Математички факултет
Универзитет у Београду

МАСТЕР РАД

ТЕМА: Методички проблеми код увођења реалних бројева у VII разреду

Ментор:
Проф. Александар Липковски

Студент:
Марина Комарица 1101/2013

Београд, септембар 2016.

Садржај

1 Увод

Проблеми наставе представљају питања која су стално отворена и занимљива. Због традиционалних и неоправданих предрасуда она добијају на значају када се односе на наставу математике.

Математика, као један од захтевнијих предмета у школи, а самим тим и често најнеомиљенији предмет међу ђацима, често је главна тема стручних критичара. Сматрам да је тај проблем одавно настао, а узрок проблема се крије у методици наставе математике.

Оно што је најтеже у свакој настави, а поготово у настави математике (тј. настави математичког образовања), јесте систематизовање и повезивање градива у чврсте, активне целине. Не само лаици него и многи наставници сматрају да је решавање задатака кључно, па чак и да ништа друго не треба радити него само учити ученике да решавају задатке. Отуда и велика трка за задацима, што је заблуда, а самим тим и кључ већ поменутог проблема. Битно је шватити да се математика не учи, као много штошта друго, већ се улази у ,,свет математике". А улази се не туђим објашњавањем већ сопственим мишљењем. Пре свега, ученик се не може оспособити за решавање задатака ако пре тога није ушао у одговарајућу теорију, ако није ту теорију самостално (разумљиво уз помоћ наставника и уџбеника) открио. Без тога се задаци решавају шаблонски. Задаци су, наравно, потребни, али су корисни после увођења ученика у одговарајућу област, да продубе, прошире и наставе већ стечена знања ученика.

Задатак методике наставе математике јесте да пронађе и покаже како се ученик оспособљава да мисли, да мисли продуктивно и да савлађује тешкоће. Јер у математичком образовању ништа није лако. Пут математичког образовања није ништа друго него низ препрека и тешкоћа које се морају савладати искључиво сопственим мисаоним радом.

Настава математике у основној школи представља темељ за даље учење математике, па грешке учињене на том нивоу школовања, по свим елементима, остављају тешко отклоњиве последице. Оне су фактор који ограничава оптималан успех ученика у савлађивању наставног садржаја.

Тема овог рада јесу реални бројеви. Могу рећи, на основу свог кратког искуства, да је то једна од омиљенијих области математике међу ученицима, насупрот геометрије. Кроз рад ћу се трудити да укажем на што више методичких проблема који могу настати приликом увођења реалних бројева у седмом разреду са којима сам се ја сусрела, као и начин на који сам увела ученике у већ поменуту област.

Пре свега, представићу кратак преглед онога што су ученици већ савладали о бројевима у претходним разредима.

2 Скупови

2.1 Скуп. Елемент скупа. Представљање скупова

Скуп је један од основних појмова у математици и описује се као мноштво (или целина) објеката који имају неку заједничку особину или својство. Скупови се обележавају великим словом латинице.
У математици су од највећег значаја скупови који су састављени од цифара, бројева, геометријских фигура или других математичких објеката.

Дефиниција **1**. За сваки објекат који је у неком скупу кажемо да припада том скупу и да је елемент тог скупа. У супротном кажемо да он не припада том скупу, то јест да није његов елемент.

На пример, шаргарепа је елемент скупа поврћа, док трешња није елемент тог скупа.
Скуп се може представљати на разне начине. Један од најче71их начина је навођење стварних објеката (елемената) који се записују унутар витичастих заграда, које су ознака скупова ($A =$ {шаргарепа, краставац, лук, кромпир}, A је скуп поврћа). Елементи скупа се раздвајају запетама и редослед навођења није битан. Испред отворене витичасте заграде стоји велико латинично слово којим је означен тај скуп, повезано знаком једнакости са заградом.
Једна од основних карактеристика неког скупа јесте број елемената тог скупа. Број елемената скупа K обележава се са $n(K)$. Скупови се могу представљати и тако што се не наброје сви елементи, него само својство којим је тај скуп одређен, при чему се користе витичасте заграде као и велико слово латинице којим је означен тај скуп. Овај начин представљања скупа је врло користан када скуп има велики број елемената. Општи облик записа неког скупа K на овај начин је:
$K =$ { овде наводимо ознаку елемената | особине које одређују елементе скупа }.
Усправна црта | се чита ,,таквих да" или ,,са својством".
На пример: $D = \{x|3 < x < 13\}$

Дефиниција **2**. Скуп који нема елемената назива се празан скуп и означава симболом $\varnothing$.

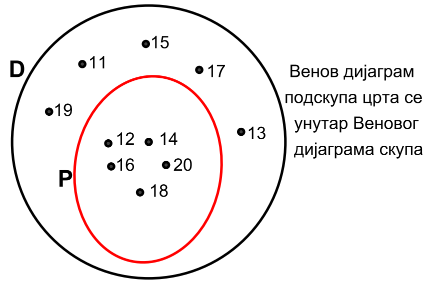
Празан скуп означавамо са $\varnothing$, а не са $\{\varnothing\}$.

Постоје разни графички начини представљања скупова, при чему је битно да се на јасан начин издвоје елементи скупа. Како би се избегла непрецизност и произвољности при графичком начину приказивања скупа прихваћен је начин приказивања такозваним Веновим дијаграмом. Код таквог начина приказивања, елементи се издвајају (ограђују) затвореном линијом (правилног или неправилног облика). Та линија одваја елементе скупа који су унутар ње и припадају датом скупу, од оних који су ван ње и том скупу не припадају.

2.2 Подскуп скупа. Једнакост скупова

Дефиниција **3**. Ако су сви елементи скупа A истовремено и елементи скупа B, онда је скуп A подскуп скупа B и записујемо $A \subset B$. Запис $A \subset B$ читамо: скуп A је подскуп скупа B. За скуп B кажемо да је надскуп скупа A и пишемо $B \supset A$.

Пример: Нека је D скуп бројева друге десетице, то јест $D = \{11, 12, 13, ..., 20\}$. Нека је P скуп чији су елементи сви парни бројеви из скупа D, то јест $P = \{12, 14, 16, 18, 20\}$. Онда је скуп P подскуп скупа D, $P \subset D$.



Теорема **1**. Празан скуп је подскуп сваког скупа ($\varnothing \subset A$, за било који скуп A). Сваки скуп је подскуп самог себе ($A \subset A$, за било који скуп A).

Пример: Посматрајмо скупове $A = \{3, 1, 5, 9, 7\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Сваки елемент скупа A јесте елемент и скупа B, то јест $A \subset B$, и сваки елемент скупа B јесте елемент и скупа A, то јест $B \subset A$. За скупове A и B кажемо да су једнаки, краће пишемо $A = B$.

Дефиниција **4**. Два скупа су једнака ако имају исте елементе, то јест ако је сваки елемент првог скупа елемент и другог скупа, и сваки елемент другог скупа јесте елемент и првог скупа.

Теорема **2**. За скуп није битно којим редоследом су записани његови елементи (значи $\{a, b\} = \{b, a\}$), нити да ли је исти елемент записан више пута (значи $\{a, a\} = \{a\}$).

За једнаке скупове кажемо да су еквивалентни.

2.3 Операције са скуповима

2.3.1 Пресек скупова

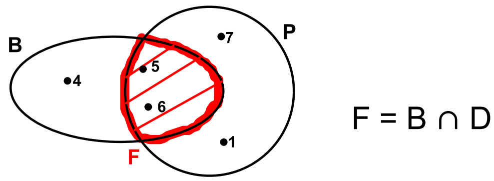
Дефиниција **5**. Пресек било која два скупа јесте нови скуп чији су елементи само они који припадају и једном и другом скупу.

Дакле, пресек два скупа чине сви њихови заједнички елементи. Пресек скупова A и B означава се са $A \cap B$ (чита ,,A пресек B") или $B \cap A$.

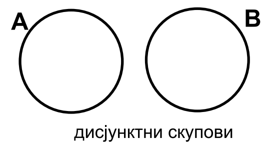
Теорема **3**. За свака два скупа A и B важи $A \cap B = B \cap A$.

Венов дијаграм скупова који имају једнаких елемената приказујемо тако што их једним делом преклопимо и у тај део запишемо елементе који су заједнички за оба скупа.

Пример: Дати су скупови $B = \{4, 5, 6\}$ и $D = \{1, 5, 6, 7\}$. Приказати Веновим дијаграмом њихов пресек.



Скупови који немају заједничких елемената називају се дисјунктни скупови.



Ако је A неки произвољан скуп који је подскуп неког скупа B, $A \subset B$, тада је њихов пресек сам скуп A, $A \cap B = A$.

2.3.2 Унија скупова

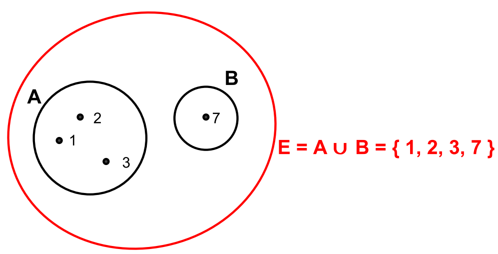
Дефиниција **6**. Унија било која два скупа јесте нови скуп чији су елементи само они који припадају једном или другом скупу.

Унија скупова се означава са $A \cup B$. Знак $\cup$ је симбол скуповне операције унија.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Теорема **4**. За било која два скупа A и B важи: $A \cup B = B \cup A$.

Пример: Дати су скупови $A = \{1, 2, 3\}$ И $B = \{7\}$. Тада важи да је $A \cup B = \{1, 2, 3, 7\}$.



Помоћу Веновог дијаграма лако се може доћи до закључка да се број елемената уније два скупа A и B рачуна помоћу једнакости:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Ако су скупови A и B дисјунктни тада је $n(A \cap B) = 0$, па у том случају важи да је:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Ако је A неки произвољан скуп који је подскуп неког скупа B, $A \subset B$, тада је њихова унија скуп B, $A \cup B = B$.

2.3.3 Разлика скупова

Дефиниција **7**. Разлика једног скупа, рецимо скупа A, од другог, рецимо B, јесте нови скуп чији су елементи сви они који припадају скупу A, а не припадају скупу B.

Разлика скупа A од скупа B означава се са $A \setminus B$ (чита ,, A разлика B" или ,, A без B"), а разлика скупа B од скупа A са $B \setminus A$.
Када формирамо разлику два скупа, из првог у запису избацујемо оне елементе који се налазе и у другом по реду записаном скупу. Дакле, при формирању разлике скупова $A \setminus B$ из скупа A избацујемо оне елементе који су заједнички елементи скупова A и B.

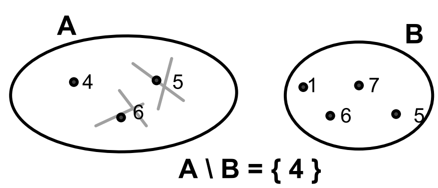
Теорема **5**. Ако је $A \neq B$ тада је $A \setminus B$ различито од $B \setminus A$.

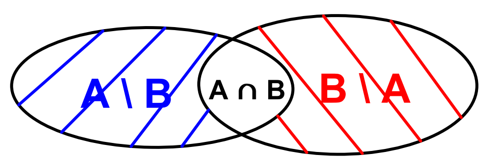
Пример: Посматрајмо скупове $A = \{4, 5, 6\}$ и $B = \{1, 5, 6, 7\}$. Тада је:

$$A \setminus B = \{4\},$$

односно

$$B \setminus A = \{1, 7\}.$$





Помоћу Веновог дијаграмо можемо доћи до закључка да важи:

$$n(A \backslash B) = n(A) - n(A \cap B).$$

Ако је $A \subset B$, тада се разлика $B \backslash A$ назива комплемент скупа A у односу на скуп B, који означавамо са ${A^c}_B$.

3 Скуп природних бројева

3.1 Уређење скупа природних бројева

Прво математичко знање које ученици стичу јесте знање о природним бројевима. Ученици већ у нижим разредима, од првог до четвртог савладају основне рачунске операције са позитивним бројевима.
Грана математике која се бави проучавањем рачунских операција са бројевима назива се аритметика (од грчке речи *aritmos* - број и *tehne* - умеће).

Пребројавањем колико неки скуп има чланова долазимо до појма броја један, броја два, броја три, ... , односно до појма природног броја. Цифре 0, 1, 2, ..., 9 су симболи помоћу којих се на јединствен начин може записати сваки природан број. Бројање се започиње најмањим природним бројем 1.

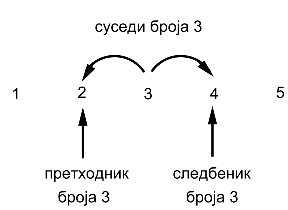
Скуп природних бројева означава се са $\mathbb{N}$, скраћеница од латинске речи *naturalis* = природно, а записује: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. Скуп $\mathbb{N}$ има бесконачно много елемената, па највећи природан број не постоји. Зато када набрајамо елементе скупа $\mathbb{N}$ на крају пишемо три тачке.

Скуп природних бројева је уређен, јер за свака два његова члана a и b важи: $a = b$ или $a < b$ или $a > b$.

Теорема **6**. Ако је $a \leq b$ и $b \leq c$, онда је $a \leq c$.

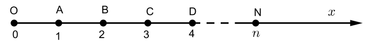
Два броја између којих нема других природних бројева називају се узастопни бројеви. Ако посматрамо разлику узастопних бројева, видимо да је она увек иста и једнака је 1 $(2-1, 3-2, 4-3, ...)$

Поред сваког броја, сем 1, у низу природних бројева налазе се друга два. За те бројеве кажемо да су му суседи (1 и 3 су суседи броја 2). Први мањи број назива се претходник, а први већи назива се следбеник посматраног броја. Дакле, разлика између броја и његовог претходника и броја и његовог следбеника увек је иста и једнака је 1.



Број 1 нема свог претходника у скупу $\mathbb{N}$ и за разлику од осталих бројева који имају по два суседа, он у скупу $\mathbb{N}$ има само једног.
Нула није природан број, али се често скупу природних бројева придружује и нула. Скуп природних бројева и броја 0 означава се са $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, или $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$, а назива проширен скуп природних бројева или скуп природних бројева и нуле.

Природни бројеви и 0 могу се представити на бројевној полуправој. Бројевна полуправа је одређена својим почетком и дужином јединичне дужи. На полуправу Ox, почев од почетне тачке O, наноси се произвољна дуж (која се назива подеона дуж), редом, надовезивањем. Почетку бројевне полуправе придрижен је број 0, а крајевима нанете дужи придружују се редом мерни бројеви $1, 2, 3, ...$



Дуж OA на полуправој Ox назива се јединична дуж. Њој је придружен мерни број 1, а свакој следећој тачки наредни мерни број. Упоређујући дужи на бројевној полуправој могу се упоређивати одговарајући природни бројеви. Полуправа Ox назива се бројевна полуправа.
За сваки природан број постоји тачка на бројевној полуправој која му одговара. Различитим природним бројевима одговарају различите тачке на бројевној полуправој.

3.2 Операције у скупу природних бројева

Ако је резултат примене операције над елементима неког скупа, елемент тог истог скупа, онда је тај скуп затворен за ту операцију (тј. операција је изводљива у том скупу).

Подсетимо се неких од основних особина математичких операција.

Додавањем јединице на било који број из $\mathbb{N}_0$ добија се његов следбеник који је такође број из скупа $\mathbb{N}_0$. Како је сабирање, у ствари, додавање одговарајућег броја јединица на неки број, закључак је да је у скупу $\mathbb{N}_0$ сабирање увек изводљиво.

Свако множење може се представити као сабирање одговарајућег броја истих сабирака ($3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$), што нас наводи на закључак да је у скупу $\mathbb{N}_0$ и множење увек изводљиво.

Међутим, резултат одузимања и дељења два броја из $\mathbb{N}_0$ не мора увек бити у том скупу, (на пример $15 - 18, 7 : 2$). Зато одузимање и дељење нису операције које су увек изводљиве у скупу $\mathbb{N}_0$, односно, то су операције које су условно изводљиве у скупу $\mathbb{N}_0$ $umanjenikvec1iodumanjioca$.

Да би разлика бројева a и b била из $\mathbb{N}_0$, односно да би одузимање било изводљиво у скупу $\mathbb{N}_0$, мора бити $a \geq b$.
Ако са k означимо количник бројева a и b, а са r остатак, тада је $a = b \cdot k + r$. Остатак је мањи од делиоца и важи $r \in \{0, 1, ..., b-1\}$. Ако је $r = 0$, онда је број a дељив бројем b, тј. количник тих бројева је из скупа $\mathbb{N}_0$.
Бројем 0 се не може делити, односно нула не може бити делилац.
Рачунска операција је:

- комутативна ако заменом места бројева резултат остаје исти.
- асоцијативна ако резултат остаје исти без обзира на то како смо здружили бројеве.

