UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Master rad

RAZVOJ APROKSIMACIJA BROJA π KROZ ISTORIJU

Student: Snežana Sovilj

Mentor: prof. dr. Zoran Lučić

Beograd, 2016. godina

Sadržaj

Predgovor

U master radu *Razvoj aproksimacija broja π kroz istoriju* reč je o matematičkom problemu koji vekovima budi pažnju i interesovanje. Postavlja se pitanje da li je moguće izračunati konačan broj cifara broja π.

U prvom poglavlju ovog master rada reč je uopšteno o broju π.

Drugo poglavlje obuhvata geomertijski period dešifrovanja konstante π. Tragovi definisanja ove konstante se nalaze u egipatskim, grčkim, kineskim, indijskim i vavilonskim određivanjima odnosa obima prema prečniku kruga. Značajan deo ovog poglavlja posvećen je Arhimedu i njegovom načinu izračunavanja broja π pomoću upisanih i opisanih poligona u krug. Izračunavanje ovom metodom dosežu sve do srednjeg veka, i kulminira početkom sedamnaestog veka u radovima Ludolfa van Cojlena.

Treće poglavlje upućuje čitaoca u vreme analitičkog razvoja matematičkih funkcija. Postepeno se odrekavši nepreciznih geometrijskih konstrukcija poligona, matematičari su koristeći mnoge beskonačne nizove(redove), ili proizvode brojeva, sa velikim uspehom određivali vrednost ove konstante. Dakle, nove metode iz razvijene aritmetike i algebre obeležile su ovaj važan period. On počinje od sredine sedamnaestog veka kada su objavljeni radovi Džona Volisa, Vilijama Bruknera, Džejmsa Gregorija i Isaka Njutna, pa sve do prvih kompjutersih izračunavanja broja π. Njutn i Gregori uveli su svaki ponaosob ekstenziju razvijenih funkcija $\arcsin x$ i $\arctan x$ i time otvorili eru analitičkih metoda izračunavanja broja π.

U poslednjem poglavlju je reč o broj π u eri kompjutera. Pred samu eru elektronskog računanja veliki doprinos matematici početkom dvadesetog veka dao je indijski matematičar Srinivasa Ramanudžan koji je pronašao neobične formule za teoriju brojeva, kao i za problem broja π. Mnogi njegovi algoritmi danas se koriste za izračunavanje ove važne matematičke konstante. Zatim će biti reči o pojavi prvih kompjutera i njihovij ulozi u izračunavanju broja π, kao i o mnogim algoritmima koji su doprineli rekordnom broju cifara ove konstante.

Još mnogo toga bi se moglo reći o broju π, kao što su i razne zanimljivosti koje se odnose na ovaj problem i mnogobrojni pokušaji njegovog rešavanja.

Za tehnicku izradu rada korišćeni su programi MikTex i WinGCLC.

Zahvaljujem se na podršći svojoj porodici i profesoru Lučiću i nadam se da će moj rad biti dobar i sistematičan izvor informacija onima koje ova tema interesuje i koji žele dalje da je proučavaju.

Matematički fakultet
Beograd, 2016. godina

Snežana Sovilj

1 O BROJU π

Najverovatnije da nijedan simbol u matematici nije izazvao toliko znatiželje i čuđenja kao broj π. Grčko slovo π (pi) koristi se u matematici kao simbol kojim obeležavamo odnos obima kruga i njegovog prečnika, ili kao odnos površine kruga i kvadrata nad njegovim poluprečnikom. Oznaka za broj π potiče od grčke reči *perimetros*, što znači *meriti okolo*.

U literaturi iz istorije matematike π je, takođe, poznat kao Ahimedova konstanta. U matematiku ju je uveo matematičar Vilijem Džouns 1707. godine, kada je objavio *Novi uvod u matematiku*, mada je korišćena ranije za označavanje obima kruga. Oznaka je postala standardna nakon što ju je usvojio Leonard Ojler 1734. godine.

π je iracionalan broj, što znači da se njegova vrednost ne može izraziti kao razlomak. Zbog toga njegov decimalni zapis nema kraja i nije periodičan. Ovu njegovu osobinu je dokazao Johan Hajnrih Lambert 1761. godine.

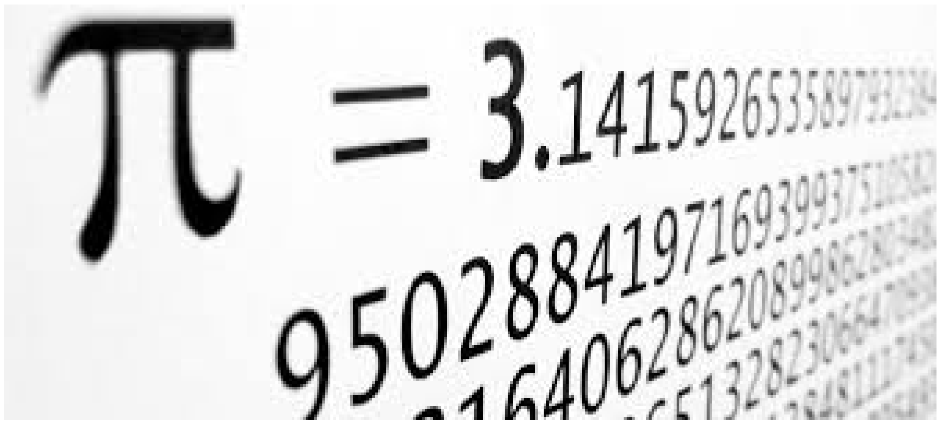
π je takođe transcedentan broj, što znači da ga nije moguće izraziti korišćenjem konačnog broja celih brojeva uz četiri osnovne računske operacije (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje) i korenovanje. To je dokazao Ferdinand fon Lindeman 1882. godine, što znači da ne postoji polinom sa racionalnim koeficijentima čiji bi koren bio broj π.

Ako pogledamo unazad, kroz vekove, teško je odrediti granicu od koje počinje pominjanje ove konstante. Činjenica da je odnos obima kruga i prečnika kruga konstantan bila je poznata toliko dugo da je to nemoguće pratiti. Ona je učestvovala u izgradnji istorije matematike, od vremena starih Grka i pre, pa sve do današnjih dana, do pojave računara.

Iznenađuje izrazito velik broj potvrđenih matematičkih veličina koje su direktno ili indirektno povezane sa ovim brojem. Tako je vremenom π postao deo ljudske kulture i obrazovne moći. Vreme o kome govorimo meri se sa hiljadama godina.

Ako pokušamo da pratimo izračunavanje ovog broja kroz vreme, ustvari ćemo se baviti istorijom matematike. On će nas provesti kroz geometriju, analizu, numeričku analizu, algebru i teoriju brojeva.

Vekovima su matematičari pokušavali da tačno, do poslednje decimale, izračunaju vrednost broj π. Sada znamo da taj broj ne može tačno da se izračuna i to ne zbog nemogućnosti današnjih računara već zbog posebne osobine ovog broja. Ali ipak trka za njegovim decimalama se nastavlja. I pored novih saznanja o ovom broju, koja su razotkrila sve njegove tajne, senka zaborava nije ga prekrila. Dakle, π još uvek pleni svojom snagom i kao da prkosi ljudima i vremenu.



Slika 1: Broj π

2 GEOMETRIJSKI PERIOD

2.1 Biblija i π

Biblija je veoma jasna o svom stavu prema π. U Starom zavetu možemo pročitati o oltaru izgrađenom unutar Solomonovog hrama:

„I sali more, deset lakata bješe mu od jednog kraja do drugoga, okruglo unaokolo,...a unaokolo mu bješe trideset lakata" (Knjiga o carevima, VII, 23).[1]

To su mere Solomonovog hrama sagrađenog 950. godine pre nove ere, i možemo uočiti da odnos obima prema prečniku iznosi trideset lakata podeljeno sa deset lakata, odnosno 3. To naravno nije sasvim tačna vrednost i nije čak ni mnogo tačna za vreme u kom je zapisana, jer su u to vreme Egipćani i Mesopotamci već znali da π ima vrednost od $(16/9)^2$ i 25/8. Doduše u odbranu Solomonovim zanatlijama treba primetiti da su pojedini predmeti, koji su opisani, bili takvog oblika da veliki stepen geometrijske preciznosti nije bio moguć, niti neophodan.

Ova vrednost je zbunjivala matematičare godinama jer je toliko daleko od istine. Bilo je raznih polemika, od „Ovo je dokaz da je Biblija lažna." do „Ovo je dokaz da je π stvarno jednako 3, i naučnici nas lažu". Neki smatraju da je Solomonov sud zapravo bio oblika čiji je rub kao rub u čaše. Prečnik je bio meren na vrhu čaše, dok je obim meren oko dna.

Rabin Rambam (1135-1204) napisao je: „Odnos prečnika kruga prema njegovom obimu ne može biti poznat, ali ga je moguće približno odrediti i približna vrednost koju naučnici koriste je odnos koji ima 1 prema $3\frac{1}{7}$. Pošto je nemoguće doći do savršeno tačnog odnosa oni su pretpostavili da je u pitanju ceo broj i rekli: „Bilo koji krug koji ima obim veličine tri pesnice ima prečnik veličine jedne pesnice." I oslanjali su se na ovo za sva merenja koja su im bila potrebna."[2]

Prava vrednost se može izvesti iz numeroloških ekvivalenti hebrejskih slova. Na primer, reč obim se piše upotrebom slova Kof, Vav, He, ali se čita samo kao Kof, Vav. Ako pogledamo numerološke ekvivalente za ova dva načina pisanja gde je svako slovo u reči ekvivalentno nekom broju i "vrednost" reči jednak je zbiru njenih slova dobijamo 111 i 116. Ako ova dva

[1]Zoran Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, JP Službeni glasnik, 2009.

[2]David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

broja podelimo, a zatim ih pomnožimo sa vrednošću 3 koju su oni koristili, dobijamo iznenađujući rezultat od 3, 14150943.

2.2 Egipat

Najranije vrednosti π, uključujući biblijsku vrednost 3, su skoro sigurno dobijene putem merenja. U Egipatu, u kome su potrebe navodnjavanja i organizovane poljoprivredne proizvodnje bili najveći podsticaj za razvoj matematike, iz sačuvanih papirusa saznajemo da su imali razvijene sisteme za računanja i odgovarajuću simboliku i da su vešto baratali sa razlomcima. Iz dvaju dokumenata pisanih na papirusu od kojih je jedan poznat po imenu Rindov papirus, a drugi pod imenom Moskovski papirus, saznajemo koje su matematičke istine bile poznate činovnicima i sveštenicima starog Egipta. U njima su sačuvani brojni rešeni matematički problemi, delom iz aritmetike, a delom iz geometrije. Egipćani su znali i mnoštvo obrazaca za geometrijska izračunavanja. Na primer, umeli su da izračunaju površinu kruga i u tu svrhu su množili kvadrat broja 8/9 sa 4 i tako za broj π dobili približnu vrednost 3,1605.

2.2.1 Rindov papirus

Rindov papirus napisan je oko 1750. godine pre nove ere, pisao ga je egipatski sveštenik Ahmes, ali on nije bio i autor ovog matematičkog spisa. Ahmes je za sobom ostavio svitak dužine čak oko 5m i širine oko 33cm, koji predstavlja najstariju matematičku raspravu pronađenu do danas. Na njemu se nalazi 87 problema, od kojih je 80 zadataka iz algebre, svaki sa sopstvenim rešenjem. Većina zadataka vezana je za svakodnevni život. Rindov papirus danas se čuva u Britanskom muzeju, a nekoliko malih fragmenata u Bruklinskom muzeju u Njujorku.

Prema rešenju četrdeset osmog problema Rindovog papirusa, pomenutu približnu vrednost broja π računali su sukcesivnim smanjivanjem površine kvadrata. Nije isključeno da je to učinjeno na sledeći način:

1. Ako pretpostavimo da je približna vrednost P_o površine kruga kome je prečnik d, jednaka površini kvadrata koji je opisan oko tog kruga, tada je $P_o = d^2$, te je približna vrednost broja π jednaka 4.

2. Ako površinu kvadrata umanjimo za četiri kvadrata A_1 kojima su

Slika 2: Rindov papirus

stranice $d/6$, tada će približna vrednost površine kruga biti

$$P_o = d^2 - 4\left(\frac{d}{6}\right)^2 = \frac{8}{9}d^2$$

Odavde sledi da je približna vrednost broja π jednaka 3,555.

