Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Elektronske lekcije o izabranim temama iz trigonometrije u srednjoj školi, kreirane korišćenjem programskog paketa GeoGebra

-master rad-

Mentor:
prof. dr Miroslav Marić

Student:
Katarina Perić
1110/2014

Beograd,
2016.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 O trigonometriji **3**
2.1 Istorija trigonometrije 3

3 Ugao **6**

4 Trinonometrija pravouglog trougla **9**
4.1 Definicija 9
4.2 Vrednosti 12
4.3 Trigonometrijski identiteti 14
4.3.1 Osnovni trigonometrijski identiteti 15
4.3.2 Trigonometrijske funkcije komplementnog ugla 16
4.4 Rešavanje pravouglog trougla 17

5 Trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla **19**
5.1 Trigonometrijski krug 19
5.2 Sinus i kosinus 21
5.3 Tangens i kotangens 27
5.4 Grafici osnovnih trigonometrijskih funkcija 31
5.5 Trigonometrijski identiteti 37
5.5.1 Osnovni trigonometrijski identiteti 37
5.5.2 Adicione formule 39
5.5.3 Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla 42
5.5.4 Trigonometrijske funkcije polovine ugla 43
5.5.5 Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod 44
5.6 Trigonometrijske jednačine 46
5.7 Trigonometrijske nejednačine 54
5.8 Sinusna i kosinusna teorema 58
5.8.1 Sinusna teorema 58
5.8.2 Kosinusna teorema 62

6 Primena trigonometrije **66**
6.1 Primena u matematici 66
6.2 Primena u fizici 69

7 Zaključak **71**

1 Uvod

Trigonometrija je oblast matematike koja se prožima kroz celokupno srednjoškolsko obrazovanje. Učenici se sa trigonometrijom prvi put sreću u srednjoj školi i često se javljaju poteškoće u savladavanju njenih osnova. Jedan od načina da se ovo gradivo učini razumljivim, zanimljivim i jasnijim može da bude korišćenje interaktivnih materijala u nastavi.

Interaktivni materijali bi trebalo da poboljšaju kvalitet nastave, nastavu učine raznovrsnijom, bogatijom, kao i da podstaknu osamostaljivanje učenika. Primena ovakvih materijala u nastavi daje pozitivne rezultate, ali u našim školama se još uvek ne primenjuje u dovoljnoj meri. O prednostima elektronskih interaktivnih materijala govori se u [7].

Rad je podeljen na šest poglavlja. U prvom poglavlju, *O trigonometriji*, predstavljena je trigonometrija kao matematička disciplina, kao i njen razvoj, još od vremena pre naše ere. Drugo poglavlje, *Ugao*, govori o uglovima čije je poznavanje neophodno za razumevanje trigonometrije. U trećem poglavlju, *Trigonometrija pravouglog trougla*, definisane su trigonometrijske funkcije oštrog ugla, dok se u četvrtom poglavlju, *Trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla*, definicija proširuje na trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla. U poglavlju *Primena trigonometrije*, na primerima je pokazana primena u matematici i fizici. Tekst prate slike i GeoGebra apleti. Rad sadrži i primere i urađene zadatke iz obrađenih oblasti. Više o trigonometriji može se naći u [3].

Svrha rada je da se pokaže kako se programski paket GeoGebra može koristiti u nastavi. Materija koja je izložena propraćena je GeoGebra apletima. Elektronski materijal kreiran za potrebe master rada se nalazi na adresi
http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml10009/MasterRad/index1.html, javno je dostupan i mogu da ga koriste učenici i nastavnici kao nastavno sredstvo. Cilj je da se uz pomoć ovakvih materijala poveća interesovanje kod učenika i da im se pomogne da prevaziđu odbojnost prema matematici kao „teškom predmetu”, što je preduslov za uspeh.

2 O trigonometriji

Trigonometrija je matematička disciplina koja se bavi trigonometrijskim funkcijama i njihovim primenama.

Reč trigonometrija je sastavljena od grčkih reči *trigonon* (*trougao*) i *metron* (*mera*). Prvi koreni trigonometrije nađeni su u zapisima iz starog veka, iz Egipta i Mesopotamije. Tada je njen cilj bio izračunavanje vrednosti elemenata trougla, na šta i sam naziv ukazuje. Danas trigonometrija ima mnogo šire značenje i primenu, što je čini jednom od značajnih oblasti matematike i geometrije. Savremena trigonometrija se bavi trigonometrijskim funkcijama uglova i brojeva. Trigonometrijske funkcije su osnova za opisivanje mnogih procesa i pojava u savremenoj tehničkoj praksi.

Danas se trigonometrija najčešće vezuje za trouglove u ravni, ali počeci trigonometriji leže u svetu astronomije i sfernih trouglova (više o sfernoj trigonometriji se može pročitati u [3]). Nekada je astronomija bila zasnovana na pojmu Zemlje koja stoji u centru skupa ugnježdenih sfera. Da bi se izračunale pozicije sfera ili planeta, korišćen je koncept koji danas nazivamo trigonometrijom.

Značajnu ulogu u trigonometriji ima broj π, koji je u matematici poznat više od četiri hiljade godina (π je iracionalan broj i nije rešenje nijedne algebarske jednačine, pa je i transcedentan broj).

2.1 Istorija trigonometrije

Vavilon i Egipat u kojima su hiljadama godina pre naše ere bile proučavane astronomija i astrologija u trgovačke ili religiozne svrhe, bili su osnov za prva trigonometrijska znanja. Neki podaci ukazuju na to da su i u drevnoj Indiji i Kini ta znanja takođe bila korišćena. U Egiptu, poplave zemljišta u slivu reke Nil, nametale su, prema Herodotu, potrebu dobro razvijenog geometarskog merenja i geometrije. Koliko se već tada držalo do geometrijskih znanja pokazuju ne samo problemi iz „Ahmesove računice”[1], nego i činjenica da je bilo uvedeno naročito činovničko zvanje državnih geometara, premerača zemljišta. Tada se prav ugao konstruisao zatezanjem užeta u obliku trougla sa stranama 3, 4, 5. Pominje se da su Egipćani za određivanje nagiba pri građenju piramida ili pri određivanju daljine broda na pučini, koristili veličinu zvanu *seqt*, koja je verovatno bila kosinus.

U Antičkoj Grčkoj sistematizuju se prikupljena znanja i otkrivaju nove činjenice i metode. Tales[2] iz Mileta je izmerio visinu piramide po senci. On je to postigao mereći senku piramida onda kada je „naša senka jednaka nama samima”. Znao je da koristi sličnost trouglova i mogao je da odredi udaljenost broda od pristaništa Mileta.

Važan napredak napravljen je u vreme Hipokrata[3] koji je proučavao odnose između centralnih uglova kružnice i tetiva [6].

[1] jedno od najstarijih sačuvanih matematičkih dela, pisano hijeroglifima na papirusu u Egiptu oko 1700g.pre n.e.

[2] 624-548 g. pre n.e., matematičar i filozof, ubrajan među Sedam mudraca

[3] starogrčki matematičar, geometar i astronom

Aristarh[4] sa Samosa napisao je delo „O razmerama rastojanja Zemlje, Sunca i Meseca” u kojem je pokušao da odredi rastojanja i razmere posmatrajući uglove između pravca ka Suncu i ka Mesecu onda kad je osvetljena tačno polovina meseca koristeći činjenicu da onda Zemlja, Sunce i Mesec čine pravougli trougao.

Hiparh[5] iz Nikeje napisao je delo „O tetivama kružnih lukova” u 12 knjiga (nisu sačuvane), u kome je po prvi put navedena tablica tetiva sa uputstvima za primenu za rešavanje trougla i date osnove sferne trigonometrije.

Slika 1: Hiparh

Klaudije Ptolomej[6], koji je živeo u Aleksandriji, napisao je astronomski zbornik poznat pod arabljanskim nazivom „Almagest” (13 knjiga) u koji su ušli Hiparhovi rezultati i u kome je Ptolomej dao svoj metod sračunavanja tetiva.

Slika 2: Klaudije Ptolomej

Indijski astronomi i matematičari prvi su primetili da je umesto odnosa tetive i poluprečnika, koji su koristili grčki matematičari, podesnije koristiti odnos polutetive i poluprečnika. Time je prvi put upotrebljen odnos kojim se

[4] 270 g. pre n.e., grčki astronom i matematičar
[5] 160-125 g. pre n.e., grčki astronom, sačinio prvi katalog zvezda
[6] 83-161 g. pre n.e, starogrčki matematičar, astronom, geograf i astrolog

ustanovljuje funkcija *sin*. Evropljani su, prevodeći ga na latinski, nazvali sinus, što znači ulegnuće, udubljenje, nabor ili šupljina.

Muhamed ibn Musa Alhvarizmi[7] dao je ponovo prerađene tablice Ptolomeja, ističući prednost upotrebe sinusa.

U srednjem veku dolazi do zastoja u razvoju svih nauka. Dug period vremena pokriven je mrakom inkvizicije. Trigonometrija ne doživljava bolju sudbinu nego druge svetovne discipline koje crkva progoni ako joj ne služe. Posle dužeg vremena, vredno pomena je tek delo Johana Milera[8]. On, oko 1464. piše delo „De triangulis omnimodis", koje sadrži rešenja nekih važnih problema ravne i sferne trigonometrije. Ovo delo bilo je objavljeno tek posle njegove smrti 1533. godine i bilo je od velikog značaja za dalji razvitak trigonometrije.

U novom veku, posle otkrivanja Amerike, nagli razvitak trgovine i industrije dao je pun podstrek novom razmahu nauke. Među matematičarima, čija su dela značajna za dalji razvoj trigonometrije, treba pomenuti Njutna[9], koji je prvi u delu „De analisy per equationes numero terminorum infinitas" izložio radove za sinus i kosinus.

Vijeta[10] je prvi upotrebljavao svih šest trigonometrijskih funkcija, Ojler [11] je uveo današnje oznake trigonometrijskih funkcija, uspostavio vezu između trigonometrijskih i eksponencijalnih funkcija uz upotrebu kompleksnih brojeva i dao izraze za sve trigonometrijske funkcije u obliku redova.

Leonald Ojler je koristio analitički pristup za trigonometrijske funkcije, ne vezujući ih nužno za trigonometrijsku kružnicu. Njihov argument shvata uopšteno kao realan broj, a ne isključivo kao ugao ili luk.

Zasluge za razvoj sferne trigonometrije ima naš matematičar Ruđer Bošković (1711-1787), takođe i astronom, fizičar i filozof.

Što se same reči „trigonometrija" tiče, ona se po prvi put pojavila kao naslov knjige „Trigonometria" (doslovce, merenje trouglova) objavljene od strane Bartolomea Pitiskusa (Bartholomeo Pitiscus) 1595. godine [5].

[7] oko 800 g.n.e., persijski matematičar, astronom i geograf

[8] 1801-1858 g.n.e., nemački astronom

[9] 1642-1727, engleski fizičar, matematičar, astronom i filozof

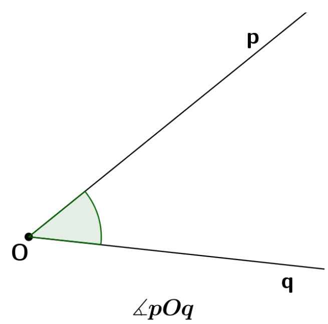
[10] 1540-1603, francuski matematičar

[11] 1707-1783, švajcarski matematičar i fizičar

3 Ugao

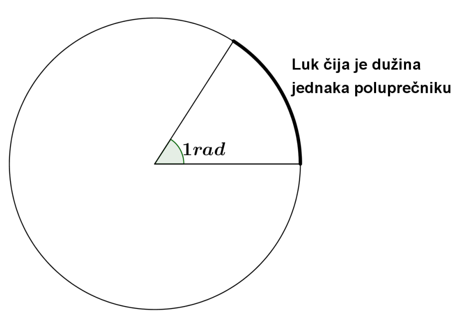
Za razumevanje trigonometrije bitno je znanje o uglovima. Koliko su uglovi značajni govori i to što se obrađuju još u petom razredu osnovne škole, kada se uči šta je ugao, vrste uglova i stepen kao jedinica mere. U ovom poglavlju biće izložene osnovne stvari o uglovima neophodne za razumevanje trigonometrije.

Dve poluprave Op i Oq sa zajedničkom početnom tačkom O čine ugaonu liniju koja se označava $\measuredangle pOq$. Ugaona linija deli ravan u kojoj se nalazi na dve oblasti. Zajedno sa jednom od tih oblasti, ugaona linija čini ugao. Poluprave su kraci ugla, a zajednička tačka teme ugla. Ugao čiji su kraci poluprave p i q, a teme tačka O označava se sa $\measuredangle pOq$ (slika 3).



Slika 3: Ugao

Kao jedinica za merenje ugla najčešće se koristi stepen ($1° = \frac{1}{360}$ pun ugao). U srednjoj školi, znanje o uglovima se proširuje. Uči se da se uglovi, pored stepena, mogu meriti i radijanima. Radijan je centralni ugao nad lukom trigonometrijskog kruga čija je dužina jednaka poluprečniku kruga. Označava se sa rad, ali se oznaka često ne navodi, već se podrazumeva. Radijan je ugao radijanske mere 1, ali umesto da se kaže da je t radijanska mera nekog ugla, često se govori da taj ugao ima t radijana [1].



Slika 4: Ugao radijanske mere 1

Luk poluprečnika 1 koji odgovara uglu od $180°$ ima dužinu $1 \cdot \pi = \pi$. Znači:

$$180° = \pi rad,$$

$$1rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57,29578° \approx 57°17'44,8",$$

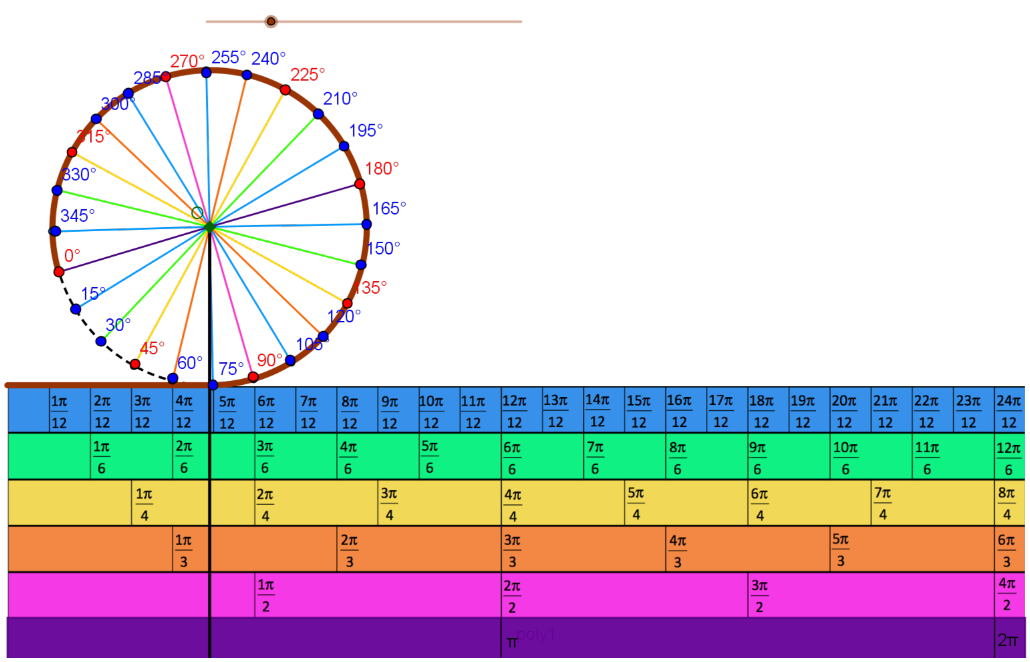
$$1° = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,01745 rad.$$

Generalno važi:

$$\alpha° = \frac{\pi}{180°}\alpha rad,$$

$$srad = (\frac{180s}{\pi})°.$$

Za lakše razumevanje veze između stepena i radijana, u elektronskoj lekciji je predstavljen GeoGebra aplet koji prikazuje „kotrljanje" kružnice (slika 5), preuzet sa [4].

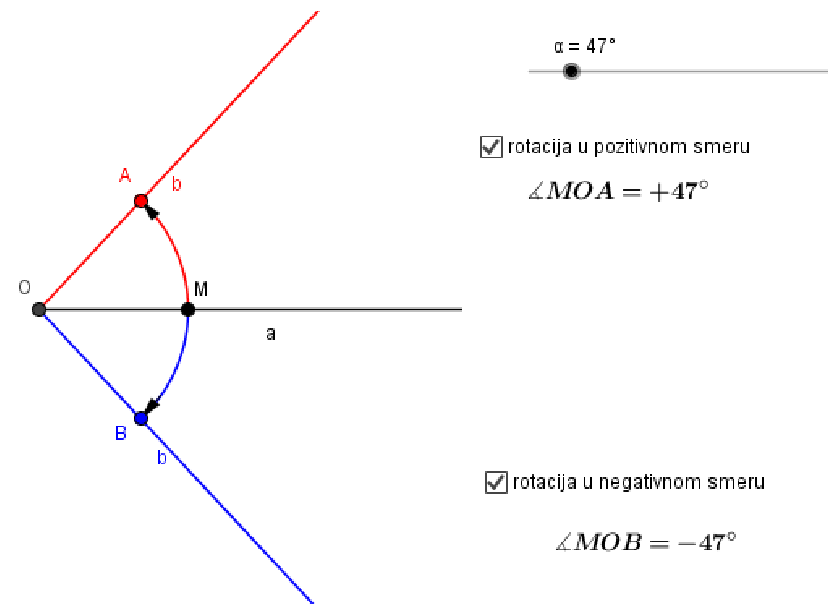


Slika 5: Kotrljanje brojevne kružnice

Definicija po kojoj ugao čine dve poluprave sa zajedničkim početkom nije pogodna za operacije sabiranja i oduzimanja uglova. Pod operacijama sabiranja i oduzimanja uglova podrazumeva se sabiranje i oduzimanje njihovih mernih brojeva. Kao rezultat ovih operacija mogu se javiti uglovi veći od $360°$ kao i uglovi manji od $0°$, pa definiciju treba proširiti i pojam ugla uopštiti.

