Математички факултет
Универзитет у Београду

**М а с т е р   р а д**

# Примена оригамија у геометријским конструкцијама

Студент: Јелена Новаковић 1117/2014

Ментор: проф. др Зоран Петровић

Београд,
2016.

# Садржај

**1 Оригами** **2**

**2 Алгебарски конструктибилни бројеви** **7**
2.1 О проширењима поља . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
2.2 Конструктибилни бројеви . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
2.3 Примене . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**3 Сабрани аксиоми оригамија** **25**

**4 Оригами конструктибилни бројеви** **27**

**5 Оригами конструкције** **38**
5.1 Трисекција угла . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
5.2 Дуплирање коцке . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
5.3 Оригами коцка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

**6 Закључак** **47**

# 1 Оригами

Реч оригами настала је од две јапанске речи ,,ори”, у значењу савити и ,,ками”, једне од неколико јапанских речи за папир. То је традиционална јапанска вештина креирања модела од папира. Папир се савија у разне моделе, не сме се сећи или лепити, може бити једнобојан или двобојан.

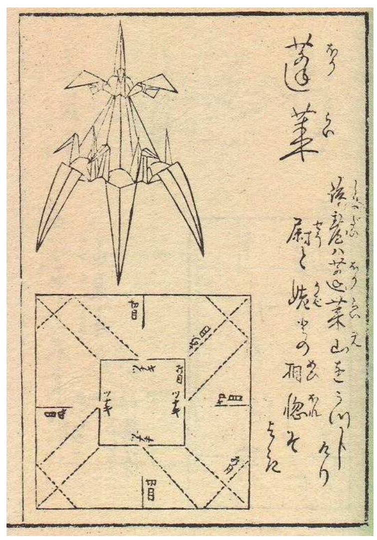
Ова уметност постаје све популарнија. Сваким даном повећава се број љубитеља оригамија у свету. Расте број објављених књига, основаних организација и отворених страница на Интернету. Популарност и раширеност оригамија показују организације попут: Origami Deutchland, Mouvement Francais des Plieurs de Papier, Israeli Origami Center, Centro Diffusione Origami (Italy), Japan Origami Academic Society, Origami USA, Asociaci Espanola de Papirofleksia, British Origami Society...

Задивљујуће је то што се многи запањујући комади оригамија праве од једног комада папира, без исечака. То је такозвани традиционални оригами, код кога се конструкције изводе коришћењем једног листа папира који има облик квадрата или правоугаоника. А разликујемо и модуларни оригами, код кога се различити индивидуални делови повезују у једну целину.

*Слика 1.*

Нико не зна када је уметност оригамија измишљена, али, пошто је човек прво морао да измисли папир, слободно можемо рећи да ова техника не може бити старија од 2000 година. Иако има јапанско име, појединци верују да је вештина потекла из Кине. Ту тврдњу не можемо сасвим одбацити, јер се корени многих уметничких форми које се данас сматрају својственим различитим земљама, налазе управо у Кини. Иако је тамо највероватније и настао, оригами је прави процват доживео у Јапану, где се и третира као национална уметност. Већ у 8. веку, постао је саставни део разних церемонија у Јапану. Самураји су размењивали поклоне који су на себи имали украсе ,,но ши” - савијене траке папира. За време обреда шинтоистичких венчања, коришћени су оригами лептири који су симболизовали младенце. Постоји око хиљаду модела који се сматрају ,,традиционалним оригамијем”и који се у јапанској култури преносе са колена на колено, најчешће с мајке на децу или између деце. Штавише, све до средине 20. века сматрало се да је оригами разонода за жене, које папирне моделе праве за венчања, сахране и друге прилике, или забава за децу. Поред Јапана, ова вештина се појавила и у другим деловима света, на пример, у Шпанији где је позната под именом папирофлексиа.

Канамодо, најстарија књига са упутствима за израду предмета који личе на оригами, настала је у 17. веку. Најстарија књига о оригамију за разоноду јесте ,,Hiden senbazuru orikata"из 1797. године. Наслов би се грубо могао превести као ,,Тајна техника савијања хиљаду ждралова". А најважнија личност у историји оригамија и његовом развоју био је Akira Yoshizawa (1911 – 2005), који је древну јапанску традицију савијања папира подигао на ниво нове модерне уметности. За живота је крирао око 50000 модела, објавио 18 књига и инспирисао нове генерације светских оригами мајстора. Њему дугујемо нове технике обликовања оригами модела, као и начин записивања савијања. Излагао је у многим метрополама света.



*Слика 2.*

Оригами се у принципу прави од папира, иако се могу користити и другачији материјали, као што је тканина и сл. За вежбу и неке једноставне моделе често се користи папир за фотокопирање стандардне густине $70 - 90g/m^2$. Поред тога, могуће је користити и разне друге врсте папира - фолију, папир за увијање, хамер, пелир папир итд. Постоји и специјализован папир за оригами који је најчешће двобојан и у облику квадрата. Иако је од квалитетнијег папира лакше направити лепе моделе, за почетак није нужно имати овакав тешко доступан и скуп папир.

У Јапану се често користи ,,ваши" - специјалан папир чвршће структуре направљен од пулпе добијене из коре неколико карактеристичних дрвенастих врста које расту у Јапану.

Постоји и посебна грана оригамија која користи новчанице за прављење модела и то најчешће амерички долар.

*Слика 3.*

Оригами се данас користи у образовању, науци и уметности, инспирација је модних и архитектонских креација, покреће нове идеје. Последњих година налази примену у подручјима као што су развојни и терапијски програми. Када вежбате оригами, активирате цео мозак, обе његове хемисфере. Тактилне, моторне и визуелне зоне мозга су стимулисане, побољшава се координација око-рука и фина моторика, меморија, невербално мишљење, пажња, стрпљење, 3D разумевање (сналажење у просторним односима), машта и креативност раде напорно. Јавља се пријатно расположење и емоције задовољства (понос на свој рад), што утиче на самопоуздање и позитивну слику о себи, а развија се и смисао за естетику. Такође, према најновијим истраживањима, када се ангажују обе руке, покрећу се моторни импулси који активирају део мозга задужен за језик и говор.

У школама су почели да схватају да је то изузетан образовни материјал с много могућности. Поједини наставници математике користе оригами да би обогатили лекције из геометрије, учење разломака и вештину решавања математичких проблема. Наставници техничког образовања користе га у изради макета и модела. У медицини оригами се користи у физикалној терапији у оквиру терапија рехабилитације мишића, а психолози га користе у разним менталним и развојним програмима. Одлично је средство за ослобађање од стреса. Погодан је за све генерације - од деце у развоју, до старијих људи.

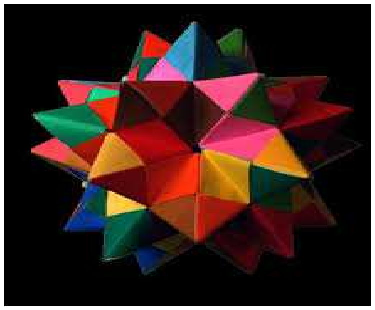
Израђивање оригами модела прикладно је за рад у групама, јер се уз тимски рад остварује и социјализација. Ученици усвајају нове математичке појмове и уочавају нове односе у простору или равни. За савијање папира користе властите руке које прате одређен низ корака и дају видљиве резултате. Да би резултат био успешан, кораци се морају спровести на тачно описан начин. Тако се развија спретност и прецизност у раду.

Оригами је и извор забаве. Многи људи уживају у изради модела, а своје идеје воле делити с другим љубитељима оригамија. Постоје и бројне оригами организације које одржавају редовне конвенције сваке године. Свакодневно расте број објављених књига, основаних друштава и организација, а на Интернету се могу наћи бројне странице с оригами дијаграмима и упутствима за савијање, различите активности везане уз оригами као и радови посвећени оригамију са научне стране.

Као што је већ поменуто, оригами има своју примену у математици, али и у другим подручјима као што су електротехника или оптика. Оригамијем се могу израдити хиљаде разних објеката, од змајева и птица преко цвећа до разних математичких модела. Сложенији математички модели израђују се пре свега коришћењем модуларног оригамија. Он се примењује за визуализацију одређених геометријских појмова, јер очигледност у настави математике има важну улогу. Многе аксиоме, теореме и дефиниције је много лакше разумети ако оне добију свој визуелни приказ. А помоћу модуларног оригамија можемо да прикажемо тродимензиону геометрију, Платонова тела, полиедре, централну и осну симетрију, полигоне, паралелност и нормалност, подударност и сличност, површину и запремину, углове и симетрале углова... Такође, можемо доказати неке теореме.

Већ у нижим разредима основне школе ученици почињу изводити једноставне геометријске конструкције користећи геометријски прибор: лењир и шестар. Материјал потребан за рад је један или неколико листова папира. Нису потребне ни маказе ни лепак. Оваква врста материјала доступна је у готово свим школама, стога се врло лако може осмислити забаван, занимљив и поучан час математике, који ће побудити интерес ученика за даља, самостална истраживања. Изненађујуће, испада да је оригами много моћнији од конструкција лењиром и шестаром, јер многе ствари које не могу да се конструишу коришћењем лењира и шестара, као што је дуплирање коцке и дељење једног угла на три дела, могу се направити помоћу савијања папира.

У елементарној геометрији не постоји алгоритам којим би се, у општем случају, могло одредити који се конструктивни задатак може решити помоћу лењира и шестара, а који не. Одговор на ово питање добија се применом аналитичке геометрије, уз теорију алгебарских једначина. А пошто је проучавање оригамија прилично новије, не постоји ограничење која врста конструкција може бити извршена помоћу савијања папира.

*Слика 4.*

Циљ овог мастер рада је упознавање са применом оригамија у неким геометријским конструкцијама, као и могућа примена истог у настави математике, услед немогућности шестара и лењира. Рад се може поделити на 4 целине.
Прво поглавље је уводног карактера и оно чини прву целину у раду. У овом делу презентован је оригами, историјат његовог настанка, са посебним акцентом на његову примену у разним областима и математици, пре свега.
Други део рада је посвећен алгебарски конструктибилним бројевима. Ту се уводе појмови алгебарског, трансцедентног и конструктибилног броја, као и доказ за немогућност решавања класичних грчких проблема помоћу шестара и лењира.
Наредна два поглавља у раду се баве својствима оригамија. Након увођења основних аксиома оригамија, фокус овог поглавља је на појединим конструкцијама које су могуће коришћењем оригамија. То ће бити углавном засновано на David Auckly-јевом и John Cleveland-овом чланку, „Totally Real Origami and Impossible Paper Folding”. Важно је напоменути да су они у свом раду посматрали подскуп познатих операција у оригамију које не доказују његову надмоћност у односу на лењир и шестар.
Четврта целина у раду посвећена је главној теми овог мастер рада, оригами конструкцијама. Приказана је трисекција угла и дуплирање коцке помоћу оригамија, као и докази за наведено. Приказан је и поступак за израду оригами коцке, како се помоћу оригамија може израдити наведени тродимензиони објекат.

## 2 Алгебарски конструктибилни бројеви

*,,Our difficulty is not in the proofs, but in learning what to prove."*

*Emil Artin*

Представљање поља конструктибилних бројева потребно је за решавање чувених геометријских проблема старих Грка. Алгебра, као математичка дисциплина која проучава структуру, може да помогне у решавању класичних геометријских проблема који се тичу конструкција (математичким) лењиром и шестаром. Користећи само лењир и шестар може се извршити велики број конструкција, као на пример: може се наћи симетрала дужи или угла, из тачке се може конструисати нормала на праву, могу се конструисати неки углови, нпр. $60^\circ$, $30^\circ$, многи правилни многоуглови итд. У свим тим конструкцијама лењир се користи искључиво као права ивица, тј. као инструмент помоћу којег може да се конструише права линија, али којим се не мере дужине. Кроз историју математике јављали су се разноврсни проблеми који не могу да се реше само употребом лењира и шестара, а вероватно ће тако бити и у будуће. Овде ћемо се ограничити само на неке проблеме који су одувек заокупљали пажњу свих љубитеља математике, као што су три класична грчка проблема:

1. ДУПЛИРАЊЕ (УДВОСТРУЧЕЊЕ) КОЦКЕ (наћи страницу коцке чија ће запремина бити два пута већа од запремине дате коцке);
2. ТРИСЕКЦИЈА УГЛА (наћи трећину датог угла само употребом лењира и шестара);
3. КВАДРАТУРА КРУГА (конструисати квадрат који има исту површину као дати круг);

Овим проблемима касније је додат још један:

4. КОНСТРУКЦИЈА ПРАВИЛНОГ СЕДМОУГЛА

Позната геометрија Еуклида заснивала се на геометријским конструкцијама изведеним само лењиром и шестаром, равноправним у конструкцијама. Многи математичари су се кроз векове бавили питањем решавања ових проблема. Нерешени проблеми овог типа су подстакли једно сасвим ново размишљање, да ли је уопште могуће решити постављене проблеме. Наиме, математичари су добили нови проблем: *Како је могуће доказати да неки проблеми немају решења?* Одговор је лежао у модерној алгебри и теорији група. Проблем решавања алгебарских једначина датира одавно и дуго је био централни садржај алгебре. Описи решавања неких једноставних алгебарских једначина појављује се још 2000 година пре нове ере, у Египту. Вавилонци су знали да решавају квадратне једначине, док су се решавањем једначина трећег и четвртог степена у 16. веку бавили Ђироламо Кардано, Николо Тартаља, Лудовико Ферари, Шипионе дел Феро и многи други. Прве основе решивости алгебарских једначина дао је француски математичар Галоа, модерна алгебра коју су започели Руфини, Абел и Галоа, доказала је да су ови проблеми нерешиви, односно да их је немогуће решити само употребом лењира и шестара.