3. Ako novodobijenu površinu umanjimo za osam kvadrata A_2 kojima su stranice $d/9$, tada će približna vrednost površine kruga biti

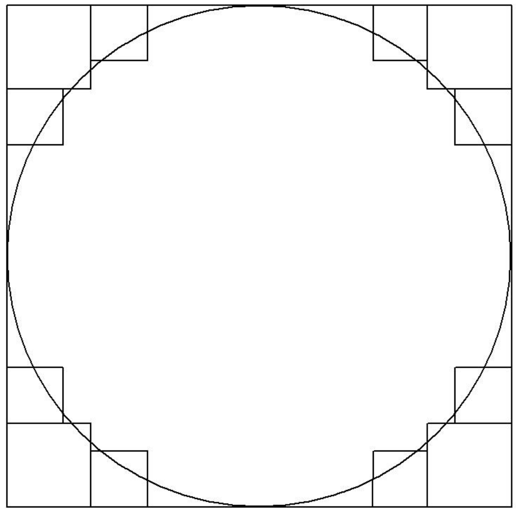
$$P_o = \frac{8}{9}d^2 - 8\left(\frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

Odavde sledi da je

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1605$$

Ovaj rezultat zaista je impresivan, imajući u vidu da su, u isto vreme, u Mesopotamiji u kojoj je aritmetika bila razvijenija no u Egiptu, koristili da je $\pi = 25/8 = 3,125$. U odnosu na prethodne dve približne vrednosti, Kinezi i Jevreji koristili su veoma grubu procenu $\pi = 3$.[3]

[3]Zoran Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, JP Službeni glasnik, 2009.



Slika 3: Sukcesivno smanjivanje površine kvadrata

2.2.2 Moskovski papirus

Moskovski papirus napisan je oko 1850. godine pre nove ere, autor nije poznat, no njegovo dešifrovanje su izvršili B.A. Turaev i B.B. Struve, i objavili ga 1930. godine. Dužine je oko pola metra i širine oko 8cm. Sadrži 25 zadataka, među kojima su i najveća dostignuća egipatske matematike. Danas se Moskovski papirus čuva u muzeju likovnih umetnosti u Moskvi.

Prema rešenju desetog problema Moskovskog papirusa, Egipćani su znali obrazac za površinu lopte. Mada ima i drugih tumačenjima, obično se pretpostavlja da se u ovom zadatku radi o površini kupole.

Deseti problem glasio je ovako:

"...izračunaj površinu polulopte (kupole) ako je data kupola sa "osnovom" poluprečnika $4\frac{1}{2}$. O, daj da saznam njemu površinu? Izračunaj 1/9 od 9, pošto je kupola polovina jajeta. Dobija se 1. Izračunaj ostatak, to je 8. Izračunaj 1/9 od 8. Dobiće se 2/3, 1/6, 1/18 (8/9 egipatski matematičar predstavio je kao zbir osnovih razlomaka 8/9=2/3+1/6+1/18). Izračunaj ostatak od tih 8(pri oduzamanju) tih 2/3, 1/6, 1/18. Dobićes $7\frac{1}{9}$. Izračunaj $7\frac{1}{9}$ puta $4\frac{1}{2}$. Dobija se 32. Pogledaj: to i jeste njema površina. Dobio si ispravan rezultat. " [4]

Označimo sa d prečnik osnove kupole, rezultat rešenja moguće je izraziti

[4] A. P. Juškeviča, O istoriji matematike, Prosvešcenije, Moskva, 1976.

formulom:

$$P = d[\left(2d - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(2d - \frac{1}{9}2d\right)]$$

tj.

$$P = [\left(1 - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)]2d^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 2d^2 = 2\left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Izraz $(\frac{8}{9}d)^2$ Egipćani su primanjivali za površinu kruga, što odgovara vrednosti $\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,1605$. Zbog toga je površina P, koju su našli Egipćani, jednaka zbiru površina dva kruga prečnika d. Smatra se da se ovo pravilo dobija iz shvatanja da je površina kupole, kao i krug, moguće sastaviti od trouglova.

2.3 Grčka

Nakon što je pisar Ahmes zabeležio svoje formulacije u Egiptu, više od hiljadu godina je prošlo pre nego što se iko pozabavio mišlju o vezi između krugova i kvadrata. Tokom ovog vremena, Egipćani i Vavilonci su pronašli svoje osnovno razumevanje odnosa koji se mogao primenjivati za merenje zemljišta i građenje raznih struktura. Međutim, Grci su u četvrtom veku nove ere dublje ispitali temu kružnih mera. Bili su zainteresovani, neki bi rekli opsednuti, ne merenjem zemljišta već istraživanjem ideja. Bilo je to zlatno doba razmišljanja i misli, ali iako odnos između obima i prečnika nije bio najvažniji problem tada, on je zasigurno bio u fokusu nekih od najvećih mislilaca antičke istorije.

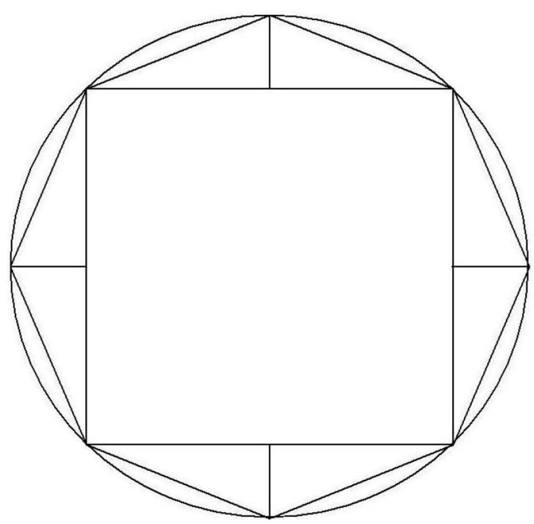
2.3.1 Anaksagora

Prvi Grk koji je pokušao da pronađe konačnu vezu između kruga i kvadrata bio je Anaksagora iz Klazomene. Rođen je 500. godine pre nove ere, a umro 428. godine pre nove ere. U Atini, centru grčke kulture, proveo je 30 godina. Anaksagora se smatra osnivačem atinske filozofske škole, bio je veoma uticajan kao astronom i matematičar, ali i zbog svog asketskog načina života i ljubavi prema prirodi. On je posmatranjem nebeskih tela došao do novih teorija o poretku u svemiru, što ga je dovelo do sukoba s narodnom verom. Anaksagora je uhapšen zbog protivljenja religijskim dogmama i upravo se u zatvoru bavio kvadraturom kruga. Plutarh je napisao da je Anaksagora razvio metodu za crtanje kvadrata iste površine kao kruga, mada sam Plutarh nije ulazio u detalje niti je objasnio kako je Anaksagora to uradio.

2.3.2 Antifont

Antifont iz živeo je u petom veku pre nove ere. Rođen je u Atini. Bio je sofista i Sokratov savremenik. Od četiri teksta čiji je on autor sačuvana su samo dva: *Istina* u dve knjige i *O složenosti*. Kao i svaki sofista Antifont se bavio gnoseologijom, teorijom kulture, etikom i politikom, ali i kosmologijom, fizikom i matematikom.

Razmatrao je i problem kvadrature kruga. Antifontova ideja je da se u zadati krug upisuju pravilni poligon, u svakom narednom upisivanju sa duplo večim brojem stranica. Prema Temistiju taj poligon bi bio jednakostraničan trougao, a prema Simplikiju kvadrat. Kao autentična verzija smatra se trougao, ali se u literaturi opisuje metod sa polazno upisanim kvadratom. Nakon upisivanja kvadrata u zadati krug, nad njegovim stranicama se konstruišu jednakokraki trouglovi. Teme svakog trougla naspram osnovne ivice tj. stranice kvadrata, leži na kružnici. Temena kvadrata i navedena temena trougla (osam ukupno) su temena pravilnog osmougla upisanog u krug. Isti postupak se ponavlja, pa se dobija pravilni šesnaestougao upisan u krug. Svaki naredni put se broj ivica udvostručuje, obim i površina poligona su sve bliži obimu i površini kruga, i jednom bi se konačno poligon i krug podudarili. Kako Antifon zna da konstruiše kvadrat iste površine kao i zadati poligon, iz jednakosti površina kruga i poligona sledi i jednakost površina kruga i kvadrata.



Slika 4: Antifontov metod

Ipak Antifontova ideja je začetak antičke teorije mere koja je nazvana *ekshaustija*, a temelji se na petoj knjizi *Elemenata* i principu indirektnog dokaza.

Posle Antifonta sličnu ideju upisivanaja pravilnih poligona u krug koristili su i Brison i Arhimed.

2.3.3 Brisonov metod

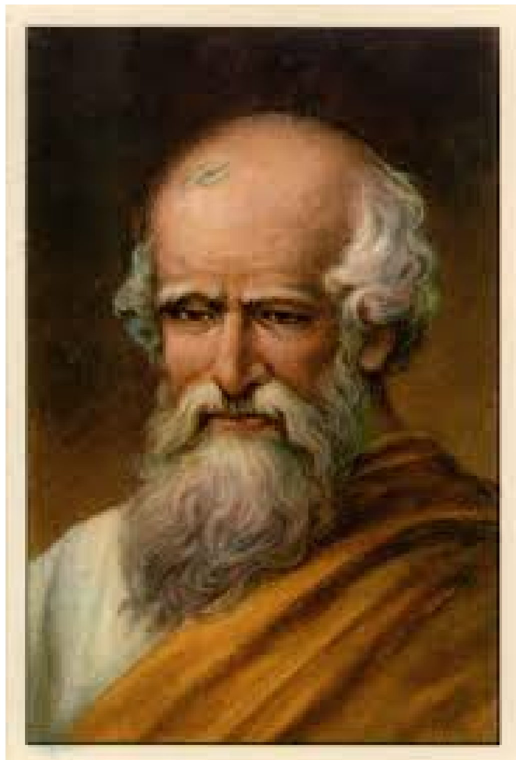
Brison iz Heraklije je bio drevni grčki matematičar i sofista koji je dao doprinos rešavanju problema kvadrature kruga i izračunavanju broja π. O Brisonovom životu malo se zna. Verovatno je bio Sokratov učenik.

Brison, zajedno sa savremenikom Antifontom, bio je prvi koji je došao na ideju da upiše poligon u krug, zatim udvostruči broj stranica poligona, i ponovi proces, dobijajući kao rezultat donju granicu aproksimacije površine kruga.„Ranije ili kasnije" , navode oni, „dobiće se toliko stranica poligona, tako da će poligon postati krug." . Brison je kasnije ponovio istu proceduru sa poligonima opisanim oko kružnice, dobijajući gornju granicu aproksimacije površine kruga. Sa ovim proračunima Brison je mogao da aproksimira broj π , i čak postavi donje i gornje granice vrednosti ovog broja. Sličan metod koristio je kasnije i Arhimed da približno izračuna π.

2.3.4 Arhimed

Arhimed je rođen u Sirakuzi na Siciliji 287. godine pre nove ere. Vizantijski polihistor Jovan Ceces iz dvanaestog veka u svojim spisima tvrdi da je Arhimed ubijen u 75. godini života. To je bilo 212. godine stare ere kada su Rimljani posle duge opsade tokom Drugog punskog rata osvojili Sirakuzu. Na osnovu prethodnih podataka sudi se o Arhimedovoj godini rođenja .

Arhimed, matematičar i najveći fizičar starog veka, bio je i inžinjer, pronalazač i astronom. Njegov otac bio je Fidija, astronom i matematičar, koji ga je naučio svemu što je i sam znao. Arhimed je brzo usvojio očeva znanja, koja su za njega bila tek početak bavljenja naukom. Njegov istraživački duh ga vodi u Aleksandriju, gde su moćni Ptolomejci osnovali čuvenu Aleksandrijsku biblioteku. U to vreme Aleksandrija je bila središte prirodnih nauka: astronomije, matematike i medicine. Arhimeda je najviše zanimala matematika. U Aleksandriji je bilo mnogo mladih i sposobnih matematičara, među njima i sjajni Eratosten, budući Arhimedov prijatelj. Tadašnje nepisano pravilo je bilo da svako otkriće pre objavljivanja mora biti poslato nekom drugom naučniku na proveru. Tako su Arhimed i Eratosten sve do Arhimedove smrti razmenili brojna pisma u kojima su se nalazila skoro sva otkrića i izumi i jednog i drugog. Nakon boravka u Aleksandriji Arhimed se vraca u Sirakuzu.