Ako se posmatra poluprava koja se obrće oko svoje početne tačke O, mogu se razlikovati dva smera: pozitivan - smer obrnut smeru kretanja kazaljke časovnika i negativan - smer kretanja kazaljke časovnika. Neka je sa a obeležen početni, a sa b završni položaj poluprave nakon obrtanja oko tačke O u jednom ili drugom smeru. Ugao aOb zovemo *orijentisani ugao*. Ako se poluprava obrtala u pozitivnom smeru, orijentisani ugao je pozitivan. U suprotnom je negativan. Mera orijentisanog ugla izražava se odgovarajućim jedinicama sa pridruženim znakom + ili -, u zavisnosti od toga da li je ugao pozitivan ili negativan.
Pri obeležavanju krakova orijentisanog ugla važan je poredak zapisivanja, $\measuredangle aOb = -\measuredangle bOa$.

Elektronska lekcija *ugao* sadrži aplet predstavljen na slici 6 koji prikazuje rotaciju poluprave u pozitivnom i negativnom smeru i omogućava razumevanje pojma orijentisanog ugla.



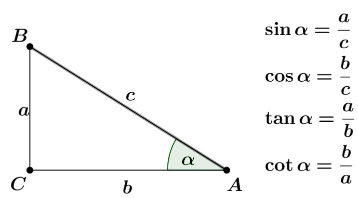
Slika 6: Aplet na kome je prikazana rotacija poluprave u pozitivnom i negativnom smeru

4 Trinonometrija pravouglog trougla

Sadržaj prikazan u poglavlju *Trigonometrija pravouglog trougla* obrađuje se u prvom razredu srednje škole, kada se definišu samo trigonometrijske funkcije oštrih uglova. Trigonometrijske funkcije određuju vezu između dužine stranica i veličine unutrašnjih uglova. Biće pokazano kako se definišu, kako se izračunavaju vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova, navedene osobine trigonometrijskih funkcija i dokazani trigonometrijski identiteti.

4.1 Definicija

Neka je ABC pravougli trougao gde je C teme pravog ugla i neka su a i b, redom, dužine kateta CB i CA, c dužina hipotenuze AB i α unutrašnji ugao kod temena A (slika 7).



Slika 7: Definicija trigometrijskih funkcija oštrog ugla

Definicija 1.
Broj $\frac{a}{c}$ *zove se sinus ugla* α *i obeležava se sa* $\sin\alpha$*.*
Broj $\frac{b}{c}$ *zove se kosinus ugla* α *i obeležava se sa* $\cos\alpha$*.*
Broj $\frac{a}{b}$ *zove se tangens ugla* α *i obeležava se sa* $\tan\alpha$*.*
Broj $\frac{b}{a}$ *zove se kotangens ugla* α *i obeležava se sa* $\cot\alpha$*.*

Kako su svi trouglovi sa oštrim uglom α međusobno slični, pomenuti količnici su jednaki kod svih ovakvih trouglova, pa zato zavise samo od ugla α. Ako se α menja onda se i sinα, cosα, tanα i cotα menjaju, ako je α određen ugao onda je svaki od ovih brojeva potpuno određen jedinstven broj. Prema tome, definisane su četiri nove funkcije: $\alpha \to \sin\alpha$, $\alpha \to \cos\alpha$, $\alpha \to \tan\alpha$ i $\alpha \to \cot\alpha$, čiji su domeni jednaki skupu brojeva koji su veličine svih oštrih uglova. Ove funkcije zovu se trigonometrijske funkcije oštrog ugla.

Svojstva uvedenih funkcija:

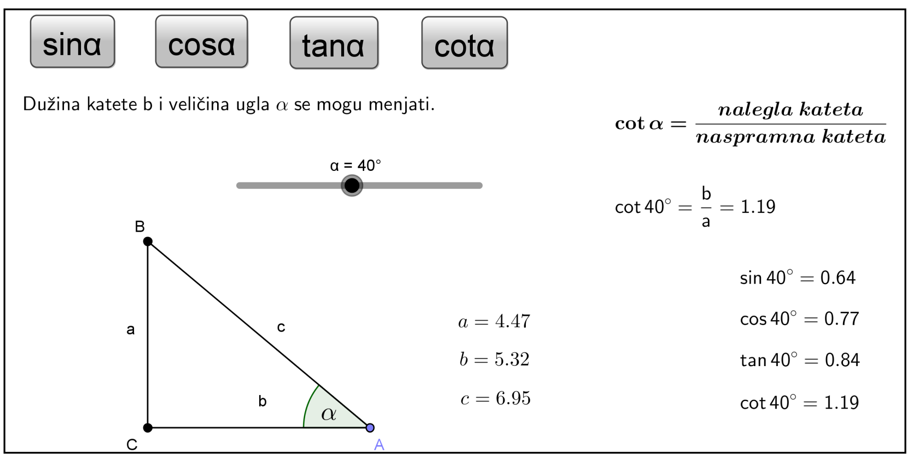
- Za bilo koji oštar ugao tačne su nejednakosti:
  - $0 < \sin\alpha < 1$,
  - $0 < \cos\alpha < 1$,
  - $0 < \tan\alpha$,

- $0 < \cot\alpha$.

- Funkcije sin i cos uzimaju sve vrednosti iz intervala $(0, 1)$.

- - $\alpha < \alpha_1 \Longrightarrow \sin\alpha < \sin\alpha_1$,
  - $\alpha < \alpha_1 \Longrightarrow \cos\alpha > \cos\alpha_1$,
  - $\alpha < \alpha_1 \Longrightarrow \tan\alpha < \tan\alpha_1$,
  - $\alpha < \alpha_1 \Longrightarrow \cot\alpha > \cot\alpha_1$.

Za elektronsku lekciju u kojoj se definišu trigonometrijske funkcije oštrog ugla kreiran je GeoGebra aplet prikazan na slici 8 koji sadrži klizač koji omogućava menjanje veličine ugla, kao i dugmiće kojima se određuje funkcija čiju definiciju želimo. Aplet omogućava da se lako vidi kako promena veličine ugla utiče na promenu vrednosti trigonometrijskih funkcija, kao i da vrednost funkcije zavisi samo od veličine ugla.



Slika 8: Aplet koji prikazuje trigonometrijske funkcije oštrog ugla

Primer 1. *Katete pravouglog trougla su* $a = 6$ *i* $b = 8$. *Izračunati* $\sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta, \tan\alpha, \tan\beta, \cot\alpha$ *i* $\cot\beta$.

Rešenje. Primenom Pitagorine teoreme dobija se hipotenuza c:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = 6^2 + 8^2,$$

$$c^2 = 36 + 64,$$

$$c^2 = 100,$$

$$c = 10.$$

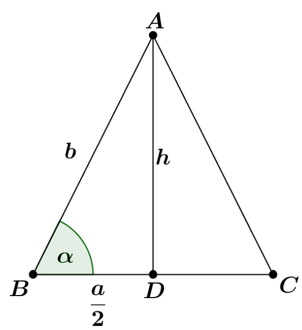
Sada je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$
$$\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$
$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

△

Primer 2. *Ako je $a = 10cm$ osnovica i $b = 13cm$ krak jednakokrakog trougla ABC, odrediti vrednosti trigonometrijskih funkcija unutrašnjeg ugla na osnovici tog trougla.*

Rešenje. Primenom Pitagorine teoreme dobija se dužina visine h (slika 9):



Slika 9: Određivanje vrednosti trigonometrijskih funkcija ugla na osnovici jednakokrakog trougla

$$BD = \frac{a}{2} = 5cm,$$

$$h^2 = b^2 - (\frac{a}{2})^2,$$

$$h = 12cm.$$

Sada je:

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} = \frac{12}{13},$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{5}{13},$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{12}{5},$$

$$\cot\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{5}{12}.$$

$\triangle$

4.2 Vrednosti

Kako se izračunavaju vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova pokazuje sledeći primer.

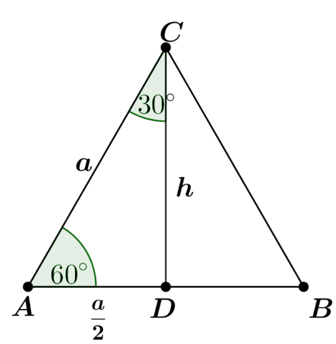
Primer 3. *Izračunati:*

a) $\sin 30°,\ \cos 30°,\ \tan 30°\ \ i\ \cot 30°$*;*

b) $\sin 60°,\ \cos 60°,\ \tan 60°\ \ i\ \cot 60°$*;*

c) $\sin 45°,\ \cos 45°,\ \tan 45°\ \ i\ \cot 45°$*.*

Rešenje. Neka je ABC jednakostranični trougao čija je stranica dužine a (slika 10).



Slika 10: Izračunavanje vrednosti trigonometrijskih funkcija uglova od 30° i 60°

a) Iz pravouglog trougla ADC, na osnovu definicija trigonometrijskih funkcija sledi:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot 30^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

b) Iz pravouglog trougla ADC može se zaključiti i:

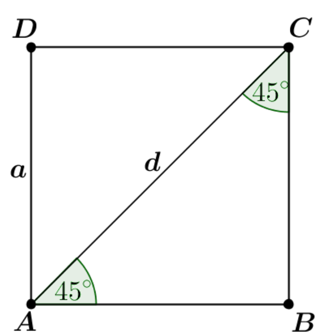
$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) Za izračunavanje vrednosti trigonometrijskih funkcija ugla od 45°, posmatra se kvadrat $ABCD$ na slici 11, čija je stranica dužine a a dijagonala dužine d.



Slika 11: Izračunavanje vrednosti trigonometrijskih funkcija ugla od 45°

Iz pravouglog trougla ABC sledi:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1,$$
$$\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

$\triangle$

Definiše se:

$$\sin 0^\circ = 0,$$
$$\cos 0^\circ = 1,$$
$$\tan 0^\circ = 0,$$
$$\sin 90^\circ = 1,$$
$$\cos 90^\circ = 0,$$
$$\cot 90^\circ = 0.$$

Zadatak 1. *Odrediti vrednost izraza:*

a) $\frac{1+2\sin 45^\circ}{2\sin 45^\circ - 1}$;

b) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}}{2\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}}$.

Rešenje.

a) $\frac{1+2\sin 45^\circ}{2\sin 45^\circ - 1} = \frac{1+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 3+2\sqrt{2}$;

b) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}}{2\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot 1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\triangle$

4.3 Trigonometrijski identiteti

Trigonometrijski identiteti su izrazi jednakosti koji povezuju trigonometrijske funkcije. Omogućavaju da se pojednostave složeni izrazi. U ovoj sekciji biće dokazani osnovni trigonometrijski identiteti i biće pokazano kako se mogu odrediti vrednosti trigonometrijskih funkcija komplementnog ugla.

4.3.1 Osnovni trigonometrijski identiteti

Trigonometrijske funkcije oštrog ugla su međusobno zavisne. Ako je poznata vrednost jedne trigonometrijske funkcije za određenu vrednost ugla, na osnovu nje mogu se odrediti vrednosti ostalih trigonometrijskih funkcija.

Teorema 1. *Ako je* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*, onda je:*

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$*;*

b) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$*;*

c) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

Dokaz. Neka je ABC pravougli trougao (slika 12).

a) Prema Pitagorinoj teoremi važi:

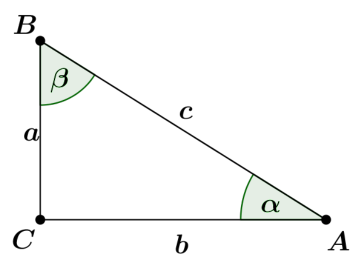
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

a deljenjem ovog izraza sa c^2 dobija se:

$$(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = 1.$$

Kako je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, a $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ dokazano je da je:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$



Slika 12: Pravougli trougao

b) Na osnovu definicije je:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

c) Lako se vidi i da je:

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

□

4.3.2 Trigonometrijske funkcije komplementnog ugla

Ako su poznate vrednosti trigonometrijskih funkcija nekih oštrih uglova, mogu se odrediti i vrednosti trigonometrijskih funkcija njima komplementnih uglova, što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2. *Za svako* α, $0 < \alpha < 90^\circ$ *važi:*

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha,$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$$

Dokaz. Neka su α i β oštri uglovi pravouglog trougla (slika 12). Oni su komplementni, pa važi $\beta = 90^\circ - \alpha$. Suprotna kateta ugla α je nalegla uglu β, pa važi $\sin\alpha = \cos\beta$ i $\sin\beta = \cos\alpha$, tj. $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ i $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$. Lako se vidi i da je $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta = \cot(90^\circ - \alpha)$, kao i da je $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta = \tan(90^\circ - \alpha)$.

Na drugi način zapisano:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha,$$

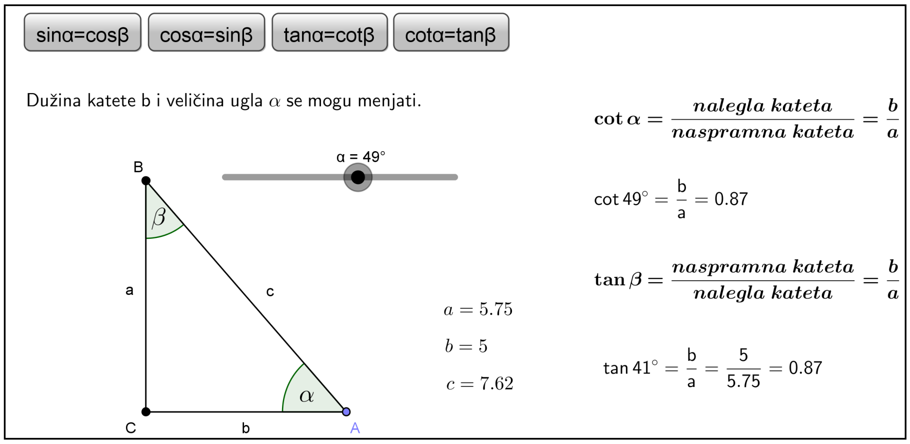
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha,$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha.$$

$\square$

U elektronskoj lekciji trigonometrijske funkcije komplementnog ugla prikazane su i uz pomoć apleta koji se može videti na slici 13. Klizač omogućava da se menja veličina ugla α, a pomeranjem tačke A može se promeniti dužina stranice b. Klikom na odgovarajuće dugme bira se identitet i ispisuju se vrednosti trigonometrijskih funkcija za izabrane vrednosti ugla α i njemu komplementnog ugla β.

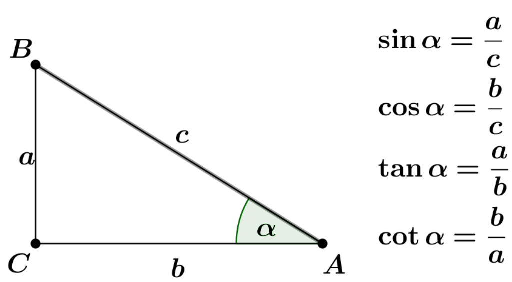


Slika 13: Aplet koji prikazuje trigonometrijske funkcije komplementnog ugla

4.4 Rešavanje pravouglog trougla

Osnovni elementi trougla su dužine njegovih stranica, a, b i c i veličine unutrašnjih uglova α, β i γ. „Rešiti trougao" znači izračunati nepoznate elemente pomoću poznatih. Da bi se rešio pravougli trougao, potrebno je znati dva njegova elementa (osim pravog ugla) i koristiti trigonometrijske funkcije oštrog ugla.

Ako se posmatra pravougli trougao sa hipotenuzom c na slici 14, onda je $\gamma = 90°$. Tada je, na osnovu definicija trigonometrijskih funkcija oštrih uglova:



Slika 14: Rešavanje pravouglog trougla

$$a = c \sin \alpha,$$

$$a = b \tan \alpha,$$

$$b = c \cos \alpha,$$

$$b = a \cot \alpha,$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha},$$
$$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Na osnovu prethodnog vidi se da je za rešavanje pravouglog trougla potrebno znati vrednosti trigonometrijskih funkcija za sve oštre uglove. U praksi se za njihovo određivanje najčešće koriste kalkulatori i različiti matematički programski alati.

Primer 4. *Rešiti pravougli trougao sa hipotenuzom c ako je $a = 10cm$, $\alpha = 42°$.*

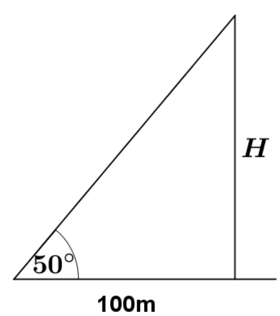
Rešenje. Treba izračunati b, c i β. Poznato je da je $b = a\cot\alpha$, tj. $10\cdot\cot 42° \approx 10\cdot 1,111 \approx 11,11cm$. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, pa je $c = \frac{a}{\sin\alpha}$, tj. $c = \frac{10}{\sin 42°} \approx \frac{10}{0{,}669} \approx 14,9cm$. Lako se izračunava ugao β, $\beta = 90° - \alpha = 48°$. $\triangle$

Primer 5. *Sa rastojanja od 100m toranj se vidi pod uglom od $50°$. Koliko je toranj visok?*

Rešenje. Ako je H visina tornja (slika 15), onda je:

$$\frac{H}{100} = \tan 50° \approx 1,192.$$

Otuda je $H \approx 119,2$m. $\triangle$



Slika 15: Slika uz primer 5

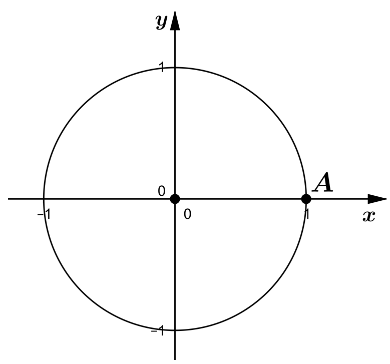
5 Trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla

U drugom razredu srednje škole proširuje se stečeno znanje iz trigonometrije. Definišu se trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla, crtaju njihovi grafici, rešavaju trigonometrijske jednačine i nejednačine, gradivo koje će biti izloženo u ovom poglavlju.

5.1 Trigonometrijski krug

Trigonometrijske funkcije oštrog ugla definisane su preko odnosa stranica pravouglog trougla. Za definisanje trigonometrijskih funkcija proizvoljanog ugla, koristi se trigonometrijski krug.

Trigonometrijski krug je krug poluprečnika 1 čiji je centar u koordinatnom početku. Prikazan je na slici 16. Jednačina trigonometrijskog kruga u analitičkoj geometriji je $x^2 + y^2 = 1$.

