MATEMATIČKI INSTITUT

Savremena računska tehnika i njena primena

Knjiga 5

Koriolan Gilezan
Boško Latinović

BULOVA ALGEBRA
I PRIMENE

BEOGRAD
1977

Recezenti: dr Slaviša Presić, dr Nedeljko Parezanović,
dr Svetozar Milić

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 30.maja 1975. godine.

Samoupravna interesna zajednica za naučni rad Vojvodine učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema rešenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije ova publikacija oslobodjena je poreza na promet.

PREDGOVOR

Rešenja mnogih problema u raznim naučnim disciplinama, posebno u matematici, tehnici, ekonomiji, sociologiji i medicini mogu se prevesti na "da ili ne", odnosno na "1 ili 0". Ova činjenica je, pored ostalog, pospešila razvoj elektronike i digitalne tehnike, a tim i Bulove algebre, posebno Bulove algebre na skupu $\{0,1\}$.

Danas se u svetu na raznim jezicima o Bulovoj algebri i njenim primenama mnogo piše. I na našem jeziku takodje se piše o Bulovoj algebri i njenim primenama, ali su retke knjige koje na jednom mestu, sistematizovano, tretiraju ovaj problem. Autori se nadaju da će ova knjiga, donekle popuniti ovu prazninu.

Knjiga je namenjena studentima, ekonomistima, inženjerima, matematičarima a i širem krugu čitalaca koji se interesuju za Bulovu algebru i koriste je u praksi.

Knjiga sadrži deset glava. U prvoj glavi govori se o Bulovoj algebri kao o jednoj algebarskoj strukturi na proizvoljnom nepraznom skupu. Od druge do šeste glave govori se posebno o Bulovoj algebri na skupu $\{0,1\}$ (dvočlana Bulova algebra), gde se obradjuju Bulove funkcije i Bulove jednačine. Od sedme do desete glave govori se o nekim primenama dvočlane Bulove algebre.

U svakoj glavi posebno su numerisane definicije, teoreme, slike, formule, primeri i zadaci.

Na kraju knjige navodi se spisak korišćene literature. Naglašavamo da smo u pisanju ove knjige kao osnovnu literaturu uzeli radove akademika Gr.C. Moisila i prof. S. Rudeanua.

Rukopis ove knjige pročitali su akademik Dr M. Stojaković, Dr S.B. Prešić, Dr N. Parezanović, Dr S. Milić i Mr R. Tošić. Na njihovim sugestijama i primedbama autori se zahvaljuju. Takodje se zahvaljujemo asistentima Mr B. Šešliji i Mr B. Vojvodiću koji su pročitali neke glave knjige.

Primedbe na stručnu ili metodsku stranu izlaganja autori će primiti sa zahvalnošću.

Autori

S A D R Ž A J

Strana

Strana

G L A V A I

B U L O V A A L G E B R A

U glavi I razmatra se specijalna algebarska struktura, tzv. *Bulova algebra* na nepraznom skupu sa dve binarne i jednom unarnom operacijom. (George Boole, engleski matematičar 1815.-1864). Bulova algebra može se definisati na više načina (videti [23], [55] i [57]). Ovde je uvedena Bulova algebra preko dve ekvivalentne definicije. Pri dokazivanju teorema korišćena je samo *definicija 1.* U ovoj glavi su, pored modela i nekih važnijih teorema Bulove algebre, razmatrane i neke binarne relacije Bulove algebre.

1. DEFINICIJA BULOVE ALGEBRE

Dat je skup B sa najmanje dva elementa, u oznaci 0 i I, na kome su definisane dve *binarne operacije*, u oznaci „$\cup$" i „$\cdot$" i jedna *unarna operacija*, u oznaci „—".

Definicija 1. Na skupu B *je definisana Bulova algebra ako za sve* $a,b,c \in B$ *važe sledeće aksiome (zakoni, svojstva):*

B_1 *Svojstva komutativnosti*

(i) $a \cup b = b \cup a$ (ii) $a \cdot b = b \cdot a$

B_2 *Svojstva asocijativnosti*

(i) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

B_3 *Svojstva distributivnosti*

(i) $a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$ (ii) $a \cdot (b \cup c) = a \cdot b \cup a \cdot c$

B_4 *Svojstva elemenata* 0 i I

(i) $a \cup 0 = a$ (ii) $a \cdot I = a$

B_5 *Svojstva negacije*

(i) $a \cup \bar{a} = I$ (ii) $a \cdot \bar{a} = 0$.

Bulovu algebru na skupu B sa operacijama "$\cup$", "$\cdot$", "$-$", kraće označavamo kao četvorku (B, $\cup$, $\cdot$, $-$). Elemenat 0 obično zovemo *prvi element*, a element I *poslednji element*[1].

Postoje i druge definicije Bulove algebre koje su ekvivalentne definiciji 1. Navodimo sledeću:

Definicija 1'. Ako za sve $a,b,c \in B$ *važe aksiome (zakoni, svojstva):*

B_1' (i) $a \cup b = b \cup a$ (ii) $a \cdot b = b \cdot a$

B_2' (i) $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$ (ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

B_3' (i) $a \cup (b \cdot c) = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$ (ii) $a \cdot (b \cup c) = (a \cdot b) \cup (a \cdot c)$

B_4' (i) $(a \cdot b) \cup a = a$ (ii) $(a \cup b) \cdot a = a$

B_5' (i) $(a \cdot \bar{a}) \cup b = b$ (ii) $(a \cup \bar{a}) \cdot b = b$

tada kažemo da je četvorka (B, $\cup$, $\cdot$, $-$) *Bulova algebra.*

Za dokaz ekvivalentnosti definicije 1. i definicije 1.' videti [54].

U daljem tekstu mi ćemo se uglavnom pozivati na definiciju 1.

2. MODELI BULOVE ALGEBRE

Model 1. Dat je skup $L_2 = \{0,1\}$. Uvedimo na skupu L_2 *binarne operacije* $\cup$ i $\cdot$ (zovemo ih redom *disjunkcija* i *konjunkcija*) i unarnu operaciju $-$ (zovemo je *negacija*) na sledeći način:

---

1) *Za termine prvi element, poslednji element videti teoremu* 10. T_4 *ove glave* .

$$0 \cup 0 = 0\ ,\quad 0 \cup 1 = 1\ ,\quad 1 \cup 0 = 1\ ,\quad 1 \cup 1 = 1$$

$$0 \cdot 0 = 0\ ,\quad 0 \cdot 1 = 0\ ,\quad 1 \cdot 0 = 0\ ,\quad 1 \cdot 1 = 1$$

$$\bar{0} = 1\ ,\quad \bar{1} = 0$$

ili pomoću tabela

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	0	1
$\bar{a}$	1	0

Ovako definisane operacije na skupu L_2 zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz definicije 1., što nije teško proveriti. Dakle, data algebarska struktura na skupu L_2 predstavlja model Bulove algebre. Bulovu algebru na skupu L_2 zovemo *d v o č l a n a Bulova algebra* i označavamo $(L_2, \cup , \cdot , -)$, (videti [25], [42], [46]).

Model 2. Dat je neprazan skup U . Neka su na partitivnom skupu P(U), $P(U) = \{X | X \subset U\}$ uočene binarne operacije „$\cup$" i „$\cap$" (unija i presek) i unarna operacija „$'$" (komplement). Operacije $\cup$, $\cap$ i $'$ zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz definicije 1. Naime, ako su A,B i C elementi skupa P(U), iz teorije skupova (videti [30]) poznato je da važi:

(B_1) $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

(B_2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(B_3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(B_4) $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap U = A$

(B_5) $A \cup A' = U$ $\qquad$ $A \cap A' = \emptyset$.

Ovde je prvi element prazan skup $\emptyset$, a poslednji element skup U, pa data algebarska struktura na skupu P(U) predstavlja model Bulove algebre u oznaci $(P(U) \cup , \cap , ')$.

Model 3. Matricu $A = [a_{ij}]$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$, gde je $a_{ij} \in \{0,1\}$ zovemo Bulova matrica formata m,x n, (videti[25],

[55].

Neka je M skup svih Bulovih matrica formata m x n. Uvedimo na skupu M dve binarne operacije, u oznaci „+" i „x" i jednu unarnu operaciju u oznaci „ ′" na sledeći način:

$$A + B \overset{def}{=} [a_{ij} \cup b_{ij}] \qquad i = 1,\dots,m\ ; \quad j = 1,\dots,n$$

$$A \times B \overset{def}{=} [a_{ij} \cdot b_{ij}] \qquad i = 1,\dots,m\ ; \quad j = 1,\dots,n$$

$$A' \overset{def}{=} [\bar{a}_{ij}] \qquad i = 1,\dots,m\ ; \quad j = 1,\dots,n.$$

Ovde su „∪", „·" i „‾" operacije skupa {0,1} iz modela 1.

Na primer, za Bulove matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

imamo:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1\cup 0 & 0\cup 1 & 1\cup 0 \\ 0\cup 0 & 1\cup 0 & 1\cup 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 1\cdot 0 \\ 0\cdot 0 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uvedene operacije „+", „x", „ ′" na skupu M zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz d e f i n i c i j e 1. Zaista:

(B_1) (i) $A + B = [a_{ij} \cup b_{ij}] = [b_{ij} \cup a_{ij}] = B + A$

(ii) $A \times B = [a_{ij} \cdot b_{ij}] = [b_{ij} \cdot a_{ij}] = B \times A$

(B_2) (i) $(A + B) + C = [(a_{ij} \cup b_{ij}) \cup c_{ij}]$

$= [a_{ij} \cup (b_{ij} \cup c_{ij})]$

$= A + (B + C)$

(ii) $(A \times B) \times C = \left[(a_{ij} \cdot b_{ij}) \cdot c_{ij}\right]$

$= \left[a_{ij} \cdot (b_{ij} \cdot c_{ij})\right]$

$= A \times (B \times C)$

(B_3) (i) $A + (B \times C) = \left[a_{ij} \cup (b_{ij} \cdot c_{ij})\right]$

$= \left[(a_{ij} \cup b_{ij}) \cdot (a_{ij} \cup c_{ij})\right]$

$= (A + B) \times (A + C)$

(ii) $A \times (B + C) = \left[a_{ij} \cdot (b_{ij} \cup c_{ij})\right]$

$= \left[(a_{ij} \cdot b_{ij}) \cup (a_{ij} \cdot c_{ij})\right]$

$= (A \times B) + (A \times C)$

(B_4) (i) Prvi element skupa M je Bulova matrica čiji su svi elementi nule. Označimo je sa $0 = [0]$. Prema ovome

$$A + 0 = \left[a_{ij} \cup 0\right] = \left[a_{ij}\right] = A$$

(ii) Poslednji element skupa M je Bulova matrica čiji su svi elementi jedinice. Označimo je sa $I = [1]$. Prema ovome

$$A \times I = \left[a_{ij} \cdot 1\right] = \left[a_{ij}\right] = A$$

(B_5) (i) $A + A' = \left[a_{ij} \cup \bar{a}_{ij}\right] = [1] = I$

(ii) $A \times A' = \left[a_{ij} \cdot \bar{a}_{ij}\right] = [0] = 0$.

Dakle, uvedene operacije „ + ", „ x ", „ ′" na skupu M zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz *d e f i n i c i j e 1.* i algebarska struktura na skupu M predstavlja model Bulove algebre u oznaci $(M, +, \times, ')$.

M o d e l 4. Neka je M neprazan skup. Funkciju f, koja je definisana na skupu M i ima vrednosti u skupu $\{0,1\}$, tj.

$$f : M \to \{0,1\}$$

zovemo *b i v a l e n t n a* (dvovrednosna) funkcija.

Obeležimo sa L_2^M skup svih ovakvih bivalentnih funkcija na skupu M. Uvedimo na skupu L_2^M binarne operacije „$\vee$", „$\wedge$" i unarnu operaciju „–" na sledeći način:

$$(f \vee g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) \cup g(x)$$

$$(f \wedge g)(x) \stackrel{def}{=} f(x) \cdot g(x),$$

$$\bar{f}(x) \stackrel{def}{=} \overline{f(x)},$$

za svako $x \in M$, gde su operacije „$\cup$", „$\cdot$" i „$-$" respektivno disjunkcija, konjunkcija i negacija na skupu $\{0,1\}$ iz m o d e l a 1.

Uvedene operacije na skupu L_2^M zadovoljavaju aksiome Bulove algebre iz d e f i n i c i j e 1. Zaista:

(B₁) (i) $$(f \vee g)(x) = f(x) \cup g(x) = g(x) \cup f(x) = (g \vee f)(x)$$

(ii) $$(f \wedge g)(x) = f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = (g \wedge f)(x) .$$

(B₂) (i) $$((f \vee g) \vee h)(x) = (f(x) \cup g(x)) \cup h(x) = f(x) \cup (g(x) \cup h(x)) = (f \vee (g \vee h))(x)$$

(ii) $$((f \wedge g) \wedge h)(x) = (f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) = (f \wedge (g \wedge h))(x).$$

(B₃) (i) $$(f \vee (g \wedge h))(x) = f(x) \cup (g(x) \cdot h(x)) = (f(x) \cup g(x)) \cdot (f(x) \cup h(x)) = ((f \vee g) \wedge (f \vee h))(x)$$

(ii) $$(f \wedge (g \vee h))(x) = f(x) \cdot (g(x) \cup h(x)) = (f(x) \cdot g(x)) \cup (f(x) \cdot h(x)) = ((f \wedge g) \vee (f \wedge h))(x)$$

(B_4) (i) Prvi element skupa L_2^M je bivalentna funkcija $\emptyset$, gde je za svaki x iz M, $\emptyset(x) = 0$. Prema ovome je:

$$(f \vee \emptyset)(x) = f(x) \cup \emptyset(x) = f(x) \cup 0 = f(x).$$

(ii) Poslednji element skupa L_2^M je bivalentna funkcija I, gde je za svako x iz M, $I(x) = 1$. Prema ovome je:

$$(f \wedge I)(x) = f(x) \cdot I(x) = f(x) \cdot 1 = f(x).$$

(B_5) (i) $(f \vee \bar{f})(x) = f(x) \cup \overline{f(x)} = 1 = I(x)$

(ii) $(f \wedge \bar{f})(x) = f(x) \cdot \overline{f(x)} = 0 = \emptyset(x)$.

Na osnovu (B_1), (B_2), (B_3), (B_4) i (B_5) data algebarska struktura na skupu L_2^M predstavlja model Bulove algebre. Bulovu algebru na skupu L_2^M zovemo: Bulova algebra *bivalentnih funkcija* i označavamo $(L_2^M, \vee, \wedge, -)$, (videti [55]).

Model 5. Neka je P skup iskazanih formula[1]. Pridružimo svakoj iskazanoj formuli p, $p \in P$, skup iskazanih formula $q, q \in P$, gde je $p \Longleftrightarrow q$ (p je ekvivalentno sa q). Ovaj skup zovemo *klasa ekvivalencije* iskazane formule p i obeležavamo ga sa $[p]$, tj.

$$[p] \stackrel{def}{=} \{q \mid p \Longleftrightarrow q,\ q \in P\}.$$

Neka je $P/\Longleftrightarrow$ skup svih klasa ekvivalencije (skup količnik). Uvedimo na skupu $P/\Longleftrightarrow$ dve binarne operacije „$\cup$", „$\cdot$" (disjunkciju i konjunkciju) i unarnu operaciju „$-$" na sledeći način:

$[p] \cup [q] \stackrel{def}{=} [p \vee q]$, gde je $p \vee q$ disjunkcija iskaza p, q,

$[p] \cdot [q] \stackrel{def}{=} [p \wedge q]$, gde je $p \wedge q$ konjunkcija iskaza p, q,

$\overline{[p]} \stackrel{def}{=} [\neg p]$, gde je $\neg p$ negacija iskaza p.

Prepušta se čitaocu da proveri aksiome Bulove algebre iz definicije 1. za ovako uvedene operacije na skupu $P/\Longleftrightarrow$ tj. da je $(P/\Longleftrightarrow, \cup, \cdot, -)$ model Bulove algebre (videti [46]).

---
[1] *Vidi: S. Prešić, Elementi matematičke logike, Beograd, 1968.*

3. NEKE VAŽNIJE TEOREME BULOVE ALGEBRE

Navodimo spisak važnijih teorema Bulove algebre $(B, \cup, \cdot, ^{-})$. Neke od njih zovemo *identiteti*, (videti [23], [55]).

Identiteti:

J_1	(i)	$a\cup b = b\cup a$	(ii)	$a\cdot b = b\cdot a$
J_2	(i)	$(a\cup b)\cup c = a\cup(b\cup c)$	(ii)	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
J_3	(i)	$a\cup(b\cdot c)=(a\cup b)\cdot(a\cup c)$	(ii)	$a\cdot(b\cup c)=(a\cdot b)\cup(a\cdot c)$
J_4	(i)	$a\cup 0 = a$	(ii)	$a\cdot I = a$
J_5	(i)	$a\cup\bar{a} = I$	(ii)	$a\cdot\bar{a} = 0$
J_6	(i)	$a\cup a = a$	(ii)	$a\cdot a = a$
J_7	(i)	$a\cup I = I$	(ii)	$a\ 0 = 0$
J_8	(i)	$a\cup(a\cdot b) = a$	(ii)	$a\cdot(a\cup b) = a$
J_9	(i)	$a\cup(\bar{a}\cdot b) = a\cup b$	(ii)	$a\cdot(\bar{a}\cup b) = a\cdot b$
J_{10}	(i)	$(a\cup b)\cup(\bar{a}\cdot\bar{b}) = I$	(ii)	$(a\cdot b)\cdot(\bar{a}\cup\bar{b}) = 0$
J_{11}	(i)	$(a\cup b)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}) = 0$	(ii)	$(a\cdot b)\cup(\bar{a}\cup\bar{b}) = I$
J_{12}		$\bar{\bar{a}} = a$		
J_{13}	(i)	$\bar{0} = I$	(ii)	$\bar{I} = 0$
J_{14}	(i)	$\overline{a\cup b} = \bar{a}\cdot\bar{b}$	(ii)	$\overline{a\cdot b} = \bar{a}\cup\bar{b}$

Teoreme:

Teorema 1. *Ako je* $a\cup x = I$ *i* $a\cdot x = 0$ *onda je* $x = \bar{a}$.

Teorema 2. $a\cup b = 0$ *ako i samo ako* $a = b = 0$.

Teorema 3. $a\cdot b = I$ *ako i samo ako* $a = b = I$.

Teorema 4. $a\cdot b = 0$ *ako i samo ako* $a = 0$ *ili* $b = 0$.

Teorema 5. *U Bulovoj algebri postoji samo jedan prvi element.*

Teorema 6. *U Bulovoj algebri postoji samo jedan poslednji element.*

Teorema 7. U Bulovoj algebri za svaki element a postoji samo jedan element $\bar{a}$.

Dokažimo neke od navedenih identiteta. Pri dokazu koristićemo *princip dualnosti* u Bulovoj algebri. Naime, *dual* svakog identiteta (teoreme) J u Bulovoj algebri $(B, \cup, \cdot, -)$ je identitet (teorema) J^* koji je izveden medjusobnom zamenom operacije $\cup$ i $\cdot$ kao i medjusobnom zamenom elemenata 0 i I u identitetu J. Tako na primer, dual identiteta

$$(J) \qquad (I \cup a) \cdot (b \cup 0) = b$$

je identitet $(J^*) \qquad (0 \cdot a) \cup (b \cdot I) = b.$

Identitetima $J_k(i)$ sa spiska $(1 \leqslant k \leqslant 14$ i $k \neq 12)$ dualni su identiteti $J_k(ii)$ i obrnuto, to jest $J_k^*(i) \equiv J_k(ii)$ i $J_k^*(ii) \equiv J_k(i)$.

Veoma je važno zapaziti da je dual svake aksiome jedne Bulove algebre takodje aksioma, kao i da je dual svake teoreme jedne Bulove algebre takodje teorema. Drugim rečima, ako je neki identitet J posledica aksioma $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_k}$ Bulove algebre onda je i dual J^* posledica dualnih aksioma $B^*_{i_1}, B^*_{i_2}, \ldots,$ $B^*_{i_k}$ jer dualni identitet J^* može biti dokazan upotrebom duala u svakom koraku dokaza.

Identiteti $J_k(i)$, $J_k(ii)$ $(1 \leqslant k \leqslant 5)$ sa našeg spiska su aksiome Bulove algebre (d e f i n i c i j a 1.), te treba dokazati ostale identitete.

$$J_6(i) \qquad a \cup a = a$$

Dokaz.

(1)	$a = a \cup 0$	(zakon $B_4(i)$)
(2)	$= a \cup (a \cdot \bar{a})$	(zakon $B_5(ii)$)
(3)	$= (a \cup a) \cdot (a \cup \bar{a})$	(zakon $B_3(i)$)
(4)	$= (a \cup a) \cdot I$	(zakon $B_5(i)$)
(5)	$= a \cup a$	(zakon $B_4(ii)$).

J_6(ii) $a \cdot a = a$

Dokaz.

(1) $a = a \cdot I$ (zakon B_4(ii)

(2) $= a \cdot (a \cup \bar{a})$ (zakon B_5(i))

(3) $= (a \cdot a) \cup (a \cdot \bar{a})$ (zakon B_3(ii))

(4) $= (a \cdot a) \cup 0$ (zakon B_5(ii))

(5) $= a \cdot a$ (zakon B_4(i)).

Identiteti J_6(ii) i J_6(i) su dualni, to jest,J_6^*(ii) $\equiv$ J_6(i) i J_6^*(i)$\equiv$ J_6(ii). Iz dokaza identiteta J_6(i) vidimo da je on posledica aksioma B_4(i), B_5(ii), B_3(i), B_5(i) i B_4(ii). Iz dokaza identiteta J_6(ii) vidimo da je on posledica aksioma B_4(ii),B_5(i), B_3(ii), B_5(ii) i B_4(i). Dakle, identitet J_6(ii) je posledica aksioma B_4^*(i), B_5^*(ii), B_3^*(i), B_5^*(i) i B_4^*(ii) jer je B_4^*(i)$\equiv$ B_4(ii), B_5^*(ii)$\equiv$$B_5$(i), B_3^*(i) $\equiv$ B_3(ii), B_5^*(i) $\equiv$ B_5(ii) i B_4^*(ii) $\equiv$ B_4(i).

U daljem tekstu dokazaćemo neke identitete sa spiska a čitaocu ostavljamo da obrazloži dokaze njihovih dualnih identiteta korišćenjem principa dualnosti.

J_7(ii) $a \cdot 0 = 0$

Dokaz.

(1) $a \cdot 0 = a \cdot (a \cdot \bar{a})$ (zakon B_5(ii))

(2) $= (a \cdot a) \cdot \bar{a}$ (zakon B_2(ii))

(3) $= a \cdot \bar{a}$ (identitet J_6(ii))

(4) $= 0$ (zakon B_5(ii)).

Identitet J_7(i) je posledica B_5(i), B_2(i), J_6(i) i B_5(i) (koristimo dualnosti).

J_8(i) $a \cup (a \cdot b) = a$

Dokaz.

(1) $a \cup (a \cdot b) = a \cdot I \cup (a \cdot b)$ (zakon B_4(ii))

(2) $= a \cdot (I \cup b)$ (zakon B_3(ii))

(3) $= a \cdot I$ (identitet J_7(i))

(4) $= a$ (zakon B_4(ii)).

Identitet J_8(ii) je posledica B_4(i), B_3(i), J_7(ii) i B_4(i).

$$J_9(ii) \quad a \cdot (\bar{a} \cup b) = a \cdot b$$

Dokaz.

(1) $a \cdot (\bar{a} \cup b) = (a \cdot \bar{a}) \cup (a \cdot b)$ (zakon B_3(ii))

(2) $= 0 \cup (a \cdot b)$ (zakon B_5(ii))

(3) $= (a \cdot b) \cup 0$ (zakon B_1(i))

(4) $= a \cdot b$ (zakon B_4(i)).

Identitet J_9(i) je posledica B_3(i), B_5(i), B_1(ii) i B_4(ii).

$$J_{10}(i) \quad (a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = I$$

Dokaz.

(1) $(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = ((a \cup b) \cup \bar{a})((a \cup b) \cup \bar{b})$ (zakon B_3(i))

(2) $= (a \cup (\bar{a} \cup b))(a \cup (b \cup \bar{b}))$ (zakoni B_2(i), B_1(i))

(3) $= ((a \cup \bar{a}) \cup b)(a \cup I)$ (zakoni B_2(i), B_5(i))

(4) $= (I \cup b)(a \cup I)$ (zakon B_5(i))

(5) $= (b \cup I)(a \cup I)$ (zakon B_1(i))

(6) $= I \cdot I$ (identitet J_7(i))

(7) $= I$ (identitet J_6(ii)).

Identitet J_{10}(ii) je posledica B_3(ii), B_2(ii) i B_1(ii), B_2(ii) i B_5(ii), B_5(ii), B_1(ii) J_7(ii), J_6(i).

$$J_{11}(ii) \quad (a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = I$$

Dokaz.

(1) $(a \cdot b) \cup (\bar{a} \cup \bar{b}) = (\bar{a} \cup \bar{b}) \cup (a \cdot b)$ (zakon B_1(i))

(2) $= ((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup a)((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup b)$ (zakon B_3(i))

(3) $= (a \cup (\bar{a} \cup \bar{b}))((\bar{a} \cup \bar{b}) \cup b)$ (zakon B_1(i))

(4) $=((a\cup \bar{a})\cup \bar{b})(\bar{a}\cup(\bar{b}\cup b))$ (zakon $B_2(i)$)

(5) $=(I\cup \bar{b})(\bar{a}\cup I)$ (zakon $B_5(i)$)

(6) $=(\bar{b}\cup I)(\bar{a}\cup I)$ (zakon $B_1(i)$)

(7) $= I \cdot I$ (identitet $J_7(i)$)

(8) $= I$ (identitet $J_6(ii)$).

Identitet $J_{11}(i)$ je posledica $B_1(ii)$, $B_3(ii)$, $B_1(ii)$, $B_2(ii)$, $B_5(ii)$, $B_1(ii)$, $J_7(ii)$ i $J_6(i)$.

J_{12} $\quad \bar{\bar{a}} = a$

Dokaz.

(1) $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{a}} \cdot I$ (zakon $B_4(ii)$)

(2) $= \bar{\bar{a}} \cdot (a\cup \bar{a})$ (zakon $B_5(i)$)

(3) $= (\bar{\bar{a}} \cdot a)\cup(\bar{\bar{a}} \cdot \bar{a})$ (zakon $B_3(ii)$)

(4) $= (\bar{\bar{a}} \cdot a)\cup 0$ (zakon $B_5(ii)$)

(5) $= 0\cup(\bar{\bar{a}} \cdot a)$ (zakon $B_1(i)$)

(6) $= (a \cdot \bar{a})\cup(a \cdot \bar{\bar{a}})$ (zakoni $B_5(ii)$,$B_1(ii)$)

(7) $= a \cdot (\bar{a}\cup \bar{\bar{a}})$ (zakon $B_3(ii)$)

(8) $= a \cdot I$ (zakon $B_5(i)$)

(9) $= a$ (zakon $B_4(ii)$).

$J_{13}(i)$ $\quad \bar{0} = I$

Dokaz.

(1) $\bar{0} = \bar{0}\cup 0$ (zakon $B_4(i)$)

(2) $= 0\cup \bar{0}$ (zakon $B_1(i)$)

(3) $= I$ (zakon $B_5(i)$).

Identitet $J_{13}(ii)$ je posledica $B_4(ii)$, $B_1(ii)$ i $B_5(ii)$.

Da bismo dokazali identitet $J_{14}(i)$ prvo ćemo dokazati *teoremu* 1.

Ako je $a\cup x = I$ i $a \cdot x = 0$ onda je $x = \bar{a}$.

Dokaz.

(1)	$x = x \cdot I$	(zakon B_4(ii))
(2)	$= x \cdot (a \cup \bar{a})$	(zakon B_5(i))
(3)	$= (x \cdot a) \cup (x \cdot \bar{a})$	(zakon B_3(ii))
(4)	$= (a \cdot x) \cup (\bar{a} \cdot x)$	(zakon B_1(ii))
(5)	$= 0 \cup (\bar{a} \cdot x)$	(pretpostavka $a \cdot x = 0$)
(6)	$= (\bar{a} \cdot x) \cup 0$	(zakon B_1(i))
(7)	$= (\bar{a} \cdot x) \cup (\bar{a} \cdot a)$	(zakon B_5(ii))
(8)	$= \bar{a} \cdot (x \cup a)$	(zakon B_3(ii))
(9)	$= \bar{a} \cdot I$	(pretpostavka $a \cup x = I$)
(10)	$= \bar{a}$	(zakon B_4(ii)).

J_{14}(i) $\quad \overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Dokaz.

(1)	$(a \cup b) \cup (\bar{a} \cdot \bar{b}) = I$	(identitet J_{10}(i))
(2)	$(a \cup b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0$	(identitet J_{11}(i))
(3)	$a \cup b = A$	(pretpostavka)
(4)	$\bar{a} \cdot \bar{b} = x$	(pretpostavka)
(5)	$A \cup x = I$	(zamena (3) i (4) u (1))
(6)	$A \cdot x = 0$.	(zamena (3) i (4) u (2))
(7)	$x = \bar{A}$	(iz (5) i (6) po teoremi 1)
(8)	$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	(zamena (3) i (4) u (7)).

Za detalje dokaza ostalih teorema koji ovde nisu navedeni videti [48], [55], [11].

4. BINARNE RELACIJE $\leqslant$, $\geqslant$ U BULOVOJ ALGEBRI

Uvedimo u Bulovu algebru $(B, \cup, \cdot, -)$ binarnu relaciju $\leqslant$ (*manje ili jednako*) na sledeći način:

Definicija 2. *Za elemente* x, y *iz* B *kažemo da je* $x \leqslant y$ *ako i samo ako* $x \cup y = y$.

Teorema 8. $x \leqslant y$ *ako i samo ako* $x \cdot y = x$.

Dokaz. Dokazaćemo prvo da iz $x \leqslant y$ proizlazi $xy = x$. Zaista:

(1)	$x \leqslant y$	(pretpostavka)
(2)	$x \cup y = y$	(definicija 2.)
(3)	$xy = xy$	(identitet a=a)
(4)	$x(x \cup y) = xy$	(zamena (2) u (3))
(5)	$x = xy$	(identitet J_8(ii)).

Dokažimo sada da iz $xy = x$ proizlazi $x \leqslant y$. Zaista,

(1)	$x = xy$	(pretpostavka)
(2)	$x \cup y = x \cup y$	(identitet a=a)
(3)	$x \cup y = xy \cup y$	(zamena (1) u (2))
(4)	$x \cup y = y \cup xy$	(komutacija J_1(i))
(5)	$x \cup y = y$	(identitet J_8(i))
(6)	$x \leqslant y$	(definicija 2.).

Time smo dokazali teoremu.

Teorema 9. *Relacija* $\leqslant$ *je relacija poretka u Bulovoj algebri* $(B, \cup, \cdot, -)$, *tj. za svaki* x, y, z *iz* B *zadovoljava uslove:*

(i) $x \leqslant x$,

(ii) *ako je* $x \leqslant y$ *i* $y \leqslant x$ *onda je* $y = x$,

(iii) *ako je* $x \leqslant y$ *i* $y \leqslant z$ *onda je* $x \leqslant z$.

Dokaz.

(i)	(1)	$x \cup x = x$	(identitet J_6(i))
	(2)	$x \leqslant x$	(definicija 2.)
(ii)	(1)	$x \leqslant y$ i $y \leqslant x$	(pretpostavka)
	(2)	$x \cup y = y$ i $x \cup y = x$	(definicija 2.)

	(3)	$x \cup y = y$ i $y \cup x = x$	(identitet J_1(i))
	(4)	$y = x$	(tranzitivnost)
(iii)	(1)	$x \leqslant y$ i $y \leqslant z$	(pretpostavka)
	(2)	$x \cup y = y$ i $y \cup z = z$	(definicija 2.)
	(3)	$(x \cup y) \cup z = z$	(zamena iz (2))
	(4)	$x \cup (y \cup z) = z$	(asocijacija J_2(i))
	(5)	$x \cup z = z$	(pretpostavka)
	(6)	$x \leqslant z$	(definicija 2.).

Slično kao u definiciji 2. uvodimo binarnu relaciju $\geqslant$ *(veće ili jednako)*.

Definicija 3. *Za elemente* x, y *iz* B *kažemo da je* $x \geqslant y$ *ako i samo ako* $x \cdot y = y$.

Definicija 2. i definicija 3. su dualne.

Uopšte, neka je T teorema (definicija, identitet) Bulove algebre (B, $\cup$, $\cdot$, $-$) u kojoj se pojavljuju i simboli $\leqslant$, $\geqslant$. Dualna teorema (definicija, identitet) T^* izvodi se tako što se pored medjusobne zamene simbola $\cup$ i $\cdot$, 0 i I vrši medjusobna zamena i simbola $\leqslant$ i $\geqslant$.

Neposredno proizilazi da je $(T^*)^* \equiv T$.

Teorema 10. *U Bulovoj algebri* (B $\cup$, $\cdot$, $-$) *za svaki* x, y, z *iz* B *važe sledeća svojstva:*

(T_1) (i) $x \leqslant x \cup y$ i $y \leqslant x \cup y$ (ii) $x \geqslant xy$ i $y \geqslant xy$

(T_2) (i) $x \leqslant z$ i $y \leqslant z$ *ako i samo ako* $x \cup y \leqslant z$

(ii) $x \geqslant z$ i $y \geqslant z$ *ako i samo ako* $xy \geqslant z$

(T_3) (i) *ako je* $x \leqslant y$ *onda je* $x \cup z \leqslant y \cup z$

(ii) *ako je* $x \geqslant y$ *onda je* $xz \geqslant yz$

(T_4) (i) $0 \leqslant x$ (ii) $I \geqslant x$

(T_5) (i) $x \leqslant y$ *ako i samo ako* $x\bar{y} = 0$

(ii) $x \geqslant y$ *ako i samo ako* $x \cup \bar{y} = I$

(T_6) (i) $x = y$ *ako i samo ako* $(\bar{x} \cup y)\cdot(x \cup \bar{y}) = I$

(ii) $x = y$ *ako i samo ako* $\bar{x}y \cup x\bar{y} = 0$.

Dualna svojstva svojstvima (T_k)(i) $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ su svojstva (T_k)(ii) i obrnuto, to jest, $(T_k)^*$(i) $\equiv$ (T_k)(ii) i $(T_k)^*$(ii)$\equiv$$(T_k)$ (i). Ostavlja se čitaocu da dokaže navedena svojstva.

Primer 1. U dvočlanoj Bulovoj algebri $(\{0,1\}, \cup, \cdot, -)$ iz modela 1. postoji binarna relacija $\leqslant$ (manje ili jednako). Zaista $0 \leqslant 0$, $0 \leqslant 1$, $1 \leqslant 1$ jer je $0 \cup 0 = 0$, $0 \cup 1 = 1$, $1 \cup 1 = 1$ (zadovoljena definicija 2.). Medjutim, nije $0 \geqslant 1$ niti $1 \leqslant 0$.

Primer 2. U skupovnoj Bulovoj algebri $(P(U), \cup, \cap, ')$ iz modela 2. postoje relacije $\subset$, $\supset$ (relacija inkluzije). Zaista neka $A, B \in P(U)$. Tada

$A \subset B$ ako i samo ako $A \cup B = B$,

$A \supset B$ ako i samo ako $A \cap B = B$.

Primer 3. U Bulovoj algebri $(M, +, \times, ')$ iz modela 3., gde je M skup Bulovih matrica i

$A = [a_{ij}]$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$

$B = [b_{ij}]$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$

postoji relacija $\leqslant$ data sa

$A \leqslant B$ ako i samo ako za svaki i, j $a_{ij} \leqslant b_{ij}$.

Tako na primer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tada

$A \leqslant B$ jer je $A + B = B$.

5. IDEALI. FILTRI. PODALGEBRE

Definicija 4. *U Bulovoj algebri* $(B, \cup, \cdot, -)$ *neprazan skup* J *zovemo ideal* (videti [57]) *ako su zadovoljena sledeća svojstva:*

(i) $J \subset B$,

(ii) *Za svaki* x,y *ako* $x,y \in J$ *onda i* $x \cup y \in J$,

(iii) *Za svaki* x,y *ako* $x \in J$ *i* $y \leqslant x$ *onda i* $y \in J$.

Očigledno da je $0 \in J$, jer za svaki x, $0 \leqslant x$.

Primer 4. Neka je $U = \{a,b,c\}$ i $P(U)$ partitivni skup, tj. $P(U) = \{X | X \subset U\}$, a binarne operacije skupa $P(U)$ unija $\cup$ i presek $\cap$ i unarna operacija $X' = U \setminus X$ iz modela 2. U Bulovoj algebri $(P(U), \cup, \cap, ')$ ideali su sledeći skupovi:

$J_1 = \{\emptyset\}$,

$J_2 = \{\emptyset, \{a\}\}$,

$J_3 = \{\emptyset, \{b\}\}$,

$J_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,

$J_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$.

Ima ih još; ostavlja se čitaocu da ih napiše.

Skupovi

$J_1' = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,

$J_2' = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}\}$,

nisu ideali jer ne zadovoljavaju uslove definicije 4.

Definicija 5. *U Bulovoj algebri* $(B, \cup, \cdot, -)$ *neprazan skup* F *zovemo filter* (videti [57]) *ako su zadovoljena sledeća svojstva:*

(i) $F \subset B$,

(ii) *Za svaki* x,y *ako* $x,y \in F$ *onda i* $x \cdot y \in F$,

(iii) *Za svaki* x,y *ako* $y \in F$ *i* $y \leqslant x$ *onda i* $x \in F$.

Očigledno da je $I \subset J$, *jer za svaki* y, $y \leqslant I$.

Koristeći princip dualnosti može se dokazati da su definicije 4. i 5. dualne.

Primer 5. U Bulovoj algebri $(P(U), \cup, \cap, ')$ iz primera 4. filtri su sledeći skupovi:

$$F_1 = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\},$$

$$F_2 = \{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Ima ih još; ostavlja se čitaocu da ih napiše.

Skupovi

$$F_1' = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\},$$

$$F_2' = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\},$$

$$F_3' = \{\{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\},$$

nisu filtri jer ne zadovoljavaju uslov (iii) definicije 5.

Definicija 6. *U Bulovoj algebri* $(B, \cup, \cdot, {}^-)$ *neprazan podskup* B_0 *skupa* B *zovemo Bulova podalgebra ako su za svako* $x,y \in B_0$ *zadovoljena sledeća svojstva:*

(i) *Ako* $x,y \in B_0$ *onda i* $x \cup y \in B_0$,

(ii) *Ako* $x,y \in B_0$ *onda i* $x \cdot y \in B_0$,

(iii) *Ako* $x \in B_0$ *onda i* $\bar{x} \in B_0$.

Primer 6. Neka je $(P(U), \cup, \cap, ')$ Bulova algebra iz primera 4. Tada su $(B_i, \cup, \cap, ')$, $i \in \{1,2,3\}$ Bulove podalgebre, gde je:

$$B_1 = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\},$$

$$B_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\} \{a,b,c\}\},$$

$$B_3 = \{\emptyset, \{a,b,c\}\}.$$

Ostavlja se čitaocu da napiše i druge Bulove podalgebre Bulove algebre $(P(U), \cup, \cap, ')$.

Primer 7. Neka je $(M, +, \times, ')$ Bulova algebra iz modela 3., gde je M skup Bulovih matrica formata $n \times n$. Tada su $(M_i, +, \times, ')$ $i = 1,2$ Bulove podalgebre, gde je

$$M_1 = \{0, I\}, \quad M_2 = \{0, A_1, A_2, I\}$$

i gde je

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 1 \ldots 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 1 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \\ 1 & 1 \ldots 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \ldots 1 \\ 0 & 0 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 11. *Svaka Bulova podalgebra* $(B_0, \cup, \cdot, -)$ *Bulove algebre* $(B, \cup, \cdot, -)$ *jeste Bulova algebra.*

Dokaz. Kako je po definiciji 6. $B_0 \subset B$ to binarne operacije $\cup$ i $\cdot$ skupa B_0 zadovoljavaju aksiome B_1, B_2 i B_3 iz definicije 1. Na osnovu (iii) iz definicije 6. proizilazi da za svako $x \in B_0$ i $\bar{x} \in B_0$, a na osnovu (i) i (ii) iz definicije 6. sledi da $x \cup \bar{x} \in B_0$ i $x \cdot \bar{x} \in B_0$, to jest $I \in B_0$ i $0 \in B_0$ (jer je $x \cup \bar{x} = I$, $x \cdot \bar{x} = 0$). Ovim je teorema 11. dokazana.

Definicija 7. *Neka su* $(B, \cup, \cdot, -)$ *i* $(B_1, +, *, ')$ *Bulove algebre. Preslikavanje* $f: B \to B_1$ *zovemo homomorfizam ako zadovoljava uslove:*

(i) $f(x \cup y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $f(\bar{x}) = (f(x))'$.

Primer 8. Dati su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Uvedimo na partitivnom skupu $P(A)$ binarne operacije $\cup$, $\cap$ i resprektivno uniju, presek i komplement, a na skupu B binarne operacije $+$ i $*$ na sledeći način:

$x + y = NZS(x, y)$ (najmanji zajednički sadržalac za $x, y \in B$)

$x * y = NZD(x, y)$ (najveći zajednički delilac za $x, y \in B$) i unarnu operaciju

$\bar{x} = 6 : x$, za $x \in B$.

Četvorke $(P(A), \cup, \cap, ')$ i $(B, +, *, -)$ su Bulove algebre.

Preslikavanje $f : B \to P(A)$ dato sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ \emptyset & \emptyset & \{a,b\} & \{a,b\} \end{pmatrix}$$

jeste homomorfizam jer zadovoljava svojstva (i), (ii) iz definicije 7.

Teorema 12. *Ako je* $f : B \to B_1$ *homomorfizam tada je:*

(a) $f(x\cdot y) = f(x) * f(y)$,

(b) $f(0_B) = 0_{B_1}$, $f(I_B) = I_{B_1}$,

gde su 0_B *i* I_B *odnosno* 0_{B_1} *i* I_{B_1} *prvi i poslednji element algebre* $(B, \cup, \cdot, -)$ *odnosno* $(B_1, +, *, ')$.

(c) *Ako je* $x \leqslant y$ *tada je* $f(x) \leqslant f(y)$.

Dokaz.

(a)	(1)	$f(x\cdot y)$	$= f(\overline{\bar{x}\cup\bar{y}})$	(zakoni de Morgana)
	(2)		$= (f(\bar{x}\cup\bar{y}))'$	(uslov (ii) iz definicije 7)
	(3)		$= (f(\bar{x})+f(\bar{y}))'$	(definicija 7.(i))
	(4)		$= (f(\bar{x}))' * (f(\bar{y}))'$	(zakon de Morgana)
	(5)		$= f(\bar{\bar{x}}) * f(\bar{\bar{y}})$	(uslov (ii) iz definicije 7)
	(6)		$= f(x) * f(y)$	(dvostruka negacija $\bar{\bar{a}}=a$).
(b)	(1)	$f(0_B)$	$= f(x\cdot\bar{x})$	(zakon B_5, (ii))
	(2)		$= f(x) * f(\bar{x})$	(teorema 12.,(a))
	(3)		$= f(x) * (f(x))'$	(uslov (ii) iz definicije 7)
	(4)		$= 0_{B_1}$	(zakon B_5, (ii)).
	(1)	$f(I_B)$	$= f(\bar{0}_B)$	(identitet J_{13}, (i))
	(2)		$= (f(0_B))'$	(uslov (ii) iz definicije 7)
	(3)		$= (0_{B_1})'$	(teorema 12., (b))
	(4)		$= I_{B_1}$	(identitet J_{13} (i)).

(c) Ako je $x \leqslant y$ tada je po definiciji 2. $x \cup y = y$.
Imamo $f(y) = f(x \cup y) = f(x) + f(y)$ tj. $f(x) \leqslant f(y)$.

Definicija 8. *Neka su* $(B, \cup, \cdot, -)$ *i* $(B_1, +, *, ')$ *Bulove algebre. Preslikavanje* $f : B \to B_1$ *zovemo izomorfizam ako zadovoljava uslove:*

(i) f *je obostrano jednoznačno preslikavanje,*

(ii) $f(x \cup y) = f(x) + f(y)$,

(iii) $f(\bar{x}) = (f(x))'$.

Primer 9. Neka su $(P(A), \cup, \cap, ')$ i $(B, +, *, -)$ Bulove algebre iz primera 8. Preslikavanje $f : B \to P(A)$, dato sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \end{pmatrix},$$

jeste izomorfizam jer zadovoljava (i), (ii) i (iii) iz definicije 8.

Teorema 13. *Ako su* $(B, \cup, \cdot, -)$, $(B_1, +, *, ')$ i $(B_2, \vee, \wedge, \neg)$ *Bulove algebre i* $f : B \to B_1$, $g : B_1 \to B_2$ *izomorfizmi tada je i kompozitum* $g \circ f : B \to B_2$ *izomorfizam, gde je*

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Dokaz.

(i) Kako su f i g obostrano jednoznačna preslikavanja to iz $x \neq y$ sledi $f(x) \neq f(y)$; iz istih razloga iz $f(x) \neq f(y)$ sledi $g(f(x)) \neq g(f(y))$. Dakle i preslikavanje $g \circ f$ je obostrano jednoznačno.

(ii)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x \cup y) &= g(f(x \cup y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) \vee g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) \vee (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}(g \circ f)(\bar{x}) &= g(f(\bar{x})) \\ &= g((f(x))') \\ &= \neg(g(f(x))) \\ &= \neg(g \circ f)(x).\end{aligned}$$

Teorema 14. *Preslikavanje* $f : B \to B_1$ *je izomorfizam ako i samo ako je* $f^{-1} : B_1 \to B$ *izomorfizam.*

Dokaz. Neka je f izomorfizam i $z, w \in f(B)$. Tada je $z=f(x)$ i

(i) $w = f(y)$ za $x, y \in B$.

Dakle $x = f^{-1}(z)$ i $y = f^{-1}(w)$.

Ako je $z \neq w$ tada je i $x \neq y$. Naime, ako bi bilo $x=y$ tada bi imali $z = f(x)=f(y)=w$. Odavde imamo da je preslikavanje f^{-1} obostrano jednoznačno.

(ii) Ako je $f(x \cup y) = f(x) + f(y) = z + w$ onda je

$f^{-1}(z + w) = x \cup y = f^{-1}(z) \cup f^{-1}(w)$.

(iii) Ako je $f(\bar{x}) = (f(x))' = z'$ onda je

$f^{-1}(z') = \bar{x} = \overline{(f^{-1}(z))}$.

Slično se dokazuje da ako je f^{-1} izomorfizam onda je i f izomorfizam.

ZADACI

Zadatak 1. Koristeći identitete J_k(i) i J_k(ii), $1 \leqslant k \leqslant 14$, dokazati da u Bulovoj algebri $(B, \cup, \cdot, -)$ važe sledeći identiteti:

1. (i) $xy \cup x\bar{y} = x$[1] (ii) $(x \cup y)(x \cup \bar{y})=x$
2. (i) $xy \cup x\bar{y} \cup xz \cup x\bar{z}=x$ (ii) $(x \cup y)(x \cup \bar{y})(x \cup z)(x \cup \bar{z})=x$
3. (i) $x\bar{y} \cup zy \cup xy \cup \bar{y}z=x \cup z$ (ii) $(x \cup \bar{y})(z \cup y)(x \cup y)(\bar{y} \cup z)=xz$
4. (i) $\bar{x}\bar{y} \cup \bar{x}y \cup xy=\bar{x} \cup y$ (ii) $(\bar{x} \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)(x \cup y)=\bar{x}y$
5. (i) $xy \cup \bar{x}y \cup x\bar{y} \cup \bar{x}\bar{y}=I$ (ii) $(x \cup y)(\bar{x} \cup y)(x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup \bar{y})=0$
6. (i) $xz(y \cup \bar{z})=xzy$ (ii) $x \cup z \cup y\bar{z}=x \cup y \cup z$

---

[1] *Umesto* $x \cdot y$, *ukoliko nema zabune, pisaćemo* xy.

7. (i) $xy(z\cup y)=xy$ (ii) $x\cup y\cup zy=x\cup y$

8. (i) $x\cup y\cup z\cup\bar x\bar y\bar z=I$ (ii) $xyz(\bar x\cup\bar y\cup\bar z)=0$

9. (i) $(x\cup y\cup z)(\overline{x\cup y\cup z})=0$ (ii) $xyz\cup xyz=I$

10. (i) $\overline{(x\cup\bar y\cup y\bar z)}=\bar xyz$ (ii) $\overline{x\bar y(y\cup\bar z)}=\bar x\cup y\cup z$

11. (i) $\overline{((\bar x\cup y)y\bar x)}=x$ (ii) $\overline{\bar xy\cup(y\cup\bar x)}=x$

12. (i) $\overline{x\cup y}\cup\overline{\bar x\cup y}=\bar y$ (ii) $\overline{xy}\cdot\overline{\bar xy}=\bar y$

13. (i) $(x\cup\bar y)(\bar x\cup\bar y)=\bar y$ (ii) $x\bar y\cup\bar x\bar y=\bar y$

14. (i) $xy\bar z\cup x\bar y\bar z\cup\bar x\bar z=\bar z$ (ii) $(x\cup y\cup\bar z)(x\cup\bar y\cup\bar z)(\bar x\cup\bar z)=\bar z$

15. (i) $xy\cup xz\cup\bar xy=xz\cup y$ (ii) $(x\cup y)(x\cup z)(\bar x\cup y)=(x\cup z)y$

16. (i) $x\bar y\cup\bar xy\cup y\bar z\cup\bar x\bar y\cup\bar y\bar z=\bar x\cup\bar y\cup\bar z$

(ii) $(x\cup\bar y)(\bar x\cup y)(y\cup\bar z)(\bar x\cup\bar y)(\bar y\cup\bar z)=\bar x\bar y\bar z$

17. (i) $xyz\cup x\bar y\cup x\bar z=x$ (ii) $(x\cup y\cup z)(x\cup\bar y)(x\cup\bar z)=x$

18. (i) $(x\cup\bar z)(y\cup z)=xz\cup y\bar z$ (ii) $x\bar z\cup yz=(x\cup z)(y\cup\bar z)$

19. (i) $x\cup y\bar z(x\cup\bar y)\cup\bar xy\bar z=x\cup y\bar z$

(ii) $x(y\cup\bar z)\cup x\bar y(\bar x\cup y\cup\bar z)=x(y\cup\bar z)$

20. (i) $x\bar y\bar z\cup xy\bar z\cup xyz\cup x\bar yz=x$

(ii) $(x\cup\bar y\cup\bar z)(x\cup y\cup\bar z)(x\cup y\cup z)(x\cup\bar y\cup z)=x$

21. (i) $xyz\cup\bar xyz\cup xy\bar z\cup\bar xy\bar z=y$

(ii) $(x\cup y\cup z)(\bar x\cup y\cup z)(x\cup y\cup\bar z)(\bar x\cup y\cup\bar z)=y$

22. (i) $(x\cup y\cup z)(\bar x\cup y\cup z)=y\cup z$ (ii) $xyz\cup\bar xyz=yz$

23. (i) $(\bar x\cup\bar y\cup\bar z)(\bar x\cup y\cup\bar z)(x\cup y\cup\bar z)(x\cup y\cup z)=x\bar z$

(ii) $\bar x\bar y\bar z\cup\bar xy\bar z\cup xy\bar z\cup xy\bar z=x\cup\bar z$

24. (i) $x\cup y\bar z\cup\bar yz\cup yz=x\cup y\cup z$ (ii) $x(y\cup\bar z)(\bar y\cup z)(y\cup z)=xyz$

25. (i) $xyz\cup\bar xy\bar z\cup x\bar yz\cup\bar xyz=y\cup xz$

(ii) $(x\cup y\cup z)(\bar x\cup y\cup\bar z)(x\cup\bar y\cup z)(\bar x\cup y\cup z)=y(x\cup z)$.