Slika 5: Arhimed

Arhimed je svojim otkrićima i delima dao veliki doprinos nauci. Njegova sačuvana dela su: *O ravanskom ekvilibrijumu (dve knjige)*, *Kvadratura parabole*, *O sferi i cilindru (dve knjige)*, *O spiralama, O konoidima i sferoidima, O plutajućim telima (dve knjige), Merenje kruga, Prebrojabanje zrna peska* i *Metoda*.

Arhimed se najviše ponosio svojim delom *O sferi i cilindru*, tj. izračunavanjem površine i zapremine lopte i valjka, pa su mu po njegovoj želji prijatelji i srodnici na nadgrobni spomenik uklesali valjak sa loptom. Zahvaljujuči slici uklesanoj na Arhimedovom grobu, Ciceron je 75. godine stare ere uspeo da nađe Arhimedovo grobno mesto u Sirakuzi.

U delu *O ravanskom ekvilibrijumu* Arhimed je objasnio zakon poluge. Poznata je njegova izjava:

„Nađite mi mesto na koje da stanem i pomeriću Zemlju."

U spisu *O spiralama* opisana je mehanicka kriva, Arhimedova spirala.

U delu *O konoidima i sferoidima* Arhimed izračunava površine i zapremine delova sfera, konusa i paraboloida.

Osnovne temelje hidrostatike i hidraulike Arhimed je utemeljio u delu *O plutajućim telima.* Poznat je njegov zakon potiska. Izumeo je vijak za podizanje veće količine vode na veći nivo (Arhimedov vijak). Zanimljivo je da su mu znanja iz ovih oblasti omogućila da otkrije prisustvo neplemenitih metala u kruni kralja Hijerona, uz čuveni uzvik "Eureka" - sto u prevodu znaci: „Otkrio sam, pronasao sam."

U delu *Kvadratura parabole* Arhimed je dokazao da je površinu figure ograničene parabolom i pravom linijom 4/3 puta veća od površine trougla upisanog u tu parabolu.

Jedino sačuvano delo koje svedoči o Arhimedovom zanimanju za astronomiju je *Prebrojavanje zrna peska.* Arhimed je izračunao da godina iznosi $365\frac{1}{4}$ dana.

U delu *Metode* Arhimed je dao osnove infetezimalnog računa.

Od Arhimedovih nesačuvanih spisa treba spomenuti raspravu o poliedrima u kojoj, prema Paposu, Arhimed, pored pet pravilnih poliedara opisanih u trinaestoj knjizi *Elemenata*, konstruiše i 13 polupravilnih poliedara kojima su pljosni pravilne i isto raspoređene oko temena. Ti poliedri su *Arhimedova tela.*

On je takođe izvršio i aproksimaciju broja $\sqrt{3}$, ograničavajući ga na sledeći način:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

Arhimed je bio veoma postovan među svojim sunarodnicima, jer je svojim izumima dugo odbijao napade Rimljana na Sirakuzu. Još jedna poznata izreka pripisuje se Arhimedu: „Ne diraj moje krugove", kojom se obratio rimskom vojniku, koji ga je prekidao dok ih je crtao na zemlji. Tako se i završio Arhimedov život, poginuo je od ruke rimskog vojnika prilikom opsade Sirakuze, da li zbog uzajmnog nerazumevanja (Arhimed je govorio grcki, a vojnik latinski jezik.) ili zbog nadmoći Rimljana, koji su smatrali da im je ovakav čin dozvoljen.

Još mnogo je Arhimedovih izuma i otkrića koja ovde nisu spomenuta, ali koja svedoče o njegovom genijalnom umu.

Kada je svoju pažnju posvetio krugovima, koristio je metodu iscrpljenja Antifonta i Brisona u ovim svojim kalkulacijama. Međutim, Arhimed se fokusirao na spoljašnje rubove, tj. obim dva poligona umesto njihovih površina, i tako je došao do približne vrednosti obima kruga. Ono što je još fascinantnije pored Arhimedove preciznosti je činjenica da je on ove vrednosti izračunao bez poznavanja simbola za nulu ili manje više bilo kakve vrste obeležavanja decimala. Ovi koncepti još nisu bili uvedeni u zapadnjačku misao, a neće ni biti narednih još nekoliko stotina godina.

U spisu *O merenju kruga* Arhimed je približno izračunao vrednost broja π, upisujući u krug i opisujući oko njega pravilan 96-ugao. Zaključio je da važi ocena:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

tj.

$$3,1408 < \pi < 3,1429$$

Ako uzmemo aritmetičku sredinu njegovih dveju granica dobicemo 3,1418, dakle grešku od 0,0002. To je veoma dobra ocena ako se zna da je $\pi = 3.1416$, zaokruženo na 4 decimale.

Postoji određena polemika u istoriji matematike oko toga da li je Apolonije od Pergama, Arhimedov kolega, ili je sam Arhimed zapravo nadogradio znanje iz knjige *O merenju kruga.* Bez obzira na to ko je vršio kalkulacije, ovo je poslednja zabeležena vrednost π pre nego što je Klaudije Ptolemaj upotrebio π u Aleksandriji više od dvesta godina kasnije.

Merenje kruga

Teorema 2.1. *Odnos obima i prečnika kruga je manji od* $3\frac{1}{7}$ *i veći od* $3\frac{10}{71}$.

Dokaz:

I deo dokaza

Prvi korak dokaza

Neka je AB prečnik kruga, tačka O njegov centar, prava AC njegova tangenta u tački A i neka je $\angle AOC$ jednak 1/3 pravog ugla. Onda je

$$OA : AC[= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153 \quad (1)$$

i

(2) $$OC : CA[= 2 : 1] = 306 : 153$$

Zatim se prvo konstruiše prava OD, i bisektrisa $\angle AOC$, koja seče duž AC u tački D. Tako da je :

$$CO : OA = CD : DA$$

kao i

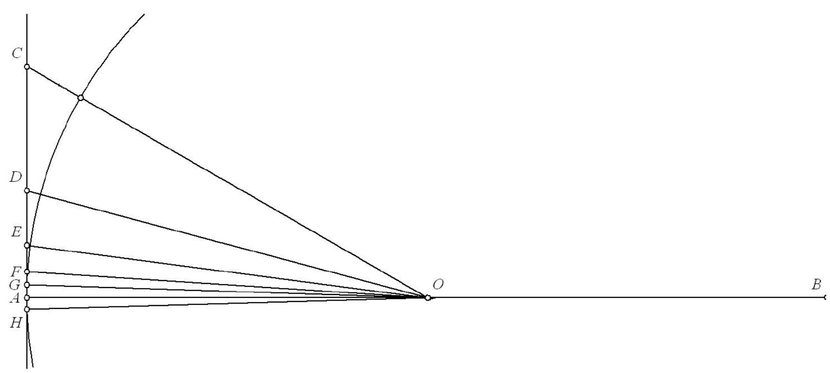
$$[(CO + OA) : OA = CA : DA]$$

ili

$$(CO + OA) : CA = OA : AD.$$

Iz (1) i (2) sledi:

(3) $$OA : AD > 571 : 153$$



Slika 6: Merenje kruga,Teorema 2.1., I deo dokaza

Na osnovu prethodnog je:

$$OD^2 : AD^2[= \left(OA^2 + AD^2\right) : AD^2 > \left(571^2 + 153^2\right) : 153^2] > 349450 : 23409$$

, pa je:

(4) $$OD : DA > 591\frac{1}{8} : 153$$

Drugi korak dokaza

Sličan postupak se ponavlja i drugi put. Konstruiše se prava OE, bisektrisa ugla $\angle AOD$, koja seče dužAD u tački E. Onda je:

$$DO : OA = DE : EA$$

i

$$(DO + OA) : DA = OA : AE$$

. Iz (3) i (4) sledi da je:

$$OA : AE[> \left(591\frac{1}{8} + 571\right) : 153]$$

tj.

$$OA : AE > 1162\frac{1}{8} + 153 \tag{5}$$

Takođe važi:

$$\begin{aligned} OE^2 : EA^2 &> \left(\left(1162\frac{1}{8}\right)^2 + 153^2\right) : 153^2 \\ &> \left(1350534\frac{33}{64} + 23409\right) : 23409 \\ &> 1373943\frac{33}{64} : 23409 \end{aligned}$$

. Konačno je :

$$OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153 \tag{6}$$

Treći korak dokaza

Neka je OF bisektrisa ugla $\angle AOE$ i neka seče duž AE u tački F. Iz (3) i (5) sledi da je:

$$OA : AF > \left(1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8}\right) : 153$$

i

$$OA : AF > 2334\frac{1}{4} : 153 \tag{7}$$

Zato je:

$$OF^2 : FA^2 > \left(\left(2334\frac{1}{4} \right)^2 + 153^2 \right) : 153^2$$

tj.

$$OF^2 : FA^2 > 5472132\frac{1}{16} : 23409$$

i

$$OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153 \tag{8}$$

Četvrti korak dokaza

U četvrtom ponavljanju postupka prava OG je bisektrisa ugla $\angle AOF$, koja seče duž AF u tački G. Iz (7) i (8) se dobija:

$$OA : AG > \left(2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4} \right) : 153$$

tj.

$$OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$$

. Ugao $\angle AOC$, koji je 1/3 pravog ugla, deljen je na pola četiri puta, pa važi:

$$\angle AOG = \frac{1}{48} 90^0.$$

Konstruiše se ugao $\angle AOH$ simetričan i podudaran uglu $angle AOG$ u odnosu na pravu OA. Prava GA seče pravu OA u tački H. Onda je:

$$\angle GOH = \frac{1}{24} 90^0$$

Duž GH je stranica pravilnog 96-ougla opisanog oko datog kruga. Kako je

$$OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$$

$$AB = 2OA$$

i

$$GH = 2AG,$$

sledi da je:

$$AB : (obimpoligona)[> 4673\frac{1}{2} : (153 \cdot 96)] > 4673\frac{1}{2} : 14688.$$

Kako je:

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}[< 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}] < 3\frac{1}{7},$$

zaključuje se da je obim kruga (koji je manji od obima poligona) mani od $3\frac{1}{7}AB$, AB je prečnik kruga.

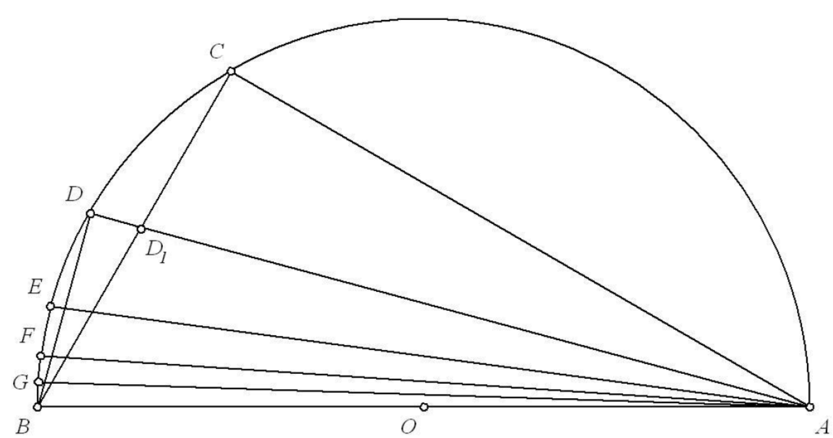
II deo dokaza

Neka je AB prečnik kruga i neka prava AC seče krug u tački C tako da je ugao $\angle CAB$ jednak 1/3 pravog ugla. Tada je:

$$AC : CB[= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780.$$

Prvi korak dokaza

Neka je AD bisektrisa ugla $\angle BAC$. Ona seče duž BC u tački D_1 i krug u tački D. Uglovi $\angle BDA$ i $\angle BCA$ su pravi, jer su uglovi nad prečnikom kruga.