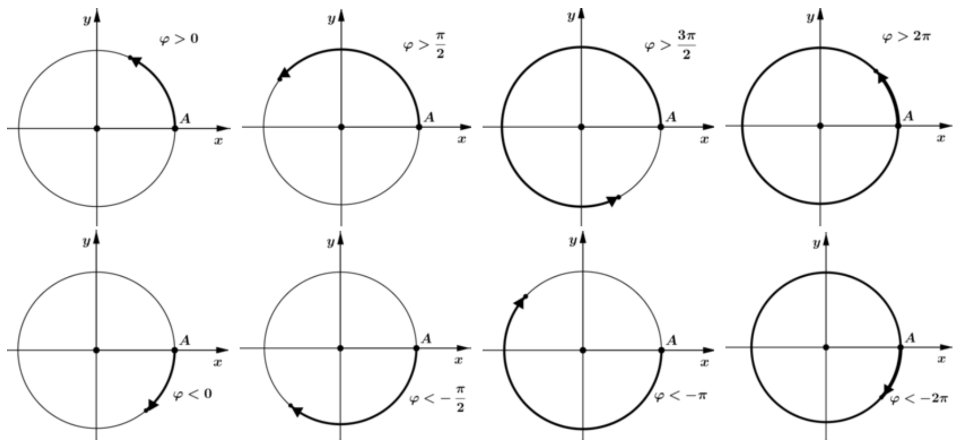


Slika 16: Trigonometrijski krug

Tačka A sa koordinatama $(1, 0)$ koja pripada trigonometrijskom krugu zove se početna tačka.

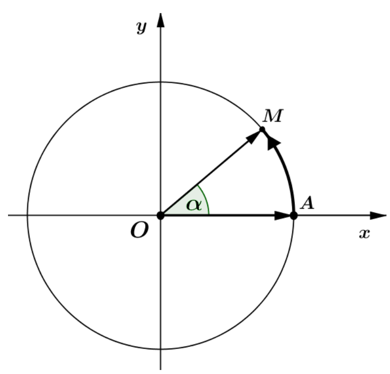
Luk na trigonometrijskom krugu koji se obilazi u pozitivnim smeru (smeru suprotnom kretanju kazaljke časovnika) počevši iz tačke A, zvaćemo pozitivan luk. Luk koji se obilazi u negativnom smeru zvaćemo negativan luk. Mera ovako definisanih orijentisanih lukova predstavljena je njihovom dužinom sa znakom $+$ za pozitivne i znakom - za negativne lukove. Na ovaj način se svakom orijentisanom luku dodeljuje jedan realan broj i obrnuto. Kako je obim trigonometrijskog kruga 2π, realnim brojevima većim od 2π i realnim brojevima manjim od -2π odgovaraju lukovi veći od punog kruga.

Na slici 17 je prikazano nekoliko orijentisanih lukova čija je mera označena sa φ.



Slika 17: Orijentisani lukovi

Ako je $\widehat{AM}$ orijentisan luk, njemu odgovara orijentisan ugao α koji obrazuju vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OM}$. Mera luka $\widehat{AM}$ jednaka je radijanskoj meri ugla $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. Vektor $\overrightarrow{OM}$ zove se *radijus vektor* ugla α prikazanog na slici 18 [2].



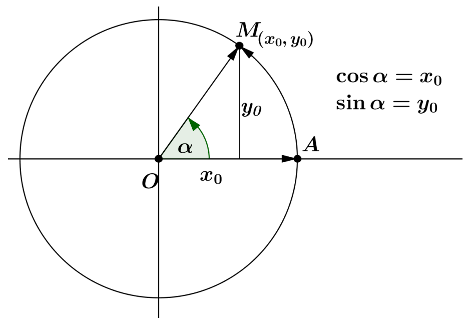
Slika 18: Radijus vektor

5.2 Sinus i kosinus

Neka je $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ proizvoljan orijentisan ugao kome odgovara orijentisan luk $\widehat{AM}$. Ako su (x_0, y_0) koordinate tačke M, tada se kosinus i sinus ugla α definišu:

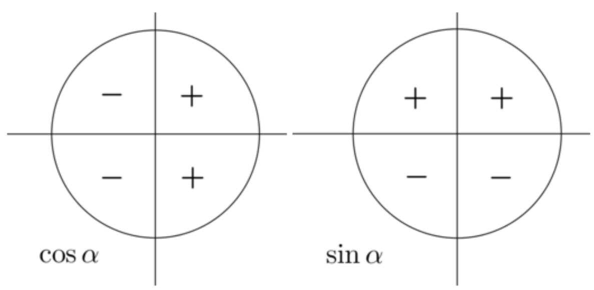
$$\cos\alpha = x_0,$$

$$\sin\alpha = y_0.$$



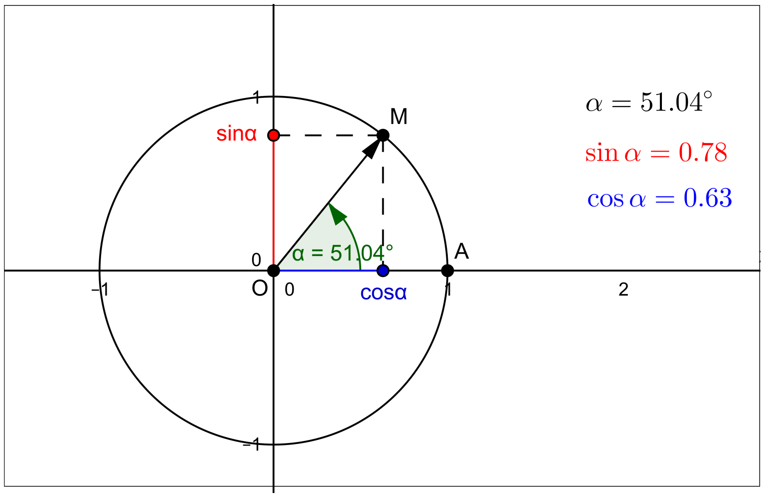
Slika 19: Definicija sinusa i kosinusa

Odavde se vidi da kosinus i sinus ugla mogu biti i pozitivni i negativni brojevi i nula. Kosinus je pozitivan ako je ugao u I i IV kvadrantu, a negativan ako je u II i III kvadrantu. Sinus je pozitivan ako je ugao u I i II kvadrantu, a negativan ako je u III i IV kvadrantu.



Slika 20: Znak sinusa i kosinusa

Elektronska lekcija *Sinus i kosinus* sadrži aplet na kome se vidi kako se menjaju vrednosti sinusa i kosinusa u zavisnosti od veličine ugla. Veličina ugla α menja se kretanjem tačke M po trigonometrijskom krugu (slika 21).

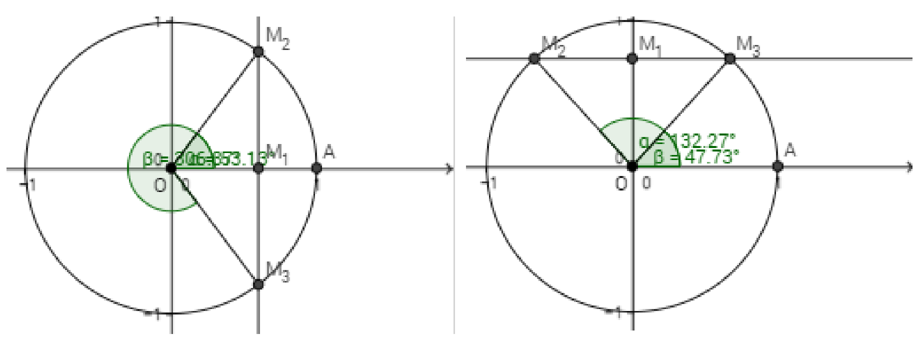


Slika 21: Aplet koji prikazuje promenu vrednosti sinusa i kosinusa u zavisnosti od veličine ugla

Uz pomoć GeoGebra apleta objašnjeno je i kako se za dati realan broj m određuje ugao α takav da je $\cos\alpha = m$, odnosno $\sin\alpha = m$.

Iz definicije sinusa i kosinusa jasno se vidi da važi $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ i $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. Zato, ako je $m < -1$ ili $m > 1$, ne postoji ugao čiji su sinus ili kosinus jednaki m. Mora da važi $-1 \leq m \leq 1$.

U elektronskoj lekciji, klikom na odgovarajuće dugmiće u tekstu, na apletu se pojavljuju tačka $A(1,0)$, prave $y = m$ ili $x = m$, u zavisnosti od toga da li je dat sinus ili kosinus traženog ugla, kao i presečne tačke prave sa trigonometrijskim krugom. Za svaki realan broj m takav da je $-1 \leq m \leq 1$ postoje dva ugla na intervalu $[0, 2\pi]$ čiji je sinus, odnosno kosinus jednak m, što se i na slici 22 može videti.



Slika 22: Apleti na kojima su prikazane konstrukcije uglova čiji su sinus ili kosinus poznati

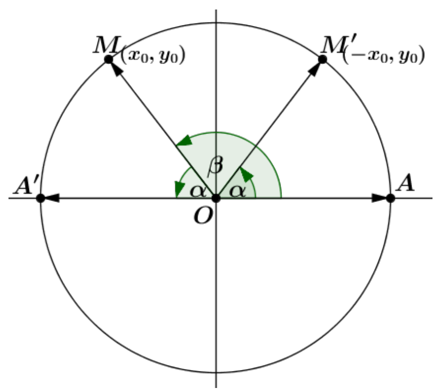
Kosinusi i sinusi uglova I kvadranta izračunavaju se kao i kosinusi i sinusi oštrih uglova pravouglog trougla. Kosinus i sinus proizvoljnog ugla mogu se izraziti preko kosinusa i sinusa odgovarajućeg ugla I kvadranta, postupkom koji se zove svođenje na I kvadrant.

1) II kvadrant

Neka je $\beta = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ugao II kvadranta, (x_0, y_0) koordinate tačke M $(x_0 < 0, y_0 > 0)$, M' tačka simetrična tački M i A' tačka simetrična tački $A(1,0)$ u odnosu na y osu (slika 23). Tačka M' pripada prvom kvadrantu i njene koordinate su $(-x_0, y_0)$. Ako se sa α obeleži ugao $\measuredangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA'})$, tada je zbog simetrije i $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$. Otuda je:

$$\cos\beta = x_0 = -(-x_0) = -\cos\alpha,$$

$$\sin\beta = y_0 = \sin\alpha.$$



Slika 23: Svođenje sa II na I kvadrant

Pošto je $\beta = \pi - \alpha$, važi:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$

za $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

2) III kvadrant

Neka je $\beta = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ugao III kvadranta, (x_0, y_0) koordinate tačke M $(x_0 < 0, y_0 < 0)$ i neka je M' tačka simetrična tački M u odnosu na koordinatni početak (slika 24). Tačka M' pripada prvom kvadrantu i njene koordinate su $(-x_0, -y_0)$. Ako se sa α obeleži ugao $\measuredangle(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM})$, tada je zbog simetrije i $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$. Otuda je:

$$\cos\beta = x_0 = -(-x_0) = -\cos\alpha,$$

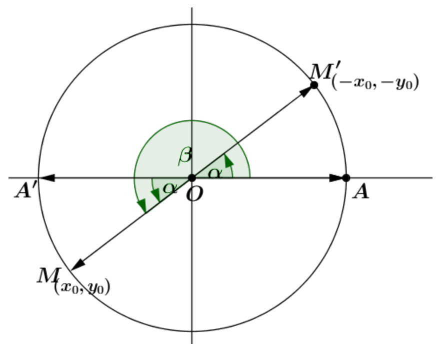
$$\sin\beta = y_0 = -(-y_0) = -\sin\alpha.$$

Pošto je $\beta = \pi + \alpha$, važi:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

za $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



Slika 24: Svođenje sa III na I kvadrant

3) IV kvadrant

Neka je $\beta = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ ugao IV kvadranta, (x_0, y_0) koordinate tačke M $(x_0 > 0, y_0 < 0)$ i neka je M' tačka simetrična tački M u odnosu na x osu (slika 25). Tačka M' pripada prvom kvadrantu i njene koordinate su $(x_0, -y_0)$. Ako se sa α obeleži ugao $\measuredangle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA})$, tada je zbog simetrije i $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$. Otuda je:

$$\cos\beta = x_0 = \cos\alpha,$$

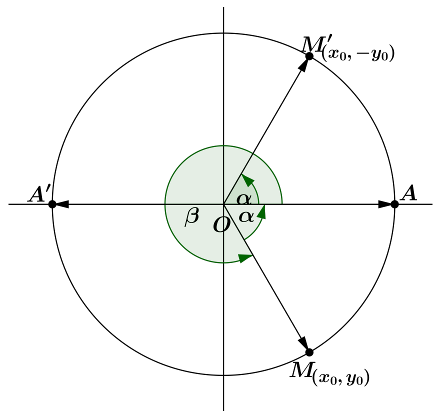
$$\sin\beta = y_0 = -(-y_0) = -\sin\alpha.$$

Pošto je $\beta = 2\pi - \alpha$, onda važi:

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha,$$

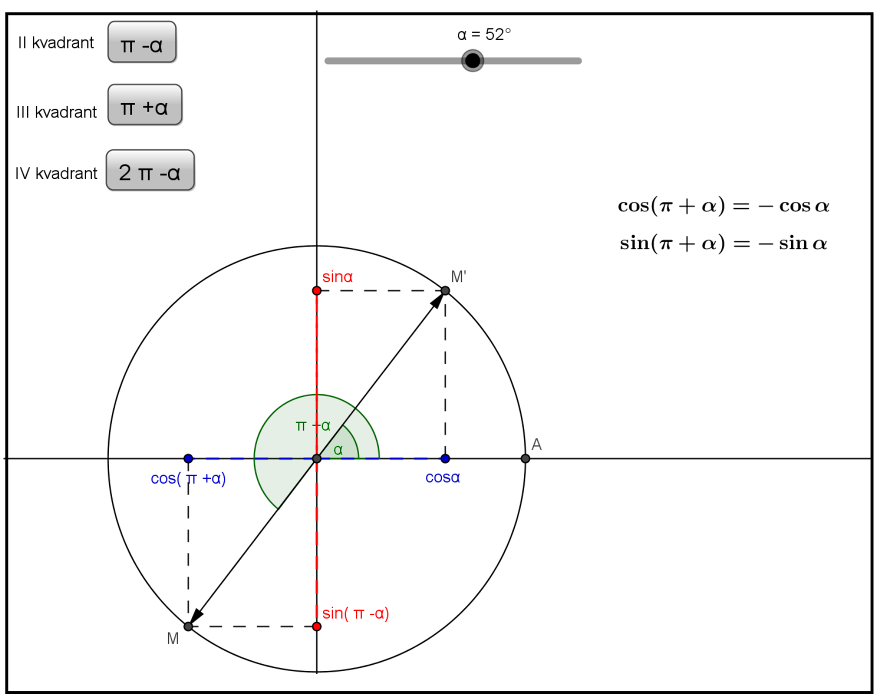
$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$$

za $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.



Slika 25: Svođenje sa IV na I kvadrant

U elektronskoj lekciji, i svođenje na prvi kvadrant je predstavljeno uz pomoć GeoGebra apleta prikazanog na slici 26. Na apletu se nalaze tri dugmeta koja omogućavaju da se izabere kvadrant u kome se nalazi ugao, kao i klizač kojim se određuje veličina ugla.



Slika 26: Aplet koji prikazuje svođenje na prvi kvadrant

4) Negativan ugao

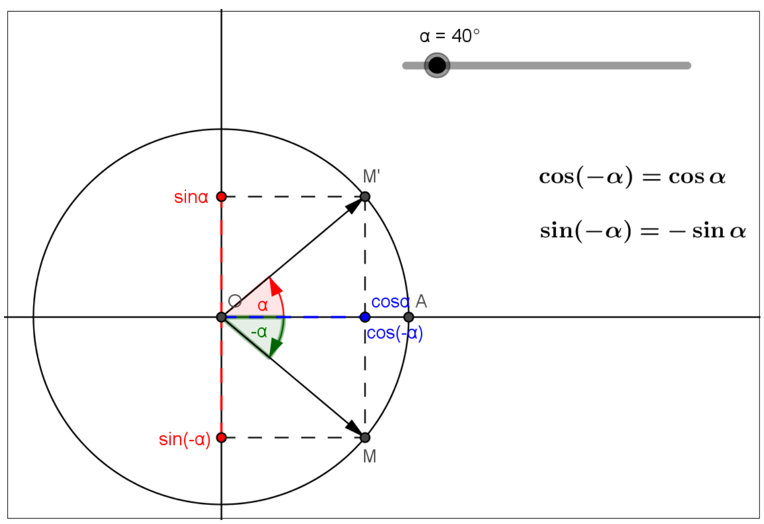
Neka je $\overrightarrow{OM}$ radijus vektor negativnog ugla $-\alpha$ i neka je M' tačka simetrična tački M u odnosu na x osu. Ako su (x_0, y_0) koordinate tačke M, onda su $(x_0, -y_0)$ koordinate tačke M'. Zbog simetrije je $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$. Otuda je:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

za svaki ugao α.

Na apletu kreiranom za elektronsku lekciju prikazanom na slici 27 mogu se videti različiti slučajevi koji zavise od veličine ugla α.



Slika 27: Aplet koji prikazuje svođenje sinusa i kosinusa negativnog ugla na sinus i kosinus pozitivnog ugla

Jasno je da za svaki ugao α i svaki ceo broj k važi $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$ i $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$. Ako za neku funkciju f postoji realan broj $T \neq 0$ tako da za svako x iz domena funkcije $x + T$ takođe pripada domenu i važi $f(x+T) = f(x)$, onda kažemo da je funkcija f periodična sa periodom T. Najmanji pozitivan period zove se osnovni period.

Teorema 3. *Osnovni period funkcija sinus i kosinus je $T = 2\pi$.*

Dokaz. Uglovima x i $x + 2k\pi$ odgovara isti položaj radijus vektora $\overrightarrow{OM}$, pa je $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ i $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$. Ovim je pokazano da je 2π period funkcija sinus i kosinus. Treba još pokazati da je to osnovni period. Dovoljno je pokazati da za svako T, $0 < T < 2\pi$ postoji ugao x_0 takav da je

$\cos(x_0 + T) \neq \cos x_0$. Ako se uzme da je $x_0 = 0$, tada je $\cos x_0 = \cos 0 = 1$, a $\cos T < 1$ za $0 < T < 2\pi$, pa T nije period od $\cos x$. Da bi se pokazalo da je 2π osnovni period i funkcije sinus, postupa se isto kao kod kosinusa, ali se uzima da je, npr., $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Tada je $\sin x_0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, a $\sin(T + \frac{\pi}{2}) \neq 1$ za $0 < T < 2\pi$. □

5.3 Tangens i kotangens

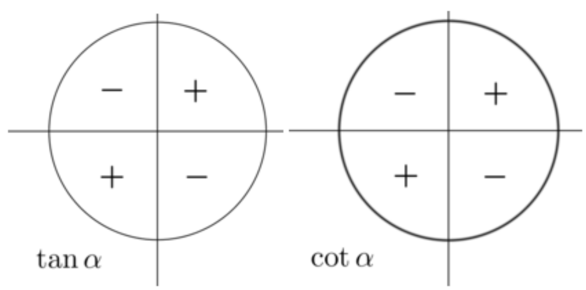
Tangens i kotangens proizvoljnog ugla α definišu se pomoću sinusa i kosinusa:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha \neq 0$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \sin\alpha \neq 0.$$

Odavde sledi da je $\tan\alpha$ definisan za $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, a $\cot\alpha$ za $\alpha \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Važi i:

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha},\ \cot\alpha \neq 0$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha},\ \tan\alpha \neq 0.$$

Iz definicije se lako utvrđuje i znak tangensa i kotangensa jer je poznat znak sinusa i kosinusa.