Увешћемо појам конструктибилног броја, који је неопходан за боље разумевање и решавање наведених проблема, тј. који ће нам помоћи у доказивању немогућности решавања поменутих проблема. Навешћемо неке основне појмове, дефиниције и теореме о проширењима поља који ће нам бити потребни за доказивање неких особина о конструктибилним бројевима.

## 2.1 О проширењима поља

За поље $L$ кажемо да је раширење датог поља $K$ и пишемо $L \geq K$ или $K \leq L$, ако има бар једно потпоље $K_0$ које је изоморфно том пољу $K$.

Како између изоморфних поља нема суштинских разлика, ту обично поља $K_0$ и $K$ поистовећујемо, па је тада и само поље $K$ једно потпоље од $L$, као и $L$ једно натпоље од $K$.

С друге стране, свако поље $L$ је и векторски простор над било којим његовим потпољем $K$. Адитивна група тог простора $L = L_K$ је управо адитивна група поља $L$, док је његово множење скаларима из $K \subset L$ индуковано множењем у самом пољу $L$.

За раширење $L$ поља $K$ кажемо да је коначно, ако је одговарајући векторски простор $L_K$ коначне димензије. У том случају, димензију тог простора означавамо са

$$dimL_K = [L : K]$$

и зовемо степеном уоченог раширења $L$ поља $K$. Другим речима, ако је $[L : K] = n$, онда то значи да постоји бар један систем $e = [e_1, \ldots, e_n]$ елемената из поља $L$ за који свако $a \in L$ има тачно један растав облика $a = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, са $\alpha_r$-овима из $K$.

На пример, поље $\mathbb{R}$ није коначно раширење поља $\mathbb{Q}$, док је поље $\mathbb{C}$ раширење поља $\mathbb{R}$ степена $2 = [\mathbb{C} : \mathbb{R}]$. Ово последње важи зато што је систем $e = [1, i]$ и једна база векторског просора $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Наравно, тада ни $\mathbb{C}$ није коначно раширење поља $\mathbb{Q}$.

**Теорема 1.** *Ако су раширења поља $L \geq F$ и $F \geq K$ коначна, тада је поље $L$ коначно раширење и поља $K$ и при том важи*

$$[L : F][F : K] = [L : K].$$

*Доказ.* Нека су $e = [e_1, \ldots, e_m]$ и $f = [f_1, \ldots, f_n]$, тим редом, било које базе одговарајућих векторских простора $L_F$ и $F_K$. То посебно значи да је $[L : F] = m$ и $[F : K] = n$. Уз то поље $L$ садржи и сваки од производа $e_r f_s$, па је довољно доказати да је и систем $h = [e_r f_s : 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n]$ једна база векторског простора $L_K$. Пре свега, за свако $u \in L$ постоје $a_r$-ови из $F$, као и $\alpha_{rs}$-ови из $K$ за које је

$$u = \sum_r a_r e_r$$

и

$$a_r = \sum_s a_{rs} f_s$$

за свако $r$. Замењујући $a_r$ из друге од тих релација у прву, одмах следи да је $u = \sum \alpha_{rs} e_r f_s$ а самим тим и да је $h$ једна генератриса векторског простора $L_K$.

Такође, ако је ту $u = 0$, из $\sum \alpha_{rs} e_r f_s = 0$ следи да је и $\sum a_r e_r = 0$. Како су $a_r$-ови из $F$ и $e$ база у $L_F$, ово последње је могуће једино ако је и $a_r = 0$, то јест $\sum \alpha_{rs} f_s = 0$ за свако $r$. Уз то је и $f$ база у $F_K$, па одатле следи да је и $\alpha_{rs} = 0$ за свако $s$. Отуда и само тврђење, јер то тачно значи да је систем $h$ и линеарно независан у $L_K$. □

Постоје бројеви које не можемо представити у скупу рационалних бројева, тј. у облику разломка сачињеног од два цела броја (са имениоцем различитим од нуле). Појам ирационалности, тј. ирационалних бројева, био је познат још у старој Грчкој, када је примећено да у скупу $\mathbb{Q}$ није увек могуће кореновање, тј. квадратни корени неких рационалних бројева нису рационални бројеви.
Разликујемо две врсте ирационалних бројева: алгебарске и трансцендентне бројеве.

**Дефиниција 1.** *Број $\alpha \in L$ је алгебарски над $\mathbb{Q}$ ако постоји полином $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ над $\mathbb{Q}$ позитивног степена такав да је број $\alpha$ нула полинома $p(x)$, односно корен једначине $p(x) = 0$.*

Ако је сваки елемент из $L$ алгебарски над $\mathbb{Q}$, $L$ је алгебарско проширење поља $\mathbb{Q}$. Ако такав полином не постоји, онда је број $\alpha$ трансцендентан над $\mathbb{Q}$. Бројеви $\pi$ и база природног логаритма $e$ су најпознатији примери трансцендентних бројева. Доказ за трансцендентност броја $e$ дао је Ермит (Hermite) 1873. год, а трансцедентност броја $\pi$ доказао је Линдеман (Lindemann) 1882. год.
У општем случају не постоји алгоритам за утврђивање да ли је дати ирационалан број алгебарски или трансцендентан.

Минимални полином елемента $\alpha$ над $\mathbb{Q}$ је несводљив полином $p(x)$, са коефицијентима из $\mathbb{Q}$, најмањег позитивног степена који анулира елеменат $\alpha$ и који има најстарији коефицијент једнак 1. Степен минималног полинома је степен алгебарског елемента $\alpha$ над $\mathbb{Q}$. За сваки алгебарски елемент постоји јединствен минимални полином.

Примери.

1. Сви рационални бројеви су алгебарски бројеви степена 1 над $\mathbb{Q}$, јер је свако $a \in \mathbb{Q}$ решење једначине $x - a = 0$.

2. Елемент $\sqrt{5}$ је алгебарски над $\mathbb{Q}$ степена 2, јер је корен једначине $x^2 - 5 = 0$.

3. Елемент $\sqrt[3]{7}$ је алгебарски над $\mathbb{Q}$ степена 3 јер је то корен (нула) једначине $x^3 - 7 = 0$.

4. Елемент $\sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ има минимални полином степена 6, јер из $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2}}$ следи $1 + \sqrt[3]{2} = \alpha^2$, односно $\sqrt[3]{2} = \alpha^2 - 1$, а одавде кубирањем

добијамо једначину шестог степена са рационалним коефицијентима $\alpha^6-3\alpha^4+3\alpha^2-3=0$. Дакле, полином $f(x)=x^6-3x^4+3x^2-3$ анулира елемент $\alpha$ и несводљив је, према Ајзенштајновом критеријуму, те је минимални за $\alpha$.

Нека је $L$ проширење поља $K$ и $S$ подскуп у $L$. Најмање потпоље у $L$ које садржи $K \cup S$ је пресек свих потпоља у $L$ која садрже $K$ и подскуп $S$. За такво потпоље кажемо да је генерисано са $S$ над $K$ и означавамо га са $K(S)$. Специјално, ако је $S=t$, онда ћемо поље генерисано са $K \cup t$ означавати са $K(t)$. Проширење $K(t)$ је поље које је генерисано елементима из $K$ и елементом $t$. Јасно је да је $K(t)=K$ ако и само ако $t \in K$.

Ако је $K(t)=L$ онда кажемо да је $L$ просто проширење поља $K$. Ако је при томе $t$ алгебарски елемент, онда кажемо да је $L$ просто алгебарско проширење поља $K$. Ако је $t$ трансцендентан елеменат, онда је $L=K(t)$ просто трансцендентно проширење. Слично ћемо проширење поља које је генерисано пољем $K$ и скупом елемената $S=\{t_1,\ldots,t_n\}$ означавати са $K(t_1,\ldots,t_n)$.

Применом више простих проширења може се добити проширење $L$ поља $K$ које садржи дате елементе $t_1,\ldots,t_n \in L$. Другим речима, $K(t_1)$ је најмање поље које садржи $K$ и елеменат $t_1$. Након тога, проширимо поље $K(t_1)$ додавањем елемента $t_2$. Овај поступак можемо наставити док не добијемо поље $K(t_1,\ldots,t_n)$ као проширење поља $K(t_1,\ldots,t_{n-1})$. Дакле имамо ланац проширења $K \subset K(t_1) \subset K(t_1,t_2) \subset \cdots \subset K(t_1,\ldots,t_n)$.

**Теорема 2.** *(Еуклидов алгоритам за полиноме) Ако су $p,s \in K[x]$ полиноми, тада постоје јединствени полиноми $q,r \in K[x]$ тако да је $p=q\cdot s+r$, при чему је $st(r)<st(s)$ или је $r=0$.*

*Доказ.* Докажимо најпре егзистенцију полинома $q$ и $r$. Доказ се изводи индукцијом по $st(p)$. Претпоставимо да је тврђење доказано за све полиноме степена мањег од $n$. Докажимо да тврђење важи за полином $p$ степена $n$. Нека је $st(p)<st(s)$. Тада је $p=0\cdot s+p$ и $st(p)<st(s)$, дакле $q=0$ и $r=s$ задовољавају услове теореме. Нека је сада $st(p)\geq st(s)$, и нека је $p(x)=\sum_{i\leq n} a_i x^i$ и $s(x)=\sum_{i\leq m} b_i x^i$. Нека је $u=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\cdot s$. Тада је $st(u)=(n-m)+m=n$. Водећи коефицијент полинома $u$ је $\frac{a_n}{b_m}\cdot b_m=a_n$. Стога је $st(p-u)<n$. Зато, на основу индукцијске хипотезе, постоје полиноми $q_1$ и $r$ тако да је $p-u=s\cdot q_1+r$ и $st(r)<st(s)$. Отуда је

$$p=u+(p-u)=\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)\cdot s+q_1 s+r=\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+q_1\right)\cdot s+r=qs+r$$

Полиноми $q=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+q_1$ и $r$ задовољавају услове тврђења.

Докажимо јединственост. Нека је $p=qs+r=q_1 s+r_1$ и $0\leq st(r), st(r_1)<st(s)$. Тада је $s(q-q_1)=r-r_1$. Како је $st(r_1-r)\leq max\{st(r),st(r_1)\}<st(s)$,

то је $st(s(q-q_1)) < st(s)$. Према формули за степен производа, $st(s)+st(q-q_1) < st(s)$. Но онда је $st(q-q_1) < 0$.
Дакле, $st(q-q_1) = -\infty$, тј. $q-q_1 = 0$, односно $q = q_1$. Како је $q = q_1$, то је $r = r_1$. □

**Теорема 3.** *Ако је полином $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$, $(a_i \in K)$ несводљив над $K$, а $\alpha$ је један његов корен у проширеном пољу $L$ поља $K$, тада је $[K(\alpha) : K] = n$.*

*Доказ.* Нека је $\alpha$ корен полинома $p(x)$, а полином $p(x)$ је несводљив над $K$. Тада $\alpha$ не може бити корен ниједног ненула полинома из $K[x]$ степена мањег од $n$. Претпоставимо супротно, да постоји полином $q(x) \in K[x]$ најмањег степена чији је $\alpha$ корен и претпоставимода је $st(q(x)) < n$. На основу претходне теореме важи да је $p = s \cdot q + r$, $s, r \in K[x]$ и $st(r) < st(q)$ или је $r = 0$. Пошто $r$ не може бити 0, јер је $p$ несводљив полином, онда је $st(r) < st(q)$, одакле следи да је $\alpha$ корен полинома $r(x)$, што је контрадикција са претпоставком да је $q$ полином најмањег степена чији је корен $\alpha$.

