slučaju verovatnoća oba ishoda je jednaka $\frac{1}{2}$. Posmatrajmo sledeću rekurzivnu funkciju:

$$f(k) = P(S_\tau = A|S_0 = k), \qquad gde\ je\ -B \leq k \leq A$$

U ovoj notaciji $f(0)$ je verovatnoća dobijanja A novčića, pre nego što izgubimo B novčića.

Važi sledeća rekurzivna jednačina:

$$f(k) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1) \qquad za\ -B < k < A \tag{2.21}$$

Sa vrednostima u krajnjim tačkama $f(A) = 1$ i $f(-B) = 0$.

Ako stavimo $f(-B+1) = a$, zamenom vrednosti za $f(-B)$ i $f(-B+1)$ u jednačinu (2.21) dobijamo $f(-B+2) = 2a$, pa daljim ubacivanjem $f(-B+1)$ i $f(-B+2)$ u jednačinu (2.21) dobijamo $f(-B+3) = 3a$, ovim postupkom dobijamo $f(-B+k) = ka$ za sve $0 \leq k \leq A+B$. Iz $f(A) = 1$, dobijamo $a = 1/(A+B)$. Time dobijamo:

$$P(S_n\ dostiže\ A\ pre\ nego - B \mid S_0 = 0) = \frac{B}{A+B}$$

Prilikom računanja prethodne verovatnoće pretpostavili smo da je vreme zaustavljanja, τ konačno. Ovo i nije toliko očigledna činjenica, pa ćemo je stoga sada dokazati.

Posmatrajmo slučaj da igrač dobije $A+B$ puta zaredom. Ako igrač već nije stigao do $-B$ ovim nizom će sigurno stići do A. Ovakav niz ima pozitivnu verovatnoću $p = 2^{-A-B}$. Ako E_k predstavlja događaj da igrač dobije novčić u svakoj rundi intervala $[k(A+B), (k+1)(A+B)-1]$, tada su E_k nezavisni događaji, i $\tau > n(A+B)$ povlači da se E_k, $0 \leq k \leq n$ nijednom nije ostvarilo. Nalazimo:

$$P(\tau > n(A+B)|S_0 = 0) \leq P\left(\bigcap_{k=0}^{n-1} E_k^c\right) = (1-p)^n \tag{2.22}$$

Kako je:

$$P(\tau = \infty|S_0 = 0) \leq P(\tau > n(A+B)|S_0 = 0) \tag{2.23}$$

Za sve n, vidimo iz jednačina (2.22) i (2.23) da je $P(\tau = \infty|S_0 = 0) = 0$, kao što smo i želeli da pokažemo.

Neka je $I(D)$ indikator događaja D, tada za svaku slučajnu veličinu Z, $Z \geq 0$, $Z \in \mathbb{Z}$, važi:

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} I(Z \geq k)$$

Ako uzmemo očekivanje od obe strane dobijamo jednačinu:

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z \geq k)$$

U cilju da dokažemo da je $E(\tau^d) < \infty$ možemo koristiti sledeće procene:

$$\tau^d I[(k-1)(A+B) < \tau \leq k(A+B)] \leq k^d (A+B)^d I[(k-1)(A+B) < \tau]$$

Ako sumiramo po k imamo:

$$\tau^d \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^d (A+B)^d I[(A+B)(k-1) < \tau]$$

Sada uzimanjem očekivanja od obe strane dobijamo:

$$E(\tau^d) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^d (A+B)^d (1-p)^{k-1} < \infty$$

Sada kada znamo da τ ima konačno očekivanje, postavlja se pitanje kako ga izračunati. I ovo možemo izračunati koristeći analizu prvog koraka. Posmatrajmo funkciju:

$$g(k) = E(\tau | S_0 = k)$$

Nakon jedne runde igre dve stvari će se desiti: bogatstvo igrača će se promeniti i jedinica vremena će se povećati. Rekurzivna jednačina koju sada dobijamo razlikuje se od rekurzivne jednačine za verovatnoću da igrač dobije A novčića pre nego što izgubi B novčića samo po tome što se pojavljuje dodatna konstanta:

$$g(k) = \frac{1}{2} g(k-1) + \frac{1}{2} g(k+1) + 1 \ \ za -B < k < A \tag{2.24}$$

Dalje, kako je vreme potrebno da se dostigne A ili $-B$ nula, ukoliko je $S_0 = A$ ili je $S_0 = -B$, to su granični uslovi:

$$g(-B) = 0 \text{ i } g(A) = 0$$

Da bi rešili ovu rekurzivnu jednačinu uvodimo sledeći operator:

$$\Delta g(k-1) = g(k) - g(k-1)$$

primenom ovog operatora dva puta dobijamo:

$$\Delta^2 g(k-1) = g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)$$

Rekurzivna jednačina (2.24) može se zapisati kao:

$$\frac{1}{2}\Delta^2 g(k-1) = -1 \quad za - B < k < A \tag{2.25}$$

Dakle funkcija $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ima konstantan drugi izvod. Realna funkcija sa konstantnim drugim izvodom je kvadratni polinom. Dalje, jednačina (2.25) nam sugeriše da je koeficijent uz k^2 jednak -1, dok nam granični uslovi sugerišu da su nule ovog polinoma $-B$ i A. Kada se sve ovo uzme u obzir dobijamo polinom

$$g(k) = -(k-A)(k+B)$$

Zamenom ovog polinoma u jednačinu (2.24) dobijamo da on jeste rešenje rekurzivne jednačine.

Najzad računamo očekivanje:

$$E(\tau|S_0 = 0) = AB$$

Šta kada igra nije fer? Prilikom modelovanja igara na sreću uglavnom je verovatnoća dobitka novčića manja od verovatnoće gubitka novčića. Odnosno posmatraćemo uopšteniji problem, kada je $P(X_k = 1) = p$ i $P(X_k = -1) = q = 1-p$, gde je $p \neq q,\ S_0 = 0$. Da bi odredili verovatnoću da igrač pri ovim uslovima osvoji A novčića pre nego što izgubi B novčića ponovo koristimo analizu prvog koraka. Dobijamo sledeću rekurzivnu jednačinu:

$$f(k) = pf(k+1) + qf(k-1)$$

I ova jednačina se najlakše rešava uvođenjem operatora. Prvo primetimo da je s obzirom na $p + q = 1$ prethodna jednačina ekvivalentna:

$$0 = p\{f(k+1) - f(k)\} - q\{f(k) - f(k-1)\}$$

Na osnovu ove jednačine nalazimo rekurzivnu jednačinu za $\Delta f(k)$:

$$\Delta f(k) = \left(\frac{q}{p}\right)\Delta f(k-1) \tag{2.26}$$

Pa iz jednačine (2.26) važi:

$$\Delta f(k+j) = \left(\frac{q}{p}\right)^j \Delta f(k)$$

Ako postavimo $\alpha = \Delta f(-B)$, i iskoristimo činjenicu $f(-B) = 0$ dobijamo:

$$f(k) = \sum_{j=0}^{k+B-1} \Delta f(j-B) = \alpha \sum_{j=0}^{k+B-1} \left(\frac{q}{p}\right)^j = \alpha \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{k+B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right) - 1} \tag{2.27}$$

Zamenom $k = A$ u jednačinu (2.27) dobijamo:

$$1 = f(A) = \alpha \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{A+B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right) - 1}$$

Odatle je:

$$P(S_n \, dođe \; u \; A \; pre \; nego \; u \; -B|S_0 = 0) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{A+B} - 1}$$

Izračunajmo sada očekivano vreme zaustavljanja, odnosno broj rundi potreban da igračevo bogatstvo dostigne A ili da padne do $-B$, za ovaj slučaj kada je $p \neq q$. Neka je sa $g(k)$ označeno očekivano vreme pre nego što slučajno lutanje dođe do stanja A ili B, ako je na početku u stanju k, tada je jednačina dobijena analizom prvog koraka sledeća:

$$g(k) = pg(k+1) + qg(k-1) + 1$$

Što je ekvivalentno sa:

$$\Delta g(k) = \left(\frac{q}{p}\right) \Delta g(k-1) + 1 \tag{2.28}$$

gde su granične vrednosti iste kao u slučaju $p = q = \frac{1}{2}$:

$$g(-B) = 0 \; i \; g(A) = 0$$

Da bi rešili jednačinu (2.28), prvo tražimo jedno rešenje a zatim rešavamo homogenu jednačinu. Pretpostavimo da postoji rešenje oblika ck, nakon ubacivanja ove vrednosti u jednačinu ispostavlja se da je pretpostavka tačna te da je jedno od rešenja ove jednačine $g_0(k) = \frac{k}{(q-p)}$. Prilikom dosadašnjeg rada pokazali smo da je $a + b\left(\frac{q}{p}\right)^k$ rešenje homogenog sistema (2.24) pa je rešenje sistema (2.28) oblika:

$$g(k) = \frac{k}{q-p} + \alpha + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^k$$

Dva granična uslova daju nam par jednačina koje možemo koristiti da izračunamo α i β. Dobijamo:

$$E(\tau|S_0 = 0) = \frac{B}{q-p} - \frac{A+B}{q-p} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{B}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{A+B}}$$

U ovoj glavi posmatrali smo slučajno lutanje kao lanac Markova, to je jedan od pristupa problemu slučajnog lutanja. Slučajno lutanje možemo tretirati i na druge načine (kao graf, martingal…). U sledećoj glavi posmatraćemo slučajno lutanje kao martingal. Za ovu glavu korišćena je literatura [2], [3], [5], osim za poslednje poglavlje za koji je korišćena literatura[1].