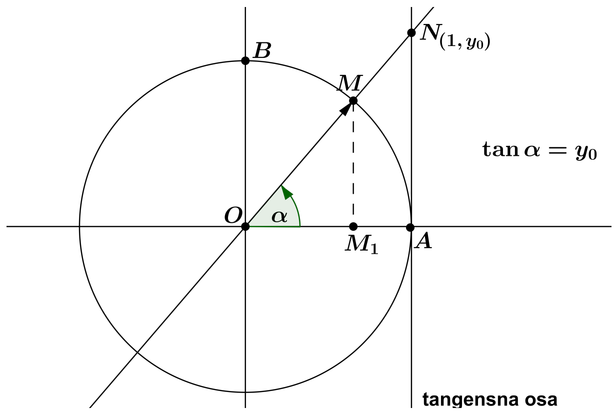


Slika 28: Znak tangensa i kotangensa

Vrednost tangensa za proizvoljan ugao iz domena tangensa može se geometrijski interpretirati na sledeći način (slika 29):

Uoči se prava $x = 1$. Ova prava prolazi kroz tačku $A(1, 0)$ i paralelna je y osi. Ona se naziva *tangensna osa*. Ako je $\overrightarrow{OM}$ radijus vektor ugla α, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, neka je N tačku preseka prave OM i tangensne ose. Neka su $(1, y_0)$ koordinate tačke N. Tada je $\tan\alpha = y_0$. Treba pokazati da je to tačno. Neka je $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ i M_1 normalna projekcija tačke M na x osu. Tada je $\cos\alpha = |OM_1|$ i $\sin\alpha = |MM_1|$. Sa druge strane, iz sličnosti trouglova OAN i OM_1M važi $\frac{AN}{OA} = \frac{MM_1}{OM_1}$, tj. $y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$.

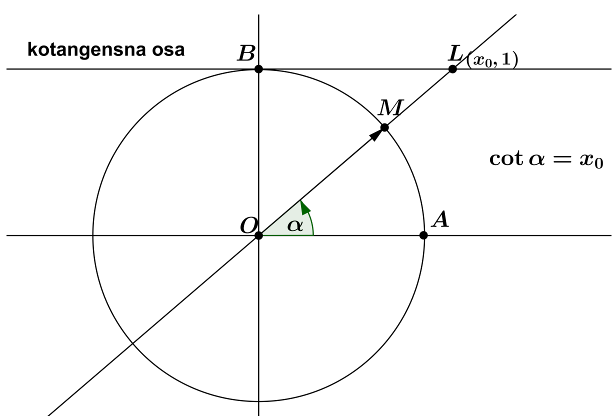
Na sličan način se pokazuje da važi i ako je ugao iz nekog drugog kvadranta.



Slika 29: Geometrijska interpretacija tangensa

Tangens nije definisan za svaki ugao α. Ako ugao α raste i teži uglu $\frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha$ se neograničeno povećava. U graničnom slučaju, kada se radijus vektor $\overrightarrow{OM}$ ugla α poklopi sa OB, prava OM i tangensna osa postaju paralelne i njihove presečne tačke nema. Za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\tan\alpha$ nije definisan. Ako ugao α teži uglu $\frac{\pi}{2}$ sa druge strane, smanjujući se, tada se $\tan\alpha$ neograničeno smanjuje. Slična je situacija kad α teži uglu $\frac{3\pi}{2}$ sa jedne ili druge strane, $\tan\frac{3\pi}{2}$ takođe nije definisan. $\tan\alpha$ nije definisan za svako $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ovo sledi i iz formule $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, jer je za $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\cos\alpha = 0$, a deljenje nulom nije definisano.

Vrednost kotangensa za proizvoljan ugao iz domena kotangensa može se geometrijski interpretirati na sledeći način (slika 30):

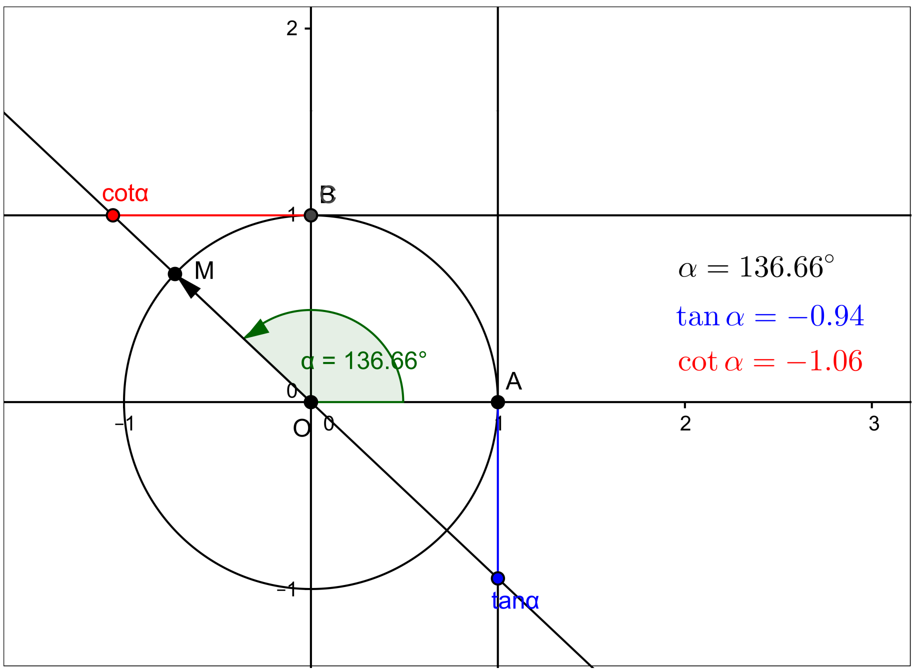


Slika 30: Geometrijska interpretacija kotangensa

Uoči se pravu $y = 1$. Ova prava prolazi kroz tačku $B(0,1)$ i paralelna je x osi. Naziva se *kotangensna osa*. Ako je $\overrightarrow{OM}$ radijus vektor ugla α, neka je L

tačka preseka prave OM i kotangensne ose. Neka su $(x_0, 1)$ koordinate tačke L. Tada je $\cot\alpha = x_0$. $\cot\alpha$ nije definisano za $\alpha = k\pi$.

Elektronska lekcija u kojoj su definisani tangens i kotangens proizvoljnog ugla sadrži aplet predstavljen na slici 31 koji prikazuje promenu vrednosti tangensa i kotangensa u zavisnosti od veličine ugla. Veličina ugla α menja se kretanjem tačke M po trigonometrijskom krugu.



Slika 31: Aplet koji prikazuje promenu vrednosti tangensa i kotangensa u zavisnosti od veličine ugla

Na osnovu prethodnog, lako se izvode formule kojima se tangens i kotangens proizvoljnog ugla izražavaju preko uglova I kvadranta.

1) II kvadrant

Neka je $\beta = \pi - \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Na osnovu formula za svodjenje sinusa i kosinusa važi:

$$\tan\beta = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha,$$

$$\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha.$$

Važe formule:

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

2) III kvadrant

Neka je $\beta = \pi + \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tada je:

$$\tan\beta = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha,$$

$$\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta)} = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha.$$

Važe formule:

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha,$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.$$

3) IV kvadrant

Neka je $\beta = 2\pi - \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pomoću formula izvedenih za sinus i kosinus izvodi se:

$$\tan\beta = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha,$$

$$\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta)} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha.$$

Važe formule:

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

4) Negativan ugao

Za negativan ugao, takođe koristeći formule za sinus i kosinus, dobija se:

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha,$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{1}{\tan(-\alpha)} = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\cot\alpha.$$

Važe formule:

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha,$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha,$$

za svaki ugao α iz domena funkcija [2].

Teorema 4. *Osnovni period funkcija tangens i kotagens je $T = \pi$.*

Dokaz. Iz definicije tangensa i kotangensa sledi da je $\tan(x + k\pi) = \tan x$ i $\cot(x + k\pi) = \cot x$, pa treba još samo pokazati da je π osnovni period, tj. da za svako T, $0 < T < \pi$, postoji ugao x_0 takav da je $\tan(x_0 + T) \neq \tan x_0$, odnosno $\cot(x_0 + T) \neq \cot x_0$. Za tangens se uzima $x_0 = 0$. Kako je $\tan 0 = 0$, a $\tan T \neq 0$ za $0 < T < \pi$, onda je π osnovni period funkcije tangens. Ako je $x_0 = \frac{\pi}{2}$, onda je $\cot x_0 = \cot \frac{\pi}{2} = 0$, a $\cot(T + \frac{\pi}{2}) \neq 0$ za $0 < T < \pi$, čime je dokazano da je π osnovni period i funkcije kotangens. □

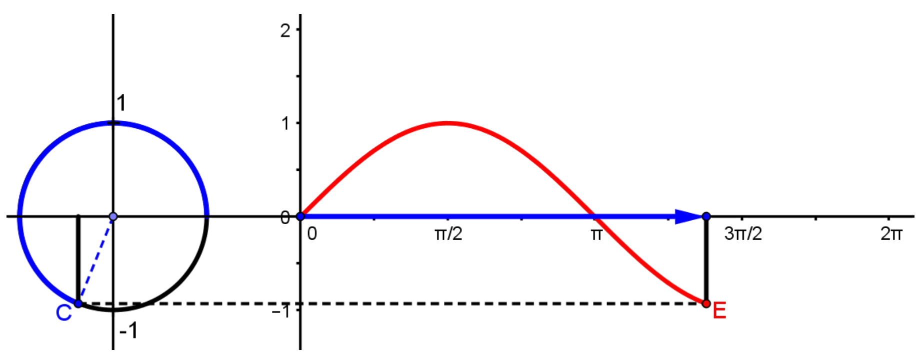
5.4 Grafici osnovnih trigonometrijskih funkcija

Na osnovu poznatih svojstava, približno se mogu nacrtati grafici funkcija $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ i $y = \cot x$.

Svojstva funkcije $y = \sin x$:

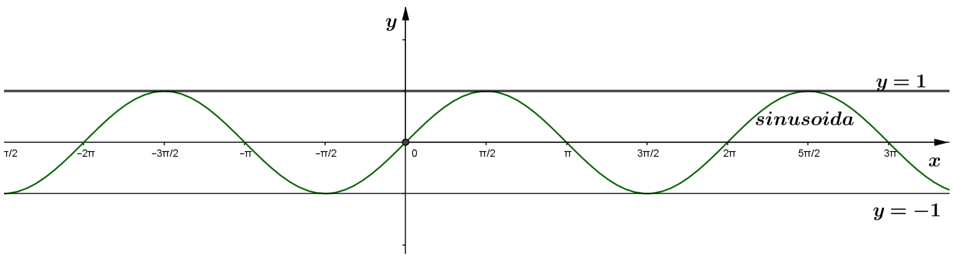
1) definisana je za svako x;
2) skup vrednosti funkcije je interval $[-1, 1]$;
3) nule funkcije $y = \sin x$ za $x \in [0, 2\pi)$ su $x = 0$ i $x = \pi$;
4) $\sin x$ je pozitivno za $0 < x < \pi$, a negativno za $\pi < x < 2\pi$;
5) kada x raste od 0 do $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ raste; kada x raste od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$, $\sin x$ opada; kada x raste od $\frac{3\pi}{2}$ do 2π $\sin x$ ponovo raste;
6) $\sin x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π.

Zbog periodičnosti dovoljno je da se nacrta deo grafika nad intervalom $[0, 2\pi]$. Za elektronsku lekciju kreiran je aplet na slici 32 koji prikazuje iscrtavanje grafika funkcije $y = sinx$ na intervalu $[0, 2\pi]$ uz pomoć trigonometrijskog kruga.



Slika 32: Crtanje grafika sinusa

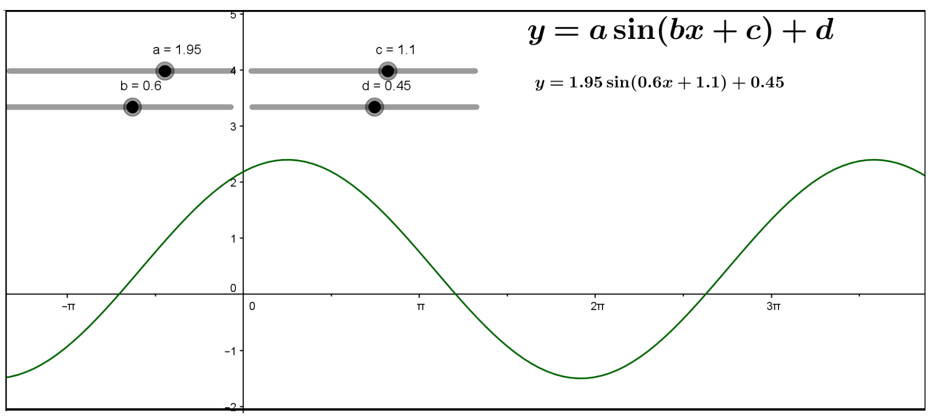
Ostatak grafika dobija se translacijom ovog dela duž x ose za sve vektore intenziteta $2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, ...$). Tako se dobija beskonačna kriva, grafik funkcije $y = \sin x$, koja se zove *sinusoida*.



Slika 33: Sinusoida

Može se uočiti da je grafik centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak, $\sin(-x) = -\sin x$, tj. $\sin x$ je neparna funkcija.

Na slici 34 je prikazan aplet na kome se vidi kako se menja grafik funkcije $y = a\sin(bx+c)+d$ u zavisnosti od vrednosti parametara a, b, c i d koji se mogu menjati pomeranjem klizača.

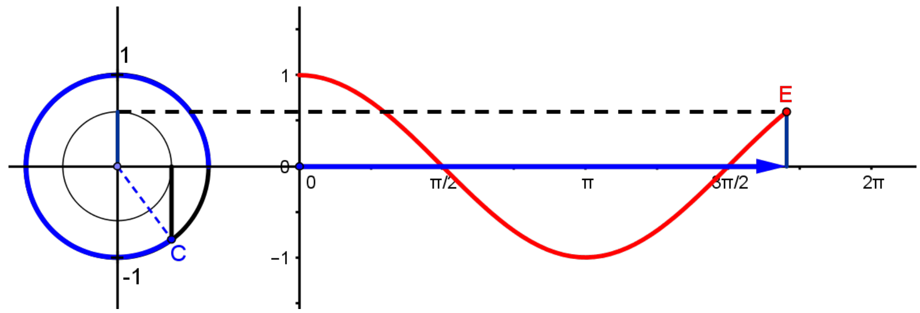


Slika 34: Grafik funkcije $y = a\sin(bx + c) + d$

Svojstva funkcije $y = \cos x$:

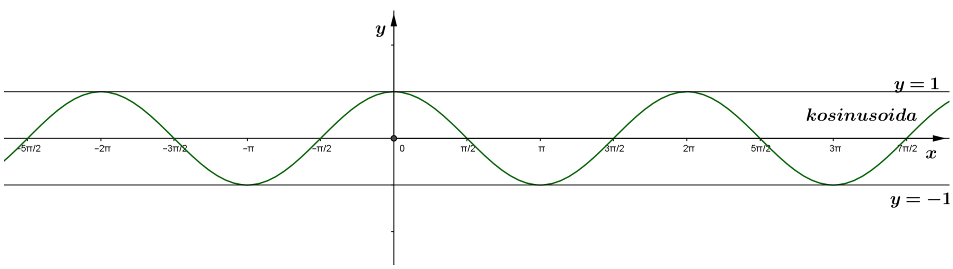
1) definisana je za svako x;
2) skup vrednosti funkcije je interval $[-1, 1]$;
3) nule funkcije $y = \cos x$ za $x \in [0, 2\pi]$ su $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$;
4) $\cos x$ je pozitivno za $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$, a negativno za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$;
5) za $x \in [0, \pi]$ $\cos x$ opada, a za $x \in [\pi, 2\pi]$ $\cos x$ raste.
Maksimalnu vrednost, dok $x \in [0, 2\pi)$ dostiže za $x = 0$ i ona iznosi 1, a minimalnu za $x = \pi$ i ona iznosi -1;
6) $\cos x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π.

Zbog periodičnosti dovoljno je da se nacrta deo grafika nad intervalom $[0, 2\pi]$. Za razliku od sinusa, nacrtati grafik funkcije $\cos x$ uz pomoć trigonometrijskog kruga nije lako. Na sledećem apletu prikazan je jedan od načina, uz pomoć kruga odgovarajućeg poluprečnika.



Slika 35: Crtanje grafika kosinusa

Ostatak grafika dobija se translacijom ovog dela duž x ose za sve vektore intenziteta $2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Grafik funkcije $y = \cos x$ zove se *kosinusoida* (slika 36).



Slika 36: Kosinusoida

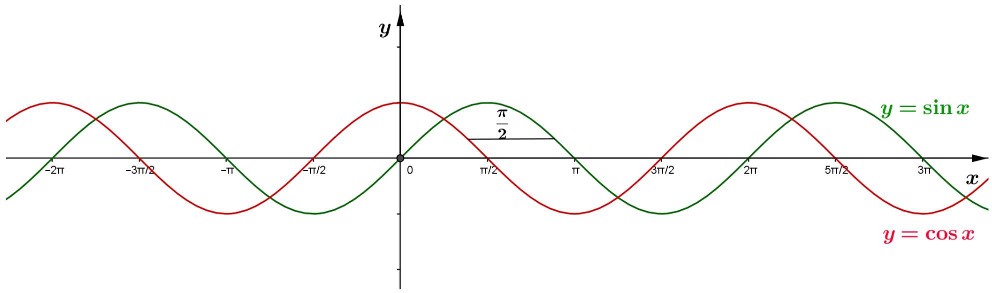
Može se uočiti da je grafik funkcije $\cos x$ simetričan u odnosu na y osu, $\cos(-x) = \cos x$, tj. $\cos x$ je parna funkcija.