Нека су $1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{n-1} \in K(\alpha)$. Они су линеарно независни, јер ако би нека нетривијална комбинација ових елемената над $K$ била једнака нули, то би значило да је $\alpha$ корен неког полинома из $K[x]$ степена мањег од $n$, а доказали смо да је то немогуће. Још треба доказати да ови елементи генеришу $K(\alpha)$.

Како је $p(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$, одавде је $a_n \cdot \alpha^n = -a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} - \cdots - a_1 \cdot \alpha - a_0$. Ако поделимо ову једначину коефицијентом $a_n$, добијамо $\alpha^n = -a_n^{-1}a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} - \cdots - a_n^{-1}a_1 \cdot \alpha - a_n^{-1}a_0$ па се за све $k \geq n$, $\alpha^k$ може приказати као линеарна комбинација елемената $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$. Закључујемо да за све $b \in K(\alpha)$, $b = \sum_{0 \leq i < n} a_i \cdot \alpha^i$, $a_i \in K$, тј. сваки елемент $b$ из $K(\alpha)$ се може изразити као линеарна комбинација елемената $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$. Дакле, прстен $K(\alpha)$ је векторски простор димензије $n$ над $K$, али $K(\alpha)$ је и поље. За сваки полином $s$, за који је $s(\alpha) \neq 0$, ту су и елементи $1/s(\alpha)$ тј. инверзи. □

Скуп $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ је база векторског простора $K(\alpha)$ над $K$, при чему је $n = st(p)$.

**Дефиниција 2.** *Нека је $L$ проширење поља $K$. Кажемо да је $L$ коренско поље за полином $p(x)$ степена $n \geq 1$ над $K$ ако се $p(x)$ може разложити у $L$ на $n$ линеарних чинилаца $p(x) = c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, $c \in K, c \neq 0, a_i \in L$ и не постоји поље између $K$ и $L = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ у којем се $p(x)$ може разложити на линеарне чиниоце.*

Другачије речено, поље разлагања полинома $p(x)$ степена $n$ је најмање поље у којем тај полином има све нуле ($n$ нула).

Примери:

1. Доказати да је полином $p = x^2 + 1$ несводљив над пољем реалних бројева $\mathbb{R}$. Затим одредити проширење поља $\mathbb{R}$ у којем полином $p$ има нуле.
   *Решење.* Ако би полином $x^2+1$ био сводљив над $\mathbb{R}$, тада бисмо имали $x^2 + 1 = (ax + b) \cdot (cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Из последње једнакости изједначавањем одговарајућих коефицијената добијамо: $ac = 1$ и $ad + bc = 0$ и $bd = 1$. Елиминацијом:
$$ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a}$$
$$bd = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{d}$$
$$ad = -bc \Rightarrow ad = -\frac{1}{a}\frac{1}{d}$$
$$ad = -\frac{1}{ad}$$
   се добија да је $(ad)^2 = -1$, што је немогуће за реалне бројеве $a$ и $d$.

   Поље реалних бројева $\mathbb{R}$ проширићемо пољем $\mathbb{R}(t)$ у којем су сви елементи облика $a+bt$ при чему је $t^2+1 = 0$, тј. $t^2 = -1$, а коефицијенти $a$ и $b$ су из $\mathbb{R}$. Дакле, проширење поља реалних бројева помоћу несводљивог полинома $p = x^2 + 1$ изоморфно је пољу комплексних бројева $\mathbb{C} = \{x + yi | x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

2. Полином $p = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ је несводљив над пољем рационалних бројева $\mathbb{Q}$. Одредити најмање поље у којем полином $x^2 - 2$ има нуле.
   *Решење:* Као што знамо, степен проширења биће 2. Поље $\mathbb{Q}$ проширићемо пољем $\mathbb{Q}(t) = \{a + bt | t^2 = 2, a, b \in \mathbb{Q}\}$, односно $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$.
   Ако узмемо $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ тако да је $x = a_0 + b_0\sqrt{2}$ и $y = a_1 + b_1\sqrt{2}$, биће:
$$x + y = (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$x \cdot y = a_0a_1 + 3b_0b_1 + (a_0b_1 + b_0a_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$
$$\frac{x}{y} = \frac{a_0 + b_0\sqrt{2}}{a_1 + b_1\sqrt{2}} = \frac{a_0a_1 - 3b_0b_1}{a_1^2 - 3b_1^2} + \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{a_1^2 - 3b_1^2}\sqrt{2} = r + q\sqrt{2},$$
   одакле видимо да и количник $x/y$ такође припада пољу $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Дакле, скуп $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ је затворен за све аритметичке операције: сабирање, одузимање, множење и дељење, па је $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ поље. То је најмање поље у којем полином $p$ има нуле и сводљив је.

За раширење $L$ поља $K$ кажемо да је квадратно, ако је степена 2, то јест ако је $[L:K]=2$. У том случају је $L=K[\lambda]$ и за сва свако $\lambda$ из $L\backslash K$, јер је јасно да је систем $[1,\lambda]$ линеарно независан, а самим тим и једна база $K$-векторског простора $L$.

То посебно значи да је тада и $\lambda^2+b\lambda+c=0$ за неко $b,c\in K$. Ако карактеристика од $K$ није 2, последња релација је такође еквивалентна и са

$$(2\lambda+b)^2=b^2-4c.$$

При томе је и $2\lambda+b=\alpha$ из $L\backslash K$, па је тако $L=K[\alpha]$ и за неко $\alpha$ из $L$ чији је квадрат $b^2-4c=\alpha^2$ у самом пољу $K$. У том случају пишемо и $L=K[\sqrt{a}]$, где $\sqrt{a}$ означава неки елемент $\alpha\in L$ за који је $\alpha^2=a\in K$.

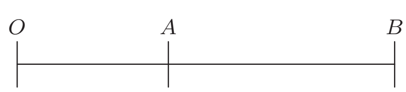
## 2.2 Конструктибилни бројеви

Превођење геометријских проблема на језик алгебре је кључ за њихово што боље разумевање. Претпоставимо да се тражи само једна дуж $x$. Геометријску конструкцију тада сводимо на решавање алгебарског проблема: наћи везу између тражене величине $x$ и датих величина $a,b,c,\ldots$. Затим треба наћи непознату величину $x$ решавањем те једначине и на крају треба одредити да ли се то решење може добити поступком који одговара конструкцији помоћу лењира и шестара. Лењир нам служи само за цртање правих линија и спајање тачака у равни, не као инструмент за мерење.

Претпоставићемо да је дат само један елемент који ћемо звати јединична дуж 1. Знамо да увек можемо конструисати било који ненегативан цео број $n$ тако што на произвољну праву почињући од неке фиксиране тачке $O$ нанесемо јединичну дуж $n$ пута.

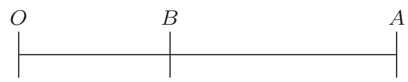
Елементарним геометријским конструкцијама одговарају четири основне аритметичке операције. Наиме, тврдимо да важе следеће особине:

- Ако су дате две дужи са дужинама $a$ и $b$ (мерене према датој јединичној дужи), тада је увек могуће конструисати дуж дужине $a+b$. Нека је $OA$ дуж дужине $a$ и нека је $AB$ дуж дужине $b$. Нацртајмо праву линију и означимо на њој растојања $OA=a$ и $AB=b$. Тада је $OB=a+b$.




*Слика 5.*

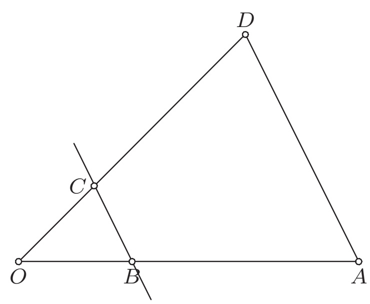
Слично се конструише и $a-b$ $(a>b)$, само што се прво конструише $OA=a$, па се $AB=b$ нанесе у супротном смеру од $A$, $OB=a-b$.




*Слика 6.*

Да бисмо конструисали $3a$, једноставно нанесемо $a + a + a$. Слично можемо конструисати $pa$, где је $p$ природан број.

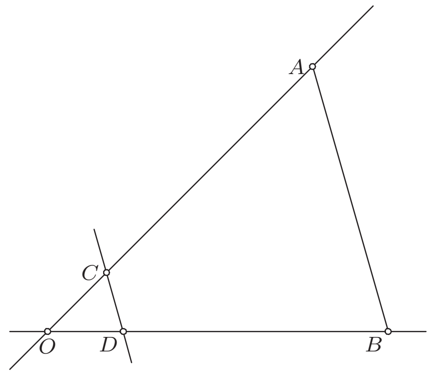
- $a/3$ можемо конструисати на следећи начин. Означимо $OA = a$ на једној правој и нацртајмо било коју другу праву кроз тачку $O$. На њој обележимо произвољну дуж $OC = c$ и конструишимо $OD = 3c$. Спојимо $A$ и $D$ и конструишемо кроз $C$ праву паралелну правој $AD$ која сече $OA$ у $B$. Троуглови $OBD$ и $OAD$ су слични, па према томе важи $OB : OA = OC : OD = 1 : 3$. Одавде је $OB = a/3$.




*Слика 7.*

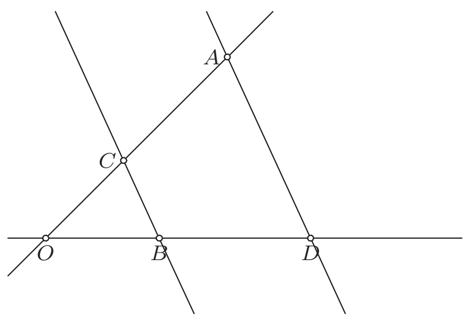
На сличан начин се може конструисати дуж $a/q$, $(q \in \mathbb{N})$. Примењујући овај поступак на дуж $pa$ можемо конструисати $ra$, где је $r = p/q$ било који позитиван рационалан број.

- Да бисмо конструисали $a/b$, обележимо $OB = b$ и $OA = a$ на крацима било ког угла са врхом у тачки $O$, а на $OB$ обележимо дуж $OD = 1$. Кроз $D$ конструишимо праву паралелну правој $AB$ која сече $OA$ у тачки $C$. Тада ће $OC$ имати дужину $a/b$. Опет из сличности троуглова $OAB$ и $OCD$ следи $OB : OD = OA : OC$, односно $b : 1 = a : OC$, одакле видимо да је $OC = a/b$.



*Слика 8.*

- За дате дужи $a$ и $b$, могуће је конструисати $ab$. Опет, као и до сада обележимо на крацима неког угла са врхом у тачки $O$ дужи $OA = a$ и $OB = b$. На дужи $OA$ обележимо јединичну дуж $OC$. Повуцимо праву кроз тачке $C$ и $B$, а затим кроз $A$ праву паралелну овој правој, која ће пресећи други крак угла у некој тачки $D$. Тада је $OD = ab$. Доказ исправности конструкције опет следи из сличности троуглова $OAD$ и $OBC$.

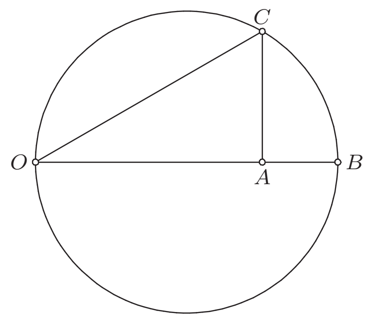


*Слика 9.*

Дакле, полазећи од било којих датих дужи, које су мерене бројевима $a, b, c, \ldots$, можемо узастопном применом ових једноставних конструкција одредити било коју величину која може да се изрази помоћу $a, b, c, \ldots$ на рационалан начин, тј. вишеструком применом сабирања, одузимања, множења и дељења. Скуп величина које могу да се добију на тај начин образује бројевно поље, тј. скуп бројева такав да примена рационалних операција на два или више чланова тог скупа даје број који опет припада том скупу.

- Једна конструкција која нас води ван добијеног поља јесте конструкција квадратног корена дате дужи: ако је дата дуж $a$, дуж $\sqrt{a}$ може да се конструише само помоћу лењира и шестара као геометријска средина дужи $a$ и 1. Опис конструкције: на правој линији одредимо дужи $OA = a$ и $AB = 1$. Нацртајмо кружницу чији је пречник дуж

$OB$, тј. кружницу са центром у средишту дужи $OB$ и полупречником $OB/2$, и конструишимо нормалу на $OB$ из тачке $A$ која сече кручницу у тачки $C$. Дуж $AC = \sqrt{a}$. Доказ следи из сличности троуглова $OAC$ и $ABC$.