Zadatak 2.

(i) Dato je $Y = x\bar y\bar z\cup x\bar yz\cup xy\bar z\cup\bar xyz\cup\bar xy\bar z\cup\bar x\bar yz\cup axyz$, $a\in\{0,I\}$;

odrediti a tako da je $Y = x \cup y \cup z$.

(ii) Data je $Y = (x \cup \bar{y} \cup \bar{z})(x \cup \bar{y} \cup z)(x \cup y \cup \bar{z})(\bar{x} \cup y \cup z)(\bar{x} \cup y \cup z)$

$(\bar{x} \cup \bar{y} \cup z)(a \cup x \cup y \cup z)$, $a \in \{0, I\}$;

odrediti a tako da je $Y = xyz$.

Zadatak 3. Dokazati sledeće Bulove identitete:

1. (i) $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\right)} = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ [1)] (ii) $\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i$

2. (i) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i\right) = I$ (ii) $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i\right) = 0$

3. (i) $\left(\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i\right)\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$ (ii) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i\right) \cup \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = I$

4. (i) $x_1(\bar{x}_1 \cup x_2)(\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_3) \dots (\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \dots \cup \bar{x}_{n-1} \cup x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$

   (ii) $x_1 \cup \bar{x}_1 x_2 \cup \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \cup \dots \cup \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1} x_n = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$

5. (i) $x \cdot \left(\bigcup_{i=1}^{n} y_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (x \cdot y_i)$ (ii) $x \cup \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (x \cup y_i)$

6. (i) $\bigcup_{i=1}^{n} x_i = \bigcup_{h=1}^{k} x_{j_h} \cup \left(\bigcup_{h=k+1}^{n} x_{j_h}\right)$

   (ii) $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{h=1}^{k} x_{j_h} \cdot \left(\prod_{h=k+1}^{n} x_{j_h}\right)$,

   gde su $j_1, j_2, \dots, j_n$ permutacije od $1, 2, \dots n$.

---

1) $\bigcup_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_n$ $\qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

7. (i) $\bigcup_{i=1}^{n}(x_i \cup y_i) = (\bigcup_{i=1}^{n} x_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} y_i)$

(ii) $\prod_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i) = (\prod_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\prod_{i=1}^{n} y_i)$.

Zadatak 4. U Bulovoj algebri $(B, \cup, \cdot, -)$ dokazati:

1. (i) $a \cdot b \leqslant c$ ako i samo ako $a \leqslant \bar{b} \cup c$

(ii) $a \cup b \geqslant c$ ako i samo ako $a \geqslant \bar{b} \cdot c$

2. (i) $a \cdot b \leqslant c \cup d$ ako i samo ako $a \cdot \bar{c} \leqslant \bar{b} \cup d$

(ii) $a \cup b \geqslant c \cdot d$ ako i samo ako $a \cup \bar{c} \geqslant \bar{b} \cdot d$

3. (i) $a = a \cdot b \cup \bar{a} \cdot c$ ako i samo ako $c \leqslant a \leqslant b$

(ii) $a = (a \cup b) \cdot (\bar{a} \cup c)$ ako i samo ako $c \geqslant a \geqslant b$

4. (i) $a \leqslant b$ ako i samo ako $\bar{b} \leqslant \bar{a}$.

Zadatak 5. Neka je U neprazan skup i P(U) njegov partitativni skup, a „$\cup$" i „$\cap$" (unija i presek) binarne operacije i „ ' " (komplement, $X' = U \setminus X$, $X \in P(U)$) unarna operacija. Po modelu 2. četvorka $(P(U), \cup, \cap, ')$ je Bulova algebra.

Matricu $A = [a_{ij}]$ $i = 1,\dots,n$; $j = 1,\dots,m$, gde su a elementi skupa P(U), zovemo Bulova matrica formata mxn.

Neka je skup M skup svih Bulovih matrica formata mxn, a „ + " i „ x " binarne operacije uvedene na sledeći način:

$$A + B \stackrel{def}{=} [a_{ij} \cup b_{ij}], \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n$$

$$A \times B \stackrel{def}{=} [a_{ij} \cap b_{ij}], \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n,$$

gde su $\cup$ i $\cap$ operacije unija i presek skupa P(U).

Uvedimo unarnu operaciju na sledeći način:

$$\bar{A} \stackrel{def}{=} [a'_{ij}], \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,n,$$

gde je „ ' " unarna operacija komplement $a'_{ij} = U \setminus a_{ij}$.

Dokazati da je četvorka $(M, +, x, -)$ Bulova algebra tj. da su zadovoljene aksiome Bulove algebre iz definicije 1. Napominjemo da su prvi i poslednji element:

$$0 = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset \dots \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \dots \emptyset \\ \dots & \dots \\ \emptyset & \emptyset \dots \emptyset \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} U & U \dots U \\ U & U \dots U \\ \dots & \dots \\ U & U \dots U \end{bmatrix}$$

Zadatak 6. Date su Bulove algebre

$(B_1, \cup_1, \cap_1, {}^{-}{}_1), (B_2, \cup_2, \cap_2, {}^{-}{}_2), \dots, (B_n, \cup_n, \cap_n, {}^{-}{}_n)$.

Dokazati da je $(B, \cup, \cap, {}^{-})$ Bulova algebra, gde je

$$B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \ ;$$

to jest $x \in B$ ako i samo ako $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in B_i$, $i \in \{1, 2, \dots\}$, a operacije $\cup, \cap, {}^{-}$ definisane na sledeći način:

$$x \cup y \stackrel{def}{=} (x_1 \cup_1 y_1, \ x_2 \cup_2 y_2, \dots, \ x_n \cup_n y_n)$$

$$x \cap y \stackrel{def}{=} (x_1 \cap_1 y_1, \ x_2 \cap_2 y_2, \dots, \ x_n \cap_n y_n)$$

$$\bar{x} \stackrel{def}{=} (\bar{x}_1^{1}, \ \bar{x}_2^{2}, \dots, \ \bar{x}_n^{n}).$$

Zadatak 7. Dokazati da je $(B, +, *, {}^{-})$ Bulova algebra, gde je:

$B = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

$x + y = NZS\ (x,y)$ (najmanji zajednički sadržalac)

$x * y = NZD\ (x,y)$ (najveći zajednički delilac)

$\bar{x} = 70 : x$.

Zadatak 8. U Bulovoj algebri $(B, +, *, {}^{-})$ iz zadatka 7. odrediti ideale, filtre i podalgebre.

Zadatak 9. Data je Bulova algebra $(B, \cup, \cap, {}^{-})$ i skup svih Bulovih matrica M formata mxn, gde je

$$M = \{A = [a_{ij}] \mid i = 1, \dots, \ ; \ j = 1, \dots, m \ ; \ a_{ij} \in B\}.$$

Dokazati da je $(M, +, \times, {}')$ Bulova algebra gde je:

$$A + B \stackrel{def}{=} [a_{ij} \cup b_{ij}]$$

$$A \times B \stackrel{def}{=} [a_{ij} \cdot b_{ij}]$$

$$A' \stackrel{def}{=} [\bar{a}_{ij}] \qquad i = 1,\dots,n; \quad j = 1,\dots,m$$

a $\cup$, „ · ", „—" operacije skupa B.

G L A V A II

B U L O V A A L G E B R A L_2

U glavi I razmatrana je Bulova algebra na proizvoljnom nepraznom skupu B sa najmanje dva elementa. U glavi II razmatra se Bulova algebra na skupu $L_2 = \{0,1\}$. Razlog za posebno tretiranje Bulove algebre na skupu L_2 obrazlažemo sledećim: ona se najviše koristi, a aparat koji se odnosi na dvovrednosne promenljive je još uvek najsavršeniji.

Napominjemo da sve teoreme navedene u Bulovoj algebri $(B, \cup, \cdot, {}^-)$ važe i za Bulovu algebru $(L_2, \cup, \cdot, {}^-)$. U ovoj glavi proširuje se spisak teorema navedenih u glavi I. Neke vrede i u Bulovoj algebri $(B, \cup, \cdot, {}^-)$ (videti [24], [55], [57]).

U glavi I (model 1.) definisali smo na skupu $L_2 = \{0,1\}$ binarne operacije „$\cup$" (disjunkciju) i „$\cdot$" (konjunkciju) na sledeći način:

$$(1) \quad 0 \cup 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 0 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$

$$(2) \quad 0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Takodje smo definisali unarnu operaciju „—" (negaciju) na sledeći način:

$$(3) \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0.$$

Bulovu algebru na skupu $L_2 = \{0,1\}$, gde su uvedene binarne operacije „$\cup$" i „$\cdot$" pomoću (1) i (2) i unarna operacija „—" pomoću (3), zovemo Bulova algebra dvočlanog skupa (ili Bulova algebra L_2).

Slično, ako na skupu $S = \{a,b\}$ uvedemo binarne operacije $\oplus$ i $\odot$ i unarnu operaciju $'$ na sledeći način

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	b

$\odot$	a	b
a	a	a
b	a	b

x	x´
a	b
b	a

onda je četvorka $(S, \oplus, \odot, ')$ dvočlana Bulova algebra. Prepuštamo čitaocu da dokaže da su Bulove algebre $(L_2, \cup, \cdot, -)$ i $(S, \oplus, \odot, ')$ izomorfne.

Iz definicije Bulove algebre (definicija 1., Gl. I) i navedenih osnovnih teorema neposredno sledi da u Bulovoj algebri $(L_2, \cup, \cdot, -)$ za sve $a,b,c \in L_2$ važe sledeća svojstva (identiteti):

S_1	(i)	$a\cup b = b\cup a$	(ii)	$ab = ba$
S_2	(i)	$(a\cup b)\cup c = a\cup(b\cup c)$	(ii)	$(ab)c = a(bc)$
S_3	(i)	$a\cup a = a$	(ii)	$aa = a$
S_4	(i)	$a\cup ab = a$	(ii)	$a(a\cup b) = a$
S_5	(i)	$a\cup bc = (a\cup b)(a\cup c)$	(ii)	$a(b\cup c) = ab\cup ac$
S_6	(i)	$a\cup 1 = 1$	(ii)	$a0 = 0$
S_7	(i)	$a\cup 0 = a$	(ii)	$a1 = a$
S_8	(i)	$a\cup \bar{a} = 1$	(ii)	$a\bar{a} = 0$
S_9	(i)	$\overline{a\cup b} = \bar{a}\bar{b}$	(ii)	$\overline{ab} = \bar{a}\cup\bar{b}$
S_{10}		$\bar{\bar{a}} = a$		
S_{11}	(i)	$a\cup\bar{a}b = a\cup b$	(ii)	$a(\bar{a}\cup b) = ab$

Za detalje videti [42], [27], [39] i [55].

1. BULOV IZRAZ

Uvedimo na skupu L_2 relaciju

$$(4) \qquad x^{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \neq \alpha \\ 1, & \text{ako je } x = \alpha, \quad \alpha, x \in L_2. \end{cases}$$

Prema (4) je

$$0^0 = 1, \quad 0^1 = 0, \quad 1^0 = 0, \quad 1^1 = 1.$$

Na osnovu (3) i (4) imamo:

$$(4') \qquad \bar{x} = x^0 , \quad x = x^1$$

$$(4'') \qquad \overline{x^\alpha} = x^{\bar{\alpha}}.$$

Takodje važi i sledeća relacija:

$$(4''') \quad \begin{array}{ll} x^\alpha \cdot x^\alpha = x^\alpha , & \alpha \in L_2 \\ x^\alpha \cdot x^\beta = 0 , & \alpha,\beta \in L, \ \alpha \neq \beta \\ x^\alpha \cup x^\alpha = x^\alpha , & \alpha \in L_2 \\ x^\alpha \cup x^\beta = 1 , & \alpha,\beta \in L_2, \alpha \neq \beta. \end{array}$$

Na osnovu relacije (4')i identiteta S_1(i), S_3(ii), S_8(i) i S_8 (ii) relacija (4''') neposredno se verifikuje. Zaista:

$$\begin{array}{l} x^0 \cdot x^0 = \bar{x} \cdot \bar{x} = \bar{x} = x^0, \\ x^1 \cdot x^1 = x \cdot x = x = x^1, \\ x^0 \cdot x^1 = \bar{x} \cdot x = 0, \\ x^0 \cup x^0 = \bar{x} \cup \bar{x} = \bar{x} = x^0, \\ x^1 \cup x^1 = x \cup x = x = x^1, \\ x^0 \cup x^1 = \bar{x} \cup x = 1. \end{array}$$

Dogovorno uzimamo da se simboli 0 i 1 iz skupa L_2 zovu Bulove konstante, a slova x,y,z,... koja uzimaju vrednosti 0 i 1 iz skupa L_2 Bulove promenljive.

Definicija 1.

1. *Bulove konstante* 0,1 *i Bulove promenljive* $x,y,z,\ldots$ *su Bulovi izrazi.*

2. *Ako su* A *i* B *Bulovi izrazi tada su* $(A \cup B)$, $(A \cdot B)$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ *Bulovi izrazi.*

3. *Bulovi izrazi su samo oni simboli koji se dobijaju konačnom primenom* 1. *i* 2.

Na primer, Bulovi izrazi su:

0, 1, x, y, z^0 (jer je $z^0 = \bar{z}$), z^1, $(x \cup y)$, (xy), $(x\bar{x})$, $((x \cup 0)\bar{x})$, $((x1) \cup y)$.

Da bismo izbegli glomaznost, obično uvodimo konvenciju o brisanju spoljnih zagrada. Tako, na primer, Bulov izraz

$$((x \cup o)\bar{x})$$

jednostavno pišemo

$$(x \cup o)\bar{x}.$$

2. FORME BULOVIH IZRAZA

Definicija 2.

(i) *Bulovi izrazi koji ne sadrže disjunkciju zovu se e l e m e n t a r n e k o n j u n k c i j e.*

(ii) *Bulovi izrazi koji ne sadrže konjunkciju zovu se e l e m e n t a r n e d i s j u n k c i j e.*

Na primer, Bulovi izrazi

0, 1, x, y, xx, $x\bar{x}$, xyz, $x\bar{y}z$, $x\bar{y}\bar{z}$ su elementarne konjunkcije, a Bulovi izrazi

0, 1, x, y, $x \cup x$, $x \cup \bar{x}$, $x \cup y$, $x \cup \bar{y} \cup z$, $\bar{x} \cup y \cup \bar{z}$

su elementarne disjunkcije.

Definicija 3.

(i) *Elementarna konjunkcija* C *u odnosu na promenljive*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

zove se k a n o n s k a e l e m e n t a r n a k o n j u n k c i j a ako svaka promenljiva x_k (ili njena negacija $\bar{x}_k$, $k=1, \ldots, n$) uzeta jednom (i samo ona) učestvuje u izgradnji konjunkcije C.

(ii) *Elementarna disjunkcija* D *u odnosu na promenljive*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

zove se k a n o n s k a e l e m e n t a r n a d i s j u n k -

c i j a ako svaka promenljiva x_k (ili njena negacija $\bar{x}_k, k=1, \ldots, n$) uzeta samo jednom (i samo ona) učestvuje u izgradnji disjunkcije D.

Na primer, elementarne konjunkcije

$$xy\bar{z},\quad \bar{x}yz,\quad \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

su kanonske elementarne konjunkcije u odnosu na promenljive x,y i z, a elementarna konjunkcija $x\bar{y}$ nije kanonska elemantarna konjunkcija u odnosu na x,y i z jer ne sadrži ni z ni $\bar{z}$.

Elementarne kanonske konjunkcije

$$xy\bar{z},\quad \bar{x}yz,\quad \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

u odnosu na promenljive x,y i z mogli bismo, prema relaciji (4') pisati

$$x^1y^1z^0,\quad x^0y^1z^1,\quad x^0y^0z^0.$$

Uopšte, kanonska elementarna konjunkcija C u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je oblika

$$x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

gde $\alpha_i \in L_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Elementarne disjunkcije

$$x \cup y \cup \bar{z},\quad x \cup \bar{y} \cup \bar{z},\quad \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$$

su kanonske elementarne disjunkcije u odnosu na promenljive x,y i z, a elementarna disjunkcija $x \cup \bar{y}$ nije kanonska elementarna disjunkcija u odnosu na x,y i z jer ne sadrži ni z ni $\bar{z}$.

Elementarne kanonske disjunkcije

$$x \cup y \cup \bar{z},\quad x \cup \bar{y} \cup \bar{z},\quad \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z}$$

u odnosu na promenljive x,y i z mogli bismo, prema relaciji (4') pisati

$$x^1 \cup y^1 \cup z^0,\quad x^1 \cup y^0 \cup z^0,\quad x^0 \cup y^0 \cup z^0.$$

Uopšte, kanonska elementarna disjunkcija D u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je oblika

$$x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n},$$

gde $\alpha_i \in L_2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija 4.

(i) *Bulov izraz oblika*

$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r,$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_r$ *elementarne konjunkcije, zove se d i s j u n k t i v n a f o r m a (krađe DF).*

(ii) *Bulov izraz oblika*

$$D_1 D_2 \ldots D_r,$$

gde su $D_1, D_2, \ldots, D_r$ *elementarne disjunkcije, zove se k o n j u n k t i v n a f o r m a (krađe KF).*

Na primer, Bulovi izrazi

$$x \cup xy \cup \bar{x}yz, \quad \bar{x} \cup \bar{x}yz \cup xy\bar{z}, \quad \bar{x}y \cup x\bar{y}z \cup xyz \cup x$$

su disjunktivne forme, a Bulovi izrazi

$$x(x \cup y)(\bar{x} \cup y \cup z), \quad \bar{x}(\bar{x} \cup y \cup z)(x \cup y \cup \bar{z}), \quad x(y \cup \bar{x})$$

su konjunktivne forme.

Definicija 5.

(i) *Disjunktivna forma*

$$\bigcup_{i=1}^{m} C_i$$

zove se kanonska disjunktivna normalna forma (krađe KDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ako su* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ *kanonske elementarne konjunkcije u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(ii) *Konjunktivna forma*

$$\prod_{i=1}^{m} D_i$$

zove se kanonska konjunktivna normalna forma (krađe KKNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ako su* $D_1, D_2, \ldots, D_m$ *kanonske elementarne disjunkcije u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Na primer, Bulovi izrazi

$$xyz \cup x\bar{y}z \cup \bar{x}yz \cup xy\bar{z}, \quad x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z}, \quad \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup xyz$$

su kanonske disjunktivne normalne forme u odnosu na promenljive x, y i z, dok Bulov izraz

$$x\bar{y}z \cup \bar{x}yz \cup xy$$

nije kanonska disjunktivna normalna forma u odnosu na promenljive x,y i z jer konjunkcija xy nije kanonska elementarna konjunkcija u odnosu na promenljive x,y i z pošto ne sadrži ni z ni $\bar{z}$.

Bulovi izrazi

$$(x\cup\bar{y}\cup z)(\bar{x}\cup y\cup\bar{z}), \quad (x\cup y\cup\bar{z})(\bar{x}\cup\bar{y}\cup z)(x\cup\bar{y}\cup z)$$

jesu kanonske konjunktivne normalne forme u odnosu na promenljive x,y i z, dok Bulov izraz

$$(x\cup\bar{y}\cup z)(\bar{x}\cup y\cup z)(\bar{x}\cup\bar{y})$$

nije kanonska konjunktivna normalna forma u odnosu na promenljive x,y i z jer disjunkcija $\bar{x}\cup\bar{y}$ nije kanonska elementarna disjunkcija u odnosu na promenljive x,y i z pošto ne sadrži ni z ni $\bar{z}$.

3. NEKE TEOREME O NORMALNIM FORMAMA

Označimo sa L_2^n direktni proizvod n skupova L_2, tj.

$$L_2^n = \underbrace{L_2 x L_2 x \ldots x L_2}_{n \text{ puta}}.$$

Direktni proizvod L_2^n je skup uredjenih n-torki

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

gde je $a_i \in L_2$, $i = 1,\ldots,n$,

odnosno $L_2^n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in L_2, \quad i = 1,\ldots n\}$.

Postoji 2^n različitih uredjenih n-torki u L_2^n, tj. skup L_2^n sadrži 2^n elemenata. Ovo se neposredno utvrdjuje jer svaka komponenta a_i, $i=1,2,\ldots,n$, može imati jednu od vrednosti 0 ili 1, te imamo varijacije sa ponavljanjem od dva elementa n-te klase.

Na primer, skup

$$L_2^n = L_2 x L_2 = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$$

ima $2^2 = 4$ elementa (uredjene dvojke).

Skup

$$L_2^3 = L_2 x L_2 x L_2 =$$

$$= \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0)(1,1,1)\}$$

ima $2^3 = 8$ elemenata (uredjenih trojki).

Teorema 1. *Za promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *postoji* 2^n *različitih kanonskih konjunkcija oblika*

$$(5) \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2^n,$$

odnosno 2^n *različitih kanonskih disjunkcija oblika*

$$(6) \quad x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2^n,$$

gde su izrazi $x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in L_2$ *dati u* (4) (ili (4')).

Dokaz. Kako svaka konjunkcija oblika (5), odnosno disjunkcija oblika (6), sadrži sve izraze

$$x_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

to prema relaciji (4') imamo varijacije sa ponavljanjem od dva elementa n-te klase, tj. 2^n konjunkcija, odnosno disjunkcija.

Primer 1. Za promenljive x, y postoji $2^2 = 4$ kanonskih konjunkcija oblika (5), tj.

$$x^1y^1, \quad x^1y^0, \quad x^0y^1, \quad x^0y^0$$

ili

$$x\,y, \quad x\,\bar{y}, \quad \bar{x}\,y, \quad \bar{x}\,\bar{y},$$

odnosno $2^2 = 4$ kanonskih disjunkcija oblika (6), tj.

$$x^1 \cup y^1, \quad x^1 \cup y^0, \quad x^0 \cup y^1, \quad x^0 \cup y^0$$

ili

$$x \cup y, \quad x \cup \bar{y}, \quad \bar{x} \cup y, \quad \bar{x} \cup \bar{y}.$$

Teorema 2.

(i) *Disjunkcija svih kanonskih konjunkcija oblika* (5) *jednaka je* 1, *tj.*

$$(7)\qquad \bigcup_{\alpha\in L_2^n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = 1,$$

(ii) *Konjunkcija svih kanonskih disjunkcija oblika* (6) *jednaka je* 0, *tj.*

$$(8)\qquad \prod_{\alpha\in L_2^n} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n}) = 0,$$

gde je $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Dokaz.

(i) Neka je $(\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n)\in L_2^n$ i

$$E_1(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) = \bigcup \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \ldots \beta_n^{\alpha_n}.$$

Postoji 2^n konjunkcija oblika (5) (teorema 1). Konjunkcije

$$(a)\qquad \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \ldots \beta_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1,\ldots\alpha_n)\in L_2^n$$

imaju, na osnovu relacije (4), vrednosti 0 ili 1, tj.

$$\beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \ldots \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (\beta_1,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ 0, & \text{ako je } (\beta_1,\ldots,\beta_n)\neq(\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \end{cases}$$

Prema tome, postoji samo jedna konjunkcija oblika (a) koja je jednaka 1 ; na osnovu identiteta $a\cup 1 = 1$ sledi da je (7) ispunjeno.

(ii) Neka je $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in L_2^n$ i

$$E_2(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) = \prod_{\alpha_n\in L_2^n} (\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup \beta_n^{\alpha_n}).$$

Postoji 2 disjunkcija oblika (6) (teorema 1). Disjunkcije

$$(b)\qquad \beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup \beta_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in L_2^n$$

imaju, na osnovu relacije (4), vrednosti 0 ili 1, tj.

$$\beta_1^{\alpha_1} \cup \beta_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \alpha_1\neq\beta_1,\ldots,\alpha_n\neq\beta_n \\ 1, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Prema tome, postoji samo jedna disjunkcija oblika (b) koja je jednaka 0 ; na osnovu identiteta $a \cdot 0 = 0$ sledi da je (8) ispunjeno.

Primer 2.

Na osnovu Teoreme 2. proizilazi:

(i) Za promenljive x,y je disjunkcija svih kanonskih konjunkcija jednaka 1, tj.

$$xy \cup x\bar{y} \cup \bar{x}y \cup \bar{x}\bar{y} = 1.$$

Zaista

$$xy \cup x\bar{y} \cup \bar{x}y \cup \bar{x}\bar{y} = x(y \cup \bar{y}) \cup \bar{x}(y \cup \bar{y}) = x \cup \bar{x} = 1$$

(ii) Za promenljive x,y je konjunkcija svih kanonskih disjunkcija jednaka 0, tj.

$$(x \cup y)(x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)(\bar{x} \cup \bar{y}) = 0.$$

Zaista

$$(x \cup y)(x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)(\bar{x} \cup \bar{y}) = (x \cup yx \cup x\bar{y} \cup y\bar{y})(\bar{x} \cup y\bar{x} \cup \bar{x}y \cup y\bar{y})$$

$$= (x \cup x(y \cup \bar{y}))(\bar{x} \cup \bar{x}(y \cup \bar{y})) = (x \cup x)(\bar{x} \cup \bar{x}) = x\bar{x} = 0.$$

Teorema 3.

(i) *Konjunkcija ma koje dve različite kanonske konjunkcije oblika* (5) *jednaka je* 0, *tj.*

$$(*) \quad (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{a_n})(x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}) = 0 ,$$

gde je

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2^n , \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in L_2^n ,$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) .$$

(ii) *Disjunkcija ma koje dve različite kanonske disjunkcije oblika* (6) *jednaka je* 1, *tj.*

$$(**) \quad (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n}) \cup (x_1^{\beta_1} \cup x_2^{\beta_2} \cup \ldots \cup x_n^{\beta_n}) = 1,$$

gde je

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in L_2^n , \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in L_2^n ,$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \neq (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n) .$$

Dokaz.

(i) Neka je

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \neq (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n).$$

Tada postoji bar jedno j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tako da je $\alpha_j \neq \beta_j$. Na osnovu relacije (4''') je

$$x_j^{\alpha_j} \quad x_j^{\beta_j} = 0.$$

Koristeći identitet $a \cdot 0 = 0$ imamo da je zadovoljeno (*).

(ii) Neka je

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \neq (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n).$$

Tada postoji bar jedno j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tako da je $\alpha_j \neq \beta_j$. Na osnovu relacije (4''') je

$$x_j^{\alpha_j} \cup x_j^{\beta_j} = 1.$$

Koristeći identitet $a \cup 1 = 1$ imamo da je zadovoljeno (**).

Ovim je teorema dokazana.

Primer 3. Za promenljive x,y,z postoji 8 različitih konjunkcija oblika (5), odnosno 8 različitih disjunkcija oblika (6). Po teoremi 3. konjunkcija ma koje dve različite konjunkcije oblika (5) jednaka je 0, a disjunkcija ma koje dve različite disjunkcije je 1.

Na primer,

$$(xyz)(\bar{x}yz) = 0$$

jer je

$$x\bar{x} = 0 ,$$

a

$$(x \cup y \cup z) \cup (\bar{x} \cup y \cup z) = 1$$

jer je

$$x \cup \bar{x} = 1.$$

Teorema 4. *Svaki Bulov izraz koji sadrži neke od promenljivih $x_1,\ldots,x_n$ može se transformisati u KDNF (odnosno KKNF) u odnosu na promenljive $x_1,\ldots,x_n$.*

Dokaz. Neka je E Bulov izraz. Koristeći svojstva Bulove algebre, dati izraz E možemo transformisati u DF (odnosno KF). Ako je E baš KDNF (odnosno KKNF) dokaz je završen. Ako izraz E nije KDNF (odnosno KKNF) onda postoji bar jedna elementarna konjunkcija C (odnosno elementarna disjunkcija D) koja nije kanonska elementarna konjunkcija (odnosno kanonska elementarna disjunkcija).

Ako konjunkcije C' (odnosno disjunkciju D')ne sadrže promenljivu x ili $\bar{x}$ možemo pisati

$$C' = C'(x \cup \bar{x}) = C'x \cup C'\bar{x} ,$$

ili

$$D' = D' \cup (x\bar{x}) = (D' \cup x)(D' \cup x).$$

Prema tome, svaka konjunkcija (odnosno disjunkcija) može se transformisati u KDNF (odnosno KKNF).

Primer 4. Transformišimo Bulov izraz

$$x \cup y$$

za promenljive x,y u KDNF.

(1) $x \cup y = x1 \cup y1$ (identitet S_6 (ii))

(2) $= x(y \cup \bar{y}) \cup y(x \cup \bar{x})$ (identitet S_8 (i))

(3) $= xy \cup x\bar{y} \cup yx \cup y\bar{x}$ (identitet S_5 (ii))

(4) $= xy \cup x\bar{y} \cup \bar{x}y$ (identiteti S_1 (i) i S_3 (i)).

Primer 5. Transformišimo Bulov izraz

$$x(y \cup \bar{z}) \cup xz$$

za promenljive x,y,z u KDNF.

(1) $x(y \cup \bar{z}) \cup xz = xy \cup x\bar{z} \cup xz$ (identitet S_5 (ii))

(2) $= xy(z \cup \bar{z}) \cup x\bar{z}(y \cup \bar{y}) \cup xz(y \cup \bar{y})$ (identiteti S_7(ii) i S_8(i))

(3) $= xyz \cup xy\bar{z} \cup x\bar{z}y \cup x\bar{z}\bar{y} \cup xzy \cup xz\bar{y}$ (identitet S_5(ii))

(4) $= xyz \cup xy\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}z$ (identiteti S_1(i) i S_3(ii).

Primer 6. Transformišimo Bulov izraz

$$x \cup \bar{x}y$$

a) za promenljive x, y

b) za promenljive x, y, z

u KKNF.

(a) (1) $x \cup \bar{x}y = (x \cup \bar{x})(x \cup y)$ (identitet S_5 (i))

(2) $= 1(x \cup y)$ (identitet S_8 (i))

(3) $= x \cup y$ (identitet S_7 (ii).

(b) (1) $x \cup \bar{x}y = x \cup y$ (identitet (a))

(2) $= (x \cup y) \cup z\bar{z}$ (identiteti S_7(ii) i S_8(ii))

(3) $= ((x \cup y) \cup z)((x \cup y) \cup \bar{z})$ (identitet S_5 (i))

(4) $= (x \cup y \cup z)(x \cup y \cup \bar{z})$.

Primer 7. Transformišimo u KKNF u odnosu na promenljive x, y, z Bulov izraz $(x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)z$.

$$(x \cup \bar{y})(\bar{x} \cup y)z = (x \cup \bar{y} \cup z\bar{z})(\bar{x} \cup y \cup z\bar{z})(z \cup x\bar{x} \cup y\bar{y})$$

$$= (x \cup \bar{y} \cup z)(x \cup \bar{y} \cup \bar{z})(\bar{x} \cup y \cup z)(\bar{x} \cup y \cup z)$$

$$((z \cup x)(z \cup \bar{x}) \cup y\bar{y})$$

$$= (x \cup \bar{y} \cup z)(x \cup \bar{y} \cup \bar{z})(\bar{x} \cup y \cup z)(\bar{x} \cup y \cup \bar{z})(z \cup x \cup y)$$

$$(z \cup x \cup \bar{y})(z \cup \bar{x} \cup y)(z \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= (x \cup y \cup z)(\bar{x} \cup y \cup z)(x \cup \bar{y} \cup z)(\bar{x} \cup y \cup \bar{z})(\bar{x} \cup \bar{y} \cup z)$$

$$(x \cup \bar{y} \cup z).$$

Teorema 5. *Bulov izraz* E *je* KDNF *u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ako i samo ako je izraz* $\bar{E}$ KKNF *u odnosu na promenljive* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dokaz. Ako je izraz E KDNF onda je svaka konjunkcija, koja učestvuje u izgradnji izraza E, elementarna kanonska konjunkcija, to jest

$$E = \bigcup_{\alpha \in M} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

gde je $M \subset L_2^n$.

Tada je

$$\bar{E} = \overline{\bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}} \ .$$

Koristeći zakone de Morgana i relaciju (4) imamo:

$$\bar{E} = \prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_2)\in M} (x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup x_2^{\bar{\alpha}_2} \cup \dots \cup x_2^{\bar{\alpha}_2}) .$$

Obrnuto, neka je izraz E KKNF. Onda je svaka disjunkcija, koja učestvuje u izgradnji izraza E, elementarna kanonska disjunkcija, tj.

$$E = \prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n}),$$

gde je

$$M \subset L_2^n .$$

Tada je

$$\bar{E} = \overline{\prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\alpha_1} \cup x_2^{\alpha_2} \cup \dots \cup x_n^{\alpha_n})} \ .$$

Koristeći zakone de Morgana i relaciju (4) imamo:

$$\bar{E} = \bigcup_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in M} (x_1^{\bar{\alpha}_1} x_2^{\bar{\alpha}_2} \dots x_n^{\bar{\alpha}_n}).$$

Ovim je teorema dokazana.

Primer 8. Neka je

$$E = xyz \cup \bar{x}y\bar{z} \cup xy\bar{z} \ .$$

Izraz E je napisan u KDNF za promenljive x,y,z. Tada je

$$\bar{E} = (\bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z})(x \cup \bar{y} \cup z)(\bar{x} \cup \bar{y} \cup z)$$

tj. $\bar{E}$ je napisan u KKNF u odnosu na promenljive x,y,z.

Iz ranijih primera mogli smo zaključiti da je za neki Bulov izraz jednostavnije napisati KDNF nego KKNF. Teorema 5. olakšava nam konstrukciju za Bulove izraze. Da bismo Bulov izraz E transformisali u KKNF radimo sledeće:

(1) Izraz E transformišemo u izraz $\bar{E}$.

(2) Izraz $\bar{E}$ napišemo u KDNF.

(3) Konstruišemo negaciju za KDNF izraza $\bar{E}$. Na osnovu teoreme 5. dobijamo KKNF za izraz E.

Primer 9. Transformišimo u KKNF u odnosu na promenljive x, y,z Bulov izraz $E = (x\cup y)(\bar{x}\cup z)$.

Koristeći teoremu 5. imamo:

(1) $\bar{E} = \overline{(x\cup y)(\bar{x}\cup z)} = \bar{x}\bar{y}\cup x\bar{z}$

(2) $\bar{E} = \bar{x}\bar{y}(z\cup\bar{z})\cup x(y\cup\bar{y})\bar{z} = \bar{x}\bar{y}z\cup\bar{x}\bar{y}\bar{z}\cup xy\bar{z}\cup x\bar{y}\bar{z}$

(3) $\bar{\bar{E}} = (x\cup y\cup\bar{z})(x\cup y\cup z)(\bar{x}\cup\bar{y}\cup z)(\bar{x}\cup y\cup z) = E$.

ZADACI:

Zadatak 1. Transformišimo u KDNF u odnosu na promenljive x, y i z Bulove izraze: 1) $x(y\cup z)$, 2) $x\cup yz$, 3) $\overline{x(y\cup\bar{z})}$, 4) $(x\cup y)(\bar{x}\cup y)(y\ \ z)$.

Rešenje:

1) $x(y\cup z) = xy\cup xz$

$= xy(z\cup\bar{z})\cup xz(y\cup\bar{y})$

$= xyz\cup xy\bar{z}\cup xyz\cup x\bar{y}\bar{z}$

$= xyz\cup xy\bar{z}\cup x\bar{y}z,$

2) $x\cup yz = x(y\cup\bar{y})(z\cup\bar{z})\cup yz(x\cup\bar{x})$

$= xyz\cup x\bar{y}z\cup xy\bar{z}\cup x\bar{y}\bar{z}\cup xyz\cup\bar{x}yz$

$= xyz\cup x\bar{y}z\cup xy\bar{z}\cup x\bar{y}\bar{z}\cup\bar{x}yz,$

3) $\overline{x(y\cup\bar{z})} = \bar{x}\cup(\overline{y\cup\bar{z}})$

$= \bar{x}\cup\bar{y}z$

$$= x(y\cup\bar{y})(z\cup\bar{z})\cup\bar{y}z(x\cup\bar{x})$$

$$= \bar{x}yz\cup\bar{x}\bar{y}z\cup\bar{x}y\bar{z}\cup\bar{x}\bar{y}\bar{z}\cup x\bar{y}z\cup\bar{x}\bar{y}z$$

$$= \bar{x}yz\cup\bar{x}\bar{y}z\cup\bar{x}y\bar{z}\cup\bar{x}\bar{y}\bar{z}\cup x\bar{y}z,$$

4) $(x\cup z)(\bar{x}\cup y)(y\cup z)=xy\cup\bar{x}yz\cup yz\cup xyz\cup\bar{x}z$

$$=xy(z\cup\bar{z})\cup\bar{x}yz\cup yz(x\cup\bar{x})\cup xyz\cup\bar{x}z(y\cup\bar{y})$$

$$=xyz\cup xy\bar{z}\cup\bar{x}yz\cup xyz\cup\bar{x}yz\cup xyz\cup\bar{x}yz\cup\bar{x}\bar{y}z$$

$$=xyz\cup xy\bar{z}\cup\bar{x}yz\cup\bar{x}\bar{y}z\ .$$

Zadatak 2. Transformišimo u KKNF u odnosu na promenljive x, y i z Bulove izraze: 1) $\overline{x\cup y}$, 2) $x(y\cup\bar{z})$, 3) $y\cup z\cup x\bar{y}\bar{z}$.

Rešenje:

1) $\overline{x\cup y} = \bar{x}\bar{y}$

$$= (\bar{x}\cup y\bar{y})(\bar{y}\cup x\bar{x})$$

$$= (\bar{x}\cup y)(\bar{x}\cup\bar{y})(\bar{y}\cup x)(\bar{y}\cup\bar{x})$$

$$= (\bar{x}\cup\bar{y})(\bar{x}\cup y)(x\cup\bar{y}).$$

2) $x(y\cup\bar{z}) = (x\cup y\bar{y}\cup z\bar{z})(y\cup\bar{z}\cup x\bar{x})$

$$= (x\cup y\bar{y}\cup z)(x\cup y\bar{y}\cup\bar{z})(y\cup\bar{z}\cup x)(y\cup\bar{z}\ \ \bar{x})$$

$$= (x\cup y\cup z)(x\cup\bar{y}\cup z)(x\cup y\cup\bar{z})(x\cup\bar{y}\cup\bar{z})(x\cup y\cup\bar{z})$$

$$(y\cup\bar{z}\cup\bar{x}),$$

$$= (x\cup y\cup z)(x\cup\bar{y}\cup z)(x\cup y\cup\bar{z})(x\cup\bar{y}\cup\bar{z})(\bar{x}\cup y\cup\bar{z}).$$

3) $y\cup z\cup\bar{x}\bar{y}\bar{z} = (y\cup z\cup x)(y\cup z\cup\bar{y}\bar{z})$

$$= (x\cup y\cup z)((y\cup z)\cup(\overline{y\cup z}))$$

$$= x\cup y\cup z.$$

Zadatak 3. Transformisati u KDNF i KKNF sledeće Bulove izraze:

1) $x\cup y\bar{x}$ za promenljive x,y

2) $\overline{xy}$ za promenljive x,y,z

3) $\overline{(x\cup y)z}$ za promenljive x,y,z

4) $x\cup\bar{y}z$ za promenljive x,y,z

5) $\overline{(x\cup\bar{y})\bar{z}}$ za promenljive x,y,z.

Zadatak 4. Transformisati u KKNF u odnosu na promenljive x, y sledeće Bulove izraze:

$$E_1 = x(\bar{x}\cup y),\quad E_2 = y,\quad E_3 = x(x\cup y),\quad E_4 = x\cup y,$$

$$E_5 = \overline{xy},\quad E_6 = x\cup\bar{y}.$$

Zadatak 5. Dokazati sledeće identitete:

1) (i) $xy\cup\bar{x}z\cup xyz\cup\bar{x}yz=xy\cup\bar{x}z$, (ii) $(x\cup y)(\bar{x}\cup z)(x\cup y\cup z)$ $\cdot(\bar{x}\cup y\cup z)=(x\cup y)(\bar{x}\cup z)$,

2) (i) $\overline{xy\cup\bar{x}z\cup\bar{y}z}=\bar{z}(\bar{x}\cup\bar{y})$, (ii) $\overline{(x\cup y)(\bar{x}\cup z)(\bar{y}\cup z)}=\bar{z}\cup\bar{x}\bar{y}$

3) (i) $x\bar{y}\cup yz\cup xy\cup\bar{x}\bar{y}z=x\cup z$, (ii) $(x\cup\bar{y})(y\cup z)(z\cup y)$ $\cdot(\bar{x}\cup\bar{y}\cup z)=xz$,

4) (i) $x\bar{y}\cup\bar{x}\bar{z}\cup yz\cup\bar{x}\bar{y}z=\bar{x}\cup\bar{y}\cup z$, (ii) $(x\cup\bar{y})(\bar{x}\cup\bar{z})(y\cup z)$ $\cdot(\bar{x}\cup\bar{y}\cup z)=\bar{x}\bar{y}z$,

5) (i) $\bar{x}y\cup x\bar{y}\cup\bar{x}\bar{y}=\bar{x}\cup\bar{y}$, (ii) $(\bar{x}\cup y)(x\cup\bar{y})(\bar{x}\cup\bar{y})=\bar{x}\bar{y}$,

6) (i) $xy\cup\bar{x}\bar{y}\cup x\bar{y}=x\cup\bar{y}$, (ii) $(x\cup y)(\bar{x}\cup\bar{y})(x\cup\bar{y})=x\bar{y}$,

7) (i) $x\cup\bar{x}(\bar{y}\bar{z}\bar{v}\cup z\cup v)\cup y\bar{v}=1$, (ii) $(x(\bar{x}\cup(\bar{y}\cup\bar{z}\cup\bar{v})zv)(y\cup\bar{v})=0$,

8) (i) $(x\cup y\cup z)\bar{v}\cup\bar{y}v\cup x\cup\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{v}$ $=x\cup\bar{y}\cup\bar{v}$, (ii) $(xyz\cup\bar{v})(\bar{y}\cup v)x$ $\cdot(\bar{x}\cup\bar{y}\cup\bar{z}\cup\bar{v})=x\bar{y}\bar{v}$.

Zadatak 6. Dokazati da je

1) $\overline{\bigcup(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i})}=\prod(\bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i})$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in L_2^n$,

2) $\overline{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\cup\bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$,

akko $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

GLAVA III

BULOVE FUNKCIJE

U glavi III razmatraju se funkcije čiji su i originali i slike elementi skupa $\{0,1\}$. Zovu se Bulove funkcije. O Bulovim funkcijama u ma kojoj Bulovoj algebri čitalac može videti [1], [55].

Pored opšteg razmatranja Bulovih funkcija u algebri $(L_2, \cup, \cdot, -)$ u ovoj glavi se govori i o specijalnim Bulovim funkcijama: simetričnim i alternativnim.

Ovde se posebno razmatra mogućnost pisanja Bulove funkcije pomoću Bulovih izraza u raznim formama.

1. DEFINICIJA BULOVE FUNKCIJE

Definicija 1. *Preslikavanje* f *skupa* L_2^n *(direktni proizvod* $L_2 \times L_2 \times \ldots \times L_2$*) u skup* L_2*, u oznaci*

$$f : L_2^n \to L_2$$

zovemo Bulova funkcija (videti [52], [54], [55]).

Bulove funkcije najčešće zadajemo tablicama ili Bulovim izrazima.

Primer 1. Bulove funkcije f,g,h date su sledećim tablicama:

x	f(x)
0	1
1	0

x y	g(x,y)
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

x y z	h(x,y,z)
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Primer 2. Bulove funkcije f_1, f_2, f_3 date su sledećim Bulovim izrazima:

$$f_1(x) = \bar{x},\quad x \in L_2;\quad f_2(x,y) = x \cup y,$$

$$(x,y) \in L_2^2;\quad f_3(x,y,z) = \overline{x \cup y} \cup xz,\quad (x,y,z) \in L_2^3,$$

gde su binarne operacije „$\cup$" (disjunkcija), „$\cdot$" (konjunkcija) i unarna operacija „$-$" (negacija) definisane na skupu L_2 (glava I, model 1.)

Primer 3. Date su sledeće Bulove funkcije

$$f_1(x) = x,\quad x \in L_2;\quad f_2(x,y) = \overline{x \cup y},\quad (x,y) \in L_2^2;$$

$$f_3(x,y) = \overline{xy},\quad (x,y) \in L_2^2;\quad f_4(x,y,z) = xy \cup \bar{z},\quad (x,y,z) \in L_2^3.$$

Odgovarajuće tablice datih funkcija su:

x	$f_1(x)$
0	0
1	1

x	y	$x \cup y$	$f_2(x,y)$	$x \cdot y$	$f_3(x,y)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0

x	y	z	$x \cdot y$	$\bar{z}$	$f_4(x,y,z)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Iz ovog primera vidimo da za svaku Bulovu funkciju, datu Bulovim izrazom, možemo formirati odgovarajuću tablicu, koristeći tablice za disjunkciju, konjunkciju i negaciju, kao i svojstva Bulove algebre $(L_2, \cup, \cdot, -)$.

Važi i obrnuto. Svaku Bulovu funkciju, datu tablicom, možemo predstaviti Bulovim izrazom (videti teoremu 2., teoremu 3. i teoremu 4. ove glave).

2. NEKE TEOREME O BULOVIM FUNKCIJAMA

Teorema 1. *Broj različitih Bulovih funkcija od n promenljivih je* 2^{2^n}.

Dokaz. Kako u skupu L_2^n postoji 2^n različitih n-torki, i svakoj n-torki možemo pridružiti samo jednu od vrednosti 0 ili 1, to imamo varijacije sa ponavljanjem od dva elementa klase 2^n. Njihov broj je, kao što znamo 2^{2^n}.

Primer 4. Postoje četiri različite Bulove funkcije sa jednom promenljivom. Dajemo ih u sledećoj tablici:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Funkcije $f_1(x)=0$ i $f_4(x)=1$ zovu se konstantne Bulove funkcije. Funkcija $f_2(x)=x$ zove se identična funkcija (direktna), a funkcija $f_3(x)=\bar{x}$ komplementarna (indirektna).

Postoji šesnaest različitih Bulovih funkcija od dve promenljive. Dajemo ih u sledećoj tablici:

x y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Najčešće koristimo sledeće: f_2, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{14} i f_{15}. Dajemo u sledećem spisku njihova imena i uobičajeno označavanje:

$f_2(x,y)=xy$	funkcija <u>*i*</u> *(konjunktivna funkcija)*
$f_7(x,y)=x \oplus y$	funkcija ekskluzivno <u>*ili*</u> *(alternativna funkcija)*
$f_8(x,y)=x \cup y$	funkcija <u>*ili*</u> *(disjunktivna funkcija)*
$f_9(x,y)=x \top y$	funkcija <u>*nili*</u> *(Lukasijevićeva funkcija)*
$f_{10}(x,y)= x \Leftrightarrow y$	*funkcija ekvivalencije*
$f_{14}(x,y)=x \Rightarrow y$	*funkcija implikacije*
$f_{15}(x,y)=x \perp y$	funkcija <u>*ni*</u> *(Šeferova funkcija)*.

Teorema 2. *Za ma koju Bulovu funkciju*

$$f : L_2^n \to L_2$$

važi jednakost

(1) $$f(x_1,\dots,x_n) = \bigcup_{\alpha\in L_2^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

(tj. funkcija može biti predstavljena u KDNF).

Dokaz. Označimo desnu stranu jednakosti (1) sa $F(x_1,\dots,x_n)$ tj.

(2) $$F(x_1,\dots,x_n) = \bigcup_{\alpha\in L_2^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Zamenom n-torke $(a_1,\dots,a_n)\in L_2^n$ u relaciju (2) imamo

$$F(a_1,\dots,a_n) = \bigcup_{\alpha\in L_2^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}.$$

Konjunkcije

(3) $a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in L_2^n$

imaju, na osnovu relacije (4) (glava II), vrednost 0 ili 1, tj.

$$a_1^{\alpha_1}\dots a_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, \text{ ako je } (a_1,\dots,a_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \\ 0, \text{ ako je } (a_1,\dots,a_n) \neq (\alpha_1,\dots,\alpha_n). \end{cases}$$

Znači, postoji samo jedna konjunkcija (3) koja je jednaka 1.

Na osnovu svojstva

$$1\cdot f(\alpha) = f(\alpha), \quad 0\cdot f(\alpha)=0, \quad 0\cup f(\alpha) = f(\alpha),$$

gde je $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, imamo

(4) $F(a_1,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_n)$.

Kako je relacija (4) zadovoljena za svaku n-torku iz L_2^n proizilazi da je

$$F(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n),$$

pa je ispunjena relacija (1). Ovim je dokazana teorema 2.

Teorema 3. *Za ma koju Bulovu funkciju*

$$f : L_2^n \to L_2$$

važi jednakost

$$(1') \quad f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \cup x_1^{\overline{\alpha_1}} \cup \ldots \cup x_n^{\overline{\alpha_n}})$$

(tj. funkcija može biti predstavljena u KKNF).

Dokaz. Označimo desnu stranu jednakosti (1') sa $F(x\ ,\ldots,x_n)$ tj.

$$(2') \quad F(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \cup x_1^{\overline{\alpha_1}} \cup \ldots \cup x_n^{\overline{\alpha_n}}).$$

Zamenom n-torke $(a_1,\ldots,a_n) \in L_2^n$

u relaciju (2') imamo

$$F(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \cup a_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \ldots \cup a_n^{\bar{\alpha}_n}).$$

Disjunkcije

$$(3') \quad a_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \ldots \cup a_n^{\bar{\alpha}_n}, \quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in L_2^n,$$

imaju, na osnovu relacije (4) (glava II), vrednost 0 ili 1, tj.

$$a_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \ldots \cup a_n^{\bar{\alpha}_n} = \begin{cases} 1, \text{ ako je } (a_1,\ldots,a_n) \neq (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \\ 0, \text{ ako je } (a_1,\ldots,a_n) = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \end{cases}$$

Znači, postoji samo jedna disjunkcija (3') koja je jednaka 0.

Na osnovu svojstava

$$f(\alpha) \cup 0 = f(\alpha), \ f(\alpha) \cup 1 = 1, \ f(\alpha) \cdot 1 = f(\alpha),$$

gde je $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, imamo

$$(4') \quad F(a_1,a_2,\ldots,a_n) = f(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

Kako je relacija (4') zadovoljena za svaku n-torku iz L_2^n proizilazi da je $F(x) = f(x)$ pa je ispunjena relacija (1'). Ovim je dokazana teorema 3.

Primer 5. Bulove funkcije f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 i f_6 date su sledećim tablicama:

x	$f_1(x)$
0	1
1	0

x	y	$f_2(x,y)$	$f_3(x,y)$	$f_4(x,y)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	0

x	y	z	$f_5(x,y,z)$	$f_6(x,y,z)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Napišimo KDNF (odnosno KKNF) datih funkcija.