	комутативност	асоцијативност
сабирање	важи a+b=b+a	важи (a+b)+c=a+(b+c)
одузимање	не важи 24-5≠5-24	не важи (24 - 4) -2≠24- (4 - 2)
множење	важи a · b = b · a	важи (a · b) · c=a · (b · c)
дељење	не важи 24 : 4 ≠ 4 : 24	не важи (24 : 4) :2≠24: (4 : 2)

Број који не утиче на резултат рачунске операције назива се неутрални елемент.
Неутрални елемент за сабирање је 0, а за множење је 1.

За операције множења и сабирања важи:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ово својство се назива дистрибутивност множења у односу на сабирање.
Исто својство важи и за операцију множења и одузимања:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Дељење није дистрибутивно у односу на сабирање и одузимање.

4 Скуп целих бројева

Ученици брзо уоче да за свакодневни живот нису довољни само природни бројеви, јавља се потреба и за мањим, негативним бројевима.

Бројеви који су мањи од 0 за неки природан број називају се негативни цели бројеви.

Запис негативног целог броја састоји се од знака – и природног броја који указује за колико је тај број мањи од 0.

$$\mathbb{Z}^- = -1, -2, -3, ...$$

С тога, природни бројеви називају се још и позитивни цели бројеви, а скуп свих њих означава се са $\mathbb{Z}^+$. Испред позитивних бројева може се писати знак +, али, по договору, то се најче71е не чини.

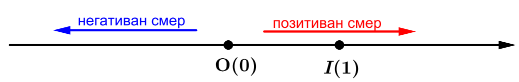
Бројеви већи од 0 су позитивни, а бројеви мањи од 0 су негативни. Број 0 није ни позитиван, ни негативан.

Скуп који чине позитивни цели бројеви, нула и негативни цели бројеви назива се скуп целих бројева и означава се са $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup 0 \cup \mathbb{Z}^+ = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

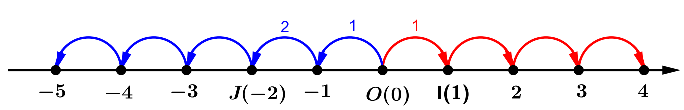
4.1 Бројевна права. Супротан број. Апсолутна вредност броја. Поређење целих бројева

Цели бројеви се могу представити на бројевној правој, која је одређена када на произвољној изабраној правој се одреде тачке које су придружене бројевима 0 и 1.



Броју 0 придружујемо једну произвољно изабрану тачку дате праве и означимо је словом O. Та тачка се назива координатни почетак. Усмерење праве (стрелица удесно, као и код бројевне полуправе) показује нам да бројеви слева удесно расту. Тај смер се назива позитиван смер, док смер здесна улево негативан смер (у том смеру бројеви опадају). Како је $1 > 0$, десно од тачке O уочавамо тачку I, коју додељујемо броју 1. Овим је одређена јединична дуж OI, то јест $OI = 1$.

Тачку која одговара позитивном целом броју одређујемо преносећи јединичну дуж од 0 удесно (одбројавајући у позитивном смеру) одговарајући број пута. Негативне бројеве на бројевној правој представљамо тако што за сваки од тих бројева наносимо јединичну дуж одговарајући број пута лево од координатног почетка O (одбројавајући у негативном смеру).



Број t коме је придружена тачка T бројевне праве назива се координата тачке T, и то записујемо на следећи начин: $T(t)$. Тако је координата тачке O број 0, координата тачке I број 1, а координата тачке J број -2. Бројевна права назива се још и координатна, или бројевна оса.

Сваком целом броју одговара тачно једна тачка бројевне праве.

За целе бројеве који су придружени симетричним тачкама бројевне праве кажемо да су супротни бројеви. Супротан број целог броја a је $-a$.

Дакле, супротан број броја 5 би био -5, броја 3 -3, а броја -4 би био 4.

Супротан број од супротног броја целог броја a је број a, то јест $-(-a) = a$.

Ако је A тачка бројевне праве додељена броју a тада је апсолутна вредност броја a, у ознаци $\mid a \mid$, једнака дужини дужи OA. Ознаку $\mid a \mid$ читамо: ,,апсолутно a".

Апсолутна вредност броја не може бити негативна, то јест $\mid a \mid \geq 0$ за свако a из Z.

Дакле, апсолутна вредност позитивног броја једнака је управо том броју, док је апсолутна вредност негативног броја једнака њему супротном броју. Специјално, $\mid 0 \mid = 0$.

Дефиниција **8**. Број $\mid a \mid$ једнак је броју a ако је $a > 0$, а броју $-a$ ако је $a < 0$. Апсолутне вредности супротних бројева су једнаке, то јест $\mid a \mid = \mid -a \mid$.

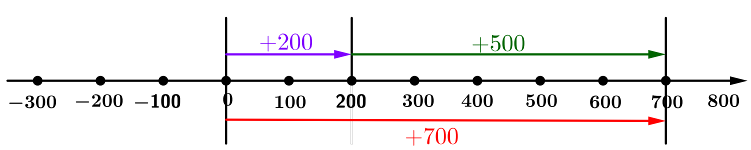
$$\mid a \mid = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

При представљању целих бројева на бројевној правој рекли смо да бројеви слева надесно расту. Дакле, ако имамо два броја представљена на бројевној правој, већи је онај који се налази са десне стране другог броја. Али заморно је, а није увек ни изводљиво, цртати бројевну праву да би се бројеви упоредили. Али зато, бројевна права нам може бити од велике помоћи како би извели опште закључке, а то су:

- Сваки позитиван број је већи од сваког негативног броја.
- Од два позитивна броја већи је онај чија је апсолутна вредност већа.
- Од два негативна броја већи је онај чија је апсолутна вредност мања.

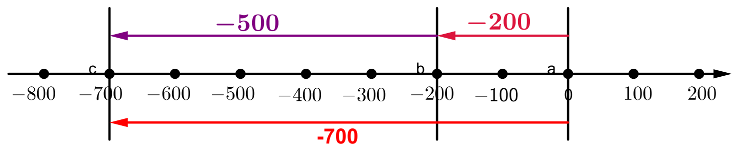
4.2 Сабирање и одузимање целих бројева

Пример:
a) Маша је од баке добила 200 динара и од тетке 500 динара. Колико је укупно новца Маша добила?



$$200 + 500 = 700$$

b) Маша је позајмила од брата 200 динара, а сутрадан још 500 динара. Колико износи Машин дуг?

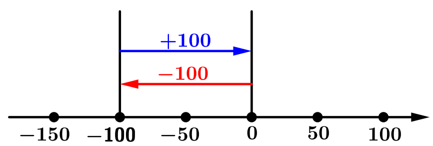


$$-200 + (-500) = -700$$

Дефиниција **9**. Збир два позитивна цела броја је позитиван, а збир два негативна цела броја је негативан цео број. У оба случаја апсолутна вредност збира је једнака збиру апсолутних вредности сабирака.

Дефиниција **10**. За сваки цео број a важи: $a + 0 = a$

Пример: Маша је једног дана позајмила од другарице 100. Сутрадан је мама дала Маши 100 динара како би вратила дуг. Колико новца ће имати Маша када врати другарици дуг?

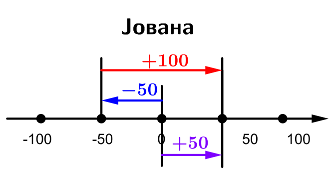


$$-100 + 100 = 0$$

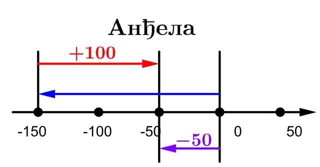
$$\mid -100 \mid - \mid 100 \mid = \mid 0 \mid$$

Дефиниција **11**. Збир супротних бројева је 0, то јест за сваки цео број a важи: $a + (-a) = 0$.

Пример: Једног дана Јована је од Луке позајмила 50, а Анђела 150 динара. Сутрадан су и Јована и Анђела у школу понеле по 100 динара. Која од њих две ће моћи да врати Луки дуг?



$$\mathbf{-50 + 100 = 50}$$



$$\mathbf{-150 + 100 = -50}$$

Како је $50 < 100 < 150$, лако је закључити да Јована може да врати дуг, док Анђелин дуг премашује суму новца који има, па она неће моћи да врати дуг.

$$-50 + 100 = 50$$

$$\mid 100 \mid - \mid 50 \mid = \mid 50 \mid$$

$$-150 + 100 = -50$$

$$| -150 | - | 100 | = | -50 |$$

На основу претходних примера долазимо до закључка да резултат сабирања негативног и позитивног целог броја може да буде позитиван, негатива број или 0, а по апсолутној вредности једнак је разлици апсолутних вредности сабирака, при чему се од веће одузима мања.

Дефиниција **12**. Збир позитивног и негативног целог броја је истог знака као сабирак чија је апсолутна вредност већа, а по апсолутној вредности једнак је разлици апсолутних вредности сабирака.

Дефиниција **13**. Од броја a одузети број b значи исто што и сабрати број a са супротном вредно71у броја b. За све a, b из Z важи:

$$a - b = a + (-b).$$

Својства сабирања целих бројева:

И збир и разлика два цела броја је цео број. Ако $a, b \in \mathbb{Z}$ онда $a + b \in \mathbb{Z}$ и $a - b \in \mathbb{Z}$.

Збир неког целог броја и броја 0 је тај цео број, то јест за свако a из Z важи:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Како број 0 не мења резултат, кажемо да је број 0 неутралан елемент за сабирање у скупу $\mathbb{Z}$.

Збир целог броја и њему супротног броја је број 0, то јест за свако $a \in \mathbb{Z}$ важи:

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

Због ове особине кажемо и да је број $-a$ инверзан елемент за сабирање броја a.

Операција сабирања је комутативна у скупу целих бројева. За све $a, b \in \mathbb{Z}$ важи: $a + b = b + a$.

Операција сабирања је асоцијативна у скупу целих бројева. За све $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важи: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

4.3 Множење и дељење целих бројева

Подсетимо се, за n из $\mathbb{N}$ и a из $\mathbb{N}$ вази једнакост:

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + a + a + ... + a}_{\text{n- пута}}.$$

Ова једнакост успоставља везу између сабирања и множења природних бројева. Ова једнакост важи и када је a произвољан цео број.

Дефиниција **14**. За свако n из $\mathbb{N}$ и свако a из $\mathbb{Z}$ важи:

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + ... + a}_{n\text{- пута}}.$$

Дефиниција **15**. Производ позитивног и негативног целог броја је негативан цео број, који је по апсолутној вредности једнак производу апсолутних вредности тих целих бројева.

Производ броја 0 и произвољног целог броја јесте број 0. За свако a из $\mathbb{Z}$ важи: $0 \cdot a = 0$.

Сваки негативан цео број је производ броја -1 и своје апсолутне вредности, то јест сваки негативан цео број је супротан својој апсолутној вредности.
За свако a из $\mathbb{Z}^-$ важи: $a = (-1) \cdot \mid a \mid = - \mid a \mid$.
Пример: Колико је $(-2) \cdot (-5)$?
Како је $n = -(-n)$, следи

$$(-2) \cdot (-5) = - \mid -2 \mid \cdot (-5) = -(2 \cdot (-5)) = -(-10) = 10.$$

Приметимо и да је

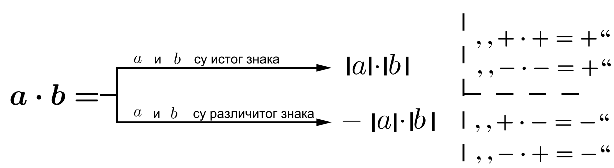
$$10 = 2 \cdot 5 = \mid -2 \mid \cdot \mid -5 \mid .$$

Значи важи једнакост

$$(-2) \cdot (-5) = \mid -2 \mid \cdot \mid -5 \mid .$$

Дефиниција **16**. Производ два негативна цела броја је позитиван цео број једнак производу апсолутних вредности тих целих бројева.

Дакле, при израчунавању производа два цела броја поступамо по следећем правилу:



Множећи цео број са -1 добијамо њему супротан број, то јест за свако a из $\mathbb{Z}$ важи: $(-1) \cdot a = -a$.

Да поновимо, ако за природне бројеве a, b и c важи $a \cdot b = c$, тада је $c : a = b$ и $c : b = a$. Слична веза између множења и дељења важи и за целе бројеве.

Дефиниција **17**. За целе бројеве a, b и c, при чему је $a \neq 0$, ако је $a \cdot b = c$, тада је $c : a = b$. Нулом се не дели.

Као и код природних бројева, не можемо увек да поделимо два цела броја (на пример, -12 није дељиво са 5, јер не постоји цео број који помножен са 5 даје производ -12). Дакле, у скупу целих бројева дељење није увек изводљиво.

Дефиниција **18**. Количник $a : b$ је цео број ако је апсолутна вредност броја a дељива апсолутном вредно71у броја b. Количник два цела броја истог знака јесте количник њихових апсолутних вредности. Количник два цела броја различитог знака супротан је количнику њихових апсолутних вредности.

Количник два цела броја истог знака је позитиван број, а количник два цела броја различитог знака је негативан број.
Док, количник 0 и произвољног целог броја различитог од 0 је 0. Ако је $a \neq 0$, онда је $0 : a = 0$. Бројем 0 се не може делити.
Ако је цео број c дељив бројем a, дељив је и супротним бројем броја a, то јест

дељив је и са $-a$.

Својства множења целих бројева:

Како се множење целих бројева, по одређивању знака производа, своди на множење одговарајућих природних бројева, операција множења задржава све особине које су већ поменуте.

Операција множења је комутативна и асоцијативна у скупу целих бројева. За свако $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важи:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

и

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

У скупу целих бројева множење је дистрибутивно у односу на сабирање. За свако $a, b, c \in \mathbb{Z}$ важи:

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Производ броја 1 и произвољног целог броја је тај цео број, док је производ броја -1 и произвољног целог броја број супротан том броју. За свако $a \in \mathbb{Z}$ важи:

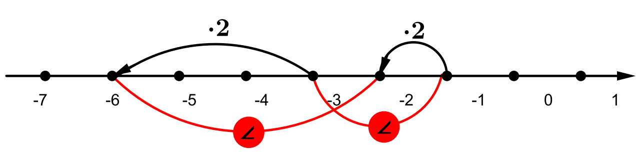
$$1 \cdot a = a \text{ и } -1 \cdot a = -a$$

За произвољне целе бројеве a и b важи:

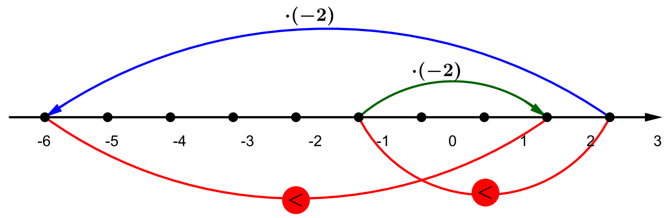
$$a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \text{ и } (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b$$

Пример: Ако за целе бројеве a и b важи $a \leq b$, који поредак важи међу бројевима $a \cdot c$ и $b \cdot c$, где је c неки цео позитиван број?

Нека је, на пример, $a = -3$, $b = -1$ и $c = 2$. Јасно је да је $a < b$, односно $-3 < -1$. Када и леву и десну страну помножимо бројем $c = 2$ $\big((-3) \cdot 2 < (-1) \cdot 2\big)$ уочавамо да ће лева страна неједнакости и даље бити мања од десне $(-6 < -2)$, односно да се релацијски знак неће променити.



Узмимо сада друге вредности бројева, на пример $a = -1$, $b = 3$ и $c = -2$.Како је $a < b$, односно $-1 < 3$, уочавамо, када будемо помножили ову неједнакост са негативним бројем c, то јест са -2 $\big((-1) \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)\big)$, да ће се знак релације променити, да ће лева страна овога пута бити већа од десне $(2 > -6)$.



Претходни пример нас наводи на следећи закључак:

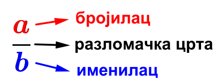
Ако обе стране неједнакости помножимо истим позитивним бројем, релацијски знак остаје исти, док, ако обе стране помножимо негативним бројем, релацијски знак се мења.

5 Скуп рационалних бројева

Проблеми свакодневног живота намећу потребу за бројевима који означавају део неке целине. Потреба за прецизнијим мерењем довела је до појаве разломака, бројева којима записујемо једнаке делове целине. Сам назив разломци потиче од тога што они представљају разломљене делове.