Slučajno lutanje kao martingal

U prethodnoj glavi definisali smo slučajno lutanje kao lanac Markova, tada smo pomenuli da to nije jedini način na koji slučajno lutanje možemo posmatrati i da se slučajno lutanje može posmatrati, između ostalog i kao martingal. U ovoj glavi posmatraćemo slučajno lutanje kao martingal. U samoj definiciji martingala javlja se pojam uslovnog matematičkog očekivanja, stoga ćemo u prvom poglavlju uvesti pojam uslovnog matematičkog očekivanja i uslovne verovatnoće u odnosu na neku σ-algebru. U drugom poglavlju opisaćemo slučajno lutanje kao martingal, dok ćemo u trećem poglavlju dokazati još neke osobine slučajnog lutanja posmatrajući ga kao martingal.

Uslovno matematičko očekivanje

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prostor verovatnoća, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-podalgebra σ-algebre $\mathcal{A}$ i $X: \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna veličina. Pod proširenom slučajnom veličinom podrazumevamo funkciju $Y: \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, takvu da je $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki Borelov skup $B \in \mathcal{B}$.

Definicija 3.1: **Uslovno matematičko očekivanje nenegativne slučajne veličine** X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je nenegativna proširena slučajna veličina $E(X|\mathcal{F})$, koja ima sledeća svojstva:

1. $E(X|\mathcal{F})$ je slučajna veličina koja je $\mathcal{F}$-merljiva.
2. Za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$ važi jednakost:

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{F}) dP$$

Proizvoljnu slučajnu veličinu X možemo predstaviti kao $X = X^+ - X^-$, gde su X^+ i X^- nenegativne slučajne veličine, definisane na sledeći način:

$$X^+ = \max\{X, 0\}, X^- = \max\{-X, 0\}$$

Definicija 3.2: **Uslovno matematičko očekivanje** $E(X|\mathcal{F})$ slučajne veličine X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ definiše se ako je $E(X^+|\mathcal{F}) < +\infty$ s.s. ili $E(X^-|\mathcal{F}) < +\infty$ s.s. formulom:

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F})$$

pri čemu se na skupu (verovatnoće 0) elementarnih događaja za koje važi jednakost $E(X^+|\mathcal{F}) = E(X^-|\mathcal{F}) = +\infty$, razlika $E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F})$ definiše na proizvoljan način, na primer, jednaka je 0.

Definicija 3.3: Neka je definisano uslovno matematičko očekivanje $E(X|\mathcal{F})$. **Uslovna disperzija** $D(X|\mathcal{F})$ slučajne veličine X u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$ je slučajna veličina data sa:

$$D(X|\mathcal{F}) = E((X - E(X|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F})$$

Definicija 3.4: Neka $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$. Uslovno matematičko očekivanje $E(I_{\mathrm{B}}|\mathcal{F})$ zove se **uslovna verovatnoća događaja** B u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, a označava se sa $P(\mathrm{B}|\mathcal{F})$.

Iz definicije uslovnog matematičkog očekivanja i uslovne verovatnoće događaja u odnosu na σ-algebru sledi da je za svaki fiksirani događaj $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ uslovna verovatnoća $P(\mathrm{B}|\mathcal{F})$ slučajna veličina koja ima sledeća dva svojstva:

1. $P(\mathrm{B}|\mathcal{F})$ je $\mathcal{F}$-merljiva.
2. Za svaki događaj $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ važi $P(AB) = \int_{\mathrm{A}} P(\mathrm{B}|\mathcal{F})dP$.

Definicija 3.5: Neka je X slučajna veličina i $\mathcal{F}_Y$ σ-algebra generisana slučajnom veličinom Y. Ako je definisano uslovno matematičko očekivanje $E(X|\mathcal{F}_Y)$, onda se ono označava sa $E(X|Y)$ i zove se **uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine** X u odnosu na Y. Uslovna verovatnoća $P(\mathrm{B}|\mathcal{F}_Y)$ označava se sa $P(B|Y)$ i zove **uslovna verovatnoća događaja** B u odnosu na Y.

Teorema 3.1: Neka je $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$ konačno ili prebrojivo razbijanje sigurnog događaja Ω sa atomima D_i, $P(D_i) > 0$, $i = 1,2,\dots$ i neka je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{D})$ σ-algebra generisana razbijanjem $\mathcal{D}$.

1. Ako je X slučajna veličina za koju je definisano matematičko očekivanje $E(X)$, onda važi jednakost:

   $$E(X|\mathcal{F}) = \frac{E(XI_{D_i})}{P(D_i)} \text{ skoro sigurno na } D_i.$$

2. Ako je $X = \sum_{j=1}^{n} x_j I_{A_j}$, diskretna slučajna veličina koja uzima konačno mnogo vrednosti, pri čemu je $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ takođe razbijanje sigurnog događaja onda važi jednakost:

   $$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \sum_{j=1}^{n} x_j P(A_j|D_i) \text{ skoro sigurno na } D_i.$$

Dokaz ove teoreme moguće je pronaći u knjizi: Pavle Mladenović, Verovatnoća i statistika, koja se u spisku literature nalazi pod brojem [5].

Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ prostor verovatnoća, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-podalgebra σ-algebre $\mathcal{A}$, a X i Y slučajne veličine za koje postoje $E(X)$ i $E(Y)$. Sledeće teoreme daju svojstva uslovnog matematičkog očekivanja.

Teorema 3.2:

1. Ako je C konstanta i $X = C$ skoro sigurno, onda je $E(X|\mathcal{F}) = C$ skoro sigurno.
2. Ako je $X \leq Y$ skoro sigurno, onda je $E(X|\mathcal{F}) \leq E(Y|\mathcal{F})$ skoro sigurno.
3. $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X||\mathcal{F})$ skoro sigurno.
4. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$ skoro sigurno, gde $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Neka je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ trivijalna σ-algebra. Tada je $E(X|\mathcal{F}_0) = E(X)$ skoro sigurno.

Dokaz:

1. Konstanta je merljiva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}$, a jednakost:

   $$\int_A XdP = \int_A CdP$$

   Važi za sve $A \in \mathcal{F}$, jer je $X = C$ skoro svuda.

2. Ako je $X \leq Y$ skoro svuda, onda za svaki $A \in \mathcal{F}$ važi.

$$\int_A XdP \leq \int_A YdP$$

pa sledi da je:

$$\int_A E(X|\mathcal{F})\, dP \leq \int_A E(Y|\mathcal{F})\, dP, \qquad A \in \mathcal{F}$$

Neka je $B = \{\omega : X(\omega) > Y(\omega)\}$. Tada je:

$$\int_B E(Y|\mathcal{F}) dP \leq \int_B E(X|\mathcal{F})\, dP \leq \int_B E(Y|\mathcal{F}) dP$$

odatle sledi da je $P(B) = 0$.

3. S obzirom da je $-|X| \leq X \leq |X|$, svojstvo sledi iz svojstva 2.
4. Ako $A \in \mathcal{F}$, onda važi:

$$\begin{aligned}\int_A (aX + bY) dP &= \int_A aXdP + \int_A bYdP \\ &= \int_A aE(X|\mathcal{F})\, dP + \int_A bE(Y|\mathcal{F})\, dP \\ &= \int_A (aE(X|\mathcal{F}) + bE(X|\mathcal{F})) dP\end{aligned}$$

odakle sledi navedeno svojstvo.

5. Svojstvo sledi iz činjenice da je $E(X)$ merljiva funkcija u odnosu na trivijalnu σ-algebru i činjenice da za $A \in \{\Omega, \emptyset\}$ važi jednakost $\int_A XdP = \int_A E(X)dP$.

Teorema 3.3:

1. $E(X|\mathcal{A}) = X$ skoro sigurno.
2. Teleskopsko svojstvo: Ako su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ σ-algebre za koje važi $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$, onda skoro sigurno važi jednakost:

$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$$

3. $E\big(E(X|\mathcal{F})\big) = E(X)$.
4. Neka slučajna veličina X ne zavisi od σ-algebre $\mathcal{F}$, tj. ne zavisi od indikatora I_B za svaki $B \in \mathcal{F}$. Tada skoro sigurno važi jednakost:

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X)$$

Dokaz:

1. Pošto je X $\mathcal{A}$-merljiva funkcija i

$$\int_A XdP = \int_A XdP \text{ za sve } A \in \mathcal{F},$$

to sledi da je $E(X|\mathcal{A}) = X$ skoro sigurno.

2. Neka je $A \in \mathcal{F}_1$. Tada važi:

$$\int_A E(X|\mathcal{F}_1)dP = \int_A XdP$$

A kako je $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, to važi $A \in \mathcal{F}_2$ i

$$\int_A E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)dP = \int_A E(X|\mathcal{F}_2)dP = \int_A XdP$$

Iz ovih jednakosti sledi da za svaki $A \in \mathcal{F}_1$važi:

$$\int_A E(X|\mathcal{F}_1)dP = \int_A E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)dP$$

odakle sledi:

$$E(X|\mathcal{F}_1) = E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) \quad s.s.$$

Ako $A \in \mathcal{F}_2$, onda na osnovu definicije uslovnog matematičkog očekivanja dobijamo:

$$\int_A E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)dP = \int_A E(X|\mathcal{F}_2)dP$$

Kako je slučajna veličina $E(X|\mathcal{F}_1)$ $\mathcal{F}_1$-merljiva i $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, to je $E(X|\mathcal{F}_1)$ i $\mathcal{F}_2$-merljiva. Odatle sledi da je:

$$E(X|\mathcal{F}_1) = E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) \quad s.s.$$

3. Svojstvo direktno sledi iz teoreme 3.2, svojstvo 5. i jednakosti:

$$E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$$

ako u toj jednakosti stavimo da je $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$.