Na osnovu teoreme 2 i tablica, KDNF datih funkcija su:

$$f_1(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2} f_1(\alpha)\cdot x^{\alpha} = f_1(0)\cdot x^0 \cup f_1(1)\cdot x^1 = 1\cdot x^0 \cup 0\cdot x^1 = \bar{x}.$$

$$f_2(x,y) = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in L_2^2} f_2(\alpha,\beta)x^{\alpha}y^{\beta} = f_2(0,0)x^0y^0 \cup f_2(0,1)x^0y^1 \cup f_2(1,0)x^1y^0$$
$$\cup f_2(1,1)x^1y^1 = 0\cdot x^0y^0 \cup 1\cdot x^0y^1 \cup 1\cdot x^1y^0 \cup 1\cdot x^1y^1$$
$$= \bar{x}\, y \cup x\, \bar{y} \cup x\, y.$$

Slično, za funkcije f_3, f_4, f_5, f_6, imamo:

$$f_3(x,y) = 1\cdot x^0y^0 \cup 0\cdot x^0y^1 \cup 1\cdot x^1y^0 \cup 1\cdot x^1y^1 = \bar{x}\,\bar{y} \cup x\,\bar{y} \cup x\,y,$$

$$f_4(x,y) = 1\cdot x^0y^0 \cup 1\cdot x^0y^1 \cup 1\cdot x^1y^0 \cup 0\cdot x^1y^1 = \bar{x}\,\bar{y} \cup \bar{x}\,y \cup x\,\bar{y},$$

$$f_5(x,y,z) = 0\cdot x^0y^0z^0 \cup 0\cdot x^0y^0z^1 \cup 0\cdot x^0y^1z^0 \cup 0\cdot x^0y^1z^1 \cup 1\cdot x^1y^0z^0$$
$$\cup 1\cdot x^1y^0z^1 \cup 1\cdot x^1y^1z^0 \cup 1\cdot x^1y^1z^1 = x\,\bar{y}\,\bar{z} \cup x\,\bar{y}\,z \cup x\,y\,\bar{z}$$
$$\cup\, x\,y\,z,$$

$$f_6(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}\bar{y}z \cup \bar{x}y\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}z.$$

Na osnovu teoreme 3. i tablica, KKNF datih funkcija su:

$$f_1(x) = \prod_{\alpha \in L_2} (f_1(\alpha) \cup x^{\bar{\alpha}}) = (f_1(0) \cup x^{\bar{0}})(f_1(1) \cup x^{\bar{1}})$$

$$= (1 \cup x^{\bar{0}})(0 \cup x^{\bar{1}}) = (1 \cup \bar{\bar{x}})(0 \cup \bar{x}) = (1 \cup x)(0 \cup \bar{x})$$

$$= 1(0 \cup \bar{x}) = 0 \cup \bar{x} = \bar{x},$$

$$f_2(x,y) = \prod_{(\alpha,\beta) \in L_2^2} (f(\alpha,\beta) \cup x^{\bar{\alpha}} \cup y^{\bar{\beta}})$$

$$= (f(0,0) \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{0}})(f(0,1) \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{1}})(f(1,0) \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{0}})$$
$$(f(1,1) \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{1}})$$

$$= (0 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{\bar{y}})(1 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup \bar{\bar{y}})(1 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= (0 \cup x \cup y)(1 \cup x \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup y)(1 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= (x \cup y) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x \cup y.$$

Slično, za funkcije f_3, f_4, f_5 imamo:

$$f_3(x,y) = (1 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{0}})(0 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{1}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{0}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{1}})$$

$$= (1 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{\bar{y}})(0 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup \bar{\bar{y}})(1 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= (1 \cup x \cup y)(0 \cup x \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup y)(1 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= 1 \cdot (x \cup \bar{y}) \cdot 1 \cdot 1 = x \cup \bar{y},$$

$$f_4(x,y) = (1 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{0}})(1 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{1}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{0}})(0 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{1}})$$

$$= (1 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{\bar{y}})(1 \cup \bar{\bar{x}} \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup \bar{\bar{y}})(0 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= (1 \cup x \cup y)(1 \cup x \cup \bar{y})(1 \cup \bar{x} \cup y)(0 \cup \bar{x} \cup \bar{y})$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \; (\bar{x} \cup \bar{y}) = \bar{x} \cup \bar{y},$$

$$f_5(x,y,z) = (0 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{0}} \cup z^{\bar{0}})(0 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{0}} \cup z^{\bar{1}})(0 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{1}} \cup z^{\bar{0}})$$
$$(0 \cup x^{\bar{0}} \cup y^{\bar{1}} \cup z^{\bar{1}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{0}} \cup z^{\bar{0}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{0}} \cup z^{\bar{1}})$$
$$(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{1}} \cup z^{\bar{0}})(1 \cup x^{\bar{1}} \cup y^{\bar{1}} \cup z^{\bar{1}})$$

$$= (0 \cup x \cup y \cup z)(0 \cup x \cup y \cup \bar{z})(0 \cup x \cup \bar{y} \cup z)(0 \cup x \cup \bar{y} \cup \bar{z}) \cdot$$
$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= (x \cup y \cup z)(x \cup y \cup \bar{z})(x \cup \bar{y} \cup z)(x \cup \bar{y} \cup \bar{z}).$$

Teorema 4. Ma koja Bulova funkcija $f : L_2^n \to L_2$ *sa promenljivim* $x_1, \ldots, x_n$ *može biti predstavljena pomoću disjunkcije i negacije, odnosno konjunkcije i negacije, tj.*

I25

$$\text{(i)}\quad f(x_1,\dots,x_n) = \bigcup_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha)} \cup x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha}_n}},$$

$$\text{(ii)}\quad f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\alpha\in L_2^n} \overline{(\overline{f(\alpha)} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n})}.$$

Dokaz.

$$\text{(i)}\quad f(x_1,\dots,x_n) = \bigcup_{\alpha\in L_2^n} f(\alpha) x_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n} \qquad \text{(teorema o KDNF)}$$

$$= \bigcup_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha) x_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n}}} \qquad (\text{svojstvo } a=\bar{\bar{a}})$$

$$= \bigcup_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha)} \cup x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha}_n}} \qquad \Big(\text{svojstvo } \overline{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i\Big).$$

$$\text{(ii)}\quad f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{\alpha\in L_2^n} (f(\alpha) \cup x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha}_n}) \qquad \text{(teorema o KKNF)}$$

$$= \prod_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{(f(\alpha) \cup x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha}_n})}} \qquad (\text{svojstvo } a=\bar{\bar{a}})$$

$$= \prod_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha)} \cdot x_1^{\bar{\bar{\alpha}}_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\bar{\bar{\alpha}}_n}} \qquad \Big(\text{svojstvo } \overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i\Big)$$

$$= \prod_{\alpha\in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha)} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}} \qquad (\text{svojstvo } \bar{\bar{a}}=a).$$

Teorema 5. *Skup Bulovih funkcija*

$$F = \{f \mid f : L_2^n \to L\}$$

na kome su uvedene ***binarne*** *operacije* „$\cup$“ *i* „$\cdot$“ *i unarna operacija* „$-$“

na sledeći način:

$$(D_1)\ (f_1 \cup f_2)\,x \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cup f_2(\alpha))\,x^\alpha$$

$$(D_2)\ (f_1 \cdot f_2)(x) \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cdot f_2(\alpha))\,x^\alpha$$

$$(D_3)\ \bar{f}(x) \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha)\,x^\alpha,$$

gde je

$$(x_1, \dots, x_n) = x, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha, \quad x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} = x^\alpha,$$

jeste Bulova algebra.

Potrebno je pokazati da su zadovoljeni aksiomi iz definicije Bulove algebre (definicija 1. gl. I).

Dokaz.

$$(B_1)(i)\quad (f_1 \cup f_2)(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cup f_2(\alpha))\,x^\alpha \qquad \text{(definicija } (D_1))$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_2(\alpha) \cup f_1(\alpha))\,x^\alpha \qquad \text{(zakon } B_1(i))$$

$$= (f_2 \cup f_1)(x) \qquad \text{(definicija } (D_1)),$$

$$(B_2)(i)\quad ((f_1 \cup f_2) \cup f_3)(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} ((f_1(\alpha) \cup f_2(\alpha)) \cup f_3(\alpha))\,x^\alpha \qquad \text{(definicija } (D_1))$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f_1(\alpha) \cup (f_2(\alpha) \cup f_3(\alpha)))\,x^\alpha \qquad \text{(zakon } B_2(i))$$

$$= (f_1 \cup (f_2 \cup f_3))(x) \qquad \text{(definicija } (D\ )).$$

Na sličan način proveravamo važenje aksioma $B_1(ii)$, $B_2(ii)$ iz definicije 1. (gl. I), a takodje i aksiome $B_3(i)$ i $B_3(ii)$.

Prvi element 0 i poslednji element I su konstantne Bulove funkcije, gde za svako $x \in L_2^n$,

$$0(x) = 0 \quad \text{i} \quad I(x) = 1.$$

$$(B_4)(i)\quad (f \cup 0)(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup 0(\alpha))\,x^\alpha \qquad \text{(definicija } (D_1))$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha)x^{\alpha} \qquad \text{(zakon } B_4\text{(i))}$$

$$= f(x) \qquad \text{(definicija } (D_1)\text{)}.$$

Slično se proverava važenje aksiona B_4(ii).

$$(B_5)\text{(i)} \quad (f \cup \bar{f})(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup \bar{f}(\alpha))x^{\alpha} \qquad \text{(definicija } (D_1)\text{)}$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} x^{\alpha} \qquad \text{(zakon } B_5\text{(i))}$$

$$= I(x) \qquad \text{(teorema 2(i), gl. II)}.$$

Slično se proverava važenje aksioma B_5(ii).

Znači, skup $F = \{f \mid f : L_2^n \to L_2\}$ jeste Bulova algebra.

3. SIMETRIČNE BULOVE FUNKCIJE

Definicija 2. Bulovu funkciju $z = f(x)$, $x \in L_2^n$ *zovemo s i m e t r i č n o m Bulovom funkcijom ako i samo ako je*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}),$$

za svaku permutaciju $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ *promenljivih* $x_1, \ldots, x_n$.

Primer 6. Bulove funkcije

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cup x_2 \cup x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \cup x_2x_1 \cup x_3x_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \cup x_2\bar{x}_3 \cup x_3\bar{x}_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3,$$

su simetrične funkcije.

Tako, na primer, za permutaciju

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \text{ tj. } (x_1 \to x_2, x_2 \to x_1, x_3 \to x_3)$$

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1\cup x_2\cup x_3$$
$$= x_2\cup x_1\cup x_3$$
$$= f_1(x_2,x_1,x_3),$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2\cup x_2x_3\cup x_3x_1$$
$$= x_2x_1\cup x_1x_3\cup x_3x_2$$
$$= f_2(x_2,x_1,x_3).$$

Dokažimo da je $f_3(x_1,x_2,x_3) = f_3(x_2,x_1,x_3)$.

Zaista

$$\bar{f}_3(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\cup x_2)(\bar{x}_2\cup x_3)(\bar{x}_3\cup x_1)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cup x_1x_2x_3,$$

$$\bar{f}_3(x_2,x_1,x_3)=(\bar{x}_2\cup x_1)(\bar{x}_1\cup x_3)(\bar{x}_3\cup x_2)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\cup x_1x_2x_3.$$

Dakle $f_3(x_1,x_2,x_3) = f_3(x_2,x_1,x_3)$.

Slično se dokazuje i za ostale permutacije.

Teorema 6. *Ako su* f *i* g *simetrične Bulove funkcije onda su i* $f\cup g$, $f\cdot g$, $\bar{f}$ *simetrične funkcije, gde je*

$$(f\cup g)(x) \overset{def}{=} f(x)\cup g(x),$$
$$(f\cdot c)(x) \overset{def}{=} f(x)\cdot g(x),$$
$$\bar{f}(x) \overset{def}{=} \bar{f}(x)$$

za svako x L_2^n .

Dokaz. Neka su f i g simetrične funkcije, tj.

$$f(x) = f(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),$$
$$g(x) = g(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$$

za svaku permutaciju $(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$ promenljivih $x_1,\ldots x_n$. Tada imamo

$$(f\cup g)(x) = f(x)\cup g(x)$$
$$= f(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})\cup g(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$$
$$= (f\cup g)(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}),$$

$$(f\cdot g)(x) = f(\mathbf{x})\cdot g(x)$$
$$= f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})\cdot g(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$$
$$= (f\cdot g)(x_{i_1},\dots,x_{i_n}),$$

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x_1,\dots,x_n)} = \overline{f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})} = \bar{f}(x_{i_1},\dots,x_{i_n}).$$

Ovim je dokazana teorema 6.

4. ALTERNATIVNE FUNKCIJE

Na strani 47. naveli smo tablicu šesnaest Bulovih funkcija od dve promenljive. Medju njima i alternativnu funkciju

$$f(x,y) = x \oplus y,$$

koja se često koristi u praksi. Ona je data izrazom $x \oplus y$ u kome figuriše jedna specijalna binarna operacija $\oplus$ na skupu L_2 (takozvano sabiranje po modelu 2; kraće mod. 2). Navodimo još jednom tablicu alternativne funkcije (videti [36], [44]).

x y	x ⊕ y
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

Na osnovu teoreme o KDNF i KKNF izmedju operacije $\oplus$ i operacija $\cup$, $\cdot$, $-$ postoje sledeće veze:

$V_\oplus$ (i) $x \oplus y = \bar{x}\cdot y \cup x\cdot \bar{y}$

(ii) $x \oplus y = (x \cup y)\cdot(\bar{x} \cup \bar{y})$

(iii) $x \cup y = x\cdot y \oplus x \oplus y$.

Definicija 3. 1^0 *Konstante* 0,1 *i promenljive* $x,y,z,\dots$ *skupa* $\{0,1\}$ *su alternativni izrazi.*

2^0 *Ako su* A *i* B *alternativni izrazi tada su* $A \oplus B$, $A\cdot B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ *alternativni izrazi.*

3^0 *Alternativni izrazi su samo oni simboli koji se dobijaju konačnom primenom* 1^0 *i* 2^0.

Primer 7. Alternativni izrazi su:

$$0,\ 1,\ x,\ \bar{x},\ x \oplus y,\ \bar{x} \oplus y,\ (x \oplus \bar{y})x \text{ itd.}$$

Na osnovu veza $V_\oplus(i)$ i $V_\oplus(iii)$ svaki alternativni izraz je i Bulov izraz, i obrnuto. Prema ovom mi uvek možemo govoriti o Bulovom izrazu.

Binarna relacija $\oplus$ ima sledeća svojstva:

$S_\oplus 1.$ $x \oplus y = y \oplus x$

$S_\oplus 2.$ $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

$S_\oplus 3.$ (i) $x \oplus 0 = x$ (ii) $x \oplus 1 = \bar{x}$

$S_\oplus 4.$ (i) $x \oplus \bar{x} = 1$ (ii) $x \oplus x = 0$

$S_\oplus 5.$ $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$

$S_\oplus 6.$ $\bar{x} \oplus \bar{y} = x \oplus y$

$S_\oplus 7.$ (i) $\overline{x \oplus y} = \bar{x} \oplus y$ (ii) $\overline{x \oplus y} = x \oplus \bar{y}$

$S_\oplus 8.$
$$\begin{aligned}\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n} &= \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n\\ &= x_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \dots \oplus x_n\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus \bar{x}_n\end{aligned}$$

$S_\oplus 9.$ $\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \oplus \dots \oplus \bar{x}_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, za $n=2k$.

Dokazi:

$x \oplus y = y \oplus x$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \bar{x}\, y \cup x\, \bar{y} && \text{(veza } V_\oplus(i))\\ &= \bar{y}\, x \cup y\, \bar{x} && \text{(komutativnost za } \cup \text{ i } \cdot)\\ &= y \oplus x && \text{(veza } V_\oplus(i)).\end{aligned}$$

$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (\bar{y}z \cup y\bar{z}) && \text{(veza } V_\oplus(i))\\ &= \bar{x}(\bar{y}z \cup y\bar{z}) \cup x\,\overline{(\bar{y}z \cup y\bar{z})} && \text{(veza } V_\oplus(i))\\ &= \bar{x}(\bar{y}z \cup y\bar{z}) \cup x((y \cup \bar{z})(\bar{y} \cup z)) && \text{(zakoni de Morgana)}\end{aligned}$$

$$=\bar x\bar y z\cup \bar x y\bar z\cup x(yz\cup \bar y\bar z) \qquad \text{(zakon distributivnosti)}$$

$$=\bar x\bar y z\cup \bar x y\bar z\cup xyz\cup x\bar y\bar z \qquad \text{(zakon distributivnosti)}$$

$$=(\bar x y\cup x\bar y)\bar z\cup(\bar x\bar y\cup xy)z \qquad \text{(zakoni asoc. i distr.)}$$

$$=(\bar x y\cup x\bar y)\bar z\cup((x\cup\bar y)(\bar x\cup y))z \qquad \text{(zakoni distrubucije)}$$

$$=(\bar x y\cup x\bar y)\bar z\cup\overline{(xy\cup x\bar y)}z \qquad \text{(zakoni de Morgana)}$$

$$=(\bar x y\cup x\bar y)\oplus z \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i))$$

$$=(x\oplus y)\oplus z \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i)).$$

$$x\oplus 0 = x$$

$$x\oplus 0 = \bar x\cdot 0\cup x\cdot\bar 0 \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i))$$

$$= x\cdot 1 \qquad \text{(svojstva } a\cdot 0 = 0 \text{ i } \bar 0 = 1)$$

$$= x \qquad \text{(zakon } a\cdot 1 = a).$$

Slično se dokazuju svojstva $S_{\oplus}3.(ii)$, $S_{\oplus}4.(i)$, $S_{\oplus}4.(ii)$ i $S_{\oplus}5$.

$$\bar x\oplus\bar y = x\oplus y$$

$$\bar x\oplus\bar y = \bar{\bar x}\,\bar y\cup\bar x\,\bar{\bar y} \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i))$$

$$= x\,\bar y\cup\bar x\,y \qquad \text{(identitet } \bar{\bar a} = a)$$

$$= \bar x\,y\cup x\,\bar y \qquad \text{(zakon komutativnosti)}$$

$$= x\oplus y \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i)).$$

$$\overline{x\oplus y} = \bar x\oplus y$$

$$\overline{x\oplus y} = \overline{\bar x\,y\cup x\,\bar y} \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i))$$

$$= (x\cup\bar y)(\bar x\cup y) \qquad \text{(zakoni de Morgana i } \bar{\bar a}=a)$$

$$= x\,y\cup\bar x\,\bar y \qquad \text{(zakoni distr. i } B_5(i))$$

$$= \bar{\bar x}\,y\cup\bar x\,\bar y \qquad \text{(identitet } \bar{\bar a} = a)$$

$$= \bar x\oplus y \qquad \text{(veza } V_{\oplus}(i)).$$

Slično se dokazuje svojstvo $S_{\oplus}7.(ii)$.

$$\overline{x_1\oplus\ldots\oplus x_n} = x_1\oplus\ldots\oplus x_{i-1}\oplus\bar x_i\oplus x_{i+1}\oplus\ldots\oplus x_n,\quad i=1,\ldots,n$$

Neka je

$$\sum\nolimits_{\oplus} x_i = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n,$$

$$g_i = x_1 \oplus \ldots \oplus x_{i-1} \oplus x_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_n.$$

Kako operacija $\oplus$ zadovoljava zakone asocijativnosti i komutativnosti imamo

$$\sum_{j=1}^{n}{}_{\oplus} x_i = x_i \oplus g_i, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Dakle,

$$\overline{\sum_{j=1}^{n}{}_{\oplus} x_i} = \overline{x_i \oplus g_i}$$

$$= \bar{x}_i \oplus g_i \qquad \text{(svojstvo } S_{\oplus}7.\text{(i))}.$$

Ovim je svojstvo $S_{\oplus}8.$ dokazano.

Teorema 7. Za ma koju Bulovu funkciju $f : L_2^n \to L_2$ *važi jednakost*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha \in L_2^n}{}_{\oplus} f(\alpha) x^{\alpha}$$

(tj. funkcija može biti predstavljena pomoću sabiranja po modulu 2, konjunkcije i negacije).

Dokaz.

$$f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha) x^{\alpha} \qquad \text{(teorema o KDNF)}$$

$$= \sum_{\alpha \in L_2^n}{}_{\oplus} f(\alpha) x^{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \neq \beta \in L_2^n}{}_{\oplus} f(\alpha) f(\beta) x^{\alpha} x^{\beta} \oplus \ldots \oplus \prod_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha) x^{\alpha} \quad \text{(veza } V_{\oplus}\text{(iii))}$$

$$= \sum_{\alpha \in L_2^n}{}_{\oplus} f(\alpha) x^{\alpha} \qquad \text{(svojstva } x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta \text{ i } x \oplus 0 = x).$$

Ovim je teorema dokazana.

Primer 8. Za Bulovu funkciju

$$f : L_2^3 \to L_2$$

datu tabelom

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

po teoremi 7. je

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}\bar{z} \oplus xy\bar{z} \oplus xyz\,.$$

Skup L_2 sa binarnim operacijama „$\oplus$" (sabiranje po mod.2) i „$\cdot$" (konjunkcija) jeste polje u oznaci $(L_2, \oplus, \cdot)$.

Za svako $x,y,z \in L$ važe aksiome polja:

A_1 $x \oplus y = y \oplus x$ (svojstvo $S_{\oplus 1}$)

A_2 $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (svojstvo $S_{\oplus 2}$)

A_3 $x \oplus 0 = x$ (svojstvo $S_{\oplus 3(i)}$)

A_4 Za svaki $x \in L$ je $x \oplus x = 0$ (svojstvo $S_{\oplus 4(ii)}$).

Skup $L_2 \setminus \{0\}$ jeste, u odnosu na binarnu operaciju „$\cdot$" (konjunkcija) komutativna grupa.

A_5 $xy = yx$ (komutativnost konjunkcije)

A_6 $x(yz) = (xy)z$ (asocijativnost konjunkcije)

A_7 $x \cdot 1 = x$ (svojstvo jedinice)

A_8 Za svaki $x \in L_2 \setminus \{0\}$ je $x \cdot x = 1$.

Zadovoljen je distributivni zakon konjunkcije prema sabiranju po mod. 2.

A_9 $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ (svojstvo $S_{\oplus 5}$)

$(y \oplus z)x = yx \oplus zx$.

Skup L_2^n nad poljem $(L_2, \oplus, \cdot)$ jeste linearni prostor u odnosu na binarne operacije sabiranje i množenje skalarom, gde je

$$x + y = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad \alpha \in L_2.$$

Za svaki $x,y,z \in L_2^n$ i $\alpha,\beta \in L$ važe aksiome linearnog prostora

P_1 $x + y = y + x$

P_2 $x + (y+z) = (x+y) + z$

P_3 $x + 0 = x$, gde je $0=(0,\dots,0)$

P_4 $x + x = 0$

P_5 $1\cdot x = x$

P_6 $(\alpha\cdot\beta)\cdot x = \alpha(\beta\cdot x)$

P_7 $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$

P_8 $(\alpha\oplus\beta)x = \alpha\cdot x+\beta\cdot x$.

Dokaz.

P_1 $x + y = (x_1\oplus y_1,\dots,x_n\oplus y_n)$

$= (y_1\oplus x_1,\dots,y_n\oplus x_n)$

$= y + x$

P_2 Slično se dokazuje koristeći asocijativnost po mod. 2.)

P_3 $x + 0 = (x_1\oplus 0,\dots,x_n\oplus 0)$

$= (x_1,\dots,x_n)$

$= x$

P_4 $x + x = (x_1\oplus x_1,\dots,x_n\oplus x_n)$

$= (0,\dots,0)$

$= 0$.

Slično se pokazuju svojstva P_5, P_6, P_7 i P_8.

Primer 9. Neka su $v_1 = (0,1,1,0)$ i $v_2 = (1,1,0,0)$ vektori prostora L_2^4. Tada je

$$v_1+ v_2 = (0 \oplus 1,\ 1 \oplus 1,\ 1 \oplus 0,\ 0 \oplus 0) = (1,0,1,0)$$

$$0\cdot v_1 = (0\cdot 1,\ 0\cdot 1,\ 0\cdot 1,\ 0\cdot 0) = (0,0,0,0)$$

$$1\cdot v_1 = (1\cdot 0,\ 1\cdot 1,\ 1\cdot 1,\ 1\cdot 0) = (0,1,1,0)$$

$$(0 \oplus 1)v_1 = 1\cdot v_1 = v_1 .$$

Definicija 4. Vektori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *za* $m>1$ *su linearno zavisni ako postoji* α_j, $\alpha_j \in L_2$, *tako da iz*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \text{ } \textit{proizilazi } \alpha_j \neq 0.$$

Definicija 5. Vektori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *za* $m>1$ *su linearno nezavisni ako za svako* α_j, $\alpha_j \subset L_2$, *iz*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_m = 0 \text{ } \textit{proizlazi } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$$

Primer 10. Vektori

$v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1,0)$, $v_4 = (1,1,0,1)$

iz prostora L_2^4 su linearno zavisni. Zaista iz

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 &= \alpha_1 (1,1,0,0) + \alpha_2 (1,0,1,1) + \alpha_3 (1,0,1,0) + \\ &\quad \alpha_4 (1,1,0,1) \\ &= (\alpha_1, \alpha_1, 0, 0) + (\alpha_2, 0, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 0, \alpha_3, 0) + \\ &\quad (\alpha_4, \alpha_4, 0, \alpha_4) \\ &= (\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4, \ \alpha_1 \oplus \alpha_4, \ \alpha_2 \oplus \alpha_3, \ \alpha_2 \oplus \alpha_4) \\ &= (0,0,0,0)\end{aligned}$$

i jednakosti vektora proizilazi da je

$$\begin{aligned}\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 \oplus \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 \oplus \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 \oplus \alpha_4 &= 0.\end{aligned}$$

Jedno od rešenja ovog sistema jeste $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$ $\alpha_4=1$, što je lako proveriti. Dakle, po definiciji 3., vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 su linearno zavisni.

Primer 11. Vektori

$v_1 = (0,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (1,0,0,0)$,

iz prostora L_2^4, su linearno nezavisni. Zaista iz

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4=\alpha_1(0,0,0,1)+\alpha_2(0,0,1,0)+\alpha_3(0,1,0,0)$$
$$+\alpha_4(1,0,0,0)$$
$$=(0,0,0,\alpha_1)+(0,0,\alpha_2 0)+(0,\alpha_3 0,0)+(\alpha_4,0,0,0)$$
$$=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$$
$$=(0,0,0,0)$$

i jednakosti vektora proizilazi da je $\alpha_4=0$, $\alpha_3=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_1=0$, pa su vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 linearno nezavisni.

Definicija 6. *Skup linearno nezavisnih vektora* $v_1,\dots,v_k$ *iz* L_2^n *zovemo baza prostora* L_2^n *ako su za svaki* $x \in L_2^n$ *vektori* $x, v_1, \dots, v_k$ *linearno zavisni.*

Jedna baza prostora L_2^n su vektori

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\dots,0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n = (0,0,0,\dots,1),$$

jer se svaki vektor $x=(x_1,\dots,x_n)$ iz L_2^n može prikazati kao linearna kombinacija

$$x = x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n.$$

Zaista,

$$x = x_1(1,0,\dots 0)+x_2(0,1,\dots,0)+\dots+x_n(0,0,\dots,1)$$
$$= (x_1,0,\dots,0)+(0,x_2,\dots,0)+\dots+(0,0,\dots,x_n)$$
$$= (x_1\oplus 0 \oplus\dots\oplus 0,\ 0 \oplus x_2\oplus\dots\oplus 0,\dots, 0\oplus 0 \oplus\dots\oplus x_n)$$
$$= (x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Definicija 7. *Skalarni proizvod vektora* $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *i* $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ *vektorskog prostora* L_2^n *u notaciji* $\langle x,y\rangle$, *je*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1\oplus x_2y_2\oplus\dots\oplus x_ny_n.$$

Primer 12. Skalarni proizvod vektora $x=(1,1,0,0,1)$ i $y = (1,0,1,1,1)$ vektorskog prostora L_2^5 je

$\langle x,y\rangle = 1\cdot 1 \oplus 1\cdot 0 \oplus 0\cdot 1 \oplus 0\cdot 1 \oplus 1\cdot 1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$

Skalarni proizvod $\langle x,y\rangle$ ima sledeća svojstva:

1^0 $\langle x,y\rangle \geqslant 0$

2^0 $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3^0 $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

$\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

4^0 $\alpha\langle x,y\rangle = \langle \alpha x,y\rangle = \langle x,\alpha y\rangle$.

Ako je $\langle x,y\rangle = 0$ kažemo da su vektori x i y ortogonalni.

Podskupovi M i N skupa L_2^n zovu se ortogonalni ako je za svaki $x \in M$ i svaki $y \in N$ $\langle x,y\rangle = 0$.

ZADACI:

Zadatak 1. Postoji 2^4 različitih Bulovih funkcija $f : L_2^2 \to L_2$ (tablica na strani 47). Napisati kanonske disjunktivne normalne forme, odnosno kanonske konjunktivne normalne forme za funkcije:

$f_7,\ f_9,\ f_{10},\ f_{14}$ i f_{15}.

Dokazati da se dobijeni izrazi za funkcije f_7, f_9, f_{10}, f_{14} i f_{15} mogu transformisati u sledeće veze:

$$x \oplus y = \bar{x}\cdot y \cup x\cdot \bar{y},$$

$$x \top y = \overline{x \cup y},$$

$$x \Leftrightarrow y = \bar{x}\cdot \bar{y} \cup x\cdot y,$$

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \cup y,$$

$$x \perp y = \overline{x\cdot y}.$$

Zadatak 2. Data je Bulova funkcija $f : L_2^3 \to L_2$ sledećom tablicom:

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Koristeći KDNF dokazati da je $f(x,y,z) = z \cup y$.

Rešenje: Kanonska disjunktivna normalna forma date funkcije je

$$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}z \cup \bar{x}y\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xy\bar{z}$$

Koristeći zakone Bulove algebre, možemo pisati

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}z(\bar{y} \cup y) \cup y\bar{z}(\bar{x} \cup x) \cup xz(\bar{y} \cup y) \cup yz(\bar{x} \cup x) \\ &= \bar{x}z \cup y\bar{z} \cup xz \cup yz \\ &= z(\bar{x} \cup x) \cup y\bar{z} \cup yz \\ &= z \cup y(\bar{z} \cup z) \\ &= z \cup y. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Date su Bulove funkcije f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, tablicom

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1.

a) Napisati KDNF i KKNF za date funkcije.

b) Dobijene KDNF i KKNF transformisati u oblike

$$f_1(x,y,z) = y \cup z \qquad f_2(x,y,z) = x \cdot z$$

$$f_3(x,y,z) = x \cup y \cup z \qquad f_4(x,y,z) = xyz$$

$$f_5(x,y,z) = x \cup y \cup \bar{z}.$$

Zadatak 4. Ako su x i y Bulove promenljive i operacije „$\Rightarrow$", „$\Leftrightarrow$" date vezama

$$x \Rightarrow y = \bar{x} \cup y$$

$$x \Leftrightarrow y = xy \cup \bar{x}\bar{y}\ ((\bar{x} \cup y)(x \cup \bar{y}) = x \Leftrightarrow y)$$

dokazati da je

a) 1. $x \Rightarrow x = 1$

2. $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x = 1$

3. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow \bar{x}) = 1$

4. $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$

5. $\bar{x} \Rightarrow (x \Rightarrow y) = 1$

6. $x \Rightarrow (y \Rightarrow x) = 1$

7. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$

8. $x \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow \overline{(x \Rightarrow y)}) = 1$

b) 1. $x \Leftrightarrow x = 1$

2 $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow x) = 1$

3. $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}) = 1$

c) 1. $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 1$

2. $(x \Leftrightarrow y)(y \Leftrightarrow z) \Rightarrow (x \Leftrightarrow z) = 1$

3. $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = 1$

d) 1. $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z) = \bar{x}\bar{y} \cup \bar{x}z \cup x\bar{z} \cup yz$

2. $(x \Leftrightarrow y)(y \Leftrightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z) = xy \cup \bar{x}z \cup \bar{y}\bar{z}$

e) 1. $x \Leftrightarrow y = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}$

2. $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \bar{y}$

3. $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$.

Zadatak 5. Dokazati veze: $x \cup y = \bar{x} \Rightarrow y$, $x \cdot y = \overline{x \Rightarrow \bar{y}}$, $x, y \in L_2$.

Zadatak 6. Dokazati identitete:

$$\overline{(\bar{x} \Rightarrow y)} \Rightarrow z = \bar{x} \Rightarrow (\bar{y} \Rightarrow z),$$

$$\overline{(x \Rightarrow \bar{y})} \Rightarrow \bar{z} = x \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{z}), \quad x, y, z \in L_2.$$

Zadatak 7. Dokazati veze:

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \Rightarrow (\bar{x}_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow (\bar{x}_{n-1} \Rightarrow x_n) \dots)),$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \overline{x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_{n-1} \Rightarrow \bar{x}_n) \dots))},$$

$$\overline{\prod_{i=1}^{n}} x_i = x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (x_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_{n-1} \Rightarrow \bar{x}_n) \dots)).$$

Zadatak 8. Dokazati da se ma koja Bulova funkcija $f : L_2^n \to L_2$ sa promenljivim $x, \dots, x_n$ može napisati u obliku

$$\text{(i)}\quad f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} \overline{f(\alpha) \Rightarrow (x_1^{\alpha_1} \Rightarrow (x_2^{\alpha_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Rightarrow x_n^{\alpha_n})\dots))}$$

$$\text{(ii)}\quad f(x) = \prod_{\alpha \in L_2^n} (\overline{f(\alpha)} \Rightarrow (x_1^{\alpha_1} \Rightarrow (x_2^{\alpha_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \Rightarrow x_n^{\alpha_n})\dots)))$$

Zadatak 9. Dokazati da se ma koja Bulova funkcija može prikazati pomoću negacije i implikacije.

Zadatak 10. Dokazati identitete:

1. $f(x) = x\cdot f(1) \cup \bar{x}\cdot f(0) = (x \cup f(0)(\bar{x} \cup f(1))$

2. $f(x) \cup g(x) = (x\, f(1) \cup \bar{x}\cdot f(0)) \cup (g(1)x \cup g(0)\,\bar{x})$

$\qquad\qquad = ((f(1) \cup g(1))x \cup (f(0) \cup g(0))\bar{x})$

3. $f(x)\cdot g(x) = (f(1)x \cup f(0)\bar{x})\,(g(1)x \cup g(0)\bar{x})$

$\qquad\qquad = (f(1)\cdot g(1)x) \cup (f(0)\cdot g(0)\bar{x})$.

Zadatak 11. Dokazati identitete:

1. $x_i f(x) = x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$
2. $\bar{x}_i f(x) = x_i f(x_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$
3. $x_i \cup f(x) = x_i \cup f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$
4. $\bar{x}_i \cup f(x) = \bar{x}_i \cup f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $i=1,\dots,n$.

Zadatak 12. Dokazati identitete:

1. $f(x) = x_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$\qquad \cup \bar{x}_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $i=1,\dots,n$.

2. $f(x) = (x_i \cup f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n))$

$\qquad \cdot (\bar{x}_i \cup f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n))$, $i=1,\dots,n$.

3. $f(x) = x_i x_{i+1} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, 1, x_{i+2}, \dots, x_n)$

$\qquad \cup x_i \bar{x}_{i+1} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, 0, x_{i+2}, \dots, x_n)$

$$\cup \bar{x}_i x_{i+1} f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,1,x_{i+2},\ldots,x_n)$$
$$\cup \bar{x}_i \bar{x}_{i+1} f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,0,x_{i+2},\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots,n.$$

4. $f(x) = (x_i x_{i+1} \cup f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,0,x_{i+2},\ldots,x_n))$
$\cdot (x_i \bar{x}_{i+1} \cup f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,1,x_{i+2},\ldots,x_n))$
$\cdot (\bar{x}_i x_{i+1} \cup f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,0,x_{i+2},\ldots x_n))$
$\cdot (\bar{x}_i \bar{x}_{i+1} \cup f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,1,x_{i+2},\ldots x_n)),\quad i=1,2,\ldots,n$

Zadatak 13. Ako je $x \oplus y = z$, onda je

1. $x \oplus z = y$
2. $y \oplus z = x$
3. $x \oplus y \oplus z = 0$, dokazati.

Zadatak 14. Neka je

$$P_n = \{f(x) \mid f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} a_\alpha x^\alpha\},$$

to jest, P_n je skup Bulovih funkcija u KDNF. Dokazati da je skup P_n na polju $(L_2, \oplus, \cdot)$ linearni prostor u odnosu na binarne operacije sabiranja i množenja skalarom, gde je

$$f(x)+g(x) \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (a_\alpha \oplus b_\alpha) x^\alpha$$

$$kf(x) \overset{def}{=} \bigcup_{\alpha \in L_2^n} ka_\alpha \cdot x^\alpha,\quad k \in L_2$$

a „$\oplus$" i „$\cdot$" sabiranje i množenje po mod. 2.

Zadatak 15. Data je Bulova funkcija
$$f(x,y)=f(0,0)\bar{x}\bar{y}\oplus f(0,1)\bar{x}y\oplus f(1,0)x\bar{y}\oplus f(0,1)xy;$$

transformisati je u baze:

$B_1 = \{1,\ x,\ y,\ xy\}$ $B_2 = \{1,\ x,\ \bar{y},\ x\bar{y}\}$

$B_3 = \{1,\ \bar{x},\ y,\ \bar{x}y\}$ $B_4 = \{1,\ \bar{x},\ \bar{y},\ \bar{x}y\}$

Rešenje za bazu B_1 je $f(x,y)=f(0,0)\oplus(f(1,0)\oplus f(0,0))x$
$\oplus(f(0,1)\oplus f(0,0))y\oplus(f(1,1)\oplus f(0,1)\oplus f(1,0)\oplus f(0,0))xy.$

GLAVA IV

BULOVE JEDNAČINE

1. O BULOVIM JEDNAČINAMA

Sada ćemo opisati Bulove jednačine (i nejednačine) u Bulovoj algebri $(L_2, \cup, \cdot, -)$. Definicije i neke teoreme o Bulovim jednačinama, koje ovde izlažemo, mogu se proširiti na bilo koju Bulovu algebru. Za detalje vidi [39], [55].

U ovoj glavi se daju neke metode za rešavanje Bulove jednačine. Detaljnije je obradjena metoda sukcesivnih eliminacija koja se često koristi u praksi. Obradjene su alternativne jednačine kao specijalni slučaj Bulovih jednačina.

Definicija 1. *Ako su* $A(x_1,\dots,x_n)$ i $B(x_1,\dots,x_n)$ *Bulovi izrazi, gde bar jedan od njih sadrži promenljive* $x_1,\dots,x_n$ *skupa* L_2, *tada se jednakost*

$$A(x_1,\dots,x_n) = B(x_1,\dots,x_n) \tag{1}$$

zove Bulova jednačina.

Primer 1. Ako su x, y i z iz skupa L_2, tada su jednakosti

$$x \cup 1 = 1, \quad (x \cup y)\cdot z = 0, \quad (x \cup z)xy = (x \cup y)\cdot z$$

Bulove jednačine. Medjutim, jednakosti

$$1 \cup 0 = 1, \quad (1 \cup 0)\cdot 1 = 1, \quad (1 \cup 1)\cdot 0 = 0$$

nisu Bulove jednačine.

Vektor $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ skupa L_2^n zove se partikularno rešenje Bulove jednačine (1) ako je

$$A(\alpha) = B(\alpha).$$

Skup svih partikularnih rešenja Bulove jednačine (1) zovemo skup rešenja jednačine. Ako sa R označimo skup rešenja Bulove jednačine (1), onda je

$$R = \{\alpha \mid A(\alpha) = B(\alpha),\ \alpha \in L_2^n\}$$

to jest $R \subset L_2^n$.

Primer 2. Skup rešenja Bulove jednačine $x \cup y = 1$ je

$$R = \{(0,1),\ (1,0),\ (1,1)\},\ \text{gde}\ (x,y) \in R.$$

Ako je R prazan skup onda kažemo da je Bulova jednačina nemoguća. Tako, na primer, jednačine $x \cdot 0 = 1$, $(x \cup y) \cdot 0 = 1$ su nemoguće.

Definicija 2. *Ako su* $A(x_1, \ldots, x_n)$ i $B(x_1, \ldots, x_n)$ *Bulovi izrazi, gde bar jedan od njih sadrži promenljive* $x_1, \ldots, x_n$ *skupa* L_2*, tada se relacija*

(2) $A(x_1, \ldots, x_n) \leqslant B(x_1, \ldots, x_n)$ (ili $A(x_1, \ldots, x_n) \geqslant B(x_1, \ldots, x_n)$)

zove Bulova nejednačina.

Skup R je skup rešenja Bulove nejednačine (2) ako je

$$R = \{\alpha \mid A(\alpha) = B(\alpha),\ \alpha \in L_2^n\}.$$

Primer 3. Skup rešenja Bulove nejednačine $x \cdot y \leqslant 1$ je

$$R = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\},\ \text{gde}\ (x,y) \in R,$$

jer je $0 \leqslant 1$, $1 \leqslant 1$ (glava I, definicija 3.).

Definicija 3. *Dve Bulove jednačine (nejednačine)* J_1 *i* J_2 *su ekvivalentne ako i samo ako se jednačina (nejednačina)* J_1 *može transformisati na jednačinu (nejednačinu)* J_2 *konačnom primenom Bulovih aksioma (teorema) i obratno.*

Primer 4. Jednačine

(J_1) $\quad \overline{x \cdot y} \cdot x = y \cdot \overline{(y \cup z)}$

(J_2) $\quad \bar{y} \cdot x = 0$

jesu ekvivalentne.

Zaista, iz jednačine (J_1) možemo izvesti jednačinu (J_2):

(J_1)	$(\overline{x\cdot y})\cdot x = y\cdot(\overline{y\cup z})$	(jednačina (J_1))
(K_1)	$(\bar{x}\cup\bar{y})\cdot x = y\cdot(\bar{y}\cdot\bar{z})$	(zakoni de Morgana)
(K_2)	$\bar{x}\cdot x\cup\bar{y}\cdot x = (y\cdot\bar{y})\cdot\bar{z}$	(zakoni distribucije i asocijacije)
(K_3)	$0\cup\bar{y}\cdot x = 0\cdot\bar{z}$	(zakoni $\bar{a}\cdot a = 0$)
(J_2)	$\bar{y}\cdot x = 0$	(zakoni $a\cup 0 = a, a\cdot 0=0$).

Jednačine (J_1), (K_1), (K_2), (K_3) i (J_2) su ekvivalentne.

Teorema 1. *Bulova jednačina* A = B *je ekvivalentna Bulovim jednačinama*

(i) $\bar{A}\cdot B\cup A\cdot\bar{B} = 0$ (ii) $(\bar{A}\cup B)\cdot(A\cup\bar{B}) = 1$.

Dokaz.

(i) (1) A=B ako i samo ako $A\leqslant B$ i $B\leqslant A$ (glava I, teorema 9.)

(2) $A\leqslant B$ i $B\leqslant A$ ako i samo ako $\bar{A}\cdot B=0$ i $\bar{B}\cdot A=0$ (glava I, teorema 10., (T_5) (i))

(3) $\bar{A}\cdot B=0$ i $\bar{B}\cdot A=0$ ako i samo ako $\bar{A}\cdot B\cup A\cdot\bar{B}=0$ (glava I, teorema 2.)

(ii) (1) A=B ako i samo ako $A\leqslant B$ i $B\leqslant A$ (glava I, teorema 9.)

(2) $A\leqslant B$ i $B\leqslant A$ ako i samo ako $\bar{A}\cup B=1$ i $\bar{B}\cup A=1$ (glava I, teorema 10., (T_5) (ii))

(3) $\bar{A}\cup B=1$ i $A\cup\bar{B}=1$ ako i samo ako $(\bar{A}\cup B)\cdot(A\cup\bar{B})=1$ (glava I, teorema 3.).

Primer 5. Po Teoremi 1. Bulova jednačina $xy\cup z=x$ je ekvivalentna Bulovoj jednačini $(\bar{x}\cup\bar{y})\bar{z}x\cup(xy\cup z)\bar{x}=0$, odnosno, Bulovoj jednačini $((\bar{x}\cup\bar{y})\bar{z}\cup x)((xy\cup z)\cup\bar{x})=1$.

Teorema 2. *Bulova nejednačina* $A\leqslant B$ *je ekvivalentna Bulovim jednačinama*

(i) $A\cdot\bar{B} = 0$ (ii) $\bar{A}\cup B = 1$

Dokaz.

(i) (1)	$A \leqslant B$ ako i samo ako $B \cdot A = A$	(glava I, teorema 8.)
(2)	$A \cdot \bar{B} = B(A \cdot \bar{B})$	(zamena A sa $A \cdot \bar{B}$ u (1))
(3)	$A \cdot \bar{B} = A(B \cdot \bar{B})$	(zakoni asocijacije i komutacije)
(4)	$A \cdot \bar{B} = A \cdot 0$	(zakon $x \cdot \bar{x} = 0$)
(5)	$A \cdot \bar{B} = 0$	(zakon $x \cdot 0 = 0$).
(ii) (1)	$A \leqslant B$ ako i samo ako $A \cup B = B$	(glava I, definicija 2.)
(2)	$\bar{A} \cup B = A \cup (\bar{A} \cup B)$	(zamena B sa $A \cup B$ u (1))
(3)	$\bar{A} \cup B = (A \cup \bar{A}) \cup B$	(zakon asocijacije)
(4)	$\bar{A} \cup B = 1 \cup B$	(zakon $x \cup \bar{x} = 1$)
(5)	$\bar{A} \cup B = 1$	(zakon $x \cup 1 = 1$).

Primer 6. Po teoremi 2. Bulova nejednačina $x \cup y \leqslant x$ jeste ekvivalentna Bulovoj jednačini $(x \cup y)\bar{x} = 0$, odnosno Bulovoj jednačini $\bar{x} \cdot \bar{y} \cup x = 1$.

Teorema 3. (i) *Sistem Bulovih jednačina* $A_i = 0, i \in \{1, \ldots, n\}$ *je ekvivalentan sa Bulovom jednačinom* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 0$.

(ii) *Sistem Bulovih jednačina* $A_i = 1$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *je ekvivalentan sa Bulovom jednačinom* $\prod_{i=1}^{n} A_i = 1$.

Dokaz teoreme 3. proizilazi iz generalizacije iskaza:

$x = 0$ i $y = 0$ ako i samo ako $x \cup y = 0$ (glava I, teorema 2.), odnosno,

$x = 1$ i $y = 1$ ako i samo ako $x \cdot y = 1$ (glava I, teorema 3.).

Primer 7. Sistem Bulovih jednačina

$$xy \cup z = 0$$
$$(\bar{x} \cup \bar{z})y = 0$$
$$x \cup \bar{y} = 0$$

po teoremi 3. (i) je ekvivalentan Bulovoj jednačini

$$(xy \cup z) \cup (\bar{x} \cup \bar{z})v \cup (x \cup \bar{y}) = 0.$$

Sistem Bulovih jednačina

$$xy \cup \bar{z} = 1$$
$$(x \cup z)y = 1$$
$$\bar{x} \cup y = 1$$

po teoremi 3.(ii) je ekvivalentna Bulovoj jednačini

$$(xy \cup \bar{z})(x \cup z)y \cdot (\bar{x} \cup y) = 1.$$

Prirodno se nameću sledeće posledice ovih teorema:

Posledica 1. Sistem Bulovih jednačina

$$A_i = B_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

je ekvivalentan Bulovim jednačinama

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} (\bar{A}_i B_i \cup A_i \bar{B}_i) = 0$ (ii) $\prod_{i=1}^{n} (\bar{A}_i \cup B_i)(A_i \cup \bar{B}_i) = 1$

(posledica teoreme 1. i teoreme 3.).

Posledica 2. Sistem Bulovih nejednačina

$$A_i \leqslant B_i, \quad i = 1, \dots, n$$

je ekvivalentan sa Bulovim jednačinama

(i) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \bar{B}_i = 0$ (ii) $\prod_{i=1}^{n} (\bar{A}_i \cup B_i) = 1$

(posledica teoreme 2. i teoreme 3.).

Prema ovom, sistem Bulovih jednačina i nejednačina uvek se može svesti na jednu Bulovu jednačinu.

Primer 8. Sistem Bulovih jednačina i nejednačina

$$xy \cup z = x$$
$$x \cup yz = y$$
$$x \cup zy = y \cup xz$$
$$y \cup xz \leqslant x$$

na osnovu teoreme 1.(i) i teoreme 2.(i) je ekvivalentan sistemu

$$(\bar{x} \cup \bar{y})\bar{z}x \cup (xy \cup z)\bar{x} = 0$$
$$\bar{x}(\bar{y} \cup \bar{z})y \cup (x \cup yz)\bar{y} = 0$$
$$\bar{x}(\bar{z} \cup \bar{y})(y \cup xz) \cup (x \cup zy)\bar{y}(\bar{x} \cup \bar{z}) = 0$$
$$(y \cup xz)\bar{x} = 0$$

odnosno sistemu

$$x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}z = 0$$

$$\bar{x}y\bar{z} \cup x\bar{y} = 0$$

$$\bar{x}y\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z} = 0$$

$$y\bar{x} = 0.$$

Dobijeni sistem jednačina je, na osnovu teoreme 3. ekvivalentan Bulovoj jednačini

$$(x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}z) \cup (\bar{x}y\bar{z} \cup x\bar{y}) \cup (\bar{x}y\bar{z} \cup x\bar{y}\bar{z}) \cup y\bar{x} = 0$$

odnosno Bulovpj jednačini

$$x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}y\bar{z} \cup x\bar{y} \cup \bar{x}y \cup \bar{x}z = 0.$$

Dakle, sistem Bulovih jednačina i nejednačina po $x_1,\dots,x_n$ je ekvivalentan Bulovoj jednačini

(3) $\qquad A(x_1,\dots,x_n) = 0,$

gde je $(x_1,\dots,x_n)$ iz skupa L_2^n. Kako se, na osnovu teoreme o KDNF, svaki Bulov izraz $A(x_1,\dots,x_n)$ može transformisati u KDNF $A'(x_1,\dots,x_n)$ to sledi da je jednačina (3) ekvivalentna jednačini

(4) $\qquad A'(x_1,\dots,x_n) = \bigcup a_{i_1\dots i_n} x^{\alpha_{i_1}} \dots x_n^{\alpha_{i_n}} = 0$

gde je $(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_1}) \in M$,

$$M = \{(\alpha_{i_1},\dots\alpha_{i_1}) \mid a_{i_1\dots i_n} = 1\} \subset L_2^n.$$

Teorema 4. *Skup rešenja Bulovih jednačina* (3) *je* $L_2^n \setminus M$, *gde je skup* M *iz* (4).

Dokaz. Neka je $(e_1,\dots,e_n)$ partikularno rešenje jednačine (3) i neka $(e_1,\dots,e_n) \in M$. Kako su jednačine (3) i (4)ekvibalentne to je $A'(e_1,\dots,e_n) = 0$, odnosno

(5) $\qquad \bigcup a_{i_1\dots i_n} e_1^{\alpha_{i_1}} \dots e_n^{\alpha_{i_n}} = 0.$

Kako $(e_1,\dots,e_n) \in M$ to postoji jedna jedina konjunkcija u (5),tako da je

$$e_1^{\alpha_{i_1}} \dots e_n^{\alpha_{i_n}} = 1.$$

Ostale konjunkcije u (5) su jednake nuli. Dakle $A'(e_1,\dots,e_n)=1$, što je u suprotnosti sa činjenicom da su jednačine (3) i (4) ekvivalentne. Prema ovome, partikularno rešenje $(e_1,\dots,e_n) \notin M$, odakle sledi $(e_1,\dots,e_n) \in L_2^n \setminus M$ što je i trebalo dokazati.

Primer 9. Nadjimo skup rešenja Bulove jednačine

$$(x\cup y)z\cup x(y\cup z)\cup x = 0.$$

Datu jednačinu možemo, na osnovu teoreme o KDNF, transformisati u ekvivalentnu jednačinu

$$xyz\cup x\bar{y}z\cup xy\bar{z}\cup \bar{x}yz\cup x\bar{y}\bar{z} = 0,$$

odnosno,

$$x^1y^1z^1\cup x^1y^0z^1\cup x^1y^1z^0\cup x^0y^1z^1\cup x^1y^0z^0 = 0,$$

gde je

$$M = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}.$$

Dakle, skup rešenja date jednačine je

$$R = L_2^3\setminus M = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}.$$

Lema 1. *Svaka Bulova jednačina*

(6) $$A(x_1,\dots x_n) = 0$$

je ekvivalentna Bulovim jednačinama

(7) $$A(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)x_i\cup A(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)\bar{x}_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Dokaz leme 1. je neposredan.