Pomoću grafika može se doći do važne veze između kosinusa i sinusa. Ako se nacrtaju grafici obe funkcije, sa slike 37 se vidi da se grafik funkcije $y = \sin x$ može dobiti pomeranjem grafika funkcije $y = \cos x$ u pozitivnom smeru x ose za $\frac{\pi}{2}$. To pomeranje odgovara smanjenju argumenta za $\frac{\pi}{2}$, pa se dobija formula:

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x.$$

Pomeranjem grafika $\sin x$ ulevo za $\frac{\pi}{2}$, on prelazi u $\cos x$, tj. važi:

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x.$$

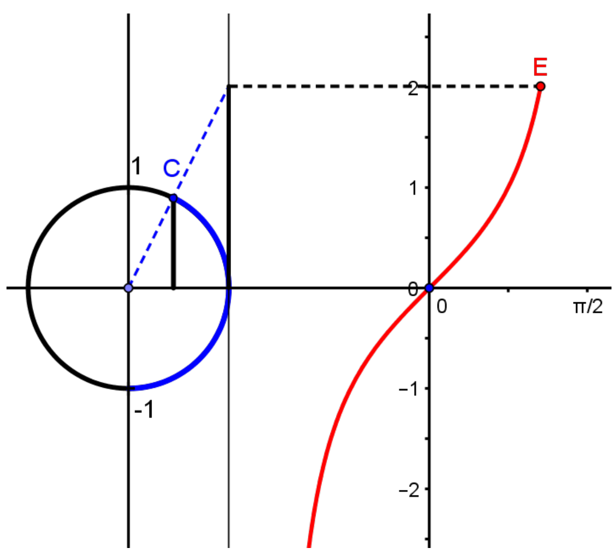


Slika 37: Sinusoida i kosinusoida

Svojstva funkcije $y = \tan x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

1) definisana je za svako x osim $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$.
Kada $x \to -\frac{\pi}{2} + 0$, onda $\tan x \to -\infty$, a kada $x \to \frac{\pi}{2} - 0$, $\tan x \to +\infty$;
2) skup vrednosti funkcije $\tan x$ za $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je skup $\mathbb{R}$;
3) nula funkcije je $x = 0$;
4) $\tan x$ je pozitivno za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a negativno za $-\frac{\pi}{2} < x < 0$;
5) stalno raste;
6) $\tan x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom π.

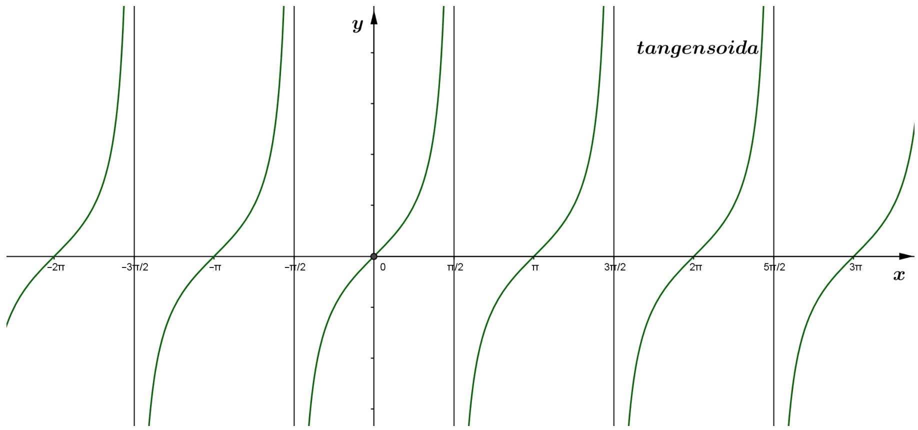
Zbog periodičnosti dovoljno je da se nacrta deo grafika nad intervalom $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na slici 38 je aplet kreiran za elektronsku lekciju koji pokazuje crtanje grafika funkcije $y = \tan x$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Slika 38: Crtanje grafika tangensa

Ostatak grafika dobija se translacijom duž x ose za $k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$.

Kompletan grafik funkcije tangens zove se *tangensoida* i može se videti na slici 39.

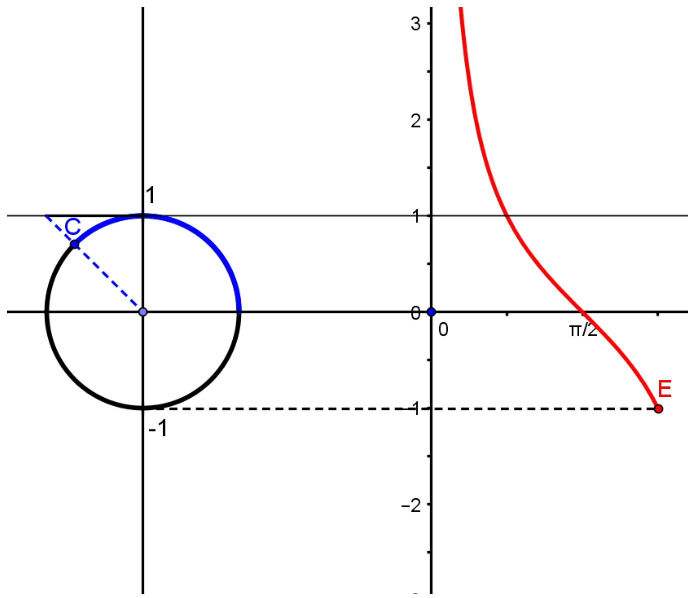


Slika 39: Tangensoida

Grafik je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak, $\tan(-x) = -\tan x$, tj. $\tan x$ je neparna funkcija.

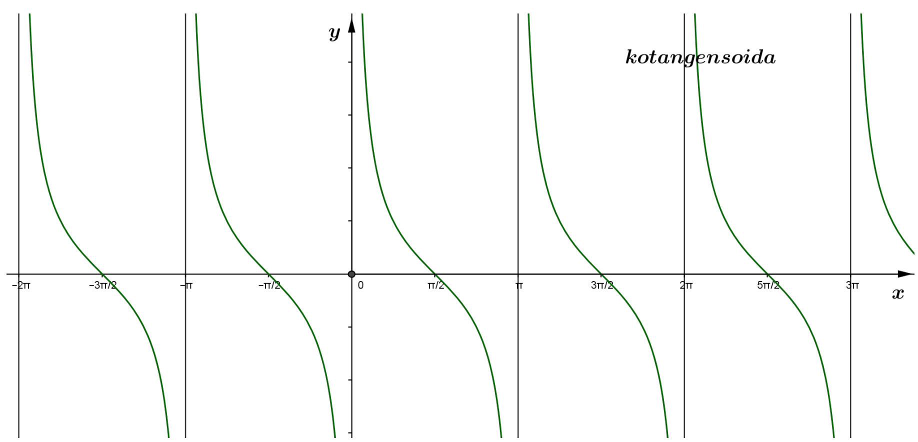
Svojstva funkcije $y = \cot x$ na intervalu $[0, \pi]$:
1) definisana je za svako x osim za $x = 0$ i $x = \pi$.
Kada $x \to 0+$, onda $\cot x \to +\infty$, a kada $x \to \pi - 0$, onda $\cot x \to -\infty$;
2) skup vrednosti funkcije $\cot x$ za $x \in (0, \pi)$ je skup $\mathbb{R}$;
3) nula funkcije je $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $\cot x$ je pozitivno za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a negativno za $\frac{\pi}{2} < x < \pi$;
5) stalno opada;
6) $\cot x$ je periodična funkcija sa osnovnim periodom π.

Grafik funkcije $y = \cot x$ na intervalu $(0, \pi)$ dobija se na sličan način kao i grafik funkcije $\tan x$, korišćenjem trigonometrijskog kruga i kotangensne ose. Crtanje ovog dela grafika vidi se na apletu prikazanom na slici 40.



Slika 40: Crtanje grafika kotangensa

Kotangens je periodična funkcija sa osnovnim periodom π, pa se kompletan grafik dobija translacijom i on se zove *kotangensoida* (slika 41).



Slika 41: Kotangensoida

Grafik je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak, $\cot(-x) = -\cot x$, tj. $\cot x$ je neparna funkcija.

5.5 Trigonometrijski identiteti

U ovoj sekciji biće pokazano da trigonometrijski identiteti koji važe kod trigonometrijskih funkcija oštrog ugla važe i kada su u pitanju trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla. Biće navedene i dokazane adicione formule, trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla, trigonometrijske funkcije polovine ugla i transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod.

5.5.1 Osnovni trigonometrijski identiteti

Osnovne trigonometrijske funkcije $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ i $\cot x$ imaju osobinu da se pomoću svake od njih mogu predstaviti ostale tri. Relacije koje slede ispunjene su za svaki ugao α iz domena funkcija koje u njima učestvuju.

Ako je M proizvoljna tačka trigonometrijskog kruga, njene koordinate zadovoljavaju jednačinu $x^2 + y^2 = 1$. Kako je $x = \cos\alpha$, a $y = \sin\alpha$, gde je $\alpha = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$, onda važi:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{1}$$

za svaki ugao α. Ovo je jedan od osnovnih trigonometrijskih identiteta.

Iz prethodnog sledi:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Znak pred korenom zavisi od toga u kom se kvadrantu nalazi ugao α. Ako je α u I ili II kvadrantu onda je znak $+$ jer je $\sin\alpha > 0$. Za α iz III ili IV kvadranta $\sin\alpha$ je negativno pa je znak -.

Pomoću prethodne formule dobija se i:

$$\tan\alpha = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

Dalje, poznato je da je $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.
Ako se leva i desna strana formule 1 podeli sa $\cos^2\alpha$ dobija se:

$$1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Zamenjujući ovo u 1 dobija se

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Na sličan način se pokazuje da se i preko $\sin\alpha$ i $\cot\alpha$ mogu izraziti preostale tri osnovne trigonometrijske funkcije. Sve formule pregledno su prikazane u sledećoj tabeli:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha=$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha=$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

Slika 42: Osnovni trigonometrijski identiteti

Trigonometrijski identiteti se najčešće koriste za transformaciju složenih trigonometrijskih izraza zbog uprošćavanja ili dovođenja na pogodan oblik u cilju rešavanja konkretnog problema.

Primer 6. *Uprostiti izraz* $\sin^4\alpha + cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Rešenje. $\sin^4\alpha + cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. △

Primer 7. *Ako je* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, *odredi:*

a) $\cos\alpha$, *ako je* $\sin\alpha = 0,8$*;*

b) $\sin\alpha$, *ako je* $\cot\alpha = -2$.

Rešenje. Kako je ugao α u II kvadrantu, onda je $\cos\alpha < 0$, a $\sin\alpha > 0$.

a) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6$;

b) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

△

5.5.2 Adicione formule

Adicione formule pokazuju kako se trigonometrijske funkcije zbira i razlike uglova prikazuju preko osnovnih trigonometrijskih funkcija:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta},$$

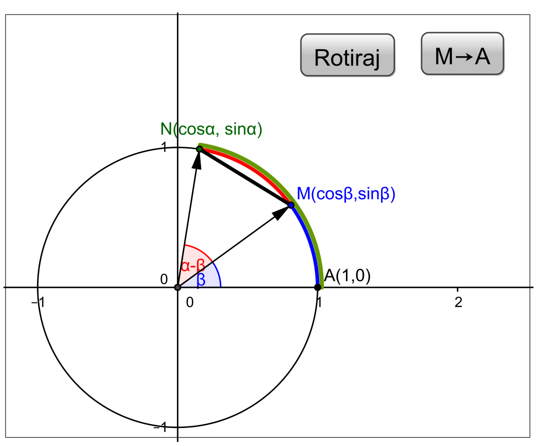
$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta},$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}.$$

Biće dokazana formula za kosinus razlike, iz koje se izvode ostale. U elektronskoj lekciji dokaz prati aplet prikazan na slikama 43 i 44.

Neka je $\alpha > \beta$ i M i N tačke trigonometrijskog kruga takve da je $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = \alpha$ i $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \beta$ (slika 43). Koordinate tačaka M i N su, redom, $(\cos\beta, \sin\beta)$ i $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, pa za dužinu duži MN važi:

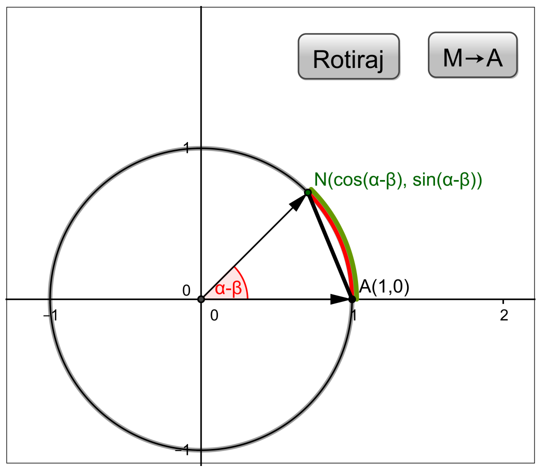
$$MN^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2.$$



Slika 43: Aplet koji ilustruje dokaz adicione formule

Rotacijom duži MN oko koordinatnog početka njena dužina se neće promeniti, što se klikom na dugme *Rotiraj* na apletu može videti. Ako tačku M rotacijom dovedemo do tačke $A(1,0)$, što se na apletu događa klikom na dugme $M \to A$, tada je $\beta = 0$, koordinate tačke N se mogu zapisati kao $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$ (slika 44), pa će za dužinu duži MN (NA) da važi:

$$MN^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2.$$



Slika 44: Aplet koji ilustruje dokaz adicione formule

Kako se dužina duži ne menja pri rotaciji, važi:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2,$$

tj.

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta).$$

Koristeći identitet $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ dobija se:

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta),$$

odakle se vidi da je:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Formula za kosinus zbira može se izvesti iz prethodne:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

pri čemu se koristi $\cos(-x) = \cos x$ i $\sin(-x) = -\sin x$.

Pomoću ovih formula izvodi se:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Stavljanjem $\frac{\pi}{2} - \alpha$ umesto α dobija se:

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha.$$

Prethodno omogućava izvođenje formule za sinus zbira i razlike:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta) =$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$

Kada su poznate adicione formule za sinus i kosinus, lako se izvode i za tangens:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

sada se deljenjem brojioca i imenioca dobijenog razlomka sa $\cos\alpha\cos\beta$ dobija:

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

Na sličan način izvode se i formule za kotangens:

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}.$$

Sada se i brojilac i imenilac dele sa $\sin\alpha\sin\beta$ i dobija se:

$$\frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}.$$

Zadatak 2. *Izračunati* $\cos\frac{\pi}{12}$.

Rešenje. $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$ $\triangle$

Zadatak 3. *Izračunati* $\sin 75^\circ$ *bez upotrebe tablice.*

Rešenje. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1).$ △

Zadatak 4. *Izračunati* $\sin 36^\circ \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ$ *bez upotrebe tablice.*

Rešenje. $\sin 36^\circ \cos 24^\circ + \cos 36^\circ \sin 24^\circ = \sin(36^\circ + 24^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ △

Zadatak 5. *Izračunati* $\tan 15^\circ$ *bez upotrebe tablice.*

Rešenje. $\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$ △

5.5.3 Trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla

Primenom adicionih formula trigonometrijske funkcije dvostrukog ugla mogu se izraziti preko funkcija osnovnog ugla. Za to je dovoljno u adicionim formulama staviti $\alpha = \beta$. Dobija se:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \text{ za } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi,$$
$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}, \text{ za } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Zadatak 6. *Dokazati identitet* $1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin 2\alpha$.

Rešenje. $1 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - (1 - \sin 2\alpha) = \sin 2\alpha.$ △

Zadatak 7. *Izračunati* $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ *bez upotrebe tablica.*

Rešenje. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos 2 \cdot 15^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ △

5.5.4 Trigonometrijske funkcije polovine ugla

Adicione formule i neki trigonometrijski identiteti omogućavaju da trigonometrijske funkcije ugla $\frac{\alpha}{2}$ izrazimo preko trigonometrijskih funkcija ugla α.

Polazi se od identiteta $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ napisanog u obliku:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

i odgovarajuće formule:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Sabiranjem ovih jednakosti dobija se:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha,$$

tj.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobija se:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

tj.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Poznato je da je:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

i

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}},$$

pa se lako izvodi:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Zadatak 8. *Odrediti* $\cos\frac{\pi}{8}$.

Rešenje. $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$ △

Zadatak 9. *Odrediti* $\tan 15^\circ$ *i* $\cot 15^\circ$.

Rešenje. $\tan 15^\circ = \tan \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$.
$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. △

5.5.5 Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod

Transformacija zbira i razlike trigonometrijskih funkcija u proizvod je važna jer se pomoću nje dobija izraz pogodan za logaritmovanje. Pretvaranje proizvoda u zbir je metoda koja se često koristi pri rešavanju integrala.

Ako se saberu adicione formule

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

i

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

dobija se:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cdot \cos y.$$

Ako se druga oduzme od prve razlika je formula:

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \cdot \sin y.$$

Stavljajući $x+y=\alpha$ i $x-y=\beta$ dobija se:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

i

$$y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ako se ovo zameni u prethodno, dobija se:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Na sličan se način iz formula

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y,$$

sabiranjem i oduzimanjem dobijaju formule:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y,$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \cdot \sin y.$$

Smenom $x+y=\alpha, x-y=\beta$ dobijaju se formule za pretvaranje zbira i razlike kosinusa u proizvod:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Iz prethodnih formula slede i:

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)),$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)),$$

formule koje predstavljaju pretvaranje proizvoda u zbir trigonometrijskih funkcija.

Zadatak 10. *Predstaviti u obliku proizvoda* $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Rešenje. $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\sin\frac{\alpha+(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$. △

Zadatak 11. *Predstaviti u obliku proizvoda* $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$.

Rešenje. $\cos(\alpha - \frac{\pi}{3}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -2\sin\frac{(\alpha-\frac{\pi}{3}+(\alpha+\frac{\pi}{3}))}{2}\sin\frac{(\alpha-\frac{\pi}{3}-(\alpha+\frac{\pi}{3}))}{2} = -2\sin\alpha \cdot \sin(-\frac{\pi}{3}) = 2\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\alpha$. △

5.6 Trigonometrijske jednačine

Trigonometrijska jednačina je jednačina kod koje se nepoznata javlja kao argument trigonometrijske funkcije. Rešiti trigonometrijsku jednačinu znači odrediti sve vrednosti nepoznate za koje je data jednačina zadovoljena. U ovoj sekciji biće prikazano kako se rešavaju osnovni tipovi trigonometrijskih jednačina. Elektronske lekcije sadrže aplete koji bi trebalo da olakšaju učenicima razumevanje postupka rešavanja jednačina i omoguće lakše rešavanje.