4. Pošto je $E(X)$ $\mathcal{F}$-merljiva funkcija (u pitanju je konstanta funkcija) i za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$ važi:

$$\int_A XdP = \int_A E(X)dP$$

jer je $E(XI_A) = E(X)E(I_A)$, to tvrđenje sledi.

Slučajno lutanje kao martingal

Teorija martingala pojavila se kao sredstvo za dokazivanje da ne postoji siguran način zarade kockanjem ukoliko je opklada fer. Uspeh ove teorije nadmašio je korene i sada ona zauzima važno mesto u izučavanju slučajnih procesa. U ovom delu upoznaćemo se sa teorijom martingala, pokazati vezu između slučajnog lutanja i martingala i dokazati neka svojstva vezana za slučajno lutanje tretirajući ga kao martingal.

Definicija 3.6: Kažemo da je niz slučajnih promenljivih $\{M_n : 0 \leq n < \infty\}$ **martingal niza slučajnih promenljivih** $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$, ukoliko $\{M_n\}$ zadovoljava sledeća dva svojstva:

1. Za svako $n \geq 1$ postoji funkcija $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takva da važi $M_n = f_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
2. $\{M_n\}$ zadovoljava sledeću jednakost

$$E(M_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = M_{n-1} \; za \; n \geq 1 \tag{3.1}$$

Pored ova dva svojstva zahtevaćemo da M_n ima konačno očekivanje za svako $n \geq 1$ i da je M_0 konstanta.

Da bismo približili martingal intuiciji, ovu definiciju možemo posmatrati na sledeći način: X_i možemo posmatrati kao ishod i-te runde fer igre, dok je M_n bogatstvo igrača u trenutku n. Formula (3.1) nam govori da očekivano bogatstvo igrača u trenutku n, koji ima sve informacije o ishodu igre u prethodnih $n-1$ koraka iznosi M_{n-1}, dakle da se neće promeniti.

Primer 3.1: Ako je X_n niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje zadovoljavaju $E(X_n) = 0$ za $n \geq 1$, onda je niz $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ za $n \geq 1$ martingal za niz $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$.

Primer 3.2: Ako je X_n niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje zadovoljavaju $E(X_n) = 0$ i $D(X_n) = \sigma^2$ za sve $n \geq 1$, onda je niz $M_0 = 0$, $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$ za $n \geq 1$ martingal za niz $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$.

Dokaz:

Dokažimo da važi svojstvo 2. Iz definicije 3.6, odnosno da je:

$$E(M_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = E(S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2 - n\sigma^2 | X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$$

Kako je S_{n-1}^2 funkcija od $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$, to je uslovno očekivanje prvog sabirka S_{n-1}^2. Za drugi sabirak važi:

$$E(S_{n-1}X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = S_{n-1}E(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$$

Dalje je $E(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = E(X_n) = 0$ jer X_n ne zavisi od $X_1, \dots, X_{n-1}$. Očekivanje trećeg sabirka računamo slično:

$$E(X_n^2|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = E(X_n^2) = \sigma^2$$

Pa je

$$E(M_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}) = S_{n-1}^2 + \sigma^2 - n\sigma^2 = S_{n-1}^2 - (n-1)n\sigma^2$$

■

Kako bismo pojednostavili zapis uvešćemo neka pravila. Pišemo $E(Z|\mathcal{F}_n)$ umesto $E(Z|X_1, X_2 \ldots, X_n)$ kada je $\{M_n: 1 \leq n < \infty\}$ martingal niza $\{X_n: 1 \leq n < \infty\}$ kažemo $\{M_n\}$ je martingal niza $\{\mathcal{F}_n\}$. Dalje koristimo notaciju $Y \in \mathcal{F}_n$ ako je $Y = f(X_1, X_2 \ldots, X_n)$.

Definicija 3.7: Kažemo da niz $\{\mathcal{F}_n\}$ **sadrži sve informacije** o nizu slučajnih promenljivih $\{A_n: 1 \leq n < \infty\}$ ako za sve $1 \leq n < \infty$, imamo $A_n \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Definicija 3.8: Proces $\{\breve{M}_n: 0 \leq n < \infty\}$ definisan kao $\breve{M}_0 = M_0$,

$$\breve{M}_n = M_0 + A_1(M_1 - M_0) + A_2(M_2 - M_1) + \cdots + A_n(M_n - M_{n-1}) \; za \; n \geq 1$$

naziva se **transformacija martingala** $\{M_n\}$ po $\{A_n\}$.

Sledeća teorema daje nam uslove pod kojima je niz $\{\breve{M}_n\}$ martingal.

Teorema 3.4: (**Teorema o transformaciji martingala**) Ako je $\{M_n\}$ martingal niza $\{\mathcal{F}_n\}$ i ako $\{\mathcal{F}_n\}$ sadrži sve informacije o nizu ograničenih slučajnih promenljivih $\{A_n: 1 \leq n < \infty\}$, tada je transformisani niz $\{\breve{M}_n\}$ martingal niza $\{\mathcal{F}_n\}$.

Dokaz:

Jasno je da važi $\{\breve{M}_n \in \mathcal{F}_n\}$, dok nam ograničenost niza A_k garantuje da $\breve{M}_n$ ima konačno očekivanje za svako n. Primećujemo da važi:

$$E\left(\breve{M}_n - \breve{M}_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = E(A_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = A_n E(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$$

pa važi:

$$E\left(\breve{M}_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \breve{M}_{n-1}$$

Čime je dokaz završen.

Definicija 3.9: Slučajna promenljiva τ koja uzima vrednosti {0,1,…} ∪ {∞} naziva se **vreme zaustavljanja** niza $\{\mathcal{F}_n\}$ ako:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ za sve } 0 \leq n < \infty$$

Često posmatramo svojstva slučajnog procesa Y_n u trenutku zaustavljanja τ. Ako je $\tau < \infty$, možemo definisati proces u trenutku zaustavljanja Y_τ kao:

$$Y_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} I(\tau = k) Y_k.$$

Ovde smo Y_τ definisali tako da važi P($\tau < \infty$) $= 1$, dok smo pri definisanju vremena zaustavljanja ostavili mogućnost da je $\tau = \infty$. Uvek možemo posmatrati zasečeno vreme zaustavljanja. Neka je $n \wedge \tau = \min\{n, \tau\}$, tada je $n \wedge \tau$ ograničeno vreme zaustavljanja, i za svaki niz slučajnih promenljivih Y_n proces $Y_{n \wedge \tau}$ je dobro definisan. Takođe, ograničeno vreme zaustavljanja $n \wedge \tau$ vodi do važne klase martingala koja ima veliku primenu u teoriji martingala.

Teorema 3.5: (**Teorema o vremenu zaustavljanja**) Ako je $\{M_n\}$ martingal niza $\{\mathcal{F}_n\}$, tada je i proces $\{M_{n \wedge \tau}\}$ martingal niza $\{\mathcal{F}_n\}$.

Dokaz:

Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $M_0 = 0$, jer u suprotnom možemo uvesti novi martingal $M'_n = M_n - M_0$. Dalje $\{\mathcal{F}_n\}$ sadrži sve informacije o ograničenom nizu A_k definisanom kao:

$$A_k = I(\tau \geq k) = 1 - I(\tau \leq k - 1)$$

pa je:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\{M_k - M_{k-1}\} = M_\tau I(\tau \leq n - 1) + M_n I(\tau \geq n) = M_{n \wedge \tau}$$

zaključujemo da je $M_{n \wedge \tau}$ transformacija martingala M_n po $\{A_n\}$. Kako je $\{A_n\}$ ograničen i $\{\mathcal{F}_n\}$ sadrži sve informacije o niz $\{A_n\}$, to po teoremi 3.4 sledi da je $\{M_{n \wedge \tau}\}$ martingal.

Princip refleksije

Posmatrajmo bogatstvo kockara koji igra fer igru, u kojoj se kladi na jedan od dva moguća ishoda (npr. kladi se da će pri sledećem bacanju novčića pasti pismo ili glava) i menja strategiju igre nakon što njegovo bogatstvo dosegne određenu vrednost. Neka je $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, gde su X_i nezavisne slučajne promenljive koje uzimaju vrednosti 1 i -1 sa jednakim verovatnoćama $\frac{1}{2}$. Posmatrajmo trenutak kada S_n prvi put uzme vrednost $x > 0$, neka je $\tau = min\{n: S_n = x\}$. Ako S_n predstavlja bogatstvo igrača dok koristi prvu strategiju, onda bogatstvo $\tilde{S}_n$ koje podrazumeva promenu strategije u trenutku τ možemo zapisati na sledeći način:

$$\tilde{S}_n = \begin{cases} S_n & ako\ je\ n < \tau \\ S_\tau - (S_n - S_\tau) & ako\ je\ n \geq \tau \end{cases}$$

Procesi S_n i $\tilde{S}_n$ su ekvivalentni kada je u pitanju očekivani dobitak igrača, ali nam proces $\tilde{S}_n$ može poslužiti za uočavanje nekih pravila vezanih za slučajno lutanje.