*Слика 10.*

**Дефиниција 3.** *Кажемо да је реалан број $b$ конструктибилан ако је могуће лењиром и шестаром у коначно корака конструисати одсечак дужине $|b|$.*

Јасно је да су такви, на пример, сви рационални бројеви. Исто важи и за реалан број $\sqrt{2}$. Самим тим су конструктибилни и сви бројеви $p + q\sqrt{2}$ из квадратног раширења $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ поља $\mathbb{Q}$.

**Теорема 4.** *Скуп $\mathbb{K}$ свих реалних конструктибилних бројева је једно алгебарско раширење поља $\mathbb{Q}$ и степен минималног полинома $\mu$ сваког конструктибилног броја $\alpha$ је облика $2^m$.*

*Доказ.* Прво, ако су $\alpha \neq 0$ и $\beta$ било који конструктибилни бројеви, одмах следи да је то и сваки од бројева $\alpha - \beta$, $\alpha^{-1}$ и $\alpha\beta$, па је тако и сам скуп $\mathbb{K}$ једно потпоље поља $\mathbb{R}$.
Са друге стране конструкција тачке $P$ у равни $\mathbb{E}$ подразумева конструкцију координата $(x, y)$ те тачке. Тиме је и свака од правих $\Pi$ те равни одређена неком једначином облика

$$Ax + By + C = 0$$

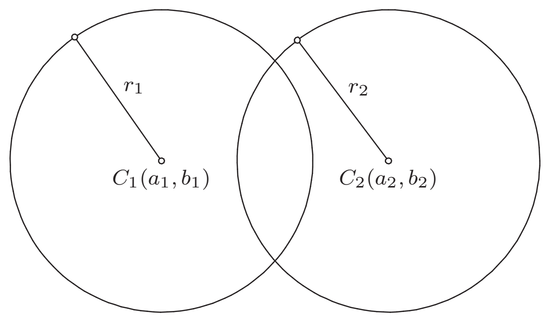
као скуп свих њених решења $(x, y)$. За ту праву $\Pi$ кажемо и да је над неким потпољем $K$ поља $\mathbb{R}$, ако има бар једну такву једначину у којој су коефицијенти $a$, $b$ и $c$ из тог потпоља. И слично за круг $\Gamma$ са једначином

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

ако су координате $p$ и $q$ његовог центра и дужина $r$ његовог полупречника у том потпољу.

Замењујући $y$ из прве од тих једначина у другу, добијамо извесну квадратну једначину са коефицијентима из $K$ и неком дискриминантом $d$, па се и уочена права $\Pi$ и круг $\Gamma$ секу једино ако је $d \geq 0$. Заједно са њеним решењима $u \pm v\sqrt{d}$, и координате тачака из $\Pi \cap \Gamma$ припадају пољу $K$ или његовом квадратном раширењу $K[\sqrt{d}]$.

Наравно, пресек два круга $\Sigma$ и $\Gamma$ над пољем $K$ се своди на пресек праве и круга, формирањем разлике њихових једначина, док координате пресечне тачке $P$ две праве над $K$ увек припадају самом том пољу $K$.




*Слика 11.*

Нека су

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$
$$(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$$

једначине две кружнице.
Ако једну одузмемо од друге добићемо еквивалентан систем од једне квадратне и једне линеарне једначине, тј. тражимо пресек праве и кружнице:

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$$

$$2(a_2-a_1)x + 2(b_2-b_1)y = r_1^2 - r_2^2 - a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 + b_2^2$$

Према томе, реалан број $\alpha$ је конструктибилан, ако и само ако је и апсциса бар једне конструктибилне тачке $P$ равни $\mathbb{E}$. То значи да постоји и неки систем тачака

$$O, A, P_1, \ldots, P_n = P$$

таквих да се, за свако $r$, тачка $P_r$ може добити помоћу оних претходних и применом једне конструкције лењиром и шестаром.

Отуда, како су координате тачака $O$ и $A$ из поља $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, према претходном, координате тачке $P_1$ припадају неком раширењу $\mathbb{K}_1$ поља $\mathbb{K}_0$ степена 1 или 2. Сада су и координате тачке $P_2$ у неком раширењу $\mathbb{K}_2$ степена 1 или 2 тог поља $\mathbb{K}_1$, и тако даље. Тако добијамо и један систем

$$\mathbb{K}_0 \leq \mathbb{K}_1 \leq \ldots \leq \mathbb{K}_n$$

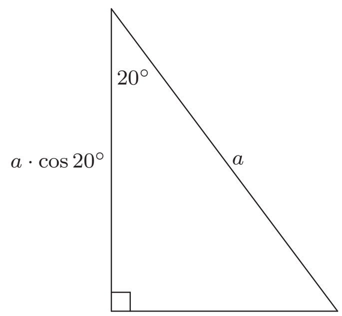
потпоља поља $\mathbb{K}$, таквих да је $\mathbb{K}_r$ раширење од $\mathbb{K}_{r-1}$ степена 1 или 2. Уз то можемо претпоставити и да међу њима нема једнаких, па следи да је тада и $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = 2^n$.

То посебно значи да су сви елементи поља $\mathbb{K}_n$ и алгебарски над $\mathbb{Q}$. Уз то степени њихових минималних полинома морају делити $2^n$, па су и сами облика $2^m$. Отуда и тврђене у целини, јер то поље $\mathbb{K}_n$ садржи и уочени конструктибилни број $\alpha$, као апсцису тачке $P$. $\square$

## 2.3 Примене

Показаћемо најпре да није могуће произвољан угао поделити на 3 једнака дела користећи само лењир и шестар. Применићемо претходну теорему како бисмо решили проблем трисекције угла.

*Доказ.* Доказаћемо да није могуће конструисати трисекцију угла од $60°$, тј. угао од $20°$.
Дакле, нека је угао који желимо да конструишемо угао од $20°$. Ако бисмо могли да конструишемо угао од $20°$, могли бисмо да конструишемо и величину $a\cos 20°$, где је $a$ нека дуж.




*Слика 12.*

Применом адиционе теореме имамо да је $\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$. Означимо $\cos 20°$ са $\alpha$ и добићемо једнакост $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$. (Ниједан од бројева $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$ није решење једначине $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$)
Полином $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$ је нерастављив, јер нема рационалних нула, па је онда степен проширења $[K(\alpha) : K] = 3$. $\alpha$ није конструктибилан јер би припадао неком раширењу $L$ степена $2^k$, за неко $k$, а то није могуће јер:

$$\begin{array}{ccccccc} [L:K] & = & [L:K(\alpha)] & \cdot & [K(\alpha):K]. & & ([K(\alpha):K]=3) \\ \Downarrow & & & & \Downarrow & & \\ 2^k & & & & 2^l & & \end{array}$$

па је на основу претходне теореме број $\alpha = \cos 20°$ немогуће конструисати само лењиром и шестаром. $\square$

Други познати старогрчки проблем, проблем дуплирања коцке, такође није могуће решити само лењиром и шестаром.

*Доказ.* Претпоставимо да се тражи ивица коцке чија запремина ће бити два пута већа од запремине коцке чија је ивица једнака 1. Овај проблем се своди на решавање једначине $x^3 = 2$.
Нека је $x = p/q$ рационално решење једначине $x^3 - 2 = 0$, при чему су $p, q$ међусобно прости цели бројеви. Уврштавањем у једначину добијамо

једначину $p^3 = 2q^3$, а одавде видимо да је $p$ паран број, тј. $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Уврстимо $p$ у последњу једначину и добићемо $(2k)^3 = 2q^3$, односно $4k^3 = q^3$, што значи да је $q^3$ дељив са 4, па је и $q$ паран број, а то је контрадикција са претпоставком да су $p$ и $q$ међусобно прости. Дакле, једначина $x^3 - 2 = 0$ нема рационалних корена.
Како је полином $p(x) = x^3 - 2$ нераставља ив над $\mathbb{Q}$, он има нулу у проширеном пољу $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2^2} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Према претходно доказаном, ако је овај број конструктибилан, он се садржи у неком пољу $L$ чији је степен раширења $2^n$ за неко $n : [L : \mathbb{Q}] = 2^n$. Но, тада је и $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq L$ и имамо низ раширења $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq L$ из кога следи да је $2^n = [L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : L] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot 3$, па би 3 делило $2^n$ што није тачно, па решење једначине није конструктибилан број, и не може се конструисати коцка дупло веће запремине од запремине дате коцке користећи само лењир и шестар. $\square$

**Лема 1.** *Свако коначно проширење поља $K$ је алгебарско.*

*Доказ.* Нека је $L$ коначно проширење поља $K$ степена $n$ ($n$ ненегативан цели број) и нека је $\alpha \in L$ ($\alpha \neq 0$). Тада су елементи $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ линеарно зависни (има их $n + 1$), јер је $L$ векторски простор димензије $n$ над $K$. То значи да постоје елементи $a_i \in K$ који нису сви нула такви да је $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$, одакле следи да постоји ненулти полином степена највише $n$ који анулира елемент $\alpha$. Дакле, $\alpha$ је алгебарски над $K$. Пошто је $\alpha$ произвољан из $L$, одавде следи да је $L$ алгебарско проширење поља $K$. $\square$

Сада ћемо доказати следеће важно тврђење које ћемо формулисати у облику теореме.

**Теорема 5.** *Сваки конструктибилни број је алгебарски.*

Другим речима, сваки конструктибилан број $\alpha$ је нула неког полинома $n-$тог степена са рационалним коефицијентима.

*Доказ.* Нека је $\alpha$ било који конструктибилан број. То значи да он припада неком проширењу $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \ldots, \sqrt{m_k})$ за неки коначан број $k$ ($k$ ненегативан цео број) и степен проширења поља $L$ над $\mathbb{Q}$ је коначан број $2^k$, тј. како је $\alpha$ конструктибилан број он се садржи у неком пољу $L$ чији је степен раширења $2^l$ за неко $l \leq k$, јер тај степен мора да дели $2^k$, па на основу претходно доказане леме $L$ је такође и алгебарско проширење, што значи да је $\alpha$ алгебарски број. Пошто је $\alpha$ био произвољан конструктибилан број, закључујемо да су сви конструктибилни бројеви алгебарски. $\square$

Обрнуто не важи! Нису сви алгебарски бројеви конструктибилни. На пример, корени једначине трећег степена $x^3 - 2 = 0$ нису конструктибилни. Пошто је скуп свих алгебарских бројева пребројив, као последицу претходног тврђења, добијамо да је и скуп свих конструктибилних бројева такође пребројив.

**Примери**. Покажимо да су дати конструктибилни бројеви алгебарски:

1. $x = \sqrt{3+\sqrt{5}}$. Квадрирањем добијамо $x^2 = 3+\sqrt{5}$, одакле је $x^2 - 3 = \sqrt{5}$ и $(x^2-3)^2 = 5$. Последња једначина је, уствари, $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$. Дакле, дати број је корен једначине четвртог степена са коефицијентима из $\mathbb{Q}$, па је дати број агебарски.

   Приметимо да је дати број $x$ из неког проширења $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3+\sqrt{5}}) = \{a + b\sqrt{3+\sqrt{5}} | a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})\}$. Ово проширење је степена $2^2$ у односу на $\mathbb{Q}$, па смо морали два пута вршити квадрирање, односно добили смо једначину четвртог степена са рационалним коефицијентима.

2. На сличан начин се показује да је за $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $x \in Q_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}})$ степен проширења $(Q_3 : \mathbb{Q}) = 2^3$, па ће постојати једначина осмог степена која анулира елемент $x$.

Сада ћемо навести још једну лему која је потребна за доказивање немогућности решавања неких старогрчких проблема.

**Лема 2.** *Ако кубна једначина* $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ $(*)$ *са рационалним коефицијентима нема рационалних корена, тада ниједан од њених корена није конструктибилан.*

*Доказ.* Пошто ова једначина нема рационалних нула, тај полином је нерастављив над $\mathbb{Q}$ те је свака његова нула степена 3 над $\mathbb{Q}$, па као у малопре наведеном доказу за дуплирање коцке, можемо констатовати да ниједан од њих није конструктибилан. $\square$

**Проблем конструкције правилног седмоугла**

Лењиром и шестаром је лако конструисати правилан троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао. Такође, сви многоуглови који су добијени из наведених дуплирањем броја страница су конструктибилни. Једном речју, из правилног $n-$тоугла можемо добити правилан $2n-$тоугао половљењем лукова описаног круга, који се налазе изнад страница правилног $n-$тоугла.