Teorema 5. *Jednačina* (6) *je moguća ako i samo ako*

$$A(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)\cdot A(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)=0,$$
$i=1,2,\dots,n.$

Dokaz. Neka je $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ rešenje jednačine (6). Na osnovu leme 1. $(\alpha_1,\dots,\alpha_2)$ je rešenje i sistema (7), to jest

$$(8)\quad A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\,\alpha_i \cup A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\bar{\alpha}_i = 0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Po teoremi 3. sistem (8) je ekvivalentan sa sistemom

$$(9)\quad \begin{aligned} &A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\alpha_i=0, \quad i=1,2,\ldots,n\\ &A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\bar{\alpha}_i=0, \quad i=1,2,\ldots,n, \end{aligned}$$

a po teoremi 2.(i) sistem (9) je ekvivalentan sa sistemom njednačina

$$A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) \leqslant \bar{\alpha}_i \leqslant \bar{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),$$

to jest sistem (9) je ekvivalentan sa sistemom nejednačina

$$(10)\quad A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n) \leqslant \bar{A}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Na osnovu teoreme 2. sistem nejednačina (10) je ekvivalentan sa sistemom jednačina

$$A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\cdot A(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)=0$$

$i=1,\ldots,n$. Ovim je teorema 5. dokazana.

Primer 10. Bulova jednačina

$$\bar{b}\bar{c}x \cup (b\cup c)\bar{x} = 0,$$

gde su b i c konstante iz skupa L_2 je moguća, jer je, po teoremi 5., $\bar{b}\bar{c}(b\cup c) = 0$ dok Bulova jednačina

$$acx \cup (b\cup \bar{c})\bar{x} = 0$$

nije uvek moguća jer je $ac(b\cup \bar{c}) = abc$.

Na osnovu leme 1. jednačina

$$(11)\qquad A(x) = 0$$

je ekvivalentna jednačini $A(1)\cdot x \cup A(0)\cdot \bar{x} = 0$, to jest

$$(12)\qquad ax\cup b\bar{x} = 0,$$

gde je $A(1) = a$ i $A(0) = b$.

Teorema 6. *Neka je jednačina* (12) *moguća, to jest, neka je* $a \cdot b = 0$. *Tada je* x *rešenje jednačine* (12) *ako i samo ako*

(13) $$b \leqslant x \leqslant \bar{a}$$

ili

(13′) $$x = \bar{a}x \cup b\bar{x}.$$

Dokaz. Dokažimo prvo relaciju (13).

1. $ax \cup b\bar{x} = 0$ (jednačina (12))

2. $ax = 0$ i $b\bar{x} = 0$ (iz 1. po teoremi 3.(i))

3. $x \leqslant \bar{a}$ i $b \leqslant \bar{\bar{x}} = x$ (iz 2. po teoremi 2.(i)).

Iz koraka 3. čitamo: $b \leqslant x \leqslant \bar{a}$. (Tj. jednačina 1. je ekvivalentna sistemu jednačina 2. koji je ekvivalentan sistemu nejednačina 3.).

Dokažimo sada relaciju (13′). Kako je $x \leqslant \bar{a}$ ekvivalentno sa $x\bar{a} = x$, a $b \leqslant x$ ekvivalentno sa $b\bar{x} = 0$, to iz $x = x\bar{a} \cup 0$ sledi $x = x\bar{a} \cup b\bar{x}$.

Ovim je teorema 6. dokazana.

Primer 11. Posmatrajmo Bulovu jednačinu

(12′) $$\bar{b}\bar{c}x \cup (b \cup c)\bar{x} = 0,$$

gde su b i c iz skupa L_2. Po relaciji (13)(teorema 6.) x je rešenje jednačine (12′) ako i samo ako

$$b \cup c \leqslant x \leqslant \bar{b}\,\bar{c}.$$

Teorema 7. *Neka je jednačina*

(14) $$ax \cup b\bar{x} = 0$$

moguća. Njeno opšte rešenje je

(15) (i) $x = \bar{a}p \cup b\bar{p}$ *ili* (ii) $x = b \cup \bar{a}p$,

gde je p *parametar skupa* L_2.

Dokaz. Neka je $x = \bar{a}p \cup b\bar{p}$ opšte rešenje jednačine (14). Zamenjujući rešenje $x = \bar{a}p \cup b\bar{p}$ u (14) imamo:

$$\begin{aligned} ax \cup b\bar{x} &= a(\bar{a}p \cup b\bar{p}) \cup b\,\overline{(\bar{a}p \cup b\bar{p})} \\ &= a\bar{a}p \cup ab\bar{p} \cup bap' \end{aligned}$$

$= ab$

$= 0,$

jer je $ab = 0$ (uslov da je jednačina (14) moguća).

Neka je x rešenje jednačine (14). Zamenom $x = p$ u (13′), iz teoreme 6. proizilazi da je $p = \bar{a}p \cup b\bar{p}$.

Da su relacije (i) i (ii) iz (15) ekvivalentne izlazi iz:

$$b \cup \bar{a}p = b(p \cup \bar{p}) \cup \bar{a}p$$

$$= (b \cup \bar{a})p \cup b\bar{p}$$

$$= \bar{a}p \cup b\bar{p}.$$

($b \cup \bar{a} = \bar{a}$ proizilazi iz uslova da je jednačina (14) moguća, to jest $ab = 0$, što je po teoremi 2. ekvivalentno sa $b \leqslant \bar{a}$, odnosno ekvivalentno sa $b \cup \bar{a} = \bar{a}$).

Primer 12. Rešenje jednačine

$$\bar{b}\bar{c}x \cup (b \cup c)\bar{x} = 0$$

po teoremi 7. (i) je

$$x = (b \cup c)p \cup (b \cup c)\bar{p}, \quad \text{tj.} \quad x = b \cup c.$$

Rešenje jednačine

$$abx \cup (\bar{a} \cup \bar{b})\bar{x} = 0$$

po teoremi 7. (i) je

$$x = (\bar{a} \cup \bar{b})p \cup (\bar{a} \cup \bar{b})\bar{p}, \quad \text{tj.} \quad x = \bar{a} \cup \bar{b}.$$

2. METODA SUKCESIVNIH ELIMINACIJA

Neka je data Bulova jednačina

(16) $A(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$.

Na osnovu teoreme 1. (i) jednačinu (16) možemo transformisati u ekvivalentnu jednačinu

(17) $\bar{A} \cdot B \cup A \cdot \bar{B} = 0$, u oznaci $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Na osnovu leme 1. jednačinu (17) možemo transformisati u ekvivalentnu jednačinu

(18.1) $f_1(1,x_2,\ldots,x_n)x_1 \cup f_1(0,x_2,\ldots,x_n)\bar{x}_1 = 0.$

Na osnovu teoreme 5. jednačina (18.1) je moguća ako je

(18.1´) $f_1(1,x_2,\ldots,x_n)\cdot f_1(0,x_2,\ldots,x_n) = 0$, u oznaci

$f_2(x_2,\ldots,x_n) = 0,$

gde je eliminisano x_1.

U sledećem koraku, na osnovu leme 1., je

(18.2) $f_2(1,x_3,\ldots,x_n)x_2 \cup f_2(0,x_3,\ldots,x_n)\bar{x}_2 = 0$

odakle sledi

(18.2´) $f_2(1,x_3,\ldots,x_n)\cdot f_2(0,x_3,\ldots,x\ ) = 0$, u oznaci

$f_3(x_3,\ldots,x_n) = 0;$

ovde je eliminisano x_2.

Postupak eliminacije produžavamo do

(18.n) $f_n(1)x_n \cup f_n(0)\bar{x}_n = 0,$

gde su $f_n(1)$ i $f_n(0)$ konstante skupa L_2.

Po teoremi 5. Bulova jednačina (18.n) je moguća ako i samo ako

(18.n´) $f_n(1)\cdot f_n(0) = 0.$

Po teoremi 7.(i) rešenje Bulove jednačine (18.n) je

(19.1) $x_n = \bar{f}_n(1)p_n \cup f_n(0)\bar{p}_n$, tj. $x_n = g_n(p_n)$,

gde je p_n promenljivi parametar skupa L_2.

Zamenom (19.1) u (18.n-1) dobijamo Bulovu jednačinu

$$f_{n-1}(1,g_n(p_n))x_{n-1} \cup f_{n-1}(0,g_n(p_n))\bar{x}_{n-1} = 0$$

čije je rešenje, na osnovu teoreme 6.(i)

(19.2) $x_{n-1} = f_{n-1}(1,g_n(p_n))p_{n-1} \cup f_{n-1}(0,g_n(p_n))\bar{p}_{n-1}$,

tj. $x_{n-1} = g_{n-1}(p_{n-1},p_n)$ gde su p_{n-1}, p_n parametri skupa L_2.

Produžavanjem postupka, dolazimo do

(19.n) $x_1 = f_1(1,g_2(p_2,\ldots,p_n),\ldots,g_n(p_n))p_1$

$\cup f_1(0,g_2(p_2,\ldots,p_n),\ldots,g_n(p_n))\bar{p}_1,$

tj. $x_1 = g_1(p_1, p_2, \dots, p_n)$,

gde su $p_1, \dots p_n$ parametri skupa L_2.

Na osnovu (19.1),...,(19.n) rešenje jednačine (17) je

$$x_n = g_n(p_n)$$

$$x_{n-1} = g_{n-1}(p_{n-1}, p_n)$$

....

$x_1 = g_1(p_1, \dots, p_n)$, gde su $p_1, \dots p_n$ parametri skupa L_2

Za detaljan dokaz vidi [55].

Primer 13. Data je Bulova jednačina

$$(20)\quad (b \cup c)\bar{x}_1 \cup c\bar{x}_2 \cup b\bar{x}_3 \cup \bar{c}x_1x_2 \cup (\bar{b} \cup \bar{c})x_2x_3 \cup \bar{b}x_1x_3 = 0,$$

gde su a,b i c parametri iz skupa L_2. Eliminišimo iz jednačine (20) nepoznatu x_3. Na osnovu (18.1´) dobijamo jednačinu

$$((b \cup c)\bar{x}_1 \cup c\bar{x}_2 \cup \bar{c}x_1x_2 \cup (\bar{b} \cup \bar{c})x_2 \cup \bar{b}x_1) \cdot ((b \cup c)\bar{x}_1 \cup c\bar{x}_2 \cup b \cup \bar{c}x_1x_2) = 0$$

koja je ekvivalentna sa jednačinom

$$(21)\quad (b \cup c)\bar{x}_1 \cup c\bar{x}_2 \cup \bar{c}x_1x_2 \cup b\bar{c}x_2 = 0.$$

Eliminišimo iz jednačine (21) nepoznatu x_2. Na osnovu (18.2´) dobijamo jednačinu

$$((b \cup c)\bar{x}_1 \cup \bar{c}x_1 \cup b\bar{c}) \cdot ((b \cup c)\bar{x}_1 \cup c)) = 0$$

koja je ekvivalentna jednačini

$$(22)\quad (b \cup c)\bar{x}_1 = 0.$$

Jednačina (22) je moguća jer je $0 \cdot (b \cup c) = 0$.

Na osnovu teoreme 7. iz (22), (21) i (20) dobijamo:

$$(21.1)\qquad x_1 = p \cup (b \cup c)\bar{p}$$

$$(21.2)\qquad x_2 = (cx_1 \cup \bar{b}\bar{c}\bar{x}_1) \cdot q \cup (c \cup b\bar{x}_1) \cdot \bar{q}$$

$$(21.3)\qquad x_3 = (bx_1 \cup \bar{b}\bar{c}\bar{x}_1) \cdot (bcx_2 \cup \bar{c}x_2) \cdot r \cup ((b \cup c)\bar{x}_1\bar{x}_2 \cup \bar{c}x_1x_2) \cdot \bar{r}$$

Zamenom (21.1) u (21.2) eliminišemo x_1, a zatim zamenom (21.2) u (21.3) eliminišemo i x_2. Na kraju dobijamo opšte rešenje

$$x_1 = b \cup c \cup p$$

$$x_2 = c \cup \bar{b}\bar{p}\bar{q}$$

$$x_3 = b \cup \bar{c}\bar{p}\bar{q}r,$$

gde su p, q i r promenljivi parametri skupa L_2.

Teorema 8. (L. Lowenheim). *Ako je* $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in L_2^n$ *partikularno rešenje Bulove jednačine*

(23) $f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$

onda je njeno opšte rešenje

(24) $x_i = \xi_i f(p) \cup p_i \bar{f}(p), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$

gde je $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *proizvoljan vektor skupa* L_2^n.

Dokaz. Na osnovu teoreme o KDNF jednačina (23) je ekvivalentna sa

(25) $$\bigcup_{\alpha \in L^n} c_\alpha x^\alpha = 0,$$

gde je $c_\alpha = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Iz (24) proizilazi da je

(26) $\bar{x}_i = \bar{\xi}_i f(p) \cup \bar{p}_i \bar{f}(p), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$

jer ako je $f(p) = 0$ onda je $x_i = \xi_i$, tj. $\bar{x}_i = \bar{\xi}_i$, a ako je $f(p) = 1$, onda je $x_i = p_i$, tj. $\bar{x}_i = \bar{p}_i$. Na osnovu (24) i (26) imamo:

(24') $x_i^{\alpha_i} = \xi_i^{\alpha_i} f(p) \cup p_i^{\alpha_i} \bar{f}(p), \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \alpha_i \in L_2.$

Neka je sada opšte rešenje

$$x_i = \xi_i f(p) \cup p_i \bar{f}(p), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

i $f(\xi) = 0, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, tada zamenom (24') u (25) imamo:

$$f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} c_\alpha \left[\prod_{i=1}^{n} \xi_i^{\alpha_i} (f(p) \cup p_i^{\alpha_i} \bar{f}(p)) \right]$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} c_\alpha \left[\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} f(p) \cup p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n} \bar{f}(p) \right]$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \ f(p) \cup \left[\bigcup_{\alpha \in L^n} c_\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \ \bar{f}(p) \right]$$

$$= f(\xi) f(p) \cup f(p) \bar{f}(p) = 0, \text{ jer je } f(\xi) = 0 \text{ i } f \cdot \bar{f} = 0.$$

Neka je $(x_1^*, \dots, x_n^*) = x^*$ rešenje jednačine (23), to jest $f(x^*) = 0$, $\bar{f}(x^*) = 1$ i $p = x^*$, onda je

$$x_i = \xi_i f(x^*) \cup x_i^* \bar{f}(x^*) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovim je teorema dokazana.

Primer 14. Jedno partikularno rešenje Bulove jednačine

$$\bigcup_{j=1}^{n} a_j \prod_{h=1}^{n} (x_j \cup x_h) = 0$$

je $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (0, \dots, 0)$. Njeno opšte rešenje, na osnovu teoreme 8. (24), je

$$x_i = p_i \bar{f}(p, \dots, p_n), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

to jest

$$x_i = p_i \left[\prod_{j=1}^{n} (\bar{a}_j \cup (\bigcup_{h=1}^{n} \bar{p}_j \bar{p}_h)) \right], \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

gde su $p_1, \dots, p_n$ parametri iz L_2.

Postoje i druge teoreme o Bulovim jednačinama (nejednačinama). Za detalje videti [8], [42], [55].

3. ALTERNATIVNE JEDNAČINE

Ranije smo definisali alternativni izraz (glava III, odeljak 4.). Sada ćemo definisati alternativnu jednačinu i navesti nekoliko teorema koje se odnose na nju.

Definicija 3. *Ako su* $A(x_1, \dots, x_n)$ *i* $B(x_1, \dots, x_n)$ *alternativni izrazi, gde bar jedan od njih sadrži promenljive* $x_1, \dots, x_n$ *skupa* L_2*, tada se jednakost (nejednakost)*

$A(x_1,\dots,x_n)=B(x_1,\dots,x_n)$, $(A(x_1,\dots,x_n)\leqslant B(x_1,\dots,x_n))$

zove alternativna jednačina (nejednačina).

Primer 15. Jednakosti

$$x \oplus y = 0, \quad (x \oplus y)z = x \oplus y$$

su alternativne jednačine, a nejednakosti

$$x \oplus y \leqslant y, \quad (x \oplus y)z \leqslant 0$$

su alternativne nejednačine.

Teorema 9. *Alternativna jednačina*

$$(J_1) \quad A(x_1,\dots,x_n) \oplus B(x_1,\dots,x_n) = C(x_1,\dots,x_n)$$

je ekvivalentna alternativnoj jednačini

$$(J_2) \quad A(x_1,\dots,x_n) = B(x_1,\dots,x_n) \oplus C(x_1,\dots,x_n).$$

Dokaz.

(1) $A \oplus B = C$ (jednačina (J_1))

(2) $\bar{A}B \cup A\bar{B} = C$ (veza $V_\oplus(i)$, glava III)

(3) $\overline{(\bar{A}B \cup A\bar{B})}C \cup (\bar{A}B \cup A\bar{B})\bar{C} = 0$ (teorema 1., glava III)

(4) $ABC \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} = 0$ (zakoni de Morgana i distributivnosti)

(5) $\bar{A}(\bar{B}C \cup B\bar{C}) \cup A(B \cup \bar{C})(\bar{B} \cup C) = 0$ (distributivnost i zakoni de Morgana)

(6) $\bar{A}(\bar{B}C \cup B\bar{C}) \cup A\overline{(\bar{B}C \cup B\bar{C})} = 0$ (zakoni de Morgana)

(7) $A = \bar{B}C \cup B\bar{C}$ (teorema 1., glava IV)

(8) $A = C \oplus B$ (veza $V_\oplus(i)$, glava III).

Ovim je dokazana ekvivalentnost jednačina (J_1) i (J_2).

Primer 16. Prema teoremi 9. jednačina $x \oplus a = b$ je ekvivalentna jednačini $x = a \oplus b$. Tako, rešenje sistema alternativnih jednačina

$$x \oplus a = 0$$

$$x \oplus y = b$$

$$x \oplus y \oplus z = c$$

$$x \oplus y \oplus t = d$$

je $x = a$, $y = a \oplus b$, $z = b \oplus c$, $t = b \oplus d$.

Teorema 10. *Alternativna jednačina*

(27) $\quad ax \oplus b = 0$

je ekvivalentna Bulovoj jednačini

(28) $\quad b\bar{x} \cup (a \oplus b)x = 0$.

Dokaz. Jednačina $ax \oplus b = 0$ je ekvivalentna jednačini $ax \oplus b(x \oplus \bar{x}) = 0$ na osnovu svojstva $x \oplus \bar{x} = 1$, a primenom distributivnosti i asocijativnosti sledi $(a \oplus b)x \oplus b\bar{x} = 0$.

Teorema 11. *Alternativna jednačina* (27) *je moguća ako i samo ako je* $\bar{a} \cdot b = 0$.

Dokaz. Jednačina (27) je ekvivalentna jednačini (28), a na osnovu teoreme 5. jednačina (28) je moguća ako i samo ako $(a \oplus b) \cdot b = o$ što je ekvivalentno sa $\bar{a} \cdot b = 0$ jer je $(a \oplus b) \cdot b = ab \oplus b = (a \oplus 1) \cdot b = \bar{a} \cdot b$.

Teorema 12. *Neka je jednačina* (27) *moguća. Opšte rešenje jednačine* (27) *je*

(29) $\quad x = b \oplus p \cdot \bar{a}$,

gde je p *promenljivi parametar skupa* L_2.

Dokaz. Na osnovu teoreme 10, jednačine (27) i (28) su ekvivalentne. Rešenje jednačine (28) na osnovu teoreme 7.(i) je

$x = (\overline{a \oplus b})p \cup b\bar{p}$

$= (\bar{a} \oplus b)p \cup b\bar{p}$ (relacija $\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b$)

$= (\bar{a} \oplus b)p \cdot b\bar{p} \oplus (\bar{a} \oplus b)p \oplus b\bar{p}$ (relacija $a \cup b = ab \oplus a \oplus b$)

$= \bar{a}p \oplus bp \oplus b\bar{p}$ (relacije $a \cdot \bar{a} = 0$, $a \oplus 0 = a$)

$= \bar{a}p \oplus b$ (relacije $p \oplus \bar{p} = 1$, $a \cdot 1 = a$).

Primer 17. Opšte rešenje po x alternativne jednačine $(a \cup b)x \oplus c\bar{b} = 0$, gde su a, b i c konstante iz L_2, je $x = \bar{b}(c \oplus p\bar{a})$; ovde je p promenljiv parametar iz L_2.

ZADACI

Zadatak 1. Date su Bulove jednačine

J_1 (i) $y \cup xz = x \cup yz$ (ii) $x\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}y\bar{z} = 0$

J_2 (i) $z \cup xy = y \cup zx$ (ii) $\bar{x}\bar{y}z = 0$

J_3 (i) $x \cup y\bar{x} = x \cup \bar{y}$ (ii) $\bar{x} = 0$

J_4 (i) $\bar{x}y \cup x\bar{y} = z$ (ii) $x = \bar{y}z \cup y\bar{z}$.

Dokazati da su J (i) i J (ii), k=1,2,3,4 ekvivalentne jednačine.

Zadatak 2. Dat je sistem jednačina i nejednačina:

$$y \cup xz = b \cup c$$

$$z \cup xy = c \cup b$$

$$1 \leqslant x \cup yz$$

$$x \leqslant 1$$

$$y \leqslant b \cup c,$$

gde su b i c parametri iz skupa L_2.

Dokazati da je dati sistem jednačina i nejednačina ekvivalentan sa jednačinom

$$\bar{b}\bar{c}y \cup \bar{c}\bar{b}z \cup (b \cup c)\bar{y}\bar{z} \cup c\bar{x}\bar{z} \cup b\bar{x}\bar{y} = 0.$$

Zadatak 3. Data je Bulova jednačina

$$(b \cup c)\bar{x} \cup a\bar{b}\bar{c}x \cup \left[\bar{c}(\bar{a} \cup \bar{b})x \cup \bar{a}b\bar{c}\right](c \cup a) = 0,$$

gde su a,b i c parametri iz skupa L_2.

Dokazati da je data jednačina moguća.

Rešenje. Data jednačina se transformiše na ekvivalentnu jednačinu

$$a\bar{b}\bar{c}x \cup (b \cup c)\bar{x} = 0,$$

gde je $a\bar{b}\bar{c}(b \cup c) = 0$ za svako a,b i $c \in L$.

Zadatak 4. Odrediti skup rešenja Bulovih jednačina:

(i) $\bar{x}\bar{y} \cup x\bar{z} = 0$

(ii) $x \cup yz = 0$

(iii) $x(y \cup \bar{z}) = 1$

(iv) $xy \cup \bar{x}z \cup \bar{x}\bar{y}z \cup \bar{x}yz = xy \cup \bar{x}z$

(v) $y \cup z \cup x\bar{y}\bar{z} = 1.$

Rešenje:

(i) $L_2^3 \setminus \{(0,0,1),\ (0,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$

(ii) $L_2^3 \setminus \{(0,1,1),\ (1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$

(iii) $L_2^3 \setminus \{(0,1,1),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,0,0),\ (1,0,1)\}$

(iv) L_2^3

(v) $L_2^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$

Zadatak 5. Metodom sukcesivnih eliminacija odrediti opšte rešenje Bulovih jednačina:

(i) $(b \cup c)\bar{x} \cup c\bar{y} \cup b\bar{z} \cup \bar{c}xy \cup (\bar{b} \cup \bar{c})yz \cup \bar{b}xz = 0$

(ii) $c\bar{x} \cup c\bar{y} \cup \bar{c}xy \cup yz \cup xz = 0,$

gde su b i c parametri iz skupa L_2.

Rešenje.

(i) $x = b \cup c \cup p$

$y = c \cup \bar{b}\bar{p}\bar{q}$

$z = b \cup \bar{c}\bar{p}\bar{q}r$

(ii) $x = c \cup p$

$y = c \cup \bar{p}\bar{q}$

$z = \bar{c}\bar{p}\bar{q}r, \qquad p,q,r \in L$

Zadatak 6. Data je Bulova jednačina

$$\bigcup_{h=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} a_{hj} x_h x_j = 0.$$

Dokazati na osnovu Löwenhemove teoreme da je njeno opšte rešenje

$$x_i = p_i \prod_{h=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (\bar{a}_{hj} \cup \bar{p}_h \cup \bar{p}_j) \qquad x_i = 1,2,\ldots n$$

gde su $p_1,\ldots,p_n$ parametri iz skupa L_2.

Zadatak 7. Odrediti opšte rešenje Bulovih jednačina

(i) $$\prod_{h=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} a_{hj}(x_j \cup x_h) = 0$$

(ii) $$\bigcup_{h=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{hj} \cup x_n x_j = 0.$$

Rešenje:

(i) $$x_i = p_i\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \bar{a}_{hj} \bar{p}_j \bar{p}_h\Big), \; i=1,\dots,n.$$

gde su $p_1, \dots p_n$ parametri iz skupa L_2.

(ii) $$x_i = p_i \prod_{h=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} (\bar{a}_{hj} \cup \bar{p}_h \cup \bar{p}_j) = 0 \quad i=1,\dots,n,$$

gde su $p_1, \dots, p_n$ parametri iz skupa L_2.

Zadatak 8. Odrediti skup rešenja sistema alternativnih jednačina

$$x \oplus a = b$$
$$x \oplus y = a$$
$$x \oplus y \oplus z = b$$
$$x \oplus y \oplus t = a,$$

gde su a, b parametri iz skupa L_2.

Recezenti: dr Slaviša Presić, dr Nedeljko Parezanović, dr Svetozar Milić

Primljeno za štampu na sednici Redakcionog odbora od 30.maja 1975. godine.

Samoupravna interesna zajednica za naučni rad Vojvodine učestvovala je u troškovima izdavanja ove publikacije.

Prema rešenju Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije ova publikacija oslobodjena je poreza na promet.

GLAVA V

MINIMIZACIJA BULOVE FUNKCIJE

Čitalac će u glavi VIII upoznati neke primene Bulove algebre na relejno-kontaktne šeme. Videće da se zahtevi za konstrukciju jedne kontaktne šeme u početku obično iznose u verbalnom obliku, a zatim se prevode u algebarski oblik. Bulova funkcija, pridružena šemi, se zatim na neki način uprošćava tako da kontaktna šema bude što je moguće ekonomičnija. Pod ekonomičnijom šemom podrazumeva se ona na čiju izgradnju treba uložiti manje sredstava. Medjutim, nema univerzalnog kriterijuma šta znači *minimalna funkcija jedne šeme*. Obično se kao kriterijumi uzimaju: minimalni broj slova, minimalni broj konjunkcija i minimalni broj disjunkcija u izrazu kojim se daje funkcija (videti [15], [17], [28] i [25]).

Ranije smo već dali neke primere algebarskog uprošćavanja Bulove funkcije. Cilj nam je bio da jednu Bulovu funkciju, datu Bulovim izrazom J_1, predstavimo ekvivalentnim Bulovim izrazom J_2 koji ima manji broj slova od datog izraza J_1. Mada nismo eksplicitno naglasili, to se najlakše postiže ako se Bulova funkcija f napiše u KDNF (odnosno KKNF), a zatim uporedjuje svaka konjunkcija (odnosno disjunkcija) sa ostalim konjunkcijama (disjunkcijama) i primenjuju, gde je to moguće, identiteti

$$XY \cup X\bar{Y} = X,$$

odnosno,

$$(X \cup Y)(X \cup \bar{Y}) = X.$$

Primer 1. Za funkciju f datu sa

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2\bar{x}_3x_4$$
$$\cup x_1x_2x_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2x_3x_4$$

možemo primeniti identitet $XY \cup X\bar{Y} = X$ na konjunkcije redom: prvu i drugu, treću i četvrtu, petu i šestu. Imamo:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4(\bar{x}_1 \cup x_1) \cup x_1x_2\bar{x}_3(\bar{x}_4 \cup x_4) \cup x_1x_2x_3(\bar{x}_4 \cup x_4)$$
$$= \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2\bar{x}_3 \cup x_1x_2x_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2(\bar{x}_3 \cup x_3)$$
$$= \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1x_2 .$$

Cilj ovog dela jeste da se daju sistematičnije metode za uprošćavanje Bulove funkcije f. Izložićemo dve: metodu Vajt-Karnaufa (Veitch-Karnaugh) i metodu Kvajn-Mak Klaskog (Quine - Mc Cluskey). Pre nego predjemo na opis pomenutih metoda dajemo geometrijsku reprezentaciju Bulove funkcije (videti [28]).

1. GEOMETRIJSKA REPREZENTACIJA BULOVE FUNKCIJE

Za promenljive $x_1,\dots,x_n$ (glava II, teorema 1.) postoji 2^n konjunkcija oblika

$$(1) \quad x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L_2^n ,$$

i 2^n disjunkcija oblika

$$(2) \quad x_1^{\alpha_1} \cup x^{\alpha_2} \cup \ldots \cup x_n^{\alpha_n}, \quad (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L_2^n .$$

Svaki izraz $x_i^{\alpha_i}$ u konjunkciji oblika (1) možemo zameniti sa 0 ili 1, u zavisnosti da li je $x_i \neq \alpha_i$ ili $x_i = \alpha_i$ (glava II, relacija (4)). Svakoj konjunkciji oblika (1) možemo pridružiti broj k u sistemu sa osnovom 2 i obrnuto, to jest

$$(1') \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = C_k ,$$

gde je

$$k = \alpha_1\cdot 2^{n-1} + \alpha_2\cdot 2^{n-2} + \ldots + \alpha_n\cdot 2^0$$

ili drukčije

$$k = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n .$$

Indeks k je dekadni broj koji je jednak broju $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ u binarnom sistemu.

Odavde proizilazi da sve konjunkcije oblika (1) možemo pisati u normalnom poretku

$$C_0,\ C_1,\ldots,\ C_k,\ldots,\ C_{2^n-1}.$$

Primer 2. Za promenljive x,y i z postoji $2^3=8$ različitih konjunkcija oblika (1). Njih možemo poredjati u normalnom poretku na sledeći način:

$$\begin{array}{lll}
\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} = C_0 & \text{jer je} & 000 = 0\\
\bar{x}\,\bar{y}\,z = C_1 & \text{jer je} & 001 = 1\\
\bar{x}\,y\,\bar{z} = C_2 & \text{jer je} & 010 = 2\\
\bar{x}\,y\,z = C_3 & \text{jer je} & 011 = 3\\
x\,\bar{y}\,\bar{z} = C_4 & \text{jer je} & 100 = 4\\
x\,\bar{y}\,z = C_5 & \text{jer je} & 101 = 5\\
x\,y\,\bar{z} = C_6 & \text{jer je} & 110 = 6\\
x\,y\,z = C_7 & \text{jer je} & 111 = 7.
\end{array}$$

Kao i konjunkcija oblika (1) i disjunkcije oblika (2) možemo redjati u normalnom poretku

$$D_0,\ D_1,\ldots,\ D_k,\ldots,\ D_{2^n-1},$$

gde se indeks k odredjuje kao u slučaju konjunkcija oblika (1). Mi ćemo se u ovoj glavi uglavnom služiti sa KDNF Bulove funkcije f, odnosno sa konjunkcijama $C_0,\ C_1,\ldots,\ C_{2^n-1}$.

Na osnovu teoreme o KDNF Bulove funkcije (glava III, teorema 2) i relacije $C_k = x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, svaka Bulova funkcija može se napisati u obliku

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \bigcup_{k=\alpha_1\ldots\alpha_n} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)C_k.$$

Primer 3. Funkciju

$$f(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xyz$$

koja je napisana u KDNF drukčije pišemo:

$f(x,y,z) = C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7$ ili $f(x,y,z) = \cup(C_4, C_5, C_6, C_7)$.

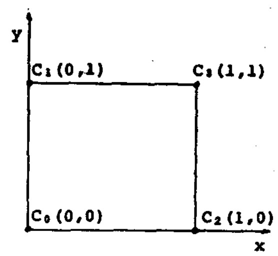
Kako svakoj konjunkciji C_k $(k=0,1,\ldots,2^{n-1})$, možemo pridružiti broj k u dekadnom sistemu, a svakom broju k tačku C_k $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ u prostoru sa n dimenzija, to konjunkcije C_k možemo predstaviti kao vrhove "kuba" u prostoru sa n dimenzija.

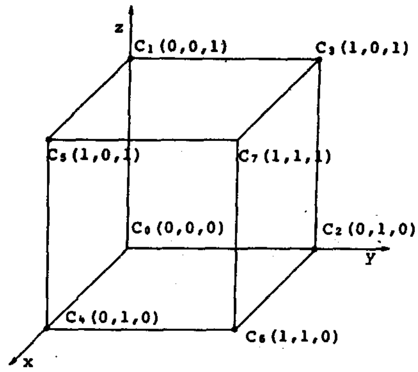
Primer 4. Za promenljive x,y konjunkcije su:

$$C_0 = \bar{x}\bar{y},\quad C_1 = \bar{x}y,\quad C_2 = x\bar{y},\quad C_3 = xy,$$

tj. tačke $C_0(0,0)$, $C_1(0,1)$, $C_2(1,0)$, $C_3(1,1)$.

Njih predstavljamo kao vrhove "kuba" u prostoru sa dve dimenzije (slika 1.).





Sl. 1. Sl. 2.

Primer 5. Za promenljive x,y i z postoji $2^3=8$ konjunkcija oblika (1). Sve njih možemo prikazati kao vrhove "kuba" u prostoru sa tri dimenzije (slika 2.).

Primer 6. Za promenljive x_1,x_2,x_3 i x_4 postoji $2^4=16$ konjunkcija oblika (1). Sve njih možemo prikazati kao vrhove

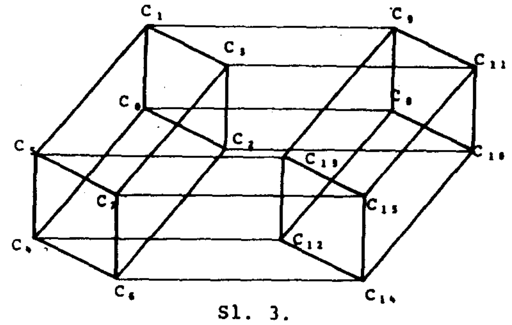
$C_0(0,0,0,0)$, $C_1(0,0,0,1)$, $C_2(0,0,1,0)$, $C_3(0,0,1,1)$,

$C_4(0,1,0,0)$, $C_5(0,1,0,1)$, $C_6(0,1,1,0)$, $C_7(0,1,1,1)$,

$C_8(1,0,0,0)$, $C_9(1,0,0,1)$, $C_{10}(1,0,1,0)$, $C_{11}(1,0,1,1)$,

$C_{12}(1,1,0,0)$, $C_{13}(1,1,0,1)$, $C_{14}(1,1,1,0)$, $C_{15}(1,1,1,1)$

"kuba" u prostoru sa četiri dimenzije (slika 3.)

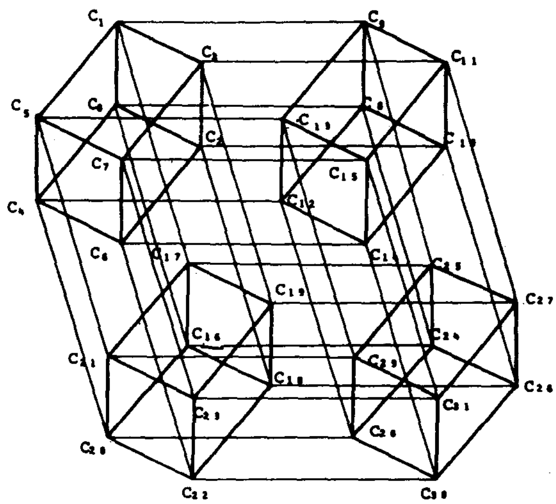


Sl. 3.

Primer 7. Postoji $2^5=32$ konjunkcija oblika (1) za promenljive x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5. Sve njih možemo prikazati kao vrhove

$C_0(0,0,0,0,0)$, $C_1(0,0,0,0,1)$, ..., $C_{31}(1,1,1,1)$

"kuba" u prostoru sa pet dimenzija. Prikazujemo ih na slici 4.



Sl. 4.

Mogli bismo na sličan način prikazati sve konjunkcije oblika (1) za promenljive x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i x_6. Njih ima $2^6=64$. Samo crtanje "kuba" u 6-dimenzionom prostoru bilo bi zametno i od male koristi; već "kub" na slici 4. u 5-dimenzionom prostoru je nepregledan. Mi ćemo se zadovoljiti grafičkim prikazom funkcija sa dve, tri i četiri promenljive. Za to su nam dovoljni "kubovi" sa slika: slike 1., slike 2. i slike 3. Napominjemo da se "kub" sa slike 1. obično zove kvadrat, "kub" sa slike 2. kocka, a "kub" sa slike 3. obično se naziva hiperkub.

Mi ćemo "kub" u n-dimenzionom prostoru koji ima 2^n temena označavati sa

$$K_n = \{C_0, C_1, \ldots, C_{2^n-1}\}.$$

Kako ma koju Bulovu funkciju možemo napisati u KDNF (glava III, teorema 2.), to jest pomoću konjunkcija, a svaku konjunkciju interpretirati kao teme "kuba" u prostoru sa n dimenzija, to svaku Bulovu funkciju možemo prikazati u n-dimenzionom prostoru.

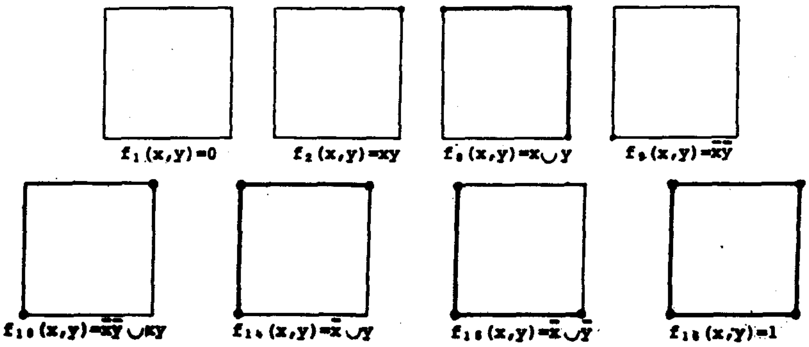
Primer 8. Sve Bulove funkcije sa dve promenljive (ima ih 16, glava III) možemo prikazati na "kubu" u prostoru sa dve dimenzije. Na slici 5. prikazujemo sledeće:

$f_1(x,y)=0,\quad f_2(x,y)=x\cdot y=C_3,\quad f_7(x,y)=\bar{x}y\cup x\bar{y}=\cup(C_1,C_2)$

$f_8(x,y)=x\cup y=\cup(C_1,C_2,C_3),\quad f_9(x,y)=\bar{x}\cdot\bar{y}=C_0$

$f_{10}(x,y)=\bar{x}\bar{y}\cup xy=\cup(C_0,C_3),\quad f_{14}(x,y)=\bar{x}\cup y=\cup(C_0,C_1,C_3)$

$f_{15}(x,y)=\bar{x}\cup\bar{y}=\cup(C_0,C_1,C_2),\quad f_{16}(x,y)=1=\cup(C_0,C_1,C_2,C_3).$



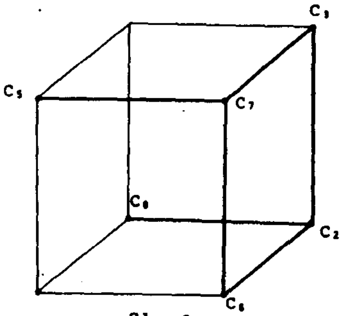
Sl. 5.

Primer 9. Sve Bulove funkcije sa tri promenljive (ima ih $2^{2^3} = 256$) možemo prikazati na "kubu" u prostoru sa tri dimenzije. Na slici 6. prikazujemo funkciju

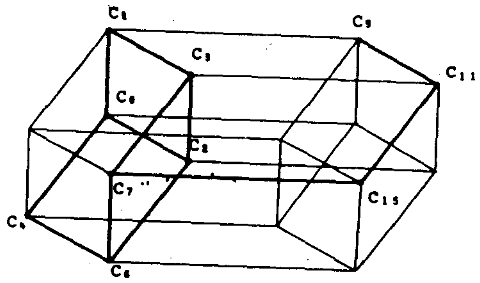
$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}y\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xyz$$

to jest,

$$f(x,y,z) = \cup(C_0, C_2, C_3, C_5, C_6, C_7).$$



Sl. 6



Sl. 7.

Primer 10. Sve Bulove funkcije sa četiri promenljive (ima ih $2^{2^4} = 65536$) možemo prikazati na "kubu" u prostoru sa četiri dimenzije. Na slici 7. prikazujemo funkciju

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \\ & \cup \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3x_4 \cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \\ & \cup x_1\bar{x}_2x_3x_4 \cup x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

to jest

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cup(C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, C_7, C_9, C_{11}, C_{15}).$$

Definicija 1. *Indeks konjunkcije* C_k, *u oznaci* $i[C_k]$ *je broj jedinica koje se javljaju u binarnom zapisu* $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ *broja* k.

Primer 11. Posmatrajmo konjunkcije $C_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$, $C_{22} = x_1\bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5$ i $C_{30} = x_1x_2x_3x_4\bar{x}_5$ na slici 4. Imamo:

$$i[C_0] = i[C_{00000}] = 0, \quad i[C_{22}] = i[C_{10110}] = 3,$$
$$i[C_{30}] = i[C_{11110}] = 4.$$

Definicija 2. Konjunkcije C_j, C_k *(vrhovi, temena "kuba") su susedne ako je:*

(a) $\left|i\left[C_j\right] - i\left[C_k\right]\right| = 1, \quad k \neq j$

(b) $|j-k| = 2^r, \quad r \subset \{0,1,\dots,n\}, \quad k \neq j$

Primer 12. Posmatrajmo konjunkcije C_1, C_2 i C_6 na slici 3. Imamo:

$$\left|i[C_1] - i[C_2]\right| = |1-1| = 0, \quad |1-2| = 1 = 2^0;$$
$$\left|i[C_1] - i[C_6]\right| = |1-2| = 1, \quad |1-6| = 5 \neq 2^r;$$
$$\left|i[C_2] - i[C_6]\right| = |1-2| = 1, \quad |2-6| = 4 = 2^2.$$

Konjunkcije C_1 i C_2 nisu susedne jer nije zadovoljen uslov (a). Konjunkcije C_1 i C_6 nisu susedne jer nije zadovoljen uslov (b). Konjunkcije C_2 i C_6 su susedne konjunkcije.

Neka je K_n^m kub koji sadrži konjunkcije kuba K_n.

Definicija 3. Kub K_n^m *dimenzije* m *zove se podkub kuba* K_n *ako za svako teme* C_{j_s} *sa kuba* K_n^m *postoji* m *temena* $C_{j_1},\dots,C_{j_m}$ *na kubu* K_n^m *koji su mu susedni, tj. ako su zadovoljeni uslovi*

$$\left|i\left[C_{j_s}\right] - i\left[C_{j_k}\right]\right| = 1, \quad s,k=1,\dots,m, \quad s \neq k$$

$$\left|j_s - j_k\right| = 2^r, \quad r \subset \{0,\dots,n\}.$$

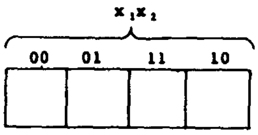
Primer 13. Posmatrajmo kub $K_3 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7\}$ na slici 2. Kub $K_3^2 = \{C_1, C_3, C_5, C_7\}$ jeste podkub kuba K_3 jer svako od temena C_1, C_3, C_5, C_7 ima dva susedna. Medjutim, temena C_1, C_3, C_6 i C_7 ne formiraju podkub K_3^2 kuba K_3, jer u ovom slučaju temena C_1 i C_6 imaju samo po jedno susedno teme, nego formiraju podkub K_3.

Ako je $m \leqslant n$ tada postoji $\binom{n}{n-m} \cdot 2^{n-m}$ podkubova dimenzije m koji se mogu formirati od temena kuba K_n.

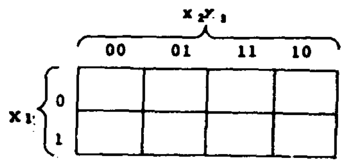
2. MATRICE VAJT-KARNAUFA

Videli smo kako se Bulova funkcija f sa n promenljivih može predstaviti pomoću „kuba" u prostoru sa n dimenzija. Sada navodimo geometrijsku reprezentaciju Bulove funkcije f pomoću matrice (tablice, karte). Nju je dao Vajt (Veitch), revidirao Karnauf (Karnaugh), a pogodna je za minimizaciju date Bulove funkcije f. Ilustrovaćemo ovu reprezentaciju za funkcije sa dve, tri, četiri i pet promenljivih.

U Vajt-Karnaufovoj matrici svaka konjunkcija $\bar{x}_1\bar{x}_2$, $\bar{x}_1x_2$, x_1x_2, $x_1\bar{x}_2$ Bulove funkcije sa dve promenljive predstavlja se pomoću jednog kvadrata (polja) na slici 8.

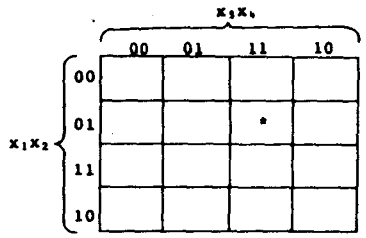


Sl. 8.

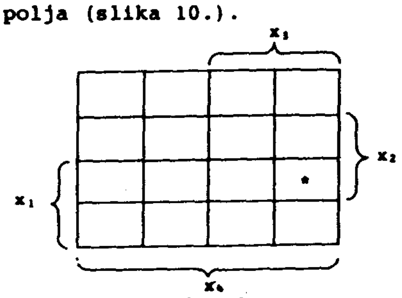


Sl. 9.

U slučaju Bulove funkcije sa tri promenljive sve konjunkcije se predstavljaju pomoću osam polja (slika 9.), a u slučaju Bulove funkcije sa četiri promenljive sve konjunkcije se predstavljaju pomoću matrice sa šesnaest polja (slika 10.).



Sl. 10.



Sl. 11.

Polje sa oznakom * na slici 10. odgovara konjunkciji $\bar{x}_1x_2 . x_3x_4$, odnosno 0111. Par cifara sa leve strane nosi naziv „vrsta-koordinata", a par cifara iznad nosi naziv „kolona-koordinata".

Vrsta koordinata odredjuje prve dve cifre, a kolona - koordinata posleduje dve cifre potpune konjunkcije pridružene polju.

Obeležavanje koordinata polja je pogodnije kako je učinjeno na slici 11.

U vrstama ili kolonama obuhvaćenim simbolom „x_i{", $(i=1,2,3,4)$, promenljiva x_i ima vrednost 1, a u vrstama ili kolonama koje nisu obuhvaćene simbolom „x_i{" promenljiva x_i ima vrednost 0. Tako, za polje obeleženo sa * na slici 11. koordinate su: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, to jest konjunkcija koja odgovara ovom polju je $x_1x_2x_3\bar{x}_4$.

Kako svakom vektoru $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \subset L_2^n$ odgovara jedna jedina konjunkcija $x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ to se polja karte mogu staviti u obostrano jednoznačnu korespondenciju sa konjunkcijama. Ova korespondencija omogućava konstrukciju karte date Bulove funkcije f: obeleži se sa 1 polje koje odgovara konjunkciji koja ima vrednost 1, to jest, koja se pojavljuje u KDNF funkcije f.

Polja u karti označena sa 1 zovemo k-polja funkcije f („k" zbog konjunkcije).

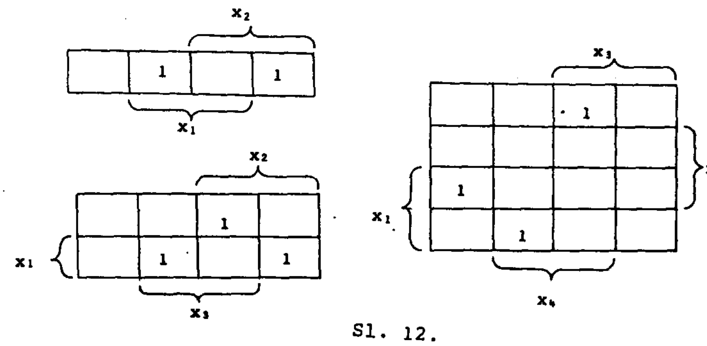
Primer 14. Za Bulove funkcije

$$f_1(x_1x_2) = x_1\bar{x}_2 \cup \bar{x}_1x_2,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1x_2x_3 \cup x_1\bar{x}_2x_3 \cup x_1x_2\bar{x}_3,$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \cup x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

Vajt-Karnaufove karte date su na slici 12.



Sl. 12.

3. PRIMENA MATRICE VAJT-KARNAUFA

Ako su vrhovi C_i, C_j susedni, onda se njihov binarni prikaz razlikuje samo na jednom mestu. Zbog svojstva $x \cup \bar{x} = 1$ ivica koja spaja susedna temena na „kubu" isključuje jednu promenljivu. Tako, ivica koja spaja vrhove C_2 i C_6 na slici 7. isključuje promenljivu x_2, jer je

$$\begin{aligned} C_2 \cup C_6 &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \\ &= \bar{x}_1x_3\bar{x}_4(x_2 \cup \bar{x}_2) \\ &= \bar{x}_1x_3\bar{x}_4. \end{aligned}$$

Ivica $\{C_2, C_6\}$ je podkub K_4^1 kuba K_4. Slično, vrhovi C_2, C_3, C_6 i C_7 na slici 7. formiraju podkub K_4^2 kuba K_4. Podkub $K_4^2 = \{C_2, C_3, C_6, C_7\}$ isključuje dve promenljive jer je

$$\begin{aligned} C_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_7 &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3x_4 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3(\bar{x}_4 \cup x_4) \cup \bar{x}_1x_2x_3(\bar{x}_4 \cup x_4) \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \cup \bar{x}_1x_2x_3 \\ &= \bar{x}_1x_3(\bar{x}_2 \cup x_2) \\ &= \bar{x}_1x_3. \end{aligned}$$

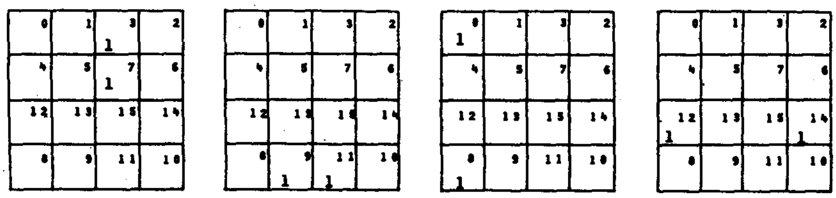
Da bismo mogli koristiti matricu Vajt-Karnaufa moramo znati da je „čitamo", odnosno moramo znati raspoznavati njene konfiguracije. Te konfiguracije se zovu „podkubovi". Objasnićemo to na primeru funkcije sa četiri promenljive, tj. na matrici sa šesnaest polja (slika 13.). Pri tome ćemo se pozvati i na „hiperkub" (slika 3.).

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Sl. 13.

Na osnovu slike 3. i slike 13. proizilazi:

Dva k-polja, na horizontali ili vertikali su „susedna" jer predstavljaju jednodimezioni podkub (slika 14.).



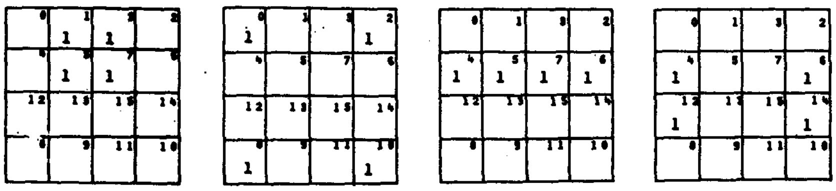
Sl. 14.