Prvo što primećujemo je da za $n \geq \tau$ i $S_n > x + y$ za neko $y \geq 0$, važi $\tilde{S}_n < \mathrm{x} - \mathrm{y}$. Pa kako su procesi S_n i $\tilde{S}_n$ ekvivalentni, zaključujemo da važi:

$$P(\tau \leq n, S_n > x + y) = P\big(\tau \leq n, \tilde{S}_n < \mathrm{x} - \mathrm{y}\big) = P(\tau \leq n, S_n < \mathrm{x} - \mathrm{y})$$

Neka je $S_n^* = \max\{S_k : 0 \leq k \leq n\}$, poslednji identitet možemo zapisati kao:

$$P(S_n^* \geq x, S_n > x + y) = P(S_n^* \geq x, S_n < \mathrm{x} - \mathrm{y})$$

Kako $S_n > x + y$ povlači $S_n^* \geq x$, konačno zaključujemo:

$$P(\,S_n > x + y) = P(S_n^* \geq x, S_n < \mathrm{x} - \mathrm{y}) \tag{3.2}$$

Ovu formulu nazivamo princip refleksije za slučajno lutanje. Razlog zbog kog je jednačina (3.2) bitna je i taj što daje zajedničku raspodelu za (S_n^*, S_n) u funkciji od raspodele S_n. Ako u jednačinu (3.2) stavimo da je $y = 0$ dobijamo:

$$P(\,S_n > x) = P(S_n^* \geq x, S_n < \mathrm{x})$$

Kako je trivijalno tačno:

$$P(\,S_n \geq x) = P(S_n^* \geq x, S_n \geq \mathrm{x})$$

sabiranjem ove dve jednačine dobijamo:

$$2P(\,S_n > x) + P(\,S_n = x) = P(S_n^* \geq x) \tag{3.3}$$

Pomoću ove jednačine možemo rešavati probleme sledeće vrste:

Primer 3.3: Kockar igra fer igru (u svakoj rundi verovatnoća dobitka jednaka je verovatnoći gubitka i iznosi $\frac{1}{2}$). Kolika je verovatnoća da u nekoj od prvih 8 rundi bude u dobitku 3 novčića?

Rešenje: Tražimo $P(S_n^* \geq x)$. Na osnovu formule (3.3) imamo:

$$P(S_n^* \geq x) = P(S_n = x) + 2P(S_n > x)$$

Kako je $P(S_8 = 3) = 0$ i:

$$P(S_8 > 3) = \ P(S_8 = 4) + \ P(S_8 = 6) + \ P(S_8 = 8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{37}{256}$$

To je $P(S_8^* \geq 3) = \frac{37}{128} = 0.289$.

■

Osim toga, puštanjem $n \to \infty$ u jednačinu (3.3), centralna granična teorema nam daje da leva strana teži ka 1. Dok na desnoj imamo:

$$P(\tau_x < \infty) = P(S_n^* = x \; za \; neko \; n) = 1$$

Što smo već ranije dokazivali.

Slično, ako zamenimo x sa $[\sqrt{n}x]$ u jednačinu (3.3) i ponovo pustimo da $n \to \infty$, za svako $x \geq 0$ važi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \geq x\right) = 2\{1 - \Phi(x)\}$$

Ovim poglavljem smo dali još jedan pogled na slučajno lutanje, ovoga puta tretirajući ga kao martingal. Tretiranje slučajnog lutanja na ovaj način olakšava nam dokazivanje nekih njegovih svojstava. Videli smo kako se lako dokazuju svojstva koja proističu iz principa refleksije. U literaturi [1] mogu se videti dokazi svojstava koje smo izložili u poslednjem poglavlju prve glave posmatrajući slučajno lutanje kao martingal. Za ovaj deo rada korišćena je literatura [1], [5].

Problem glasačkih listića i arcsin zakon

U ovoj glavi dokazaćemo još neka svojstva slučajnog lutanja kako bi dali odgovor na sledeće pitanje: ,, Prilikom glasanja kandidat A osvoji p glasova, a kandidat B osvoji q glasova. Koja je verovatnoća da će kandidat A voditi tokom celog prebrojavanja glasova?”

Posmatrajmo slučajno lutanje kod koga je $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $S_0 = 0$. Podsetimo se analogije sa igračem koji igra igru na sreću. Posmatramo igru u kojoj na početku igrač ima bogatstvo nula. Bacanjem „fer” novčića igračevo bogatstvo se u svakoj rundi može povećati za jedan novčić ili se smanjiti za jedan novčić, sa jednakim verovatnoćama $\frac{1}{2}$. Igrač može „otići u minus”, u toku igre očekujemo da igračevo bogatstvo menja znak, uzimajući nekada pozitivne a nekada negativne vrednosti. Postavlja se sledeće pitanje: ,,Nakon velikog broja rundi n, koliko je puta igrač imao pozitivno bogatstvo?”

Kako postoji očigledna simetrija između dva slučajna lutanja koja oba počinju u nuli i završavaju se u nuli, možemo zaključiti da je verovatnoća da će igrač sa jednakom verovatnoćom imati pozitivno kao i negativno bogatstvo. Kada je broj rundi n veliki, očekujemo da je slučajno lutanje sastavljeno od velikog broja slučajnih lutanja koja počinju u nuli i završavaju se u nuli pa da će ukupno gledano vreme koje je igrač „proveo u plusu” težiti ka jednoj polovini ukupnog vremena, odnosno polovini broja rundi. Međutim zakon $arcsin$ nam pokazuje da je ova intuicija sasvim pogrešna, odnosno da je mnogo očekivanije da udeo vremena bude blizu 0 ili 1 nego blizu $\frac{1}{2}$.

Neka je:

$$u_{2n} = P(S_{2n} = 0) \tag{4.1}$$

$$f_{2n} = P(S_{2n} = 0, S_j \neq 0 \; za \; j = 1,2, \dots, 2n-1) \tag{4.2}$$

Odnosno neka je u_{2n} verovatnoća da se slučajno lutanje vrati u nulu u trenutku $2n$, dok je f_{2n} verovatnoća da se slučajno lutanje prvi put vrati u nulu u trenutku $2n$. Računanje verovatnoće u_{2n} je jednostavno, da bi se slučajno lutanje vratilo u nulu u trenutku $2n$, potrebno je da ono napravi po n koraka dole i gore, pa je:

$$u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \tag{4.3}$$

Nešto složenije je računanje verovatnoće f_{2n}, ovu verovatnoću nam daje sledeća lema:

Lema 4.1:

$$f_{2n} = \frac{u_{2n-2}}{2n} \tag{4.4}$$

Dokaz:

Neka je $a + n \geq b$, i $N_n(a,b)$ broj mogućih putanja slučajnog lutanja koje polazi iz stanja a i nakon n koraka završi u stanju b tada je $N_n(a,b) = \binom{n}{c}$, gde je $c = \frac{(n+b-a)}{2}$. Neka je $N_n^{\neq 0}(a,b)$ broj mogućih putanja slučajnog lutanja koje polazi iz stanja a i nakon n koraka završi u stanju b, a da pritom ne prođe kroz 0 pre trenutka n (ako je $b = 0$, tada slučajno lutanje mora da uđe u 0 u trenutku n), analogno neka je $N_n^0(a,b)$ broj mogućih putanja slučajnog lutanja koje polazi iz stanja a i nakon n koraka završi u stanju b, a da pritom prođe kroz 0 pre trenutka n. Analizom prvog koraka i korišćenjem simetrije dve putanje dobijamo:

$$N_{2n}^{\neq 0}(0,0) = N_{2n-1}^{\neq 0}(1,0) + N_{2n-1}^{\neq 0}(-1,0) = 2N_{2n-1}^{\neq 0}(1,0) = 2N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1)$$

Dalje je:

$$N_{2n-2}^{0}(1,1) = N_{2n-2}(-1,1)$$

Ova jednakost važi zbog principa refleksije, kako oba slučajna lutanja prolaze kroz 0, to svakoj putanji sa svojstvom $N_{2n-2}^{0}(1,1)$ možemo dodeliti putanju sa svojstvom $N_{2n-2}(-1,1)$, tako što će one biti simetrične do prvog prolaska kroz nulu, a nakon toga će biti identične. Na isti način svakoj putanji sa svojstvom $N_{2n-2}(-1,1)$, možemo dodeliti putanju sa svojstvom $N_{2n-2}^{0}(1,1)$.