Ученици, у школи, већ се у петом разреду упознају са појмом разломка, његовим својствима и основним рачунским операцијама. Касније, у VI разреду своје знање прошире на скуп рационалних бројева.

Разломак записујемо помоћу два природна броја и разломачке црте.



Разломке називамо још и позитивни рационални бројеви.

Број испод разломачке црте означава на колико се једнаких делова целина дели и он разломак именује (именује делове) па се назива именилац. Ако је тај број 2, онда су то половине, ако је 3 то су трећине, и тако даље. Број изнад разломачке црте означава колико једнаких делова има, па га називамо бројилац (броји делове).

Већ смо увидели да резултат дељења није увек природан број. Разломци омогућавају да делимо произвољне природне бројеве. Сваки разломак је резултат једног таквог дељења. Закључујемо да је разломачка црта симбол за дељење. Дакле,

$$\frac{a}{b} = a : b, \text{ за } a, b \in \mathbb{N}.$$

За било које природне бројеве a и b важе следећа тврђења:

1. Ако је $a = b$, тада је $\frac{a}{b} = 1$ (на пример, ако је $a = b = 2$, тада је $\frac{2}{2} = 1$).
2. Ако је a дељиво са b, тада је разломак $\frac{a}{b}$ природан број (на пример, ако је $a = 4,\ b = 2$, тада је $\frac{4}{2} = 2$).
3. Сваки природан број n можемо записати у облику $\frac{n}{1}$ (разломак чији је именилац 1, а бројилац сам тај број), јер је $n : 1 = n$. Закључујемо, скуп природних бројева је подскуп скупа разломака.

Број 0 се, такође, може представити у облику разломка, јер је $0 = 0 : n = \frac{0}{n}$ за сваки природан број n.

Унију скупова позитивних $\mathbb{Q}^+$, нуле 0 и негативних рационалних бројева $\mathbb{Q}^-$ називамо скупом рационалних бројева, а означавамо их са $\mathbb{Q}$.

Дефиниција **19**. Сваки рационалан број је количник два цела броја, то јест $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

5.1 Проширивање и скраћивање разломака. Упоређивање разломака

Када се бројилац и именилац рационалног броја помноже истим целим бројем различитим од нуле, рационалан број се не мења.

Дефиниција **20**. Када бројилац и именилац неког рационалног броја помножимо истим природним бројем $n > 1$ $\left(\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}\right)$, кажемо да смо проширили тај рационални број (разломак) бројем n.

Разломак можемо проширити било којим природним бројем већим од 1.

Дефиниција **21**. Када бројилац и именилац неког разломка поделимо истим природним бројем $n > 1$ $\left(\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}\right)$, кажемо да смо скратили тај разломак бројем n.

Разломак $\frac{a}{b}$ можемо скратити само бројем који је заједнички делилац бројева a и b. Највећи заједнички делилац бројева a и b највећи је број којим разломак $\frac{a}{b}$ можемо скратити. Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви не може се даље скраћивати (сводити) и такве разломке називамо несводљивим.

Дефиниција **22**. Од два разломка једнаких именилаца већи је онај чији је бројилац већи, или, уколико су једнаки бројиоци два разломка, онда је већи онај чији је именилац мањи.

Два разломка који немају једнаке ни бројиоце ни имениоце (као на пример $\frac{5}{8}$ и $\frac{2}{3}$) поредимо тако што их доведемо до тога да имају једнаке имениоце или бројиоце, скраћивањем или проширивањем.

5.2 Врсте разломака. Децимални запис разломка

Дефиниција **23**. Прави разломци су они који су мањи од 1, а остали су неправи.

Пример: Којој врсти разломака припада разломак $\frac{3}{5}$?
Како је $\frac{3}{5} < \frac{5}{5} = 1$ разломак $\frac{3}{5}$ је прави разломак.

Теорема **7**. Ако је $a < b$, тада је $\frac{a}{b}$ прави разломак. Уколико је $a \geq b$, тада је разломак $\frac{a}{b}$ неправи.

Сваки од неправих разломака може се записати као збир (једног) природног броја и (једног) правог разломка. Одговарајући природан број из тог збира представља број целих у том разломку. Због тога, неправи разломак, можемо записати и тако што напишемо прво број целих садржаних у њему, а онда допишемо одговарајући разломак.
На пример, $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Неправи разломак записан на овај начин назива се мешовити број. Назив потиче од тога што у том запису учествује и природан број и разломак.

За рационалне бројеве који су придружени симетричним тачкама бројевне праве кажемо да су супротни. Супротан број рационалног броја $\frac{a}{b}$ означавамо са $-\frac{a}{b}$.

Ако је A тачка бројевне праве додељена неком рационалном броју, онда је апсолутна вредност тог броја једнака дужини дужи OA, где је O координатни почетак. За сваки рационалан броја $\frac{a}{b}$ важи: $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|-\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \geq 0$.
Апсолутна вредност рационалног броја r, $|r|$, једнака је броју r када је $r \geq 0$, а броју $-r$ када је $r < 0$.

$$|r| = \begin{cases} r, r \geq 0 \\ -r, r < 0 \end{cases}$$

Дефиниција **24**. Разломци који у имениоцу имају децималне јединице називају се децимални разломци $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} ...\right)$.

Децимални запис броја се састоји од два низа цифара који су одвојени децималном запетом. Цифре са леве стране запете означавају број целих које тај разломак садржи, док цифре са десне стране запете означавају број одговарајућих основних децимала разломака које тај разломак садржи.
На пример, $\underbrace{6}_{\text{цео део(број целих)}} , \underbrace{183}_{\text{децимале}} .$

Цифре иза запете означава редом број десетих, стотих, хиљадитих делова и тако даље.

Када желимо произвољан разломак да запишемо у децималном запису неопходно је или да тај разломак проширивањем (скраћивањем) доведемо до децималног разломка или да извршимо дељење.

Пример:

$$\frac{5}{4} = 1.25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

5.2.1 Приближна вредност броја

Постоје разломци чији је децимални запис коначан (садржи коначно много децимала), али и разломци чији је децимални запис бесконачан (садржи бесконачно много децимала).

$$\frac{1}{2} = 0.5 \text{ - коначан децимални запис}$$
$$\frac{1}{3} = 0.333... \text{ - бесконачан децимални запис}$$

Број који има више цифара него што нам је потребно замењујемо бројем чији запис има одговарајући број цифара, и то тако да се новодобијени број што мање разликује од почетног. Тај поступак се назива заокругљивање.

Заокругљивањем броја увек правимо неку грешку и циљ нам је да она буде што мања. Да бисмо то постигли треба да поштујемо следећа правила:

1. Ако је прва цифра коју одбацујемо 0, 1, 2, 3 или 4, цифре испред ње остају непромењене.

2. Ако је прва цифра коју одбацујемо 6, 7, 8 или 9, последња цифра коју задржавамо повећава се за 1.

3. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње има још цифара, последња цифра коју задржавамо повећа се за 1.

4. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5 и иза ње нема других цифара, разликујемо два случаја:

   (а) ако је цифра испред парна она остаје непромењена;

   (б) ако је цифра испред непарна она се повећава за 1.

Дефиниција **25**. Ако је број b добијен заокругљивањем броја a, пишемо $a \approx b$ (читамо ,,a је приближно једнако b”).

При заокругљивању истог броја на више децимала прави се мања грешка.

5.3 Сабирање и одузимање рационалних бројева

Дефиниција **26**. Збир и разлика два рационална броја је рационалан број (каже се да је скуп $\mathbb{Q}$ затворен у односу на сабирање и одузимање).

Дефиниција **27**. Разломци са једнаким имениоцима се сабирају тако што се саберу њихови бројиоци, а именилац се препише. Одузимање разломака са једнаким имениоцима се врши тако што се од бројиоца умањеника одузме бројилац умањиоца, а именилац препише.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$
$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Код сабирања природног броја и правог разломка изостављамо знак + између њих и збир пишемо у облику мешовитог броја. Постоји и други начин сабирања природног броја и разломка.

Дефиниција **28**. Природан број и разломак се сабирају тако што се дати природан број представи у облику разломка који има исти именилац као дати разломак, па се онда саберу као два разломка са истим имениоцима.

$$n + \frac{a}{c} = \frac{n \cdot c}{c} + \frac{a}{c} = \frac{n \cdot c + a}{c}$$

Дефиниција **29**. Разломке различитих имениоца сабирамо (одузимамо) тако што их, проширивањем (скраћивањем), доводимо на разломке једнаких именилаца, а онда их сабирамо (одузимамо) као разломке једнаких именилаца.

Правила у општем случају:

- Збир два рационална броја истог знака је рационалан број тог знака, чија је апсолутна вредност једнака збиру апсолутних вредности сабирака.
- Збир два супротна рационална броја је 0.
- Збир два рационална броја различитог знака има исти знак као сабирак чија је апсолутна вредност већа, а по апсолутној вредности је једнак разлици апсолутних вредности сабирака.
- Од неког рационалног броја одузети други рационалан број је исто што и умањеник сабрати са бројем који је супротан умањиоцу, то јест за свако $a, b \in \mathbb{Q}$ важи $a - b = a + (-b)$.

- Приликом сабирања два рационална броја, један у количничком (разломак), а у други у децималном запису, један од записа треба пребацити у други и сабрати их применом једног од наведених правила.

Закони сабирања рационалних бројева:

За свака три разломка $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ важи:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ - закон комутације (замена места сабирака)
- $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$ - закон асоцијације (здруживање сабирака)
- $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b}$ - закон супротног броја
- $-\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ - правило ,,пред заградом минус"

Како је $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, за 0 кажемо да је неутрални елемент за сабирање разломака.

У скупу рационалних бројева сабирање и одузимање је увек изводљиво. Ако $a, b \in \mathbb{Q}$, онда $a + b \in \mathbb{Q}$ и $a - b \in \mathbb{Q}$.

5.4 Сабирање и одузимање децималних бројева

Један од начина да саберемо (то јест одузмемо) децималне бројеве јесте да их преведемо у разломке, а затим извршимо жењену рачунску операцију.
Децималне бројеве можемо сабрати и много брже, не преводећи их у разломке. Као и код сабирања вишецифрених природних бројева, децималне бројеве потписујемо један испод другог, с тим што водимо рачуна да правилно потпишемо: цифре јединица једног броја испод цифре јединица другог броја, цифре десетица испод цифре десетица итд. Исто важи и за децимале: десети делови испод десетих делова, стоти делови испод стотих делова и тако даље.

Дефиниција **30**. Децималне бројеве сабирамо тако што их најпре правилно потпишемо, водећи рачуна о томе да децималне запете сабирака буду једна испод друге, а затим их саберемо као природне бројеве, с тим што на крају децимална запета збира мора бити испод децималних запета сабирака.

Дефиниција **31**. Децималне бројеве одузимамо тако што их најпре правилно потпишемо, водећи рачуна о томе да децималне запете умањеника и умањиоца буду једна испод друге, а затим их одузмемо као природне бројеве, с тим што на крају децимална запета разлике мора бити испод децималних запета умањеника и умањиоца.

5.5 Множење и дељење рационалних бројева

Пример: Одредити производ $3 \cdot \frac{1}{4}$.
$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}$

Користећи претходно знање, долазимо до закључка, разломак се множи природним бројем тако што се бројилац помножи природним бројем, а именилац препише $\left(n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{b}\right)$.

Дефиниција **32**. За сваки разломак $\frac{a}{b}$ важи $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$.

Дефиниција **33**. Производ два разломка јесте разломак чији је бројилац производ бројилаца та два разломка, а именилац производ именилаца та два разломка.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

При множењу два разломка можемо скраћивати бројилац једног са имениоцем другим (унакрсно скраћивање).
Пример:
а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{c} = \frac{a}{c}$
б) $\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}} = \frac{1}{6}$

Дефиниција **34**. Број p је реципрочна вредност броја q, $q \neq 0$, ако је $p \cdot q = 1$.

Реципрочна вредност неког броја јесте број који помножен тим бројем даје резултат 1.
Реципрочна вредност природног броја n је разломак $\frac{1}{n}$, јер је $n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Реципрочна вредност разломка $\frac{a}{b}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ јесте разломак $\frac{b}{a}$, јер је $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Дефиниција **35**. Поделити разломак другим разломком исто је што и помножити тај разломак реципрочном вредно71у другог разломка.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Израз $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ називамо двојни разломак. Како је

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \text{ то је } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Закључујемо, двојни разломак се израчунава тако што се производ ,,спољашњих бројева" (бројиоца дељеника и имениоца делиоца) подели производом ,,унутрашњих бројева" (имениоца дељеника и бројиоца делиоца).

5.5.1 Својства множења и дељења рационалних бројева

Производ (количник) два рационална броја истог знака је позитиван, а производ (количник) два рационална броја супротних знакова је негативан рационалан број.

За свака три разломка $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ важи:

- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ - комутативност множења
- $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$ - асоцијативност множења
- $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ - дистрибутивност множења према сабирању

Као и пре, број 1 је неутралан елемент за множење. Што ће рећи, ако неки произвољан рационалан број помножимо бројем 1 производ ће бити сам тај број, а производ произвољног рационалног броја и -1 је њему супротан број. За свако $a \in \mathbb{Q}$ важи:

$$a \cdot 1 = a \text{ и } a \cdot (-1) = -a.$$

Применом ових својстава често се лакше и брже могу решити задаци.

За свака три разломка $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}$ важи:
$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} + \frac{a}{b} : \frac{e}{f}$ - дистрибутивност дељења у односу на сабирање.

5.6 Множење и дељење децималних бројева

При множењу децималног броја са 10 децимална запета се помера за једно место удесно, при множењу са 100 запета се помера за 2 места удесно, док се при множењу са 1000 децимална запета помера за 3 места удесно, и тако даље.

Дефиниција **36**. Број у децималном запису множи се декадном јединицом тако што му се децимална запета помера за онолико места удесно колико та декадна јединица има нула.

Дефиниција **37**. Два броја дата у децималном запису множимо као природне бројеве (занемаримо запете), а затим у производу издвојимо онолико децимала колико их имају оба чиниоца заједно.

Дефиниција **38**. Рационалан број у децималном запису дели се декадном јединицом тако што му се децимална запета помера за онолико места улево колико та декадна јединица има нула.

Дефиниција **39**. Рационалан број у децималном запису дели се природним бројем тако што вршимо дељење као у случају природних бројева, с тим што када дођемо до децималне запете у дељенику, препишемо је и у количник.

Како се количник не мења када се и дељеник и делилац помноже истим бројем, када делимо два рационална броја у децималном запису најпре и дељеник и делилац помножимо истом декадном јединицом како би свели на дељење природних бројева или на дељење рационалног броја у децималном запису и природног броја.
Пример:

$$56.88 : 1.3 = 5688 : 130 = 43.75384... \approx 43.75$$

$$3.46 : 0.4 = 34.6 : 4 = 8.65$$

6 Скуп реалних бројева

Школским наставним планом и програмом за VII разред предвиђено је укупно 14 часова, обраде и утврђивања, за област реалних бројева. То су:

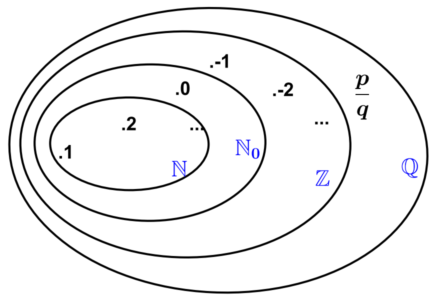
1. Квадрат рационалног броја - час обраде;
2. Решавање једначине $x^2 = a$ $(a \geq 0)$, појам квадратног корена - час обраде;
3. Квадратни корен - час утврђивања;
4. Ирационални бројеви - час обраде;
5. Скуп реалних бројева. Бројевна права - час обраде;
6. Децимални запис реалног броја и његова приближна вредност - час обраде;
7. Децимални запис реалног броја и његова приближна вредност - час утврђивања;
8. Основна својста операција сабирања и множења реалних бројева - час обраде;
9. Поредак бројева и операције сабирања и множења - час утврђивања;
10. Основна својства операције кореновања у скупу ${\mathbb{R}_0}^+$ - час обраде;
11. Основна својства операције кореновања у скупу ${\mathbb{R}_0}^+$ - час утврђивања;
12. Једнакост $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$ - час утврђивања;
13. Бројевни изрази - час утврђивања;
14. Реални бројеви, контролна вежба - час систематизације.

У раду ћу изложити како сам ја обрадила ову наставну тему са својим ученицима.