Na slici 14. predstavljeni su redom podkubovi dimenzije jedan:

$\{C_3,C_7\}$, $\{C_9,C_{11}\}$, $\{C_0,C_8\}$ i $\{C_{12},C_{14}\}$ (videti sliku 3.).

Na osnovu slike 3. i slike 13. proizilazi:

Četiri k-polja (slika 15.), svako susedno sa dva, predstavljaju dvodimenzioni podkub.



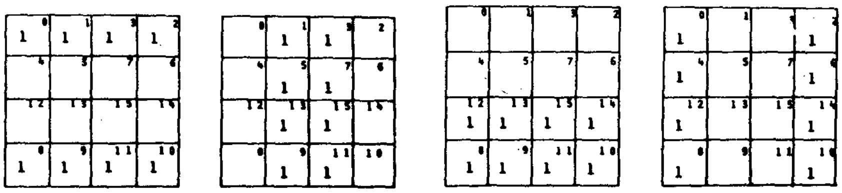
Sl. 15.

Na slici 15. predstavljeni su redom podkubovi dimenzije dva: $\{C_1,C_3,C_5,C_7\}$, $\{C_0,C_2,C_8,C_{10}\}$, $\{C_4,C_5,C_6,C_7\}$ i $\{C_4,C_6,C_{12},C_{14}\}$ (videti sliku 3.).

Osam k-polja, svako susedno sa tri, predstavljaju trodimenzioni podkub (slika 16.).

Na slici 16. predstavljeni su redom podkubovi dimenzije tri: $\{C_0,C_1,C_2,C_3,C_8,C_9,C_{10},C_{11}\}$, $\{C_1,C_3,C_5,C_7,C_9,C_{11},C_{13},C_{15}\}$, $\{C_8,C_9,C_{10},C_{11},C_{12},C_{13},C_{14},C_{15}\}$ i $\{C_0,C_2,C_4,C_6,C_8,C_{10},C_{12},C_{14}\}$

(videti sliku 3. i sliku 13.).



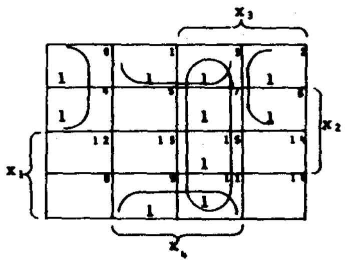
Sl. 16.

Na slikama 14., 15. i 16. prikazane su samo neke tipične konfiguracije matrice Vajt-Karnaufa za dve, tri i četiri promenljive. Posmatranjem "hiperkuba" na slici 3. i Vajt - Karnaufovih matrica na slikama 14., 15. i 16. primećujemo da, pored uobičajenog susedstva k-polja, uzimaju se za susedna i k-polja u levim i desnim, odnosno, gornjim i donjim uglovima matrice. Pri uočavanju podkubova na matrici veoma je važno da oni budu sa maksimalnom dimenzijom jer isključuju veći broj promenljivih.

Primer 15. Posmatrajmo funkciju

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cup(C_0,C_1,C_2,C_3,C_4,C_6,C_7,C_9,C_{11},C_{15})$$

Iz primera 10. (slika 7.) matrica Vajt-Karnaufa za datu funkciju je (slika 17.).



Sl. 17.

Sa slike 17. čitamo da postoji pet 2-dimenzionih podkubova: $\{C_0,C_1,C_2,C_3\}$, $\{C_0,C_2,C_4,C_6\}$, $\{C_1,C_3,C_9,C_{11}\}$, $\{C_2,C_3,C_6,C_7\}$ i $\{C_3,C_7,C_{11},C_{15}\}$. Temena C_4, C_9 i C_{15} pripadaju samo po jednom podkubu (na slici 7. vidimo da ona imaju samo po dva susedna temena; na neki način ona su izolovanija). Pri odabiranju podkubova moramo poći od onih koji sadrže ova tri temena: $\{C_0,C_4,C_2,C_6\}$, $\{C_1,C_3,C_9,C_{11}\}$ i $\{C_3,C_7,C_{11},C_{15}\}$. Sa slike 17. čitamo:

$$C_0 \cup C_2 \cup C_4 \cup C_6 = \bar{x}_1\bar{x}_4,$$

$$C_1 \cup C_3 \cup C_9 \cup C_{11} = \bar{x}_2 x_4$$

$$C_3 \cup C_7 \cup C_{11} \cup C_{15} = x_3 x_4.$$

Kako je ovim obuhvaćeno svih deset temena (svih deset k-polja na slici 17.) navedena tri podkuba su maksimalni jer u sebi sadrže dva preostala podkuba.

Dakle, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup \bar{x}_2 x_4 \cup x_3 x_4$

pa je data funkcija napisana pomoću izraza u kojem se pojavljuje šest slova i pet simbola za operacije (tri za konjunkciju i dva za disjunkciju). Faktorizacijom možemo dobijeni izraz dalje uprostiti:

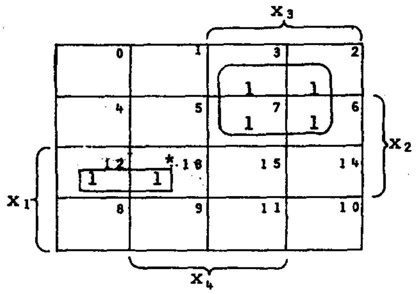
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup x_4(\bar{x}_2 \cup x_3),$$

to jest, datu funkciju napisati pomoću izraza u kojem učestvuje pet slova i četiri simbola za operacije (dva za konjunkciju i dva za disjunkciju).

Primer 16. Posmatrajmo funkciju

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cup(C_2,C_3,C_4,C_6,C_7,C_{12},C_{13})$$

na slici 18.



Sl. 18.

Teme C_{13} je najizolovanije (videti sliku 3.). Ono jedino sa temenom C_{12} čini 1-dimenzionih podkub $\{C_{12},C_{13}\}$. Temena C_2,C_3, C_6 i C_7 formiraju 2-dimenzionih podkub $\{C_2,C_3,C_6,C_7\}$. Ostaje teme C_4. Imamo dve mogućnosti: ili da uzmemo podkub $\{C_4, C_{12}\}$, ili podkub $\{C_4, C_{12}\}$. Ako uzmemo podkub $\{C_4, C_{12}\}$ imamo:

$$C_{12} \cup C_{13} = x_1 x_2 \bar{x}_3,$$

$$C_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_7 = \bar{x}_1 x_3,$$

$$C_4 \cup C_{12} = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

što daje $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \quad \bar{x}_1 x_3 \cup x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$.

Ako uzmemo podkub $\{C_4, C_6\}$ imamo:

$$C_{12} \cup C_{13} = x_1 x_2 \bar{x}_3,$$

$$C_2 \cup C_3 \cup C_6 \cup C_7 = \bar{x}_1 x_3,$$

$$C_4 \cup C_6 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4,$$

što daje $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \cup \bar{x}_1 x_3 \cup \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4$.

Ovde ne dobijamo, kao u prethodnom primeru, jedinstvenu najpovoljniju mogućnost. Imamo ih dve. Faktorizacijom dobijamo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 \cup x_2 \bar{x}_3 (x_1 \cup \bar{x}_4),$$

odnosno $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 x_3 \cup x_2 (x_1 \bar{x}_3 \cup \bar{x}_1 \bar{x}_4)$.

U prvom slučaju dobijamo izraz sa jedanaest simbola (šest za slova i pet za operacije), a u drugom slučaju dobijamo izraz za trinaest simbola (sedam za slova i šest za operacije). Dakle,

$$\bar{x}_1 x_3 \cup x_2 \bar{x}_3 (x_1 \cup \bar{x}_4)$$

je minimalni izraz kojim se može napisati data funkcija.

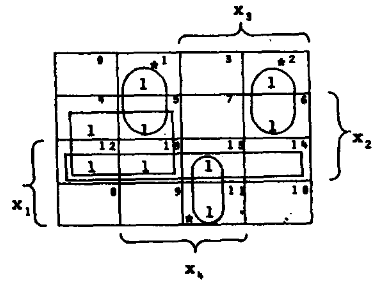
Na slici 18. zvezdicom smo obeležili blokove koje odmah moramo uzeti u obzir: blok u desnom gornjem uglu, jer daje maksimalni podkub, a blok u trećem redu, jer sadrži izolovano k-polje (teme C_{13}). Konjunkcije koje predstavljaju ove blokove su: $x_1 \bar{x}_3$ i $x_1 x_2 \bar{x}_3$. Ove konjunkcije zovu se: esencijalne konjunkcije.

Primer 17. Posmatrajmo funkciju

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \dot{\cup}(C_1, C_2, C_4, C_5, C_6, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15})$$

na figuri 19.

Temena C_1, C_2 i C_{11} su najizolovanija. Prvo njih uzimamo u razmatranje. Ona se jedino spajaju redom sa: C_5, C_6 i C_{15}. Dobi-



Sl. 19.

jamo tri 1-dimenziona podkuba: $\{C_1,C_5\}$, $\{C_2,C_6\}$, $\{C_{11},C_{15}\}$, odnosno, esencijalne konjunkcije redom $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$, $x_1x_3x_4$. Ostala k-polja se grupišu u dva dvodimenziona podkuba. Postoje tri mogućnosti: biramo podkubove kao na slici 19.

$$\{C_4,C_5,C_{12},C_{13}\}\ ;\ \{C_{12},C_{13},C_{14},C_{15}\},$$

ili

$$\{C_4,C_5,C_{12},C_{13}\}\ ;\ \{C_4,C_6,C_{12},C_{14}\},$$

ili

$$\{C_4,C_6,C_{12},C_{14}\}\ ;\ \{C_{12},C_{13},C_{14},C_{15}\},$$

to jest, imamo sledeće esencijalne konjunkcije respektivno:

$$x_2\bar{x}_3,\ \ x_1x_2 \ \text{ili}\ \ x_2\bar{x}_3,\ \ x_2\bar{x}_4\ \ \text{ili}\ \ x_2\bar{x}_4,\ x_1x_2.$$

Dakle, zajedno sa esencijalnim konjunkcijama $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4, \bar{x}_1x_3\bar{x}_4$, $x_1x_3x_4$ imamo:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\bar{x}_3 \cup x_1x_2 \cup \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \cup \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \cup x_1x_3x_4$$

ili

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\bar{x}_3 \cup x_2\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \cup \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \cup x_1x_3x_4$$

ili

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2\bar{x}_4 \cup x_1x_2 \cup \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \cup \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 \cup x_1x_3x_4.$$

Na kraju, posle faktorizacije

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2(x_1 \cup \bar{x}_3) \cup \bar{x}_1(\bar{x}_3x_4 \cup x_3\bar{x}_4) \cup x_1x_3x_4$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2(\bar{x}_3 \cup \bar{x}_4) \cup \bar{x}_1(\bar{x}_3x_4 \cup x_3\bar{x}_4) \cup x_1x_3x_4$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2(x_1 \cup \bar{x}_4) \cup \bar{x}_1(\bar{x}_3x_4 \cup x_3\bar{x}_4) \cup x_1x_3x_4$$

Navedeni primeri sugerišu sledeća pravila za dobijanje minimalnog izraza koji predstavlja funkciju:

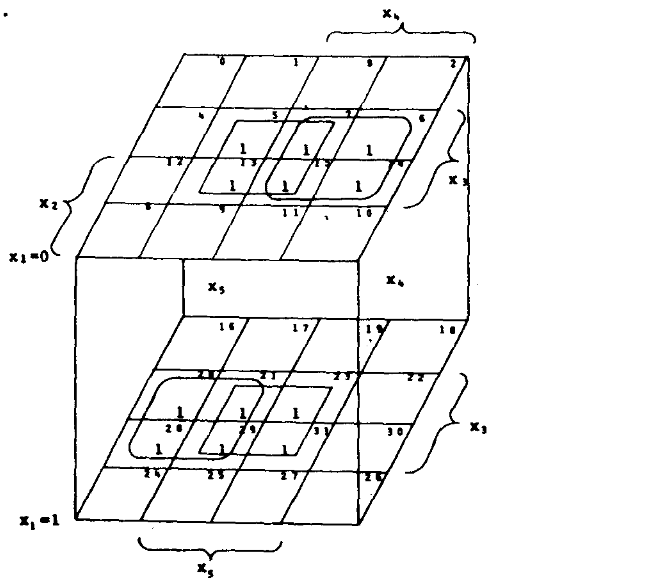
1) Treba odrediti esencijalne konjunkcije, tj.odrediti najkraće konjunkcije koje odgovaraju što je moguće većim podkubovima (blokovima),uključujući svako k-polje bar jedanput.

2) Izvršiti faktorizaciju dobijenog izraza. Medjutim, ovo i dalje ostaje veština, stvar uvežbanosti: ne postoji algoritam za dobijanje najpovoljnije faktorizacije.

Primer 18. Data je funkcija

$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \cup(C_5,C_6,C_7,C_{13},C_{14},C_{15},C_{20},C_{21},C_{23},C_{28},C_{29},C_{31})$

na slici 20.



Sl. 20.

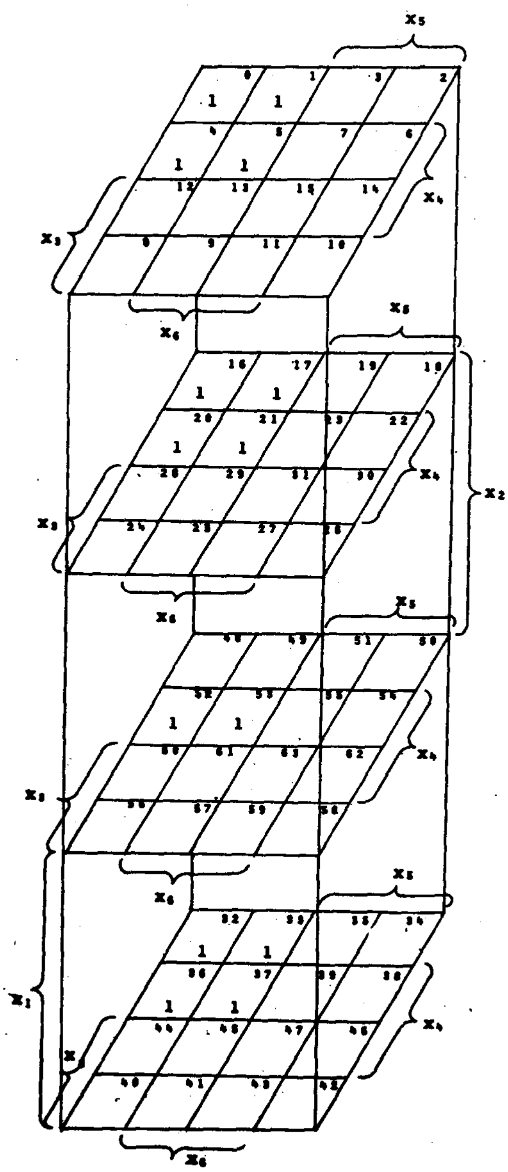
Na slici 20.raspoznajemo jedan trodimenzioni podkub $\{C_5,C_7,C_{13},C_{15},C_{21},C_{23},C_{29},C_{31}\}$ i dva dvodimenziona $\{C_6,C_7,C_{14}, C_{15}\}$, $\{C_{20},C_{21},C_{28},C_{29}\}$. Imamo dakle:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_3x_5 \cup \bar{x}_1x_3x_4 \cup x_1x_3\bar{x}_4$$
$$= x_3(x_5 \cup \bar{x}_1x_4 \cup x_1\bar{x}_4).$$

Primer 19. Data je funkcija na slici 21.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$= \cup(C_0, C_1, C_4, C_5, C_{16}, C_{17}, C_{20}, C_{21}, C_{32}, C_{33}, C_{36}, C_{37}, C_{52}, C_{53})$$



Sl. 21.

Pažljivim posmatranjem slike 21. raspoznajemo tri trodimenziona podkuba:

$\{C_0,C_1,C_4,C_5,C_{16},C_{17},C_{20},C_{21}\}$, $\{C_0,C_1,C_4,C_5,C_{32},C_{33},C_{36},C_{37}\}$,

$\{C_4,C_5,C_{20},C_{21},C_{36},C_{37},C_{52},C_{53}\}$.

To su podkubovi maksimalne dimenzije i u ovom slučaju isključuju tri promenljive. Imamo, dakle,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_5 \cup \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5 \cup \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$$
$$= \bar{x}_3\bar{x}_5(\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup x_4).$$

4. PROSTE IMPLIKACIJE

Definicija 4. *Bulova funkcija* g *implicira Bulovu funkciju* f *(u notaciji* $g \leqslant f$*) ako i samo ako funkcija* f *uzima vrednost* 1 *za svaki vektor* $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L_2^n$ *za koji i funkcija* g *ima vrednost* 1.

Dakle, Bulova funkcija g implicira Bulovu funkciju f ako i samo ako je za svaki vektor $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L_2^n$, $g \leqslant f$, tj. $g \cup f = f$. (Glava I, definicija 2.)

Primer 20. Date su Bulove funkcije g_1, g_2 i f tabelom 1.

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	f
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

Tabela 1.

Funkcija g_1 implicira funkciju f, a funkcija g_2 ne implicira funkciju f.

Funkcija g koja implicira funkciju f zove se implikanta.

Neka je $S = \{g_1,\dots,g_m\}$ skup (sistem) implikanata za funkciju f, to jest, $g_i \cup f = f$, $i \in \{1,\dots,m\}$.

Definicija 5. *Sistem* S *je potpun ako za svaki vektor* $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in L_2^n$ *za koji funkcija* f *uzima vrednost* 1 *postoji bar jedna implikanta sistema* S *koja uzima vrednost* 1.

Dakle, sistem $S = \{g_1,\dots,g_m\}$ je potpun akko je $f = \bigcup_{i=1}^{m} g_i$.

Primer 21. Date su Bulove funkcije g_1, g_2, g_3 i f tabelom 2.

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	f
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Tabela 2.

Funkcije g_1, g_2 i g_3 su implikante funkcije f. Skup implikanata $\{g_1,g_2,g_3\}$ je potpun, to jest $f = \bigcup_{i=1}^{3} g_i$.

Primer 22. Date su funkcije g_1, g_2, g_3, g_4 i f u tabeli 3.

x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	g_4	f
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

Tabela 3.

Funkcije g_1,g_2,g_3 i g_4 impliciraju funkciju f. Medjutim, skup implikanata $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ nije potpun jer $f(0,1,0)=1$, a $g_1(0,1,0) = g_2(0,1,0) = g_3(0,1,0) = g_4(0,1,0) = 0$, to jest, $f \neq g_1 \cup g_2 \cup g_3 \cup g_4$.

Definicija 6. *Konjunkcija* C *je prosta implikanta funkcije* f *ako i samo ako* C *implicira* f *i ni jedna konjunkcija uključena u* C *ne implicira* f.

Primer 23. U primeru 22. konjunkcija $C=x_1\bar{x}_2x_3$ nije prosta implikanta funkcije f jer sadrži konjunkciju

$$C'=g_3(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2x_3\cup x_1x_2x_3=x_1x_3,$$

koja implicira funkciju f.

Možemo kazati i ovako: konjunkcija C jeste prosta implikanta funkcije f ako implicira funkciju f, a svaka druga konjunkcija, dobijena iz C eliminacijom slova, ne implicira funkciju f.

Teorema 1. *Sistem svih prostih implikanti funkcije jeste potpun.*

Dokaz. Neka je za vektor $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$. Tada je konjunkcija $C=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ očigleno implikanta funkcije f. Ako konjunkcija $C=x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ ne bi bila prosta implikanta funkcije f, tada je njen deo C' prosta implikanta funkcije f. Ako C' nije prosta implikanta funkcije f, tada je njen deo C'' prosta implikanta funkcije f. Nastavljajući ovako dolazimo do konjunkcije C^p koja je prosta implikanta funkcije f. Konjunkcija C^p ima vrednost 1 za vektor $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Dakle, za svaki vektor $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, gde je $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$, postoji bar jedna prosta implikanta C^p koja ima vrednost 1.

Po definiciji 5. sistem S prostih implikanti jeste potpun.

Neka je ϕ disjunktivna normalna forma (DNF) funkcija f i S_ϕ broj slova u ϕ, a C_ϕ broj konjunkcija u ϕ.

Definicija 7. KDNF ϕ_1 *funkcije* f *je prostija od* DNF ϕ_2 *funkcije* f *ako i jedino ako je*

$$S_{\phi_1}\leqslant S_{\phi_2} \text{ i } C_{\phi_1}\leqslant C_{\phi_2}.$$

Primer 24. Posmatrajmo DNF ϕ_1 i ϕ_2 funkcije $f : L_2^4 \to L_2$:

$$\phi_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \cup x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4,$$

$$\phi_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \cup x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4.$$

Imamo:

$$S_{\phi_1} = 12, \quad C_{\phi_1} = 3, \quad S_{\phi_2} = 7, \quad C_{\phi_2} = 2.$$

Dakle, DNF ϕ_2 je prostija od DNF ϕ_1.

Definicija 8. *DNF Φ je minimalna DNF funkcije f ako i samo ako je ϕ ekvivalentna sa f i ni jedna DNF prostija od f nije ekvivalentna sa f.*

Teorema 2. *Bilo koja minimalna DNF ϕ funkcije f je disjunkcija prostih implikanata funkcije f.*

Dokaz. Neka je ϕ minimalna DNF i

(1) $\phi = C \cup H$,

gde je C neka konjunkcija iz ϕ, a H disjunkcija svih ostalih članova iz ϕ. Očigledno je da je konjunkcija C implikanta za ϕ i za f. Ukoliko C ne bi bila prosta implikanta funkcije f onda postoji konjunkcija C_1 (C_1 je deo od C) koja je implikanta za ϕ i f. Iz (1) imamo

(2) $C_1 \cup \phi = C_1 \cup C \cup H$.

Kako je $C_1 \leqslant \phi$ i $C \leqslant C_1$ imamo

(3) $\phi = C_1 \cup H$.

Dakle, $\phi = C \cup H$ nije minimalna DNF funkcije f, što je kontradikcija; izlazi da konjunkcija C mora biti prosta implikanta funkcije f. S obzirom na proizvoljan izbor konjunkcije C izlazi da je minimalna DNF funkcije f disjunkcija nekog skupa S njenih prostih implikanti.

Ova teorema je osnova algoritma za minimizaciju Bulove funkcije f. Algoritam se sastoji iz dve faze:

Prva, nalazimo proste implikante funkcije f,

Druga, nalazimo minimalnu DNF funkcije f.

Napomenimo da teorema ne dokazuje da je minimalna DNF funkcije f unija svih prostih implikanata funkcije f; ostaje da se odredi koje proste implikante obrazuju minimalnu DNF funkcije f. Da bi se to odredilo, treba funkciju f napisati u KDNF, odrediti sve konjunkcije koje impliciraju f, a zatim izdvojiti proste implikante koje obrazuju minimalnu DNF funkcije f. Ovaj zadatak rešava metoda Kvajna i Mak Klaskog.

5. METODA KVAJN-MAK KLASKI

Kvajnova metoda za traženje prostih implikanti funkcije f se sastoji u uporedjivanju svih konjunkcija DNF funkcije f. Cilj je da se smanji broj slova DNF funkcije f korišćenjem identiteta

(J) $XY \cup X\bar{Y} = X.$

Upoznaćemo se pomenutom metodom postupno.

Primer 25. Razmotrimo funkciju

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$$
$$\cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \cup x_1x_2\bar{x}_3x_4 \cup x_1x_2x_3x_4$$
$$= C_0 \cup C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{13} \cup C_{15}.$$

Osam kanonskih elementarnih konjunkcija funkcije f dato je u levoj koloni sledeće tablice.

$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_1\ \bar{x}_4$
$\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ x_3\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_1\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4$ ✓	
$\bar{x}_1\ x_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4$	
$\bar{x}_1\ x_2\ x_3\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_1\ x_3\ \bar{x}_4$ ✓	
$x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ \bar{x}_4$ ✓	$\bar{x}_1\ x_2\ \bar{x}_4$ ✓	
$x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3\ x_4$ ✓	$x_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3$	
$x_1\ x_2\ \bar{x}_3\ x_4$ ✓	$x_1\ \bar{x}_3\ x_4$	
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ ✓	$x_1\ x_2\ x_4$	

Posmatrajmo prvu konjunkciju $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ u prvoj koloni tablice i uporedimo je redom sa svim konjunkcijama ispod nje. Na konjunkciju $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ i konjunkcije $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ možemo primeniti identitet (J), što daje prvu, drugu i treću konjunkciju u drugoj koloni. Konjunkcije $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ i $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ na koje primenjujemo identitet (J) markiramo znakom ✓.

Posmatrajmo sada drugu konjunkciju $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ u prvoj koloni tablice i uporedimo je redom sa svim konjunkcijama ispod nje. Na konjunkcije $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ i $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ možemo primeniti identitet (J), što daje četvrtu konjunkciju u drugoj koloni.

Nastavljajući proces uporedjivanja konjunkcija u prvoj koloni dobijamo drugu kolonu. Sada konjunkcije druge kolone uporedjujemo na isti način i dobijamo treću kolonu tablice.

Primetimo da su neke konjunkcije u drugoj koloni ostale nemarkirane jer nisu korišćene za dobijanje kraćih konjunkcija. Primetimo, takodje, da se neke od kraćih konjunkcija mogu dobiti u više navrata (konjunkcija $\bar{x}_1\bar{x}_4$ u trećoj koloni dobija se uporedjivanjem konjunkcija $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ i $\bar{x}_1x_2\bar{x}_4$ ali i uporedjivanjem konjunkcija $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$ i $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ iz druge kolone), a uzimaju se samo jedanput.

Posmatrajmo sada nemarkirane konjunkcije u tablici. Po načinu kako su dobijene, izlazi da njihova unija sadrži svih osam kanonskih elementarnih konjunkcija; dakle, unija nemarkiranih konjunkcija je ekvivalentna sa funkcijom f. Šta više, nemarkirane konjunkcije su proste implikante funkcije f pošto svaka implicira f i ne sadrži kraću konjunkciju koja implicira f. Medjutim, po teoremi 2. minimalna DNF funkcije f ne mora biti unija svih prostih implikanata već treba odrediti koje proste implikante formiraju minimalnu DNF funkcije f. Pogledajmo sledeću tablicu:

	C_0	C_2	C_4	C_6	C_8	C_9	C_{13}	C_{15}
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	*				*			
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$					*	*		
$x_1\bar{x}_3x_4$						*	*	
$x_1x_2x_4$							*	●
$\bar{x}_1\bar{x}_4$	*	●	●	●				

U kolone su unešene kanonske elementarne konjunkcije, a u redove proste implikante. U preseku kanonske elementarne konjunkcije i proste implikante koja je sadrži unešen je znak *. U svakoj koloni mora da se nalazi bar jedan znak * jer odgovarajuću kanonsku elementarnu konjunkciju pokriva bar jedna prosta implikanta. Ako se u nekoj koloni nalazi samo jedan znak *, odgovarajuća implikanta se zove esencijalna prosta implikanta u notaciji ●. U drugoj, trećoj, četvrtoj i osmoj koloni nalazi se samo po jedan znak ●, pa su odgovarajuće proste implikante $x_1x_2x_4$ i $\bar{x}_1\bar{x}_4$ esencijalne. One svakako moraju biti u minimalnoj DNF funkcije f, pa nam ostaje da odredimo koje od preostale tri proste implikante ulaze u minimalnu DNF funkcije f. Kako esencijalne proste implikante $x_1x_2x_4$ i $\bar{x}_1\bar{x}_4$ pokrivaju prvu, drugu, treću, četvrtu, sedmu i osmu kanonsku elementarnu konjunkciju, očigledno je da u minimalnu DNF funkcije f mora biti uključena prosta implikanta $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, jer ona pokriva petu i šestu kanonsku elementarnu konjunkciju funkcije f. Dakle,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup x_1x_2x_4 \cup x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

ili, posle faktorizacije

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup x_1(x_2x_4 \cup \bar{x}_2\bar{x}_3).$$

Modifikacija metode Kvajna, koju je dao Mak Klaski, takodje se sastoji u uporedjivanju svih konjunkcija DNF funkcije f, s ciljem da se koristi identitet $XY \cup X\bar{Y} = X$ ali je broj uporedjivanja manji jer se konjunkcije daju u binarnom zapisu. Identitet $XY \cup X\bar{Y} = X$ može se primeniti samo na susedne konjunkcije.

Teorema 3. *Na konjunkcije* C_j *i* C_k *može se primeniti identitet* $XY \cup X\bar{Y} = X$ *ako i samo ako je*

$$|i[C_j] - i[C_k]| = 1 \quad i \quad |j-k| = 2^r, \quad r \in \{0,1,\dots,n\}.$$

Dokaz. Pretpostavimo, prvo, da se na konjunkcije C_j i C_k može primeniti identitet $XY \cup X\bar{Y} = X$, to jest da je

$$C_j = x_1^{\alpha_1} \dots x_{s-1}^{\alpha_{s-1}} x_s^1 x_{s+1}^{\beta_1} \dots x_{s+r}^{\beta_r},$$

$$C_k = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{s-1}^{\alpha_{s-1}} x_s^0 x_{s+1}^{\beta_1} \ldots x_{s+r}^{\beta_r},$$

gde je $s+r=n$. Tada imamo:

$$j = \alpha_1 \cdot 2^{r+s-1} + \ldots + \alpha_{s-1} \cdot 2^{r+1} + 1 \cdot 2^r + \beta_1 \cdot 2^{r-1} + \ldots + \beta_r \cdot 2^0$$

$$k = \alpha_1 \cdot 2^{r+s-1} + \ldots + \alpha_{s-1} \cdot 2^{r+1} + 0 \cdot 2^r + \beta_1 \cdot 2^{r-1} + \ldots + \beta_r \cdot 2^0,$$

odakle sledi da je

$$|i[C_j] - i[C_k]| = 1 \quad i \quad |j-k| = 2^r.$$

Pretpostavimo onda da je

$$|i[C_j] - i[C_k]| = 1 \quad i \quad |j-k| = 2^r, \; r \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Ovo je moguće samo ako je

$$j = \alpha_1 \ldots \alpha_{s-1} 1 \beta_{s+1} \ldots \beta_r \quad i \quad k = \alpha_1 \ldots \alpha_{s-1} 0 \beta_1 \ldots \beta_r,$$

to jest, ako se j i k u binarnom zapisu razlikuju na s-tom mestu. Odavde sledi da se na konjunkcije C_j i C_k može primeniti identitet $XY \cup X\bar{Y} = X$.

Postupak dobijanja prostih implikanti funkcije f sastoji se iz sledećih koraka:

0. Funkcija f napiše se u KDNF.

1. Konjunkcije KDNF funkcije f napišu se u binarnom obliku.

2. Konjunkcije KDNF funkcije f svrstavaju se u grupe; konjunkcije sa istim indeksom formiraju jednu grupu.

3. Konjunkcije se pišu u koloni, po rastućim indeksima.

4. Sve konjunkcije sa indeksom m uporedjuju se sa svim konjunkcijama sa indeksom $m+1$.

5. Konjunkcije, na koje se primenjuje identitet (J), markiraju se znakom $\checkmark$.

6. Ako se spajanjem dve konjunkcije eliminiše promenljiva x_s, tada se u binarnom zapisu dobijene, kraće konjunkcije, na

s-tom mestu stavi crta, to jest, $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{s-1}-\alpha_{s+1}\ldots\alpha_n$.

7. Dobijene kraće konjunkcije ponovo se svrstavaju u grupe i pišu u kolonu po rastućim indeksima; na njih se primenjuje ista procedura. Pri tom se identitet (J) može primeniti samo na konjunkcije koje u binarnom zapisu na istoj poziciji imaju crtu.

8. Navedeni proces ponavlja se sve dok ima konjunkcija na koje se može primeniti identitet (J).

9. Nemarkirane konjunkcije su proste implikante funkcije f.

Primer 26. Posmatrajmo funkciju

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \cup(C_0,C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_9,C_{11},C_{15})$$

iz primera 10 i primera 15 (slika 7. i slika 17.) i primenimo opisani metod za traženje prostih implikanti i minimalne DNF. Imamo:

C_0	0000 ✓
C_1	0001 ✓
C_2	0010 ✓
C_4	0100 ✓
C_3	0011 ✓
C_6	0110 ✓
C_9	1001 ✓
C_7	0111 ✓
C_{11}	1011 ✓
C_{15}	1111 ✓

C_0,C_1	000- ✓
C_0,C_2	00-0 ✓
C_0,C_4	0-00 ✓
C_1,C_3	00-1 ✓
C_1,C_9	-001 ✓
C_2,C_3	001- ✓
C_2,C_6	0-10 ✓
C_4,C_6	01-0 ✓
C_3,C_7	0-11 ✓
C_3,C_{11}	-011 ✓
C_6,C_7	011- ✓
C_9,C_{11}	10-1 ✓
C_7,C_{15}	-111 ✓
C_{11},C_{15}	1-11 ✓

C_0,C_1,C_2,C_3	00--
C_0,C_2,C_4,C_6	0--0
C_1,C_3,C_9,C_{11}	-0-1
C_2,C_3,C_6,C_7	0-1-
C_3,C_7,C_{11},C_{15}	--11

Proces se završava pošto se na konjunkcije prve i druge, odnosno druge i treće grupe u trećoj koloni ne može dalje primeniti identitet (J) jer nisu zadovoljeni uslovi teoreme 3. Proste implikante su:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2,\quad \bar{x}_1\bar{x}_4,\quad \bar{x}_2x_4,\quad \bar{x}_1x_3,\quad x_3x_4.$$

Sada ćemo odrediti koje od dobijenih prostih implikanata formiraju minimalnu DNF funkcije f.

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_6	C_7	C_9	C_{11}	C_{15}
C_0,C_1,C_2,C_3	*	*	*	*						
C_0,C_2,C_4,C_6	*		*		●	*				
C_1',C_3,C_9,C_{11}		*		*				●	*	
C_2,C_3,C_6,C_7			*	*		*	*			
C_3,C_7,C_{11},C_{15}				*			*		*	●

Iz tablice čitamo da su esencijalne proste implikante: $\bar{x}_1\bar{x}_4$, $\bar{x}_2x_4$ i x_3x_4. Kako njihova unija pokriva sve kolone, dakle sve elementarne kanonske konjunkcije njihova unija je i minimalna DNF funkcije f. Dakle,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup \bar{x}_2x_4 \cup x_3x_4$$

ili, posle faktorizacije

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_4 \cup (\bar{x}_2 \cup x_3)x_4.$$

ZADACI

Zadatak 1.

Minimizirati Bulove funkcije

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \cup \bar{x}y\bar{z} \cup \bar{x}yz \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xyz,$$

$$g(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} \cup x\bar{y}\bar{z} \cup x\bar{y}z \cup xy\bar{z} \cup xyz,$$

$$h(x,y,z) = \bar{x} \cup xy\bar{z} \cup xyz.$$

Rešenje: $f(x,y,z) = x \cup y \cup \bar{z}$, $g(x,y,z) = x \cup \bar{y}$, $h(x,y,z) = \bar{x} \cup y$.

Zadatak 2.

Minimizirati Bulove funkcije

$$f(x,y,z,v) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}v \cup \bar{x}\bar{y}z\bar{v} \cup \bar{x}\bar{y}zv \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \cup \bar{x}y\bar{z}v \cup \bar{x}yz\bar{v}$$
$$\cup\, \bar{x}yzv \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{v} \cup x\bar{y}\bar{z}v \cup x\bar{y}z\bar{v} \cup x\bar{y}zv \cup xy\bar{z}\bar{v}$$

$$\cup\, xy\bar{z}v \cup xyz\bar{v} \cup xyzv,$$

$$g(x,y,z,v) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{v} \cup \bar{x}\bar{y}\bar{z}v \cup \bar{x}\bar{y}z\bar{v} \cup \bar{x}\bar{y}zv \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \cup \bar{x}y\bar{z}v$$

$$\cup\, \bar{x}yz\bar{v} \cup \bar{x}yzv \cup x\bar{y}\bar{z}\bar{v} \cup x\bar{y}\bar{z}v \cup x\bar{y}z\bar{v} \cup x\bar{y}zv,$$

$$h(x,y,z,v) = \bar{x}\bar{y}z\bar{v} \cup \bar{x}\bar{y}zv \cup \bar{x}y\bar{z}\bar{v} \cup \bar{x}y\bar{z}v \cup \bar{x}yz\bar{v} \cup \bar{x}yzv$$

$$\cup\, x\bar{y}z\bar{v} \cup x\bar{y}zv \cup xy\bar{z}\bar{v} \cup xy\bar{z}v \cup xyz\bar{v} \cup xyzv.$$

Rešenje: $f(x,y,z,v)=x\cup y\cup z\cup v$, $g(x,y,z,v)=x\cup\bar{y}$,

$h(x,y,z,v)=y\cup z$.

GLAVA VI

FUNKCIJE LUKAŠIJEVIĆA I ŠEFERA

Ranije smo (glava III) naveli da se svaka Bulova funkcija može napisati pomoću Bulovog izraza u kojem učestvuju promenljive i operacije „$\cup$", „$\cdot$", i „$-$", to jest u kanonskoj disjunktivnoj normalnoj formi, odnosno, u kanonskoj konjunktivnoj normalnoj formi.

U ovoj glavi razmatraju se specijalna preslikavanja skupa L_2^n u skupu L_2, koja se zovu funkcije Lukašijevića i Šefera (videti [36], [52]) i dokazuje se da se svaka Bulova funkcija može predstaviti pomoću ovih funkcija. U glavi X data je jedna primena funkcija Lukašijevića i Šefera.

1. DEFINICIJA FUNKCIJA LUKAŠIJEVIĆA I ŠEFERA

Definicija 1. *Bulovu funkciju*

$$(1)\qquad f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } x_1=\ldots=x_n = 0 \\ 0, & \textit{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

zovemo funkcija Lukašijevića (funkcija NILI*).*

Umesto $f(x_1,\ldots,x_n)$ često pišemo $x_1 \top x_2 \top \cdots \top x_n$ ili $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Definicija 2. *Bulovu funkciju*

$$(2)\qquad f(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } x_1=\ldots=x_n = 1 \\ 1, & \textit{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

zovemo funkcija Šefera (funkcija NI*).*

Umesto $f(x_1,\dots,x_n)$ često pišemo $x_1 \perp x_2 \perp \dots \perp x_n$ ili $\underset{i=1}{\overset{n}{\perp}} x_i$.

Primer 1. Tablice funkcija Lukašijevića i Šefera za dve promenljive x_1, x_2 su:

x_1	x_2	$x_1 \top x_2$	$x_1 \perp x_2$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Primer 2. Tablice funkcija Lukašijevića i Šefera za tri promenljive x_1, x_2, x_3 su:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \top x_2 \top x_3$	$x_1 \perp x_2 \perp x_1$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Ako su x,y elementi skupa $\{0,1\}$, a „$\cup$", „$\cdot$", „$-$" operacije disjunkcija, konjunkcija i negacija u Bulovoj algebri $(L_2, \cup, \cdot, -)$, neposredno se dokazuju sledeće veze izmedju operacija „$\top$", „ " i operacija „$\cup$", „$\cdot$", „$-$":

V_1 (i) $x \top y = \overline{x \cup y}$ (ii) $x \perp y = \overline{x \cdot y}$

V_2 (i) $x \top x = \bar{x}$ (ii) $x \perp x = \bar{x}$

V_3 (i) $(x \top y) \top (x \top y) = x \cup y$ (ii) $(x \perp y) \perp (x \perp y) = x \cdot y$

V_4 (i) $(x \top x) \top (y \top y) = x \cdot y$ (ii) $(x \perp x) \perp (y \perp y) = x \cup y$

V_5 (i) $\underset{i=1}{\overset{n}{\top}} x_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ (ii) $\underset{i=1}{\overset{n}{\perp}} x_i = \overline{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i$.

Pre nego predjemo na dokaz navedenih veza uočimo sledeće: iz definicije 1. i definicije 2. vidimo da su funkcije Lukašijevića i Šefera dualne, jer na osnovu principa dualnosti u Bulovoj algebri $(L_2, \cup, \cdot, -)$ 1 i 0 se medjusobno zamenjuju. Prema ovom veze V_k(i) i V_k(ii), gde je $k=1,2,3,4,5$, su dualne.

Definicija 3. (proširena definicija dualnosti). Ako se u nekoj teoremi (T) *pojavljuju simboli* $\cup$, $\cdot$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\top$, $\perp$, 1, 0 *dualna teorema* (T*) *izvodi se tako što medjusobno menjaju mesta:* $\cup$ *i* $\cdot$, $\leqslant$ *i* $\geqslant$, $\top$ *i* $\perp$, 1 *i* 0.

Dokaz veze V_1

(i) $x \top y = \bar{x} \cdot \bar{y}$ (teorema o KDNF, tab. 1.)

$= \overline{x \cup y}$ (zakon de Morgana).

Veza V_1(ii) dobija se medjusobnom zamenom simbola $\top$, i $\perp$ odnosno $\cdot$ i $\cup$.

Dokaz veze V_2

(ii) $x \perp x = \overline{x \cdot x}$ (veza V_1(ii))

$= \bar{x}$ (svojstvo $a \cdot a = a$).

Veza V_2(i) dobija se medjusobnom zamenom simbola $\perp$ i $\top$ odnosno $\cup$ i

Dokaz veze V_3

(i) $(x \top y) \top (x \top y) = (\overline{x \cup y}) \top (\overline{x \cup y})$ (veza V_1(i))

$= \overline{\overline{x \cup y}}$ (veza V_2(i))

$= x \cup y$ (svojstvo $\bar{\bar{a}} = a$).

Veza V_3(ii) dobija se medjusobnom zamenom simbola $\top$ i $\perp$ odnosno $\cup$ i $\cdot$

Dokaz veze V_4

(ii) $(x \perp x) \perp (y \perp y) = \bar{x} \perp \bar{y}$ (veza V_2(ii))

$= \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$ (veza V_1(ii))

$= \bar{\bar{x}} \cup \bar{\bar{y}}$ (zakon de Morgana)

$= x \cup y$ (svojstvo $\bar{\bar{a}} = a$).

Veza V_4(i) dobija se medjusobnom zamenom simbola $\perp$ i $\top$ odnosno $\cup$ i $\cdot$

Dokaz veze V_5

(i) Po definiciji disjunkcije imamo

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x_1=\ldots=x_n = 0 \\ 1, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

odakle sledi

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}} x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_1=\ldots=x_n = 0 \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Kako je po definiciji 1.

$$\mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_1=\ldots x_n = 0 \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

sledi da je $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} x_i$.

Slično se dokazuje V_5(ii).

2. NEKA SVOJSTVA FUNKCIJA LUKAŠIJEVIĆA I ŠEFERA

S_1 (i) $x \top y = y \top x$ (ii) $x \perp y = y \perp x$

S_2 (i) $x \top 0 = \bar{x}$ (ii) $x \perp 1 = \bar{x}$

S_3 (i) $x \top 1 = 0$ (ii) $x \perp 0 = 1$

S_4 (i) $x \top (x \top y) = x \top \bar{y}$ (ii) $x \perp (x \perp y) = x \perp \bar{y}$

S_5 (i) $(x \top y) \top (x \top z) = \overline{x \top (\bar{y} \top \bar{z})}$ (ii) $(x \perp y) \perp (x \perp z) = \overline{x \perp (\bar{y} \perp \bar{z})}$

S_6 (i) $\overline{x \top y} \top z = y \top (\overline{x \top z})$ (ii) $\overline{x \perp y} \perp z = y \perp (\overline{x \perp z})$

S_7 (i) $x \top \bar{x} = 0$ (ii) $x \perp \bar{x} = 1$

S_8 (i) $\overline{\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n}} x_i = \mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ (ii) $\overline{\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n}} x_i = \mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i$

S_9 (i) $\overline{\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n}} \bar{x}_i = \mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i$ (ii) $\overline{\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n}} \bar{x}_i = \mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i$.

Svojstva S_1, S_2, S_3 i S_7 neposredno se verifikuju. Dokazaćemo svojstva S_4, S_5, S_6, S_8 i S_9.

Dokaz svojstva S_4(i)

$$
\begin{aligned}
x \top (x \top y) &= x \top (\overline{x \cup y}) && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= \overline{x \cup (\overline{x \cup y})} && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= \bar{x} \cdot (x \cup y) && \text{(zakon de Morgana)} \\
&= \bar{x} \cdot x \cup \bar{x} \cdot y && \text{(zakon distributivnosti)} \\
&= \bar{x} \cdot y && \text{(svojstvo } \bar{a} \cdot a = 0\text{)} \\
&= \overline{x \cup \bar{y}} && \text{(zakon de Morgana)} \\
&= x \top \bar{y} && \text{(veza } V_1\text{(i))}.
\end{aligned}
$$

Primenom principa dualnosti dokazuje se svojstvo S_4(ii).

Dokaz svojstva S_5(ii)

$$
\begin{aligned}
(x \perp y) \perp (x \perp z) &= \overline{(\overline{x \cdot y}) \cdot (\overline{x \cdot z})} && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= x \cdot y \cup x \cdot z && \text{(zakon de Morgana)} \\
&= x (y \cup z) && \text{(zakon distributivnosti)} \\
&= \overline{x \perp (y \cup z)} && \text{(veza } V_1\text{(ii))} \\
&= \overline{x \perp (\overline{\bar{y} \cdot \bar{z}})} && \text{(zakon de Morgana)} \\
&= \overline{x \perp (\bar{y} \perp \bar{z})} && \text{(veza } V_1\text{(ii))}.
\end{aligned}
$$

Primenom principa dualnosti lako se dokazuje svojstvo S_5(i).

Dokaz svojstva S_6(i)

$$
\begin{aligned}
\overline{x \top y} \top z &= (x \cup y) \top z && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= (y \cup x) \top z && \text{(zakon komutativnosti)} \\
&= \overline{(y \cup x) \cup z} && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= \overline{y \cup (x \cup z)} && \text{(zakon asocijativnosti)} \\
&= y \top (x \cup z) && \text{(veza } V_1\text{(i))} \\
&= y \top (\overline{x \top z}) && \text{(veza } V_1\text{(i))}
\end{aligned}
$$

Primenom principa dualnosti lako se dokazuje svojstvo S_6(ii).

Dokaz svojstva S_8(ii)

$$
\overline{(\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} x_i)} = \overline{(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i)} \qquad \text{(veza } V_5\text{(ii))}
$$

$$= \mathop{\top}_{i=1}^{n} \bar{x}_i \qquad \text{(veza } V_5\text{(i))}.$$

Svojstvo S_8(i) dokazuje se primenom principa dualnosti.

Slično se dokazuje svojstvo S_9.

Teorema 1. *Za ma koju Bulovu funkciju* $f : L_2^n \to L_2$ *važe jednakosti*

$$\text{(i)} \quad f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\top}_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \top x_1^{\bar{\alpha}_1} \top \dots \top x_n^{\bar{\alpha}_n}),$$

odnosno,

$$\text{(ii)} \quad f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\perp}_{\alpha \in L^n} (f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \perp x_1^{\alpha_1} \perp \dots \perp x_n^{\alpha_n}).$$

Dokaz.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \prod_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i} \qquad \text{(teorema o KKNF)}$$

$$= \overline{\overline{\prod_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i})}} \qquad (\text{svojstvo } a = \bar{\bar{a}})$$

$$= \mathop{\top}_{\alpha \in L_2^n} \overline{(f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i})} \qquad \Big(\text{veza } \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

$$= \mathop{\top}_{\alpha \in L_2^n} (\bar{f}(\alpha) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\bar{\alpha}}_i}) \qquad \Big(\text{veza } \overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i\Big)$$

$$= \mathop{\top}_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \top \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i}) \qquad \Big(\text{veza } \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha) x^{\alpha} \qquad \text{(teorema o KDNF)}$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha) x^{\alpha}}} \qquad (\text{svojstva } \bar{\bar{a}} = a)$$

$$= \mathop{\perp}_{\alpha \in L_2^n} \overline{f(\alpha)x^{\alpha}} \qquad \text{(veza } \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i\text{)}$$

$$= \mathop{\perp}_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}) \qquad \text{(veza } \overline{\bigsqcap_{i=1}^{n} x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i\text{)}$$

$$= \mathop{\perp}_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \perp \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}) \qquad \text{(veza } \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i\text{)}$$

Teorema 2. Za ma koju Bulovu funkciju $f : L_2^n \to L_2$ *važe jednakosti*

$$\text{(i)} \quad f(x_1,\dots,x_n) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \top x_1^{\alpha_1} \top \dots \top x_n^{\alpha_n}),$$

odnosno,

$$\text{(ii)} \quad f(x_1,\dots,x_n) = \bigsqcap_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \perp x^{\alpha_1} \perp \dots \perp x_n^{\alpha_n}).$$

Dokaz.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha)x^{\alpha} \qquad \text{(teorema o KDNF)}$$

$$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} (\bar{f}(\alpha) \top \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i}) \qquad \text{(veza } \bigsqcap_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i\text{)}$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \bigsqcap_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i}) \qquad \text{(teorema o KKNF)}$$

$$= \bigsqcap_{\alpha \in L_2^n} (\bar{f}(\alpha) \perp \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}) \qquad \text{(veza } \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i\text{)}.$$

Teorema 3. Za ma koju Bulovu funkciju $f : L_2^n \to L_2$ *važe jednakosti*

$$\text{(i)} \quad f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\perp}_{\alpha \in L_2^n} (\bar{f}(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \cup x_1^{\bar{\alpha}_1} \cup \dots \cup x_n^{\bar{\alpha}_n}),$$

odnosno,

(ii) $f(x_1,\dots,x_n) = \top_{\alpha \in L_2^n} (\bar{f}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n})$.

Dokaz.

(i) $f(x) = \bigcup_{\alpha \in L_2^n} f(\alpha)x^{\alpha}$ (teorema o KDNF)

$= \bigcup_{\alpha \in L_2^n} \overline{\overline{f(\alpha)x^{\alpha}}}$ (svojstvo $a = \bar{\bar{a}}$)

$= \bot_{\alpha \in L_2^n} \overline{f(\alpha)x^{\alpha}}$ (veza $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \bot_{i=1}^{n} x_i$)

$= \bot_{\alpha \in L_2^n} (\overline{f(\alpha)} \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i})$ (veza $\overline{\bigsqcap_{i=1}^{n}} x_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{x}_i$)

(ii) $f(\alpha) = \bigsqcap_{\alpha \in L_2^n} (f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i})$ (teorema o KKNF)

$= \bigsqcap_{\alpha \in L_2^n} \overline{\overline{(f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i})}}$ (svojstvo $a = \bar{\bar{a}}$)

$= \top_{\alpha \in L_2^n} \overline{(f(\alpha) \cup \bigcup_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\alpha}_i})}$ (veza $\bigsqcap_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \top_{i=1}^{n} x_i$)

$= \top_{\alpha \in L_2^n} \bar{f}(\alpha)x^{\alpha}$ (veza $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i} = \bigsqcap_{i=1}^{n} \bar{x}_i$).

Ovim je teorema 3. dokazana.