Slika 7: Merenje kruga, Teorema 2.1., II deo dokaza

Važe sledeće jednakosti:

$$\angle BAD = \angle D_1AC = \angle D_1BD.$$

Sledi da su trouglovi: $\triangle ADB, \triangle ACD_1, \triangle BDD_1$ slični, pa važe odnosi

$$\begin{aligned} AD : DB = BD : DD_1 \\ [= AC : CD_1] \\ = AB : BD_1 \\ = (AB + AC) : (BD_1 + CD_1) \\ = (AB + AC) : BC \end{aligned}$$

tj.

$$(BA + AC) : BC = AD : DB.$$

Kako je:

$$AC : CB < 1351 : 780$$

i

$$BA : BC = 2 : 1 = 1560 : 780,$$

sledi da je

$$AD : DB < 2911 : 780. \tag{1}$$

Takođe važi:

$$AB^2 : BD^2 < \left(2911^2 + 780^2\right) : 780^2$$

tj.

$$AB^2 : BD^2 < 9082321 : 608400,$$

pa je :

$$AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780. \tag{2}$$

Drugi korak dokaza

Neka je AE bisektrisa ugla $\angle BAD$, koja seče krug u tački E. Na isti način kao u prvom koraku dokazuje se da važi:

$$AE : EB = (BA + AD) : BD$$

$$< \left(3013\frac{3}{4} + 2911\right) : 780,$$

iz (1) i (2) važi:

$$< 5924\frac{3}{4} : 780$$

$$< \left(5924\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{13}\right) : \left(780 \cdot \frac{4}{13}\right)$$

(3)
$$< 1823 : 240.$$

Kako je

$$AB^2 : BE^2 < \left(1823^2 + 240^2\right) : 240^2$$
$$< 3380929 : 57600,$$

važi da je:

(4)
$$AB : BE < 1838\frac{9}{11} : 240.$$

Treći korak dokaza

Neka je AF bisektrisa ugla $\angle BAE$ koja seče krug u tački F. Važi sledeće:

$$AF : FB = (BA + AE) : BE.$$

Iz (3) i (4) sledi:

$$AF : FB < 3661\frac{9}{11} : 240$$

$$< \left(\left(3661\frac{9}{11}\right) \cdot \frac{11}{40}\right) : \left(240 \cdot \frac{11}{40}\right)$$

(5)
$$1007 : 66.$$

Tako da važi:

$$AB^2 : BF^2 < \left(1007^2 + 66^2\right) : 66^2$$
$$1018405 : 4356,$$

pa je:

$$AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66. \tag{6}$$

Četvrti korak dokaza

Neka je AG bisektrisa ugla $\angle BAF$ koja seče krug u tački G. Onda je

$$AG : GB + (BA + AF) : BF.$$

Iz (5) i (6) sledi da je

$$AG : GA < 2016\frac{1}{6} : 66$$

i

$$AB^2 : BG^2 < \left(\left(2016\frac{1}{6}\right)^2 + 66^2\right) : 66^2$$

$$< 4069284\frac{1}{36} : 4356.$$

Zato je:

$$AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66$$

ili

$$BG : AB > 66 : 2017\frac{1}{4}. \tag{7}$$

Kako je ugao $\angle BAG$ rezultat četiri bisektrise ugla $\angle BAC$, koji je $1/3$ pravog ugla, onda je on jednak $\frac{1}{48}90^0$. Centralni ugao za ugao $\angle BAG$ je duplo veći i iznosi $\frac{1}{24}90^0$. Tako da je duž BG stranica pravilnog upisanog 96-ougla u krug. Iz (7) sledi da je:

$$obimmnogougla : AB > (96 \cdot 66) : 2017\frac{1}{4}$$

$$> 6336 : 2017\frac{1}{4}.$$

Kako je

$$6336 : 2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71},$$

zaključuje se da je obim kruga veći od prečnika kruga $3\frac{10}{71}$ puta.

Zaključak

Ako je O obim kruga, a d prečnik kruga onda važi odnos:

$$3\frac{10}{71} < O/d < 3\frac{1}{7}.$$

2.3.5 Ptolemaj

Klaudije Ptolemaj je bio starogrčki i staroegipatski matematičar, geograf, astronom, i astrolog. Rođen oko 85. godine u Egiptu, a umro je oko 165. godine u Aleksandriji.

Između ostalih svojih brilijantnih izuma, dobio je, koristeći tetivu kruga i opisanih 360-ugao, približnu vrednost $\pi = 3 + 8/60 + 30/3600 = 3\frac{17}{120} = 3,14167$, što je za 0,003 procenta od tačne vrednosti. Ovu vrednosti broja π objavio je 150. godine u svom *Velikom matematičkom zborniku astronomije*, jednom od najvećih dela rimsko-aleksandrijskog perioda, koji je još poznatiji pod nazivom *Almagest*.

Ako bi se računao obim kruga čiji je prečnik od 1.000 stopa, Ptolemajeva vrednost bi se samo za inč (2,54 cm) razlikovala od tačne vrednosti.[5]

2.4 Kina

Ne zna se tačno kada se u Kini počela razivajati matematika. Naučnici su utvrdili da su počeci matematike u Kini imali srodnosti s počecima razvoja matematike u staroj Mesopotamiji i veruje se da su na neki način povezani. Prvi dokazi matematičke aktivnosti u Kini pronađeni su u obliku numeričkih simbola zapisanih na tankim kostima stoke i drugih životinja, a procenjeni su da potiču iz četrnaestog veka pre nove ere. Mnoga od otkrića i postignuća u matematici Kineza očuvana su u nekoliko starih i veoma važnih knjiga. Jedna od tih knjiga je svakako *Sveta knjiga o aritmetici.* U ovoj knjizi je navedeno da su Kinezi broj π aproksimirali sa 3.

[5] David Blatner, The Joy of Pi , Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

2.4.1 Čang Hong

Čang Hong je bio ministar i astronom cara Antija na početku drugog veka nove ere. Pre nego što je Čang Hong umro napisao je da je

$$(obim\ kruga)^2 \div (strana\ opisanog\ kvadrata)^2 = \frac{5}{8}.$$

Koristeći jedinični krug, to znači $\frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}$, tako da kada se izvede račun, ovo podrazumeva da je π jednako $\sqrt{10}$ (oko 3,162).

Verovatno zbog svoje vizualne jednostavnosti, vrednost $\sqrt{10}$ će postati najpopularnija aproksimacija za π tokom narednih godina na području Azije, iako je ona bila daleko od tačne vrednosti.

Ako biste pokušali da izgradite zgradu kružnog oblika sa prečnikom od 50 stopa (15 m) sa upotrebom navedene vrednosti za π, pogrešno biste izmerili obim za otprilike 1 stopu (30 cm) i površinu tlocrta za više od 12 kvadratnih stopa (1,1m^2).[6]

Kinezi su se za jedan korak približili tačnoj vrednosti π kada je Vang Fau (229-267) izjavio da ako je obim kruga 142, onda je njegov prečnik 45. Nije sasvim jasno kako je došao do ovih vrednosti, ali kada se one podele, dobijamo rezultat da je $\pi = 3,156$.

Zatim, više od 650 godina nakon što su Grci Brison i Antifont približno odredili površinu kruga koristeći uzastopno rastuće poligone, Kinez Liu Hui je došao do istog metoda i započeo svoja računanja.

2.4.2 Liu Hui

Liu Hui je najpoznatiji kineski matematičar. Rođen je 220. godine, a umro 280. Napisao je komentar *Devet poglavlja* u kojem je dao teorijsku potvrdu za svaki od datih problema, ali je ujedno obogatio materijal svojim doprinosima i rezultatima.

Liu Hui u krug upisuje pravilni 6-tougao, 12- tougao, ..., 192-tougao i tako dolazi do zaključka da se vrednost broja π nalazi između 3, 141024 i 3, 142704. U kasnijim radovima poboljšava aproksimaciju upisujući 3072-ougao čime je dobio za π aproksimaciju od $\frac{3927}{1250} = 3.14159$.

Prava slava pripada velikom astronomu iz petog veka Zu Čongžiju i njegovom sinu Zu Kengčihu.

[6] David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

2.4.3 Zu Čongži

Zu Čongži je kineski matematičar i astronom. Rođen je 429. godine, a umro 500. Uz pomoć sina dolazi do aproksimacije $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ koja je tačna na 6 decimala. Koristio je Liu Huijevu metodu sve do upisanog 24 576-tougla. Takođe, dao je i racionalnu aproksimaciju $\frac{355}{113}$. Ovo je za osam milioniti deo od jednog procenta različito od danas prihvaćene vrednosti za π.

Nije lako poverovati da je do tog rezultata došao crtanjem dijagrama u krupnoj razmeri. Na osnovu Zu Čongžijevog razlomka zasnovana je sledeća geometrijska konstrukcija:

Nacrtajmo četvrtinu kruga jediničnog poluprečnika i na duži AC postavimo tačku B tako da je $AB = 1/8$, $BC = 7/8$. Iz tačke D na duži BG izabrane tako da je $DG = 1/2$ spustimo normalu DE na CG i konstruišemo duž BE. Na kraju povucimo duž DF palalelno sa BE. Može se pokazati da je $FG = 16/113$ ili $0,1415929.....$ Kako je $335/113 = 3 + 16/113$, ako na trostruku vrednost poluprečnika kruga dodamo duž FG dobićemo duž čija se dužina razlikuje od π za manje od milionitog dela.

Kineska tačnost je ostala nedostižna zapadu sve do kraja šesnaestog veka.

2.5 Indija

Indijska matematika se razvijala na indijskom potkontinentu od 1200. godine pre nove ere sve do kraja osamnaestog veka. Indijski matematičari su strpljivo tragali za tajanstvenim odnosom. U klasičnom periodu indijske matematike su zabeležena značajna postignuća zahvaljujući Arjabhati, Bramagupti i Baskari II.

2.5.1 Arjabhata

Arjabhata je prvi u nizu velikih matematičara klasičnog perioda, a možda i najveći. Rođen je 476. godine, a umro 550. godine. Njegovo najpoznatije delo danas je svakako *Arjabhatija* koje je napisao kada je imao 23 godine.

Naravno, ni Arjabhata ne bi bio veliki matematičar da ne daje svoj doprinos pri računanju broj π. U svom delu *Ganitapada* on pise: „Dodaj 4 broju 100, pomnoži sa 8 i onda dodaj to na 62000. Ovim pravilom može se računati obim za krug prečnika 20000" tj.

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

Arjabhata je napisao da ako je a jednako strani pravilnog poligona sa n strana upisanog u krug jediničnog prečnika, i b je strana pravilnog upisanog poligona sa $2n$ strana, tada je $b = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1-a^2)}}$". Ovo je jednačina koju je koristio da bi otkrio svoju poznatu vrednost za $\pi = \sqrt{9,8684}$ u šestom veku. Računao je spoljašnji rub poligona sa 384 stranice.

Drugi u hronološkom nizu velikih astronoma i matematičara drevne Indije je Bramagupta.

2.5.2 Bramagupta

Bramagupta je rođen 598. godine u severozapadnoj Indiji, a većinu života proveo je u gradu Bilamal gde je bio vođa opservatorijuma. Za vreme provedeno tamo napisao je četiri teksta vezana za matematiku i astronomiju od kojih je najbitniji *Bramasputasidanta*. Umro je 668. godine.

On je aproksimirao broj $\pi = \sqrt{10}$. Računajući obime upisanih poligona sa 12, 24, 48 i 96 stranica redom je dobijao za broj π sledeće vrednosti $\sqrt{9,65}$, $\sqrt{9,81}$, $\sqrt{9,86}$, $\sqrt{9,87}$. Naoružan ovom informacijom, pretpostavio je da kako se oblik poligona približava krugu, da se spoljasnji rub povećava, pa samim tim se i π približava vrednosti $\sqrt{10}$. Interesantno je to što nije video da njegovi kvadratni koreni konvergiraju prema broju znatno manjem od 10, zapravo π na kvadrat je tek nesto iznad 9,8696. Činjenica da je $\sqrt{10}$ toliko laka za prenošenje i pamćenje, pa je ova vrednost ta koja se kasnije proširila iz Indije u Evropu i bila korištena od strane matematičara širom sveta tokom Srednjeg veka.

2.6 Bliski istok

Tokom prvog milenijuma Evropu je zadesio mračni srednji vek, koji je bio prepun ratova i razdora koji su pratili pad Rimskog carstva i porast uticaja ranog hrišćanstva. Svako naučno interesovanje u ovom periodu je bilo ugušeno zbog religijske netolerancije ili ratova, ali znanje ima načina da otputuje tamo gde će moći da cveta, pa je tako i π uspeo da se pojavi u za njega mnogo povoljnijoj akademskoj klimi u muslimskom svetu.

Do devetog veka matematika i nauka su cvetali u arapskim zemljama, pogotovu u predelu na kojem je današnji Irak gde je al Horezmi, jedan od najvećih arapskih matematičara živeo i podučavao. Mnogi smatraju da u razdoblju od kraja antičke nauke do kasnog srednjeg veka u Evropi nije bilo važnih događaja u matematici osim prevođenja grčkih tekstova na arapski. No, zapravo je doprinos arapskog područja matematici mnogo veći od samog prevođenja i prenosa podataka.

Današnja matematika zapadnog stila mnogo je sličnija matematici kakvu susrećemo u arapskim doprinosima, nego onoj u starogrčkim. Mnoge ideje koje su pripisane Evropljanima kasnog srednjeg veka i renesanse pokazale su se zapravo arapskim.