Jednačina $\sin x = m$

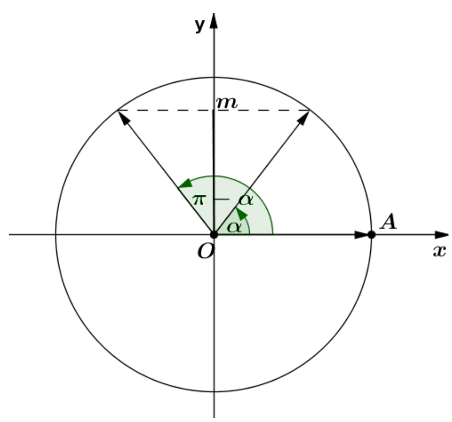
Poznato je da je $-1 \leq \sin x \leq 1$ za svako x, pa ova jednačina ima rešenja samo za $-1 \leq m \leq 1$.

Za $-1 < m < 1$ postoje dva ugla iz intervala $[0, 2\pi]$ čiji je sinus jednak m. Za $0 \leq m < 1$ jedan od tih uglova je u I, a drugi u II kvadrantu. Njihov zbir je π, pa ako se sa α označi ugao iz I kvadranta, onda je $\pi - \alpha$ ugao iz drugog kvadranta (slika 45). Zbog periodičnosti funkcije $\sin x$ iz ovoga sledi da su rešenja jednačine $\sin x = m$, $0 \leq m < 1$ data sa:

$$x = \alpha + 2k\pi,$$

$$x = (\pi - \alpha) + 2k\pi = -\alpha + (2k+1)\pi,$$

gde je $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = m$ i $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



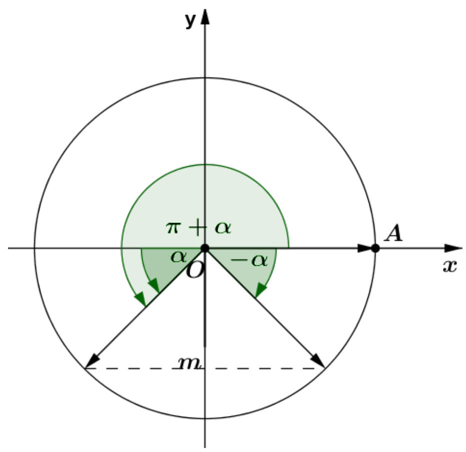
Slika 45: Rešenje trigonometrijske jednačine $sinx = m$ kada je $0 < m < 1$

Za $-1 < m \leq 0$ postoje takođe dva ugla, jedan u III i drugi u IV kvadrantu, čiji su sinusi jednaki m.
Ako onaj iz III kvadranta označimo sa $\pi + \alpha$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, tada je ugao iz IV kvadranta $-\alpha$ (slika 46). Iz toga sledi da su rešenja jednačine $\sin x = m$ $(-1 < m \leq 0)$ data sa:

$$x = (\pi + \alpha) + 2k\pi = \alpha + (2k+1)\pi,$$

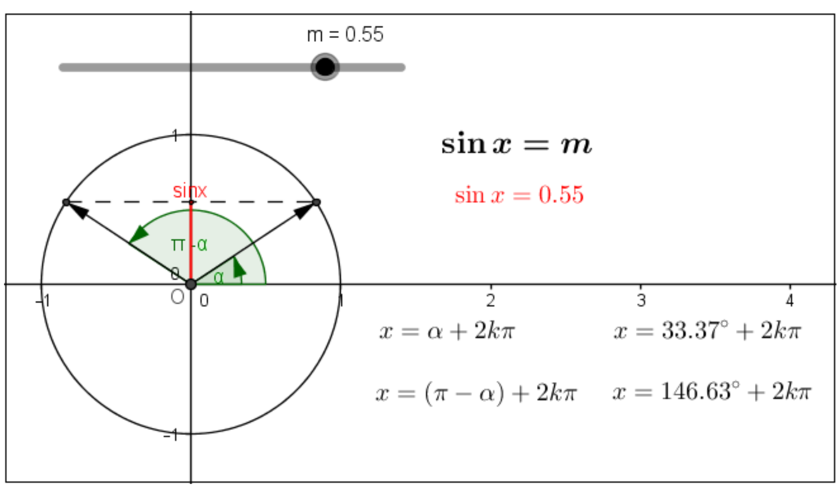
$$x = -\alpha + 2k\pi,$$

gde je $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin(-\alpha) = m$ i $k = 0, \pm1, \pm2, ...$



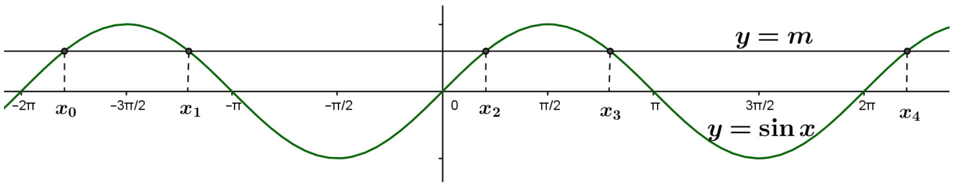
Slika 46: Rešenje trigonometrijske jednačine $sinx = m$ kada je $-1 < m < 0$

Na slici 54 prikazan je GeoGebra aplet kreiran za elektronsku lekciju *trigonometrijske jednačine*. Klizač određuje vrednost parametra m, i sa promenom vrednosti menjaju se rešenja jednačine $\sin x = m$.



Slika 47: Aplet koji prikazuje rešavanje trigonometrijske jednačine $\sin x = m$

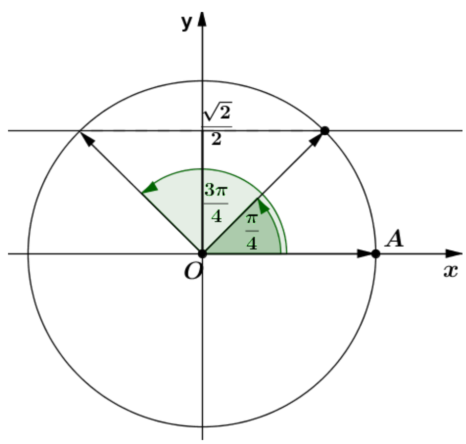
Do rešenja jednačine $\sin x = m$ može se doći i grafički. Ako se nacrtaju grafici funkcija $y = \sin x$ i $y = m$, onda su apscise tačaka preseka tih grafika rešenja jednačine $\sin x = m$ (slika 48).



Slika 48: Grafičko rešavanje trigonometrijske jednačine $\sin x = m$

Zadatak 12. *Rešiti jednačinu* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rešenje. Datu jednačinu najlakše je rešiti uz pomoć trigonometrijskog kruga (slika 49). Crtanjem prave $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vidi se da postoje dva ugla iz intervala $(0, 2\pi)$ čiji je sinus jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. To su uglovi $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$, jer je $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kako je sinus 2π periodična funkcija, rešenja date jednačine su $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ i $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$ △



Slika 49: Rešenje trigonometrijske jednačine $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadatak 13. *Rešiti jednačinu* $\sin x = 2$.

Rešenje. Kako je $2 > 1$, data jednačina nema rešenje. △

Sledeći primer pokazuje kako se rešavaju složenije jednačine sa sinusom.

Primer 8. *Rešiti jednačinu* $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

Rešenje. Ovakve jednačine rešavaju se uvođenjem smene $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $2t^2 + 3t + 1 = 0$, čija su rešenja $t_1 = -1$ i $t_2 = -\frac{1}{2}$. Rešenje polazne jednačine čini unija rešenja jednačina $\sin x = -1$ i $\sin x = -\frac{1}{2}$. Rešenje jednačine $\sin x = -1$ je $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a rešenje jednačine $\sin x = -\frac{1}{2}$ su $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, pa su rešenja date jednačine:
$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,
$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$
$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. △

Jednačina $\cos x = m$

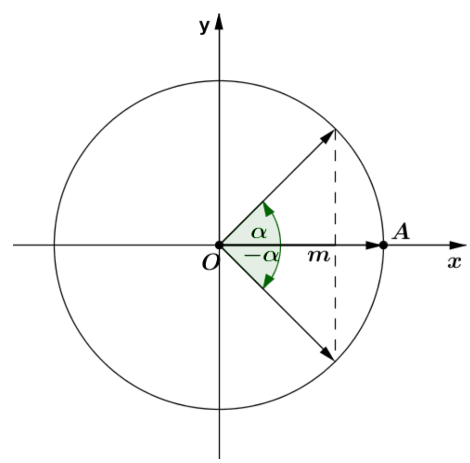
I ova jednačina ima rešenja samo za $-1 \leq m \leq 1$.

Za $-1 < m < 1$ postoje dva ugla iz intervala $[0, 2\pi]$ čiji je kosinus jednak m. Za $0 \leq m < 1$ jedan od tih uglova je u I a drugi u IV kvadrantu. Označimo sa α ugao iz I kvadranta. Tada je $-\alpha$ odgovarajući ugao iz IV kvadranta (slika 50). Zbog periodičnosti funkcije $\cos x$ iz ovoga sledi da su rešenja jednačine $\cos x = m$, $0 \leq m < 1$ data sa:

$$x = \alpha + 2k\pi,$$

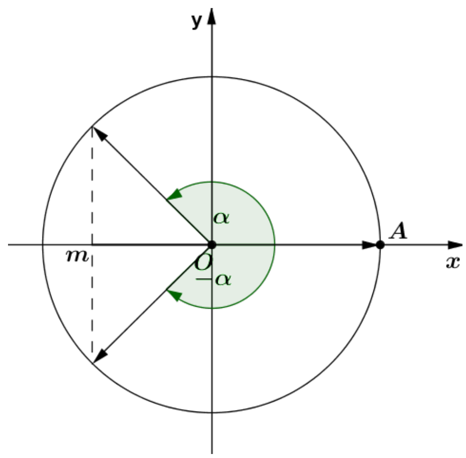
$$x = -\alpha + 2k\pi,$$

gde je $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = m$ i $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



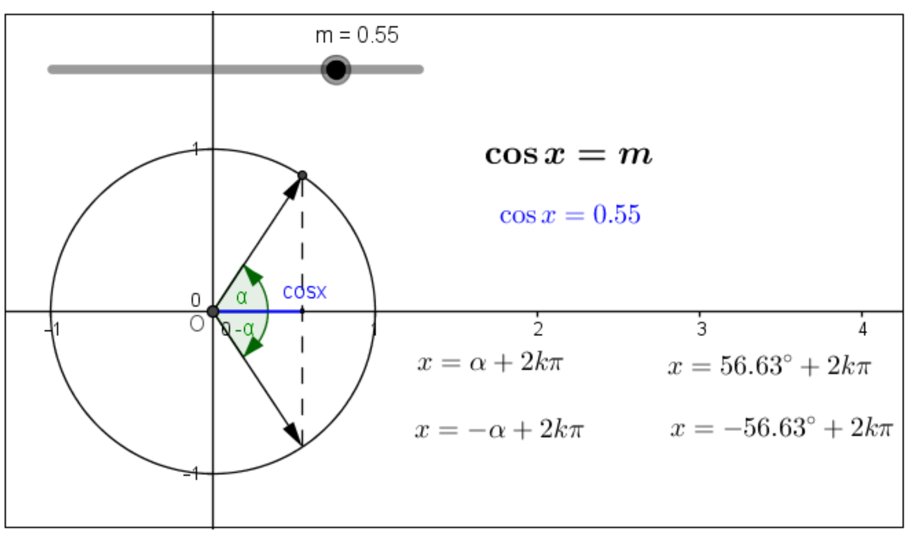
Slika 50: Rešenje trigonometrijske jednačine $cosx = m$ kada je $0 < m < 1$

Za $-1 < m \leq 0$ postoje takođe dva ugla, jedan u II i drugi u III kvadrantu, čiji su kosinusi jednaki m.
Ako onaj iz II kvadranta označimo sa α, tada je ugao iz IV kvadranta $-\alpha$ (slika 51). Iz toga sledi da su rešenja jednačine $\cos x = m$ $(-1 < m \leq 0)$ data prethodnim formulama.



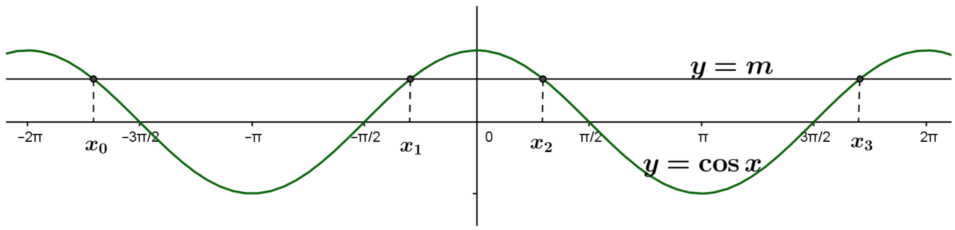
Slika 51: Rešenje trigonometrijske jednačine

Na sledećoj slici je aplet koji prikazuje rešenja jednačine $\cos x = m$ kada je $-1 \leq m \leq 1$.



Slika 52: Aplet koji prikazuje rešavanje trigonometrijske jednačine $\cos x = m$

Do rešenja jednačine $\cos x = m$ može se doći i grafički, na isti način kao do rešenja jednačine $\sin x = m$ (slika 53).

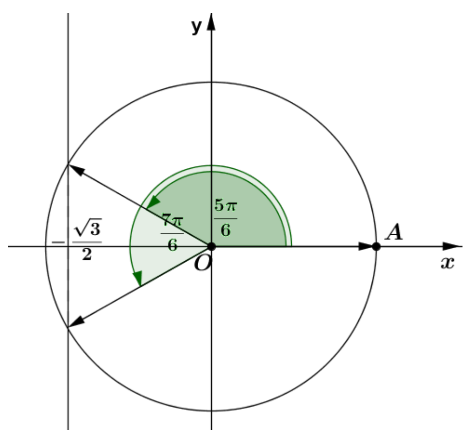


Slika 53: Grafičko rešavanje trigonometrijske jednačine $\cos x = m$

Zadatak 14. *Rešiti jednačinu* $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rešenje. I ova jednačina se najlakše rešava uz pomoć trigonometrijskog kruga (slika 54). Crtanjem prave $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ vidi se da postoje dva ugla iz intervala $(0, 2\pi)$ čiji je kosinus jednak $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. To su uglovi $\frac{5\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{6}$, jer je $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je kosinus 2π periodična funkcija, rešenja date jednačine su $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ i $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

△



Slika 54: Rešenje trigonometrijske jednačine $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadatak 15. *Rešiti jednačinu* $\cos x = -1$.

Rešenje. Na intervalu $[0, 2\pi)$ $\cos x = -1$ samo kada je $x = \pi$, pa je rešenje ove jednačine $x = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$, tj. $x = \pi(2k+1)$, $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ △

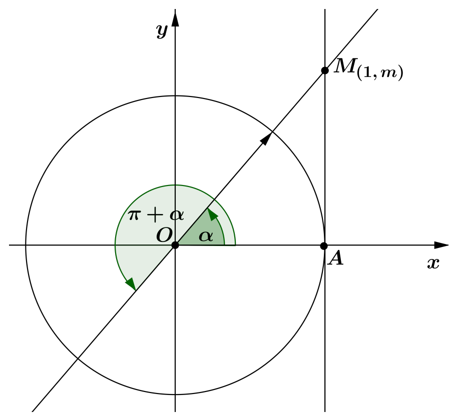
Jednačina $\tan x = m$

Za razliku od prethodne dve, jednačina $\tan x = m$ ima rešenja za svaki realan broj m.

Za svako $m \in \mathbb{R}$ postoji tačno jedan ugao na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ čiji je tangens jednak m. Ako se taj ugao obeleži sa α, tada su sva rešenja jednačine $\tan x = m$ data sa:

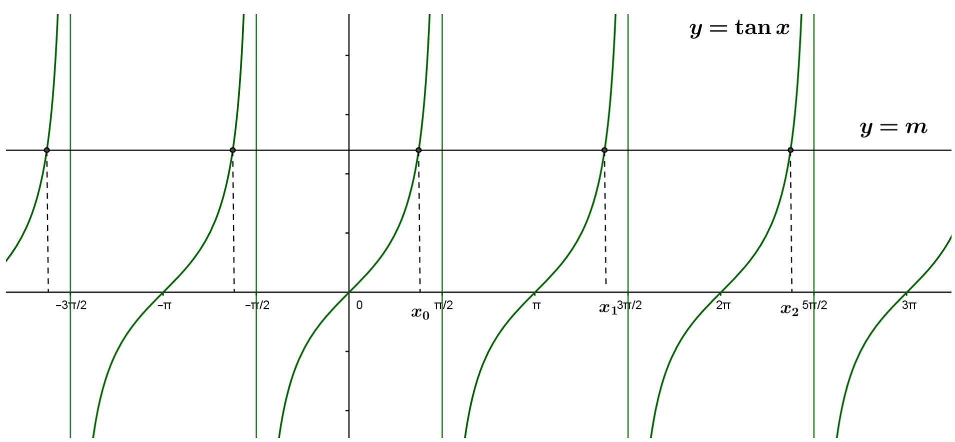
$$x = \alpha + k\pi,$$

gde je $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\tan \alpha = m$ (slika 55).



Slika 55: Rešenje trigonometrijske jednačine $\tan x = m$

Ovakve jednačine mogu se rešiti i grafički. Rešenja su apscise presečnih tačaka grafika funkcija $y = \tan x$ i $y = m$ (slika 56).



Slika 56: Grafičko rešavanje trigonometrijske jednačine $\tan x = m$

Zadatak 16. *Rešiti jednačinu* $\tan x = 1$.

Rešenje. Kako je $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, a tangens je π periodična funkcija, rešenja ove jednačine su $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ △

Zadatak 17. *Rešiti jednačinu* $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$.