Posle teoreme 1., teoreme 2. i teoreme 3. možemo zaključiti sledeće: *svaka Bulova funkcija može se predstaviti izrazom u kome učestvuju operacije:*

a) „$\top$", „ $-$ " *(Lukašijevićeva i negacija)*

b) „$\bot$", „ $-$ " *(Šeferova i negacija)*

c) „$\cup$", „ $\top$ ", „ $-$ " *(disjunkcija, Lukašijevićeva i negacija)*

d) „ $\cdot$ ", „ $\perp$ ", „ $-$ " *(konjunkcija, Šeferova i negacija)*

e) „ $\perp$ ", „ $\cup$ ", „ $-$ " *(Šeferova, disjunkcija i negacija)*

f) „ $\top$ ", „ $\cdot$ ", „ $-$ " *(Lukašijevićeva, konjunkcija i negacija)*

Primer 3. Data je Bulova funkcija tabelom

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Na osnovu teoreme 1., teoreme 2. i teoreme 3. možemo pisati:

a) $f(x,y)=(1\top x\top y)\top(1\top x\top \bar{y})\top(0\top x\top y)\top(0\top x\top \bar{y})$

b) $f(x,y)=(1\perp \bar{x}\perp \bar{y})\perp(1\perp \bar{x}\perp y)\perp(0\perp x\perp \bar{y})\perp(0\perp x\perp y)$

c) $f(x,y)=(0\top x\top y)\cup(0\top x\top \bar{y})\cup(1\top \bar{x}\top y)\cup(1\top \bar{x}\top \bar{y})$

d) $f(x,y)=(0\perp \bar{x}\perp \bar{y})\cdot(0\perp \bar{x}\perp y)\cdot(1\perp x\perp \bar{y})\cdot(1\perp x\perp y)$

e) $f(x,y)=(0\cup x\cup y)\perp(0\cup x\cup \bar{y})\perp(1\cup \bar{x}\cup y)\perp(1\cup \bar{x}\cup \bar{y})$

f) $f(x,y)=(0\cdot \bar{x}\cdot \bar{y})\top(0\cdot \bar{x}\cdot y)\top(1\cdot x\cdot \bar{y})\top(1\cdot x\cdot y)$.

ZADACI

Zadatak 1. Dokazati veze

$(x\top y)\top z = (x\cup y)\cdot z, \quad x\top(y\top z) = \bar{x}\cdot(y\cup z)$.

Primedba. Kako je $(x\cup y)\cdot\bar{z} \neq \bar{x}(y\cup z)$ vidimo da ne važi asocijativni zakon za funkciju Lukašijevića.

Zadatak 2. Dokazati da nije zadovoljen asocijativni zakon za funkciju Šefera.

Zadatak 3. Dokazati veze

a) (i) $x\top(y\perp z) = \bar{x}yz$ (ii) $x\perp(y\top z) = \bar{x}\cup y\cup z$

b) (i) $(x\top y)\perp(x\top z)=x\cup y\cup z$ (ii) $(x\perp y)\top(x\perp z) = xyz$.

Primedba. Kako je $\bar{x}yz \neq x\cup y\cup z$ i $\bar{x}\cup y\cup z \neq xyz$ vidimo da nije zadovoljen distributivni zakon funkcije Lukašijevića prema funkciji Šefera i obrnuto.

Zadatak 4. Dokazati svojstva:

a) (i) $\overline{x \top (\bar{y} \perp \bar{z})} = x \perp (y \top z)$ (ii) $\overline{x \perp (\bar{y} \top \bar{z})} = x \top (y \perp z)$

b) (i) $\overline{(x \perp y) \top (x \perp y)} = (\bar{x} \perp \bar{y}) \perp (\bar{x} \top \bar{y})$

(ii) $\overline{(x \top y) \perp (x \top y)} = (\bar{x} \top \bar{y}) \top (\bar{x} \perp \bar{y})$

c) (i) $x \top (x \top x) = 0$ (ii) $x \perp (x \perp x) = 1$

d) (i) $x \top (x \perp y) = 0$ (ii) $x \perp (x \top x) = 1$

e) (i) $(x \top x) \perp (x \top x) = x$ (ii) $(x \perp x) \top (x \perp x) = x.$

Zadatak 5. Dokazati svojstva:

a) (i) $x \top y \top z = x \top (\bar{y} \perp \bar{z})$ (ii) $x \perp y \perp z = x \perp (\bar{y} \top \bar{z})$

b) (i) $x \top y \top z = (\bar{x} \perp \bar{y}) \top z$ (ii) $x \perp y \perp z = (\bar{x} \top \bar{y}) \perp z$

c) (i) $x \top y \top z \top u = x \top (\bar{y} \perp \bar{z} \perp \bar{u})$ (ii) $x \perp y \perp z \perp u = x \perp (\bar{y} \top \bar{z} \top \bar{u})$

d) (i) $x \top y \top z \top u = (\bar{x} \perp \bar{y} \perp \bar{z}) \top u$ (ii) $x \perp y \perp z \perp u = (\bar{x} \top \bar{y} \top \bar{z}) \perp u$

e) (i) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 \top (\mathop{\perp}\limits_{i=2}^{n} \bar{x}_i)$ (ii) $\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 \perp (\mathop{\top}\limits_{i=2}^{n} \bar{x}_i)$

f) (i) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = (\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i) \top x_n$ (ii) $\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} x_i = (\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i) \perp x_n$

g) (i) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = (\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{k} \bar{x}_i) \top (\mathop{\perp}\limits_{i=k+1}^{n} \bar{x}_i)$

(ii) $\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{n} x_i = (\mathop{\top}\limits_{i=1}^{k} \bar{x}_i) \perp (\mathop{\top}\limits_{i=k+1}^{n} \bar{x}_i).$

Rešenje:

a(i) $x \top y \top z = x \top (\bar{y} \perp \bar{z})$

(1) $x \top y \top z = \overline{x \cup y \cup z}$ (veza V_5(i))

(2) $= \overline{x \cup (y \cup z)}$ (zakon asocijativnosti)

(3) $= x \top (y \cup z)$ (veza V_1(i))

(4) $= x \top (\overline{\bar{y} \cdot \bar{z}})$ (svojstvo $\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} = a \cup b$)

(5) $= x \top (\bar{y} \perp \bar{z})$ (veza V_1(ii)).

b(i) $x \top y \top z = (\bar{x} \perp \bar{y}) \top z$

(1) $x \top y \top z = \overline{x \cup y \cup z}$ (veza V_5(i))

(2) $= \overline{(x \cup y) \cup z}$ (zakon asocijativnosti)

(3) $= (x \cup y) \top z$ (veza V_1(i))

(4) $= (\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}) \top z$ (svojstvo $\overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} = a \cup b$)

(5) $= (\bar{x} \perp \bar{y}) \top z$ (veza V_1(ii).

Na sličan način se dokazuju svojstva b., c. i d.

e(i) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 \top \left(\mathop{\perp}\limits_{i=2}^{n} \bar{x}_i \right)$

(1) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i}$ (veza V_5(i))

(2) $= \overline{x_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n} x_i \right)}$ (zakon asocijativnosti)

(3) $= x_1 \top \left(\bigcup_{i=2}^{n} x_i \right)$ (veza V_1(i))

(4) $= x_1 \top \left(\overline{\prod_{i=2}^{n} \bar{x}_i} \right)$ (zakon de Morgana)

(5) $= x_1 \top \left(\mathop{\perp}\limits_{i=2}^{n} \bar{x}_i \right)$ (veza V_5(ii)).

Na sličan način se dokazuje svojstvo e.(ii).

g(i) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = \left(\mathop{\perp}\limits_{i=1}^{k} \bar{x}_i \right) \top \left(\mathop{\perp}\limits_{i=k+1}^{n} \bar{x}_i \right)$

(1) $\mathop{\top}\limits_{i=1}^{n} x_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} x_i}$ (veza V_5(i))

(2) $= \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{k} x_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} x_i \right)}$ (zakon asocijativnosti)

(3) $= \left(\bigcup_{i=1}^{k} x_i \right) \top \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} x_i \right)$ (veza V_1(i))

(4) $= \left(\overline{\prod_{i=1}^{k} \bar{x}_i} \right) \top \left(\overline{\prod_{i=k+1}^{n} \bar{x}_i} \right)$ (zakon de Morgana)

(5) $$= \Big(\mathop{\perp}_{i=1}^{k} \bar{x}_i\Big) \quad \Big(\mathop{\perp}_{i=k+1}^{n} \bar{x}_i\Big) \qquad \text{(veza } V_5\text{(ii))}.$$

Na sličan način se dokazuje svojstvo g(ii).

Čitaocu ostaje da dokaže svojstva iz zadatka 5.

Zadatak 6. Bulove funkcije f, g i h, date tabelom

x y z	f(x,y,z)	g(x,y,z)	h(x,y,z)
0 0 0	1	1	1
0 0 1	0	1	1
0 1 0	1	0	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	1	1	0
1 0 1	0	0	0
1 1 0	0	0	1
1 1 1	1	0	0

predstaviti izrazima u kojima učestvuju operacije:

a) „ $\top$ ", „ - " (Lukašijevićeva i negacija)

b) „ $\perp$ ", „ - " (Šeferova i negacija)

c) „ $\cup$ ", „ $\top$ ", „ - " (disjunkcija, Lukašijevićeva i negacija)

d) „ $\cdot$ ", „ ", „ - " (konjunkcija, Šeferova i negacija)

e) „ $\perp$ ", „ $\cup$ ", „ - " (Šeferova, disjunkcija i negacija)

f) „ $\top$ ", „ $\cdot$ ", „ - " (Lukašijevićeva, konjunkcija i negacija).

Zadatak 7. Dokazati sledeće identitete:

a) (i) $a\perp(a\cup b)\perp b=\overline{a\cup(a\cup b)\cup b}=\overline{a\cup b}=\bar{a}\cdot\bar{b}=a\perp b$

(ii) $a\top ab\top b=\overline{a\cdot b}=\bar{a}\cup\bar{b}=a\top b$

b) (i) $\bar{a}\perp b=\overline{\bar{a}\cup b}=a\cdot\bar{b}$ (ii) $\bar{a}\top b=\overline{\bar{a}\cdot b}=a\cup\bar{b}$

c) (i) $(a\cup\bar{b})\perp\bar{a}\cdot b=0$ (ii) $a\cdot\bar{b}\top(\bar{a}\cup b)=1$

d) (i) $a\cdot\bar{b}\perp b\perp\bar{a}\perp a\cdot b=0$ (ii) $(a\cup\bar{b})\top b\top\bar{a}\top(a\cup b)=1$

e) (i) $(\overline{a\perp b}\cup(\bar{a}\perp b))\perp\bar{a}\cdot b=a\perp b$ (ii) $\overline{a\top b}\cdot(\bar{a}\top b)\top(\bar{a}\cup b)=a\top b$

f) (i) $a\perp(bc)=a\perp b\perp c$ (ii) $a\top(b\cup c)=a\top b\top c$

g) (i) $\bar{a}(b\cup\bar{c})\perp a\cdot d\perp c=a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$ (ii) $\bar{a}\cup b\cdot\bar{c}\top(a\cup d)\top c=a\cup\bar{b}\cup\bar{c}$

h) (i) $(\bar{a}\cup(b\cdot c\perp\bar{a}))\perp(\bar{b}\perp\bar{c}\perp(d\cup a))=a\cdot b\cdot c$

(ii) $(\bar{a}(b\cup c)\top\bar{a}))\top(\bar{b}\top\bar{c}\top da)=\bar{a}\cup b\cup c$.

Zadatak 8. Dokazati da se svaka Bulova funkcija može predstaviti pomoću Šeferove funkcije, odnosno Lukašijevićeve funkcije.

G L A V A VII

B U L O V E M A T R I C E

Bulove matrice imaju veliku primenu u matematici i tehnici. U glavi IX data je njihova primena kod multipola, a ovde se, pored nekih teorema o Bulovim matricama, razmatra njihova primena pri rešavanju sistema alternativnih jednačina (specijalne Bulove jednačine) kao i jedna primena u teoriji grafova.

1. DEFINICIJA BULOVE MATRICE

U glavi I, model 3., definisali smo Bulovu matricu, dve binarne operacije u oznaci „+" i „x" kao i unarnu operaciju u oznaci „´". U ovoj glavi proširićemo pojam Bulove matrice, dat u modelu 3. (videti [4], [25] i [35]).

Definicija 1. Matricu

$$A = [a_{ij}] , \quad i=1,\dots,m ; \quad j=1,\dots,n,$$

gde su a_{ij} *Bulovi izrazi zovemo Bulova matrica.*

Definicija 2. Dve Bulove matrice A *i* B *istog formata su jednake, u oznaci* A = B *, ako i samo ako su*

$$a_{ij} = b_{ij} , \quad i=1,2,\dots,m ; \quad j=1,2,\dots,n$$

Bulovi identiteti za svaki i,j, *to jest*

$$A = B \overset{def}{\iff} (\forall_{ij}) \ (a_{ij} = b_{ij}) .$$

Definicija 3. Zbir dve Bulove matrice A *i* B *istog formata, u oznaci* A + B, *je Bulova matrica*

$$A + B = \left[a_{ij} \cup b_{ij}\right], \quad i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,n,$$

gde je operacija $\cup$ *binarna operacija disjunkcija na Bulovim izrazima (na* L_2*).*

Definicija 4. Logički proizvod dve Bulove matrice A *i* B *istog formata, u oznaci* $A \cdot B$, *je Bulova matrica*

$$A \cdot B = \left[a_{ij} \cdot b_{ij}\right], \quad i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,n,$$

gde je operacija „·" binarna operacija konjunkcija na Bulovim izrazima (na L_2*).*

Definicija 5. Negacija Bulove matrice A *je Bulova matrica*

$$\bar{A} = \left[\bar{a}_{ij}\right], \quad i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,n,$$

gde su $\bar{a}_{ij}$ *negacije Bulovih izraza* a_{ij}.

Skup M Bulovih matrica istog formata sa operacijama „+", „·", „-" jeste model Bulove algebre. Prvi element skupa M je Bulova matrica čiji su svi elementi nule. Ako je označimo sa $0=[o]$, tada je

$$A + 0 = \left[a_{ij} \cup o\right] = \left[a_{ij}\right].$$

Poslednji element skupa M je Bulova matrica, čiji su svi elementi jedinice. Ako je označimo sa $I = [1]$, tada je

$$A \cdot I = \left[a_{ij} \cdot 1\right] = \left[a_{ij}\right].$$

Ostavlja se čitaocu da proveri aksiome Bulove algebre.

Definicija 6. Matrični proizvod dve Bulove matrice A *i* B, *gde je Bulova matrica* A *formata* m×p, *a Bulova matrica* B *formata* p×n, *je Bulova matrica*

$$A \odot B = \left[\ \bigcup_{k=1}^{p} (a_{ik} \cdot b_{kj})\ \right],$$

gde su binarne operacije „∪" i „·" disjunkcija i konjunkcija na Bulovim izrazima (na L_2*).*

Teorema 1. Ako su A, B i C *Bulove matrice jednakog formata tada važi:*

(i) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

(ii) $A \odot (B + C) = (A \odot B) + (A \odot C)$

(iii) $A \odot 0 = 0 \odot A = 0$.

Dokaz teoreme 1. ostavlja se čitaocu.

Definicija 7. Alternativni zbir dve Bulove matrice A *i* B *istog formata, u oznaci* $A \oplus B$, *je Bulova matrica*

$$A \oplus B = \left[a_{ij} \oplus b_{ij}\right], \quad i=1,\dots m; \quad j=1,\dots,n,$$

gde je operacija „$\oplus$" binarna operacija sabiranje po mod2. *skupa* $\{0,1\}$.

Primer 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus 1 & 0 \oplus 1 & 1 \oplus 0 \\ 1 \oplus 1 & 0 \oplus 0 & 1 \oplus 1 \\ 1 \oplus 1 & 0 \oplus 1 & 1 \oplus 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Neka je $A = \left[a_{ij}\right]$, $a_{ij} \in \{0,1\}$ formata $n \times n$ (kvadratna). Determinantna matrice A, u oznaci $|A|$, je element skupa $\{0,1\}$ i

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\, a_{ij}\, D_{ij}, \quad j=1,\dots,n,$$

gde su D_{ij} subdeterminante elemenata a_{ij}.

Primer 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 \oplus 1\cdot 1 = 1 \oplus 1 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \oplus 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \oplus 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 \oplus 1\cdot 1 \oplus 0\cdot 1 = 1.$$

Definicija 8. Alternativni proizvod dve Bulove matrice A *i* B, *u oznaci* $A \odot B$, *gde je Bulova matrica* A *formata* $m \times p$, *a Bulova matrica* B *formata* $p \times n$, *je Bulova matrica*

$$A \odot B = \left[\sum_{k=1}^{p}{}_{\oplus}(a_{ik}\cdot b_{kj})\right],$$

gde su binarne operacije „$\oplus$" i „$\cdot$" sabiranje i množenje po mod. 2. skupa $\{0,1\}$.

Primer 3.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix}x\\y\\a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot x \oplus 0\cdot y \oplus 0\cdot a \oplus 0\cdot b\\1\cdot x \oplus 1\cdot y \oplus 1\cdot a \oplus 0\cdot b\\0\cdot x \oplus 1\cdot y \oplus 1\cdot a \oplus 0\cdot b\\1\cdot x \oplus 1\cdot y \oplus 0\cdot a \oplus 1\cdot b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\x \oplus y \oplus a\\y \oplus a\\x \oplus y \oplus b\end{bmatrix}$$

Teorema 2. Ako su A,B,C *Bulove matrice formata* $m\times p$, $p\times k$, $k\times n$ *tada važi:*

(i) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$

(ii) $A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$

(iii) $A \odot 0 = 0 \odot A = 0.$

Dokaz teoreme 2. ostavljemo čitaocu.

Neka je $E = [e_{ij}]$ kvadratna matrica, gde je

$$(*) \qquad e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i=j \\ 0, & \text{za } i\neq j. \end{cases}$$

Teorema 3. Ako su A *i* E *kvadratne Bulove matrice istog formata onda je*

$$A \odot E = E \odot A = A.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} A \odot E &= \Big[\sum_{\oplus\, k=1}^{n} (a_{ik}\cdot e_{kj}) \Big] && \text{(definicija 8.)} \\ &= [a_{ij}] && \text{(relacija (*))} \\ &= A. \end{aligned}$$

Slično se dokazuje da je $E \odot A = A$.

Definicija 9. Transponovana matrica Bulove matrice

$$A = [a_{ij}], \quad i=1,\dots,m \;;\; j=1,\dots,n$$

je Bulova matrica

$$A^T = [a_{ji}], \quad i=1,\dots,n \;;\; j=1,\dots,m.$$

Teorema 4. *Za Bulove matrice* A *i* B, *formata* $m\times k$, $k\times n$, *važi:*

(i) $(A \odot B)^{\top} = B^{\top} \odot A^{\top}$, $(A \circ B)^{\top} = B^{\top} \circ A^{\top}$

(ii) $(A^{\top})^{\top} = A$

(iii) $E^{\top} = E$, $0^{\top} = 0$.

Dokaz teoreme 4. ostavlja se čitaocu.

Definicija 10. *Za Bulove matrice* A *i* B *jednakog formata je* $A \leqslant B$ *ako i samo ako je* $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ *za svaki* i,j, *to jest*,

$$A \leqslant B \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall_{ij})(a_{ij} \leqslant b_{ij}).$$

Teorema 5. *Ako su Bulove matrice* A, B *i* C *formata* $m\times p$ *tada važi:*

(i) $A \leqslant A$

(ii) *ako je* $A \leqslant B$ *i* $B \leqslant A$ *onda je* $A = B$

(iii) *ako je* $A \leqslant B$ *i* $B \leqslant C$ *onda je* $A \leqslant C$

(iv) *ako je* $A \leqslant B$ *onda je za svako* $X \neq 0$, *formata* $p\times n$, $A \odot X \leqslant B \odot X$

(v) *ako je* $A \leqslant B$ *onda je za svako* $X \neq 0$, *formata* $n\times m$, $X \odot A \leqslant X \odot B$.

Definicija 11. *Inverzna matrica kvadratne materice* A *je matrica* A^{-1}, *gde je* $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$.

Teorema 6. *Ako je* $A = [a_{ij}]$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ *i* $|A| \neq 0$ *tada je* $A^{-1} = [D_{ji}]$, $j,i \in \{1,\dots,n\}$, *gde su* D_{ji} *minori elemenata* a_{ij}.

Dokaz. Neka je

$A = [a_{ij}]$, $X = [x_{ij}]$, $E = [e_{ij}]$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

gde je

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j \\ 0, & \text{za } i \neq j. \end{cases}$$

Tada iz jednačine A O X = E sledi $\sum_{\oplus k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = e_{ij}$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$.

Kako je

$$(1) \quad |A| = \sum_{\oplus i=1}^{n} a_{ij}D_{ij}, \quad j=1,\ldots,n,$$

imamo

$$(2) \quad \sum_{\oplus i=1}^{n} D_{ih}e_{ij} = \sum_{\oplus i=1}^{n} D_{ih} \left(\sum_{\oplus k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}\right)$$

$$= \sum_{\oplus k=1}^{n} \left(\sum_{\oplus i=1}^{n} a_{ik}D_{ih}\right) x_{kj}.$$

Za $j \neq k$, na osnovu $a \oplus a = 0$, imamo:

$$(3) \quad \sum_{\oplus i=1}^{n} a_{ij}\, D_{ik} = 0.$$

Na osnovu relacija (1), (2) i (3) sledi $|A| \cdot x_{jh} = D_{jh}$. Iz pretpostavke $|A| \neq 0$ sledi $|A| = 1$. Dakle

$$x_{hj} = D_{jh}, \quad h,j=1,\ldots,n,$$

to jest, $A^{-1} = [\, D_{ji} \,]$, $j,i=1,\ldots,n$.

Primer 4. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je $|A| = 1$ postoji A^{-1}. Imamo:

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = 0, \quad D_{13} = 1$$

$$D_{21} = 1, \quad D_{22} = 0, \quad D_{23} = 1$$

$$D_{31} = 1, \quad D_{32} = 1, \quad D_{33} = 1,$$

pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 7. *Ako su* A *i* B *Bulove matrice jednakog formata onda je:*

(i) $A \bullet B = \bar{A}\cdot B + A\cdot\bar{B}$

(ii) $A \bullet B = (A + B)\cdot(\bar{A} + \bar{B})$

(iii) $A + B = A\cdot B \bullet A \bullet B$.

Dokaz. Neka je

$$A = [\, a_{ij} \,], \quad B = [\, b_{ij} \,] \quad i=1,\dots,m\ ; \quad j=1,\dots,n.$$

Tada je

(i) $A \bullet B = [\, a_{ij} \bullet b_{ij} \,]$ (definicija 7.)

$= [\, \bar{a}_{ij}b_{ij} \cup a_{ij}\bar{b}_{ij} \,]$ (veza $x \bullet y = xy \cup xy$)

$= [\, \bar{a}_{ij}b_{ij} + a_{ij}\bar{b}_{ij} \,]$ (definicija 3.)

$= [\, \bar{a}_{ij}][b_{ij}] + [\, a_{ij}][\bar{b}_{ij}]$ (definicija 4.)

$= \bar{A}\cdot B + A\cdot\bar{B}$ (definicija 5.)

(ii) Slično se dokazuje korišćenjem veze $x \bullet y = (x \cup y)(\bar{x} \cup \bar{y})$.

(iii) $A + B = [\, a_{ij} \cup b_{ij} \,]$ (definicija 3.)

$= [\, a_{ij}b_{ij} \bullet a_{ij} \bullet b_{ij} \,]$ (veza $x \cup y = xy \bullet x \bullet y$)

$= [\, a_{ij}b_{ij} \,] \bullet [\, a_{ij} \,] \bullet [\, b_{ij} \,]$ (definicija 7.)

$= A\cdot B \bullet A \bullet B$ (definicija 4.) ·

2. SISTEM ALTERNATIVNIH JEDNAČINA

Posmatrajmo n jednačina sa n nepoznatih

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 \bullet a_{12}x_2 \bullet \dots \bullet a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 \bullet a_{22}x_2 \bullet \dots \bullet a_{2n}x_n = b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 \bullet a_{n2}x_2 \bullet \dots \bullet a_{nn}x_n = b_n,
\end{array}
\tag{4}
$$

gde $a_{ij} \in \{0,1\}$, $b_i \in \{0,1\}$ $i,j \in \{1,\dots,n\}$, a „$\bullet$" i „$\cdot$" su sabiranje i množenje po mod. 2. skupa $\{0,1\}$.

Ako je $A = [a_{ij}]$ $i,j \in \{1,\dots,n\}$ i

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

sistem (4) se svodi na matričnu jednačinu

(5) $A \circ X = B,$

gde je

(6) $X = A^{-1} \circ B.$

Primer 5. Posmatrajmo sistem

$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = 1, \quad x_1 \oplus x_2 = 0, \quad x_2 \oplus x_3 = 1.$

Ovde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa se dati sistem svodi na matričnu jednačinu $A \circ X = B$, čije je rešenje $X = A^{-1} \circ B$.

Dakle, $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$

3. PRIMENA BULOVIH MATRICA U TEORIJI GRAFOVA

Posmatrajmo skup $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ i podskup ρ skupa $X{\times}X$, gde je $X{\times}X$ kartezijanski proizvod skupa X.

Definicija 12. *Uredjeni par* (X, ρ) *zovemo graf reda* n.

Pridružimo svakom elementu x_i skupa X jednu tačku. Nazovimo tu tačku vrh grafa.

Ako je $(x_i,x_j) \in \rho$, $i \neq j$ tada ćemo vrhove grafa x_i i x_j vezati strelicom (sl. 1.).

Sl. 1.

Sl. 2.

Ako je $(x_i, x_j) \in \rho$, $i = j$ tada imamo takozvanu petlju (sl.2.).

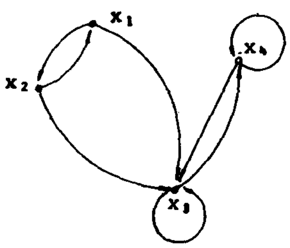
Primer 6. Dat je graf (X, ρ), gde je

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

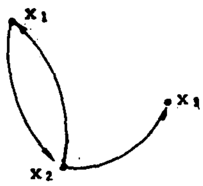
$\rho = \{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_1),\ (x_2,x_3),(x_3,x_3),(x_3,x_4),$

$(x_4,x_4),(x_4,x_3)\}$

Graf (X, ρ) pretstavljen je na sl. 3.



Sl. 3.



Sl. 4.

Definicija 13. *Graf* (X_1, ρ_1) *je podgraf grafa* (X, ρ), *ako je* $X_1 \subset X$ *i* $\rho_1 \subset \rho$.

Primer 7. Graf sa sl. 4. je podgraf grafa sa sl. 3.

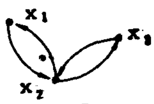
Definicija 14. *Graf* (X, ρ) *je simetričan, ako je*

$(\forall x_i)(\forall x_j)(((x_i, x_j) \in \rho) \Rightarrow ((x_j, x_i) \in \rho))$

Definicija 15. *Graf* (X, ρ) *je antisimetričan, ako je*

$(\forall x_i)(\forall x_j)(((x_i, x_j) \in \rho) \text{ i } (x_j, x_i) \in \rho) \Rightarrow x_i = x_j)$

Primer 8. Grafovi (Sl. 3.) i (Sl. 4.) nisu ni simetrični ni antisimetrični. Graf sa sl. 5. je simetričan, a sa sl. 6.antisimetričan.



Sl. 5.

Sl..6.

Definicija 16. *Graf* (X, ρ) *je potpun ako je*

$$(\forall x_i)(\forall x_j)((x_i,x_j)\in\rho \text{ i } (x_j,x_i)\in\rho \Rightarrow x_i=x_j),\ i\neq j.$$

Posmatrajmo graf (X,ρ), gde je $X = \{x_1,\dots,x_n\}$.

Definicija 17. *Bulovu matricu*

$$M_\rho = [m_{ij}],\ i,j=1,\dots,n,$$

gde je

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } (x_i,x_j)\in\rho \\ 0, & \text{ako } (x_i,x_j)\notin\rho, \end{cases}$$

zovemo matricom grafa (X, ρ).

Primer 9. Bulova matrica (slika 7.) je matrica grafa sa sl. 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Slika 7.

Za Bulovu matricu M_ρ kažemo da je simetrična ako je

$$(\forall i)(\forall j)\quad (m_{ij} = m_{ji}),$$

odnosno ako i samo ako je graf (X, ρ) simetričan.

Za Bulovu matricu M_ρ kažemo da je antisimetrična ako je

$$(\forall i)(\forall j)\quad (m_{ij}+m_{ji}\leqslant 1),\ i\neq j,$$

odnosno ako i samo ako je graf (X, ρ) antisimetričan.

Za Bulovu matricu M_ρ kažemo da je potpuna ako je

$$(\forall i)(\forall j)\quad (1\leqslant m_{ij}+m_{ji}\leqslant 2),\ i\neq j,$$

odnosno ako i samo ako je graf (X, ρ) potpun.

Primer 10. Matrice

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

su redom: simetrična, antisimetrična i potpuna.

Teorema 8. Ako su M_1 i M_2 matrice grafova (X,ρ_1) i (X,ρ_2), *tada je $M_1 + M_2$ matrica grafa* $(X,\rho_1 \cup \rho_2)$, *gde je* $\rho_1 \cup \rho_2$ *unija skupova ρ_1 i ρ_2, a $M_1 \odot M_2$ matrica grafa* $(X, \rho_1 \cdot \rho_2)$, *gde je* $\rho_1 \cdot \rho_2$ *proizvod relacija ρ_1 i ρ_2.*

Dokaz. Neka je

$$M_1 = [m'_{ij}], \quad m'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } (x_i,x_j) \in \rho_1 \\ 0, & \text{za } (x_i,x_j) \notin \rho_2 \end{cases}$$

$$M_2 = [m_{ij}], \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } (x_i,x_j) \in \rho_2 \\ 0, & \text{za } (x_i,x_j) \notin \rho_2 \end{cases}$$

onda je

$$M_1 + M_2 = [m'_{ij} \cup m_{ij}],$$

$$m'_{ij} \cup m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } (x_i,x_j) \in \rho_1 \cup \rho_2 \\ 0, & \text{za } (x_i,x_j) \notin \rho_1 \cup \rho_2 \end{cases}$$

$$M_1 \odot M_2 = [\bigcup_{k=1}^{n} m'_{ik} \cdot m_{kj}],$$

$$m'_{ik} \cdot m_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{za } (x_i,x_k) \in \rho_1 \text{ i } (x_k,x_j) \in \rho_2 \\ 0, & \text{za ostale slučajeve} \end{cases}$$

Time je dokazana teorema 8.

ZADACI

Zadatak 1. Date su Bulove matrice

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$,

gde su a_{ij} i b_{ij} elementi skupa $\{0,1\}$.

Neka je

(i) $A \bullet B \overset{def}{=} C$ gde je $c_{ij} = \bar{a}_{ij} b_{ij} \cup a_{ij} \bar{b}_{ij}$

(ii) $A \circ B \overset{def}{=} C$ gde je $c_{ij} = \bar{a}_{ij} \bar{b}_{ij} \cup a_{ij} b_{ij}$.

Dokazati:

(i) $A \bullet B = 0$ ako i samo ako $A = B$

(ii) $A \circ B = 0$ ako i samo ako $\bar{A} = B$ (ili $A = \bar{B}$).

Zadatak 2. Date su Bulove matrice

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}], \quad C = [c_{ij}] \quad i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n,$$

gde su a_{ij}, b_{ij} i c_{ij} elementi skupa $\{0,1\}$.

Neka je

(i) $A \to B \overset{def}{=} C$, gde je $c_{ij} = \bar{a}_{ij} \cup b_{ij}$

(ii) $A \overset{\to}{\to} B \overset{def}{=} C$, gde je $c_{ij} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\bar{a}_{ik} \cup b_{kj}) = \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot \bar{b}_{kj})}$

$$= \prod_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} .$$

Dokazati:

1. $(A \to B) \to A = A$
2. $(A \to B) \to B = (B \to A) \to A$
3. $A \to (B \to C) = B \to (A \to C)$
4. $A \to (A \to B) = A \to B$
5. $A \to A = (A \to B) \to (A \to B)$
6. $A \to A = I$, gde je $I = [1]$
7. $A \overset{\to}{\to} A = I$
8. $I \to A = A$
9. $A \to I = I$
10. $A \to (B \to A) = I$

Zadatak 3. Rešiti sistem jednačina

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 = 1,$$

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 = 0, \quad x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus x_6 = 1,$$

$$x_1 \oplus x_2 = 0, \quad x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_7 = 1, \quad x_1 \oplus x_3 = 0,$$

$$x_1 \oplus x_4 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Zadatak 4. Ako Bulova matrična jednačina $A \ominus X = B$ ima jedno rešenje onda je $X = A \odot B$. Dokazati.

GLAVA VIII

ŠEME SA DIREKTNOM KOMANDOM

U ovoj glavi razmatraćemo jednu primenu Bulove algebre dvočlanog skupa. Reč je o najprostijem tipu konačnog automata, takozvanim šemama sa direktnom komandom (sa direktnim, neposrednim upravljanjem). Najprostiji elementi šeme su kontakti koji imaju dva stanja, dve pozicije, tj. mogu biti otvoreni ili zatvoreni. Ovim smo ograničili naše razmatranje na takozvano idealno funkcionisanje šeme, jer uzimamo krajnje pozicije kontakta (otvoren, zatvoren). Reč "idealno" ovde ima smisao "nerealnosti"jer postoje i medjupozicije kontakata (izmedju otvorene i zatvorene). Danas još nema jedinstvenog matematičkog aparata prigodnog za opis funkcionisanja šeme sa kontaktima kada se oni nalaze u n pozicija,gde je $n=3,4,5,\dots$. Aparat koji se odnosi na dvoznačne promenljive još uvek je najpoznatiji. To je razlog da se ograničimo na kontakt koji uzima dve pozicije, tj. na dvoznačne promenljive. S druge strane, namena ove knjige je da se početnici na najjednostavniji način uvedu u izučavanje Teorije automata,pa i kibernetike uopšte (videti [9], [14], [35], [36] i [41]).

1. ELEMENTI RELEJNO-KONTAKTNE ŠEME

Kontakt. Kontakt je najjednostavniji element komande automatskog električnog uredjaja. Prva osobina koju zapažamo kod kontakta jeste da on može biti u: neaktiviranoj i aktiviranoj poziciji.

Obične kontakte delimo na: normalno otvorene kontakte i na normalno zatvorene kontakte.

a) Kontakt koji je u neaktiviranoj poziciji otvoren a u aktiviranoj poziciji zatvoren zovemo normalno otvoreni kontakt(sl. 1).

neaktivirana pozicija aktivirana pozicija

Sl. 1.

Ako bismo ovaj tip kontakta stavili u strujno kolo, struja ne bi prolazila ako je on neaktiviran, a prolazila bi ako je on aktiviran. Zato se ovaj kontakt još zove i radni kontakt.

Pridružimo normalno otvorenom kontaktu A promenljivu a iz skupa $L_2 = \{0,1\}$. Ako je kontakt A neaktiviran, tj. otvoren,ta da je $a = 0$, a ako je kontakt A aktiviran, tj. zatvoren, tada je $a = 1$.

b) Kontakt koji je u neaktiviranoj poziciji zatvoren, a u aktiviranoj poziciji otvoren zovemo normalno zatvoreni kontakt (sl.2).

neaktivirana pozicija aktivirana pozicija

Sl. 2.

Ako bismo ovaj tip kontakta stavili u strujno kolo, struja bi prolazila ako je on neaktiviran, a ne bi prolazila ako je on aktiviran. Zato se ovaj kontakt još zove i mirni kontakt.

Pridružimo normalno zatvorenom kontaktu $\bar{A}$ promenljivu $\bar{a}$ iz L_2. Kada je kontakt $\bar{A}$ neaktiviran, tj. zatvoren, tada je $\bar{a} = 1$ a kada je kontakt $\bar{A}$ aktiviran, tj. otvoren, tada je $\bar{a} = 0$.

c) Kontakt koji je stalno otvoren zoveno stalno otvoreni ko ntakt (sl. 3.) a kontakt koji je stalno zatvoren zovemo stalno zatvoreni kontakt (sl. 4).

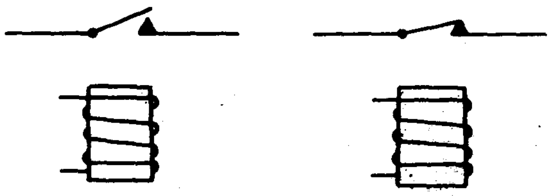
Sl. 3.

Sl. 4.

Kontakt koji je stalno otvoren ili stalno zatvoren, zovemo konstantni kontakt, a pridružujemo mu vrednost 0, odnosno 1.

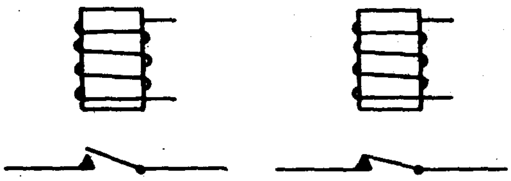
Relej sa kontaktima. Relej se sastoji iz elektromagneta i jedne kotve sa jednim ili više kontakata. Pridružimo releju X promenljivu x iz skupa L_2. Kada struja ne prolazi kroz navoj elektromagneta pridružimo promenljivoj x vrednost 0, tj. $x = 0$, a kada struja prolazi kroz kalem elektromagneta pridružimo promenljivoj x vrednost 1, tj. $x = 1$.

a) Relej sa normalno otvorenim kontaktom. Ako kroz navoj ne prolazi struja, tada je kontakt otvoren, tj. $x = 0$, a ako kroz navoj prolazi struja, tada je kontakt zatvoren, tj. $x = 1$, (sl. 5).



Sl. 5.

b) Relej sa normalno zatvorenim kontaktom. Ako kroz navoj ne prolazi struja, tj. ako je $x = 0$, tada je kontakt zatvoren, tj $\bar{x} = 1$. Ako kroz navoj prolazi struja, tj. ako je $x = 1$, tada je kontakt otvoren, tj. $\bar{x} = 0$, (sl.6).



Sl. 6.

2. STRUKTURNA FORMULA I FUNKCIJA RADA DIPOLA KLASE Π

V.I. Šestakov, K. Šenon i G. Moisil postavili su osnove algebre dipola klase Π. Ovde dajemo rekurentnu definiciju dipola klase Π, koga ćemo kratko nazivati dipol Π.

Definicija 1.

1. *Kontakti su dipoli* Π.

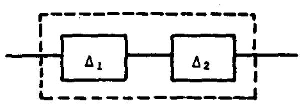
2. *Ako su* Δ_1 *i* Δ_2 *dipoli* Π *tada je dipol, dobijen njihovim serijskim ili paralelnim vezivanjem, dipol* Π.

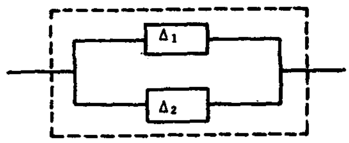
3. *Svaki dipol klase* Π *formira se konačnim brojem primena* 1. *i* 2.

Jedan dipol Δ mi ćemo crtati kao na sl. 7.

Sl. 7.

Dipol dobijen serijskim vezivanjem dipola Δ_1 i Δ_2 crtaćemo kao na sl. 8.





Sl. 8. Sl. 9.

Dipol dobijen paralelnim vezivanjem dipola Δ_1 i Δ_2 crtaćemo kao na sl. 9.

Definicija 2.

1. *Strukturna formula stalno zatvorenog kontakta je* $E = 1$, *a strukturna formula stalno otvorenog kontakta je* $E = 0$.

2. *Strukturne formule normalno otvorenih kontakata* $A, \ldots, C$ *su* $E_A = a, \ldots, E_C = c$, *a normalno zatvorenih kontakata su* $E_{\bar{A}} = \bar{a}$, $\ldots, E_{\bar{C}} = \bar{c}$.

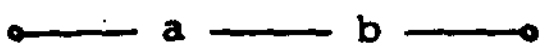
3. *Ako su* E_1 *i* E_2 *strukturne formule dipola* Δ_1 *i* Δ_2 *tada su strukturne formule dipola dobijenih njihovim serijskim i paralelnim vezivanjem*

$$E = (E_1)\cdot(E_2) \text{ i } E' = (E_1)\cup(E_2).$$

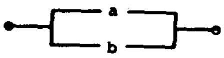
4. *Korespodentnost izmedju dipola* Π *i njihovih strukturnih formula opisana je pod* 1., 2. i 3.

Strukturna formula dipola Π je dakle Bulov izraz koji opisuje strukturu dipola Π.

Serijsko vezivanje. Strukturna formula dipola Π koji nastaje serijskim vezivanjem kontakta A i B (sl.10) je $E = a\cdot b$.



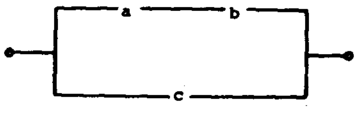
Sl. 10.



Sl. 11.

Paralelno vezivanje. Strukturna formula dipola Π koji nastaje paralelnim vezivanjem kontakata A i B (sl. 11) je $E = a\cup b$.

Serijsko i paralelno vezivanje. Strukturna formula dipola Π koji nastaje serijskim vezivanjem kontakata A i B, a zatim paralelnim vezivanjem kontakta C (sl. 12) je $E = ab\cup c$.



Sl. 12.

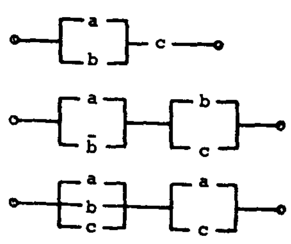
Iz definicije strukturne formule vidimo da svakom Bulovom izrazu možemo pridružiti dipol Π čija je strukturna formula data Bulovim izrazom. Ovo nam omogućava da za dati Bulov izraz možemo konstruisati šemu odgovarajućeg dipola Π.

Na primer, za Bulove izraze, tj. strukturne formule

$$E_1 = (a\cup b)c, \quad E_2 = (a\cup \bar{b})(b\cup c), \quad E_3 = (a\cup b\cup c)(a\cup c)$$

odgovarajuće šeme su (sl. 13).

Neka je Δ dipol klase Π sa kontaktima $A_1,\ldots,A_n$ kojima su pridružene promenljive $a_1,\ldots,a_n$ iz skupa L_2.



Sl. 13.

Pridružimo dipolu Δ promenljivu z koja opisuje rad dipola Δ (provodljivost dipola Δ). Ako je $z = 1$ dipol Δ radi, a ako je $z = 0$ dipol Δ ne radi.

Definicija 3. *Funkcija rada dipola* Δ *sa kontaktima* $A_1, \ldots, A_n$ *koji ima strukturnu formulu* E *je jedna Bulova funkcija*

$$f_E : L_2^n \to L_2,$$

koja je data Bulovim izrazom E.

Na primer, na sl. 13. date su šeme tri dipola čije su strukturne formule

$$E_1 = (a \cup b)c, \quad E_2 = (a \cup \bar{b})(b \cup c), \quad E_3 = (a \cup b \cup c)(a \cup c).$$

Funkcije rada ovih dipola su Bulove funkcije f_{E_1}, f_{E_2} i f_{E_3} u tabeli 1., dobijene iz Bulovih izraza E_1, E_2 i E_3.

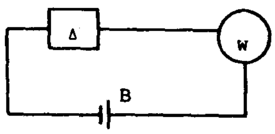
a	b	c	f_{E_1}	f_{E_2}	f_{E_3}
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	[illegible]
1	1	1	1	1	1

Tabela 1.

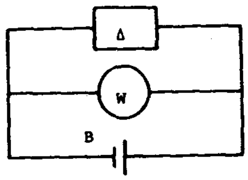
3. INVERZNA ŠEMA

Ugradimo jedan dipol Δ u električnu šemu sa izvorom i potrošačem. Jednostavnosti radi, neka izvor bude neka baterija B,a potrošač lampa W.

Serijsko vezivanje dipola Δ i lampe W. Neka je f_Δ funkcija rada dipola Δ, a w funkcija rada lampe W (sl 14).



Sl. 14.



Sl. 15.

Ako je $f_\Delta = 1$ (tj. ako dipol Δ radi) struja prolazi kroz dipol Δ, onda lampa gori, te je $w = 1$. Ako je $f_\Delta = 0$ (tj. ako dipol Δ ne radi) struja ne prolazi kroz dipol Δ , onda lampa ne gori, te je $w = 0$.

Funkcija rada lampe w je data tabelom 2.

f_Δ	w
0	0
1	1

Tabela 2.

f_Δ	w
0	1
1	0

Tabela 3.

Prema ovome je $w = f_\Delta$.

Paralelno vezivanje dipola Δ i lampe W. Neka je f_Δ funkcija rada dipola Δ, a w funkcija rada lampe W (sl. 15).

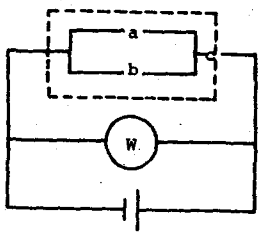
Kada je $f_\Delta = 1$ (tj. kada dipol Δ radi) struja prolazi kroz dipol Δ, a sijalica w ostaje bez struje (jer ima konačan električni otpor), pa je $w = 0$. Kada je $f = 0$ (tj. kada dipol ne radi) struja prolazi kroz sijalicu, te je $w = 1$.

Funkcija rada lampe w data je tabelom 3.

Prema ovome je $w = \bar{f}_\Delta$.

Dakle, šema sa sl. 15. je inverzna šema šeme sa sl. 14. i obrnuto.

Primer 1. Data je šema jednog dipola koji je sa lampom W vezan paralelno (sl. 16).



Sl. 16.

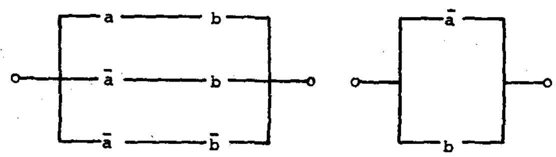
Funkcija rada lampe je $W = \overline{(a \cup b)\, c}$.

4. FUNKCIONALNA EKVIVALENTNOST DIPOLA

Definicija 4. *Dva dipola* Δ_1 *i* Δ_2 *su funkcionalno ekvivalentni, u oznaci* $\Delta_1 \sim \Delta_2$ *, ako su njihove funkcije rada* f_{E_1} *i* f_{E_2} *jednake, tj.*

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \text{ ako i samo ako } f_{E_1} = f_{E_2}.$$

Primer 2. Dati su dipoli Δ_1 i Δ_2 (sl. 17).



Sl. 17.

Strukturne formule ovih dipola Δ_1 i Δ_2 su:

$$E_1 = ab \cup \bar{a}b \cup \bar{a}\bar{b}, \quad E_2 = \bar{a} \cup b,$$

a njihove funkcije rada f_{E_1} i f_{E_2}

$f_{E_1}(0,0) = 0\cdot 0 \cup \bar{0}\cdot 0 \cup \bar{0}\cdot\bar{0} = 1$ $\quad$ $f_{E_1}(1,0) = 1\cdot 0 \cup \bar{1}\cdot 0 \cup \bar{1}\cdot 0 = 0$

$f_{E_1}(0,1) = 0\cdot 1 \cup \bar{0}\cdot 1 \cup \bar{0}\cdot\bar{1} = 1$ $\quad$ $f_{E_1}(1,1) = 1\cdot 1 \cup \bar{1}\cdot 1 \cup \bar{1}\cdot\bar{1} = 1$

odnosno

$f_{E_2}(0,0) = \bar{0} \cup 0 = 1$ $\qquad$ $f_{E_2}(1,0) = \bar{1} \cup 0 = 0$

$f_{E_2}(0,1) = \bar{0} \cup 1 = 1$ $\qquad$ $f_{E_2}(1,1) = \bar{1} \cup 1 = 1$.

Vidimo da su funkcije f_{E_1} i f_{E_2} jednake. Dakle dipoli Δ_1 i Δ_2 su ekvivalentni ($\Delta_1 \sim \Delta_2$).

Teorema 1. Funkcionalna ekvivalentnost dipola Π *je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna (relacija ekvivalencije), tj.*

a) $\Delta \sim \Delta$ *(refleksivnost)*

b) *Ako je* $\Delta_1 \sim \Delta_2$ *tada je* $\Delta_2 \sim \Delta_1$ *(simetričnost)*

c) *Ako je* $\Delta_1 \sim \Delta_2$ *i* $\Delta_2 \sim \Delta_3$ *tada je* $\Delta_1 \sim \Delta_3$ *(tranzitivnost)*.

Dokaz.

$\Delta \sim \Delta$ jer je $f_E = f_E$.

Ako je $\Delta_1 \sim \Delta_2$ tada je $f_{E_1} = f_{E_2}$, odakle $f_{E_2} = f_{E_1}$, pa je $\Delta_2 \sim \Delta_1$.

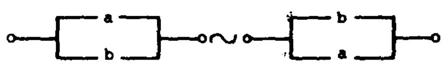
Ako je $\Delta_1 \sim \Delta_2$ i $\Delta_2 \sim \Delta_3$ tada je $f_{E_1} = f_{E_2}$ i $f_{E_2} = f_{E_3}$, odakle $f_{E_1} = f_{E_3}$ pa je $\Delta_1 \sim \Delta_3$.

Teorema 2. Skup dipola Π *sa kontaktima je model Bulove algebre, gde su binarne operacije „$\cup$" i „$\cdot$" paralelno i serijsko vezivanje dipola, a unarna operacija „$-$" prelaz sa dipola* Δ *na inverzni dipol* $\bar{\Delta}$.

Dokaz. Zaista, po definiciji o funkcionalnoj ekvivalentnosti dipola Π imamo:

(B_1) Svojstvo komutativnosti

(1)

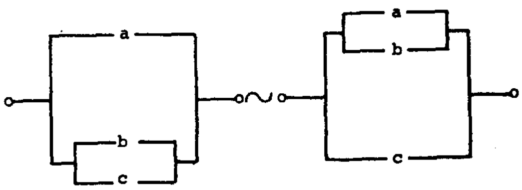


$a \cup b = b \cup a$

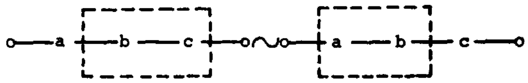
(ii) 

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(B_2) Svojstvo asocijativnosti

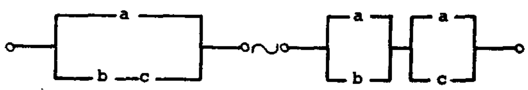
(i) 

$$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c.$$

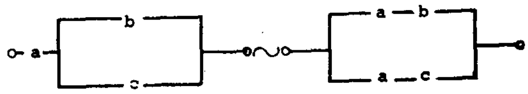
(ii) 

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(B_3) Svojstvo distributivnosti

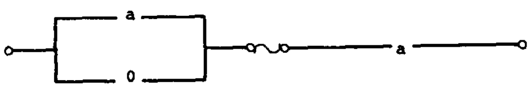
(i) 

$$a \cup b \cdot c = (a \cup b) \cdot (a \cup c)$$

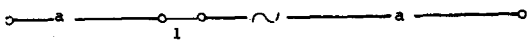
(ii) 

$$a \cdot (b \cup c) = a \cdot b \cup a \cdot c$$

(B_4) Svojstvo elemenata 0 i 1

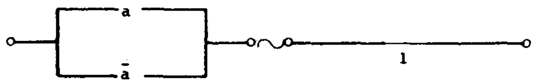
(i) 

$$a \cup 0 = a$$

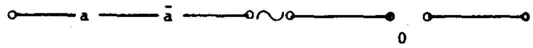
(ii) 

$$a \cdot 1 = a$$

(B_5) Svojstvo negacije

(i) 

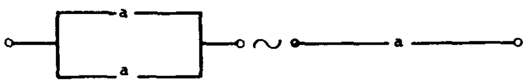
$$a \cup \bar{a} = 1$$

(ii) 

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

Vidimo da su zakoni (aksiome) B_1, B_2, B_3, B_4 i B_5 iz glave I za Bulovu algebru zadovoljeni, pa skup dipola za ovako definisane operacije „$\cup$", „$\cdot$" i „$-$" predstavlja model Bulove algebre.