Dalje važi:

$$N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1) = N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}^{0}(1,1) = N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}(-1,1) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Pa dobijamo:

$$N_{2n}^{\neq 0}(0,0) = 2N_{2n-2}^{\neq 0}(1,1) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Odatle je verovatnoća f_{2n} jednaka:

$$f_{2n} = N_{2n}^{\neq 0}(0,0)\left(\frac{1}{2}\right)^{-2n} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n}$$

Dok je verovatnoća u_{2n-2}:

$$u_{2n-2} = \binom{2n-2}{n-1}2^{-2n+2}$$

Deljenjem ove dve jednačine dobijamo:

$$\frac{f_{2n}}{u_{2n-2}} = \frac{\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n}}{\binom{2n-2}{n-1}2^{-2n+2}} = \frac{1}{2n}$$

■

Lema 4.2:

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} \tag{4.5}$$

Dokaz:

Kako je:

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}\frac{2n(2n-1)}{n^2} = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(2n-1)$$

Množenjem sa 2^{-2n} dobijamo:

$$u_{2n} = f_{2n}(2n-1)$$

Lema 4.1 nam daje:

$$u_{2n-2} = f_{2n}2n$$

Pa oduzimanjem ove dve jednačine dobijamo:

$$u_{2n-2} - u_{2n} = f_{2n}$$

■

Neka je $p_{2k,2n}$ verovatnoća da igrač bude $2k$ rundi ,,u plusu“, od ukupno $2n$ rundi, $0 \leq k \leq n$.

Lema 4.3:

$$p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}2^{-2n}, k = 0, \dots, n \tag{4.6}$$

Dokaz:

Kako je $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$, to je verovatnoća da slučajno lutanje nikada ne uđe u 0:

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = 1 - f_2 - f_4 - \cdots - f_{2n} = 1 - (1 - u_2) - (u_2 - u_4) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n}) = u_{2n}$$

Pa tvrđenje važi za $k = 0$ i $k = n$. Ako je $2k \neq 2n$ i $2k \neq 0$ tada postoji r, $0 < r < n$ tako da je $S_{2r} = 0$, $S_j \neq 0$, $j = 1,2,\dots,2r-1$. Ako je do trenutka $2r$ slučajno lutanje bilo pozitivno, tada je $2r \leq 2k$ i

$(S_{2r+1}, \dots, S_{2n})$ treba da bude pozivno $2k - 2r$ puta, ako je do trenutka $2r$ slučajno lutanje bilo negativno, tada je $2(n-r) \geq 2k$ i $(S_{2r+1}, \dots, S_{2n})$ treba da bude pozitivno $2k$ puta. Dakle:

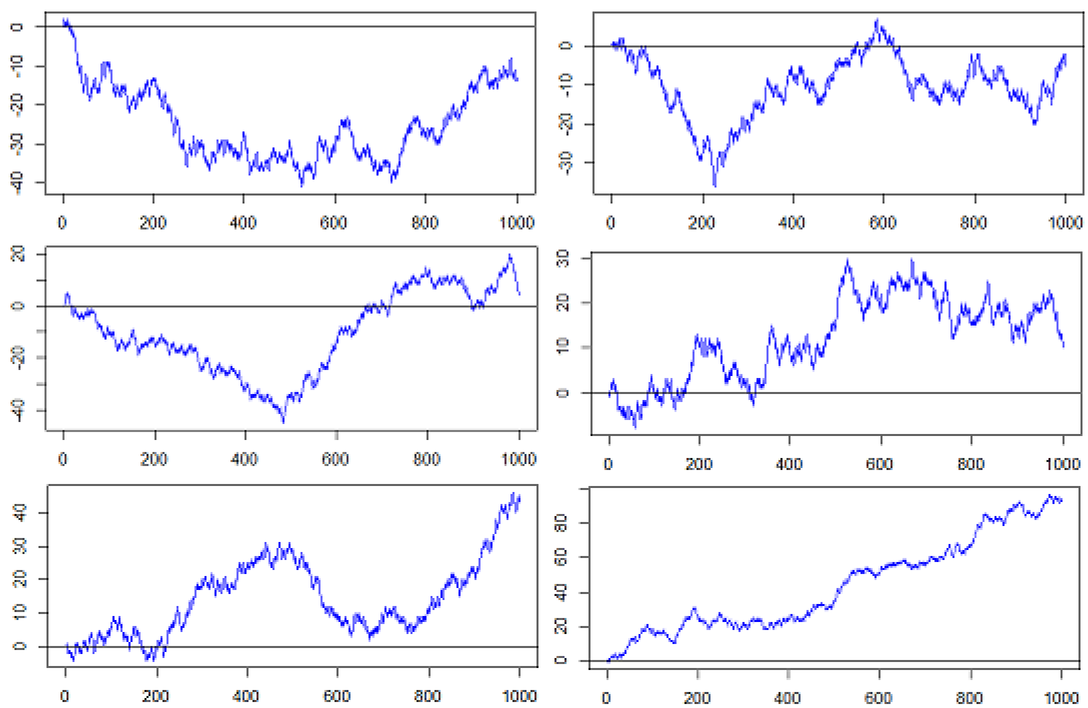
$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}p_{2k,2n-2r}$$

Kako je $u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}\, u_{2n-2k}$, indukcijom iz prethodne jednačine dobijamo:

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}u_{2k} + \frac{1}{2}u_{2k}u_{2n-2k} = u_{2n-2k}u_{2k}$$

■

Primer 4.1: Sada ćemo pomoću programskog jezika R generisati 6 slučajnih lutanja tako da važi $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq n$, $S_0 = 0$, $n = 1000$. Grafici dobijenih slučajnih lutanja, sortirani po procentu vremena provedenog ,,u plusu" grafici ovih slučajnih lutanja dati su na slici 4.1.



slika 4.1

Procenti vremena koje su ova slučajna lutanja provela ,,u plusu" su redom:
$0.9\%, 6.6\%, 28.9\%, 86.1\%, 99.5\%.$

■

Raspodela verovatnoće $p_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}2^{-2n}, k = 0, \dots, n$ naziva se **diskretna arcsin raspodela**.

Razmotrimo sada osobine ove raspodele kada $n \to \infty$. Podsetimo se Stirlingove formule $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, gde $n \to \infty$, pa je

$$p_{2k,2n} \sim \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}, \quad k \to \infty, \quad n-k \to \infty$$

Neka je x slučajna promenljiva koja predstavlja udeo vremena kada je slučajno lutanje bilo pozitivno $\left(x = \frac{2k}{2n}\right)$, tada je funkcija gustine ove slučajne promenljive

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\ ,0 \leq x \leq 1$$

Neka je $0 \leq \rho \leq 1$, tada je:

$$\int_0^\rho f(x)dx = \frac{2}{\pi} arcsin\sqrt{q}$$

Važi :

$$\sum_{k<\rho n} p_{2k,2n} \approx \int_0^\rho f(x)dx = \frac{2}{\pi} arcsin\sqrt{q} \tag{4.7}$$

Primer 4.2: Neka je $\rho = \frac{1}{2}$, tada ubacivanjem u (4.7) dobijamo:

$$\sum_{k<\frac{1}{2}n} p_{2k,2n} \approx \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{2}{\pi} arcsin\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dakle verovatnoća da slučajno lutanje bude pozitivno u najviše n rundi od ukupno $2n$ rundi je $\frac{1}{2}$.

Problem glasačkih listića

Slučajno lutanje možemo posmatrati i kao graf kroz tačke $(0,0)$, $(1, S_1)$, $(2, S_2)$,...(n, S_n).

Uvodimo p i q, tako da važi:

$$n = p + q, x = p - q$$

Dakle p predstavalja broj pozitivnih koraka, dok je q broj negativnih.

Teorema 4.1: Verovatnoća da se slučajno lutanje koje kreće iz $(0,0)$ i završava se u (n, x), $x > 0$ nikada ne vrati u nulu jednaka je $\frac{x}{n}$.

Posledica 4.1: Neka na izborima jedan kandidat osvoji p glasova, a drugi $q < p$ glasova. Tada je verovatnoća da će prvi voditi tokom celog prebrojavanja glasanja jednaka $\frac{p-q}{p+q}$.

Dokaz teoreme: Ukupan broj putanja do $(n, x) = (p + q, p - q)$ je

$$N = N_{n,x} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$$

Od toga N_+ prolazi kroz $(1,1)$, dok N_- prolazi kroz $(1,-1)$. Gde je $N = N_+ + N_- = N_{n-1,x-1} + N_{n-1,x+1}$.

Neka je P broj putanja od $(0,0)$ do (n, x) gde je $S_i > 0$ za svako $i > 0$. Onda je, po principu refleksije:

$$P = N_+ - N_-$$

Pa je

$$P = 2N_+ - N$$

Kako je

$$N_+ = N_{n-1,x-1} = \binom{p-q-1}{p-1}$$

Imamo

$$\frac{N_+}{N} = \frac{\binom{p-q-1}{p-1}}{\binom{p+q}{p}} = \frac{p}{p+q}$$

Dok je verovatnoća da se slučajno lutanje koje počinje u $(0,0)$ i završava se u (n, x) nikada ne vrati u nulu:

$$\frac{P}{N} = \frac{2p}{p+q} - 1 = \frac{p-q}{p+q} = \frac{x}{n}$$

■

Ovim smo dokazali još jedno važno svojstvo slučajnog lutanja, koje je svoju primenu našlo u fizici kao i u statistici poretka. Za ovu glavu korišćena je literatura [4], [6], [10].

Slučajno lutanje u finansijskoj matematici

U ovoj glavi pokazaćemo konkretnu primenu slučajnog lutanja u finansijskoj matematici. Videćemo kako se binomni model koristi za procenu vrednosti finansijskih derivata. Kako je za postavljanje ove teorije potrebno poznavanje elementarnih pojmova iz finansijske matematike, ovo glavu ćemo započeti pričom o finansijskim sredstvima, opcijama i kamatnom računu, pa tek onda preći na binomni model.