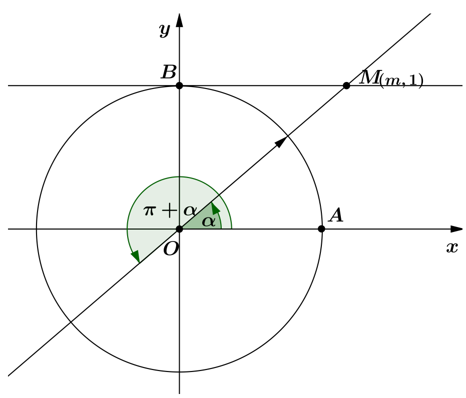
Rešenje. Nakon uvođenja smene $\tan x = t$, jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $t^2 - 3t + 2 = 0$, čija su rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$. Rešenje polazne jednačine čini unija rešenja jednačina $\tan x = 1$ i $\tan x = 2$. Rešenje jednačine $\tan x = 1$ je $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$, a rešenje jednačine $\tan x = 2$ je $x \approx 63^\circ 30' + k \cdot 180^\circ$, pa su rešenja date jednačine:
$x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$,
$x = 63^\circ 30' + k \cdot 180^\circ$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ △

Jednačina $\cot x = m$

Jednačina $\cot x = m$ ima rešenja za svaki realan broj m. Na intervalu $(0, \pi)$ postoji tačno jedan ugao α takav da je $\cot \alpha = m$. Zbog periodičnosti, sva rešenja jednačine $\cot x = m$ su data sa:

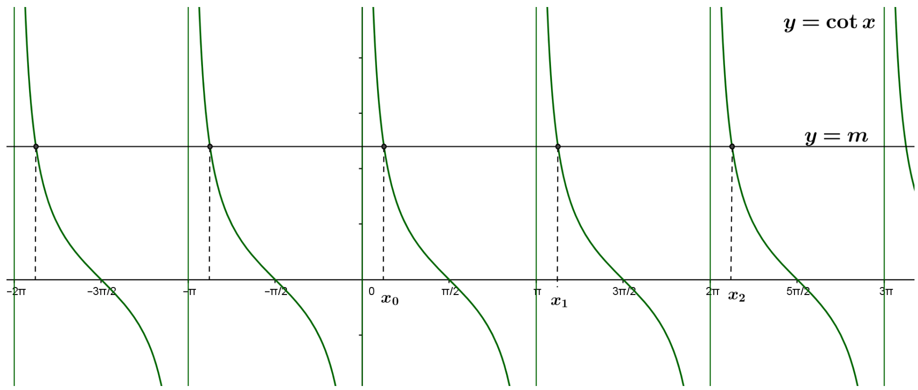
$$x = \alpha + k\pi,$$

gde je $0 < \alpha < \pi$, $\cot \alpha = m$ i $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ (slika 57).



Slika 57: Rešenje trigonometrijske jednačine

Jednačina $\cot x = m$ se grafički rešava na isti način kao i jednačina $\tan x = m$, što je prikazano na slici 58.



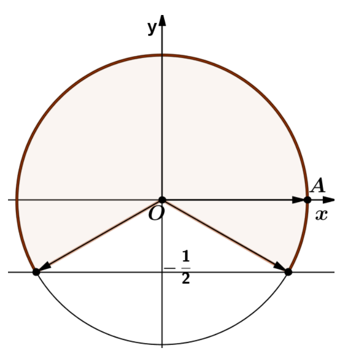
Slika 58: Grafičko rešavanje trigonometrijske jednačine $\cot x = m$

5.7 Trigonometrijske nejednačine

Trigonometrijske nejednačine su nejednačine u kojima se nepoznate pojavljuju kao argumenti trigonometrijskih funkcija. Kako se rešavaju, najlakše je videti na primerima.

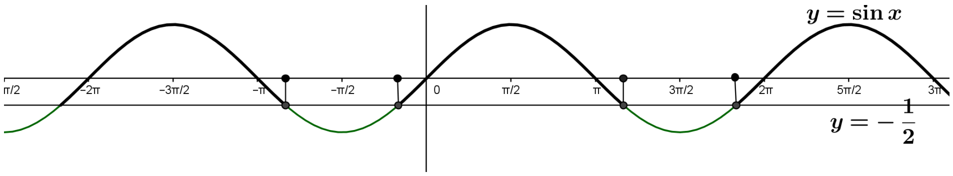
Primer 9. *Rešiti nejednačinu* $\sin x > -\frac{1}{2}$.

Rešenje. Za rešavanje date nejednačine koristi se trigonometrijski krug. Odrede se sve tačke na trigonometrijskoj kružnici čije su ordinate veće od $-\frac{1}{2}$. Kako su rešenja jednačine $\sin x = -\frac{1}{2}$ na intervalu $[0, 2\pi]$ $-\frac{\pi}{6}$ i $\frac{7\pi}{6}$, sa slike 59 se vidi da su rešenja date nejednačine svi uglovi x koji pripadaju intervalu $(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$. Zbog periodičnosti sinusa, ako se svakom od uglova iz intervala $(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$ doda $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, ...$, dobiće se ugao čiji je sinus veći od $-\frac{1}{2}$. Tako se dobija da nejednačinu $\sin x > -\frac{1}{2}$ zadovoljavaju svi uglovi x za koje važi $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$



Slika 59: Rešavanje trigonometrijske nejednačine $\sin x > -\frac{1}{2}$

Data nejednačina može da se reši i grafički, crtanjem grafika funkcija $y = \sin x$ i $y = -\frac{1}{2}$. Deo sinusoide koji se nalazi iznad prave $y = -\frac{1}{2}$ su tačke čije apscise zadovoljavaju datu nejednačinu, što se vidi na slici 60.

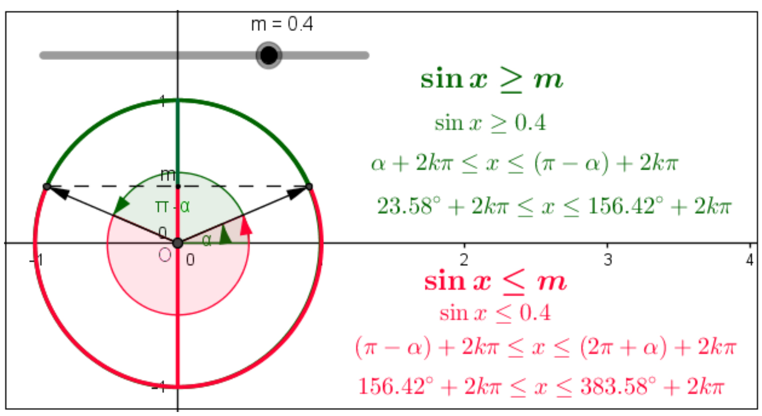


Slika 60: Grafičko rešavanje trigonometrijske nejednačine $\sin x > -\frac{1}{2}$

△

U slučaju kada je $m \geq 1$, nema tačaka na sinusoidi koje su iznad prave $y = m$, pa nejednačina $\sin x > m$ nema rešenja. U slučaju da je $m < -1$, sinusoida je iznad prave $y = m$, pa je rešenje nejednačine $\sin x > m$ skup $\mathbb{R}$. Nejednačina $\sin x < m$ nema rešenja kada je $m < -1$, dok je skup njenih rešenja ceo skup $\mathbb{R}$ kada je $m \geq 1$.

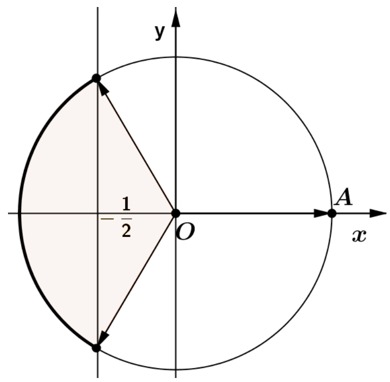
Kako nejednačine često predstavljaju učenicima najveći problem, kreiran je GeoGeobra aplet prikazan na slici 61 koji treba da približi njihovo rešavanje. Pomeranjem klizača na apletu, menja se vrednost parametra m i prikazuju rešenja nejednačina $\sin x \leq m$ i $\sin x \geq m$.



Slika 61: Rešavanje nejednačina $\sin x \leq m$ i $\sin x \geq m$

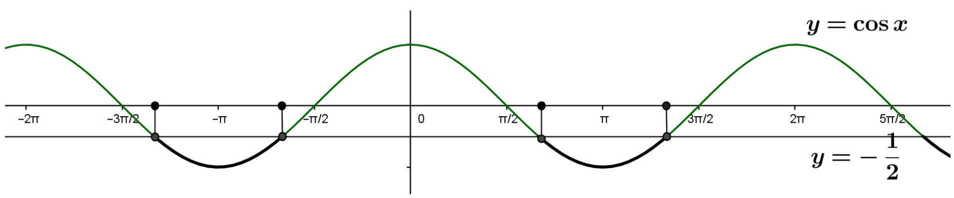
Primer 10. *Rešiti nejednačinu* $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

Rešenje. I ova nejednačina najlakše se rešava uz pomoć trigonometrijskog kruga. Sa slike 62 se vidi da je zadovoljavaju svi uglovi x za koje važi $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.



Slika 62: Rešavanje trigonometrijske nejednačine $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

Ako se posmatraju grafici funkcija $y = \cos x$ i $x = -\frac{1}{2}$, rešenje nejednačine su apscise tačaka koje pripadaju delu kosinusoide koji se nalazi ispod prave $y = -\frac{1}{2}$ (slika 63), kao i apscise presečnih tačaka kosinusoide i prave.

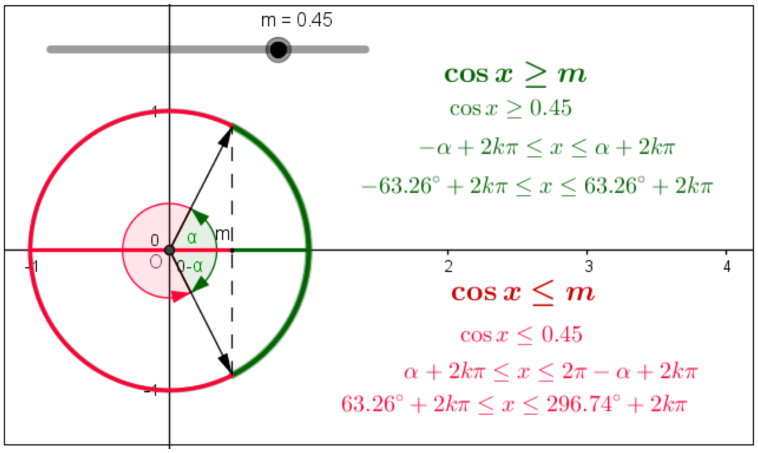


Slika 63: Grafičko rešavanje trigonometrijske nejednačine $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

$\triangle$

Slično kao kod nejednačine sa sinusom, nejednačina $\cos x > m$ nema rešenja ako je $m \geq 1$, dok je skup njenih rešenja ceo skup $\mathbb{R}$ ako je $m < -1$. Nejednačina $\cos x < m$ nema rešenja ako je $m \leq -1$, dok je skup njenih rešenja ceo skup $\mathbb{R}$ ako je $m > 1$.

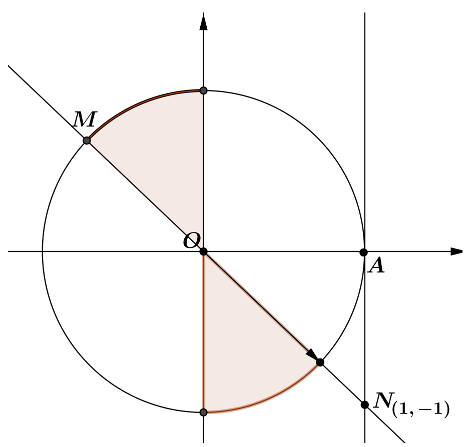
Kao i za sinus, elektronska lekcija sadrži i aplet koji prikazuje rešenja nejednačina $\cos x \leq m$ i $\cos x \geq m$, za $-1 \leq m \leq 1$, prikazan na slici 64. Vrednost promenljive m menja se pomeranjem klizača.



Slika 64: Rešavanje nejednačina $\cos x \leq m$ i $\cos x \geq m$

Primer 11. *Rešiti nejednačinu* $\tan x \leq -1$.

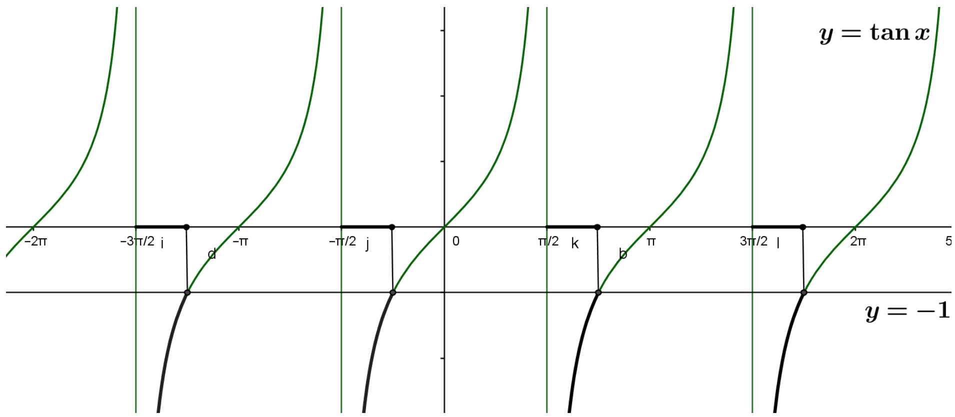
Rešenje. Na tangensnoj osi treba uočiti tačku N koja odgovara broju -1. Svi uglovi x za koje prava OM, gde je $\overrightarrow{OM}$ radijus vektor ugla x, seče tangensnu osu u tački N i tačkama koje se nalaze niže od tačke N zadovoljavaju nejednačinu $\tan x \leq -1$. $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ na intervalu $(0, \pi)$. Sa slike 65 se vidi da je $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4}$. Kako je tangens π periodična funkcija, rešenja date nejednačine su svi uglovi x koji zadovoljavaju $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, za $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Slika 65: Rešavanje trigonometrijske nejednačine $\tan x \leq -1$

I ova nejednačina se može rešiti grafički, crtanjem grafika funkcija $y = \tan x$ i $y = -1$. Rešenja su poluotvoreni intervali na x osi prikazani na slici 66.

△



Slika 66: Rešavanje trigonometrijske nejednačine $\tan x \leq -1$

5.8 Sinusna i kosinusna teorema

Sinusna i kosinusna teorema omogućavaju rešavanje trouglova koji nisu pravougli. Značajne su i jer se pomoću njih mogu dokazati jos nekoliko važnih teorema.

Formulacije sinusne i kosinusne teoreme ne zavise od toga da li je trougao oštrougli ili tupougli, ali se dokaz izvodi za više različitih slučajeva, što će biti pokazano.

5.8.1 Sinusna teorema

Sinusna teorema se najčešće koristi za rešavanje trougla kada su data dva njegova ugla i stranica, ili dve stranice i ugao naspram jedne od njih.

Teorema 5. *Dužine stranica svakog trougla proporcionalne su sinusima naspramnih uglova.*

Dokaz. Neka je ABC proizvoljan trougao i neka je:
$|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle CBA = \beta$, $\measuredangle ACB = \gamma$.

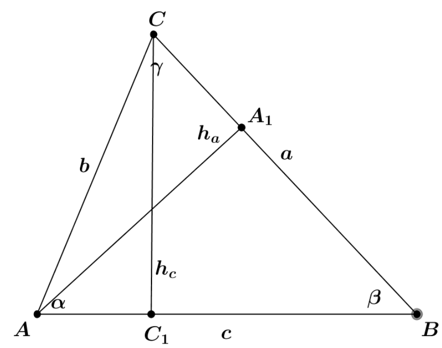
$|AA_1| = h_a$ je visina iz temena A, a $|CC_1| = h_c$ visina iz temena C.

1) Neka je, prvo, ABC oštrougli trougao kao na slici 67. Iz pravouglih trouglova ACC_1 i BCC_1 sledi:

$$|CC_1| = h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

odakle je:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$



Slika 67: Slika uz dokaz sinusne teoreme u slučaju oštrouglog trougla

Iz trouglova ABA_1 i ACA_1 sledi:

$$|AA_1| = h_a = c\sin\beta = b\sin\gamma,$$

tj.

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Na osnovu prethodnog dobija se:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2) Neka je sada trougao ABC tupougli i neka je, npr. $\alpha > 90^\circ$ (slika 68). Na osnovu ranijih oznaka iz pravouglih trouglova ACC_1 i BCC_1 sledi:

$$|CC_1| = h_c = b\sin\alpha_1 = a\sin\beta,$$

gde je α_1 spoljašnji ugao kod temena A. Kako je $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$, to je:

$$\sin\alpha_1 = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

pa važi:

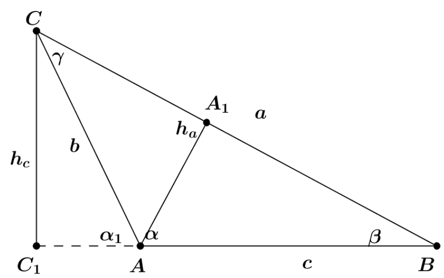
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Važi i

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

pa i u ovom slučaju dobijamo da je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

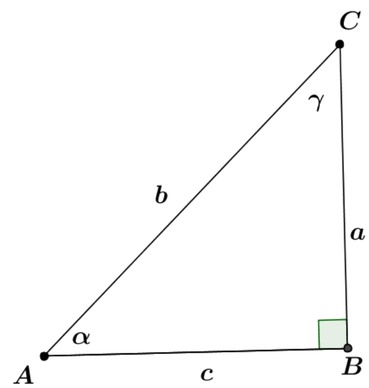


Slika 68: Slika uz dokaz sinusne teoreme u slučaju tupouglog trougla

3) Relacija

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

važi i u slučaju pravouglog trougla, jer je $\sin\beta = 1$, $\sin\alpha = \frac{a}{b}$, a $\sin\beta = \frac{c}{b}$ (slika 69).