Гаус је још као млад, 1796. године, показао да је могуће конструисати правилни 17-тоугао. 17-тоугао је био само посебан случај фамилије конструктибилних правилних многоуглова. Поред тога, Гаус је открио и да се правилан $p-$тоугао ($p$ прост број) може конструисати ако и само ако је $p$ прост Фермаов број, $p = 2^{2^n} + 1$. Први Фермаови бројеви 3, 5, 17, 257 и 65573 су прости. Међутим, Ојлер је 1732. године открио да за $n = 5$, $F(n) = 2^{2^n} + 1$ није прост број. Откривено је касније да су многи од тих Фермаових бројева сложени.

Ванцел је након Гауса доказао да Гаусов услов за конструкцију $n$-тоугла није само довољан већ и потребан. На основу тога следи да правилан седмоугао (хептагон) није могуће конструисати само лењиром и шестаром (јер 7 није Фермаов број). Проблем је наћи страницу $s$ правилног седмоугла који је уписан у јединични круг. Најједноставнији начин да докажемо да овај проблем није могуће решити само лењиром и шестаром је коришћење комплексних бројева.

Знамо да су темена правилног седмоугла дата коренима једначине

$$z^7 - 1 = 0 \tag{1}$$

где је $z = x + iy$ ($x$ и $y$ су координате темена седмоугла). Очигледно је један корен ове једначине $z = 1$, па делећи једначину (1) са $z - 1$ добијамо једначину

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \tag{2}$$

Међу коренима ове једначине је $z = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$. Угао $2\pi/7$ је угао захваћен код центра круга страницом правилног седмоугла. Делећи једначину (2) са $z^3$ и уводећи смену $x = z + \frac{1}{z}$, добијамо једначину

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \tag{3}$$

Сада треба само доказати да једначина (3) нема рационалних корена, па на основу леме 2 нема ни конструктибилних корена. Ако једначина (3) има рационалних корена, ти корени су уједно и целобројни и то делиоци броја 1. Уврштавањем вредности за $x$ у једначину (3) видимо да ни -1 ни 1 нису решења ове једначине, па једнчина (3) нема рационалних решења, одакле, на основу леме 2, закључујемо да нема ни конструктибилних решења. Дакле, број $x = z + \frac{1}{z} = 2\cos(2\pi/7)$ није конструктибилан, па једначина (2) нема конструктибилних решења, што значи да се страница седмоугла не може конструисати.

**О проблему квадратуре круга**

Квадратуру круга су вековима решавали математичари, научници и многобројни аматери и љубитељи математике. То је један од најпознатијих и најинтересантнијих старогрчких проблема. Претпоставља се да је утрошено више напора да се реши проблем квадратуре круга, него да се човек пошаље на Месец. Он је остао нерешен све до 19. века, када је Линдеман доказао трансцендентност броја $\pi$.
А проблем гласи: да ли је могуће конструисати квадрат исте површине као што је површина датог круга?
Овај проблем се опет своди на алгебарски проблем: Ако је полупречник датог круга $r$, а страница траженог квадрата $x$, онда добијамо једначину $x^2 = r^2\pi$. Како је решење ове једначине $x = r\sqrt{\pi}$, следи да треба елементарно конструисати величину $x = r\sqrt{\pi}$ па се поставља питање да ли је број

$\sqrt{\pi}$ конструктибилан.

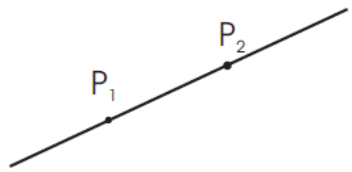
Да $\pi$ није конструктибилан постало је јасно тек 1882. године, након Линдемановог доказа трансцендентности броја $\pi$. Јер, како је $\pi$ трансцендентан број, онда он није алгебарски (не постоји полином који анулира тај елемент), па није ни конструктибилан. Линдеманов доказ о трансцендентности броја $\pi$ се, заправо, ослања на Ермитов доказ о трансцендентности броја $e$. Ове доказе овде нећемо наводити, јер су доста сложени.

И тиме је коначно решен најстарији и најчувенији старогрчки проблем - проблем квадратуре круга.

# 3 Сабрани аксиоми оригамија

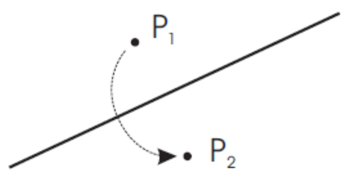
Свака геометријска конструкција може се посматрати као низ корака, а сваки тај корак одређен је геометријским правилима (аксиомама). И као што постоје јасна правила за геометријске конструкције, тако постоје правила код оригами конструкција. Тај скуп од 7 правила називамо Huzita-Hatori аксиомама. Првих 6 аксиома формулисао је италијанско-јапански математичар Humiaki Huzita 1992. године, а 7. аксиому поставио је Koshiro Hatori 2002. године. Потпуност свих аксиома доказао је Robert Lang.

1. За две дате тачке $P_1$ и $P_2$ постоји линија савијања која пролази кроз обе тачке.



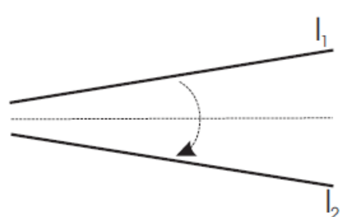

*Слика 13.*

2. За две дате тачке $P_1$ и $P_2$ постоји линија савијања која преклапа тачку $P_1$ са $P_2$.



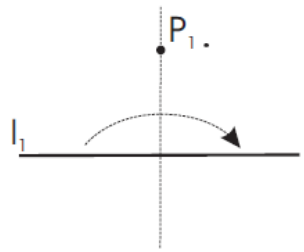

*Слика 14.*

3. За две дате праве $l_1$ и $l_2$ постоји линија савијања која смешта $l_1$ на $l_2$.



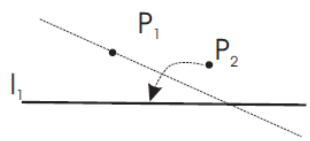

*Слика 15.*

4. За дату тачку $P_1$ и праву $l_1$ постоји линија савијања нормална на $l_1$, која пролази кроз тачку $P_1$.



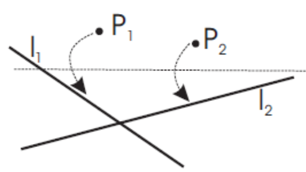

*Слика 16.*

5. За две тачке $P_1$ и $P_2$ и праву $l_1$ постоји линија савијања која смешта тачку $P_2$ на праву $l_1$ и пролази кроз тачку $P_1$.



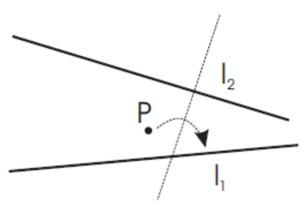

*Слика 17.*

6. За две дате тачке $P_1$ и $P_2$ и две праве $l_1$ и $l_2$ постоји линија савијања која смешта тачку $P_1$ на праву $l_1$ и тачку $P_2$ на праву $l_2$.




*Слика 18.*

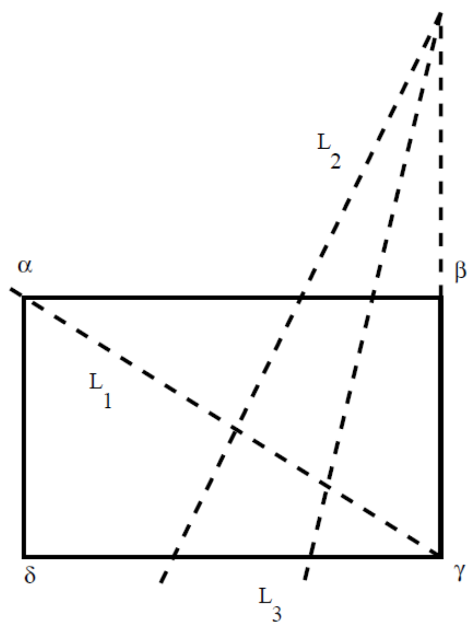
7. За дату тачку $P$ и две праве $l_1$ и $l_2$ постоји линија савијања која смешта тачку $P$ на праву $l_1$, а која је нормална на праву $l_2$.




*Слика 19.*

# 4 Оригами конструктибилни бројеви

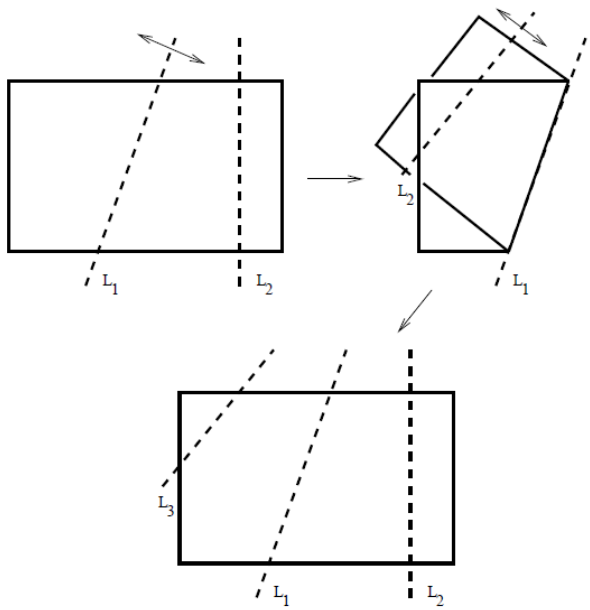
У овом делу бавимо се нешто рестриктивнијим правилима за конструкцију него што су наведени аксиоми. Њих су разматрали Auckly и Cleveland, а њихова анализа је показала да се неке конструкције не могу извести помоћу оригамија, а могу помоћу лењира и шестара.
Навешћемо на почетку природне методе савијања папира, а затим навести дефиницију оригами пара, коју су дали наведени аутори.




*Слика 21.*

Спајањем $\alpha$ и $\gamma$ конструишемо праву $L_1$. Друга права $L_2$ конструише се преклапањем тачака $\alpha$ и $\gamma$. Формирани набор $L_2$ биће симетрала дужи $\overline{\alpha\gamma}$. Друга природна конструкција била би слагање једне праве на другу. На пример, $\overline{\beta\gamma}$, ивица папира, и $L_2$ су праве. Ако $\overline{\beta\gamma}$ положимо на $L_2$ и формирамо набор, онда добијамо $L_3$ која је симетрала угла ове две праве. Ако почнемо са две праве у овој трећој конструкцији, онда ћемо само добити једну праву на половини између.

Четврта, и последња конструкција која изгледа природно је узастопно савијање. Ово је слично увијању папира, осим што се папир не умотава већ савија. Одређеније, почиње се са папиром са два набора као што је приказано на слици 22. Ако се пресавије папир дуж праве $L_1$, без одмотавања, може се приметити да права $L_2$ лежи преко листа папира. Са папиром и даље савијеним, пресавијемо папир дуж набора $L_2$ како бисмо добили нови набор на листу испод $L_2$. Ако назовемо овај набор $L_3$ и одвијемо папир, лако можемо уочити да је права $L_3$ одраз или рефлекција праве $L_2$ око праве $L_1$.




*Слика 22.*

Сада ћемо формализовати ове методе за дефинисање оригамија у равни. Набори на нашем листу папира су само праве у равни, а углови папира су представљени местима где се усеци сусрећу. Претходна дискусија је мотивисала наредну дефиницију.

**Дефиниција 4.** *Нека је $\mathcal{P}$ скуп тачака у $\mathbb{R}^2$ и $\mathcal{L}$ скуп правих у $\mathbb{R}^2$, тада је $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ оригами пар, уколико су испуњени следећи услови:*

**i)** *Тачка пресека било које две непаралелне праве у $\mathcal{L}$ је тачка у $\mathcal{P}$.*

**ii)** *Ако се узму у обзир било које две различите тачке у $\mathcal{P}$, постоји права у $\mathcal{L}$ која пролази кроз њих.*

**iii)** *Ако се узму у обзир било које две различите тачке у $\mathcal{P}$, симетрала дужи са датим крајњим тачкама је у $\mathcal{L}$.*

**iv)** *Ако су $L_1$ и $L_2$ праве у $\mathcal{L}$, онда је права која је оса симетрије те две праве у $\mathcal{L}$.*

**v)** *Ако су $L_1$ и $L_2$ праве у $\mathcal{L}$, онда постоји и права $L_3$ у $\mathcal{L}$ тако да је $L_3$ слика $L_1$ у рефлексији у односу на $L_2$.*

За било који подскуп равни која садржи најмање две тачке, постоји највише један скуп правих који ће у пару са њим дати оригами пар.