6.1 Наставна јединица: Квадрат рационалног броја - час обраде

Циљ часа је увођење појма квадрата рационалног броја и стицање знања о његовим особинама. Значи, кључни појмови јесу квадрат рационалног броја и потпун квадрат.
У току часа ученици би требали да обнове све скупове бројева које знају, с хвате појам квадрата рационалног броја и умеју да израчунају вредност квадрата ма ког рационалног броја.

Подсетимо се које скупове бројева већ знамо и које релације (односи) важе међу њима.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Дакле, сваки природан број је цео, а сваки цео број је рационалан.

Пример **1**. Израчунати површину квадрата чија је дужина странице $5cm$.
Површину квадрата израчунавамо тако што дужину његове стране помножимо са самом собом. Често краће кажемо - површина квадрата једнака је квадрату његове странице, што записујемо као $P = a \cdot a = a^2$. Стога је:

$$P = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

У складу са овим називом (квадрат странице), производ сваког рационалног броја са самим собом називамо квадратом тог броја.

Дефиниција **40**. Квадрат рационалног броја a је број b који је једнак производу броја a са самим собом. Записујемо: $b = a \cdot a = a^2$.

Када сам ученике упознала са појмом ,,квадрат рационалног броја”, самостално попуњавају следећу табелу.

a	-2	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
$\mid a \mid$					
a^2					
$(-a)^2$					
$\mid a \mid^2$					

На основу урађеног задатка намећу се закључци:

Теорема **8**.

- Квадрат рационалног броја a не може бити негативан, то јест $a^2 \geq 0$.
- Квадрат сваког позитивног рационалног броја је позитиван број, а $0^2 = 0$.

- Квадрати узајамно супротних рационалних бројева a и $-a$ су међусобно једнаки и уједно су једнаки квадрату апсолутне вредности броја a, то јест, за сваки рационалан број a важи $a^2 = (-a)^2 = |a|^2$.

Напомена: Поновила сам ученицима да је нпр. $(+2)\cdot(+2) = +4$, $(-2)\cdot(-2) = +4$. Како је $(-2)^2 = 2^2$, а $-2 \neq 2$, закључујемо да из једнакости квадрата два броја не следи увек и једнакост та два броја, али када су два броја једнака, онда су једнаки и њихови квадрати.

Теорема **9**. За ненегативне рационалне бројеве a и b из једнакости $a^2 = b^2$ следи $a = b$.

Ученици су самостално попунили следећу табелу:

a	-5	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0.1	$\frac{2}{3}$	3
a^2							

На основу ове табеле закључили смо да у случају два негативна броја, као и у случају бројева различитог знака, из неједнакости $a^2 < b^2$ не следи обавезно $a < b$, и обрнуто.

Теорема **10**. За ненегативне рационалне бројеве a и b из неједнакости $a^2 > b^2$ следи $a > b$ и обрнуто, из неједнакости $a > b$ следи $a^2 > b^2$.
За негативне рационалне бројеве a и b из неједнакости $a^2 > b^2$ следи $a < b$ и обрнуто, из неједнакости $a > b$ следи $a^2 < b^2$.

Напомена: Наведена својства су врло битна за тематику која ће се тек обрађивати (при решавању неких једначина и неједначина; много пута ће бити потребно ,,позвати " се на неку од наведених особина), те их је неопходно истаћи.

Дефиниција **41**. Потпун квадрат је природан број који је квадрат неког другог природног броја.

Како је $14^2 = 196$, то је број 196 потпун квадрат, док број 197 није потпун квадрат, јер је $14^2 < 197 < 15^2$.
Пример: Бројеви који су потпуни квадрати: $4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$

На крају часа ученици обнављају оно што су научили, квадрат броја и потпун квадрат броја.

6.2 Наставна јединица: Решавање једначине $x^2 = a$ $(a \geq 0)$, појам квадратног корена - час обраде

Циљ овог часа је упознавање ученика са поступком решавања једначина $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ и увођење појма квадратног корена.
Ученике треба оспособити да одреде решење једначине $x^2 = a$ $(a > 0)$, да израчунају квадратни корен броја, као и да решавају практичне задатке применом квадратног корена.

Обновила сам са ученицима квадрат рационалног броја и какав је знак квадрата рационалног броја, како би их касније упознала са супротном операцијом - корен- овањем.

Шта је решење једначине? (Наводим ученике на прецизан одговор.)

Дефиниција **42**. Решење једначине је сваки број који, замењен у једначини, једначину преводи у тачну једнакост.

Усмено смо урадили овај пример:

Пример **2**. Замислила сам један број. Његов квадрат је 16. Који број сам замислила?
(Очекивани одговор од ученика: број 4 и -4.)
Ако са x означимо непознати број, онда се задатак своди на решавање једначине $x^2 = 16$.
Како је $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$, закључујемо да је $x = 4$ или $x = -4$.

Пример **3**. Решити једначину $x^2 = 0$.
Једначина $x^2 = 0$ има само једно решење. То је број 0, јер је $0^2 = 0$ и не постоји други број који помножен сам са собом даје резултат 0.

Пример **4**. Да ли у скупу рационалних бројева једначина $x^2 = -9$ има решење?
Како је квадрат сваког рационалног броја ненегативан, дата једначина нема решење у скупу рационалних бројева.

Пример **5**. Квадрат броја је једнак:

1. $a)25$,
2. $b)\dfrac{1}{16}$,
3. $c)0.16$.

О ком броју је реч?(Ученици самостално раде ове примере.)

Пример **6**. Ако је површина квадрата 16, колика је дужина његове странице?
Ако са x означимо дужину странице, онда се задатак своди на решавање једначине $x^2 = 16$ уз услов да је $x \geq 0$, јед дужина странице не може бити негативан број. Како је $4^2 = 16$ и $4 \geq 0$ закључујемо да је дужина странице тог квадрата 4.

Ненегативан број чији је квадрат 16 зовемо квадратним кореном броја 16 и записујемо га као $\sqrt{16}$. Како је $4^2 = 16$ и $4 \geq 0$, долазимо до закључка да је $\sqrt{16} = 4$. Рачунамо само квадратне корене ненегатвних бројева, јер је квадрат сваког броја ненегативан.

Дефиниција **43**. Квадратни корен, или само корен, ненегативног броја a је ненегативан број у ознаци $\sqrt{a}$, чији је квадрат једнак броју a.

Дакле, за свако ненегативно a важи $\sqrt{a} \geq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.
Ознака $\sqrt{}$ представља стилизовано мало латинично слово r, што је почетно слово латинске речи радикал - корен.

Напомена: Типична грешка коју ученици праве је облика $\sqrt{9} = \pm 3$. У циљу смањивања оваквих грешака, често истичем да је $\sqrt{a} \geq 0$ ($a \geq 0$ је услов да $\sqrt{a}$ буде дефинисано).

Пример **7**. *a*) Који број је квадратни корен броја 36?

$$\sqrt{36} = 6, \text{ јер је } 6 > 0 \text{ и } 6^2 = 36$$

b) Који бројеви су решења једначине $x^2 = 36$?

$$x^2 = 36$$
$$x_1 = \sqrt{36} \text{ и } x_2 = -\sqrt{36},$$
$$\text{па је } x =_1 6 \text{ и } x_2 = -6$$
$$\big(\text{јер је } 6^2 = 36 \text{ и } (-6)^2 = 36\big)$$

Напомена: Прва четири примера, рађена на овом часу, обрађују решење једначине $x^2 = a$, пети пример треба да истакне потребу за тражењем само ненегативног решења једначине $x^2 = a$ и уведе појам квадратног корена, док је циљ шестог примера да ученици утврде разлику између два поменута проблема $\big(x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2;\ \sqrt{4} = 2\big)$.

Теорема **11**. Решење једначине $x^2 = a$, $a > 0$, су бројеви $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. $\big($јер је $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(-\sqrt{a})^2 = a\big)$

Ученици самостално раде следеће примере:

Пример **8**. Колика је дужина странице квадрата чија је површина 0.25?

Пример **9**. Одредити број чији је квадрат једнак броју 0.25.

На овом часу ученици су научили да решавају једнацине облика $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ и усвојили су појам квадратног корена, то јест, знају да израчунају квадратни корен ненегативног броја.

6.3 Наставна јединица: Квадратни корен - час утврђивања

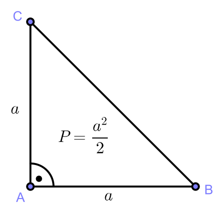
Циљ часа је увежбавање решавања једначине $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ и утврђивање знања о појму квадратног корена и квадрату броја.

Задаци:

1. Израчунати површину квадрата чија је страница $7cm$.

   $a = 7cm$
   $P = ?$
   $P = a^2$
   $P = 7^2$
   $P = 49cm^2$

2. Израчунати површину једнакокрако-правоуглог троугла чија је дужина крака $\frac{1}{8}$.



$$P = \frac{a^2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2} = \frac{\frac{1}{64}}{2} = \frac{1}{64 \cdot 2} = \frac{1}{128}cm^2$$

3. Ако је $a = -\frac{1}{2}$ израчунати:

   (а) $5a^2 =$

   (б) $-\frac{1}{2}a^2 =$

   (а) $5a^2 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

   (б) $-\frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

4. Израчунати вредност израза:

   (а) $2 \cdot \frac{1}{2^2} - 2.5 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 =$

   (б) $-5 \cdot 2^2 + (-5)^2 \cdot 2 - (-0.5)^2 =$

   (ц) $125 : (-5)^2 - (-\frac{1}{5})^2 \cdot 25 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 =$

   (д) $\frac{3}{4^2} - \frac{3^2}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 =$

(а) $2 \cdot \frac{1}{2^2} - 2.5 + \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 2.5 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2.5 + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{9}{4} = -\frac{4}{2} + \frac{9}{4} = -\frac{8}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$

(б) $-5 \cdot 2^2 + (-5)^2 \cdot 2 - (-0.5)^2 = -5 \cdot 4 + 25 \cdot 2 - 0.25 = -20 + 50 - 0.25 = 29.75$

(ц) $125 : (-5)^2 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 25 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 125 : 25 - \frac{1}{25} \cdot 25 + \frac{1}{100} = 5 - 1 + \frac{1}{100} = 4 + \frac{1}{100} = 4\frac{1}{100}$

(д) $\frac{3}{4^2} - \frac{3^2}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} - \frac{9}{4} - \frac{9}{16} - \frac{9}{16} = -\frac{15}{16} - \frac{9}{4} = -\frac{15}{16} - \frac{36}{16} = -\frac{51}{16} = -3\frac{3}{16}$

5. Израчунати:

(а) $\sqrt{9+16} =$

(б) $\sqrt{100-36} =$

(ц) $\sqrt{4 - 2\frac{1}{25}} =$

(д) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}} =$

(а) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

(б) $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$

(ц) $\sqrt{4 - 2\frac{1}{25}} = \sqrt{4 - \frac{51}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25} - \frac{51}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5} = 2\frac{2}{5}$

(д) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

6. Решити једначине:

(а) $x^2 = 81$

(б) $(x-1)^2 = 25$

(ц) $3 \cdot (x-3)^2 = 5\frac{1}{3}$

(д) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}x + 3\right)^2 = \frac{18}{25}$

(а)

$$x^2 = 81$$

$$\begin{array}{cc} x_1 = \sqrt{81} & x_2 = -\sqrt{81} \\ x_1 = 9 & x_2 = -9 \\ 9^2 = 81 & (-9)^2 = 81 \end{array}$$

(б)

$$(x-1)^2 = 25$$

$$\begin{array}{cc} x_1 - 1 = \sqrt{25} & x_2 - 1 = -\sqrt{25} \\ x_1 - 1 = 5 & x_2 - 1 = -5 \\ x_1 = 5 + 1 & x_2 = -5 + 1 \\ x_1 = 6 & x_2 = -4 \\ (6-1)^2 = 5^2 = 25 & (-4-1)^2 = (-5)^2 = 25 \end{array}$$

(ц)

$$3 \cdot (x-3)^2 = 5\frac{1}{3}$$

$$3 \cdot (x-3)^2 = \frac{16}{3}$$
$$(x-3)^2 = \frac{16}{3} : 3$$
$$(x-3)^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{3}$$
$$(x-3)^2 = \frac{16}{9}$$
$$\begin{array}{cc}
x_1 - 3 = \sqrt{\frac{16}{9}} & x_2 - 3 = -\sqrt{\frac{16}{9}} \\
x_1 - 3 = \frac{4}{3} & x_2 - 3 = -\frac{4}{3} \\
x_1 = \frac{4}{3} + 3 & x_2 = -\frac{4}{3} + 3 \\
x_1 = 4\frac{1}{3} & x_2 = 1\frac{2}{3}
\end{array}$$

(д)

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}x + 3\right)^2 = \frac{18}{25}$$
$$\left(\frac{2}{5}x + 3\right)^2 = \frac{18}{25} : \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{2}{5}x + 3\right)^2 = \frac{18}{25} \cdot \frac{2}{1}$$
$$\left(\frac{2}{5}x + 3\right)^2 = \frac{36}{25}$$
$$\begin{array}{cc}
\frac{2}{5}x_1 + 3 = \sqrt{\frac{36}{25}} & \frac{2}{5}x_2 + 3 = -\sqrt{\frac{36}{25}} \\
\frac{2}{5}x_1 + 3 = \frac{6}{5} & \frac{2}{5}x_2 + 3 = -\frac{6}{5} \\
\frac{2}{5}x_1 = \frac{6}{5} - 3 & \frac{2}{5}x_2 = -\frac{6}{5} - 3 \\
\frac{2}{5}x_1 = -\frac{9}{5} & \frac{2}{5}x_2 = -\frac{21}{5} \\
x_1 = -\frac{9}{5} : \frac{2}{5} & x_2 = -\frac{21}{5} : \frac{2}{5} \\
x_1 = -\frac{9}{5} \cdot \frac{5}{2} & x_2 = -\frac{21}{5} \cdot \frac{5}{2} \\
x_1 = -\frac{9}{2} & x_2 = -\frac{21}{2} \\
x_1 = -4\frac{1}{2} & x_2 = -10\frac{1}{2}
\end{array}$$

7. Израчунати дијагоналу квадрата чија је површина $8cm^2$.

$$\begin{array}{c}
P = a^2 = \frac{d^2}{2} \\
P = \frac{d^2}{2} \\
d^2 = P \cdot 2 \\
d^2 = 8 \cdot 2 \\
d^2 = 16 \\
d = \sqrt{16} \\
d = 4cm
\end{array}$$

8. Ако се четвороструком квадрату неког броја дода број 5, добија се број 41. О ком броју је реч?

$$4 \cdot x^2 + 5 = 41$$

$$4 \cdot x^2 = 41 - 5$$

$$4 \cdot x^2 = 36$$

$$x^2 = 36 : 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = \sqrt{9} \quad x_2 = -\sqrt{9}$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$$

6.4 Наставна јединица: Ирационални бројеви - час обраде

Циљ часа је увођење појма ирационалног броја и обрада његових особина. Ученици треба да усвоје скуп реалних бројева као унију рационалних и ирационалних бројева, умеју да уочавају и издвајају ирационалне бројеве.

Представљајући рационалне бројеве на бројевној правој, сваком рационалном броју a смо доделили тачно једну тачку $A(a)$. Тада је $OA = |a|$, па је мерни број сваке такве дужи (дужи која спаја координатни почетак са тачком којој је додељен неки рационални број) рационалан.

Дефиниција **44**. Сваки рационалан број $\frac{a}{b}$ је количник целих бројева a и b, где је $b \neq 0$.

Ако су A и B произвољне тачке (неке равни), да ли је мерни број те дужи рационалан број?

Пример **10**. Колика је дужина дијагонале квадрата чија је страница дужине 1? Знамо да површину квадрата можемо израчунати на два начина, и то:

$$P = a \cdot a = a^2 \text{ или } P = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2},$$

где је са a означена дужина странице, а са d дужина дијагонале.
За $a = 1$:

$$P = 1^2 = 1$$

Како је

$$P = \frac{d^2}{2},$$

то је

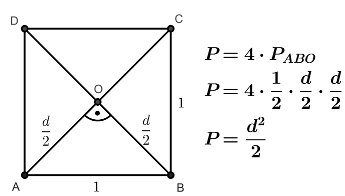
$$1 = \frac{d^2}{2}$$

Значи,

$$d^2 = 2,$$

то јест

$$d = \sqrt{2}$$



Посматрајући једнакокраки троугао ABC уочавамо да је његова страница (основица) AC дужа од страница (кракова) AB и BC јер се налази наспрам највећег угла тог троугла. Дакле, дијагонала квадрата је дужа од странице квадрата, па је зато $1 < \sqrt{2}$. Опет посматрајући троугао ABC, уочавамо и да је његова страница AC краћа од збира кракова (неједнакост која важи за сваки троугао), па је $\sqrt{2} < 2$. Дакле, $\sqrt{2}$ није природан број, јер важи $1 < \sqrt{2} < 2$.