Slika 69: Slika uz dokaz sinusne teoreme u slučaju pravouglog trougla

□

Može se odrediti i koeficijent proporcionalnosti, što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 6. *Odnos dužine stranice i sinusa naspramnog ugla trougla je konstantan i jednak je dužini prečnika kružnice opisane oko tog trougla.*

Dokaz. Neka je k kružnica opisana oko trougla ABC i $AC = b$ stranica trougla naspram koje leži oštar ugao, kao na slici 70. Ako se sa C' obeleži tačka dijametralno suprotna temenu A , tačke C i C' će ležati na istom luku AB jer je ugao ACB oštar. Na osnovu teoreme o periferijskim uglovima sledi da je

$\measuredangle AC'B \cong \measuredangle ACB = \gamma$. Sa druge strane, $\measuredangle ABC'$ je periferijski ugao nad prečnikom $AC' = 2R$ kružnice k i kao takav je prav. Iz pravouglog trougla ABC' tada sledi:

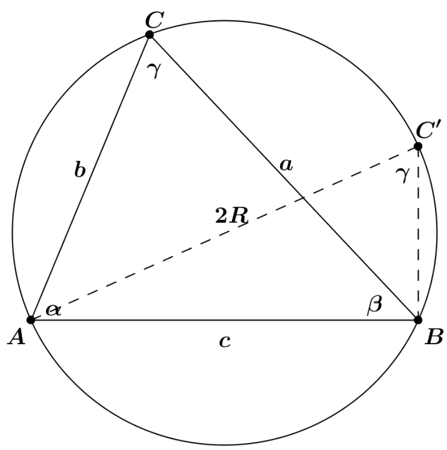
$$\sin\gamma = \frac{|AB|}{|AC'|} = \frac{c}{2R},$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pa važi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

□



Slika 70: Određivanje koeficijenta proporcionalnosti

Zadatak 18. *Rešiti trougao ABC ako je poznato $a = 12cm$, $\beta = 45°$ i $\gamma = 60°$.*

Rešenje. $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 45° - 60° = 75°$.
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, tj. $\frac{12}{\sin 75°} = \frac{b}{\sin 45°}$,
$\frac{12}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, odakle se dobija da je $b = \frac{12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{24}{\sqrt{3}+1}$.
Racionalisanjem se dobija $b = 12(\sqrt{3}-1)$.
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, tj. $\frac{12(\sqrt{3}-1)}{\sin 45°} = \frac{c}{\sin 60°}$,
$\frac{12(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, odakle se dobija da je $c = \frac{12\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$.
Racionalisanjem se dobija $c = 6\sqrt{2}(3-\sqrt{3})$. △

5.8.2 Kosinusna teorema

U slučajevima kada sinusna teorema ne može da se primeni, često rešenje daje kosinusna teorema. Kosinusna teorema se koristi za rešavanje trougla kada je dat ugao i njime zahvaćene stranice, ili kada su poznate sve tri stranice.

Teorema 7. *Kvadrat jedne stranice trougla jednak je zbiru kvadrata druge dve stranice umanjenom za dvostruki proizvod tih stranica i kosinusa njima zahvaćenog ugla.*

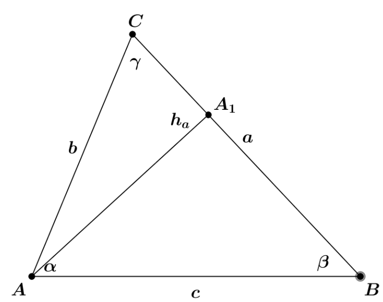
Dokaz. Neka je ABC proizvoljan trougao i neka je $h_a = |AA_1|$ visina iz temena A. Dovoljno je razmotriti sledećih pet slučajeva:

1) $\gamma < 90°$ i $\beta < 90°$ (slika 71). Tada je tačka A_1 između B i C. Iz pravouglog trougla ABA_1 po Pitagorinoj teoremi sledi:

$$|AB|^2 = |AA_1|^2 + |BA_1|^2,$$

tj.

$$c^2 = h_a^2 + |BA_1|^2. \tag{2}$$



Slika 71: Slika uz dokaz kosinusne teoreme u slučaju kada je $\gamma < 90°$ i $\beta < 90°$

Iz pravouglog trougla ACA_1 sledi:

$$b^2 = h_a^2 + |CA_1|^2. \tag{3}$$

Oduzimanjem se dobija:

$$c^2 - b^2 = |BA_1|^2 - |CA_1|^2. \tag{4}$$

Kako je $|BA_1| = a - |CA_1|$ i $|CA_1| = b\cos\gamma$, onda je:

$$c^2 - b^2 = (a - b\cos\gamma)^2 - b^2\cos^2\gamma,$$

odnosno:

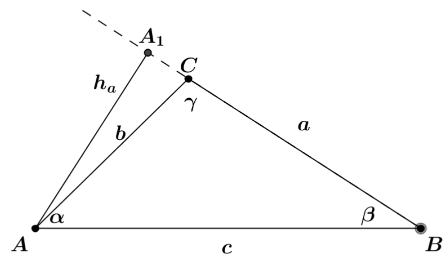
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{5}$$

2) $\gamma = 90°$. Tada je $\cos\gamma = 0$ i prethodna formula se svodi na Pitagorinu teoremu.

3) $\gamma > 90°$ (slika 72). U ovom slučaju je C između A_1 i B. Relacije 2, 3 i 4 i dalje važe. Sada je $|BA_1| = a + |CA_1|$ i $|CA_1| = b\cos\gamma_1$, gde je γ_1 spoljašnji ugao kod temena C. Poznato je da je $\gamma_1 = 180° - \gamma$, pa je $\cos\gamma_1 = -\cos\gamma$ i iz 4 sledi:

$$c^2 - b^2 = (a + b(-\cos\gamma))^2 - (b(-\cos\gamma))^2 = (a - b\cos\gamma)^2 - b^2\cos^2\gamma,$$

odakle se opet dobija 5.



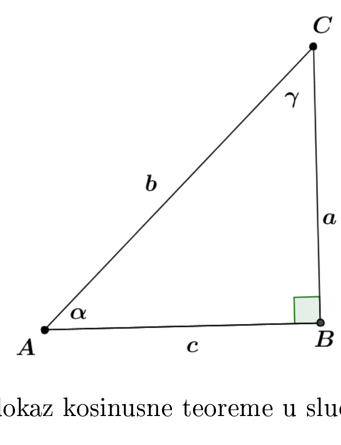
Slika 72: Slika uz dokaz kosinusne teoreme u slučaju kada je $\gamma > 90°$

4) $\beta = 90°$ (slika 73). U ovom slučaju je $A_1 = B$, $h_a = |AB| = c$, $|BA_1| = 0$, $|CA_1| = a$, $\cos\gamma = \frac{a}{b}$. Primenom Pitagorine teoreme dobija se:

$$c^2 = b^2 - a^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{a}{b},$$

tj.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Slika 73: Slika uz dokaz kosinusne teoreme u slučaju kada je $\beta = 90°$

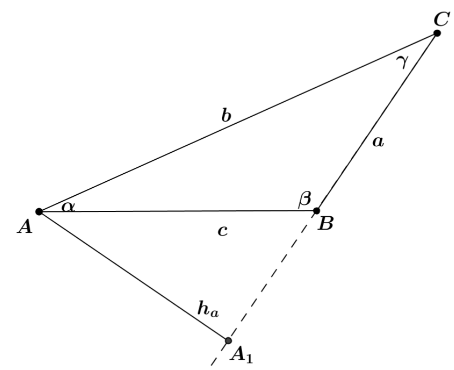
5) $\beta > 90^\circ$ (slika 74). Sada je tačka B između C i A_1. Relacije 2, 3 i 4 ostaju u važnosti. Kako je

$$|BA_1| = |CA_1| - a$$

i kako je

$$(|CA_1| - a)^2 = (a - |CA_1|)^2,$$

formula 5 se izvodi kao u slučaju 1).



Slika 74: Slika uz dokaz kosinusne teoreme u slučaju kada je $\beta > 90^\circ$

Na sličan način se pokazuje da važe i formule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta.$$

□

Zadatak 19. *Dužine stranica trougla ABC su $a = 2cm$ i $b = 4cm$. Odredi dužinu stranice c ako je poznato da je $\gamma = 120^\circ$.*

Rešenje. Primenom kosinusne teoreme dobija se:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120^\circ = 4 + 16 - 16\cdot(-\frac{1}{2}) = 28$$

tj.
$c = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}cm.$ △

Zadatak 20. *Rešiti trougao ABC ako je poznato $a = 2cm$, $b = 1cm$ i $c = \sqrt{3}cm$.*

Rešenje. Primenom kosinusne teoreme dobija se:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1 + 3 - 4}{2\sqrt{3}} = 0,$$

odakle sledi da je $\alpha = 90^\circ$.
Na sličan način se određuje i ugao β:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 3 - 1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pa je $\beta = 30^\circ$.
Treći ugao se može naći iz veze $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$:

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 60^\circ.$$

$\triangle$

6 Primena trigonometrije

Trigonometrija nalazi primene u matematici (analizi, geometriji, itd.), ali i u drugim naukama kao što su fizika, astronomija, geodezija, arhitektura... Primenu ilustruju sledeće teoreme i primeri.

6.1 Primena u matematici

Postoji više načina za izračunavanje površine trougla. Sa prvim se učenici sreću još u šestom razredu osnovne škole, kada uče da površinu izračunaju uz pomoć dužine stranice i odgovarajuće visine. U srednjoj školi, to znanje se proširuje. Zahvaljujući trigonometriji, dokazuje se da se površina trougla može izračunati ako su poznate dve stranice i ugao između njih, ili ako su poznate dužine sve tri stranice. To pokazuje sledeća teorema, u kojoj je data i veza između površine trougla i poluprečnika opisane kružnice.

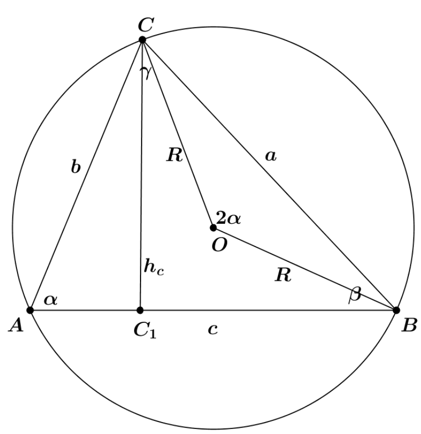
Teorema 8. *Neka su a, b, c stranice, α, β, γ njima odgovarajući uglovi trougla ABC, čiji je poluobim $s = \frac{a+b+c}{2}$, površina P i poluprečnik opisanog kruga R. Tada važi:*

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$R = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{abc}{4P}.$$

Dokaz. Površina datog trougla ABC je $P = \frac{1}{2}ch_c$, a u pravouglom trouglu C_1BC važi $h_c = a\sin\beta$, pa je $P = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ (slika 75).



Slika 75: Izračunavanje površine trougla

Na sličan način izvodi se da je $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, kao i da je $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Prema kosinusnoj teoremi je $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, odakle se dobija da je:

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}}{2ac},$$

pa je:

$$P = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ac\frac{\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}}{2ac} = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(2ac-(a^2+c^2-b^2))(2ac+(a^2+c^2-b^2))} = \frac{1}{4}\sqrt{(b^2-(a-c)^2)((a+c)^2-b^2)} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Neka je O centar opisane kružnice oko trougla ABC. Tada je $\measuredangle BOC = 2\measuredangle BAC = 2\alpha$ (centralni i periferijski nad istim lukom). Primenom kosinusne teoreme na trougao BOC dobija se:

$$a^2 = R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos 2\alpha = 2R^2(1-cos2\alpha) = 2R^2(1-(cos^2\alpha-\sin^2\alpha) =$$

$$2R^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = 2R^2\cdot 2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\alpha,$$

odakle sledi da je:

$$R = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Kako je poznato da je:

$$P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

tj.

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc},$$

dobija se:

$$R = \frac{abc}{4P}.$$

$\square$

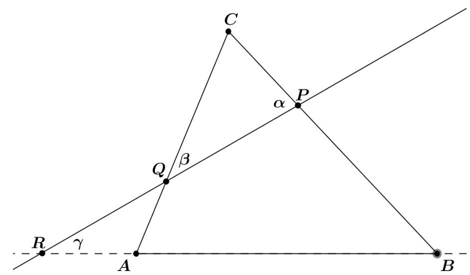
Pomoću trigonometrije mogu se dokazati i Menelajeva[12] i Ptolomejeva teorema.

[12] Menelaj Aleksandrijski, grčki astronom i matematičar

Teorema 9. *Neka su P, Q, R, redom, tačke u kojima neka prava seče stranice BC, AC, AB (ili njihove produžetke) trougla ABC. Tada je:*

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1.$$

Dokaz. Neka je $\measuredangle CPQ = \alpha$, $\measuredangle CQP = \beta$, $\measuredangle PRB = \gamma$ (slika 76). Na osnovu sinusne teoreme je:



Slika 76: Menelajeva teorema

$$\frac{RB}{PB} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \frac{PC}{QC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \frac{QA}{RA} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Množenjem ovih jednakosti se dobija Menelajeva teorema. □

Teorema 10. *Proizvod dijagonala tetivnog četvorougla jednak je zbiru proizvoda naspramnih stranica.*

Dokaz. Neka su a, b, c i d stranice, a m i n dijagonale tetivnog četvorougla (slika 77). Iz kosinusne teoreme je:

$$n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\phi,$$

a takođe i:

$$n^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\pi - \phi).$$

Množenjem prve jednakosti sa bc, a druge sa ad i njihoovim sabiranjem dobija se:

$$n^2(bc + ad) = bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2),$$

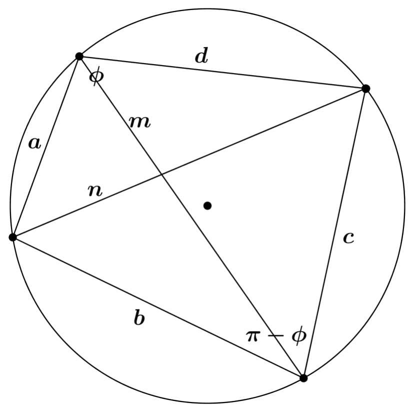
pa je:

$$n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}.$$

Analogno se dobija:

$$m^2 = \frac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

Množenjem poslednje dve relacije dobija se Ptolomejeva teorema. □

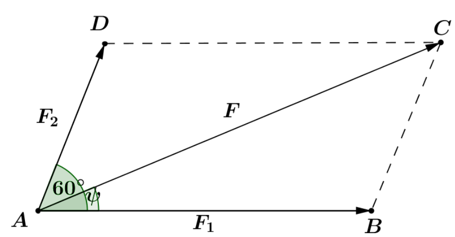


Slika 77: Ptolomejeva teorema

6.2 Primena u fizici

Trigonometrija veliku primenu nalazi i u mnogim granama fizike. Primena u fizici pokazana je na srednjoškolskom primeru.

Primer 12. *Na tačku A deluju dve sile $F_1 = 6N$ i $F_2 = 4N$ čiji pravci obrazuju ugao od $60°$. Odrediti pravac u kojem će se tačka A kretati i veličinu rezultujuće sile.*



Slika 78: Primena u fizici

Tačka A će se kretati po pravcu rezultujuće sile F koja se dobija po pravilu paralelograma. Ako se sa $|F_1|$ i $|F_2|$ označe intenziteti sila F_1 i F_2, tada je $|F_1| = |AB| = |CD|$, $|F_2| = |AD| = |BC|$. Iz paralelograma $ABCD$ sledi da je $\measuredangle ABC = 120°$. Po kosinusnoj teoremi je:

$$|F|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos 120°,$$

$$|F|^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 76,$$

$$|F| = \sqrt{76} \approx 8,7.$$

Rezultujuća sila je $F \approx 8,7N$.
Ugao koji rezultujuća sila F obrazuje sa silom F_1 dobija se preko sinusne teoreme. Ako se sa ψ obeleži ugao BAC, tada je:

$$\sin \psi = \frac{|BC| \sin 120^\circ}{|AC|} \approx 0,4,$$

odakle je:

$$\psi \approx 23^\circ 30'.$$

Primeri su zasnovani na [1] gde se može naći još sličnih.

Pored matematike i fizike, trigonometrija se prožima i kroz mnoge druge nauke. Može se primeniti i u fizičkoj hemiji, geografiji, inženjerstvu, arhitekturi, muzici,... U mnogim stručnim školama znanje iz trigonometrije je neophodno da bi savladali gradivo stručnih predmeta (na primer građevinske konstrukcije, statika, u srednjim geodetskim i građevinskim školama)[8]. Posebno je značajna primena trigonometrije u astronomiji. U astronomiji se primenjuje sferna trigonometrija. Ona se u većini srednjih škola ne obrađuje. Više o sfernoj trigonometriji može se pročitati u [3].

7 Zaključak

Kvalitet nastave u velikoj meri zavisi od nastavnika. Od nastavnika se očekuje da svoj način predavanja prilagodi zahtevima savremenog društva, da motiviše učenike i olakša im razumevanje predviđenih sadržaja. Metode koje koristi mogu biti od velikog značaja pri usvajanju gradiva.

U radu je gradivo iz trigonometrije koje se obrađuje u srednjoj školi prikazano uz pomoć programskog paketa GeoGebra. Učenicima je omogućena vizuelizacija matematičkih sadržaja, što omogućava razumevanje teorije, ali i olakšava izradu zadataka što se na datim primerima može videti.

Rad je osmišljen kao dodatni materijal za predavanja iz trigonometrije u srednjoj školi. Elektronske lekcije su javno dostupne, učenici i nastavnici mogu da ih koriste. Elektronski materijali koji sadrže interaktivne aplete pokazuju koliko informacione tehnologije mogu da unaprede i olakšaju proces usvajanja gradiva. Neosporno je da ovakav način izlaganja uglavnom pozitivno utiče na motivaciju, a samim tim doprinosi unapređivanju i poboljšanju kvaliteta nastave matematike.

Literatura

[1] Stojanović V., Miličić P., Kadelburg Z., Boričić B., Matematika za prvi razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2006.

[2] Vojvodić G., Petrović V., Despotović R., Šešelja B., Matematika za drugi razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2006.

[3] Dugošija Đ., Ivanović Ž., Trigonometrija-udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd, Drugo, izmenjeno izdanje, 2006.

[4] Šuljić, Š., Radijani i stupnjevi na brojevnoj kružnici: http://tube.geogebra.org/material/simple/id/2008275, pristupljeno 17.02.2015.

[5] Vojvodić G., O trigonometriji: http://www.dms.rs/DMS/data/seminari/seminar2009/G.Vojvodic.pdf, pristupljeno 13.02.2016.

[6] Isajlović M., Elementarne funkcije-interaktivni nastavni materijal: http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml06068/, pristupljeno 17.03.2016.

[7] Marić M., Radović S., Radojičić M., Inovativni pristup nastavi matematike primenom elektronskih materijala za učenje: http://www.ftn.kg.ac.rs/konferencije/tio2014/PDF/50620Radojicic%20i%20d.pdf, pristupljeno 12.04.2016.

[8] Marić M., Jeretin M., Uticaj kolaborativnog učenja na postignuća učenika iz trigonometrije: http://www.ftn.kg.ac.rs/konferencije/tio2014/PDF/21220Maric,%20Jeretin.pdf, pristupljeno 13.04.2016.