**Дефиниција 5.** *Подскуп у* $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}$, *је близу оригами конструкције уколико постоји скуп правих,* $\mathcal{L}$, *тако да је* $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ *оригами пар.*

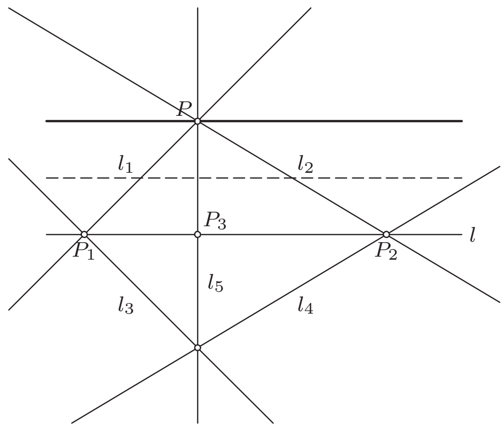
Питање на које ћемо у овом раду одговорити је које се тачке могу конструисати од само две тачке, користећи горе описану оригами конструкцију. Овај скуп тачака назваћемо скуп оригами конструктибилних тачака.

**Дефиниција 6.** $\mathcal{P}_0 = \bigcap\{\mathcal{P} | (0,0), (0,1) \in \mathcal{P}$ *и* $\mathcal{P}$ *је затворен у односу на оригами конструкције* $\}$ *је скуп оригами констуктибилних тачака.*

Пре него што објаснимо скуп $\mathcal{P}_0$, даћемо пример једне оригами конструкције која је аналогна многим конструкцијама шестара и лењира, односно конструкцији паралелних правих.

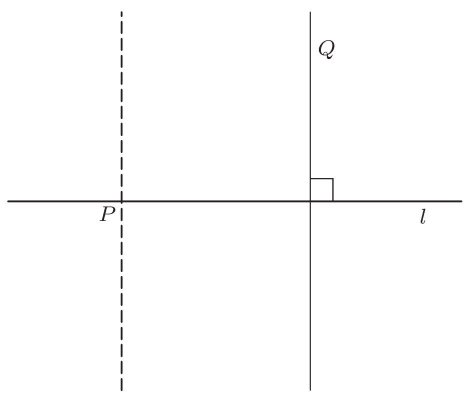
**Лема 3.** *Кроз дату тачку која се налази ван дате праве могуће је, помоћу оригамија, конструисати праву паралелну датој.*

*Доказ.* Дата је права $l$ и тачка $P$. Желимо да конструишемо праву паралелну са $l$ која пролази кроз тачку $P$.
Да бисмо то урадили изабраћемо две тачке $P_1$ и $P_2$ на $l$. На основу својства ii) у дефиницији оригами пара, можемо да конструишемо праве $l_1$ и $l_2$, које спајају тачке $P_1$ и $P$, $P_2$ и $P$ редом. Коришћењем својства v), можемо рефлектовати $l_1$ и $l_2$ у односу на праву $l$, да добијемо праве $l_3$ и $l_4$. Пресек правих $l_3$ и $l_4$ је конструктибилан (својство i)), тако да можемо да нађемо праву $l_5$ која пролази кроз тај пресек и тачку $P$ (својство ii)). Штавише, права $l_5$ ће пресећи праву $l$, према својству i), у тачки $P_3$. Користимо својство iv) да конструишемо симетралу дужи $PP_3$, а рефлектовањем праве $l$ у односу на добијену симетралу, на основу својства v), добићемо тражену праву. □




*Слика 23.*

**Коментар1:** На овај начин смо видели и како се конструише нормала на дату праву из дате тачке ван те праве.
**Коментар2:** Конструкција нормале кроз дату тачку која припада датој правој такође се своди на претходни случај. Најпре се конструише нормала из произвољне тачке ван те праве, а затим се конструише њој паралелна права кроз дату тачку.

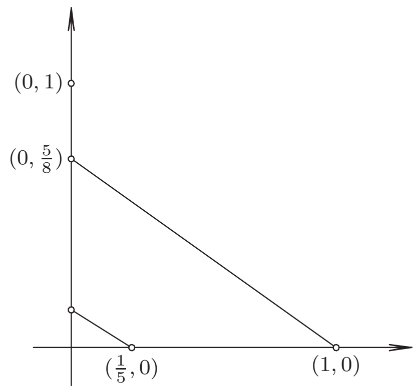



*Слика 24.*

Како сада имамо боље разумевање за оригами конструкције, почећемо са развојем инструмената да покажемо да неке фигуре нису конструктибилне. Прво што нам је потребно је појам о једном оригами броју.

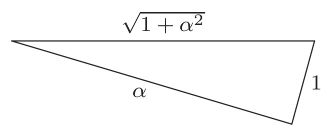
**Дефиниција 7.** $\mathbb{F}_0 = \{\alpha \in \mathbb{R} | \exists v_1, v_2 \in \mathcal{P}_0$ *тако да* $|\alpha| = dist(v_1, v_2)\}$ *је скуп оригами бројева.*

Лако је уочити да је $(x, y) \in \mathcal{P}_0$ ако и само ако су $x$ и $y$ у $\mathbb{F}_0$. Такође је лако уочити да су бројеви $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ оригами бројеви. Како бисмо видели да је $\frac{1}{5}$ оригами број размотрићемо слику 25.




*Слика 25.*

На слици 25 конструисана је права кроз $(0, \frac{5}{8})$ и $(1, 0)$, а потом је конструисана паралелна права кроз $(0, \frac{1}{8})$. Ова паралелна права сече $x-$осу у $(\frac{1}{5}, 0)$, стога је $\frac{1}{5}$ оригами број. Још једна класа оригами бројева може се генерализовати помоћу једноставне геометријске конструкције. Почевши са било којим одсечком могуће је конструисати правоугли троугао како је приказано на слици 26.




*Слика 26.*

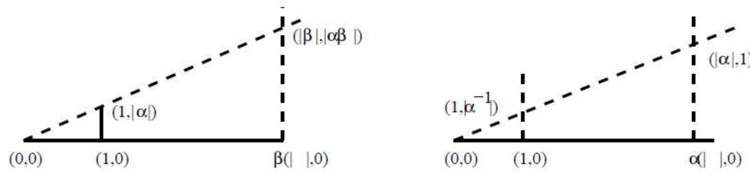
Одатле следи да је $\sqrt{1+\alpha^2}$ оригами број уколико је $\alpha$ оригами број. Служећи се овом конструкцијом, видимо да су

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2} \text{ и } \sqrt{3} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2}$$

оригами бројеви. Заправо, збир, разлика, производ и количник оригами бројева дају оригами бројеве.

**Теорема 6.** *Колекција оригами бројева, $\mathbb{F}_0$, је поље затворено у односу на операцију $\alpha \mapsto \sqrt{1+\alpha^2}$.*

*Доказ.* Ако је $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_0$, онда из те дефиниције следи $-\alpha \in \mathbb{F}_0$ и лако је показати да је $\alpha + \beta \in \mathbb{F}_0$. Једноставне конструкције са сличним троугловима су довољне да покажу да $\alpha \cdot \beta$, $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}_0$.
Погледати слику 27.




*Слика 27.*

У дискусији која претходи овој теореми показали смо да је $\sqrt{1+\alpha^2}$ оригами број, кад год је то и $\alpha$. Стога је доказ потпун. $\square$

Сада, када смо утврдили неке од алгебарских опереација које производе оригами бројеве, природно је запитати се постоји ли још операција које ће дати исте. Једном када се направи листа свих начина за добијање оригами бројева и методе којом ће се тестирати да ли се дати број може добити, онда ћемо знати који су геометријски облици изводљиви за конструисање, а који не. Ово важи због тога што је нека фигура изводљива за конструисање ако, и само ако су координате свих њених темена оригами бројеви.

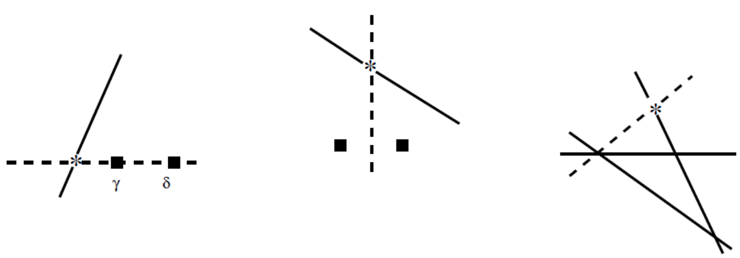
**Дефиниција 8.** $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ *је најмање потпоље од* $\mathbb{C}$ *које је затворено у односу на операцију* $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

Претходна теорема може бити преформулисана као $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subset \mathbb{F}_0$. Заправо је тачно да $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Према томе, претходно наведене операције које производе оригами бројеве су једине независне операције које дају оригами бројеве.

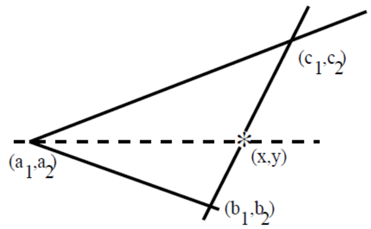
**Теорема 7.** $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$.

*Доказ.* Како већ знамо да је $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subset \mathbb{F}_0$, само је потребно показати да $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Односно, треба да покажемо да се било који оригами број може изразити уобичајеним операцијама поља и операцијом $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Довољно је размотрити координате оригами конструктивних тачака, јер неки број је оригами број ако, и само ако, је координата конструктибилне тачке.

Постоје само четири различита начина конструисања нових оригами тачака из старих, користећи аксиоме за оригами конструкцију. Они су илустровани на сликама 28 и 29.

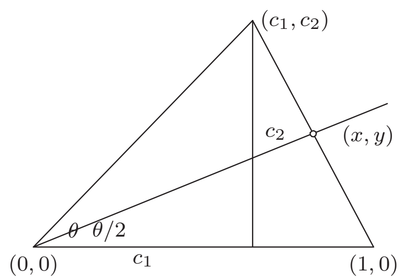



*Слика 28.*




*Слика 29.*

Једини начин за конструисање нове тачке биће уколико нови усек пресеца стари. Четири начина за стварање набора су: пресавијањем линије између две постојеће тачке као на линији/дужи $\overline{\gamma\delta}$ на слици 28, пресавијањем симетрале две тачке као у другом делу слике 28, рефлектовањем линије као на трећем делу слике 28, или формирањем симетрале угла као на слици 29. Биће објашњен случај илустрован на слици 29, а остала три остављена су читаоцима. Када се покаже да тачка $(x, y)$ зависи само од прописаних операција, можемо претпоставити да је $(a_1, a_2) = (0, 0)$ транслацијом, зато што је тачка $(x, y)$ добијена додавањем $(a_1, a_2)$ транслационој тачки. (Ако су праве паралелне, рефлексија било које две праве је транслација.) Даље можемо претпоставити да је $(b_1, b_2)$ на јединичном кругу, скалирањем зато што ће умножавање за $\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = |b_1|\sqrt{1 + (\frac{b_2}{b_1})^2}$ преокренути скалирање. Још више, можемо за $(b_1, b_2)$ претпоставити да је $(1, 0)$ јер ротација $(x, y) \mapsto (b_1x - b_2y, b_2x + b_1y)$ шаље тачку $(1, 0)$ назад на $(b_1, b_2)$. (Ако се две праве секу, композиција две рефлексије је ротација.)




*Слика 30.*

$\theta = \angle cab$ је угао чију симетралу тражимо. Уз горе наведене претпоставке имамо:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$$

смена: $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$

$$(1-t^2)\operatorname{tg}\theta = 2t$$

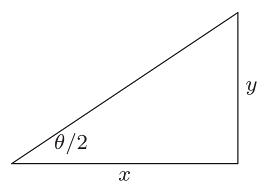
$$\operatorname{tg}\theta\cdot t^2 + 2t - \operatorname{tg}\theta = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2\theta}}{2\operatorname{tg}\theta}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta}$$

$$(0<\theta<\pi \Longrightarrow 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}>0)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+(\frac{c_2}{c_1})^2}}{\frac{c_2}{c_1}}$$




*Слика 31.*

Нова тачка $(x,y)$ је пресек две праве $y = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}x$ и $y = [c_2/(c_1-1)](x-1)$, тако да

$$x = \frac{c_2}{c_2-(c_1-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \text{ и } y = \frac{c_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{c_2-(c_1-1)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$$

што зависи само од прописаних операција које ће бити приказане. Другим речима, тачка $(x,y)$ је оригами конструктибилна, а тражење симетрале угла $\theta$ своди се на пресавијање линије између две постојеће тачке (теме угла и тачка $(x,y)$). □

У претходној теореми дали смо алгебарски опис домена оригами бројева, као и одговоре који облици су конструктибилни коришћењем оригамија, а који нису. У пракси је и даље тешко одлучити да ли је неки дати број оригами број. На пример, $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ је оригами број, зато што може да се представи у облику $\sqrt{1+\alpha^2}$:

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$$

али шта је са $\sqrt{1+\sqrt{2}}$?