Finansijska sredstva

Pojam **sredstvo** podrazumeva sve ono što ima neku vrednost prilikom zamene. Sredstva delimo na materijalna sredstva i na nematerijalna sredstva. Vrednost **materijalnih sredstava** zavisi od određenih fizičkih svojstava(npr.: da li uključuje građevine, zemljište, mašine...). Materijalna sredstava možemo dalje podeliti na ona koja se mogu reprodukovati (mašine, građevine...) kao i one koje se ne mogu reprodukovati (zemljišta, umetnička dela...). **Nematerijalna sredstva**, sa druge strane, predstavljaju prava na neke pogodnosti u budućnosti, tu spadaju patenti, autorska prava i slično.

Pod pojmom **vrednosnih papira** (finansijska sredstva) smatramo ona nematerijalna sredstva čije buduće pogodnosti podrazumevaju prava na određene novčane naknade u budućnosti. Lice koje se obavezuje na plaćanje u budućnosti naziva se **izdavalac**, dok se vlasnik vrednosnih papira naziva **investitor**.

Pojam **portfolio** podrazumeva svaki skup vrednosnih papira koji su u vlasništvu investitora. Vrednosni papiri mogu biti sa **fiksnim prihodom** ili sa **prihodom koji nije fiksiran**. Pod vrednosne papire se fiksnim prihodom ubrajamo: obične i oročene uloge u banci, vrednosni papiri koje izdaje država (blagajnička novčanica, blagajnički zapisi, obveznice, blagajničke trake), hipoteke, anuiteti (ovde nećemo detaljnije ulaziti u to šta svaki od ovih finansijskih instrumenata predstavlja, više o tome može se naći u [7]). Najvažniji vrednosni papiri kod kojih prihod nije fiksiran su **akcije**. Onaj ko poseduje akcije neke firme je u određenom procentu vlasnik te firme. Akcije imaju svoju cenu, one se mogu kupovati i prodavati, odnosno njima se može trgovati, što se uglavnom radi na berzi. Kod nekih akcija se s vremena na vreme vlasnicima uplaćuju dividende – koje predstavljaju procenat profita koji je firma zaradila i koji se deli procentualno broju akcija. Kako kod akcija prihod nije unapred poznat, javlja se potreba za razvijanjem matematičkih modela koji bi tu cenu „predvideli“. Osim modeliranja cena akcija moguće je modelirati i cene opcija. Opcije su takozvani finansijski derivati, odnosno to su vrednosni papiri koji se odnose na neke druge vrednosne papire (obično akcije) i čija je cena izvedena iz cena tih drugih vrednosnih papira. Kako ćemo se u ovoj glavi baviti primenom binomnog modela na opcije, sada ćemo reći nešto detaljnije o tome šta su opcije, i navesti neke njihove osobine i podele.

Opcije i njihove osobine

Kao što smo rekli opcije su finansijska sredstva koja spadaju u finansijske derivate. Finansijski derivati se karakterišu time da njihova vrednost zavisi, odnosno izvedena je, iz vrednosti nekih drugih vrednosnih papira, koje ćemo zvati podloga. Najpoznatija vrsta finansijskih derivata su opcije, a najčešća podloga su akcije.

Definicija 5.1. **Opcija** je finansijski ugovor kojim se stiče pravo, ali ne i obaveza, da se kupi (kupovina opcija - call option) ili proda (prodaja opcija - put option) akcija, ili neki drugi vrednosni papir, pod dogovorenim uslovima.

Uslovi koji su prisutni u tom ugovoru su sledeći:

a. Ugovorena cena ili cena po isteku ili na dospeću (strike price) vrednosnog papira na koji se odnose.
b. Ugovoreno vreme do isteka opcije (time to maturity, strike time).

Ugovorenu cenu, po kojoj se može kupiti, odnosno prodati vrednosni papir ćemo obeležavati sa K, a vreme do isteka opcije sa T. Početnu cenu vrednosnog papira, na koji se odnosi opcija, u trenutku sklapanja ugovora označavamo sa S_0, a cenu u trenutku T sa S_t, $0 \leq t \leq T$.

U zavisnosti od toga da li se ugovor odnosi na kupovinu ili prodaju vrednosnog papira imamo dve vrste opcija:

a. **Kol opcija**- daje pravo ali ne i obavezu kupovine vrednosnog papira po unapred dogovorenoj ceni K.
b. **Put opcija**- daje pravo ali ne i obavezu prodaje vrednosnog papira po unapred dogovorenoj ceni K.

U pogledu vremena izvršenja opcije osnovne su dve vrste opcija:

a. **Evropske**- mogu da se aktiviraju samo u ugovoreno vreme T.
b. **Američke**- mogu da se aktiviraju u bilo kom trenutku vremena koji je manji ili jednak ugovorenom vremenu T.

Cenu američke kol opcije obeležavamo sa C, cenu evropske kol opcije sa c, američke put sa P, evropske put sa p.

Pretpostavimo da imamo kol opciju sa vremenom isteka T i ugovorenom cenom K. Označimo sa S_T cenu akcije na koju se opcija odnosi u trenutku isteka T. Koliko vredi kol opcija u tom trenutku?

-Ako je $S_T < K$, vrednost opcije je nula jer nećemo kupovati akciju za cenu K, kada je na tržištu možemo kupiti jeftinije za cenu S_T.

-Ako je $S_T > K$, tada opcija ima vrednost jer nam daje mogućnost da akciju, čija je vrednost S_T u trenutku T, kupimo po nižoj ugovorenoj ceni K. Aktiviranjem opcije kupujemo akciju po ceni K, koju možemo odmah da prodamo po ceni S_T i ostvarimo profit $S_T - K$. Dakle vrednost kol opcije u trenutku isteka T jednaka je:

$$c = \max\{S_T - K, 0\} \tag{5.1}$$

Stvar je obrnuta kada je u pitanju put opcija – ona daje pravo ali ne i obavezu prodaje vrednosnog papira po ugovorenoj ceni K u ugovoreno vreme T. Ako imamo put opciju onda:

-Ako je u trenutku isteka $S_T > K$, put opcija je bezvredna, jer nema smisla prodavati akciju po ceni K ako to možemo uraditi na tržištu po većoj ceni S_T.

-Ako je u trenutku isteka $S_T < K$, onda put opcija ima vrednost. Možemo kupiti na berzi akciju po ceni S_T i prodati je po ceni K i tako ostvariti profit $K - S_T$, što predstavlja i vrednost put opcije u tom trenutku. Prema tome, formula za vrednost evropske put opcije u trenutku isteka je:

$$p = \max\{K - S_T, 0\}$$

Kamatne stope i sadašnja vrednost novca

Kako binomni model podrazumeva modeliranje cena u budućnosti, to nam je za preciznu procenu vrednosti opcija potrebno poznavanje kamatnog računa. Za kamatu se kaže da predstavlja vrednost novca izraženu u funkciji vremena.

Glavnica i kamata su opštepoznati pojmovi. Ako se uloži ili investira 1$ u banku koja daje kamatu od 8% godišnje, onda će na kraju godine na računu biti glavnica od 1$ plus kamata od 0.08$, odnosno ukupno 1.08$. Ako se uložilo A dolara, na kraju godine račun bi porastao na $1.08A$ dolara. U opštem slučaju ako je kamata ili kamatna stopa r, koja se izražava u decimalama, onda će početni ulog posle godinu dana biti pomnožen sa faktorom $(1 + r)$ i biti jednak $A(1 + r)$.

Postoje različiti načini obračunavanja kamate:

i. Prosto kamaćenje.
ii. Složeno kamaćenje.
iii. Složeno neprekidno kamaćenje.

Kod prostog kamaćenja suma na računu raste linearno sa vremenom. Ako je glavnica A, a godišnja kamatna stopa r, nakon perioda od dve godine imaćemo $A(1 + 2r)$, generalnije nakon svakog intervalu dužine t (izraženog u godinama) na računu imamo $A(1 + tr)$.

Kod složenog kamaćenja nakon svakog perioda na koji se kamata obračunava vrednost kamate se dodaje glavnici pa se nova kamata računa na ovu, uvećanu, vrednost glavnice. Dakle ako se radi o kamati na godišnjem nivou, tokom druge godine investitor će zaraditi i kamatu na kamatu. Ako je glavnica A, a godišnja kamatna stopa r, nakon perioda od godinu dana imaćemo $A(1 + r)$, dakle isto kao i kod prostog kamaćenja, nakon perioda od dve godine imaćemo $A(1 + r)^2$, nakon n godina na računu imamo $A(1 + r)^n$.

Neprekidno kamaćenje ne mora biti obračunato na period od godinu dana. Kada se kamata obračunava na period dužine $\frac{1}{m}$, tada nakon godinu dana na računu imamo $A\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$. Složeno neprekidno kamaćenje je složeno kamaćenje kod kojeg $m \to \infty$, odnosno kod koga se u svakom trenutku obračunava kamata i dodaje na glavnicu. Ako u banku uložimo glavnicu od A dolara. Nakon godinu dana složenog neprekidnog kamaćenja, sa godišnjom kamatnom stopom r imaćemo vrednost:

$$V = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^m = Ae^r$$

Nakon perioda dužine t (izraženog u godinama), imamo vrednost:

$$V = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm} = Ae^{tr}$$

Primer 5.1: Ako se pozajmi 1000$, na godinu dana sa kamatnom stopom od 8% godišnje, obračunatom tromesečno, koliki je dug na kraju godine?