2.6.1 Al Horezmi

Abu Jafar Muhamed ibn Musa Al Horezmi rođen je oko 780. godine u Bagdadu, a umro je oko 850. godine. Bio je učenik u *Kući mudrosti*, a kasnije ju je i vodio i delovao pod zaštitom kalifa al Mamuna. Pisao je o algebri, geometriji i astronomiji. Ostaće zapamćen po tome što je slučajno dao svoje ime algoritmu, dok je reč *al jabar* koja se javlja kao naslov jedne njegove knjige preteča današnje reci *algebra*.

Nepoznato je da li je al Horezmi sam pokušavao da izračuna odnos obima i prečnika, ali je poznato da je koristio vrednosti $3\frac{1}{7}$, $\sqrt{10}$ i $\frac{62.832}{20.000}$ u svojim radovima. U *Algebri* ovog starog arapskog matematičara o izračunavanju obima kruga čitamo ove redove: „Najbolji način je da se prečnik pomnoži sa $3\frac{1}{7}$. To je najbrži i najlakši nacin. Alah zna za bolje."

2.6.2 Al Kaši

Džamšid Masud Al Kaši je takođe jedan od arapskih matematičara koji je dao svoj doprinos u aproksimaciji broja π. Rođen oko 1380. godine u Kasanu, a umro je 22. juna 1429. godine u Samarkandu.

U julu 1424. godine on je objavio *Raspravu o obimu kruga*, rad u kome je pomoću Arhimedovih poligona izračunao vrednost 2π do devet decimala u sistemu brojeva čija je osnova 60 (sistemu koji su za zapis brojeva koristili stari Vavilonci, a koji je i do danas ostao u upotrebi pri izražavanju vremena i merenju uglova). Ako njegov račun prevedemo na današnji dekadni sistem zapisa brojeva vidimo da je vrednost π bila izražena sa 16 decimalnih mesta. To je bilo dostignuće daleko ispred svega što je do tad postignuto, čak i u poređenju sa antičkim Grcima ili u odnosu na Kineze.

Takođe, važno je napomenuti da će rezultat dobijen na ovaj način ostaće neprevaziđen skoro 200 godina.

2.7 Srednji vek

Nakon nekoliko vekova velikog porasta u trgovini između Bliskog istoka i zapadnih zemalja, Italija je stavila monopol na trgovačke rute početkom drugog milenijuma. Leonardo iz Pize, poznatiji po svom nadimku Fibonači, bio je sin italijanskog diplomate stacioniranog u severnoj Africi krajem dvanaestog veka. Fibonači je 1202. godine, u svojoj trideset drugoj godini, napisao *Knjigu o abakusu*, koja je doprinela učvršćivanju upotrebe arapskih brojeva u Evropi. On je 1220. godine u svojoj *Praktičnoj geometriji* odredio da je $\pi = \frac{864}{275} = 3,1418$, ova vrednost je za oko 0,0001 tačnija od one koju je dao Arhimed. Albert Saksonski (1316-1390), biskup Halberštata u svom delu *Kvadratura kruga*, napisao je da je odnos obima i prečnika tačno $3\frac{1}{7}$. Sredinom petnaestog veka, kardinal Nikolas Kuzanski tvrdio da je tačno odredio kvadraturu kruga, otkrivši da je odnos obima i prečnika 3,1423. Nažalost njegova metoda je kasnije proglašena pogrešnim od strane Johana Milera fon Kenigsberga (1436-1476).

Dok je izučavanje matematike, a pogotovo vrednosti π, bila daleko od stagniranja tokom srednjeg veka, istina je da je načinjen veoma mali pomak, pa je vrednost π ostala manje tačna nego što su to ranija grčka, kineska i indijska istraživanja utvrdila.

Zapravo do kraja šesnaestog veka nije načinjen ozbiljniji pomak na ovom polju, sve do vremena francuskog advokata i matematičara amatera Fransoa Vietea.

2.7.1 Fransoa Viete

Fransoa Viete je rođen je 1540. godine u današnjem Vendeu u Francuskoj, a umro je 13. decembra 1603. godine u Parizu. Završio je prava, i jedno vreme radio kao advokat u svom rodnom gradu. Iako nije bio profesionalni matematičar, on je ipak očitao lekciju matematičarima. Tako se, tokom 1592. godine on bavio problemima tadašnjih tvrdnji da se može izvršiti kvadratura kruga, podela ugla na tri dela i konstrukcija kocke duplo veće zapremine u odnosu na datu, korišćenjem samo lenjira i šestara. Reč je o tri klasična matematička problema kojima su se ljudi bavili vekovima. Viete je pokazao da su dokazi koji su objavljeni 1882. godine bili pogrešni. On objavljuje knjigu 1593. godine u kojoj se bavi opisom ova tri klasična matematička problema, ali i pokazuje konstrukciju tangente u svakoj tački Arhimedove spirale. U ovoj knjigi, on je 1579. godine, koristeći Arhimedovu metodu i trigonometrijske formule, izračunao π na 9 decimala koristeći poligon sa $3 \cdot 2^{17} = 393216$ stranica i izvršio procenu $3.1415926535 < \pi < 3.1415926537$.

Takođe je 1593. godine predstavio π u vidu beskonačnog proizvoda, to je, kako je danas poznato, najranije predstavljanje broja π kao beskonačog.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

Izraz sa desne strane jednakosti treba tumačiti kao graničnu vrednost:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2},$$

gde je $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ sa početnim uslovom $a_1 = \sqrt{2}$.

Posle sređivanja moguće je dobiti formulu za broj π u sledećem obliku:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{n}} = \pi$$

Iako je jednačina bila prodor u matematici, Viete je shvatio da je od male koristi u izračunavanju broja π. Potrebno je previše interacija računanja komplikovanih kvadratnih korena da bi se dobio mali broj cifara.

Tri druga matematičara sa kraja šesnaestog veka su upotrebila Arhimedov metod poligona za izračunavanje broja π. Prvi je bio holandski matematičar Adrijen Antonis koji je 1585. koristio poligone upisane i opisane u i oko kruga da bi pokazao da $\frac{333}{106} < \pi, \frac{377}{120}$. Samo po sebi ovo nije toliko impresivno, ali jednostavno mu se posrećilo, jer kad je sveo brojioce i imenioce, nezavisno je ponovo otkrio kinesku vrednost od 355/113.

Sledeći, nakon osam godina, je bio još jedan holandski matematičar Adrijen van Romen koji je izračunao π do 15. decimalnog mesta, koristeći upisani poligon koji je imao više od 100 miliona strana.

Najveći uspeh izračunavanja broja π Arhimedovom metodom imao je Ludolf van Cojlen.

2.7.2 Ludolf van Cojlen

Ludolf van Cojlen je holandski matematičar nemačkog porekla. Rođen 28. januar 1540. godine u Hildešajmu u Nemačkoj, a umro 31. decembar

1610. godine u Lajdenu u Holandija. Iako rođen u Nemačkoj, tokom katoličke inkvizicije, kao i mnogi Nemci, emigrirao u Holandiju. Na njegovom spomeniku bila je urezana sledeća rečenica „Kada je prečnik jedan onda je obim kruga veći od njega za $3,14125914159265358979323846264338327 9...$". Spomenik je vremenom izgubljen, ali građani Lajdena ga nisi zaboravili, pa su tako 5. jula 2000. godine, obeleživši 400. godišnjicu njegovog rada svečano postavili novi spomenik, kopiju prethodnog.

Ludolf van Cojlen je proveo veliki deo svog života računajući broj π na što veći broj decimala. Godine 1596., metodom koja se nije suštinski razlikovala od one koju je primenio Arhimed, izračunao je vrednost broja π na 20 decimalnih mesta, koristeći poligon sa $60 \cdot 2^{33}$ stranica. Pred kraj žitota, koristeći poligon sa 2^{62} stranica, izračunao je π na 35 decimalnih mesta.

On je poslednji računao broj π originalnom Arhimedovom metodom. Koristio je sledeću formulu:

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - s_n^2}}}$$

gde je s_n, dužina jedne stranice n-tougla, a $O_n = n \cdot s_n$ je obim takvog poligona. Ako je u pitanju jedinični krug, tada je $O = \pi \cdot r = \pi \cdot 1 = \pi$, što znači da se povećanjem broja stranica obim O_n približava broju π .

Vekovima je broj π nazivan "Ludolphov broj".

Međutim, samo deset godina nakon van Cojlenove smrti, načinjen je prodor u potrazi za vrednošću broja π koja je bila prava revolucija u načinu izračunavanja misterioznog odnosa obima i prečnika i usmerila je matematiku prema novim visinama. Ovaj pomak je veoma brzo bacio senku na mnoge godine koje je van Cojlen posvetio svom radu koji se pored ove novine činio potpuno zastarelim.

I kako je napredovala matematika, tako se nastavilo i izračunavanje broja π. Prethodni načini izračunavanja počeli su da gube na privlačnosti početkom 1600. godina. Metoda *ekshaustije* je bila naporna sa svojim množenjima, deljenjima i korenovanjem koje se izvodilo na poligonima sa milijardu strana kojima se van Cojlen bavio do svojih poslednjih dana. Ljudski rod će morati ili da nađe bolji način da izračuna π ili će ostati na poznavanju samo nekoliko otkrivenih cifara.

Holandski matematičar Vilerbrod Šnel 1621. godine našao je lakši način. Dok su njegovi prethodnici udvostručavali strane poligona zarad što tačnijeg rezultata, on je radio sa nepromenjenim brojem strana. Samo crtanjem kruga oko i u šestougao mogao je da odredi da je π između 3,14022 i 3,14160. Ovo je bilo bliže Arhimedovoj proceni iako je upotrebljen poligon od samo 96 strana. Duplirajući strane poligona samo četiri puta i koristeći poligon od 96 strana, Šnel je uspeo da utvrdi π sa tačnošću do 6 cifara, a sa još malo truda je potvrdio i Cojlenovih 35 cifara. Iako je čvrsto verovao u svoje teorije, nikad ih nije uspeo dokazati. Tri godine nakon Šnelove smrti, 1626. godine rodio se Kristijan Hajgens.

Kristijan Hajgens je bio holandski matematičar, i poput Vietea bio je advokat. Matematikom se nije bavio do svojih dvadesetih godina, ali se tada sa iznenađujućom posvećenošću bacio na ovu granu nauke i ubrzo pronašao dokaze za Šnelove teoreme. Znatno je unapredio teorije, i jednostavnim ucrtavanjem trouglova mogao je da uskladi Arhimedovu procenu π, a sa šestouglom je mogao da izračuna 9 tačnih cifara, koristeći 3,1415926533 i 3,1415926538 kao granične vrednosti.

Ni Šnel ni Hajgens nisu nameravali da dođu do rekordnog broja cifara, težili su samo efikasnijem izračunavanju. Iako su postavili temelje za novi analitički pristup kvadraturi kruga, bili su zapravo poslednji veliki matematičari koji su se fokusirali na Arhimedovu metodu upotrebom poligona.

3 KLASIČNI PERIOD

Kao jedan od prvih efekata ovog ponovnog buđenja jeste svakako pojavljivanje matematičke formule za π. Jedna od najranijih bila je Volisova formula.

3.1 Džon Volis

Džon Volis je rođen 23. novembra 1616. godine u Ashordu u Engleskoj, a umro je 28. oktobra 1703. godine u Oksfordu. U svojoj knjizi *Aritmetika beskonacnih veličina* koja je izdata 1656. godine, između ostalog objavio je formulu za π. Ovaj profesor geometrije na Oksfordu u svojoj knjizi počinje da primenjuje umesto antičke geometrije, novu aritimetiku.

Volis je bio prvi matematičar kome je uspelo da algebra preraste u analizu. On je otkrio metod računanja vrednosti π pronalazeći površinu kvadranta kruga. Neka svedočenja govore da je sličan metod korišćen u Japanu krajem sedamnaestog veka. Kvadrant kao deo kruga ima površinu od $\frac{\pi}{4}$. Nalazeći tu površinu, može se doći do vrednosti za π.

U modernom matematičkom izražavanju, ono na čemu je Volis radio bi izgledalo ovako:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Vollis je korišćenjem indukcije i interpolacije došao do onoga što je poznato pod nazivom Volisova formula:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}....$$

Slično Vietovoj i Volisova jednačina je beskonačni proizvod, ali drugačija po tome što uključuje samo racionalne operacije bez kvadratnih korenova.