Како бисмо одговорили на ово питање потребна нам је боља карактеризација оригами бројева. Пре него што наставимо даље, размотрићемо неке основне чињенице из апстрактне алгебре.
Неки алгебарски број, $\alpha$, је корен јединственог моничног несводљивог полинома у $\mathbb{Q}[x]$ означен са $p_\alpha(x)$. Штавише, овај полином дели било који полином у $\mathbb{Q}[x]$ ако за корен има $\alpha$.

**Дефиниција 9.** *Конјугати од $\alpha$ су корени полинома $p_\alpha(x)$. Алгебарски број је потпуно реалан ако су сви његови конјугати реални. Скуп потпуно реалних бројева означићемо са $\mathbb{F}_{TR}$.*

Од бројева које смо користили за мотивисање овог одељка $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ је потпуно реалан број, јер сви његови конјугати $(\pm\sqrt{4+2\sqrt{2}})$ су реални, али $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ није потпуно реалан зато што су два од његових конјугата имагинарна $(\pm\sqrt{1-\sqrt{2}})$.

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} = \beta /^2$$

$$1+\sqrt{2} = \beta^2$$

$$\beta^2 - 1 - \sqrt{2} = 0 /^2$$

$$\beta^4 - 2\beta^2 + 1 = 2$$

$$\beta^4 - 2\beta^2 - 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = (x^2-1)^2 - 2 =$$

$$(x^2 - 1 - \sqrt{2})(x^2 - 1 + \sqrt{2}) =$$

$$\left(x^2 - \left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(x^2 - \left(\sqrt{1-\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

Ова факторизација показује да су нуле $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и $\pm\sqrt{1-\sqrt{2}}$, а пошто две нуле нису реалне, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ није тотално реалан број, па тиме ни оригами број.

**Теорема 8.** $\mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} \subset \mathbb{F}_{TR}$.

Ова теорема нам даје практичан увид у одлуку да одређени облици не могу бити конструисани помоћу оригамија. На пример, помоћу оригамија није могуће конструисати две коцке на тај начин да је запремина друге коцке дупло већа од прве. Да је ова конструкција могућа, $\sqrt[3]{2}$ би био оригами број и самим тим, потпуно реалан. Међутим, конјугати од $\sqrt[3]{2}$ су $\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ и $\sqrt[3]{2}$, а како прва два нису реална, онда $\sqrt[3]{2}$ није оригами број.

Како смо претходно видели, $\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2}$ и $\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+(1+\sqrt{2})^2}$ су оригами бројеви тако да $\sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{-1}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ је оригами број. Из свега овога може се видети логичан закључак.

**Закључак:** Користећи оригами (у овом рестриктивном смислу, како су навели Auckly и Cleveland) није могуће конструисати правоугли троугао са произвољно датом хипотенузом и катетом.

*Доказ.* Да је ово могуће, било би могуће и конструисати правоугли троугао са хипотенузом $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ и катетом 1, пошто су ово оригами бројеви. Било који такав троугао имао би катету дужине $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2+1^2}$, али ово је немогуће јер $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ није потпуно реалан. □

Желимо да проширимо везу између поменуте две врсте конструкција. Да размотримо, конструкције изводљиве шестаром и лењиром, ако је $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ најмање потпоље од $\mathbb{C}$ у односу на операцију $x \mapsto \sqrt{x}$, онда је $\mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{R}$ скуп бројева који су шестаром и лењиром изводљиви. Из нашег досадашњег рада, очигледно је да оригами бројеви, $\mathbb{F}_0$ се садрже у $\mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{R}$. Заправо је случај да је $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{TR}$. Ова карактеризација оригами бројева је у вези са Хилбертовим 17. проблемом. На Међународном конгресу математике у Паризу 1900. године, Хилберт је изнео листу са 23 проблема. Његов 17. проблем односи се на представљање дефинитних форми помоћу квадрата. 1926. Artin је решио Хилбертов 17. проблем. Кључна идеја коју је Artin користио је појам потпуно позитивног. Artin је доказао да је елемент потпуно позитиван ако, и само ако, је збир квадрата. Овом идејом се ми водимо у доказивању финалне карактеризације оригами бројева.

**Чињеница**: Ако је $K$ коначна реална алгебарска екстензија од $\mathbb{Q}$, онда је елемент од $K$ збир квадрата у $K$ ако, и само ако, су његови конјугати позитивни.

**Теорема 9.** $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}} = \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{TR}$.

*Доказ.* Већ смо показали да $\mathbb{F}_0 = \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$ и да $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{TR}$, тако да треба сада да покажемо да је $\mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{TR} \subset \mathbb{F}_{\sqrt{1+x^2}}$. Ако је $\alpha \in \mathbb{F}_{\sqrt{x}} \cap \mathbb{F}_{TR}$, онда ту постоји низ потпуно реалних бројева $\{\beta\}_{i=1}^{n}$ и низ потпуно реалних поља

$\{K_j\}_{j=0}^{n-1}$ тако да $K_0 = \mathbb{Q}$, $K_i = K_{i-1}(\beta_k)$, $\alpha = \beta_n$, и сваки $\beta_i$ има степен 2 над $K_{i-1}$. Због тога је $\beta_i$ корен полинома у форми

$$x^2 + c_i x + d_i$$

где је $c_i, d_i \in K_{i-1}$. Стога је $(\beta_i + ci/2)^2 = c_i^2/4 - d_i$. Доказивањем претходне теореме, знамо да је сваки конјугат од $(\beta_i + ci/2)^2$ квадрат од неког конјугата од $\beta_i + ci/2$. Отуда, сваки од конјугата од $(\beta_i + ci/2)^2$ је позитиван и $(\beta_i + ci/2)^2$ је збир квадрата у $K_{i-1}$. Рецимо да

$$(\beta_i + c_i/2)^2 = r_{r,1}^2 + r_{i,2}^2 + \cdots + r_{i,m}^2$$

онда

$$\beta_i = r_{i,1}\sqrt{1 + \left[\frac{r_{i,2}}{r_{i,1}}\sqrt{1 + \left[\frac{r_{i,3}}{r_{i,2}}\sqrt{\cdots}\right]^2}\right]^2} - \frac{c_i}{2}$$

и доказивање је завршено. Овиме смо показали да је било који потпуно реалан број у $\mathbb{F}_{\sqrt{x}}$ оригами број. $\square$

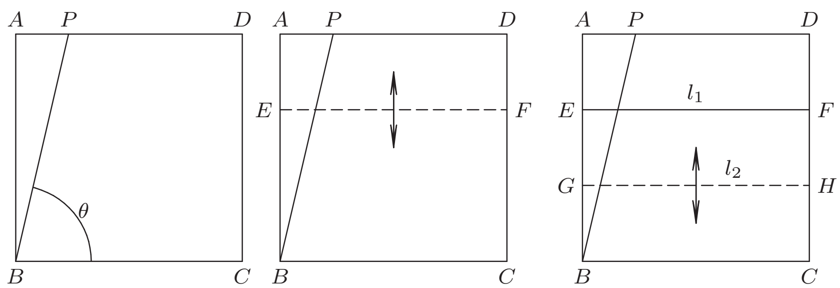
Међутим, поред свега овога, решења за дуплирање коцке, трисекцију угла као и конструисање $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и сличних бројева су већ одавно позната у оригамију. Предност оригамија у односу на лењир и шестар је у томе да оригами дозвољава истовремено поравнање две различите тачке на две различите праве, што наведени аутори нису разматрали. Они су разматрали подскуп познатих операција у оригамију који не дозвољавају ову врсту истовременог поравнања. Међутим, истовремено поравнање две тачке на две праве дозвољава оригамију да буде надмоћан у односу на лењир и шестар и да реши два класична античка проблема: дупликацију коцке и трисекцију датог угла.

# 5 Оригами конструкције

У овом поглављу коришћен је потпун систем Huzita-Hatori аксиома, на основу којих се може показати примена оригамија у неким геометријским конструкцијама.

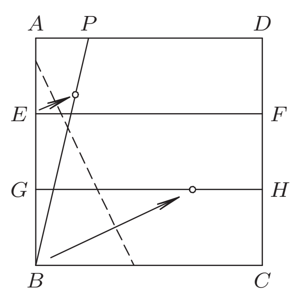
## 5.1 Трисекција угла

Решење које је дао Tsune Abe изгледа овако:
Нека се угао који желите поделити на три једнака дела налази у доњем левом углу папира са којим радимо. Назовимо тај угао $\theta$. (Овде претпостављамо да је угао $\theta$ оштар угао, али ова метода може се једноставно проширити и на тупе углове.) Направите два паралелна једнако удаљена прегиба на дну. Доњи прегиб означимо са $l_1$, а други крак угла који делимо означимо са $l_2$. Нека су тачке $B$ и $E$ дате као на слици 32.



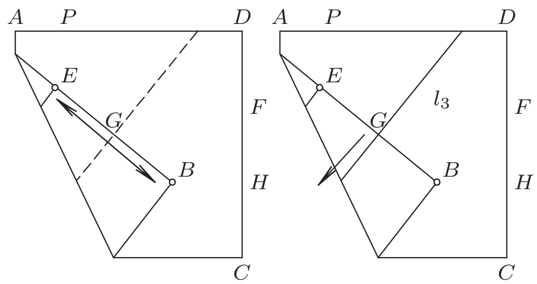

*Слика 32.*

Прегибе у геометријском смислу посматрамо као праве. Тако прегиб $l_1$ можемо посматрати као праву $l_1$. Пресавијте тачку $B$ на праву $l_1$ и тачку $E$ на праву $l_2$. Како ово није нимало лагано, мораћете више пута покушати пре него што нађете право место за савијање, но по аксиоми 6 постоји таква линија савијања.



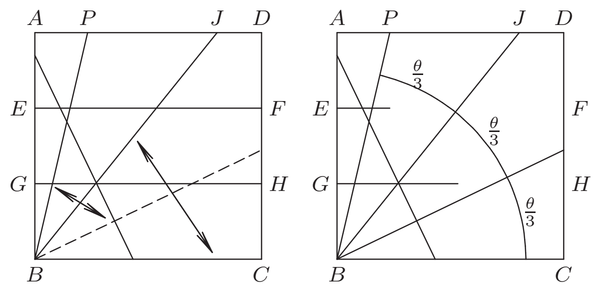

*Слика 33.*

У овом положају папир поново пресавијте дуж прегиба $l_2$ као на слици 33, а затим га размотајте. Добили смо нови прегиб који ћемо означити са $l_3$. Проширите прегиб $l_3$ до доњег левог угла.



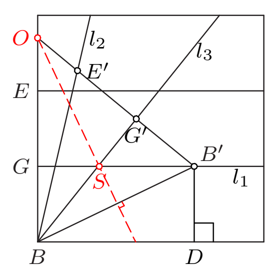

*Слика 34.*

Тачка $B$ лежи на прегибу $l_3$, а прегиб $l_3$ дели угао $\theta$ у односу $2:1$ (слика 35.).




*Слика 35.*

*Доказ.* Да бисмо ово и доказали, означићемо тачке као на слици:




*Слика 36.*

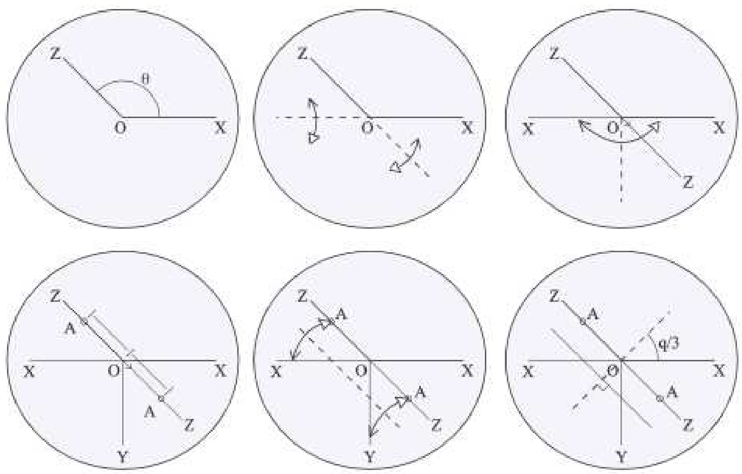
Како је $E'B' = EB$, а тачка $G'$ је средиште дужи $E'B'$, следи да је $G'B' = GB = B'D$.
Узмимо тачку $S$ такву да је $GS = SG'$ и $BS = SB'$.
Из подударности $\triangle GSB$ и $\triangle G'SB'$ добијамо $\measuredangle GSB = \measuredangle G'SB'$, а с обзиром да је $\measuredangle BSG' = 180^\circ$, можемо закључити да тачка $S$ припада дужи $BG'$, односно симетрали дужи $B'E'$ троугла $\triangle BB'E'$.
Долазимо до закључка да су $\measuredangle SG'B'$, $\measuredangle SGB$ и $\measuredangle BG'B'$ међусобно једнаки

и износе по 90°.
Из свега овога (на основу става ССУ) следи:

$$\triangle E'BG' \cong \triangle G'BB' \cong B'BD$$

Тиме смо доказали да су $\measuredangle E'BG$, $\measuredangle G'BB'$ и $\measuredangle B'BD$ међусобно једнаки. □

Техника за трисекцију тупог угла коју је осмислио француски математичар Jacques Justin илустрована је на слици 37. Како сваки угао може бити подељен на три једнака угла трисекцијом његових компонената, обе ове технике могу се користити за било који угао. Техника Jacques Justin-а не захтева коришћење угла квадрата и илустрована је као да се налази на средини бесконачног листа. Кључно је напоменути да обе технике захтевају истовремено равнање две тачке на линији.