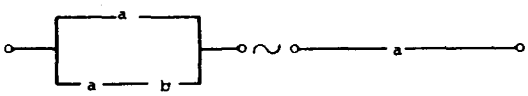
Ovim smo pomoću dipola interpretirali svojstva S_1, S_2, S_5, S_6(ii), S_7(i) i S_8, dvočlane Bulove algebre (glava II). Na sličan način mogli bismo interpretirati i ostala svojstva:

S_3(i) 

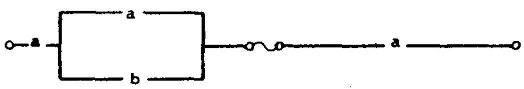
$$a \cup a = a$$

(ii) 

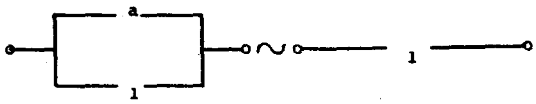
$$a \cdot a = a$$

S_4(i) 

$$a \cup ab = a$$

(ii 

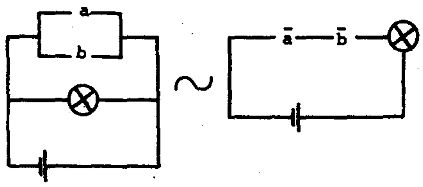
$$a \cdot (a \cup b) = a$$

S_6 (i) 

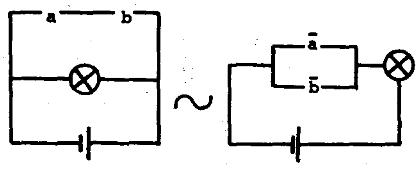
$$a \cup 1 = 1$$

S_7 (ii) 

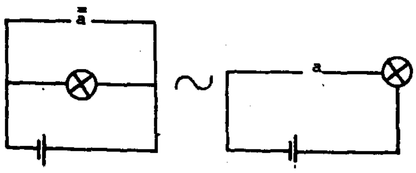
$$a \cdot 1 = a$$

S_9 (i) 

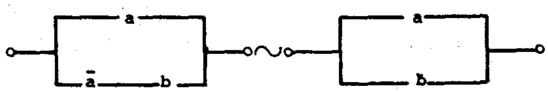
$$\overline{a \cup b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

(ii) 

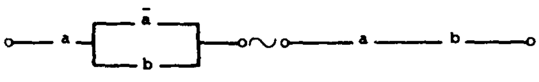
$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cup \bar{b}$$

S_{10} 

$$\bar{\bar{a}} = a$$

S_{11} (i) 

$$a \cup \bar{a} \cdot b = a \cup b$$

(ii) 

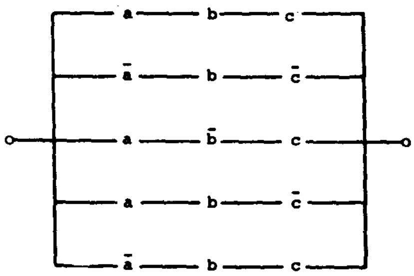
$$a\cdot(\bar{a}\cup b) = a\cdot b$$

5. MINIMIZACIJA ŠEME

Osnovni zadatak algebre kontaktnih šema je traženje šema, funkcionalno ekvivalentnih datoj šemi, da bi se iz njih izdvojila najprostija. Univerzalnog kriterijuma šta je to najprostija šema, medjutim, nema. Kao jedan od kriterijuma može se uzeti sledeći: šema je najprostija medju svim šemama koje su joj funkcionalno ekvivalentne, ako njoj odgovarajući Bulov izraz sadrži najmanji broj slova. Na taj način zadatak uprošćavanja šema svodi se na zadatak uprošćavanja njima odgovarajućih Bulovih izraza.

Prema tome, transformacije datih šema vrše se pomoću osnovnih zakona binarne Bulove algebre.

Primer 3. Data je šema (sl. 18)



Sl. 18.

Uprostimo datu šemu koristeći svojstva Bulove algebre, tj. odredimo funkcionalno ekvivalentnu šemu sa najmanje kontakta.

Strukturna formula datog dipola je

$$f(a,b,c) = abc\cup\bar{a}b\bar{c}\cup a\bar{b}c\cup ab\bar{c}\cup\bar{a}bc$$

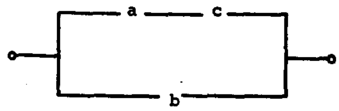
$= ab(c\cup\bar{c})\cup\bar{a}b(\bar{c}\cup c)\cup ac(b\cup\bar{b})$

$= ab\cup\bar{a}b\cup ac$

$= b(a\cup\bar{a})\cup ac$

$= b\cup ac.$

Znači, šema koja je ekvivalentna datoj šemi, a sadrži najmanje kontakta ima strukturnu formulu $f = ac\cup b$ (sl.19).

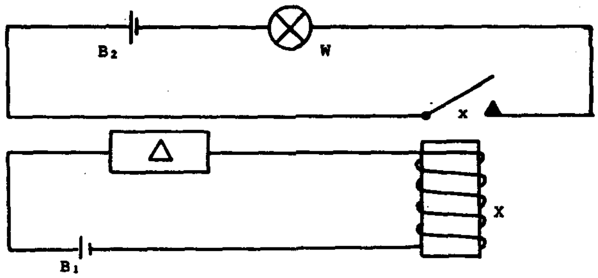


Sl. 19.

6. ŠEME SA KONTAKTIMA I RELEJIMA

Do sada smo se u ovoj glavi sretali, uglavnom, sa šemama dipola klase Π. Proširimo naše razmatranje na šeme koje, pored kontakta sadrže i releje sa kontaktima.

Posmatrajmo šemu (sl. 20)



Sl. 20.

u kojoj su lampa W i normalno otvoreni kontakt x releja X vezani serijski. Funkcija rada kontakta x zavisi od funkcije rada dipola Δ sa kontaktima a,b,...c. Ako je $E(a,b,\dots,c)$ strukturna formula dipola Δ , funkcija rada šeme sa slike 20.data je tabelom 4.

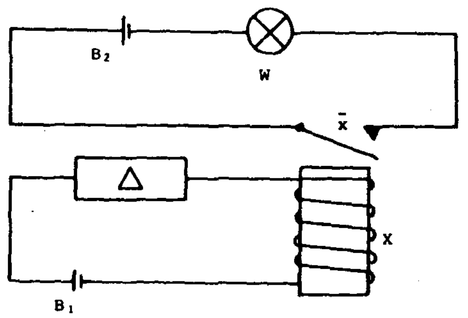
E	W
0	0
1	1

Tabela 4.

Prema tome, strukturna formula šeme sa slike 20. je

$$w = E(a,b,\ldots,c).$$

Posmatrajmo šemu (sl. 21)



Sl 21.

u kojoj su lampa W i normalno zatvoreni kontakt $\bar{x}$ releja X vezani serijski. I u ovom slučaju funkcija rada kontakta x zavisi od funkcije rada dipola Δ sa kontaktima a,b,...,c. Funkcija rada šeme (sl. 21) data je tabelom 5.

E	W
0	1
1	0

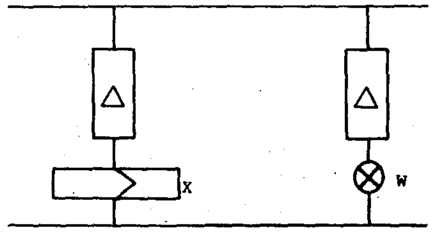
Tabela 5.

Dakle, strukturna formula šeme (sl.21) je

$$w = \overline{E(a,b,\ldots c)}.$$

U opštem slučaju, šemu,koja sadrži relej X sa dipolom Δ i kontaktom x (koji je u sklopu nekog drugog dipola Δ_1 sa lampom

W), crtamo na sledeći način:



Sl. 22.

Ako je strukturna formula dipola Δ

$$x = E(a,b,\ldots,c),$$

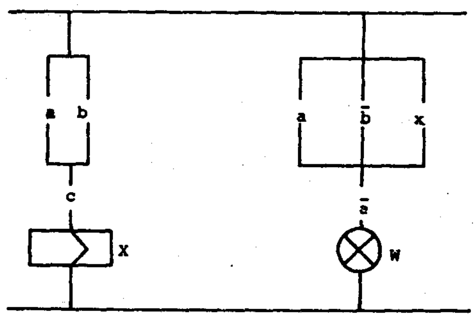
a strukturna formula dipola Δ_1

$$w = E_1(a_1,b_1,\ldots,c_1,x),$$

tada je strukturna formula šeme (sl. 22)

$$w = E_1(a_1,b_1,\ldots,c_1,E(a,b,\ldots c))^*.$$

Primer 4. Data je šema (sl. 23)



Sl. 23.

* Ili samo strukturna formula šeme je

$$w = E_1(a_1,b_1,\ldots,c_1,x)$$
$$x = E(a,b,\ldots,c).$$

Strukturna formula releja X je

$$x = (a \cup b)c\ ,$$

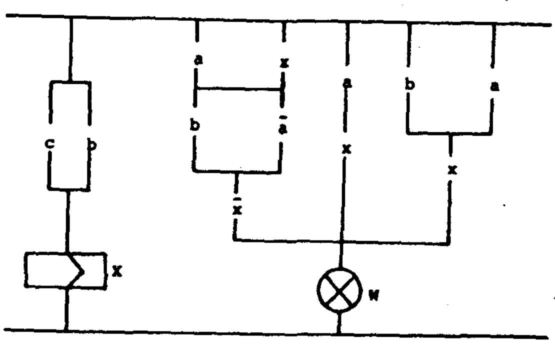
a strukturna formula šeme (sl. 23) je

$$w = (a \cup \bar{b} \cup x)\bar{a}$$

tj.

$$w = (a \cup \bar{b} \cup (a \cup b)c)\bar{a}.$$

Primer 5. Na šemi (sl. 24) dipol lampe i dipol releja su vezani paralelno.



Sl. 24.

Strukturna formula releja X je

$$x = b \cup c\ ,$$

a strukturna formula šeme je

$$w = (a \cup x)(b \cup \bar{a})\bar{x} \cup ax \cup (b \cup a)x\ ,$$

tj.

$$w = (a \cup b \cup c)(b \cup \bar{a})\bar{c}\bar{b} \cup a(c \cup b) \cup (b \cup a)(c \cup b).$$

Primer 6. Na šemi (sl. 25) dipol releja X je inverzan.

Strukturna formula releja X je

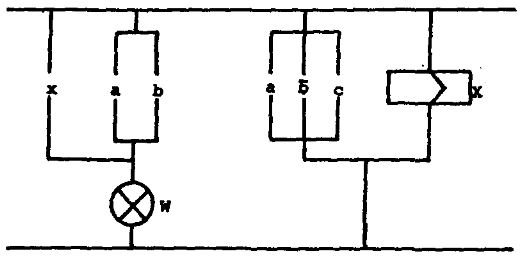
$$x = \overline{a \cup \bar{b} \cup c} = \bar{a}b\bar{c}\ ,$$

a strukturna formula šeme je

$$w = x \cup (a \cup b)\ ,$$

tj.

$$w = \bar{a}b\bar{c} \cup (a \cup b).$$



Sl. 25.

U primerima 4, 5. i 6. za zadatu šemu sa kontaktima i relejima pisali smo strukturnu formulu. Obrnut zadatak: za zadatu strukturnu formulu konstruisati šemu ne predstavlja nikakvu teškoću.

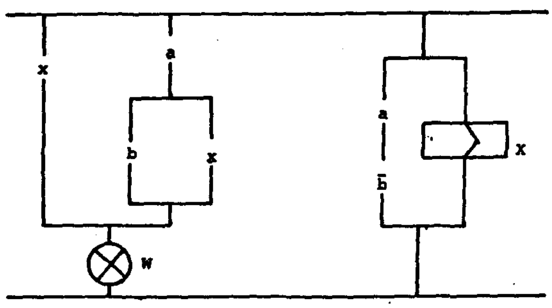
Primer 7. Konstruisati šemu čija je strukturna formula

$$w = x \cup a(b \cup x),$$

a strukturna formula releja X je

$$x = a\bar{b}.$$

Odgovarajuća šema data je na slici 26.



Sl 26.

7. KONSTRUKCIJA ŠEME PO ZADATIM USLOVIMA

U prethodnom odeljku razmatrali smo zadatak: za datu šemu napisati strukturnu formulu i obrnuto - za datu strukturnu formulu konstruisati šemu. Sada ćemo zadatak formulisati ovako:konstrusati šemu po zadatim uslovima rada. Drugim rečima, ako je data funkcija rada jedne šeme, kako je konstruisati. Svaka funkcija rada (Bulova funkcija) može se, na osnovu teoreme o KDNF i KKNF, predstaviti Bulovim izrazom, koji je strukturna formula tražene šeme. Dakle, ceo postupak u rešavanju ovog zadatka možemo prikazati sledećom skicom:

1. Koristeći teoreme o KDNF i KKNF napišimo Bulov izraz za datu funkciju rada.
2. Nekom od poznatih metoda minimiziramo dobijeni Bulov izraz.
3. Konstruišemo šemu za dobijeni minimalni Bulov izraz.

Primer 8. Konstruisati šemu sa dva prekidača A i B i jednom lampom W koja zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako su prekidači A i B neaktivirani, lampa W ne gori.
2) Ako je prekidač A aktiviran, a prekidač B neaktiviran, lampa W gori.
3) Ako su prekidači A i B aktivirani, lampa W gori.
4) Ako je prekidač A neaktiviran, a prekidač B aktiviran, lampa W gori.

Funkciju rada tražene šeme prikazujemo tabelom 6.

a	b	w
0	0	0
1	0	1
1	1	1
0	1	1

Tabela 6.

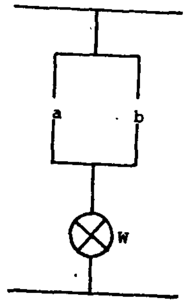
Strukturna formula šeme je, na osnovu teoreme o KDNF,

$$w = a\bar{b} \cup ab \cup \bar{a}b$$

ili, posle minimizacije

$$w = a \cup b.$$

Dakle, šema koja odgovara datim uslovima rada je (sl. 27).



Sl. 27.

Primer 9. Konstruisati šemu sa tri prekidača A, B i C i jednom lampom W koja zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako su prekidači A, B i C neaktivirani, lampa gori.

2) Ako su prekidači A i B neaktivirani, a prekidač C aktiviran, lampa W ne gori.

3) Ako su prekidači A i C neaktivirani, a prekidač B aktiviran, lampa W gori.

4) Ako je prekidač A neaktiviran, a prekidači B i C aktivirani, lampa W gori.

5) Ako su prekidači B i C neaktivirani, a prekidač A aktiviran, lampa W gori.

6) Ako je prekidač B neaktiviran, a prekidači A i C aktivirani, lampa W gori.

7) Ako je prekidač C neaktiviran, a prekidači A i B aktivirani, lampa W gori.

8) Ako su sva tri prekidača A, B i C aktivirani, lampa W gori.

Funkciju rada tražene šeme prikazujemo tabelom 7.

Strukturna formula šeme je, na osnovu teoreme o KDNF,

$$w = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \cup \bar{a}b\bar{c} \cup \bar{a}bc \cup a\bar{b}\bar{c} \cup a\bar{b}c \cup ab\bar{c} \cup abc$$

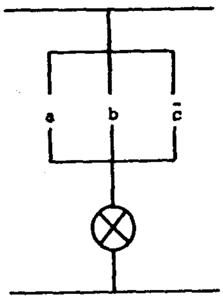
ili, posle minimizacije,

$$w = a \cup b \cup \bar{c}.$$

a	b	c	w
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabela 7.

Dakle, šema koja odgovara datim uslovima rada je (sl. 28)



Sl. 28.

Primer 10. Konstruisati šemu sa tri prekidača A, B i C, relejem X i lampom W, gde funkcija rada releja X zavisi od prekidača A, B i C, tj.

$$x = f(a,b,c),$$

a funkcija rada lampe W zavisi od prekidača A i B i releja X, tj.

$$w = F(a,b,x),$$

koja zadovoljava uslove date tabelom 8.

Strukturna formula šeme je, na osnovu teoreme o KDNF i tabele 8.

$$x = \bar{a}\bar{b}c \cup \bar{a}bc \cup a\bar{b}c \cup ab\bar{c} \cup abc$$

$$w = abx$$

ili, posle minimizacije

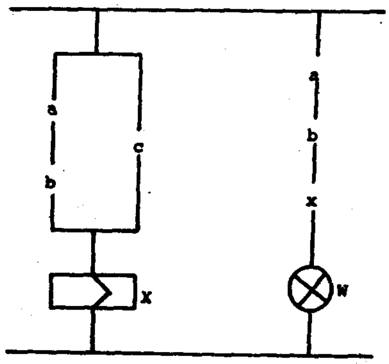
$$x = ab \cup c$$

$$w = abx.$$

a	b	c	x		a	b	x	w
0	0	0	0		0	0	0	0
0	0	1	1		0	0	1	0
0	1	0	0		0	1	0	0
0	1	1	1		0	1	1	0
1	0	0	0		1	0	0	0
1	0	1	1		1	0	1	0
1	1	0	1		1	1	0	0
1	1	1	1		1	1	1	1

Tabela 8.

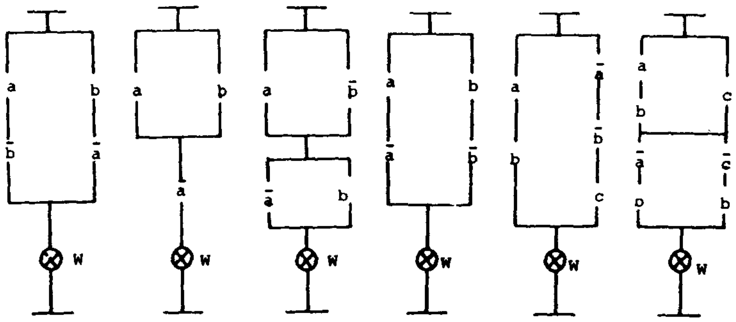
Dakle, šema koja odgovara datim uslovima rada je (sl. 29).



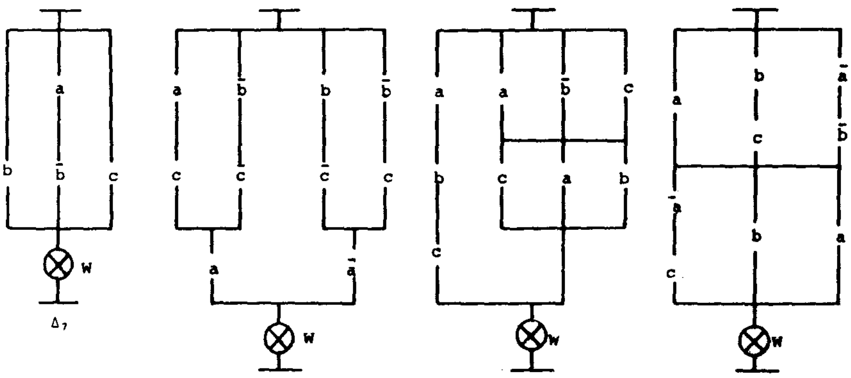
Sl. 29.

ZADACI

Zadatak 1. Dipoli i lampe vezani su serijski.Napisati strukturne formule njihovih šema:



Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4 Δ_5 Δ_6



Δ_7 Δ_8 Δ_9 Δ_{10}

Rešenja.

$E_1 = a\bar{b} \cup b\bar{a}$

$E_2 = (a \cup b)\bar{a}$

$E_3 = (a \cup \bar{b})(\bar{a} \cup b)$

$E_4 = (a\bar{a}) \cup (b\bar{b})$

$E_5 = ab \cup \bar{a}\bar{b}c$

$E_6 = (ab \cup c)(\bar{a}b \cup \bar{c}b)$

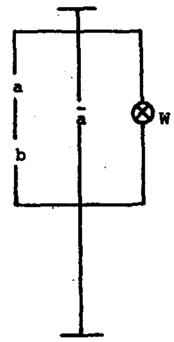
$E_7 = b \cup a\bar{b} \cup c$

$E_8 = (ac \cup \bar{b}\bar{c})a \cup (b\bar{c} \cup \bar{b}c)\bar{a}$

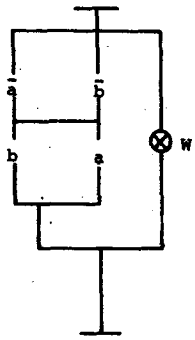
$E_9 = abc \cup (a \cup \bar{b} \cup c)(c \cup a \cup b)$

$E_{10} = (a \cup bc \cup \bar{a}\bar{b})(\bar{a}c \cup b \cup a)$.

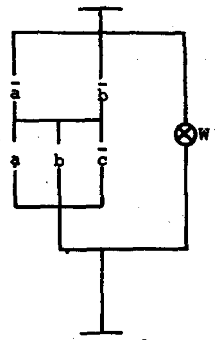
Zadatak 2. Dipoli i lampe vezani su paralelno. Napisati strukturne formule njihovih šema.



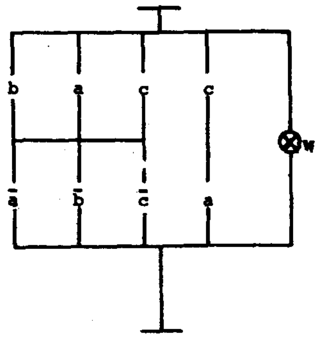
Δ_1



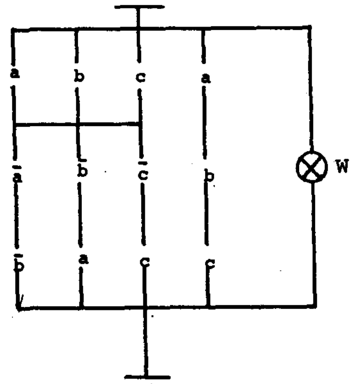
Δ_2



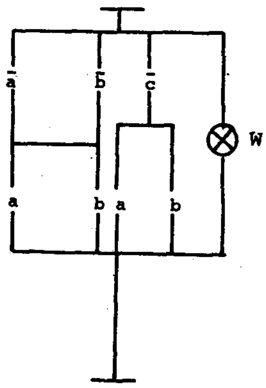
Δ_3



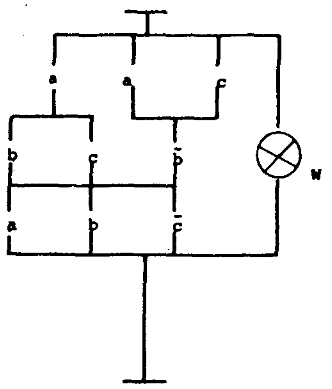
Δ_4



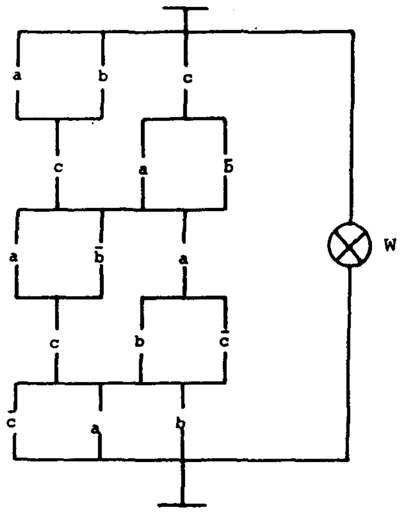
Δ_5



Δ_6



Δ_7



Δ_8

Rešenja

$\bar{E}_1 = ab \cup \bar{a}$

$\bar{E}_2 = (\bar{a} \cup \bar{b})(b \cup a)$

$\bar{E}_3 = (\bar{a} \cup \bar{b})(a \cup b \cup \bar{c})$

$\bar{E}_4 = (b \cup a \cup c)(\bar{a} \cup \bar{b} \cup \bar{c}) \cup ca$

$\bar{E}_5 = (a \cup b \cup c)(\bar{a} \cup \bar{b} \cup \bar{c})(\bar{b} \cup a \cup c) \cup abc$

$\bar{E}_6 = (\bar{a} \cup \bar{b})(a \cup b) \cup \bar{c}(a \cup b)$

$\bar{E}_7 = (a(b \cup c) \cup (a \cup c)\bar{b})(a \cup b \cup \bar{c})$

$\bar{E}_8 = ((a \cup b)c \cup c(a \cup \bar{b}))((a \cup \bar{b})c \cup a(b \cup \bar{c}))(\bar{c} \cup a \cup b).$

Zadatak 3. Date su strukturne formule šela dipola i lampi. Konstruisati odgovarajuće šeme.

a) Dipol i lampa vezani serijski

$E = a \cup \bar{b}$

$E = ab$

$E = (a \cup b)c$

$E = (a \cup b)(c \cup \bar{a})$

$E = a \cup (b \cup \bar{a})c$

$E = (a \cup b \cup c)\bar{a}$

$E = (a \cup b \cup c)(a \cup \bar{b})$

$E = (a \cup b)(\bar{a} \cup \bar{b} \cup c)a$

$E = a((b \cup c)a \cup (c \cup \bar{b})\bar{a} \cup (b \cup \bar{c})((a \cup (\bar{b} \cup c)\bar{a})$

$E = a((b \cup c \cup \bar{d}) \cup b(c \cup b) \cup ab)(b \cup c(a \cup \bar{b}))$

$E = (a \cup b)(d(a \cup b) \cup d(a \cup c) \cup (a \cup b)c\bar{d})$

b) Dipol i lampa vezani paralelno

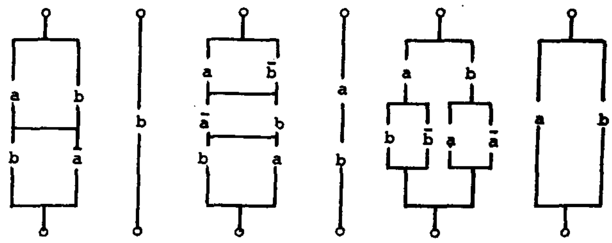
$F_i = \bar{E}_i$, gde je $i = 1,2,\ldots,8,9,10$ i $E_1, E_2, \ldots, E_{10}$

iz dela zadatka pod a).

Zadatak 4. Dokazati funkcionalne ekvivalentnosti

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \qquad \Delta_3 \sim \Delta_4 \qquad \Delta_5 \sim \Delta_6,$$

gde je



Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4 Δ_5 Δ_6

Treba dokazati da je:

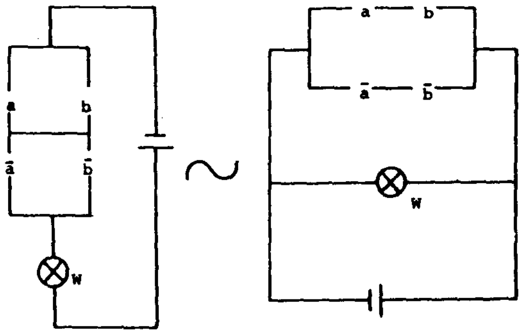
$(a \cup b)(b \cup \bar{a}) = b$

$(a \cup \bar{b})(b \cup \bar{a})(b \cup a) = ab$

$a(b \cup \bar{b}) \cup b(a \cup \bar{a}) = a \cup b$

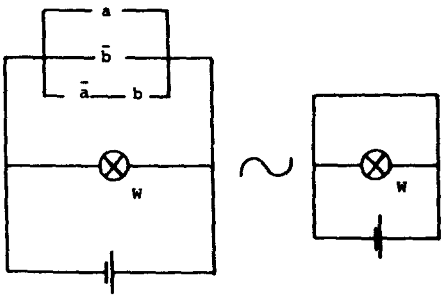
Zadatak 5. Dokazati funkcionalne ekvivalentnosti sledećih šema:

a)



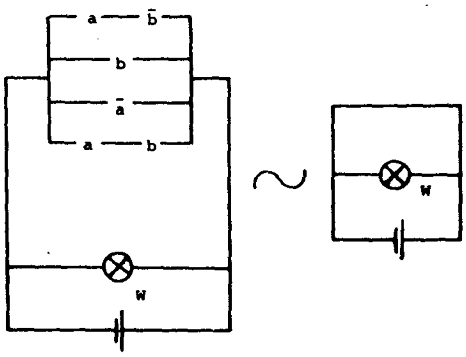
tj. da je $(a\cup b)(\bar{a}\cup\bar{b}) = \overline{(ab)\cup(\bar{a}\bar{b})}$

b)



tj. da je $\overline{(a\cup\bar{b})\cup\bar{a}b} = 0$

c)



tj. da je $a\bar{b} \cup b \cup \bar{a} \cup ab = 0$.

Zadatak 6. Konstruisati minimalnu šemu sa tri prekidača A, B i C i jednom lampom W čija funkcija rada zadovoljava uslove date tabelom 9.

a	b	c	w
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabela 9.

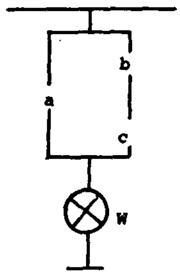
Rešenje: Strukturna formula šeme je, na osnovu teoreme o KDNF

$$w = \bar{a}bc \cup a\bar{b}\bar{c} \cup a\bar{b}c \cup ab\bar{c} \cup abc$$

ili, posle minimizacije

$$w = a \cup bc.$$

Dakle, šema koja odgovara datim uslovima rada je



Zadatak 7. Konstruisati minimalnu šemu sa tri prekidača A, B i C i jednom lampom W čija funkcija rada zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako su prekidači A,B i C neaktivirani, lampa W ne gori.

2) Ako je prekidač A aktiviran, a prekidači B i C neaktivirani, lampa W ne gori.

3) Ako su prekidači A i B aktivirani, a prekidač C neaktiviran, lampa W ne gori.

4) Ako su prekidači A i B neaktivirani, a prekidač C aktiviran, lampa W ne gori.

5) U ostalim slučajevima lampa W gori.

Zadatak 8. Konstruisati minimalnu šemu sa tri prekidača A, B i C i jednom lampom W čija funkcija rada zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako su prekidači A, B i C neaktivirani, lampa W ne gori.

2) Ako su prekidači A i B neaktivirani, a prekidač C aktiviran, lampa W ne gori.

3) Ako je prekidač A neaktiviran, a prekidači B i C aktivirani, lampa W gori.

4) Ako je prekidač A aktiviran, a prekidači B i C neaktivirani, lampa W ne gori.

5) Ako su prekidači A i B aktivirani, a prekidač C neaktiviran, lampa W gori.

6) Ako su sva tri prekidača A, B i C aktivirana, lampa W gori.

7) U ostalim slučajevima lampa W može da gori ili ne gori.

Zadatak 9. Konstruisati šemu sa četiri prekidača A, B, C i D i jednom lampom W čija funkcija rada zadovoljava sledeće uslove:

1) Ako su prekidači A, B, C i D neaktivirani, lampa W ne gori.

2) Ako su prekidači A i B neaktivirani, a prekidači C i D aktivirani, lampa W ne gori.

3) Ako su prekidači A i D neaktivirani, a prekidači B i C aktivirani, lampa W ne gori.

4) Ako je prekidač A neaktiviran, a prekidači B, C i D aktivirani, lampa W gori.

5) Ako je prekidač A aktiviran, a prekidači B, C i D neaktivirani, lampa W ne gori.

6) Ako su prekidači A, C i D aktivirani, a prekidač B neaktiviran, lampa W ne gori.

7) Ako su prekidači A i B aktivirani, a prekidači C i D neaktivirani, lampa W ne gori.

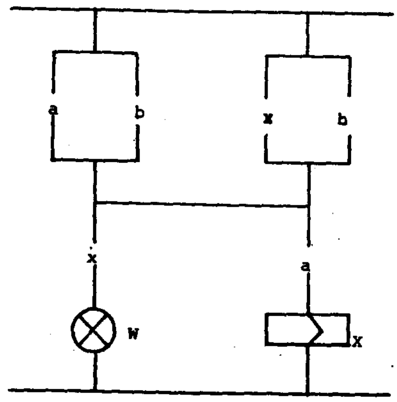
8) Ako su prekidači A, B i C aktivirani, a prekidač D neaktiviran, lampa W gori.

9) Ako su sva četiri prekidača A, B, C i D aktivirani, lampa W gori.

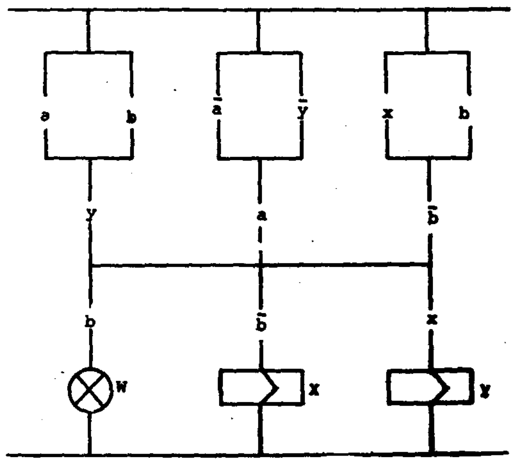
10) U ostalim slučajevima, lampa W može da gori ili ne gori.

Zadatak 10. Napisati strukturne formule šema:

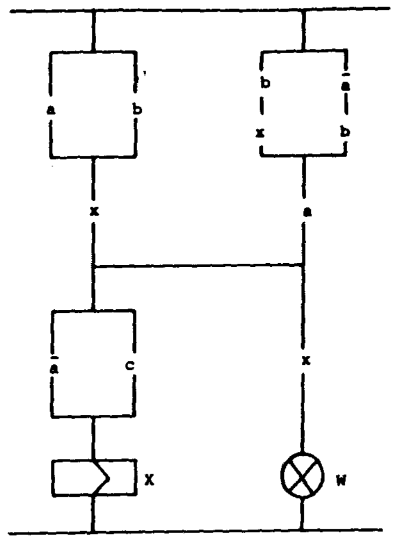
a)



b)



c)



Rešenje:

a) $w = ((a \cup b) \cup (x \cup b))x$, $x = ((a \cup b) \cup (x \cup b))a$

b) $w = ((a \cup b)y \cup (\bar{a} \cup \bar{y})a \cup (x \cup b)\bar{b})b$

$x = ((a \cup b)y \cup (\bar{a} \cup \bar{y})a \cup (x \cup b)\bar{b})\bar{b}$

$y = ((a \cup b)y \cup (\bar{a} \cup \bar{y})a \cup (x \cup b)\bar{b})x$

c) $w = ((a \cup b)x \cup (bx \cup \bar{a}b)a)x$

$x = ((a \cup b)x \cup (bx \cup \bar{a}b)a)(\bar{a} \cup c)$.

Zadatak 11. Konstruisati šeme čije su strukturne formule:

a) $w = (a \cup b)x$, $x = (a \cup b)a$

b) $w = (a(x \cup b) \cup ax)a$, $x = (a(x \cup b) \cup ax)b$

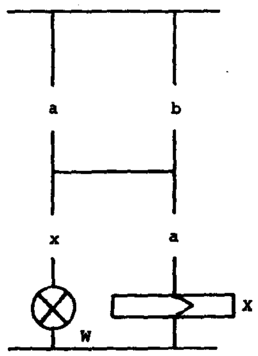
c) $w = ((a \cup b)y \cup (x \cup a)b \cup (y \cup b)x)x$

$x = ((a \cup b)y \cup (x \cup a)b \cup (y \cup b)x)b$

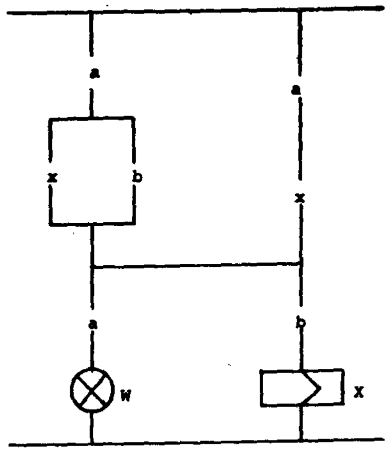
$y = ((a \cup b)y \cup (x \cup a)b \cup (y \cup b)x)a$.

Rešenje:

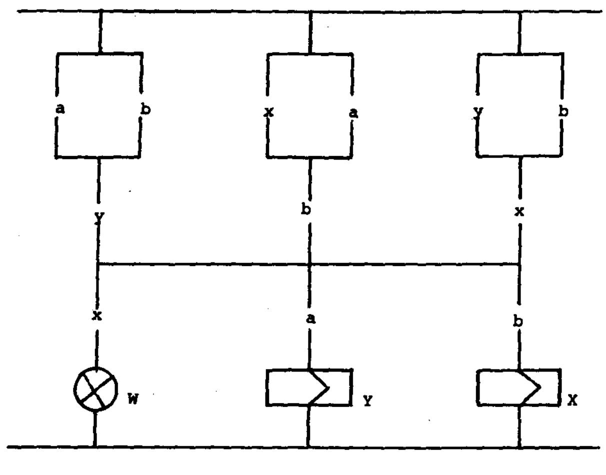
a)



b)



c)



Zadatak 12. Konstruisati šemu sa dva prekidača A, B, relejem X i lampom W, gde su funkcije rada date tabelom

a	b	x
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

a	b	x	w
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

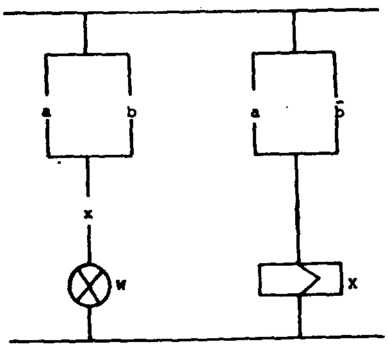
Rešenje:

Strukturne formule su, na osnovu tabela i teoreme o KDNF,

$$x = \bar{a}\bar{b} \cup a\bar{b} \cup ab = a \cup \bar{b}$$

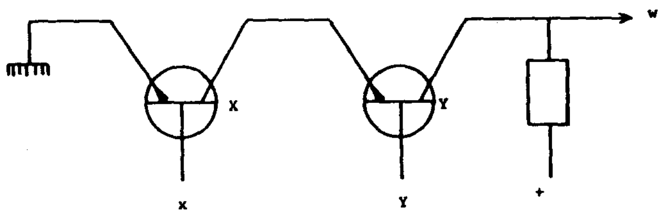
$$w = \bar{a}bx \cup a\bar{b}x \cup abx \cup abx = (a \cup b)x.$$

Dakle, odgovarajuća šema je:



Zadatak 13. Konstruisati šemu sa dva prekidača A, B, dva releja X, Y i lampom W gde su funkcije rada date tabelama:

Sl. 8.



$W = x \perp y$

Sl. 9.

a	b	y	x	a	b	x	y	a	b	x	w
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Rešenje:

Strukturne formule na osnovu tabela i teoreme o KDNF su:

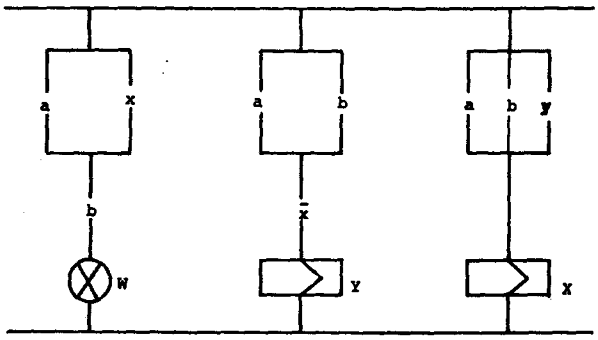
$x = \bar{a}\bar{b}y \cup \bar{a}b\bar{y} \cup \bar{a}by \cup a\bar{b}\bar{y} \cup a\bar{b}y \cup ab\bar{y} \cup aby$

$\quad = a \cup b \cup y$

$y = a\bar{b}\bar{x} \cup ab\bar{x} \cup \bar{a}b\bar{x} = (a \cup b)\bar{x}$

$w = \bar{a}bx \cup ab\bar{x} \cup abx = (a \cup x)b.$

Dakle, odgovarajuća šema je



Zadatak 14. Konstruisati šeme koje realizuju funkcije:

$f_1(a,b) = a \Rightarrow b$, $f_2(a,b) = a \Leftrightarrow b$, $f_3(a,b) = a \oplus b$

$f_4(a,b) = a \top b$, $f_5(a,b) = a \perp b$, $f_6(a,b,c) = a \Rightarrow (b \oplus c)$,

$f_7(a,b,c) = a \Leftrightarrow (b \top c)$, $f_8(a,b,c) = \overline{a \Rightarrow b}$, $f_9(a,b,c) = a \top (b \perp c)$.

G L A V A IX

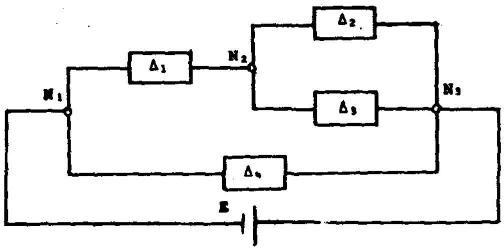
M U L T I P O L I

U glavi VIII razmatrane su mreže sa dva pola, tzv.dipoli. U ovoj glavi razmatraće se specijalne mreže sa više čvorova, izmedju kojih se nalaze dipoli. Ovakve mreže nazivamo multipoli (videti [32], [34] i [36]). Svakom multipolu pridružuje se Bulova matrica (strukturna matrica multipola) koja opisuje njegovu strukturu. Rad multipola opisuje se funkcijom provodljivosti koja je takodje predstavljena Bulovom matricom. Dalje se rarmatraju razne transformacije multipola (eliminacija čvorova).

1. DEFINICIJA MULTIPOLA

Mesto u mreži, gde se sastaju bar tri grane, zove se čvor ako svaka grana sadrži bar jedan dipol (aktivan ili pasivan). Oni čvorovi, u koje dolazi jedna grana sa aktivnim dipolom, zovu se ulazni, odnosno, izlazni čvorovi.

Primer **1. Na slici 1. N_1, N_2 i N_3 su čvorovi jer se u sva-**

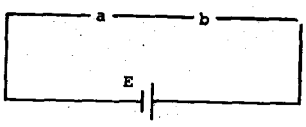


Sl. 1.

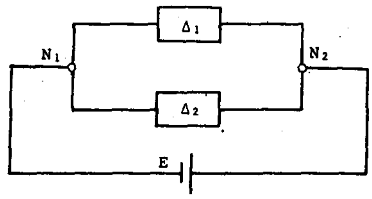
kom sastaju najmanje tri grane,gde svaka ima bar jedan dipol (aktivan E ili pasivan Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4). Čvorovi N_1 i N_3 su ulazni, odnosno,izlazni,jer sadrže granu sa aktivnim dipolom E, a čvor N_2 je prolazni čvor,jer sve njegove grane sadrže same pasivne dipole.

Definicija 1. *Mreža sa najmanje tri čvora zove se multipol.*

Primer 2. Mreža na slici 2. nije multipol jer nema čvorove.



Sl. 2.



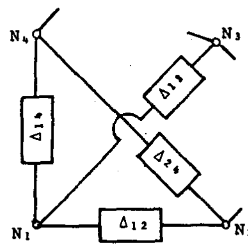
Sl. 3.

Primer 3. Mreža na slici 3. nije multipol jer ima samo dva čvora.

Primer 4. Mreža na slici 1. jeste multipol.

U daljem tekstu kod prikazivanja multipola nećemo crtati aktivne dipole.

Primer 5. Mreža na slici 4. jeste multipol sa četiri čvora N_1, N_2, N_3 i N_4.



Sl. 4.

Neka je $E_{\alpha\beta}$ strukturna formula dipola $\Delta_{\alpha\beta}$ koji je montiran izmedju čvorova N_α i N_β . Tada je:

(i) $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$ jer je $\Delta_{\alpha\beta} \sim \Delta_{\beta\alpha}$,

(ii) $\alpha = \beta$ ako i samo ako je $E_{\alpha\beta} = 1$,

(iii) $E_{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta)$ ako i samo ako se dipol $\Delta_{\alpha\beta}$ izmedju čvorova N_α i N_β svodi na jedan kontakt koji je konstantno otvoren (u mreži njega ne crtamo).

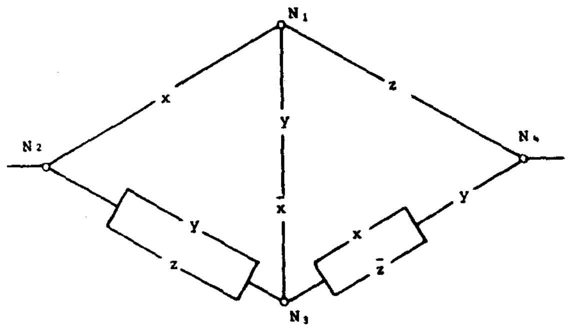
2. STRUKTURNA MATRICA MULTIPOLA

Definicija 2. Bulovu matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & 1 & \cdots & E_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

gde su $E_{\alpha\beta}$ *strukturne formule dipola* $\Delta_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,\dots,n$, *zovemo strukturna matrica multipola sa* n *čvorova.*

Primer 6. Strukturna matrica multipola sa sl. 5. je



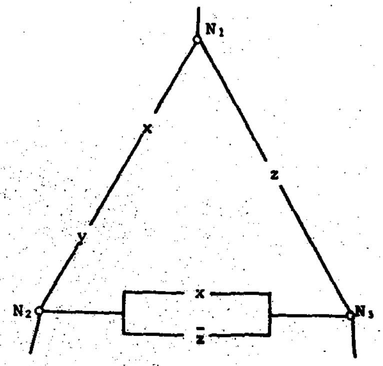
Sl. 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \bar{x}\cdot y & z \\ x & 1 & y\cup z & 0 \\ \bar{x}\cdot y & y\cup z & 1 & y(x\cup\bar{z}) \\ z & 0 & y(x\cup\bar{z}) & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 7. Strukturnoj matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & x\cdot y & z \\ x\cdot y & 1 & x\cup\bar{z} \\ z & x\cup\bar{z} & 1 \end{bmatrix}$$

odgovara multipol na sl. 6.



Sl. 6.

3. FUNKCIJA PROVODLJIVOSTI MULTIPOLA

Neka je $P_{\alpha\beta}$ ($\alpha\neq\beta$ i $P_{\alpha\beta}\in\{0,1\}$) funkcija provodljivosti između čvorova N_α i N_β, gde je:

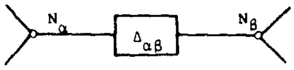
I. $P_{\alpha\beta} = 1$ ako izmedju čvorova N_α i N_β teče struja,

II. $P_{\alpha\beta} = 0$ ako izmedju čvorova N_α i N_β ne teče struja.

Od interesa je videti kada je ispunjen uslov I. tj. kada je

$E_{\alpha\beta} = 1$. Razmotrimo to postupno, korak po korak.

I_1. Da bi struja tekla izmedju čvorova N_α i N_β (sl. 7)

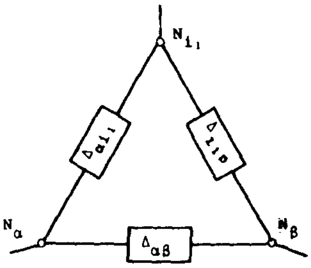


Sl. 7.

neophodno je da ide direktno kroz dipol $\Delta_{\alpha\beta}$, tj. da je

(1) $E_{\alpha\beta} = 1$.

I_2. Neka su N_{i_1} medjučvorovi (sl. 8) gde je $i_1=1,\ldots,n$.



Sl. 8.

Da bi struja tekla izmedju čvorova N_α i N_β neophodno je da:

a) teče kroz dipol $\Delta_{\alpha\beta}$, tj. da je $E_{\alpha\beta} = 1$,

ili

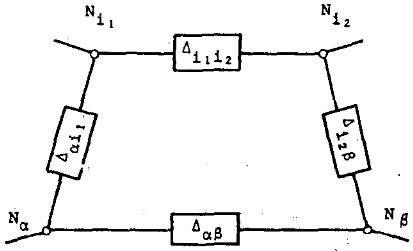
b) teče kroz serijsku vezu dipola $\Delta_{\alpha i_1}$ i $\Delta_{i_1\beta}$, tj. da je $E_{\alpha i_1} \cdot E_{i_1\beta} = 1$.

Dakle, da bi postojali medjučvorovi N_{i_1} i da bi struja tekla kroz N_α, N_{i_1} i N_β neophodno je da bar jedna od paralelnih grana provodi struju, tj. da je

(2) $$\bigcup_{i_1} E_{\alpha i_1} \cdot E_{i_1\beta} = 1.$$

Ovde se ne isključuje mogućnost da je $N_\alpha = N_{i_1}$ i $N_{i_1} = N_\beta$.

I_3. Neka su N_{i_1} i N_{i_2} medjučvorovi (sl. 9), gde je $i_1, i_2 = 1,\dots,n$.



Sl. 9.

Da bi struja tekla izmedju čvorova N_α i N_β neophodno je da:

a) teče kroz dipol $\Delta_{\alpha\beta}$, tj. da je $E_{\alpha\beta} = 1$,

ili

b) teče kroz serijsku vezu dipola $\Delta_{\alpha i_1}$, $\Delta_{i_1 i_2}$ i $\Delta_{i_2\beta}$ tj.da je $E_{\alpha i_1} \cdot E_{i_1 i_2} \cdot E_{i_2\beta} = 1$.

Dakle, da bi postojali medjučvorovi N_{i_1} i N_{i_2} i da bi struja tekla kroz N_α, N_{i_1}, N_{i_2} i N_β neophodno je da bar jedna od paralelnih grana provodi struju, tj. da je

$$(3) \qquad \bigcup_{i_1, i_2} E_{\alpha i_1} \cdot E_{i_1 i_2} \cdot E_{i_2\beta} = 1.$$

Ovde se ne isključuje mogućnost da je $N_\alpha = N_{i_1}$, $N_{i_1} = N_{i_2}$ i $N_{i_2} = N_\beta$.

I_{n-1}. Sličnim rezonovanjem dolazimo do zaključka da ako su $N_{i_1}, N_{i_2}, \dots, N_{i_{n-2}}$ medjučvorovi tada je

$$(n-1) \qquad \bigcup_{i_1, \dots, i_{n-2}} E_{\alpha i_1} \cdot E_{i_1 i_2} \cdots E_{i_{n-2}\beta} = 1.$$

Na osnovu relacija (1), (2), ..., (n-1) strukturna formula funkcije provodljivosti je

$$(*) \quad P_{\alpha\beta}=E_{\alpha\beta}\cup\Big(\bigcup_{i_1}E_{\alpha i_1}\cdot E_{i_1\beta}\Big)\cup\Big(\bigcup_{i_1,i_2}E_{\alpha i_1}\cdot E_{i_1 i_2}\cdot E_{i_2\beta}\Big)\cup\dots$$
$$\cup\Big(\bigcup_{i_1,\dots,i_{n-2}}E_{\alpha i_1}\cdot E_{i_1 i_2}\cdots E_{i_{n-2}\beta}\Big)$$

Strukturne formule funkcije provodljivosti multipola imaju sledeća svojstva:

(i) $P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}$

(ii) ako je $\alpha = \beta$ onda je $P_{\alpha\beta} = 1$

(iii) $P_{\alpha\beta} = 0$ za $\alpha \neq \beta$ ako i samo ako su čvorovi N_α i N_β izolovani.

Definicija 3. *Bulovu matricu*

$$\begin{bmatrix} 1 & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & 1 & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

zovemo strukturna matrica provodljivosti multipola, gde su $P_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=1,2,\dots,n$, *strukturne formule funkcije provodljivosti.*

Primer 8. Neka je dat multipol sa četiri čvora: N_1, N_2, N_3, N_4. Strukturne formule funkcije provodljivosti, na osnovu (*), su:

$p_{11}= E_{11}= 1$

$p_{12}= E_{12}\cup(E_{13}E_{32}\cup E_{14}E_{42})\cup(E_{13}E_{34}E_{42}\cup E_{14}E_{43}E_{32})$

$p_{13}= E_{13}\cup(E_{12}E_{23}\cup E_{14}E_{43})\cup(E_{12}E_{24}E_{43}\cup E_{14}E_{42}E_{23})$

$p_{14}= E_{14}\cup(E_{12}E_{24}\cup E_{13}E_{34})\cup(E_{12}E_{23}E_{34}\cup E_{13}E_{32}E_{24})$

$p_{21}= p_{12}$

$p_{22}= E_{22} = 1$

$p_{23}= E_{23}\cup(E_{21}E_{13}\cup E_{24}E_{43})\cup(E_{21}E_{14}E_{43}\cup E_{24}E_{41}E_{14})$

$p_{24}= E_{24}\cup(E_{21}E_{14}\cup E_{23}E_{34})\cup(E_{21}E_{13}E_{34}\cup E_{23}E_{31}E_{14})$

$p_{31}= p_{13}$,

$p_{32} = p_{23}$

$p_{33} = E_{33} = 1$

$p_{34} = E_{34} \cup (E_{31}E_{14} \cup E_{32}E_{24}) \cup (E_{31}E_{12}E_{24} \cup E_{32}E_{21}E_{14})$

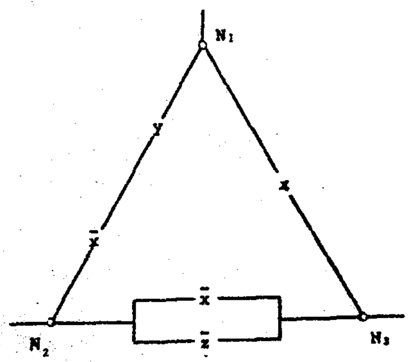
$p_{44} = p_{14}$

$p_{42} = p_{24}$

$p_{43} = p_{34}$

$p_{44} = E_{44} = 1.$

Primer 9. Dat je multipol (sl. 10)



Sl. 10.