Mnogi veliki matematičari su živeli u sedamnaestom veku, i svaki od njih doprineo je svojim radom otkrivanju zagonetke i jednim korakom se približio pronalaženju proračuna za π. Jedan od tih matematičara bio je Džejms Gregori.

3.2 Džejms Gregori

Džejms Gregori je rođen novembra 1638. godine u Aberdenu u Škotskoj, a umro je oktobra 1675. godine u Edinburgu. Radio je kao bibliotekar u Univerzitetskoj biblioteci. U svom radu *Geometrijski radovi* ukazao je na činjenicu šta možemo izračunati. Takođe je koristio nizove za izračunavanje broja π. U Gregoorijevim nizovima, na primer, da bismo dobili četiri decimalna mesta, tačno izračunata, potrebna nam je greška manja od 0.00005=1/20000, a to znači da nam je potrebno 10000 članova niza.

Godine 1671. otkriven je njegov niz:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ... (-1 < x < 1) \tag{1}$$

Što za $x = 1$ daje

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ....$$

Koristeći činjenicu da je $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, dobijamo

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{(3 \cdot 3)} + \frac{1}{(5 \cdot 3 \cdot 3)} - \frac{1}{(7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} + ...\right)$$

niz koji konvergira mnogo brže. Deseti član niza je $1/\left(19 \cdot 3^9 \cdot \sqrt{3}\right)$, koji je manji od 0.00005, i tako mi imamo najmanje četiri decimalna mesta korektno izračunata nakon samo devet članova niza.

Još bolja ideja je koristiti formulu:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

i onda računati dva niza koji se dobijaju ako u (1) x zamenimo u prvom slučaju sa 1/2 i u drugom slučaju sa 1/3. Uviđamo vrlo brzu konvergenciju, ustvari mi možemo postaviti formulu koja bi glasila otprilike ovako

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{a}\right) + \arctan\left(\frac{1}{b}\right)$$

za a i b veliko.

3.3 Vilhelm fon Lajbnic

Vilhelm fon Lajbnc je rođen 1. jula 1646. godine u Lajpcigu, a umro je 14. novembra 1716. godine u Hanoveru. Lužički Srbin, bio je nemački filozof, matematičar, pronalazač, pravnik, istoričar, diplomata i politički savetnik. Njegovi engleski prijatelji, pričali su mu o Merkatorovoj kvadraturi hiperbole, jedaog od ključeva koji je poslužio Njutnu pri pronalasku diferencijalnog računa. Na temelju toga je pronašao metodu beskonačnih redova. On je 1674. godine otkrio relaciju između π i svih drugih neparnih broja.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ...$$

Ova formula se često pripisuje Lajbnicu, mada je neki pripisuju i škotskom matematičaru Džejmsu Gregoriju.

Gregori-Lajbnicov niz impresivan je u svojoj eleganciji i jednostavnosti, ali je on popriličnо loš za izračunavanje cifara.

Obe ove formule, Volisova i nazovimo je Lajbnic-Gregorijeva, dramatično su i zadivljujuće otkriće, pošto su s jedne strane kompletno aritmetičke u svom karakteru, dok je poznato da π potiče iz geometrije, one pokazuju iznenađujući rezultat koji beskonačan proces može da dostigne i deo su puta koji vodi do bogastava i izobilja moderne matematike.

3.4 Isak Njutn

Isak Njutn je rođen januara 1643. godine u Engleskoj, a umro 31. marta 1727. godine u Londonu. Bio je engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode, koji je danas za većinu ljudi jedna od najvećih ličnosti u istoriji nauke. Njutnova izuzetnost je poznata, ali njegova veza sa π nije.

Godine 1665., dok je kuga harala Londonom, Njutn se povukao u Vulstorp i dane provodio u razmatranju proračuna. Mnoga dela je napisao za ovo vreme, uključujući i najmanje dva beskonačna niza za π. On je otkrtio niz:

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + ...$$

Koristeći činjenicu da je $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, dobijamo

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} - \frac{1}{9 \cdot 2^9} - ...\right)$$

Njutn je koristio ovu formulu da bi izračunao 15 cifara broja π.

U jednoj prepisci on priznaje: „Sramota me je da vam kažem koliko puta sam izveo ove proračune, nemajući preča posla u to vreme".

Očigledno, pronalaženje odnosa obima kruga i prečnika više nije bilo pitanje jednostavnih izračunavanja. Proračun i arkustangens su matematičarima omogućili da računaju mnogo brže nego upotrebom poligona, izračunavanjem samo četiri promenljive jednog od Njutnovih nizova dobija se 3,1416. Efikasnost je uskoro postala glavna stvar ko će uspeti da postavi jednačinu koja će najbrže dati približnu vrednost broja π.

Sa ovim novim jednačinama potraga za ciframa broja π je naglo porastao krajem sedamnaestog veka.

3.5 Abraham Šarp

Abraham Šarp je bio engleski matematičar i astronom. Rođen je 1651. godine, a umro 18. jula 1742. godine. Bio je prva osoba koja je uz pomoć Gregori-Lajbnicovog arkustangens niza izračunao vrednost broja π.

Jednačina Abrahama Šarpa bazirala se na činjenici da je $\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Tada, po Gregori-Lajbnicovom nizu:

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{3^2 \cdot 5}\right) - \left(\frac{1}{3^3 \cdot 7}\right) + ...\right)$$

On je 1699. godine uz pomoći ove formule izračunao 72 cifre broja π.

Podstaknut takmičarskim duhom, francuski matematičar de Lanji izračunao je 127 cifara 1719. godine koristeći istu tehniku kao i Šarp. Međutim, sedamdesetpet godina kasnije, austrijski matematičar Georg Vega došao je do 140 cifara i otkrio da je de Lanji izračunao samo 112 cifara tačno. Vega svoj rad objavljuje 1789. godine. Ostaće zapamćeno u istoriji matematike da se taj rekord održao 50 godina.

3.6 Džon Mejčin

Džon Mejčin je takođe bio engleski matematičar. Postao je poznat zahvaljujući svojoj formuli za π. Rođen je 1680. godine, a umro 9. juna 1752. godine.

On je 1706. godine koristeći razliku između dva arkustangensa došao do 100 cifara braja π. Koristio je sledeću formulu:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Ova formula se pokazala naročito korisnom za izračunavanje π jer se $\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ lako izračuna pomoću Gregori-Lajbnicovog niza, i $\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ konvergira veoma brzo.

Sa ovakvom formulom ostaje još samo jedna poteškoća u izračunavanju broja π, a to je savršeno dosadan proces računanja.

.

3.7 Leonard Ojler

Leonard Ojler je jedan od najvećih matematičara svih vremena. Rođen 1707. godine u Švajcarskoj, a umro 1783. godine. Tokom svog života radio je širom Evrope. Do svoje tridesete godine oslepeo je na jedno oko, a do svoje šezdesete godine potpuno je izgubio vid. Uprkos tome nastavio je da radi, diktirajući svoje obimne teorije i izračunavanja asistentima.

Ojler je došao do mnogo arkustangens formula i beskonačnih nizova za izračunavanje broja π.

$$\frac{\pi}{4} = 5 \cdot \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

Takođe je razvio jednačinu za koju neki veruju da je najfascinantnija jednačina svih vremena: $e^{x\pi} + 1 = 0$. Ova jednačina je samo za mali korak dalje od njegovog otkrića da je $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ (jer je $\sin \pi = 0$ i $\cos \pi = -1$). Zahvaljujući ovoj formuli dokazano je da je π iracionalan i trascendentan.

Ojler 1755. koristi metodu arkustangense koja je konvergirala mnogo brže od Gregorijeve.

$$\arctan x = \frac{x}{1+x^2}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + ...\right)$$

Ovu je metodu koristio da bi izračunao 29 cifara π za samo sat vremena.

Nakon Ojlerovih briljantnih koraka devetnaesti vek deluje veoma siromašno po pitanju revolucionarnih metoda za računanje broja π. Zapravo, sve do početka dvadesetog veka nije bilo nijednog matematičara koji bi došao do novog seta jednačina za ovaj problem. Uprkos tome, lovci na cifre ove konstante su nastavili naporno da rade koristeći prethodne metode ne bi li otkrili što više cifara. Nakon što je Kalet objavio 152 cifre u Parizu 1837. godine, Raderford je koristio

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{70}\right) + \arctan\left(\frac{1}{199}\right)$$

da dođe do 208 cifara 1841. godine. Šest godina kasnije, Tomas Klauzen našao je 248 decimalnih brojeva broja π koristeči i Mejčinovu i jednu od Ojlerovih formula, a 1853. je Raderford imao 440 cifara.

3.8 Vilijam Šenks

Vilijam Šenks je rođen 25. januara 1812. godine u Engleskoj, umro je 1882. godine. Veliki deo svog života posvetio je računanju ove konstante. Nadmašio je Raderfordova računanja predstavivši 607 cifara 1853. godine, da bi konačno 1873. godine Šenks izračunao 707 cifara broja π uz pomoć Mejčinove formule. Za ovaj podvig mu je bilo potrebno petnaest godina života, tj. uspevao je da izračuna u proseku jednu cirfu nedeljno. Vrlo brzo posle Šenksovog računa De Morgan primećuje da postoji čudan nedostatak sedmica u poslednjim od tih 707 decimala. On je to pomenuo u svojoj knjizi *Skup paradoksa* 1872. godine i radoznala javnost je na nju podsećana do 1945. godine kada je Ferguson otkrio da je Šenks napravio grešku na 527 mestu, nakon čega su sve njegove decimale bile pogrešne. Fergusonu je rebala čitava godina da to uradi, u proseku po samo malo više od jedne cifre dnevno.

4 π U ERI KOMPJUTERA

4.1 Srinivasa Ramanudžan

Srinivasa Ramanudžan je rođen 22. decembra 1887. godine u malom gradu u južnoj Indiji u porodici koja nije raspolagala nikakvih bogatstvom. Odrastao je učeći matematiku sa svojim vršnjacima u školi, ali je veoma brzo postalo jasno da je on pravo čudo na tom polju. On je toliko uživao u matematici da je njegov uspeh iz drugih predmeta opadao i njegove studije su se završile kada je pao na ispitima iz ostalih obaveznih predmeta.

Slika 8: Sirinivasa Ramadžudan

Do svoje dvadeset pete godine Ramanudžan je bio oženjen i radio je kao nisko plaćeni službenik u Madrasu. Čak ni tad nije prestao da eksperimentiše sa matematikom, zapisujući svoje jednačine u velikom broju u svoje sveske. Njegove jednačine su bile raznolike, uključujući mnogo rešenja za π, i retko je dokazivao svoje jednačine ili prikazivao metode. Zatim, 1913. poslao je nekoliko strana svojih otkrića trojici engleskih matematičara. Dvojica su odbacila njegov rad, ali je treći matematičar, G. H. Hardi, primio Ramanudžanovo pismo. Smatrao je da njegova otkrića moraju biti prava, jer da nisu, niko ne bi imao toliko bogatu maštu da ih izmisli. Sledeće godine je Hardi doveo Ramanudžana u Englesku da sarađuje s njim na brojnim matematičkim projektima. Iako Ramanudžan nije imao klasično obrazovanje iz matematike, njegovo razumevanje ove nauke bilo je iznad proseka. Nakon početka Prvog svetskog rata, Ramanudžan je postao hronični bolesnik i često je boravio u bolnicama i po nekoliko godina. Do 1919. godine, on se vratio u Indiju, i iako je njegova bolest nastavljala i trpeo je velike bolove, Ramanudžan je nastavio da popunjava svoje sveske jednačinama. Umro je u svojoj trideset drugoj godini.

Ramanudžan, kao i većina matematičara, nije mogao da se odupre iskušenju da istraži π. Početkom dvadesetog veka , on je otkrio mnogo novih formula za računanje broja π. Njegova najpoznatija formule je:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{(1103 + 26390n)}{(4 \cdot 99)^{4n}}$$

koja donosi 8 cifara po izračunavanju.

Gosper je 1985. godine uz pomoć ove formule izračunao 17 miliona cifara broja π.[7]

Naučnici i matematičari još uvek pokušavaju da razreše fascinantne jednačine ovog genija.

4.2 Pojava prvih računara

Pre sto godina matematičari su mogli samo da sanjaju o elektronskim mašinama kojima bi mogli računati brzinom munje. Međutim, do sredine dvadesetog veka taj san postao je stvarnost.

D. F. Ferguson je bio u mogućnosti da zameni papir i olovku mehaničkom opremom kao što je rani stoni kalkulator. Do Septembra 1947. koristeći formulu:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right)$$

došao je do 808 cifara π.