*Слика 37.*

Трисекција ( Jacques Justin) је следећа:

**1)** Угао за трисекцију је угао $ZOX$.

**2)** Продужити полуправе $ZO$ и $XO$.

**3)** Пресавити $X$ на $X'$ кроз тачку $O$.

**4)** Издвојити тачке $A'$ и $A$" на правама $ZO$ и $Z'O$ на једнакој удаљености од тачке $O$.

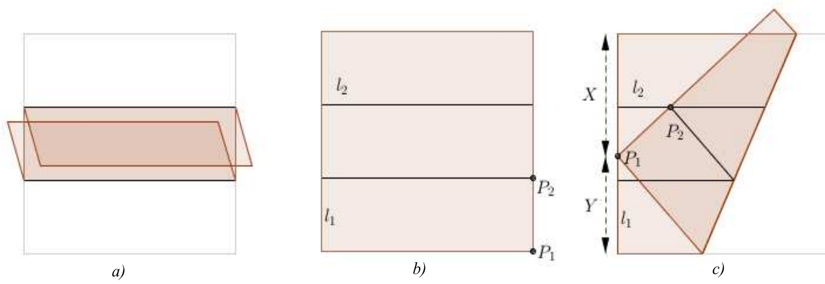
**5)** Пресавијати тачке $A'$ и $A$" да леже на линијама $X'O$ и $Y'O$ и одвити.

**6)** Пресавити линију која је под правим углом на последњем усеку кроз тачку $O$ како би се трисекција извршила.

За посебан случај у коме се комплетан круг дели на $N$ једнаких делова, постоји још једна породица оригами конструкција коју је открио аустријски математичар Robert Geretschlager, на основу геометријских конструкција које датирају из 1980-их.

## 5.2 Дуплирање коцке

Дуплирање дате коцке дужине ивице $y$ значи удвостручење запремине те коцке. Решавањем једначине $V_2 = 2V_1$ добијамо да дужина ивице нове коцке мора бити једнака $x = y\sqrt[3]{2}$. Ово је решење кубне једначине и на тај начин би требало да смо у могућности да успешно решимо кубну једначину (помоћу лењира и шестара то није могуће, али помоћу оригамија јесте). Peter Messer има једноставан и елегантан начин да то уради савијајући папир[4].

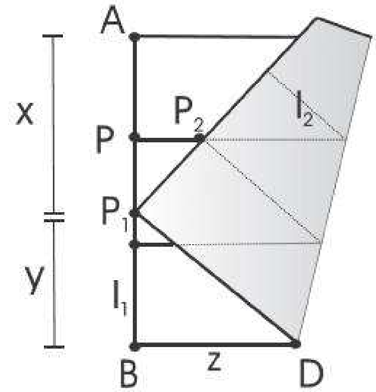



*Слика 38.*

Прво пресавијте квадрат на трећине. Нека су дате тачке $P_1$, $P_2$ и прегиби $l_1$, $l_2$ као што је приказано на слици 38. Потом се пресавије папир тако да се тачка $P_1$ смести на прегиб $l_1$, а тачка $P_2$ на прегиб $l_2$ (а то је могуће на основу аксиоме 6). Тада тачка $P_1$ дели прегиб $l_1$ на две дужи - $X$ и $Y$, а њихов однос $X/Y$ представља жељени број, $\sqrt[3]{2}$.

Докажимо да је то заиста $\sqrt[3]{2}$.

*Доказ.* Нека су тачке $P_1$ и $P_2$ дате, и тачке $A$, $B$, $D$ и $P$ као на слици:




*Слика 39.*

Затим, нека је $|AB| = x + y$, $|AP_1| = x$, $|P_1B| = y$ и нека је $|BD| = z$. Добијамо $|BD| + |P_1D| = x + y$ и $|P_1D| = \sqrt{y^2 + z^2}$, а из тога следи:

$$z = \frac{x^2 + 2xy}{2(x + y)}. \tag{4}$$

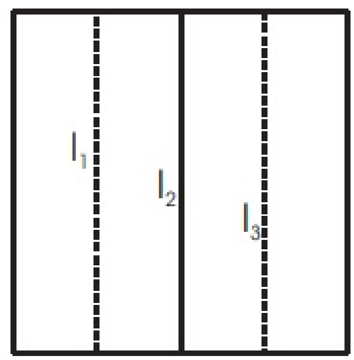
Важи да је $|P_1P_2| = |AP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{x+y}{3}$ и $|P_1P| = |AB| - |P_1B| - |AP| = \frac{2x-y}{3}$. Троугао $\triangle PP_1P_2$ је сличан троуглу $\triangle BDP_1$, па из сличности следи да је $\frac{|P_1D|}{|BD|} = \frac{|P_1P_2|}{|P_1P|}$, односно $\frac{y+x}{z} - 1 = \frac{y+x}{2x+y}$ или

$$z = \frac{2x^2 + xy - y^2}{3x}. \tag{5}$$

Из (21) и (22) следи $4x^3 + 6x^2y - 2y^3 = 3x^3 + 6x^2y$. Одатле је $x^3 = 2y^3$, тј. $x = y\sqrt[3]{2}$. $\square$

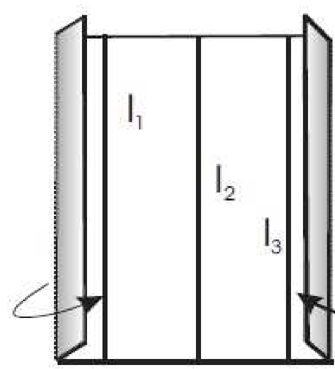
## 5.3 Оригами коцка

Узмимо папир квадратног облика и њега савијањем поделимо на четвртине. Добијене прегибе означимо редом са $l_1$, $l_2$ и $l_3$.



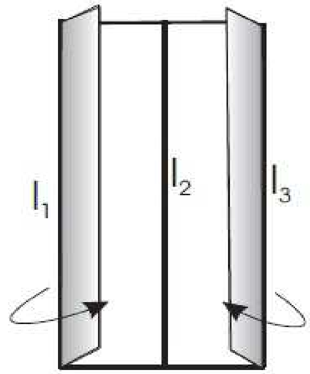

*Слика 40.*

Пресавијемо леви руб папира до прегиба $l_1$, а десни до прегиба $l_3$.



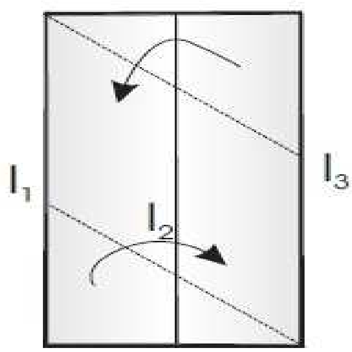

*Слика 41.*

Сада према унутра пресавијмо леви руб папира дуж прегиба $l_1$, а то исто поновимо са десне стране; пресавијмо десни руб папира према унутра дуж прегиба $l_3$.



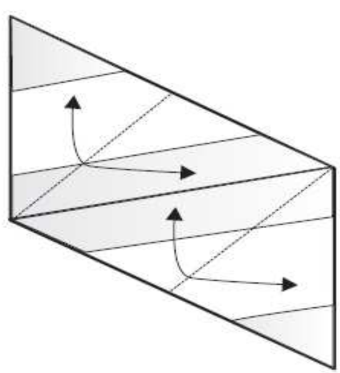

*Слика 42.*

Окренимо папир на другу страну. Горњи десни угао савијмо до левог руба папира, а доњи леви угао савијмо до десног руба папира.



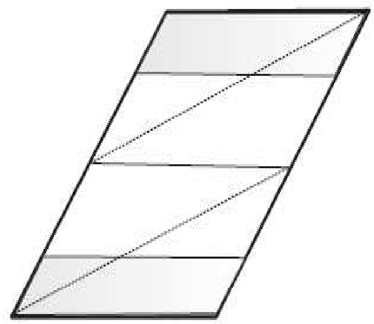

*Слика 43.*

Сада горњи врх пресавијмо дуж десног руба папира, а доњи врх дуж левог руба папира, а затим исправимо врхове.



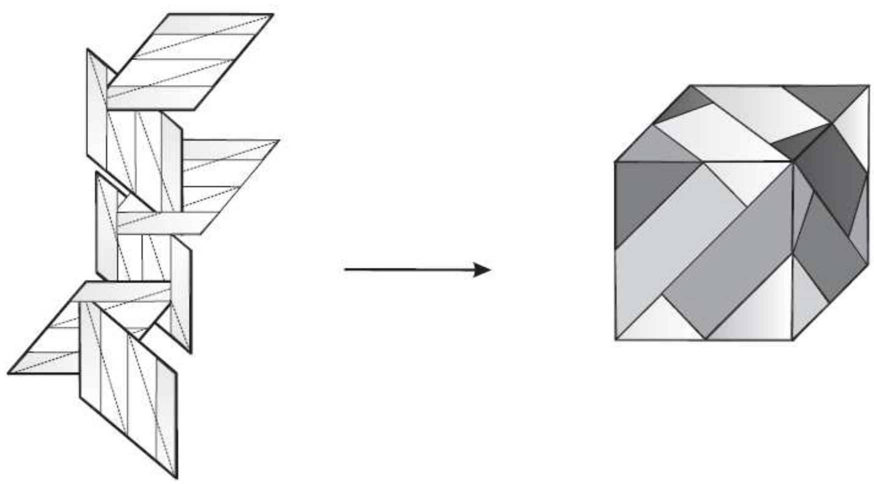
*Слика 44.*

Окренимо папир на другу страну и погледајмо шта смо добили. Израдили смо модел од којег ћемо саставити коцку.



*Слика 45.*

Да би могли обликовати коцку потребно је израдити шест оваквих модела. Модел који смо израдили има облик паралелограма чије две странице имају џепиће. У џепић сваког модела убацимо врх другог модела и на тај начин повежимо моделе у једну целину - коцку.



*Слика 46.*

# 6 Закључак

Пошто је оригами прилично нова тема, лимити у конструкцијама тек треба да буду откривени. На пример, као што је поменуто раније, Humiaki Huzita, јапанско-италијански математичар и оригами уметник, открио је шест од седам оригами аксиома 1992. године, али десет година касније, Hatori је сумирао још једну аксиому. Доказано је да су претходно поменуте аксиоме потпуне (у неком смислу), али нове карактеристике могу увек бити откривене.

Поред ових интригантних конструктивних својстава, оригами вреди студирати и истраживати у другим областима везаним за математику, на пример, постоји веза између оригамија и топологије, чак и теорија графова има везу са оригамијем.

# Литература


[1] http://sr.wikipedia.org/origami, приступљено 09.04.2015.

[2] http://mathworld.wolfram.com/Origami.html

[3] Auckly, D., and Cleveland, J. Totally real origami and impossible paper folding. American Mathematics Monthly 102 (1995), 215-226.

[4] Crux Mathematicorum, Tom.12Br.10, 1986, pp.284-285.

[5] Lang, R. J. Origami and geometric constructions. Self Published (1996 - 2003)

[6] Lang, S. Undergraduate algebra. Springer Publishing Company (2004-2005)

[7] http://www.paperfolding.com/math

[8] Michael Artin, Algebra, 1991, New Jersey

[9] Sandra Kosić  Jeremić, Konstruktibilni brojevi, 2008, Nastava matematike (Beograd)