Kamata od 8% godišnje obračunata tromesečno, znači složenu kamatu od 2% za tromesečje.

Posle prvog tromesečja, dug je $1000(1+0.02)$.

Posle drugog tromesečja, dug je $1000(1+0.02)^2$.

Na kraju godine, dug je $1000(1+0.02)^4 = 1082.4\$$.

Kamatni račun, koji smo do sada posmatrali, daje pravilo po kome se novac uložen u banku uvećava u budućnosti. Tu je glavno pitanje bilo kako odrediti buduću vrednost za neku današnju sumu novca. Posmatrajmo i obrnut problem: pronaći današnju vrednost, novca koji ćemo dobiti u nekom trenutku u budućnosti.

Razmotrimo sledeću situaciju:

1. Za godinu dana dobijamo 110$.
2. Dobijamo 100$ sada koje ulažemo u banku sa kamatom od 10%, gde sa kamata obračunava na godišnjem nivou.

U oba slučaja za godinu dana imaćemo 110$. Može se reći da je dobijanje 110$ kroz godinu dana ekvivalentno dobijanju 100$ sada, pri kamatnoj stopi od 10%. Kaže se da iznos 110$ kroz godinu dana ima sadašnju vrednost od 100$,pri kamatnoj stopi od 10%.

Dakle ako kroz period t, vrednost novca iznosi A, i ako je godišnja kamatna stopa r, sadašnja vrednost novca iznosi:

1. $\frac{A}{1+rt}$ –ukoliko je u pitanju prosto kamaćenje.
2. $\frac{A}{(1+r)^t}$ –ukoliko je u pitanju složeno kamaćenje.

3. $\frac{A}{e^{-rt}}$ –ukoliko je u pitanju složeno neprekidno kamaćenje.

Mi ćemo prilikom korišćenja binomnog modela podrazumevati da se radi o složenom neprekidnom kamaćenju.

Geometrijsko slučajno lutanje

Određivanje cena akcija binomnim modelom, predstavlja jednu od primena slučajnog lutanja. Međutim kod ovog modela ne koristimo slučajno lutanje kakvo smo pominjali do sada u radu već koristimo geometrijsko slučajno lutanje. Slučajno lutanje smo definisali na sledeći način:

$$P(S_{n+1} = i + 1 | \, S_n = i) = p \, ; \; P(S_{n+1} = i - 1 | \, S_n = i) = q = 1 - p$$

Dakle ako se slučajni proces nalazi u trenutku n u stanju i, on se u sledećem trenutku moze naći u stanju $i + 1$ sa verovatnoćom p , odnosno u stanju $i - 1$ sa verovatnoćom q.

Takođe smo u formuli (2.4) pomenuli jedno od uopštenja slučajnog lutanja kod koga korak nije jedinični:

$$P(S_{n+1} = i + u | \, S_n = i) = p \, ; \; P(S_{n+1} = i - u | \, S_n = i) = q = 1 - p \qquad (5.2)$$

Geometrijsko slučajno lutnje je slučajno lutanje sa sledećim verovatnoćama prelaska:

$$P(S_{n+1} = iu | \, S_n = i) = p \, ; \; P\left(S_{n+1} = \frac{i}{u} | \, S_n = i\right) = q = 1 - p, \qquad u \neq 0{,}1 \qquad (5.3)$$

Jednostavnom transformacijom jednačine (5.3) dobijamo jednačinu (5.2), odnosno transformacijom geometrijskog slučajnog lutanja dobijamo slučajno lutanje (kod koga korak nije jedinični).

Binomni model sa jednim korakom za kol opcije

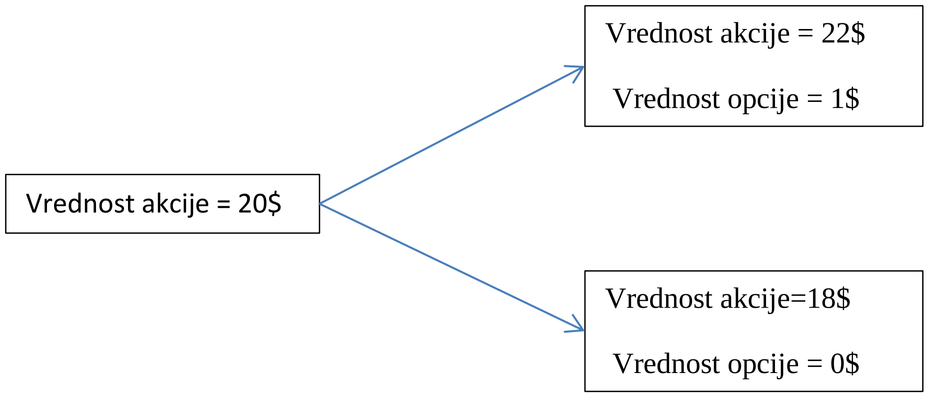
Kod binomnog modela sa jednim korakom pre svega se fiksira dužina osnovnog perioda (na primer jedna nedelja). Pretpostavlja se da ako je cena akcije poznata na početku ovog perioda, i iznosi S, na početku sledećeg perioda cena može da uzme samo dve vrednosti: cena akcije može da poraste za faktor $u > 1$ i da iznosi uS, ili da opadne do dS za faktor $d < 1$.

Pretpostavimo da su verovatnoće koje odgovaraju tim dvema mogućnostima: p i $1 - p$. Dakle cena akcije na početku drugog perioda je slučajna promenljiva S_1 sa sledećom raspodelom:

$$S_1 : \begin{pmatrix} uS & dS \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

Model je određen ako je poznata jedinica vremena u kojoj se promene cena dešavaju, kao i faktori u, d i verovatnoća p.

Primer 5.2: Neka je cena akcije u početnom trenutku 20$, i neka znamo da nakon tri meseca ona može biti 22$ ili 18$. Posmatramo evropsku kol opciju sa cenom na dospeću od 21$ (dospeće je nakon tri meseca). Ova opcija može imati dve vrednosti u trenutku dospeća: ako cena akcije bude 22$, vrednost opcije će biti 1$; ako cena akcije bude 18$, tada će vrednost opcije biti 0 (slika 5.1.).



slika 5.1.

Prilikom teorijskog izučavanja cena opcija pretpostavljamo da ne postoji arbitraža, odnosno pravljenje sigurnog profita bez rizika. U praksi ako se takva mogućnost i pojavi, odmah se uoči i iskoristi i cene se brzo promene tako da takva mogućnost nestane.

Da bi odredili cenu opcije postavljamo portfolio akcije i opcije tako da nema neizvesnosti u pogledu vrednosti portfolija nakon tri meseca. Kako portfolio nema rizika, njegova vrednost na kraju ovog perioda bi trebala biti jednaka vrednosti koju bi dobili ulaganjem novca u banku po bezrizičnoj kamatnoj stopi.

Neka portfolio sadrži Δ akcija koje smo kupili i jednu evropsku kol opciju koju smo prodali, računamo vrednost za Δ, tako da portfolio bude bezrizičan.

Ako vrednost akcije ode na 22$, tada će vrednost portfolija biti $22\Delta - 1$. Ako vrednost akcije padne na 18$ tada će vrednost portfolija biti $18\,\Delta$. Portfolio je bezrizičan ako su ove dve vrednosti jednake, pa imamo:

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

$$\Delta = 0.25$$

Vrednost portfolija nakon tri meseca iznosi:

$$22 * 0.25 - 1 = 18 * 0.25 = 4.5$$

Ako je bezrizična kamata 12% na godišnjem nivou. To znači da cena portfolija na početku treba da bude:

$$4.5e^{-0.12*3/12} = 4.367$$

Pa ako sa f označimo cenu opcije, treba da važi

$$20 * 0.25 - f = 4.367$$

Odnosno

$$f = 0.633$$

■

Ovaj primer možemo generalizovati posmatranjem akcije čija je cena S_0 i opcije, vezane za tu akciju, čija je cena f. Neka je period dospeća opcije T i neka u tom periodu cena akcije može porasti na S_0u, gde je $u > 1$, ili pasti na S_0d, gde je $d < 1$. Ako cena akcije poraste do S_0u, dobit od opcije označićemo sa f_u, ako cena akcije padne na S_0d dobit od opcije označićemo sa f_d. Ako ponovo posmatramo portfolio sastavljen od Δ akcija koje smo kupili i jednu evropsku kol opciju koju smo prodali, postavljanjem uslova za bezrizičnost dobijamo:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

Odnosno

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}$$

Pa ako sa r označimo bezrizičnu kamatnu stopu, vrednost portfolija u početnom trenutku je:

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Cena postavljanja portfolija je:

$$S_0\Delta - f$$

Pa izjednačavanjem dobijamo:

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT} = S_0\Delta - f$$

Odnosno

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_ue^{-rT}$$

Pa ubacivanjem vrednosti za Δ, dobijamo:

$$f = e^{-rT}(pf_u + (1-p)f_d) \tag{5.4}$$

Gde je

$$p = \frac{e^{-rT} - d}{u - d} \tag{5.5}$$

Time smo dobili jednačine kojim možemo izračunati vrednost opcije u opštem slučaju.