Пример **11**. Да ли је број $\sqrt{2}$ рационалан?

Ако је $\sqrt{2}$ позитиван рационалан број онда га можемо записати као количник два узајамно проста природна броја a и b, то јест

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \text{ и } D(a,b) = 1$$

тада је

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

односно

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

па је

$$a^2 = 2b^2$$

Како је $2 \cdot b^2$ паран број, и a^2 је паран број. Ако је a^2 паран број, онда је и a паран број. Како је a паран број то га можемо записати као 2 пута неки природан број n. Онда је

$$(2 \cdot n)^2 = 2 \cdot b^2$$

одакле добијамо

$$4 \cdot n^2 = 2 \cdot b^2$$

односно

$$2 \cdot n^2 = b^2$$

Сада, како је $2 \cdot n^2$ паран број, и b^2 је паран број. Ако је b^2 паран број, онда је и b паран број.

Дакле, оба броја a и b су парни, па је $D(a,b) \geq 2$.

Хајде да резимирамо све што смо урадили, односно закључили. Ако је број $\sqrt{2}$ рационалан, онда постоје природни бројеви a и b такви да је $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $D(a,b) = 1$ и $D(a,b) \geq 2$.

Како су последња два тврђења контрадикторна (не могу истовремено оба бити тачна), дошли смо до контрадикције. Дакле, наша претпоставка да је број $\sqrt{2}$ рационалан није тачна.

Број $\sqrt{2}$ није рационалан, то јест не постоји рационалан број чији је квадрат једнак броју 2.
Значи, постоје мерни бројеви дужи који нису рационални. Те бројеве зовемо ирационални бројеви, а скуп свих таквих бројева означавамо са $\mathbb{I}$.
Придев ирационалан води порекло из латинског језика и значи нелогичан, неразуман. Стари Грци су имали проблем да с хвате постојање бројева који се не могу записати као количник два цела броја. Ти бројеви су за њих били ,,неразумни”. Отуда и потиче назив овог скупа бројева.

Показали смо да $\sqrt{2}$ не припада скупу $\mathbb{Q}$, па закључујемо да $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Теорема **12**. Број $\sqrt{2}$ је ирационалан број.

Теорема **13**. Квадратни корени свих природних бројева који нису потпуни квадрати $(\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11} \ldots)$ су ирационални бројеви.
Постоји бесконачно много ирационалних бројева.

Пример **12**. Показати да бројеви $1+\sqrt{5}$ и $3\sqrt{22}$ нису рационални.

Претпоставимо супротно, да је $1+\sqrt{5}$ рационалан број. Нека је, на пример, $1+\sqrt{5} = a$ и $a \in \mathbb{Q}$.

$$1 + \sqrt{5} = a$$

Тада је $\sqrt{5} = a - 1$ рационалан број (као разлика два рационална броја)
Како 5 није потпун квадрат, следи да број $\sqrt{5}$ није рационалан, што је контрадикторно са нашом полазном претпоставком. Дакле, контрадикција, то јест $\sqrt{5}$ није рационалан.

Из $3\sqrt{22} = a$ и $a \in \mathbb{Q}$ следи: $\sqrt{22} = a : 3$ и $a : 3 \in \mathbb{Q}$
Међутим, 22 није потпун квадрат, па $\sqrt{22}$ није рационалан број. Опет смо дошли до контрадикције, па закључујемо да $3\sqrt{22} \notin \mathbb{Q}$.

Ученицима скренути пажњу и на следеће:

- Збир два ирационална броја не мора бити ирационалан број $(\sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q})$.
- Разлика два ирационална броја не мора бити ирационалан број $(\sqrt{2}-\sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q})$.
- Производ два ирационална броја не мора бити ирационалан број $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q})$.
- Количник два ирационална броја не мора бити ирационалан број $(\sqrt{2} : \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q})$.

Теорема **14**. Решење једначине $x^2 = a$, $a \geq 0$, су бројеви $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$, који су или оба рационални или оба ирационални бројеви.

Пример **13**. Решити једначине: $x^2 = \dfrac{1}{9}$ и $x^2 = 5$.

$$x^2 = \frac{1}{9}$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{9}} \text{ или } x_2 = -\sqrt{\frac{1}{9}}$$
$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ или } x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 = 5$$
$$x_1 = \sqrt{5} \text{ или } x_2 = -\sqrt{5}$$

На крају часа ученици понављају шта су ново научили на овом часу, ирационални број и скуп ирационалних бројева.

6.5 Наставна јединица: Скуп реалних бројева. Бројевна права - час обраде

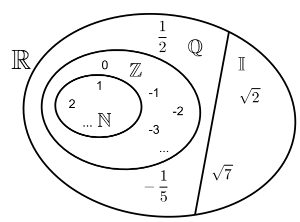
Циљ часа је упознавање ученика са скупом реалних бројева као унијом скупа рационалних и скупа ирационалних бројева, упознавање ученика са приказивањем ирационалних бројева на бројевној правој и поступком одређивања приближне вредности броја $\sqrt{a}$ (a није потпун квадрат).
Ученици треба да обнове знање о приказивању бројева на бројевној правој, науче поступак конструктивне поделе дужи на одређен број делова, скуп реалних бројева с хвате као унију скупа рационалних и скупа ирационалних бројева, науче поступак приказивања ирационалних на бројевној правој и поступак одређивања приближне вредности броја $\sqrt{a}$ (када a није потпун квадрат), с хвате неопходност проширивања скупова до скупа реалних бројева.

Поновити са ученицима:

- Који бројеви чине скуп природних бројева?
- Који бројеви чине скуп целих бројева?
- Који бројеви чине скуп рационалних бројева?
- Који односи важе за скуп природних, целих и рационалних бројева?
- Шта је бројевна права?

Очекујем од ученика да знају одговоре на претходна питања. Сада знају да постоје и ирационални бројеви.
Унију скупа рационалних и скупа ирационалних бројева називамо скуп реалних бројева и означавамо са $\mathbb{R}$.
При том су скупови $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ дисјунктни (број који је ирационалан не може бити рационалан, и обрнуто).

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R},\ \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

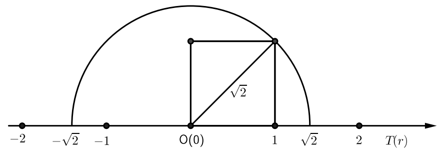


Обележавање:
$\mathbb{R}^+$ - скуп позитивних реалних бројева
$\mathbb{R}^-$ - скуп негативних реалних бројева
${\mathbb{R}_0}^+$ - скуп ненегативних реалних бројева

Дефиниција **45**. Апсолутна вредност ненегативног реалног броја једнака је том броју, а апсолутна вредност негативног реалног броја једнака је њему супротном броју.

$$\mid a \mid = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Реалне бројеве представљамо на бројевној правој која се назива реална бројевна права. Када су изабране тачке 0 и 1, једнозначно су одређени положаји свих других тачака додељених реалним бројевима. На основу знака реалног броја r, тачка $T(r)$ се налази лево (ако је негативан) или десно (ако је позитиван број) од тачке $O(0)$, а у оба случаја је $OT = \mid r \mid$. Стрелица удесно на бројевној правој указује на позитиван смер, односно на смер у коме бројеви расту.



Раније смо сваком броју (природном, целом, рационалном) додељивали тачно једну тачку бројевне праве. Тек са представљањемм реалних бројева је и свакој тачки бројевне праве придружен број.
Бројевна права се може сматрати графичким приказом скупа реалних бројева - реални бројеви потпуно ,,прекривају" бројевну праву.

Напомена: Ако мерни број дужи OA није рационалан, онда је ирационалан, па свакој тачки A одговара тачно један реалан број.

Теорема **15**. Сваком реалном броју одговара тачно једна тачка бројевне праве, и обрнуто, свакој тачки бројевне праве одговара тачно један реалан број.

Дефиниција **46**. Ако се на реалној бројевној правој тачка $A(a)$ налази лево од тачке $B(b)$, онда за реалне бројеве A и B важи $a < b$

Пример **14**. Где се на бројевној правој налази тачка која одговара ирационалном броју $\sqrt{3}$? Нацртати бројевну праву.

Број 3 се налази између бројева 1 и 4 $(1 < 3 < 4)$, односно $1^2 < 3 < 2^2$, закључујемо да је $1 < \sqrt{3} < 2$ (број $\sqrt{3}$ се налази између бројева 1 и 2).

Интервал $(1, 2)$ делимо на десет једнаких интервала. Подеоним тачкама одговарају бројеви $1; 1.1; 1.2; 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9$ и 2, чије квадрате рачунамо и тражимо два суседна од којих је један мањи, а други већи од броја 3.

Како је $1.7^2 = 2.89$ и $1.8^2 = 3.24$, добијамо $1.7^2 < 3 < 1.8^2$, па закључујемо да је $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$.

Сада поново, новодобијени интервал $(1.7; 1.8)$ делимо на десет једнаких делова и тражимо између које две од новодобијених подеоних тачака је тачка којој одговара број $\sqrt{3}$.
Како је $1.73^2 = 1.9929$ и $1.74^2 = 3.0276$, закључујемо да је $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$.
Када бисмо наставили да понављамо овај поступак, тачка која представља ирационалан број $\sqrt{3}$ увек остаје унутар једног од добијених интервала од којих је сваки следећи садржан у претходном (интервали су све мање дужине). За сад не можемо ту тачку тачно да одредимо (након обраде Питагорине теореме ученици ће моћи да конструишу дужи дужине $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{5} \ldots$). Можемо да одредимо само неки произвољно мали интервал који садржи тачку којој одговара број $\sqrt{3}$.

Напомена: Важно је истаћи да описаним поступком у сваком следећем кораку све тачније и тачније одређујемо тражену тачку.

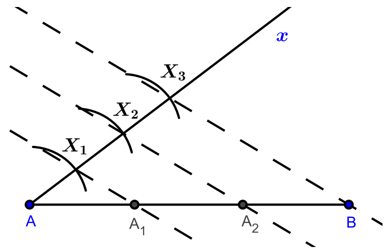
Наведени поступак нас наводи на закључак да ирационалан број $\sqrt{3}$ има неограничен број децимала које се не понављају периодично.

О подели дужи на произвољно много једнаких делова касније ће бити више приче, посебно у *VIII* разреду, а за сада ћемо, пред крај часа показати геометријску поделу дужи на десет једнаких делова.

Следећи пример ученици самостално раде.

Пример **15**. Одредити прве две децимале ирационалног броја $\sqrt{7}$ (без калкулатора).

Геометријска подела произвољне дужи на три једнака дела:



Најпре конструисати полуправу Ax и на њој (произвољно) одредити тачку X_1, а затим и тачке X_2 и X_3, тако да је $AX_1 = X_1X_2 = X_2X_3$. Затим кроз тачке X_1 и X_2 конструисати праве паралелне са BX_3. Ове праве секу дуж AB у тачкама које је деле на једнаке делове.

Слично поступамо и уколико дату дуж треба поделити на неки други број једнаких делова (на полуправу наносимо онолико тачака колико делова треба).

Пример за вежбу:

Пример **16**. Произвољну дуж AB поделити на 10 једнаких делова.

6.6 Наставна јединица: Децимални запис реалног броја и његова приближна вредност - час обраде

Циљ часа је упознавање ученика са децималним записом реалног броја и одређивање његове приближне вредности.
Ученици треба да:

- уоче да се сваки реалан број може записати као бесконачан децималан број;
- с хвате да се сваком броју може придружити тачка бројевне праве и обрнуто;
- умеју да врше заокругљивање бројева у децималном запису на одређен број децимала.

На почетку часа са ученицима обнављам:
Децимални запис рационалног броја има коначан број децимала или бесконачан број децимала које се периодично понављају. Децимални запис ирационалног броја нема коначан број децимала.

Цифре испред децималне запете одређују број јединица, десетица, стотина, и тако даље. Цифре иза децималне запете одређују број десетих, стотих, хиљадитих делова, и тако даље.

Након овог подсетника можемо започети упознавање ученика са децималним записом реалног броја.

Сваки реалан број може се представити у облику коначног или бесконачног децималног записа. Речи ,,коначно", односно ,,бесконачно", односе се на број цифара иза децималне запете.
Неопходно је додати да међу овим записима разликујемо:

- оне који су коначни или који су бесконацни и периодични и
- оне који су бесконачни и непериодични.

Први одговарају (што је ученицима већ познато) рационалним бројевима, а ови други ирационалним. Специјално, када је $\sqrt{n}$ ирационалан број, одређивање његових цифара децималским поступком никада се неће завршити (у недоглед се може продужавати).

Дефиниција **47**. Децимални запис неког рационалног броја је или коначан или бесконачан периодичан запис.

Дефиниција **48**. Децимални запис ирационалних бројева је бесконачан и није периодичан.

Како је децимални запис неких реалних бројева бесконачан, што је немогуће одредити (на начин који је рађен на претходном часу), у неком тренутку прекидамо поступак одређивања и одређујемо приближну вредност тог реалног броја. Тада кажемо да дати реални број апроксимирамо неким рационалним бројем (децималним бројем са коначно много децимала).
Узимајући уместо тачне вредности броја његову приближну вредност, ми увек правимо неку грешку. Ту грешку називамо грешком заокругљивања.

Пример **17**. Како се број $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ од броја 1.414 разликује за мање од 0.001, ако узмемо да је $\sqrt{2} \approx 1.414$, грешка заокругљивања је мања од 0.001.

За реалне бројеве, као и у случају рационалних бројева, постоје правила помоћу којих вршимо заокругљивање. Придржавајући се тих правила правимо најмању могућу грешку при заокругљивању.

Правила заокругљивања бројева:

1. Ако је прва цифра коју одбацујемо $0, 1, 2, 3$ или 4, цифре испред ње остају непромењене;
2. Ако је прва цифра коју одбацујемо $6, 7, 8$ или 9, последња цифра коју задржавамо повећава се за 1;
3. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње има још цифара, последња цифра коју задржавамо повећава се за један;
4. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње нема других цифара, разликујемо два случаја:
   (а) Ако је цифра испред одбачене парна, она остаје непромењена;
   (б) Ако је цифра испред одбачене непарна, она се повећава за један.

Пример **18**. Доказати да је $0.999... = 0.(9) = 1$.

Нека је
$$x = 0.(9)$$
тада је
$$10x = 9.(9)$$
па је
$$10x - x = 9.(9) - 0.(9)$$
односно
$$9x = 9$$
дакле,
$$x = 1$$

Пример **19**. Одредити прве три децимале $\sqrt{2}$.

Како је $(\sqrt{2})^2 = 2$ и $1^2 < 2 < 2^2$, закључујемо да је $1 < \sqrt{2} < 2$.
Сада рачунамо квадрате бројева 1.1; 1.2; 1.3; ... ; 1.9 све док не нађемо први од њих који је већи од 2.
Рачунањем долазимо до тога да је $1.4^2 < 2 < 1.5^2$, јер је $1.4^2 = 1.96$ и $1.5^2 = 2.25$, па закључујемо да је $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.
Сада рачунамо квадрате бројева 1.41; 1.42; 1.43; ... ; 1.49 све док не нађемо први од њих који је већи од 2. Тако добијамо да је $1.41^2 = 1.9881$ и $1.42^2 = 2.0164$. Дакле, $1.41^2 < 2 < 1.42^2$, па закључујемо да је $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.
У трећем кораку рачунамо квадрате бројева 1.411; 1.412; 1.413; ... ; 1.419 све док не нађемо први који је већи од 2, а то је $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$.
Настављајући овај поступак све приближније одређујемо вредност броја $\sqrt{2}$.

На крају часа ученици понављају правила заокругљивања реалних бројева, шта је то апроксимација, а шта грешка заокругљивања.

6.7 Наставна јединица: Децимални запис реалног броја и његова приближна вредност - час утврђивања

Циљ часа је увежбавање децималног записивања реалног броја и одређивања његове приближне вредности.
Ученици треба да с хвате да се сваки реалан број може записати као бесконачан децимални број и умеју да врше заокругљивање бројева у децималном запису на одређен број децимала, као и да умеју на бројевној правој да представе реалне бројеве.