Stoni kalkulatori iz 1940ih godina su bili toliko različiti od današnjih kalkulatora, ali se njima stvarno moglo sabirati, oduzimati, množiti i deliti brže nego što su ljudi do tad mogli. Kako je opasnost dugog ručnog računanja uklonjena, Levi B. Smit i Džon Vrenč su preuzeli na sebe odgovornost

[7]David H. Bailey, Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein and Simon Plouffe, The Quest for Pi, Mathematical Intelligencer, vol. 19, no. 1 (Jan. 1997), pg. 50–57, 1996.

da provere tačnost Fergusonovog rada koristeči Mejčinovu formulu, mada je zahtevalo mnogo meseci dok je 808 cifara konačno potvrđeno.

Nakon toliko otkrivenih cifara, Smit i Vrenč nisu mogli da odole iskušenju da nastave dalje, pa su došli i do 1000 decimalnog mesta broja π zime 1948. Uprkos tome, stoni mehanički kalkulatori bili su glasni i svaki korak u izračunavanju potrebnog arkustangensa bio je naporan. Sa samo jednom ili dve cifre dnevno, teško da je sve to bilo vredno truda.

Godine 1949. istorija matematike i potraga za ciframa π preuzela je dramatičan preokret. Ovog puta prodor nije bio na polju matematike već je to bilo vezano za brzinu samog kalkulatora. ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) je bio prvi digitalni elektronski računar. Konačno je bio u funkciji u laboratorijama za balističko istraživanje u Aberdin Pruv Graundu 1948. i naredne godine su Džordž Rajtvisner, Džon fon Nojman i N. C. Metropolis koristili ovo "čudo" sa 19 000 vakumskih cevi i stotine hiljada otpornika i kondenzatora kako bi izračunali 2 037 cifara broja π. Ovo izračunavanje zahtevalo je svega 70 časova, u proseku dobijali su novu cifru na svaka dva minuta.[8]

Sa dolaskom elektronskog računara, nije više bilo stajanja za lovce na cifre broja π, i samo pet godina nakon što je ENIAC izračunao π, kompjuteri su napredovali do te tačke da je NORC(Naval Ordnance Research Calculator) mogao da izračuna 3 089 cifara broja π za samo 13 minuta što bi bilo oko četiri cifre po sekundi.

Nakon tri godine, 1958. pariski Centar za obradu informacija je izračunao prvih 707 cifara broja π za 40 sekundi na jednom IBM 704. Ne treba zaboraviti da je deset godina ranije Fergusonu trebalo čitavih godinu dana da obavi ovaj zadatak, a pre jednog veka Šenks je posvetio značajan deo svog života da bi postigao isto to mada sa greškama.

Naučnici u Parizu su otišli korak dalje i izračunali 10 000 cifara za jedan sat i 40 minuta koristeći Mejčinovu formulu i Gregori-Lajbnicov niz.

Zatim, samo tri godine kasnije, Džon Vrenč i Danijel Šenks koristili su IBM 7090 da dođu do 100 265 cifara broja π, prosečno po 3 cifre po sekundi ne uključujući dodatnih 42 minuta provedenih u konvertovanju rezultata iz binarnih brojeva u decimalne.[9] Šenks i Vrenč postali su poznati jer su probili granicu koju je predstavljala 100 000 decimala, čineći to na IBM 7090 u IBM

[8]David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

[9]David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

Centru za obradu podataka u Njujorku. Koristili su formulu do koje je došao Stormer 1896:

$$\pi = 24 \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 8 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Kako su svake godine računari postajali sve brži, matematičari bi računali π na njima da testiraju brzinu i tačnost mašine. U trci "moj kompjuter je veči od tvog" francuski, engleski i američki naučnici za kompjutere su se takmičili u obaranju rekorda u računanju broja π tokom 1960-ih i ranih 1970-ih godina. Ovo takmičenje dostiglo je vrhunac 1973. godine kada su Žan Gilu i M. Buje došli do milionite cifre broja π.

4.3 Serija "brzih" algoritama

Računari jesu postajali sve brži i brži, ali osnovne tehnike za izračunavanje π nisu evoluirale toliko brzo. Mada su se metode poboljšale tokom godina, gruba sila je još uvek bila najčešći izbor. Istorija se ponavlja, pa kako su se u sedamnaestom veku matematičari udaljili od izračunavanja baziranog na poligonima, nije trebalo dugo čekati da neko dobije inspiraciju koja će istraživanje broja π odgurnuti u smeru o kojem matematičari nisu ni sanjali.

4.3.1 Brent-Salamanov algoritam

Kvalitetan skok u algoritmizaciji desio se oko 1970. godine u radovima Rikard Brenta i Judžina Salamana.

Godine 1976. Judžin Salaman objavio je članak u *Matematici računanja* koji je demonstrirao kvadratno konvergirajući algoritam za računanje broja π. Nezavisno od njega, skoro u isto vreme, australijski matematičar Rikard Brent razvio je algoritam sličan Salamanovom, pa se zato taj algoritam često naziva Brent-Salamen algoritam. On izgleda ovako:

$$a_0 = 1 \quad , \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad s_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$$

$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$

$$s_n = s_{n-1} - 2^n c_n$$

$$p_n = \frac{2a_n^2}{s_n}$$

gde p_n kvadratno konvergira ka π.

Tačnije, ovaj algoriram duplira broj cifara posle svakog koraka računanja. U poređenju sa ranijim formulama koji su mogli da ponude jednu, dve ili nekolicinu dodatnih cifara po izračunavanju. Dvadeset pet izračunavanja je dovoljno da se izračuna π na preko 5 miliona cifara tačno.

Kasnije, Salamen je otkrio da je njegova jednačina bila zasnovana na metodi aritmetičko-geometrijske sredine, algoritmu koji je pre više od jednog veka otkrio Karl Fridrih Gaus. Međutim, Gaus je bio svestan da bi bilo potrebno previše intenzivnog računanja kada bi koristio ovakvu vrstu jednačine za izračunavanje π. Ali Salamen je imao nešto što Gaus nije, a to je računar koji je imao kontrolu nad milionima izračunavanja po sekundi. Ono što je u Gausovo vreme bilo suludo, 1970-ih je bilo relativno lako.

Kombinacija moćnih računara i Gaus-Brent-Salamen algoritma naglo je pojednostavilo izračunavanje broja π.

Godine 1982. Jošiaki Tamura iz Internacionalnog opservatorijuma u Mizusavi u Japanu i Jasumasa Kanada sa tokijskog univerziteta izračunali su π do 8 388 608 cifre koristeći Salaminov algoritam na Hitac M-280-H, izračunavanje je trajalo manje od sedam sati.[10]

Narednih godina, po dva bratska para Džonatan i Piter Borvajn i Dejvid i Gregori Čudnovski nastavili su Salamenovim koracima, razvijajući moćne π algoritme. Njihova metoda omogućila je matematičarima da izračunavaju još brže i još dalje.

4.3.2 Džonatan i Piter Borvajn

Džonatan i Piter Borvajn su kanadski matematičari koji se više od petnaest godina bave izračunavanjima broja π.

Počev od 1984. Piter i Džonatan otkrili su neke dodatne algorite i time postigli veliki napredak u razvoju "brzih" algoritama za izračunavanje broja π.

[10] David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

Prvi u nizu koji je baziran na aritmetičko geometrijskoj sredini je sledeći algoritam:

$$a_0 = \sqrt{2} \quad , \quad b_0 = 2 + \sqrt{2} \quad , \quad y_1 = \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2\sqrt{a_n}}$$

$$y_{n+1} = \frac{a_n y_n}{(1 + y_n)\sqrt{a_n}}$$

$$b_n = b_{n-1}\frac{1 + a_n}{1 + y_n}$$

gde b_n konvergira ka π.

Ovim kvadratnim algoritmom Kanada je 2002. godine postigla svojevrsni rekord u izračunavanju broja π sa 2000 milijardi cifara.

Drugi u nizu algoritama bratskog para Borvajn je takođe baziran na aritmetičko geometrijskoj sredini. Njegova struktura je sledeća:

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - (1 - y_k^2)^{1/2}}{1 + (1 - y_k^2)^{1/2}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1 + y_k + 1)^2 - 2^{k+1} y_{k+1}$$

gde $1/a_n$ kvadratno konvergira ka π.

Posle pete iteracije postiže se 40 tačnih decimala, dok se već sledećom iteracijom broj tačnih cifara broja π penje na 83.

Sledeći u nizu je kubni algoritam. On je definisan sledećom matematičkom strukturom:

$$a_0 = \frac{1}{3} \quad , \quad s_0 = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$r_{k+1} = \frac{3}{1 + 2(1 - s_k^3)^{1/3}}$$

$$s_{k+1} = \frac{r_{k+1} - 1}{2}$$

$$a_{k+1} = r_{k+1}^2 a_k - 3^k (r_{k+1}^2 - 1)$$

gde $1/a_k$ kubno konvergira ka π.

Svako ponavljanje ovog algoritma približno utrostručuje broj cifara broja π. Dokazano je da se već posle treće iteracije postiže 70 tačnih cifara broja π.

Kvadrirani algoritam Džonatana i Pitera Borvajna iz 1987. godine je najefikasniji od svih prethodnih. Njime su izračunate milijarde tačnih cifara broja π. Struktura mu je sledeća:

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2} \quad , \quad y_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - (1 - y_k^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_k^4)^{1/4}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1 + y_k + 1)^4 - 2^{2k+3} y_{k+1}(1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2)$$

gde $1/a_k$ konvergira ka π.

Dejvid Bejli je 1986. godine uz pomoć kvadriranog algoritma izračunao 29.4 miliona cifara broja π. Tahakaši je januara 2009. uz pomoć kvadriranog algoritma izračunao 1.649 triliona cifara broja π, a aprila te iste godine izračunao 2 576 triliona cifara.[11]

Kanada je septembra 1986. godine koristeći kvadrirani algoritam zajedno sa Salamanovim algoritmom izračunala 33 554 000 cifara na HITACHI S-810/20, za to je bilo potrebno oko osam sati. Zatim u januaru 1987., izračunala je 2^{27} decimalnih mesta broja π, za to je trebalo dan ipo na NEC SX2. Januara 1988. godine, izračunala je 201 326 000 na HITACI S-820 superkompjuteru.[12]

Kad smo već kod serije brzih algoritama nikako ne smemo zaboraviti algoritam Bejli, Borvajn i Plufa. Oni su devedesetih godina dvadesetog veka otkrili algoritme sa cifarskim izdvajanjem koji se primenjuje na izvesne transcedentne brojeve, između ostalih i na broj π. Ovi algoritmi se polularno zovu BBP, kao inicijali prezimena pomenutih matematičara. Posledica njigovog izvanrednog teorijskog prodora je da sad znamo deseto milijarditu cifru od π. Za generisanje ovog broja je korišćena heksidecimalna baza.[13]

[11] J. M. Borwein and P. B. Borwein, Ramanujan and Pi, Scientific American, February 1988, 112–117

[12] David Blatner, The Joy of Pi, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

[13] Duško Lekić, Nenad Cakić, Branko Davidović, Matematičke konstante, Narodna biblioteka Srbije, Beograd, 2010.

BBP algoritam je sledeći:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

4.3.3 Braća Čudnovski

U svakoj generaciji nekolicina ljudi dovodi potragu za brojem π do ekstrema, čineći to ili izračunavanjem više cifara od bilo koga do tad ili pronalaženjem novih jednačina i formula za π. David i Gregori Čudnovski su dvojica matematičara koji rade i jedno i drugo.

Brača Čudnovski rođena su u bivšem Sovjetskom savezu, blizu Kijeva, u godinama nakon Drugog svetskog rata. Njihovi roditelji, koji su bili naučnici i intelektualci, upoznali su ih sa matematikom na veoma ranom uzrastu. Iako su obojica uživala u matematičkim zadacima, ispostavilo se da je Gregori, pet godina mlađi od Davida, bio briljantan učenik na tom polju. Uz potpunu podršku svoje porodice, objavio je svoj prvi matematičiki rad sa samo šesnaest godina. Kasnije su braća studirala matematiku na fakultetu i primili doktorske diplome sa ukrajinske akademije nauka.

Slika 9: Braća Čudnovski

Ova braća su nekoliko puta osvajala svetske rekorde u izračunavanju najviše cifara broja π. Prvo 450 miliona, zatim jednu milijardu i na kraju dve milijarde. Obojica su teoretičari brojeva svetske klase i žele da razumeju ovaj fascinantni transcendentalni broj što bolje, da saznaju što je više moguće o njegovoj prirodi tako što se udubljuju u izračunavanje njegovih cifara.