Funkcije provodljivosti su:

$p_{11} = 1$

$p_{12} = E_{12} \cup E_{13}E_{32} = y \cdot \bar{x} \cup x(\bar{x} \cup \bar{z})$

$p_{13} = E_{13} \cup E_{12}E_{23} = x \cup y \cdot \bar{x}(\bar{x} \cup \bar{z})$

$p_{21} = p_{12}$

$p_{22} = E_{22} = 1$

$p_{23} = E_{23} \cup E_{21}E_{13} = (\bar{x} \cup \bar{z}) \cup \bar{x} \cdot y \cdot x$

$p_{31} = p_{13}$

$p_{32} = p_{23}$

$p_{33} = E_{33} = 1,$

pa je strukturna matrica funkcije provodljivosti multipola (sl.6):

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & 1 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y\bar{x} \cup x(\bar{x} \cup \bar{z}) & x \cup y\bar{x}(\bar{x} \cup \bar{z}) \\ y\bar{x} \cup x(\bar{x} \cup \bar{z}) & 1 & (\bar{x} \cup \bar{z}) \cup \bar{x}yx \\ x \cup y\bar{x}(\bar{x} \cup \bar{z}) & (\bar{x} \cup \bar{z}) \cup \bar{x}yx & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \bar{x}y \cup x\bar{z} & x \cup y \\ \bar{x}y \cup x\bar{z} & 1 & \bar{x} \cup \bar{z} \\ x \cup y & \bar{x} \cup \bar{z} & 1 \end{bmatrix} .$$

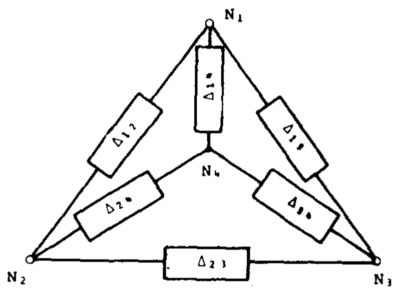
Definicija 4. *Pod dipolom* H *sa kontaktima podrazumeva se jedan multipol gde je precizirano koji su čvorovi multipola njegovi polovi.*

Ako je Δ_{1n} dipol H sa kontaktima, čiji su polovi čvorovi 1 i n, tada je strukturna formula dipola H oblika:

$$E = E_{1n} \cup (\bigcup_{i_1} E_{1i_1} E_{i_1 n}) \cup (\bigcup_{i_1 i_2} E_{1i_1} E_{i_1 i_2} E_{i_2 r}) \cup \ldots$$
$$\cup (\bigcup_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2}} E_{1i_1} E_{i_1 i_2} \ldots E_{i_{n-2} n}) .$$

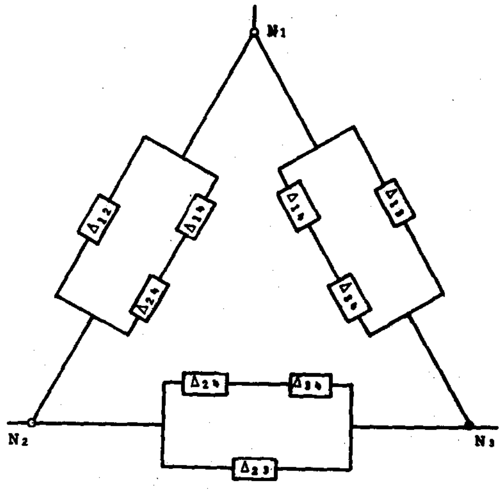
4. ELIMINACIJA NEKIH ČVOROVA U MULTIPOLU

Posmatrajmo multipol sa četiri čvora (sl. 11)



Sl. 11.

Problem je da se transformiše dati multipol tako da eliminišemo neki od čvorova. Eliminišimo, na primer, čvor N_4 (sl. 12).



Sl. 12.

Strukturna matrica transformisanog multipola je

$$\begin{bmatrix} 1 & E_{12} \cup E_{14}E_{42} & E_{13} \cup E_{14}E_{43} \\ E_{21} \cup E_{24}E_{41} & 1 & E_{23} \cup E_{24}E_{43} \\ E_{31} \cup E_{34}E_{41} & E_{32} \cup E_{34}E_{42} & 1 \end{bmatrix} .$$

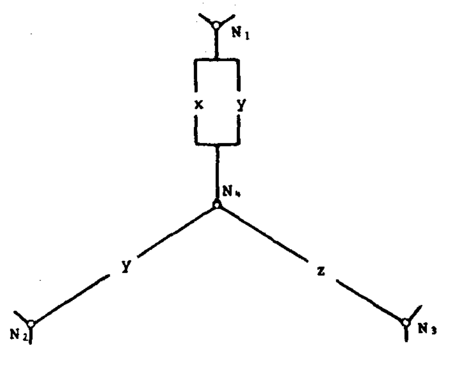
Ako u multipolu sa strukturnom matricom

$$[E_{ij}] , \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

eliminišemo jedan čvor N_k , dobijamo multipol čija je strukturna matrica

$$[E_{ij} \cup E_{ik}E_{kj}] , \quad i,j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\} .$$

Primer 10. Dat je multipol sa četiri čvora N_1, N_2, N_3, N_4 (sl. 13).

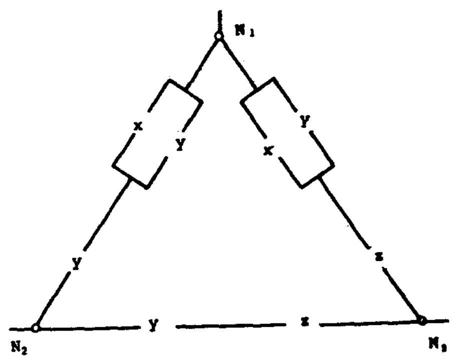


Sl. 13.

Njegova strukturna matrica je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x\cup y \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ x\cup y & y & z & 1 \end{bmatrix}.$$

Eliminacijom čvora N_4 dobijamo multipol (sl. 14)



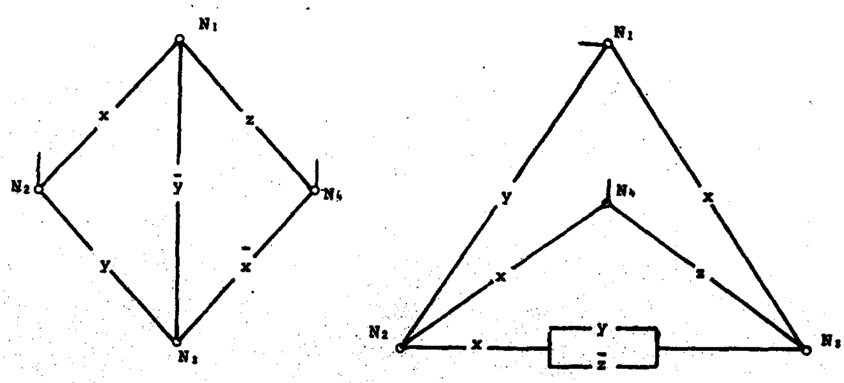
Sl. 14.

Strukturna matrica multipola (sl. 14) je

$$\begin{bmatrix} 1 & y(x\cup y) & z(x\cup y) \\ y(x\cup y) & 1 & yz \\ z(x\cup y) & yz & 1 \end{bmatrix}$$

ZADACI

Zadatak 1. Napisati strukturne matrice i strukturne matrice provodljivosti multipola (sl. 15)

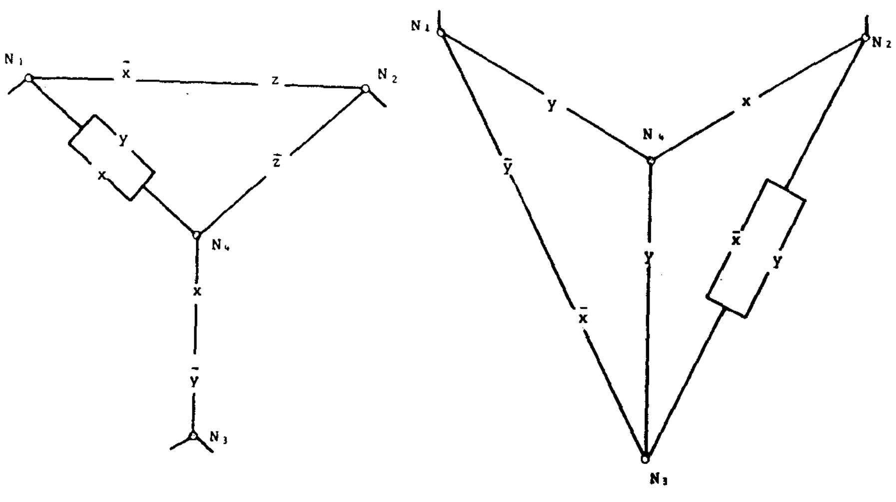


Sl. 15.

Zadatak 2. Konstruisati multipolove čije su strukturne matrice

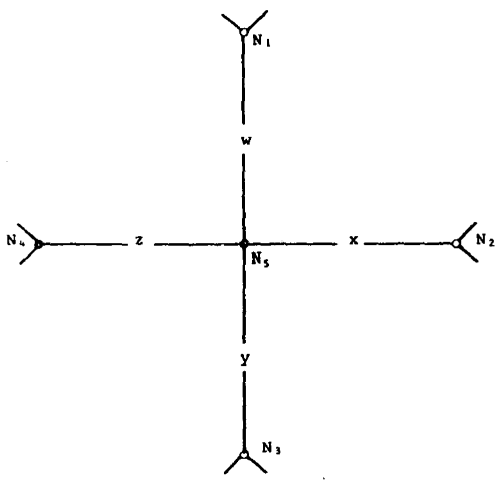
$$\begin{bmatrix} 1 & x\cdot y & x\cup\bar{y} \\ x\cdot y & 1 & x(y\cup z) \\ x\cup\bar{y} & x(y\cup z) & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & x(y\cup\bar{z}) \\ 0 & 1 & x\cdot y\cdot z \\ x(y\cup\bar{z}) & x\cdot y\cdot z & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3. Eliminisati čvor N_4 u multipolovima (sl. 16).



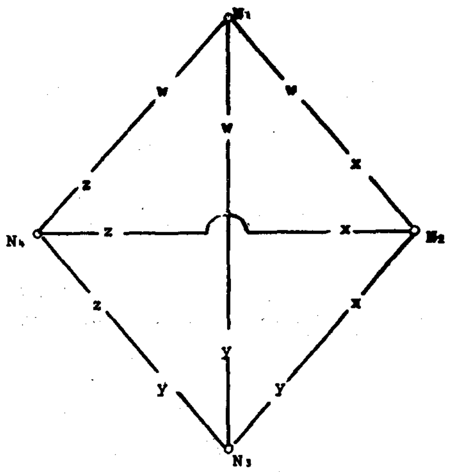
Sl. 16.

Zadatak 4. U multipolu (sl. 17) eliminisati čvor N_5



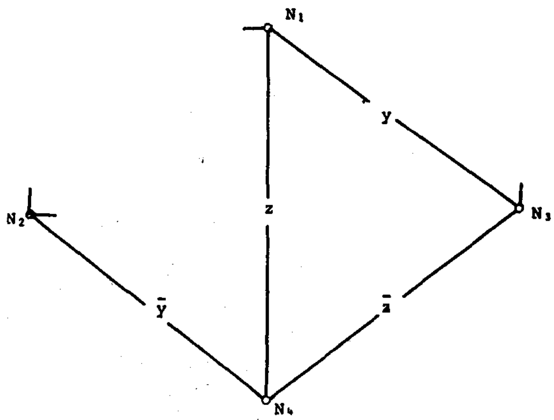
Sl. 17.

Rešenje: Sl. 18.



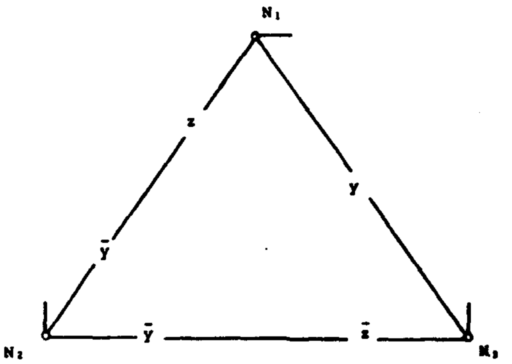
Sl. 18.

Zadatak 5. U multipolu (sl. 19) eliminisati čvor N_4



Sl. 19.

Rešenje: Sl. 20.



Sl. 20.

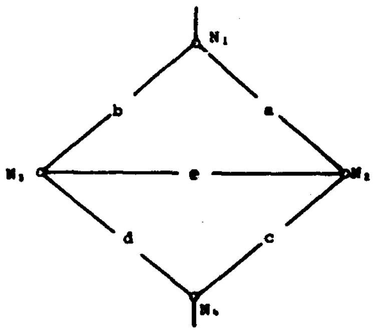
Zadatak 6. Konstruisati multipol sa štrukturnom matricom provodljivosti $M = [p_{ij}]$, $i,j = 1,2,3,4$, gde je

$p_{13} = b \cup ae \cup acd$,

$p_{14} = ac \cup bd \cup aed \cup bec$,

$p_{23} = e \cup ab \cup cd$.

Rešenje: Sl. 21.



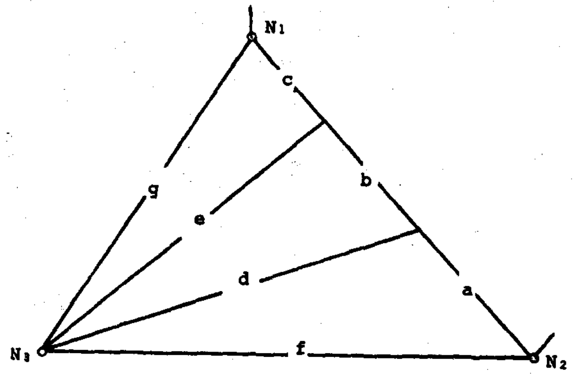
Sl. 21.

Zadatak 7. Konstruisati multipol sa strukturnom matricom provodljivosti $M = [p_{ij}]$, $i,j = 1,2,3$, gde je

$p_{12} = abc \cup gf \cup cef \cup ceda \cup gda \cup abeg \cup bcdf$,

$p_{13} = g \cup ce \cup cdb \cup cbaf$.

Rešenje: Sl. 22.



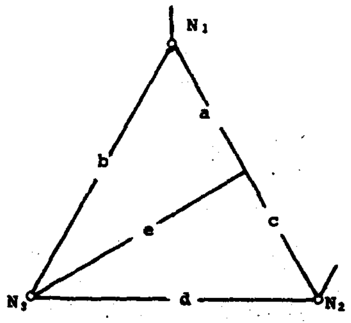
Sl. 22.

Zadatak 8. Konstruisati multipol sa strukturnom matricom provodljivosti $M = [p_{ij}]$, $i,j = 1,2,3$, gde je

$p_{12} = ac \cup bd \cup aed \cup bec$,

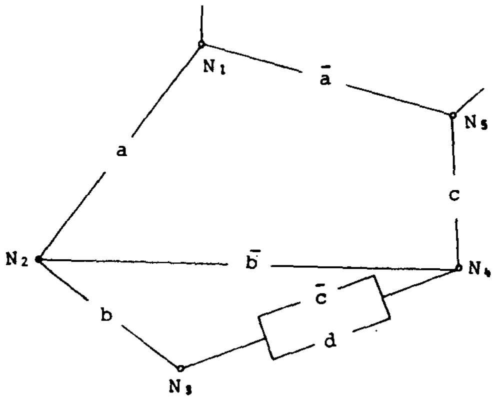
$p_{13} = b \cup ae \cup acd$.

Rešenje: Sl. 23.



Sl. 23.

Zadatak 9. Dat je multipol (sl. 24).



Sl. 24.

a) Napisati strukturnu matricu S

b) Napisati strukturnu matricu provodljivosti P

c) Odrediti broj n, gde je

$$\underbrace{S \odot S \odot \ldots \odot S}_{n} = P$$

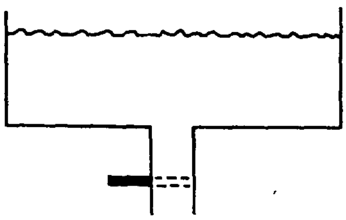
d) Eliminisati čvor N_4.

GLAVA X

TRANZISTORI

U Glavi VIII naveli smo neke realizacije Bulovih funkcija pomoću dipola klase Π. Tamo smo naveli da je najednostavniji element jedne električne mreže, kontakt. Sada ćemo se upoznati sa još jednim elementom električne mreže - tranzistorom. On će nam poslužiti za neke realizacije Šeferovih i Lukašijevićevih funkcija (videti [32], [38] i [44]).

Analogija jednog tranzistora je sledeća: uočimo jedan rezervoar za vodu koji na dnu ima ispusnu cev sa ventilom (sl. 1).

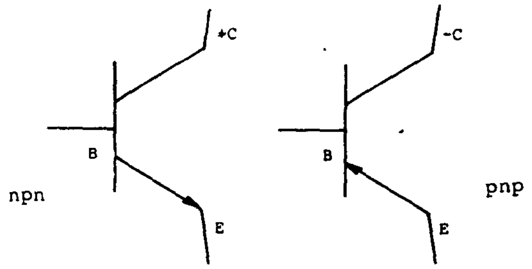


Sl. 1.

Ventilom možemo regulisati odliv vode iz rezervoara. Ako je ventil zatvoren voda ne otiče, a ako je otvoren, voda otiče. Analogan ovome je elektronski tranzistor kod koga kolektor odgovara vodi u rezervoaru, baza odgovara ventilu, a emitor odlivnoj cevi.

Prema materijalu od kojeg su pravljeni tranzistori se dele u dve grupe: npn i pnp. Mi ovde nećemo ulaziti u vrlo različite tehničke konstrukcije ovih tranzistora. Nama je cilj da preko tranzistora realizujemo Šeferove funkcije. Zato dajemo najjednostavniju šemu tranzistora kao elementa električne mreže.

Ako sa C označimo kolektor, sa B bazu, a sa E emitor, tada su tranzistori npn i pnp prikazani na sl. 2.



Sl. 2.

1. PROMENLJIVE PRIDRUŽENE TRANZISTORU X

Svakom tranzistoru X možemo pridružiti dve promenljive: t i x koje uzimaju vrednost iz skupa L_2 na sledeći način:

$t = 0$ ako je tranzistor X zatvoren

$t = 1$ ako je tranzistor X otvoren

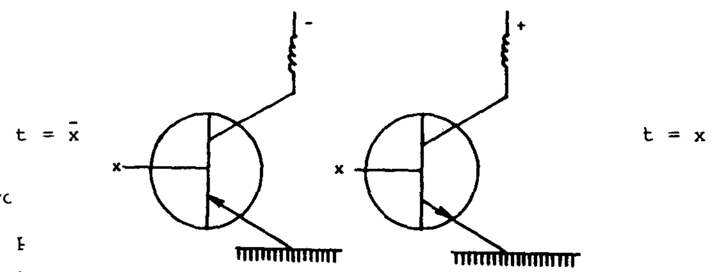
$x = 0$ ako je potencijal opao

$x = 1$ ako je potencijal narastao.

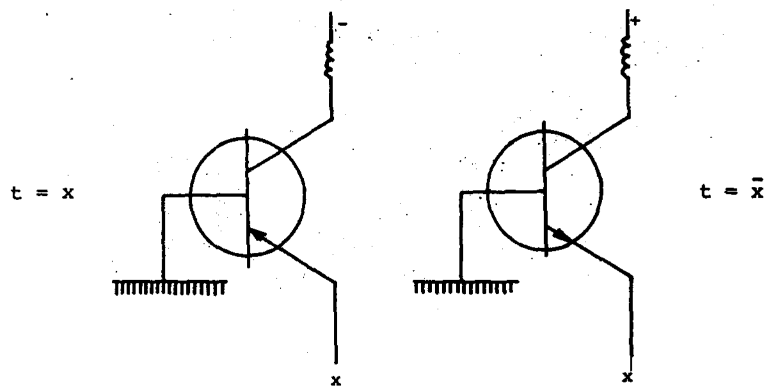
U tehnici postoje razne konvencije. Mi ćemo prihvatiti sledeću:

$$t = f(x).$$

Posmatrajmo četiri tranzistora (slike 3, 4, 5 i 6)



Sl. 3. i 4.



Sl. 5. i 6.

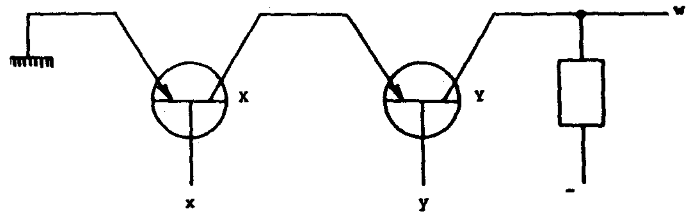
Funkcija rada tranzistora iz slika 3, 4, 5. i 6.date su sledećom tabelom

Slika	x	t	Strukturne formule
3	1	0	$t = \bar{x}$
	0	1	
4	1	1	$t = x$
	0	0	
5	1	1	$t = x$
	0	0	
6	1	0	$t = \bar{x}$
	0	1	

Tabela 1.

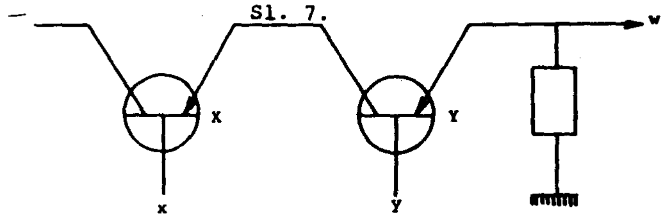
2. SERIJSKO VEZIVANJE TRANZISTORA

Dva tranzistora X i Y mogu biti vezani serijski (slike 7, 8, 9.i 10).



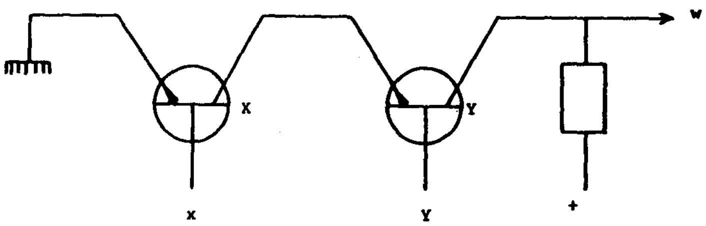
$W = x \top y$

Sl. 7.



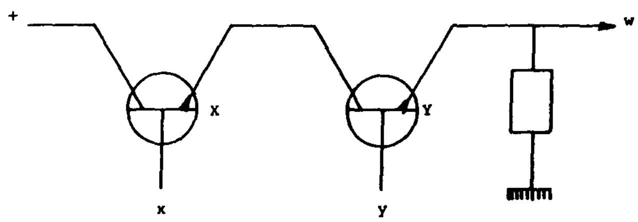
$W = x \cup y$

Sl. 8.



$W = x \perp y$

Sl. 9.



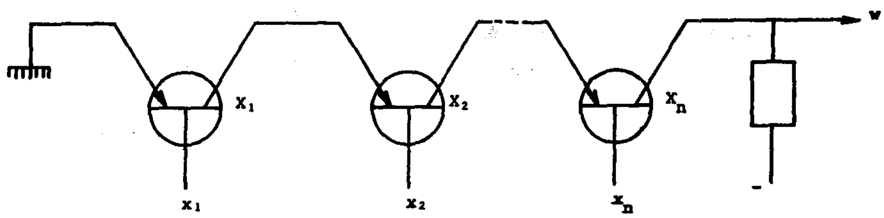
$W = x \cdot y$

Funkcije rada tranzistora X, Y koji su vezani serijski, kao i njihove strukturne formule, date su u sledećoj tabeli

Slika	x	y	t_x	t_y	t	w	Strukturna formula
7	0	0	1	1	1	1	$t_x = \bar{x}$, $t_y = \bar{y}$
	0	1	1	0	0	0	$W = t = t_x \cdot t_y = \bar{x}\bar{y} = x \top y$
	1	0	0	1	0	0	
	1	1	0	0	0	0	
8	0	0	1	1	1	0	$t_x = \bar{x}$, $t_y = \bar{y}$
	0	1	1	0	0	1	
	1	0	0	1	0	1	$W = \bar{t} = \overline{t_x \cdot t_y} = \overline{\bar{x}\bar{y}} = x \cup y$
	1	1	0	0	0	1	
9	0	0	0	0	0	1	$t_x = x$, $t_y = y$
	0	1	0	1	0	1	
	1	0	1	0	0	1	$W = \bar{t} = \overline{t_x \cdot t_y} = \overline{xy} = x \perp y$
	1	1	1	1	1	0	
10	0	0	0	0	0	0	$t_x = x$, $t_y = y$
	0	1	0	1	0	0	
	1	0	1	0	0	0	$W = t = t_x \cdot t_y = x \cdot y$
	1	1	1	1	1	1	

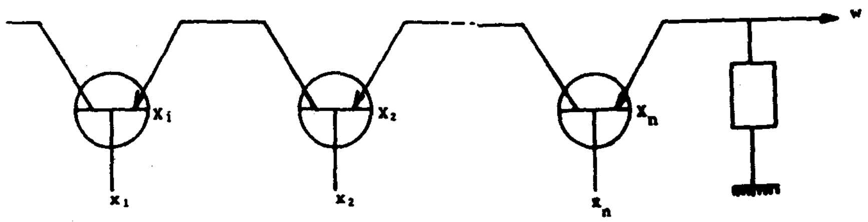
Tabela 2.

Dva ili više tranzistora X ,X ,...,X_n, $n \geqslant 2$, mogu biti vezani serijski (slike 11, 12, 13. i 14).



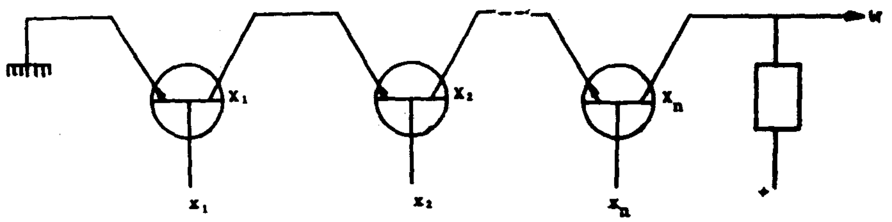
$$W = \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 11.



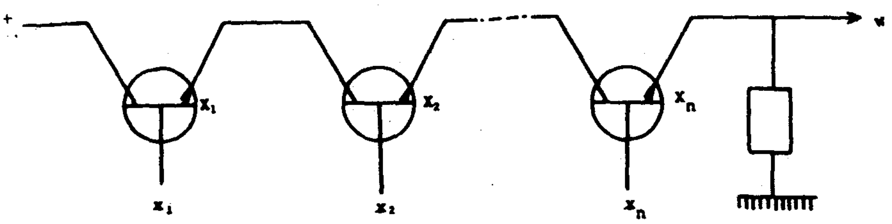
$$W = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 12.



$$W = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 13.



$$W = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 14.

Funkcije rada tranzistora

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

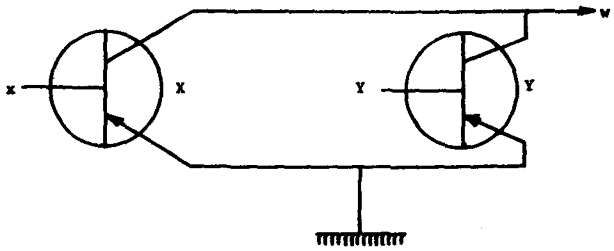
koji su vezani serijski, kao i njihove strukturne formule date su u sledećoj tabeli

Slika	$x_1 x_2 \ldots x_n$	t	W	Strukturna formula
11	ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$	1	1	$W = t = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i =$
	u ostalim slučajevima	0	0	$= \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i$
12	ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$	1	0	$W = \bar{t} = \overline{\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i} =$
	u ostalim slučajevima	0	1	$= \bigcup_{i=1}^{n} x_i$
13	ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$	1	0	$W = \bar{t} = \overline{\prod_{i=1}^{n} x_i} =$
	u ostalim slučajevima	0	1	$= \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i$
14	ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$	1	1	$W = t = \prod_{i=1}^{n} x_i$
	u ostalim slučajevima	0	0	

Tabela 3.

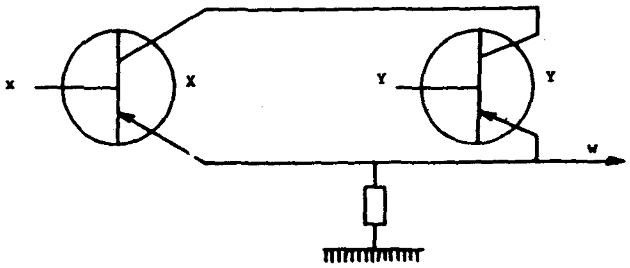
3. PARALELNO VEZIVANJE TRANZISTORA

Dva tranzistora X i Y mogu biti vezani paralelno (slike 15, 16, 17, 18, 19. i 20).



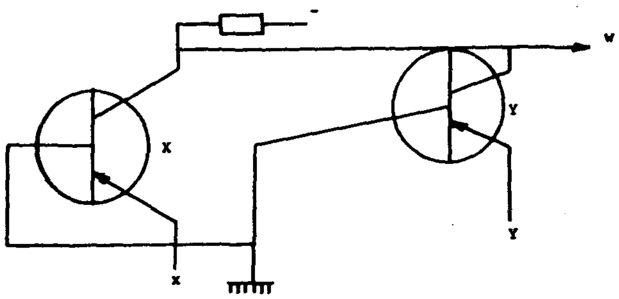
$W = x \perp y$

Sl. 15.



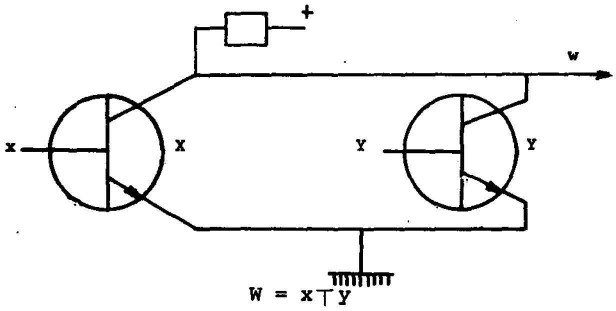
$W = x \cdot y$

Sl. 16.



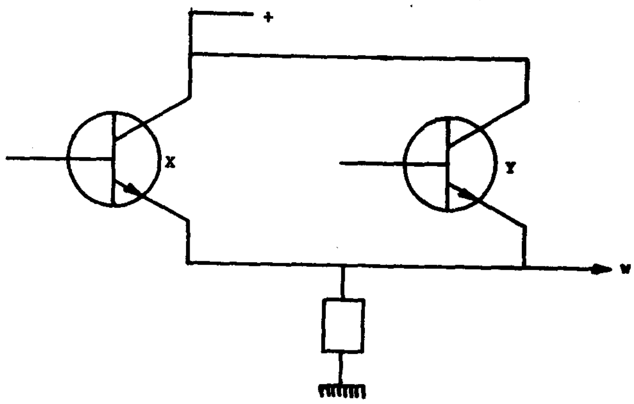
$W = x \cup y$

Sl. 17.



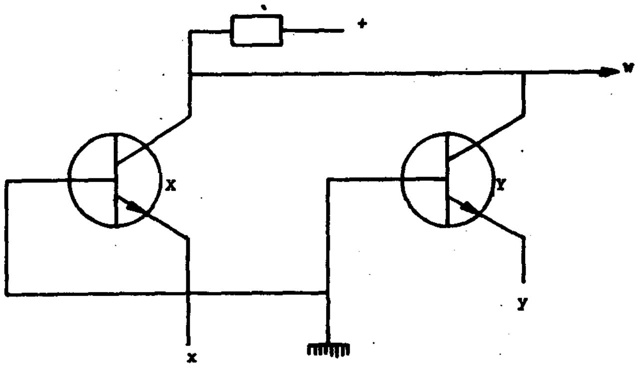
$W = x \top y$

Sl. 18.



$W = x \cup y$

Sl. 19.



$W = x \cdot y$

Sl. 20.

Funkcije rada tranzistora X,Y koji su vezani paralelno, kao i njihove strukturne formule date su sledećom tabelom:

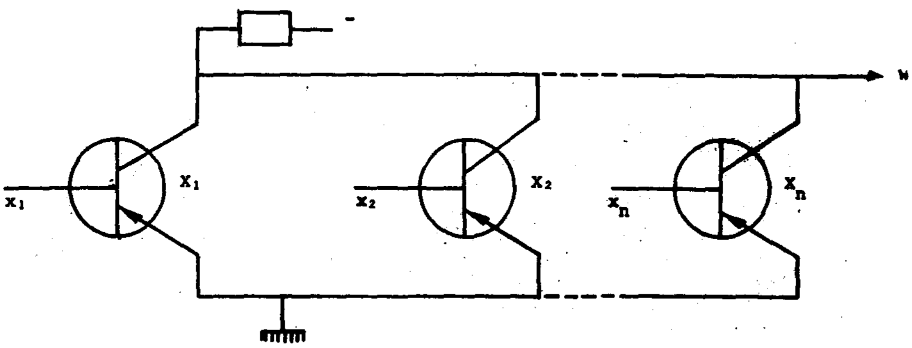
Slika	x	y	t_x	t_y	t	W	Strukturna formula
15	0	0	1	1	1	1	$t_x = \bar{x}$, $t_y = \bar{y}$
	0	1	1	0	1	1	$t = t_x \cup t_y$
	1	0	0	1	1	1	
	1	1	0	0	0	0	$W = t = \bar{x} \cup \bar{y} = x \perp y$
16	0	0	1	1	1	0	$t_x = \bar{x}$, $t_y = \bar{y}$
	0	1	1	0	1	0	$t = t_x \cup t_y$
	1	0	0	1	1	0	$w = \bar{t} = x \cdot y$
	1	1	0	0	0	1	
17	0	0	0	0	0	0	$t_x = x$, $t_y = y$
	0	1	0	1	1	1	$t = t_x \cup t_y$
	1	0	1	0	1	1	$w = t = x \cup y$
	1	1	1	1	1	1	
18	0	0	0	0	0	1	$t_x = x$, $t_y = y$
	0	1	0	1	1	0	$t = t_x \cup t_y$
	1	0	1	0	1	0	
	1	1	1	1	1	0	$w = \bar{t} = \overline{x \cup y} = x \top y$
19	0	0	0	0	0	0	$t_x = x$, $t_y = y$
	0	1	0	1	1	1	$t = t_x \cup t_y$
	1	0	1	0	1	1	$w = t = x \cup y$
	1	1	1	1	1	1	
20	0	0	1	1	1	0	$w = \bar{t} = x \cdot y$
	0	1	1	0	1	0	
	1	0	0	1	1	0	$t_x = \bar{x}$, $t_y = \bar{y}$, $t = t_x \cup t_y$
	1	1	0	0	0	1	

Tabela 4.

Dva ili više tranzistora

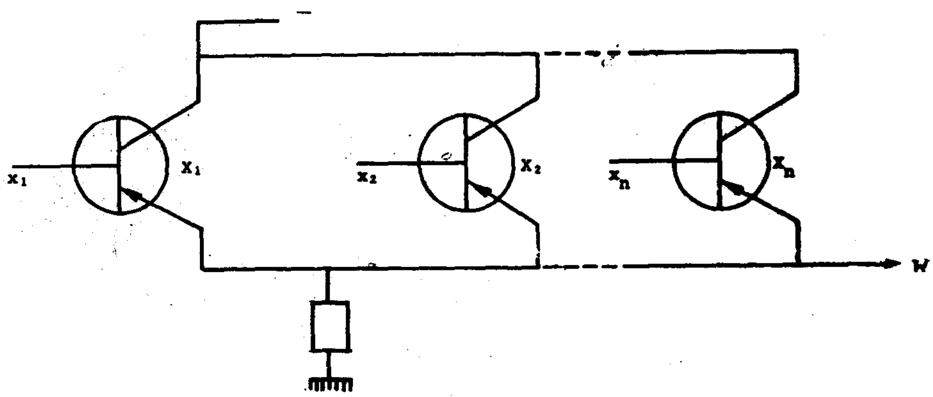
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \, , \quad n \;\; 2,$$

mogu biti vezani paralelno (slike 21, 22, 23, 24, 25. i 26).



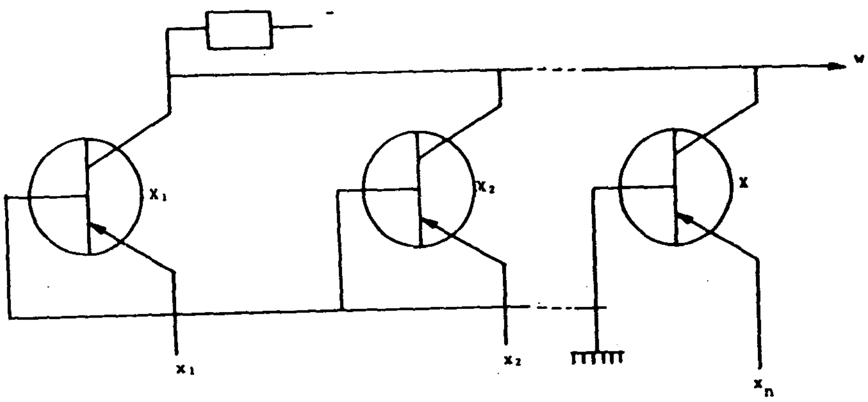
$$W = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 21.



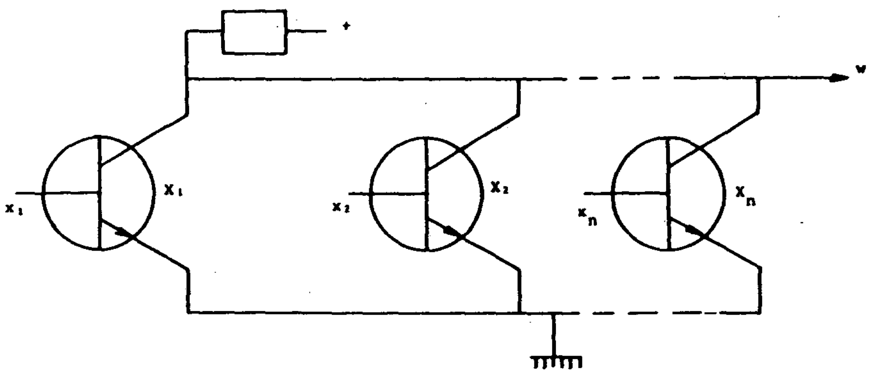
$$W = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 22.



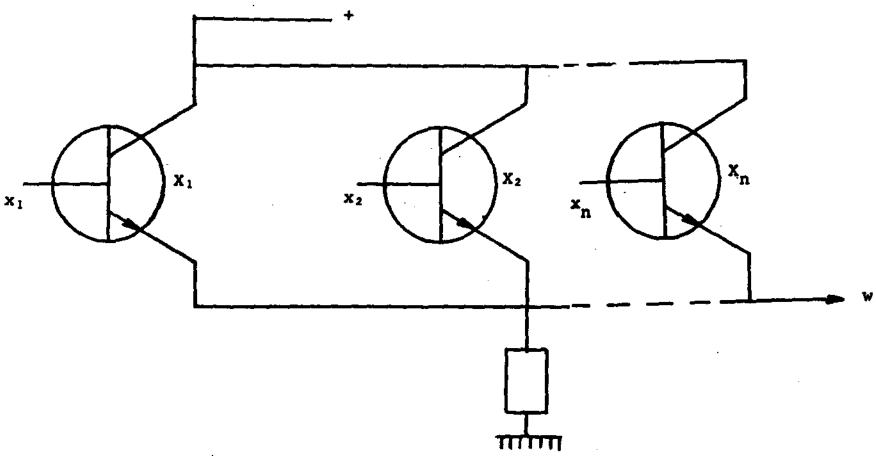
$$W = \bigcup_{i=1}^{n} x_n$$

Sl. 23.



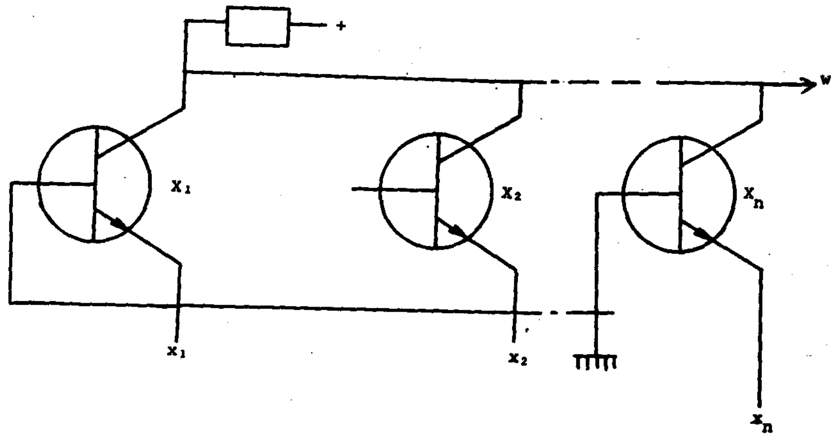
$$W = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 24.



$$W = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 25.



$$W = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Sl. 26.

Funkcije rada tranzistora $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koji su vezani paralelno kao i njihove strukturne formule, date su sledećom tabelom:

Slika	$x_1 x_2 \ldots x_n$	t	w	Strukturna formula
21	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$	0	0	$w = t = \bigvee_{i=1}^{n} \bar{x}_i =$
	u ostalim slučajevima	1	1	$= \perp_{i=1}^{n} x_i$
22	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$	0	1	$w = \bar{t} = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} \bar{x}_i} =$
	u ostalim slučajevima	1	0	$= \prod_{i=1}^{n} x_i$
23	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$	0	0	$w = t = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$
	u ostalim slučajevima	1	1	
24	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$	0	1	$w = \bar{t} = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} x_i} =$
	u ostalim slučajevima	1	0	$= \top_{i=1}^{n} x_i$
25	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$	0	0	$w = t = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$
	u ostalim sličajevima	1	1	
26	ako je $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$	0	1	$w = \bar{t} = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} x_i} =$
	u ostalim slučajevima	1	0	$= \prod_{i=1}^{n} x_i$

Tabela 5.

B I B L I O G R A F I J A

[1] S.B. AKERS, On a theory of Boolean functions, Siam J.7,1959.

[2] G. ANDREOLI, Algoritmi matriciali ad anloghi su algebre booleane, Giorn. Mat. Battaylini 88, 1960.

[3] C. BERGE, Théorie des graphes et sec applications, Dunod,Paris, 1963.

[4] E. BURLACU, On the inverses of Boolean matricas, Inst. Politehn. Timisoara, 14 (28), facs. I, 1969.

[5] J. BOITTIAUX, Mathématiques de L'informatique, Tome 1, Tome 2, Dunod, Paris, 1969.

[6] J. BRUNIN, Logique linaire et commutation, Dunod, Paris,1966.

[7] G. BOOLE, The Mathematical Analysis of logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning, Reprints 1948, 1951.

[8] M. CARVALLO, Monographie des Treillis et Algébre da Boole,Paris, 1966.

[9] M. CARVALLO, Principes et Applications de l'Analyse Booléanne, Paris, 1970.

[10] M. CARVALLO, Logique a Trois Valeurs, Logique a Seuil, Paris, 1968.

[11] I. CHINAL, Techniques Booléennes et calculateurs arithmétiques, Dunod, Paris, 1967.

[12] C. DRAGUSIN, The applications of Boole. ı equations to the study of multipoles with rectifiers (na rumunskom) Stud.Cerc. Mat. 24, Bucuresti, 1972.

[13] V. DEVIDE, Matematička logika I, Beograd, 1964.

[14] F. DEGOULANGE, R. CLÉMENT, Automatique algébre de Boole, Dunod, Paris, 1971.

[15] H.G. FLEGG, L'algebre de Boole et son utilisation, Dunod,Paris, 1967.

[16] R. FAURE, E. HEURGON, Structures ordinnées et algébres de Boole, Paris, 1971.

[17] B.M. GLUŠKOV, Sintez cifrovih avtomatov, Moskva, 1962.

[18] K. GILEZAN, Méthode a resoudre des relations dont les resolutions appartiennent a un ensemble fini, Publ. Inst. Mat. 10, (24), Beograd, 1970.

[19] K. GILEZAN, Quelques généralisations de la programmation pseudo-booléanne, Mathematica Balkanica 1, Beograd, 1971.

[20] K. GILEZAN, Une généralisation du théoreme sur les equations de Boole, Publ. Inst. Mat. 11, Beograd, 1971.

[21] K. GILEZAN, B. LATINOVIĆ, A method of determining the minimum of function $f : L_{;}^{n} \to C$ (na ruskom) Mat. vesnik 7 (22), Beograd, 1970.

[22] K. GILEZAN, B. LATINOVIĆ, A method of determining the minimum of a function $f : L_{p}^{n} \to C$ (na ruskom) Mat. vesnik 7(22), Beograd, 1970.

[23] R.P HALMOS, Lectures on Boolean algebras, New Jork, 1963.

[24] P.L. HAMMER, I. ROSENBERG, Application of pseudo-Boolean programming to the theory of graphs, Z. Wahrscheinlichkeits -theorie und Verw. Gabiete 3, 1964.

[25] P.L. HAMMER, S. RUDEANU, Boolean Methods in Operations Research and Related Areas, Berlin-New Jork, 1968.

[26] G.E. HOERNES, M.F. HEILWEIL, Introduction a l'algebre de Boole et aux dispositifs logiques, Dunod, Paris, 1970.

[27] J. KUNTZMANN, Algébre de Boole, Dunod, Paris, 1968.

[28] J. KUNTZMANN, P. NASLIN, Algebre de Boole et machines logiques, Dunod, Paris, 1967.

[29] S. KOLDUEL, Logičeskij sintez relejnih ustrojstv, Moskva, 1962.

[30] Dj. KUREPA, Viša algebra I i II, Zagreb, 1968.

[31] LAGASSE, Logique combinatoire et séquentiele, Dunod, Paris, 1971.

[32] L. LIVOVSCHI, Circuite cu contacte de relee,Bucuresti,1968.

[33] ST. MATEI, Formule de resolvare a unor ecuatii boleene, Buletinul stiin. si teh., n 14 (28), Timisoara, 1969.

[34] GR.C. MOISIL, Teoria Algebrica a Mecanismelor Automate, Bucuresti, 1959.

[35] GR.C.MOISIL, Scheme cu Comanda Directa cu Contacte si Relee, Bucuresti, 1959.

[36] GR. C. MOISIL, Théorie Structurelle des Automates Finis,Paris, 1967,

[37] GR.C. MOISIL, Functionarea in mai multi timpi a schemelor cu relee ideale, Bucuresti, 1960.

[38] GR.C. MOISIL, Circuite cu tranzistori I si II, Bucuresti, 1960,

[39] D.S. MITRINOVIĆ, D.Ž. DJOKOVIĆ, Matematički modeli u fizici i tehnici, Beograd, 1966.

[40] E. MENDELSON, Introduction to methematical logic, London, 1967.

[41] P. NASLIN, Circuits logiques et automatismes a séquences,Dunod, Paris, 1965.

[42] M.D. PAPIN, Y. MLGRANGE, Exercices sur L'algebre de Boole, Paris, 1966.

[43] N. PAREZANOVIĆ, Računske mašine i programiranje - Osnovi računske tehnike, Privredno-finansijski vodić, Beograd, 1972 (1974)

[44] J.P. PERRIN, Systemes logiques, Tome 1, Tome 2, Dunod, Paris 1967.

[45] S. PREŠIĆ, Une métode de résolution des équations dont toutes les solutions appartiennet a un ensemble fini doné, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 272, 1971.

[46] S. PREŠIĆ, Elementi matematičke logike, Beograd, 1968.

[47] J.P. RAYMOND, J. MINNE, Les schémas d'automatisme, Dunod, Paris, 1971.

[48] M. RUEFF, M. JEGER, Set and Boolean Algebra, London, 1970.

[49] S. RUDEANU, Boolean aquations and their applications to the Study of bridge circuits. I. Bull. Math. Soc. Sci. Math.Phys. R.P. Roumane 3(51), 1959,

[50] S. RUDEANU, On the definition of Bolean algebras by means of binary operations (na ruskom). Rav. Math. Pures Appl. 6,1961.

[51] S. RUDEANU, Boolean equations and their applications to the study of bridge circuits II (na rumunskom). Com. Acad. R. P. Romina 11, 1961.

[52] S. RUDEANU, Boolean functions and Sheffer functions (na ruskom), Rev. Math. Pures, Appl. 6, 1961.

[53] S. RUDEANU, On solving Boolean equations by the Lowenheim method (na rumunskom) Stud. Cerc. Mat. 13, 1962.

[54] S. RUDEANU, Axiomele Laticilor si ale Algebrelor Booleane, Bucuresti, 1963.

[55] S. RUDEANU, Boolean functions and equations, Norhh-Holland, Amsterdam. 1974.

[56] H.M. CHEEFER, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants,Trans. Amer. Math. Cos. 14, 1913.

[57] R. SIKORSKI, Boolean Algebres, Springer Verlag, 1967.

[58] Č.V. STANOJEVIĆ, On a system of set equations (na srpskom), Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, 1952.

[59] M. STOJAKOVIĆ, Algoritmi i automati, Novi Sad, 1972.

[60] C. TANASESCU, Certain applications of Boolean equations to the algebraic theory of grammar (na rumunskom) Stud. Cerc. Mat. 19, 1967.

[61] R. TOŠIĆ, Zbirka zadataka iz algebarskih osnova teorije automata, Novi Sad, 1972.

[62] A. ŽELEZNIKAR, Solvability problems of propositional equations, Glasnik Mat. - Fiz. Astronom. ser. II, 15, Zagreb, 1960.

INDEKS POJMOVA

K. Gilezan – B. Latinović

BULOVA ALGEBRA

BEOGRAD

1977

Jezičku redakciju izvršio .... Nikola Medvedev

Korekture izvršili .... Koriolan Gilezan
Boško Latinović

Tiraž .... 1000 primeraka

Štampanje završeno .... aprila 1977.

SAVREMENA RAČUNSKA TEHNIKA I NJENA PRIMENA

U ovoj seriji Matematičkog instituta dosada su publikovane sledeće knjige:

1. *Nedeljko Parezanović*
   Algoritmi i programski jezik FORTAN IV,
   Beograd, 1972., str. 272.

2. *Pavle Pejović i Nedeljko Parezanović*
   Analogni elektronski računari i njihova primena
   Beograd, 1972.,str.321.

3. *Dragiša Stojanović*
   Ekonomsko-matematički modeli linearnog programiranja,
   Beograd, 1973.,str. 84.

4. *Jurij Stepanenko*
   Dinamika prostornih mehanizama, Beograd, 1974.,str.282

U pripremi za štampu :

Mirko Stojaković
Algoritmi i automati, Beograd,