Универзитет у Београду

Математички факултет

МРЕЖЕ ПАРТИЦИЈА И КОНГРУЕНЦИЈА АЛГЕБРИ

Мастер рад

студент: Данка Николић

ментор: доцент др Небојша Икодиновић

Београд, 2016.

Садржај

Предговор

Тема овог рада су мреже партиција и конгруенција алгебри.

Концепт мреже у математику је уведен крајем 19. века. Наиме, Чарлс Пирс и Ернст Шредер дошли су на идеју о овом појму док су изучавали аксиоматику Булове алгебре. Независно од њих, рад Ричарда Дедекинда на идеалима алгебарских бројева довео је до истог открића.

Оснивачем модерне теорије мрежа сматра се амерички математичар Герет Бирхоф (1911-1996). Он је 1940. године издао књигу Теорија мрежа, која је настала као резултат рада Бирхофа, али и Дилворта, Фринка, Фон Нојмана, Ореа, Меклејна и других математичара, средњих и касних 30-их година прошлог века. Друго издање ове књиге изашло је из штампе 1948. године, а треће 1967.

Мреже играју важну улогу у савременој математици: алгебри, пројективној геометрији, теорији скупова и тако даље. Као посебно значајне издвајају се мреже партиција (релација еквиваленције), које у извесном смислу "покривају" све мреже: Свака мрежа се може потопити у мрежу партиција неког скупа. У структуралним истраживањима алгебри и варијетета важно место заузимају мреже конгруенција алгебри. Наиме, испоставља се да је свака алгебарска мрежа (комплетна, компактно-генерисана мрежа) изоморфна мрежи конгруенција неке алгебре.

Рад се састоји из три поглавља.

У првом поглављу биће представљене основне теорије мрежа: две еквивалентне дефиниције мрежа - мреже као алгебре и мреже као уређени скупови; комплетне, алгебарске, модуларне, дистрибутивне мреже итд.

У другом поглављу детаљно ћемо обрадити мреже партиција и анализирати неке мреже партиција над скуповима са малим бројем елемената.

У трећем поглављу изложићемо укратко основне појмове и концепте универзалне алгебре, посебно конгруенције алгебри. Биће анализиране мреже конгруенција неких специјалних класа алгебри: групе, прстени, модули.

Посебно се захваљујем свом ментору, доценту др Небојши Икодиновићу, за пружену помоћ приликом писања овог рада, као и члановима комисије: др Предрагу Тановићу и др Зорану Петровићу.

1. Уводни појмови

1.1. Појам мреже

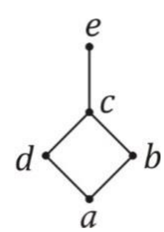
Мреже као посебна врста уређења

Дефиниција 1. Парцијално уређен скуп $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ називамо мрежно уређеним скупом, или краће мрежом, ако сваки двоелементан скуп $\{x, y\} \subseteq L$ има инфимум и супремум у L.

Пример 1. [Неке коначне мреже]

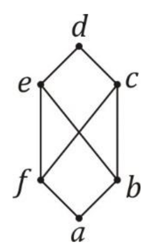
Уобичајено је да се коначни парцијално уређени скупови, а самим тим и коначне мреже, визуелно представљају специјалним графовима, односно такозваним Хасеовим дијаграмима: елементи мреже $\boldsymbol{L}$ су представљени тачкама у равни и две тачке су спојене линијом ако и само ако представљају елементе $x, y \in L$ такве да је $x < y$ (тј. $x \leq y$ и $x \neq y$) и не постоји $z \in L$ такав да је $x < z < y$. Ако ово важи, онда за y кажемо да покрива x, и означавамо са $x -\!< y$. Притом се тачка која представља y налази изнад тачке која представља x. Хасеове дијаграме користићемо за приказивање коначних мрежа.

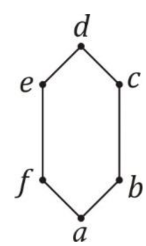
1) Уређење скупа $\{a, b, c, d, e\}$ приказано на слици испод јесте мрежа.



На пример, $\sup\{b, d\} = c, \inf\{b, d\} = a$, $\sup\{a, b\} = b$, $\inf\{a, b\} = a, \ldots$

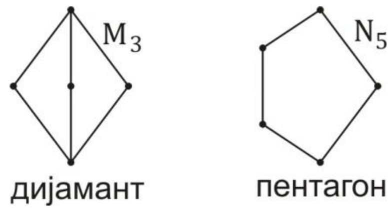
2) Уређење скупа $\{a, b, c, d, e, f\}$ приказано на слици доле лево није мрежа, будући да, на пример, не постоји супремум скупа $\{f, b\}$.





Насупрот томе, уређење истог скупа $\{a, b, c, d, e, f\}$ приказано на другој слици јесте мрежа.