Ученике подсетити:

- Шта су то научили о децималном запису ирационалних бројева;
- Од два позитивна (негативна) броја који је већи;
- Шта је то апроксимација;
- Шта је то грешка заокругљивања;
- Која је боља апроксимација броја $\sqrt{2}$: 1.41 или 1.414 и зашто;
- ,,Ручни" поступак израчунавања квадратног корена.

Задаци:

1. Доказати да је $0.(3) = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} x &= 0.333... \ | \cdot 10 \\ 10x &= 3.333... \ | - x \\ 10x - x &= 3.333... - 0.3333 \\ 9x &= 3 \\ x &= \frac{3}{9} \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Дате бројеве заокруглити на три децимале:
   (а) 1.23689; (решење: ≈ 1.237)
   (б) 1.23619; (решење: ≈ 1.236)
   (ц) 1.2365; (решење: ≈ 1.236)
   (д) 1.2355; (решење: ≈ 1.236)
   (е) 1.23651. (решење: ≈ 1.237)

3. Одредити прве три децимале реалних бројева $\sqrt{3}$ и $\sqrt{10}$.
   Решења: $\sqrt{3} = 1,732...$ и $\sqrt{10} = 3,162...$

4. Без калкулатора израчунати: $\sqrt{1369}$, $\sqrt{346,7044}$.
   Решења: $\sqrt{1369} = 37$, $\sqrt{346,7044} = 18,62$.

Ученици самостално решавају задатке у групама, уз помоћ и додатна објашњења наставника уколико има потребе.

6.8 Наставна јединица: Основна својства операција сабирања и множења реалних бројева - час обраде

Циљ часа је упознати ученике са основним својствима операција сабирања и множења реалних бројева. Ученике треба оспособити да примењују основна својства операција у израчунавању вредности алгебарских израза.

Обновити са ученицима особине операција сабирања и множења у скупу рационалних бројева.
Збир и производ свака два рационална броја су рационални бројеви. Операције сабирања и множења у скупу рационалних бројева су комутативне и асоцијативне. Број 0 је неутралан елемент за сабирање, а збир супротних бројева је 0. Број 1 је неутралан елемент за множење, а производ рационалног броја и његове реципрочне вредности је 1. Операција множења у скупу $\mathbb{Q}$ има својство дистрибутивности према сабирању.
Операције сабирања и множења реалних бројева имају све оне особине које имају и у скупу рационалних бројева.
Збир и производ свака два реална броја су реални бројеви. Како је резултат из истог скупа као и бројеви на које се операције односе кажемо да је скуп реалних бројева затворен за сабирање и множење.

Теорема **16**. За свака два реална броја a и b важи $a+b \in \mathbb{R}$ и $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

Нека a, b, $c \in \mathbb{R}$.

За операцију сабирања у скупу $\mathbb{R}$ важе следеће законитости:

Комутативност:
$$a+b=b+a$$

Асоцијативност:
$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

Неутран елемент за сабирање, 0:
$$a+0=0+a=a$$

За број a и њему супротан број $-a$ важи:
$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

За операцију множења у скупу $\mathbb{R}$ важе следеће законитости:

Комутативност:
$$a \cdot b=b \cdot a$$

Асоцијативност:
$$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$$

Неутрални елемент за множење, 1:
$$a \cdot 1=1 \cdot a=a$$

За број a и њему реципрочан број $\frac{1}{a}$ важи:
$$a \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a} \cdot a=1$$

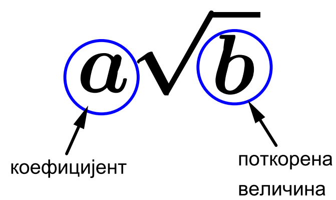
Ако је производ два броја једнак броју 1, за та два броја кажемо да су један другом инверзни. За сваки реалан број различит од 0 његова реципрочна вредност (његов реципрочан број) је његов инверзан елемент за множење. Број 0 нема инверзан елемент, то јест нема реципрочну вредност.

Операција множења је дистрибутивна према операцији сабирања у скупу $\mathbb{R}$. То јест за $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи да је:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ и } (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Напомена: Стиче се утисак да ученици једнакости $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ и $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$ с хватају на различите начине: прву као ,,правило ослобођења од заграда", а другу као ,,издвајање заједничког чиниоца". Инсистирати на томе да су ове једнакости потпуно исте - ако прву читамо с десна на лево добићемо другу, односно, ако другу читамо с лева на десно добићемо прву. Заправо, треба инсистирати на самом термину дистрибутивност.

Уобичајено је да када сабирамо или множимо рационалан и ирационалан број, прво пишемо рационалан број, затим знак операције, па онда ирационалан број. Само када је у задатку наглашено рачунамо приближну вредност резултата, иначе га остављамо у овом облику (као збир рационалног и ирационалног броја или као производ рационалног и ирационалног броја).



Сабирати и одузимати можемо само оне квадратне корене који имају исте поткорене величине, и то тако што сабирамо, односно одузимамо, њихове коефицијенте.

$$\boxed{\begin{array}{c} a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c} \\ \hline \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \end{array}}$$

Ирационалне бројеве множимо тако што коефицијент помножимо са коефицијентом, а поткорену величину са поткореном величином.

$$\boxed{a\sqrt{b} \cdot c\sqrt{d} = a \cdot c\sqrt{b \cdot d}}$$

Из практичних разлога избегавамо да делимо ирационалним бројем,с тога, кад год имамо реалан број записан као количник $\frac{a}{\sqrt{b}}$, где је $\sqrt{b}$ ирационалан број, дати број множимо са јединицом записаном као $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$:

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}}$$

Следеће примере су ученици радили самостално у свесци и пред таблом, уз моју помоћ уколико је имало потребе.

1. Израчунати вредност израза:

   (а) $2+\sqrt{3}-3=$

   (б) $\sqrt{2}+\frac{1}{3}-\sqrt{2}=$

   (ц) $-1.7-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}=$

   (а) $2+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}-1$
   (б) $\sqrt{2}+\frac{1}{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{3}$
   (ц) $-1.7-\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{5}=-1.7+\sqrt{7}$

2. Израчунати вредност израза:

   (а) $4\cdot\sqrt{3}\cdot(-2)=$

   (б) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

   (а) $4\cdot\sqrt{3}\cdot(-2)=-8\sqrt{3}$
   (б) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{15}\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\cdot\sqrt{15}=-\sqrt{15}$

3. Израчунати вредност израза:

   (а) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=$

   (б) $(0.7-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=$

   (ц) $6+\sqrt{11}-7\sqrt{11}=$

   (д) $-\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{5}=$

   (а) $2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$
   (б) $(0.7-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=0.7\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=0.7\sqrt{2}-2$
   (ц) $6+\sqrt{11}-7\sqrt{11}=6-6\sqrt{11}$
   (д) $-\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{5}=2\sqrt{5}+\sqrt{7}$

4. Израчунати вредност израза:

   (а) $(4+\sqrt{3}):\left(-\frac{1}{3}\right)=$

   (б) $(4+7\sqrt{5}):\sqrt{5}=$

   (а) $(4+\sqrt{3}):\left(-\frac{1}{3}\right)=4:\left(-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)=4\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{3}{1}\right)=-12-3\sqrt{3}$

   (б) $(4+7\sqrt{5}):\sqrt{5}=\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}+7=7+\frac{4\sqrt{5}}{5}$

6.9 Наставна јединица: Поредак бројева и операције сабирања и множења-час утврђивања

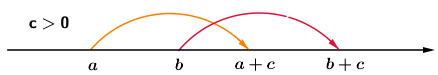
Циљ часа је утврђивање знања ученика о поретку бројева и о операцијама сабирања и множења и припремање ученика за алгебарско решавање једначина и неједначина.

Поновити са ученицима: Ако на обе стране једнакости додамо рационалан број добијамо нову тачну једнакост, односно, ако обе стране једнаости помножимо истим рационалним бројем добијамо нову тачну једнакост.

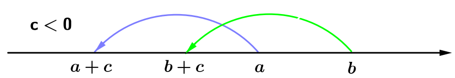
Теорема **17**. За реалне бројеве a, b, c на основу $a = b$ следи $a + c = b + c$.
За реалне бројеве a, b, c на основу $a = b$ следи $a \cdot c = b \cdot c$

Нека је реалном броју a на бројевној правој додељена тачка A, а реалном броју b додељена тачка B.

Тада је за позитиван реалан број c броју $a + c$ придружена тачка која се налази десно од A за дужину c, а броју $b + c$ придружена тачка која се налази десно од B за дужину c.



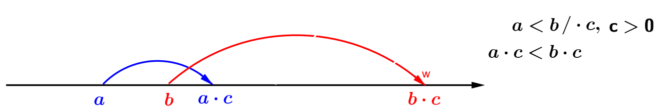
Док је за негативан реалан број c броју $a + c$ придружена тачка која се налази лево од A за дужину c, а броју $b + c$ придружена тачка која се налази лево од B за дужину c.



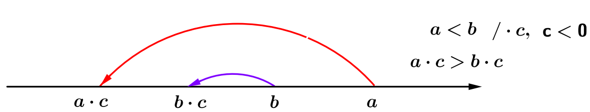
Закључујемо да је поредак међу бројевима a и b исти као поредак међу бројевима $a + c$ и $b + c$, то јест ако је a лево (десно) од b, онда је $a + c$ лево (десно) од $b + c$.

Теорема **18**. За реалне бројеве a, b и c на основу $a < b$ следи $a + c < b + c$.

Теорема **19**. За позитиван реалан број c и произвољне реалне бројеве a и b на основу $a < b$ следи $a \cdot c < b \cdot c$.



Теорема **20**. За негативан реалан број c и произвољне реалне бројеве a и b на основу $a < b$ следи $a \cdot c > b \cdot c$.



Напомена: Ученицима на часу сам ова правила графички илустровала, а затим сам им и на конкретним примерима показала (што ми се чини да су лакше с хватили).

Пример **20**. Решити неједначине:

1. $x - 3 > \sqrt{2}$;
2. $(x + \sqrt{3}) - 0.4 < -5$;
3. $4x > \sqrt{3}$;
4. $(2.1 - x\sqrt{2}) + 1.31 < 2.45$.

1. $x - 3 > \sqrt{2}\ \ / + 3$
   $x > 3 + \sqrt{2}$
2. $(x + \sqrt{3}) - 0.4 < -5\ \ / + 0.4$
   $x + \sqrt{3} < -4.6\ \ / - \sqrt{3}$
   $x < -4.6 - \sqrt{3}$
3. $4x > \sqrt{3}\ \ / : 4$
   $x > \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
4. $(2.1 - x\sqrt{2}) + 1.31 < 2.45\ \ / - 1.31$
   $2.1 - x\sqrt{2} < 1.14\ \ / - 2.1$
   $-x\sqrt{2} < -0.96\ \ / \cdot (-1)$
   $x\sqrt{2} > 0.96\ \ / : \sqrt{2}$
   $x > \dfrac{0.96}{\sqrt{2}}$
   $x > \dfrac{0.96}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
   $x > \dfrac{0.96\sqrt{2}}{2}$
   $x > 0.48\sqrt{2}$

6.10 Наставна јединица: Основна својства операције кореновања у скупу $\mathbb{R}_0{}^+$ - час обраде

Циљ часа је упознавање ученика са основним својствима операције кореновања у скупу $\mathbb{R}_0{}^+$. Ученици треба да:

- стекну знање о основним својствима операције кореновања у скупу $\mathbb{R}_0{}^+$;
- увежбају да поткорену величину која је сложен број запишу као производ два броја и да примене једнакост $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ или као количник два броја и примене једнакост $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- оспособљавају се за решавање практичних задатака применом квадратног корена.

Поновити са ученицима шта је квадратни корен ненегативног реалног броја a.

Дефиниција **49**. Квадратни корен, или само корен, ненегативног реалног броја a је ненегативан број у ознаци $\sqrt{a}$, чији је квадрат једнак броју a.

Ефекат поновљене дефиниције је да се сада у свести ученика појам броја односи на реалне бројеве, а не на рационалне као што је то био случај када смо тек увели симбол корена.

Кореновањем сваком ненегативном реалном броју a $(a \geq 0)$ додељујемо тачно један ненегативан реалан број $\sqrt{a}$ такав да је $(\sqrt{a})^2 = a$.

Пример **21**. Доказати да је $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Број $2\sqrt{2}$ је ненегативан. Треба још проверити да ли је $(2\sqrt{2})^2 = 8$. Како је

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{2}\right) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot 2 = 8,$$

закључујемо да је $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Приметимо да је

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} \text{ и}$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{па је } \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}.$$

Теорема **21**. За све ненегативне реалне бројеве a и b важи:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Заиста, за ненегативне реалне бројеве a и b важи:

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = a \cdot b.$$

Пример **22**. Израчунати квадратни корен бројева 3600 и 540.

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$$
$$\sqrt{540} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 15} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{15} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{15} = 6\sqrt{15}$$

Теорема **22**. За сваки ненегативан реалан број a и позитиван реалан број b важи:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Пример **23**. Израчунати квадратне корене бројева $2\frac{7}{9}, \frac{13}{36}, 4\frac{2}{7}$.

$$\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$
$$\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$$
$$\sqrt{4\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{100}{7}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{10\sqrt{7}}{7}$$

Пример **24**. Израчунати квадратне корене бројева $\frac{5}{36}$, $\frac{8}{15}$, и 4.9.

$$\sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$
$$\sqrt{\frac{8}{15}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{15 \cdot 15}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 30}}{\sqrt{225}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{30}}{15} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$$
$$\sqrt{4.9} = \sqrt{\frac{49}{10}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

Пример **25**. Израчунати вредности бројевних израза:

1. $-\frac{4}{17} \cdot \left(3.4 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;
2. $\left(\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{12}$;
3. $\sqrt{18} - 3\left(\sqrt{5} - \sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

1. $-\frac{4}{17} \cdot \left(3.4 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{4}{17} \cdot \left(3.4 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{17} \cdot \left(\frac{34}{10} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4}{17} \cdot \left(\frac{17}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{17} \cdot \frac{17}{5} - \frac{4}{17} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{4}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{34} = -\frac{4}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{17} = -\frac{68 + 10\sqrt{2}}{85}$;
2. $\left(\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{12} = \left(\frac{2}{5} - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{12} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{12} - \sqrt{36} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - 6 = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 6 = \frac{4}{5}\sqrt{3} - 6 = -6 + \frac{4}{5}\sqrt{3}$;
3. $\sqrt{18} - 3\left(\sqrt{5} - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) = \sqrt{9}\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 3\frac{\sqrt{24}}{8} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 3\frac{\sqrt{4}\sqrt{6}}{8} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 3\frac{2\sqrt{6}}{8} = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{4}\sqrt{6}$.

Пример **26**. Израчунати:

1. $\sqrt{9\cdot 25}=$

2. $\sqrt{1\frac{7}{9}}=$

3. $\sqrt{4900}=$

4. $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 0.64\cdot 1.44}=$

5. $\sqrt{75}=$

1. $\sqrt{9\cdot 25}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\cdot 5=15$

2. $\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

3. $\sqrt{4900}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{100}=7\cdot 10=70$

4. $\sqrt{3\frac{1}{16}\cdot 0.64\cdot 1.44}=\sqrt{3\frac{1}{16}}\cdot\sqrt{0.64}\cdot\sqrt{1.44}=\sqrt{\frac{49}{16}}\cdot 0.8\cdot 1.2=\frac{7}{4}\cdot 0.8\cdot 1.2=1.75\cdot 0.8\cdot 1.2=1.64$

5. $\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 25}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

На крају часа поновити:

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\\ \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\end{array}}$$

6.11 Наставна јединица: Основна својства операције кореновања у скупу $\mathbb{R}_0{}^+$ - час утврђивања

Циљ часа јесте да ученици међусобно размене стечена знања о својствима операције кореновања у $\mathbb{R}_0{}^+$.
Ученике сам поделила у групе и поделила им задатке које су радили.

Задаци за рад:

1. Израчунати:
   (а) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 49} =$
   (б) $\sqrt{0.25 \cdot \frac{1}{4} \cdot 121} =$

   (а) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 4 \cdot 7 = 20 \cdot 7 = 140;$

   (б) $\sqrt{0.25 \cdot \frac{1}{4} \cdot 121} = \sqrt{0.25} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{121} = 0.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 = 0.25 \cdot 11 = 2.75.$

2. Растављањем на чиниоце израчунати квадратне корене следећих бројева:
   (а) 2025;
   (б) 176400.