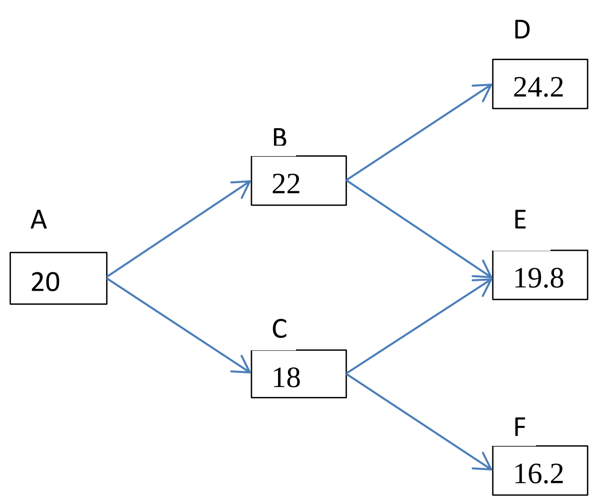
Binomni model sa više koraka za kol opcije

Može da se pretpostavi da ovakav model važi i za više koraka. Sa porastom broja koraka dobijamo sve složeniju mrežu. Verovatnoća kretanja naviše po rešetki je p, a naniže je $1 - p$.

Binomni model na prvi pogled deluje jednostavno, jer dopušta samo dve vrednosti akcija za naredni period. Međutim, ako su dužine perioda male, posle kratkog vremena pojavi se dosta mogućih vrednosti: posle n perioda postoji $n + 1$ moguća vrednost koju cena akcije može da uzme. Pošto je model multiplikovan, cena nikad neće postati negativna. Proširimo sada primer 5.2 na slučaj kada postoje dva koraka:

Primer 5.3: Neka je cena akcije u početnom trenutku 20$ i neka u periodu od 3 meseca ova cena može porasti ili se smanjiti za 10%. Neka je ugovorena cena evropske opcije ponovo 21$ i neka je godišnja kamata 12%.

Ponovo možemo ilustrovati grafički (slika 5.2)



slika 5.2

Cilj nam je da izračunamo vrednost opcije u početnom trenutku, odnosno u tački A sa slike 5.2. Ovo možemo uraditi tako što ćemo rekurzivno ponavljati algoritam koji se odnosi na stablo sa jednim korakom. Cene opcija u krajnjim listovima ovog stablo-list dijagrama, jednostavno, računamo po formuli (5.1) . Dakle u listu D vrednost je $24.2 - 21 = 3.2$, dok je u listovima E i F vrednost 0, jer je cena akcije manja od 21.

Takođe je jednostavno i izračunati vrednost opcije u listu C, jer kako list C vodi do listova E i F u kojima je vrednost opcija 0, to je vrednost opcije u ovom listu takođe nula.

Za računanje vrednosti opcije u tački B koristimo formule (5.4) i (5.5). Kako je $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.12$, $T = 0.25$, to ubacivanjem ovih vrednosti u formulu (5.5) dobijamo da je $p = 0.6523$. Na osnovu (5.4) računamo vrednost opcije u tački B:

$$e^{-0.12*0.25}(0.6523 * 3.2 + 0.3477 * 0) = 2.0257$$

Sada kada znamo vrednost opcije u listovima B i C, preostaje nam da odredimo vrednost u listu A. Ovu vrednost računamo ponovnom primenom jednačine (5.4):

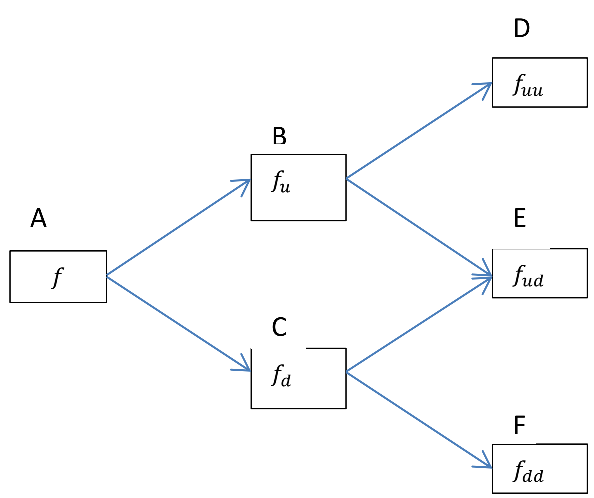
$$f = e^{-0.12*0.25}(0.6523 * 2.0257 + 0.3477 * 0) = 1.2823$$

Dakle vrednost ove opcije u početnom trenutku je 1.2823.

■

Sada ćemo, kao i u slučaju binomnog modela sa jednim korakom, pronaći formule za računanje vrednosti opcije u opštem slučaju, za binomni model sa dva koraka.

Obeležimo vrednost opcije u svakom listu, kao na slici 5.3



slika 5.3

Primenom jednačine (5.4), dobijamo:

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) \tag{5.6}$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}) \tag{5.7}$$

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d) \tag{5.8}$$

Zamenom jednačina (5.6) i (5.7) u jednačinu (5.8), dobijamo:

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}) \tag{5.9}$$

Gde je:

$$p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d} \tag{5.10}$$

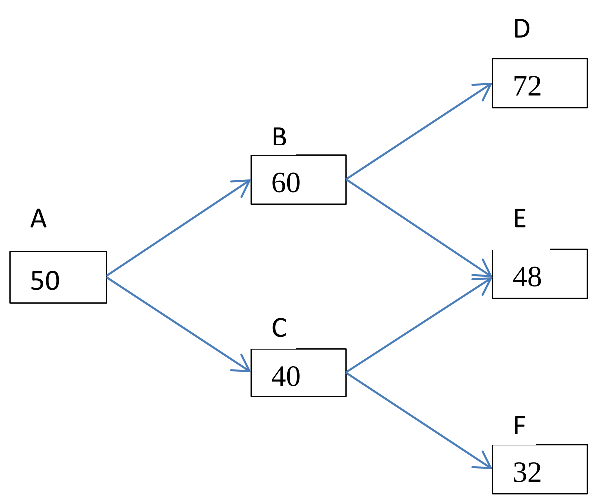
Time smo dobili formule za računanje vrednosti kol opcije kod stabla sa dva koraka. Analogno, ove formule možemo proširiti za računanje vrednosti kol opcija kada stablo ima više koraka.

Binomni model za evropske put opcije

Vrednovanje evropskih put opcija je slično vrednovanju evropskih kol opcija, razlika je praktično u tome kako se računa vrednost u pojedinačnim listovima.

Primer 5.4: Neka je trenutna cena akcije 50$, posmatramo put opciju nad tom akcijom sa cenom na dospeću 52$. Pretpostavimo da postoje dva vremenska koraka sa periodom od jedne godine i da u svakom koraku cena akcije poraste za 20% ili se smanji za 20%. Pretpostavljamo, takođe, da je bezrizična kamatna stopa 5%, na godišnjem nivou.

Stablo-list dijagram sada izgleda kao na slici 5.4.



slika 5.4

Sada je $u = 1.2$, $d = 0.8$, $\Delta t = 1$ i $r = 0.05$. Da bi izračunali p, i za put, kao i za kol opcije, koristimo formulu (5.10)

$$p = \frac{e^{-0.05*1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

Cena akcije u listu D je 72$, pa je put opcija u tom slučaju bezvredna. U listu E akcija vredi 48$, pa u tom slučaju put opcija vredi $52\$ - 48\$ = 4\$$. U listu F akcija vredi 32$, pa je vrednost opcije u tom listu $52\$ - 32\$ = 20\$$. Ako koristimo notaciju sa slike 5.3, možemo napisati, $f_{uu} = 0, f_{ud} = 4, f_{dd} = 20$. Pa iz jednačine (5.9) sledi:

$$f = e^{-2*0.05*1}(0.6282^2 * 0 + 2 * 0.6282 * 0.3718 * 4 + 0.3718^2 * 20) = 4.1923$$

Dakle vrednost ove put opcije je $4.1923\$$.

■

Postoje brojna uopštenja binomnog modela koji je u ovoj glavi izložen, ali sva ona polaze od činjenice da ako je u jednom trenutku cena akcije S_0, ona u sledećem trenutku može uzeti vrednost uS ili dS, dakle u osnovi je uvek slučajno lutanje. Uopštenja uglavnom uzimaju u obzir trend u rastu cena akcija, volatilnost i druge osobine tržišta akcija. Pored binomnog modela za procenu cene finansijskih derivata često se koristi i Blek-Šol model koji se bazira na geometrijskom Braunovom kretanju i koji je praktično neprekidna verzija binomnog modela. Za ovu glavu korišćena je literatura [7], [8] i [9].

Literatura

[1] J. Michael Steele: Stochastic calculus and financial applications, Springer 2000.

[2] Samuel Karlin, Howard M. Taylor: A first course in stochastic processes, 2. izdanje, Academic press, New York, 1975.

[3] Wolfgang Woess: Denumerable Markov chains, European Mathematical Society, 2009.

[4] William Feller: An introduction to probability theory and its applications, vol. 2, John Wiley & Sons, Inc.; 2. izdanje 1971.

[5] Pavle Mladenović: Verovatnoća i statistika, 4.izdanje, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[6] Oliver Knill: Probability theory and stochastic process with applications, Overseas press, India, 2009.

[7] Slobodanka Janković : Elementi finansijske matematike, Beograd 2015.

[8] John C. Hull: Options, Futures and Other Derivatives, 5th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[9] Sergio M. Focardi & Frank J. Fabozzi: The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management, Willey, April 2004.

[10] C. McMullen: Probability Theory, Course Notes-Harvard University, 2011.