3) Наредне две слике дефинишу две важне мреже – дијамант и пентагон.



Пример 2.

1) Сваки линеарно уређен скуп је мрежа, јер ако је $x \leq y$, онда је $\inf\{x,y\} = x$ и $\sup\{x,y\} = y$.

2) Ако је | релација дељивости на $\mathbb{N}^+ = \{1, 2,\ 3, \ldots\}$, онда је $(\mathbb{N}^+, |)$ мрежа, при чему је $\inf\ \{m,n\} = \mathrm{nzd}\ (m,n)$ и $\sup\ \{m,n\} = \mathrm{nzs}\ (m,n)$.

3) Нека је S произвољан скуп и $P(S)$ његов партитивни скуп. Тада је $(P(S), \subseteq)$ мрежа: $\inf\ \{A,B\} = A \cap B$ и $\sup\ \{A,B\} = A \cup B$, за све $A, B \subseteq S$.

Пример 3. [Мреже подгрупа]

Нека је G група и $S(G)$ скуп свих подгрупа од G. Тада је $(S(G), \subseteq)$ мрежа за све групе G, јер за $H, K \in S(G)$ важи:

$$\inf\{H,K\} = H \cap K, \quad \sup\{H,K\} = < H \cup K >,$$

где је $< H\ \cup K >$ подгрупа од G генерисана са $H \cup K$.

Погледајмо како изгледају мреже подгрупа неких конкретних група.

1) Одредимо мрежу подгрупа групе симетрија правоугаоника. Осим идентичне трансформације, правоугаоник има још само три симетрије: две осне рефлексије (у односу на осе које су симетрале наспрамних страница) и једну централну рефлексију (у односу на центар правоугаоника). Јасно је да композиција те две осне симетрије даје централну. Означимо ову групу и њене елементе са

$$V_4 = \{1, a, b, c\},$$

где је са 1 означена идентична трансформација, a, b су осне рефлексије, а c централна рефлексија. Приметимо да важи:

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1,$$

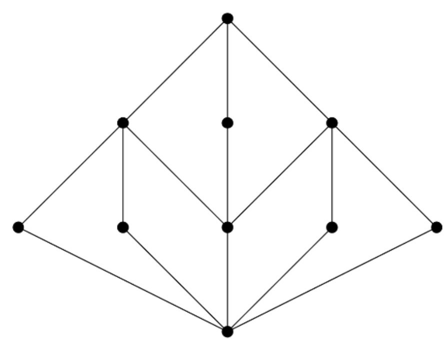
$$ab = ba = c, bc = cb = a, ca = ac = b.$$

Дакле, добили смо комутативну групу реда 4 у којој су сви елементи реда 2 осим јединице. Називамо је Клајнова група и означавамо са V_4. Она има 3 подгрупе изоморфне са Z_2. Интересантно је уочити да је мрежа $S(V_4)$ заправо дијамант.

2) Нека је D_4 група симетрија квадрата, $|D_4| = 8$. Опишимо мрежу $S(D_4)$. D_4 чине: 4 осне симетрије, централна симетрија (ово су елементи реда 2), ротације око центра квадрата за $\pm\frac{\pi}{2}$ (елементи реда 4) и идентичко пресликавање. Јасно је да имамо тачно 5 подгрупа реда 2. Значи, треба одредити подгрупе реда 4 и описати њихове релације са подгрупама реда 2. Тврдимо да постоје тачно 3 подгрупе од D_4 реда 4.

Подгрупа реда 4 може бити или циклична или Клајнова. Али, свака осна симетрија са централном симетријом генерише исту подгрупу као и та осна симетрија са својим ортогоналним паром, стога постоје две Клајнове подгрупе од D_4. Чине их пар ортогоналних осних симетрија, централна симетрија и идентичко пресликавање.

Хасеов дијаграм мреже $S(D_4)$ изгледа овако:



Пример 4. [Мрежа идеала]

Ако је R прстен, а $I(R)$ скуп свих његових идеала, тада је, као у Примеру 3), $(I(R), \subseteq)$ мрежа. Наиме, за $I_1, I_2 \in I(R)$ важи:

$$\inf\{I_1, I_2\} = I_1 \cap I_2, \quad \sup\{I_1, I_2\} = \{i_1 + i_2 : i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\}.$$

О важним примерима мрежа – мрежама партиција и мрежама конгруенција алгебри – биће речи у наредним поглављима.