   (а) $\sqrt{2025} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 3 \cdot 3 = 45;$

   (б) $\sqrt{176400} = \sqrt{441 \cdot 4 \cdot 100} = 21 \cdot 2 \cdot 10 = 420.$

3. Упростити изразе („извуци” испред корена највећи могући чинилац):
   (а) $\sqrt{8} =$
   (б) $\sqrt{27} =$
   (ц) $\sqrt{108} =$

   (а) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2};$

   (б) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3};$

   (ц) $\sqrt{108} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{3}.$

4. Записати изразе у облику $m\sqrt{n}$, где је m цео, а n природан број:
   (а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} - 3\sqrt{5};$
   (б) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + \sqrt{48};$
   (ц) $4\sqrt{2} - 3\sqrt{50} - 2\sqrt{98};$
   (д) $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{1}{4}\sqrt{80} + 2\sqrt{45}.$

(а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}-3\sqrt{5}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-\sqrt{5}$;

(б) $2\sqrt{12}-3\sqrt{27}+\sqrt{48}=2\cdot2\sqrt{3}-3\cdot3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=4\sqrt{3}-9\sqrt{3}+4\sqrt{3}=-\sqrt{3}$;

(ц) $4\sqrt{2}-3\sqrt{50}-2\sqrt{98}=4\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{25}\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{49}\sqrt{2}=4\sqrt{2}-3\cdot5\sqrt{2}-2\cdot7\sqrt{2}=4\sqrt{2}-15\sqrt{2}-14\sqrt{2}=-25\sqrt{2}$;

(д) $\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{1}{4}\sqrt{80}+2\sqrt{45}=\frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{16}\sqrt{5}+2\sqrt{9}\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}-\frac{1}{4}\cdot4\sqrt{5}+2\cdot3\sqrt{5}=1\sqrt{5}-1\sqrt{5}+6\sqrt{5}=6\sqrt{5}$.

5. Израчунати вредност израза:

(а) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{25}$;

(б) $4\frac{1}{3}:\sqrt{\frac{4}{9}}+1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{24}{25}}$;

(ц) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{64}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16}-10\cdot\sqrt{0.25}$;

(д) $\sqrt{5-\frac{1}{3^2}}-\frac{2}{\sqrt{11}}$;

(е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\sqrt{2+\frac{7}{9}}-0.5^2$.

(а) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{25}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot5=\frac{2}{5}+\frac{5}{2}=\frac{29}{10}=2\frac{9}{10}$;

(б) $4\frac{1}{3}:\sqrt{\frac{4}{9}}+1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{24}{25}}=\frac{13}{3}:\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{13}{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{13}{2}+\frac{3}{10}=\frac{68}{10}=6\frac{4}{5}$;

(ц) $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{64}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16}-10\cdot\sqrt{0.25}=\frac{1}{4}\cdot8+\frac{1}{2}\cdot4-10\cdot0.5=2+2-5=-1$;

(д) $\sqrt{5-\frac{1}{3^2}}-\frac{2}{\sqrt{11}}=\sqrt{5-\frac{1}{9}}-\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{44}{9}}-\frac{2\sqrt{11}}{11}=\frac{\sqrt{44}}{3}-\frac{2\sqrt{11}}{11}=\frac{2\sqrt{11}}{3}-\frac{2\sqrt{11}}{11}=\frac{22\sqrt{11}-6\sqrt{11}}{33}=\frac{16\sqrt{11}}{33}$;

(е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\sqrt{2+\frac{7}{9}}-0.5^2=\frac{4}{9}+\sqrt{\frac{25}{9}}-0.25=\frac{4}{9}+\frac{5}{3}-0.25=\frac{19}{9}-\frac{1}{4}=\frac{67}{36}=1\frac{31}{36}$.

6.12 Наставна јединица: Једнакост $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$ - час утврђивања

Циљ часа је увођење једнакости $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$. Ученици треба да:

- обнове појам квадратног корена;
- усвоје идентитет $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$;
- умеју да одереде решења једначине $x^2 = a$ $(a \geq 0)$ и да запишу $x = \sqrt{a}$ или $x = -\sqrt{a}$, као и да израчунавају квадратни корен броја;
- се оспособљавају за решавање практичних задатака применом квадратног корена.

Напомена: Усвајање једнакости $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$, због њене сложености, ученицима углавном представља проблем.

Подсетимо се дефиниције апсолутне вредности реалног броја:

$$\mid a \mid = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Ученици самостално раде следећи пример:

Пример **27**. Попунити табелу:

a	3	0	$\frac{1}{2}$	-7	-1.2	$\sqrt{17}$	$-\sqrt{23}$
a^2							
$\sqrt{a^2}$							
$\mid a \mid$							

Последње две врсте дате табеле су једнаке, што наговештава следећи закључак.

Теорема **23**. За сваки реалан број a важи $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$.

Доказ

Уочимо да за сваки реалан број a постоји $\sqrt{a^2}$, јер је за сваки број a испуњено $a^2 \geq 0$.

Ако је $a \geq 0$, онда је по дефиницији квадратног корена $\sqrt{a^2} = a$ (a је ненегативан број чији је квадрат једнак a^2).

Ако је $a < 0$, онда је по дефиницији квадратног корена $\sqrt{a^2} = -a$, јер је тада број $-a$ позитиван, а његов квадрат је једнак a^2.

Пример **28**. Применимо претходно тврђење на конкретном примеру:

$$-3 < 0$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$$

На основу претходног следи да је:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Како је

$$\mid a \mid = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Уочавамо да су десне стране горње две једнакости једнаке, па закључујемо да за сваки реалан број a јесте $\sqrt{a^2} = \mid a \mid$.

Задаци за рад:

1. Израчунати:

(а) $\sqrt{25}$;

(б) $\sqrt{5^2}$;

(ц) $\sqrt{(-5)^2}$;

(д) $\sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2}$.

2. Израчунати вредност бројевних израза

(а) $\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$;

(б) $\sqrt{2}\cdot(0.63-\sqrt{3}):\sqrt{(-\sqrt{6})^2}$;

(ц) $\sqrt{5\cdot(-2)^2}\cdot(\frac{7}{8}-\sqrt{3})+\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{(-15)\cdot(-3)}$.

3. Решити једначину: $\sqrt{x^2}=2$.

4. Решити неједначину и графички представити решење: $\sqrt{x^2}\leq 6$.

5. Израчунати вредност израза:

(а) $\frac{2}{3}+\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$;

(б) $\frac{2}{5}-\sqrt{(2-3)^2}$;

(ц) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(-9)^2}-4\cdot\sqrt{\frac{25}{36}}+6\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}$;

(д) $1\frac{1}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{15}{64}}-0.2\cdot\sqrt{25}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt{(-16)^2}$.

Решења задатака:

1. (а) $\sqrt{25}=5$;

(б) $\sqrt{5^2}=\mid 5\mid=5$;

(ц) $\sqrt{(-5)^2}=\mid -5\mid=5$;

(д) $\sqrt{\left(-\frac{5}{8}\right)^2}=\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}$.

2. (а) $\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}-\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$;

(б) $\sqrt{2}\cdot\left(0.63-\sqrt{3}\right):\sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\left(0.63\sqrt{2}-\sqrt{6}\right):\left|-\sqrt{6}\right|=\left(0.63\sqrt{2}-\sqrt{6}\right):\sqrt{6}=\frac{0.63\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=$
$\frac{0.63\sqrt{2}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{0.63}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-1=\frac{0.63\sqrt{3}}{3}-1=0.21\sqrt{3}-1$;

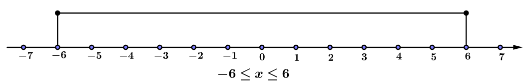
(ц) $\sqrt{5\cdot(-2)^2}\cdot\left(\frac{7}{8}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{(-15)\cdot(-3)}=\sqrt{5\cdot4}\cdot\left(\frac{7}{8}-\sqrt{3}\right)+\left|-\sqrt{5}\right|-\sqrt{45}=2\sqrt{5}\cdot\left(\frac{7}{8}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}\cdot\frac{7}{8}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{5}=\frac{7\sqrt{5}}{4}-2\sqrt{15}-2\sqrt{5}=-\frac{\sqrt{5}}{4}-2\sqrt{15}=-\sqrt{5}\left(\frac{1}{4}+2\sqrt{3}\right)$.

3.

$$\sqrt{x^2}=2$$
$$\sqrt{x^2}=\mid x\mid$$
$$\mid x\mid=2\begin{cases}x_1=2\\x_2=-2\end{cases}$$

4.

$$\sqrt{x^2}\le 6$$
$$\mid x\mid\le 6\begin{cases}x\ge -6\\x\le 6\end{cases}$$
$$-6\le x\le 6$$



5. (a) $\frac{2}{3}+\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}+\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$;

(б) $\frac{2}{5}-\sqrt{(2-3)^2}=\frac{2}{5}-\sqrt{(-1)^2}=\frac{2}{5}-|-1|=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$;

(ц) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(-9)^2}-4\cdot\sqrt{\frac{25}{36}}+6\cdot\sqrt{7\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\cdot|-9|-4\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{2}{3}\cdot9-4\cdot\frac{5}{6}+6\cdot\frac{8}{3}=6-\frac{10}{3}+16=18\frac{2}{3}$;

(д) $1\frac{1}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{15}{64}}-0.2\cdot\sqrt{25}+\frac{3}{4}\cdot\sqrt{(-16)^2}=\frac{8}{7}\cdot\sqrt{\frac{49}{64}}-0.2\cdot5+\frac{3}{4}\cdot|-16|=\frac{8}{7}\cdot\frac{7}{8}-1+\frac{3}{4}\cdot16=1-1+\frac{3}{4}\cdot16=12$.

6.13 Бројевни изрази - час утврђивања

Циљ часа је да ученици провежбају и примене знање о реалним бројевима у решавању задатака и вредновање степена усвојених наставних садржаја.

Неопходно је током часа пратити рад ученика, усмеравати их на правилно решавање задатака, давати им инструкције и неопходна додатна објашњења и инсиситирати на поступности и систематичности при раду, на развијању педантности и уредности ученика.

Задаци за рад на часу:

1. Упростити изразе:
   (а) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{32})$;
   (б) $(\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}$;
   (ц) $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$.

2. Израчунати вредност израза $1\frac{1}{2}\cdot x-6\frac{17}{18}\cdot y$ ако је $x=\sqrt{1-\frac{16}{25}}$ и $y=\sqrt{0.36\cdot 0.16}$.

3. Израчунати вредност израза:
   (а) $\sqrt{(-1)^2}-\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-4)^2}$;
   (б) $\sqrt{9}-\sqrt{9^2}+9\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{(-9)^2}$;
   (ц) $\sqrt{(-0.3)^2}-2\cdot\sqrt{\left(-5\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

4. Израчунати вредност израза:
   (а) $\left(\sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{121}\right):\left(\sqrt{0.81}-1\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{25}{36}}\right)$;
   (б) $\left(\sqrt{676}+1\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2}\right):\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\sqrt{5\frac{1}{16}}+\sqrt{0.25}\right)$.

5. За $A=2\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{11}{25}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2}$ и $B=\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}-2\cdot\frac{\sqrt{(-5)^2}}{4}$ израчунати:
   (а) A^2-B^2;
   (б) $(A+B)^2$.

Решења задатака:

1. (а) $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{32})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=2-\sqrt{64}=2-8=-6$;
   (б) $(\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50})\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}-\sqrt{64}+\sqrt{100}=4-8+10=6$;
   (ц) $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{80}-\sqrt{180}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{45}{5}}+\sqrt{\dfrac{80}{5}}-\sqrt{\dfrac{180}{5}}=\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{36}=3+4-6=1$.

2. $1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{16}{25}}-6\frac{17}{18}\cdot\sqrt{0.36\cdot 0.16}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}}-\frac{125}{18}\cdot 0.6\cdot 0.4=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{125}{18}\cdot 0.24=\frac{9}{10}-\frac{125}{18}\cdot\frac{24}{100}=$ $\frac{9}{10}-\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{4}=\frac{9}{10}-\frac{5}{3}=-\frac{23}{30}$

3. (а) $\sqrt{(-1)^2}-\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-4)^2}=1-2+3-4=-2;$

(б) $\sqrt{9}-\sqrt{9^2}+9\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt{(-9)^2}=3-9+9\cdot\frac{1}{3}-9=-12;$

(ц) $\sqrt{(-0.3)^2}-2\cdot\sqrt{\left(-5\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{1\frac{24}{25}}=0.3-2\cdot\sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2}+\sqrt{\frac{49}{25}}=0.3-2\cdot\frac{11}{2}+\frac{7}{5}=0.3-11+1.4=-9.3.$

4. (а) $\left(\sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2}\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{121}\right):\left(\sqrt{0.81}-1\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{25}{36}}\right)=\left(\frac{4}{25}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-11\right):\left(0.9-\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}\right)=$ $\left(\frac{4}{25}\cdot\frac{25}{4}-11\right):(0.9-1)=(1-11):(0.9-1)=-10:(-0.1)=100;$

(б) $\left(\sqrt{676}+1\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2}\right):\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\sqrt{5\frac{1}{16}}+\sqrt{0.25}\right)=\left(26+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right):\left(\frac{4}{9}\cdot\sqrt{\frac{81}{16}}+0.5\right)=$ $(26+1):\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}+0.5\right)=27:(1+0.5)=27:1.5=18.$

5. (а) $A^2-B^2=\left(2\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{11}{25}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2}\right)^2-\left(\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}-2\cdot\frac{\sqrt{(-5)^2}}{4}\right)^2=$

$=\left(\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{36}{25}}-\frac{1}{2}\cdot 4\right)^2-\left(\sqrt{\frac{25}{16}}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}-2\right)^2-\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)^2=(3-2)^2-$ $\left(\frac{8}{4}-\frac{5}{2}\right)^2=1^2-\left(-\frac{2}{4}\right)^2=1-\frac{4}{16}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4};$

(б) $(A+B)^2=\left(2\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\frac{11}{25}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-4)^2}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}+\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}-2\cdot\frac{\sqrt{(-5)^2}}{4}\right)^2=$

$=\left(\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{36}{25}}-\frac{1}{2}\cdot 4+\sqrt{\frac{25}{16}}+\frac{3}{4}-2\cdot\frac{5}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}-2+\frac{5}{4}+\frac{3}{4}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-2+\frac{8}{4}-\frac{5}{2}\right)^2=$ $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$

6.14 Систематизација

Задаци подељени по образовним стандардима, односно на основни, средњи и напредни ниво.

- Основни ниво: Ученик уме да квадрира рационалан број, преведе децимални запис броја у разломак и обратно, израчуна квадратни корен, наведе пример ирационалног броја.
- Средњи ниво: Ученик уме да израчуна вредност бројевног израза у чијем саставу су квадратни корени и квадрати рационалних бројева, реши једначину облика $x^2 = a,\ (a > 0)$.
- Напредни ниво: Ученик уме да у скупу реалних бројева реши сложене једначине облика $x^2 = a,\ (a > 0)$, примени операције са квадратним коренима, одреди приближну вредност ирационалног броја, израчуна бројевну вредност сложених израза са квадратним кореном.

Основни ниво

1. Из скупа $\{-2; -4.7; \sqrt{7}; \sqrt{4}; -\sqrt{9}; \sqrt{5}\}$ издвојити ирационалне бројеве.
2. Између која два природна броја се налази број:
   (а) $\sqrt{5}$;
   (б) $\sqrt{21}$.
3. Израчунати површину квадрата чија је страница $9cm$.
4. Израчунати:
   (а) $15^2 =$
   (б) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$
   (ц) $0.6^2 =$
   (д) $\left(2\frac{1}{4}\right)^2 =$
   (е) $(-5)^2 - 5^2 =$
   (ф) $16 \cdot \left(-3\frac{3}{4}\right)^2 =$
5. Израчунати:
   (а) $\sqrt{36} =$
   (б) $\sqrt{\frac{4}{9}} =$
   (ц) $\sqrt{3^2} =$
   (д) $\sqrt{(-5)^2} =$
   (е) $3\sqrt{4} + 5\sqrt{4} =$
   (ф) $2\sqrt{9} \cdot 6\sqrt{9} =$
6. Израчунати вредност израза:
   (а) $8\sqrt{5} + 5\sqrt{5} =$

(б) $3\sqrt{7}+4\sqrt{7}-5\sqrt{7}=$

(ц) $6\sqrt{11}+5\sqrt{2}-3\sqrt{11}+2\sqrt{2}=$

Средњи ниво

1. Поређај од најмањег до највећег бројеве: $\sqrt{5}$, $\sqrt{3\cdot 4-4}$, $\sqrt{3^2-3}$, $\sqrt{2^2+3}$, $\sqrt{5\cdot(3\cdot 1-1)}$.