David i Gregori Čudnovski su poprilično fascinantni likovi u priči o π jer su briljantni hakeri koji su, u svojim srednjim četrdesetim godinama, napravili superračunar u svom stanu od delova sasvim komercijalnih računara kako bi mogli da rade sa transcendentnim brojevima i istražuju beskonačne nizove. Kasnih 1980-ih, pre nego što su napravili svoj sopstveni superračunar, oni su računali π na najmanje dva superračunara (na Cray 2 u Minnesota Supercomputer Centre i na IBM 3090-VF u IBM Thomas J. Watson Research Centre u Njujorku).

Za razliku od većine naučnika, Gregori Čudnovski je morao da piše, pokreće i nadgleda njihov program za izračunavanje π ležeći u krevetu, jer mu je dijagnostikovana autoimuna bolest mišića.

Iznajmljivanje superračunara ne samo da je ekstremno skupo već je i izuzetno frustrirajuće ako nešto krene loše, jer nemate kontrolu nad samom mašinom. Ubrzo nakon prvog obaranja rekorda u izračunavanju cifara π 1989. godine, braća su počela da sastavljaju svoj superračunar kojem su nadenuli nadimak *m zero*.

M zero je bio multiprocesorski računar koji je mogao da postigne neverovatne brzine od mnogo milijardi operacija po sekundi.Ovaj kompjuter je zauzimao najveći deo stana, a njegove razne komponente vijugale su iz jedne sobe u drugu. Kompjuteri uvek proizvode toplotu, ali *m zero* koristio je toliko struje da je mogao da podigne sobnu temperaturu čak i uz upotrebu klime do iznad 32 stepena Celzijusa.

Braća Čudnovski morali su u sitne detalje da nauče kompjutersko programiranje i izradu i dizajniranje hardvera.

Takođe su razvili mnoge jednačine za opisivanje broja π. Njihova najpoznatija jednačina je sledeća:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3 (640320)^{3n+\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

koja donosi 14 cifara po izračunavanju.

Braća Čudnovski koristili su ove formulu prilikom nekoliko rekordnih izračuna π krajem 1980., uključujući prvi izračun preko milijardu cifara ikad (sa 1 011 196 691) 1989. godine. Godine 1994., izračunali su π na oko 4 000 000 000 decimalnih mesta.

Decembra 2009. Belard je uz pomoć formule (1) izračunao 2.7 triliona cifara broja π u binarnom sistemu. Za to mu je trebalo 131 dan. Avgusta 2010. Kondo i Je izračunali su uz pomoć formule (1) 5 triliona cifara broja π u binarnom sistemu.[14]

Do današnjeg dana mnogi ljudi misle da je izračunavanje brojeva neozbiljna i krajnje čudna aktivnost za tako velike umove kao što su braća Čudnovski.

Izračunavanja koja obaraju rekorde i čarobne formule razvijene pomoću izuzetnog poznavanja matematike, apsolutne posvećenosti ovom cilju i naravno računaru konstruisanom kod kuće su obezbedila braći Čudnovski trajno mesto u istoriji broja π.

Kao što smo videli, poznavanje što većeg broja cifara π nije ni od kakave opipljive koristi, jedino ako se ne računa testiranje novog kompjutera. Iako je tokom dvadesetog veka došlo do ogromnog napretka kako u kvalitativnom tako i u kvantitativnom razumevanju broja π, pravo bogatstvo ovog broja neće se otkriti za još mnogo godina.

[14] J. M. Borwein and P. B. Borwein, Ramanujan and Pi, Scientific American, February 1988, 112–117

Autori	Godina	Broj decimala	Metoda	Napomena
Egyptians	2000.p.n.e.	1	nepoznata	$\pi = (16/9)^2$
Babilon	2000.p.n.e.	1	-	$\pi = 3 + 1/8$
Biblija	550.p.n.e.	0	-	$\pi = 3$
Archimedes	250.p.n.e.	2	poligon	$\pi = 22/7$, 96 stranica
Ptolemy	150.	3	-	$\pi = 3 + 8/60 + 30/60^2$
Lui Hui	263.	5	poligon	3072 stranica
Zu Chongzhi	480.	7	poligon	$\pi = 355/113$
Aryabhata	499.	4	poligon	$\pi = 62832/20000$
Brahmagupta	640.	1	-	$\pi = \sqrt{10}$
Al-Khwarizmi	830.	4	-	$\pi = 62832/20000$
Fibonacci	1220.	3	poligon	$\pi = 3.141818$
Al-Kashi	1424.	14	poligon	$6 \cdot 2^{27}$ stranica
Viete	1579.	9	poligon	$6 \cdot 2^{16}$stranica
van Roomen	1593.	15	poligon	2^{30}stranica
van Ceulen	1596.	20	poligon	$60 \cdot 2^{33}$ stranica
Van Ceulen	1610.	35	poligon	2^{62} stranica
van Roijen Snell	1621.	34	poligon	2^{30} stranica
Grienberger	1630.	39	poligon	-
Newton	1671.	15	redovi(x)	-
Sharp	1699.	71	*arctanx*	-
Mashin	1706.	100	*arctanx*	-
De Lagny	1719.	112	*arctanx*	127 izračunavanja
Takebe Kenko	1722.	40	redovi	-
Matsunaga	1739.	49	redovi	-
Euler	1755	20	*arctanx*	za jedan sat
Vega	1789.	126	*arctanx*	143 izračunavanja
Vega	1794.	136	*arctanx*	140 izračunavanja
Rutherford	1841.	152	*arctanx*	208 izračunavanja
Dashe	1844.	200	*arctanx*	-
Clausen	1847.	248	*arctanx*	-
Lehmann	1853.	261	*arctanx*	-
Shanks	1853.	527	*arctanx*	607 izracunavanja
Rutherford	1853.	440	*arctanx*	-
Richter	1854.	500	nepoznata	-
Shanks	1873.	527	*arctanx*	707 izračunavanja
Tseng Chi-hung	1877.	100	*arctanx*	-
Uhler	1900.	282	*arctanx*	-
Duarte	1902.	200	arctanx	-
Uhler	1940.	333	-	-
Ferguson	1944/45.	530	*arctanx*	-
Ferguson	07.1946.	620	*arctanx*	poslednje ručno računanje

Tabela 1: Hronologija izračunavanja broja π pre ere kompjutera. [15]

[15] Duško Lekić, Nenad Cakić, Branko Davidović, Matematičke konstante, Narodna bib-

Autori	Godina	Broj decimala	Metoda	Napomena
Ferguson	01.1947.	710	$\arctan x$	-
Ferguson i Wrench Jr.	09.1947.	808	$\arctan x$	-
Smith i Wrench Jr.	06.1494.	1.120	$\arctan x$	-
Reitwiesner et al	09.1949.	2.037	$\arctan x$	ENIAC
Nicholson i Jeenel	11.1954.	3.092	$\arctan x$	NORC
Felton	03.1957.	7.480	$\arctan x$	Pegasus
Genuys	01.1958.	10.000	$\arctan x$	IBM704
Felton	05.1958.	10.020	$\arctan x$	Pegasus
Guilloud	07.1959.	16.167	$\arctan x$	IBM 704
Shanks i Wrench Jr.	07.1961.	100.265	$\arctan x$	IBM 7090
Guilloud i Filliatre	02.1966.	250.000	$\arctan x$	IBM 7030
Guilloud i Dichamp	02.1967.	500.000	$\arctan x$	CDC 6600
Guilloud i Bouyer	05.1973.	1.001.250	$\arctan x$	CDC 7600
Kanada i Miyoshi	1981.	2.000.036	$\arctan x$	FACOM M-200
Guilloud	1982.	2.000.050	nepoznata	nepoznato
Tamura	1982.	2.097.144	GL2	MELCOM 900II
Tamura i Kanada	1982.	4.194.288	GL2	Hitachi M-280H
Tamura i Kanada	1982.	8.388.576	GL2	Hitachi M-280H
Kanada et al.	1983.	16.777.206	GL2	Hitachi M-280H
Kanada et al.	10.1983.	10.013.395	$\arctan x$, GL2	Hitachi S-810/20
Gosper	10.1985.	17.526.200	serija(x), B4	Symbolics 3670
Bailey	01.1986.	29.360.111	B2, B4	CRAY-2
Kanada i Tamura	09.1986.	33.554.414	GL2, B4	Hitachi S-810/20
Kanada i Tamura	10.1986.	67.108.839	GL2	Hitachi S-810/20
Kanada et al.	01.1987.	134.214.700	GL2, B4	NEC SX-2
Kanada i Tamura	01.1988.	201.326.551	GL2, B4	Hitachi S-810/20
Chudovskys	05.1989.	480.000.000	serija	CRAY-2
Chudovskys	06.1989.	525.229.270	serija	IMBM3090
Kanada i Tamura	07.1989.	536.870.898	GL2	Hitachi S-810/20
Chudovskys	08.1989.	1.011.196.691	serija(CH)	IBM 3090 i CRAY-2
Kanada i Tamura	11.1989.	1.073.741.799	GL2, B4	Hitachi S-810/20
Chudovskys	08.1991.	2.260.000.000	serija(CH)	m-zero
Chudovskys	05.1994.	4.044.000.000	serija(CH)	m-zero
Kanada i Takahashi	06.1995.	3.221.220.000	GL2, B4	HItachi S-3800/480
Kanada i Takahashi	08.1995.	4.294.967.286	GL2, B4	HItachi S-3800/480
Kanada i Takahashi	10.1995.	6.442.450.000	GL2, B4	HItachi S-3800/480
Chudovskys	03.1996.	8.000.000.000	serija(CH)	m-zero
Kanada i Takahashi	04.1997.	17.179.869.142	GL2, B4	HItachi SR2201
Kanada i Takahashi	06.1997.	51.539.600.000	GL2, B4	HItachi SR2201
Kanada i Takahashi	04.1999.	68.719.470.000	GL2, B4	HItachi SR8000
Kanada i Takahashi	09.1999.	206.158.430.000	GL2, B4	HItachi SR8000
Kanada	12.2002.	1.241.100.000.000	$\arctan x$	Hitachi SR8000/MP

Tabela 2: Hronologija izračunavanja broja π u eri kompjuterskog računanja. GL2, B4 odnose se na posebne reference ovih autora.

Literatura

[1] DAVID BLATNER, *The Joy of Pi*, Walker Publishing Company, Inc. New York, 1997.

[2] T. L. HEATH, *The works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 1959.

[3] DUŠKO LEKIĆ, NENAD CAKIĆ, BRANKO DAVIDOVIĆ, *Matematičke konstante*, Narodna biblioteka Srbije, Beograd, 2010.

[4] T. L. HEATH, *A History of Greek Mathematics, vol. I-II*, Dover Publication, New York, 1981.

[5] ZORAN LUČIĆ, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, JP Službeni glasnik, 2009.

[6] MILOŠ RADOJČIĆ, *Opšta matematika-Matematika Egipta, Mesopotamije i Stare Grčke*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

[7] A. P. JUŠKEVIČA, *O istoriji matematike*, Prosvešcenije, Moskva, 1976.

[8] O'CONNOR, J. J., AND E. F. ROBERTSON, *The MacTutor History of Mathematics Archive* , World Wide Web. 1996.

[9] DAVID H. BAILEY, JONATHAN M. BORWEIN, PETER B. BORWEIN AND SIMON PLOUFFE, *The Quest for Pi*, Mathematical Intelligencer, vol. 19, no. 1 (Jan. 1997), pg. 50–57, 1996. http://www.davidhbailey.com/dhbpapers/pi-quest.pdf

[10] BORIS GOURÉVITCH, *The world of* π

http://www.pi314.net

[11] PIERRE EYMARD, JEAN PIERRE LAFON, *The Number* π*, translete by Stephen S. Vilson*, HERMANN, Editeurs des Sciences et des Art, Paris, 1999.

[12] J. M. BORWEIN AND P. B. BORWEIN, *Ramanujan and Pi*, Scientific American, February 1988, 112–117.

https://www.carma.newcastle.edu.au/jon/RAMA125f.pdf

lioteka Srbije, Beograd, 2010.

[13] *https://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_ of_ Pi*

[14] *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Pi_ throught_ the_ ages.html*

[15] *https://bs.wikipedia.org/wiki/Pi*

[16] *http://www.boo.net/jasonp/pi-ref.txt*