2. Вредност израза $\sqrt{128}+\sqrt{192}$ најближа је броју:

   (а) $8\sqrt{5}$;

   (б) 25.12;

   (ц) $\sqrt{320}$;

   (д) 24.112.
   Заокружити тачан одговор.

3. Израчунати вредност израза:

   (а) $-(-5)^2\cdot(-0.2)^2$;

   (б) $10^2-(-10)^2-(-10^2)$;

   (ц) $(-4^2)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+3\cdot(3-6)^2$;

   (д) $\left[-5^2\cdot(0.2)^2+(-3)^2\right]\cdot\frac{1}{8}$.

4. Решити једначине:

   (а) $5x^2+3=83$;

   (б) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$;

   (ц) $(x+1)^2-3=-\frac{3}{4}$.

5. Израчунати вредност израза:

   (а) $\sqrt{10}+3\sqrt{10}-2\sqrt{10}$;

   (б) $-3.9+2\sqrt{11}+1.1-9\sqrt{11}$;

   (ц) $\sqrt{7}\cdot(2-\sqrt{7})+2.7$;

   (д) $12\sqrt{6}-\frac{12}{\sqrt{6}}$;

   (е) $\sqrt{1\frac{9}{16}}\cdot\sqrt{1.96}$;

   (ф) $\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$;

   (г) $(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2$;

   (х) $(7\sqrt{2})^2-(6\sqrt{3})^2-(3\sqrt{5})^2$;

   (и) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{100}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}-10\cdot\sqrt{0.36}$.

6. Упростити изразе:

   (а) $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{27})$;

   (б) $(\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{2})\cdot\sqrt{10}$;

(ц) $\dfrac{\sqrt{72}+\sqrt{96}-\sqrt{32}+\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$.

7. Који од бројева a, b, c припада скупу ирационалних бројева, ако је :

$$a=\left(1\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)\cdot 2\sqrt{8},$$
$$b=\left(4\sqrt{3}-5\sqrt{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\sqrt{27},$$
$$c=\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(-5\sqrt{2}\right)?$$

Напредни ниво

1. Која једначина има решења мања од 2:

(а) $(1-a)^2=4$;

(б) $1+(2a)^2=5$;

(ц) $\dfrac{(a-2)^2}{2}=2$;

(д) $\dfrac{(2a)^2-1}{5}=3$.

2. Израчунати:

(а) $\left(-3\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\left(2\sqrt{10}\right)^2$;

(б) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2$.

3. Решити једначине:

(а) $3\frac{1}{3}-1\frac{1}{5}x^2=2\frac{1}{2}$;

(б) $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{5}x+3\right)^2=\dfrac{18}{25}$;

(ц) $\sqrt{\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$.

4. Израчунати ивицу коцке чија је површина $150cm^2$.

5. За $A=\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\dfrac{3}{5}+1\right)^2}$ и $B=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}\cdot\sqrt{5\dfrac{4}{9}}$ израчунати:

(а) $A-B$;

(б) $A\cdot B$;

(ц) $(A+B)^2$.

6. Израчунати вредност израза:

(а) $\dfrac{2}{7}\cdot\sqrt{(-7)^2}-5:\sqrt{6.25}-(-0.4)^2$;

(б) $\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}$;

(ц) $\sqrt{10}-\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}+\sqrt{\left(2-2\sqrt{10}\right)^2}$.

7. Израчунати $\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{(7-x)^2}-\left(x-\sqrt{5}\right)\cdot(7-x)$ за $x=7+\sqrt{5}$.

8. Одредити најмањи природан број a тако да је број $\sqrt{1350\cdot a}$ природан.

7 Закључак

Основни проблеми методике наставе математике односе се на циљеве учења, садржаје усклађене са постављеним циљевима, структуру садржаја, начине организације наставе (методи, поступци, средства и облици наставе) и обучавање и мотивисање деце с ходно њиховим интелектуалним способностима.

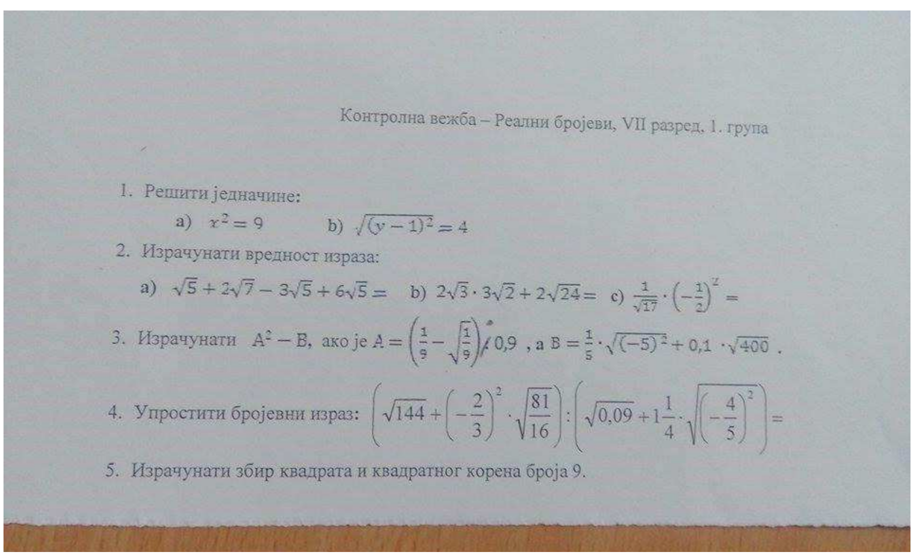
Приликом планирања часа у настави кључно је познавање предзнања ученика, затим јасно одређен циљ часа, наставне методе којима је најлакше досегнути циљ, образовни, функционални и васпитни задаци.

Приликом обраде ове наставне теме користила сам методе излагања, приповедања (излагање у облику описивања речима, које се користи када ученике треба упознати са конкретним чињеницама), предавања. У зависности од циља и садржаја часа примењивала сам групни и индивидуални облик рада.

Током овог рада трудила сам се да укажем на што више методичких проблеме, у виду напомена, са којима сам се сусрела приликом излагања ове области ученицима седмог разреда, као и на могућа решења.
Најче71е грешке које сам приметила да ученици праве у задацима из ове области су:

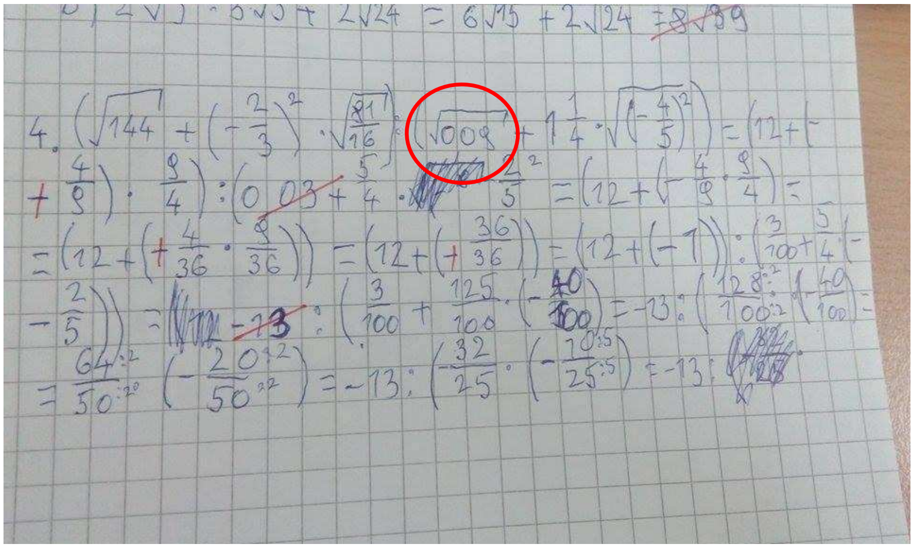
- квадрат броја рачунају као производ тог броја са бројем 2;
- приликом решавања једначина облика $x^2 = a$, $(a > 0)$, одреде само једно решење;
- квадратни корен броја рачунају, на пример, на следећи начин: $\sqrt{9} = \pm\sqrt{3}$;
- ирационалне бројеве сабирају тако што саберу њихове поткорене величине;
- пример $\sqrt{a^2}$ с хватају као да ,,скрате" квадрат и квадратни корен, па то изазива грешке следеће врсте: $\sqrt{(-3)^2} = -3$.

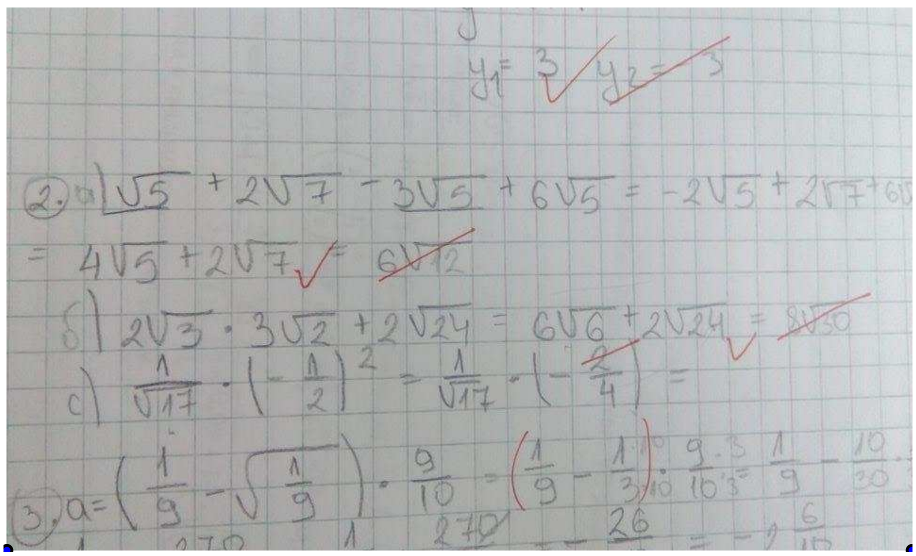
Пример контролне вежбе

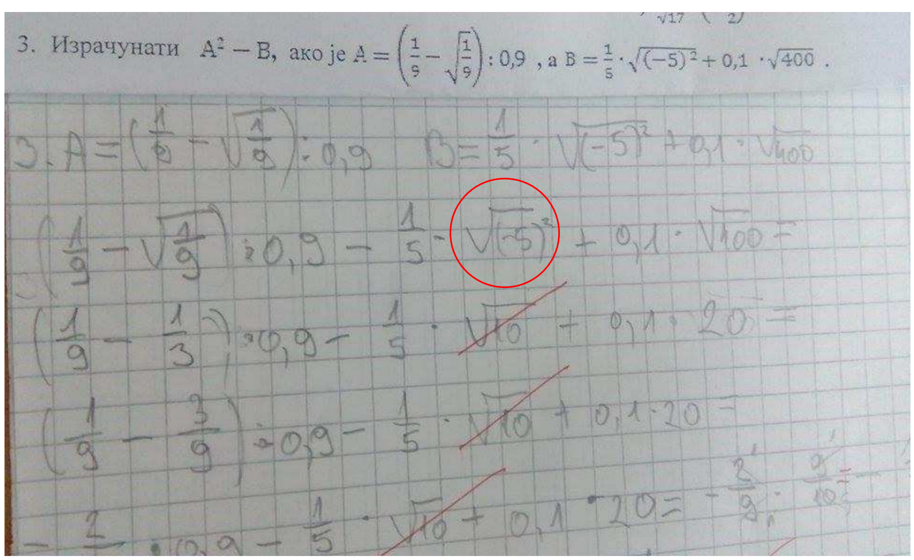


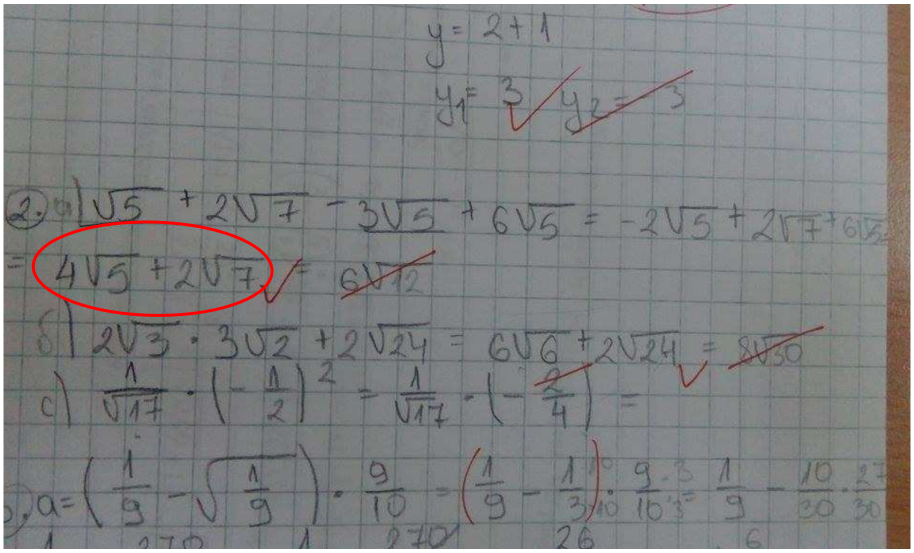
Контролна вежба – Реални бројеви, VII разред, 1. група

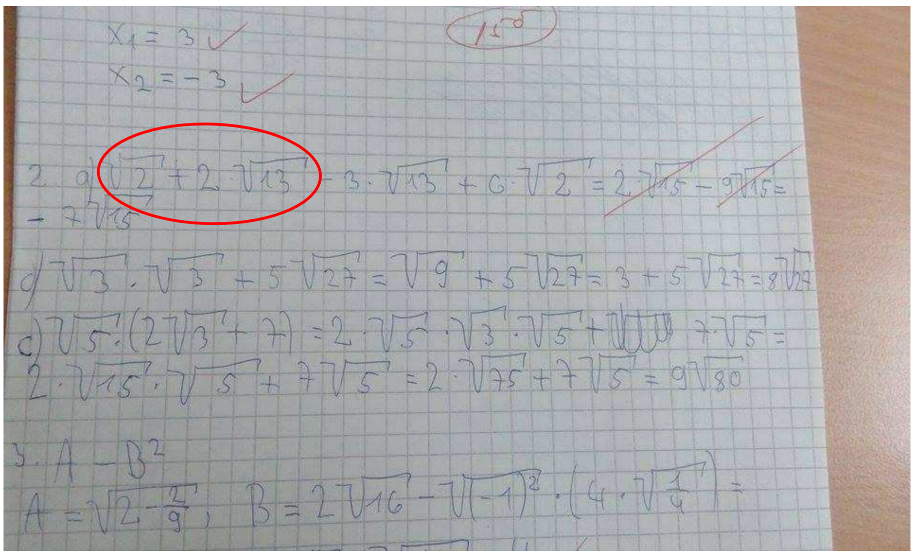
1. Решити једначине:
   a) $x^2 = 9$ b) $\sqrt{(y-1)^2} = 4$
2. Израчунати вредност израза:
   a) $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} =$ b) $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{24} =$ c) $\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 =$
3. Израчунати $A^2 - B$, ако је $A = \left(\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) / 0{,}9$, а $B = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{(-5)^2} + 0{,}1 \cdot \sqrt{400}$.
4. Упростити бројевни израз: $\left(\sqrt{144} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{81}{16}}\right) : \left(\sqrt{0{,}09} + 1\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2}\right) =$
5. Израчунати збир квадрата и квадратног корена броја 9.






3. Израчунати $A^2 - B$, ако је $A = \left(\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) : 0{,}9$, а $B = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{(-5)^2} + 0{,}1 \cdot \sqrt{400}$.





Начин на који сам успела ове грешке да сведем на минимум јесте честим понављањем особина реалних бројева, заједничким прављењем паноа, на коме су исписање особине реалних бројева, који је изложен изнад табле, инсистирањем на поступности и систематичности при раду задатака, инсистирањем на редовној изради домаћих задатака.

Веома важна је и индивидуализација наставе, прилагођавање наставе потребама и могућностима ученика. Позната нам је чињеница да међу ученицима једног одељења постоје велике разлике, па је и с хватљиво да једнака настава неће моћи свим ученицима да осигура повољне услове за стицање знања.

Литература

[1] Станко Првановић, Методика савременог математичког образовања у основној школи, Завод за уџбенике и наставна средства Србије, 1972.

[2] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сања Милојевић, Математика 5, радни уџбеник, *Klett*, 2011.

[3] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Математика 6, радни уџбеник, *Klett*, 2009.

[4] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Математика, радни уџбеник за седми разред, *Klett*, 2009.

[5] Сања Милојевић, Ненад Вуловић, Математика 7, збирка задатака, *Klett*, 2012.