<u>Мреже као алгебре</u>

Означимо мрежу $(L, \leq)$ са $\boldsymbol{L}$. Уобичајене ознаке за елементе $\inf\{x, y\}$ и $\sup\{x, y\}$ мреже $\boldsymbol{L}$ су $x \wedge y$ и $x \vee y$, редом. Како су они одређени једнозначно за све $x, y \in L$, на L су дефинисане две бинарне операције $\wedge$ и $\vee$. Другим речима, свакој мрежи $(L, \leq)$ можемо придружити алгебарску структуру $(L, \wedge, \vee)$ коју чине две бинарне операције $\wedge$ и $\vee$ дефинисане са:

$$x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{x, y\} \text{ и } x \vee y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{x, y\}.$$

Основне особине операција $\wedge$ и $\vee$ наведене су у наредној теореми.

Теорема 1. Нека је $(L, \leq)$ мрежа. Тада за све $x, y, z \in L$ важи:

1) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$;
2) $x \wedge x = x \vee x = x$ (идемпотентност);
3) $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$ (комутативност);
4) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (асоцијативност);
5) $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ (апсорптивност).

Доказ.

1) Јасно, из $x \leq y$ непосредно следи да је $\inf\{x, y\} = x$, $\sup\{x, y\} = y$. Остале импликације су очигледне.
2) За подскуп $\{x\} \subseteq L$ тривијално важи $\inf\{x\} = \sup\{x\} = x$;
3) Комутативност је очигледно задовољена, будући да је $\sup\{x, y\} = \sup\{y, x\}$, као и $\inf\{x, y\} = \inf\{y, x\}$;
4) Докажимо да је $\inf\{\inf\{x, y\}, z\} = \inf\{x, \inf\{y, z\}\}$. Како је
$$\inf\{\inf\{x, y\}, z\} \leq \inf\{x, y\} \leq x,$$
и из $\inf\{\inf\{x, y\}, z\} \leq \inf\{x, y\} \leq y$ и $\inf\{\inf\{x, y\}, z\} \leq z$ следи
$$\inf\{\inf\{x, y\}, z\} \leq \inf\{y, z\},$$
закључујемо да је $\inf\{\inf\{x, y\}, z\}$ доње ограничење скупа $\{x, \inf\{y, z\}\}$, па важи $\inf\{\inf\{x, y\}, z\} \leq \inf\{x, \inf\{y, z\}\}$. На исти начин доказујемо да важи и $\inf\{x, \inf\{y, z\}\} \leq \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$, одакле следи тражена једнакост.
Аналогно се доказује једнакост $\sup\{\sup\{x, y\}, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.
5) Докажимо да је $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$. Из $x \leq x$ и $x \leq \sup\{x, y\}$ следи да је x доње ограничење скупа $\{x, \sup\{x, y\}\}$, па важи $x \leq \inf\{x, \sup\{x, y\}\}$. Из очигледне неједнакости $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} \leq x$, следи тражена једнакост.
Аналогно се доказује да је $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$. □

Теорема 2. Ако су на неком скупу L дефинисане операције $\wedge$ и $\vee$ које задовољавају услове 2)-5) из претходне теореме, као и бинарна релација $\leq$ дата са:

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \wedge y = x,$$

онда је $(L, \leq)$ мрежа.

Доказ. Нека је $(L, \wedge, \vee)$ алгебра која задовољава услове теореме. Покажимо да је $\leq$ релација поретка на скупу L. За све $x, y, z \in L$ важи:

$x \leq x$ јер је $x \wedge x = x$ (рефлексивност);

$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x \wedge y = x,\ y \wedge x = y \Rightarrow x = y$ (антисиметричност);

$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \wedge y = x,\ y \wedge z = y \Rightarrow x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z \Rightarrow x \leq z$ (транзитивност).

Сада покажимо да је $x \vee y$ супремум за x, y. Важи $x, y \leq x \vee y$ јер је $x \wedge (x \vee y) = x$ и $y \wedge (x \vee y) = y$. Нека је $x \leq u, y \leq u$. Тада је $x \wedge u = x, y \wedge u = y$, па је $u \vee x = u = u \vee y$, одакле следи

$$u = u \vee x \vee u \vee y = x \vee y \vee u \vee u = (x \vee y) \vee u,$$

односно $(x \vee y) \wedge u = x \vee y$, $x \vee y \leq u$, па је $x \vee y$ заиста најмање горње ограничење. Аналогно се доказује да је $x \wedge y$ инфимум за $\{x, y\}$. ☐

Према Теореми 2 оправдано је да сваку алгебру $(L, \wedge, \vee)$, са две бинарне операције $\wedge$ и $\vee$, које задовољавају услове 2)-5) Теореме 1, такође називати мрежом.

Примећујемо да се мреже могу дефинисати на два начина: као уређени скупови и као алгебре. Према Теореми 1 свакој мрежи $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ придружујемо одговарајућу алгебру $\boldsymbol{L}^{\text{alg}} = (L, \wedge, \vee)$, а према Теореми 2 свакој алгебри $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee)$, чије операције задовољавају услове 2)-5) Теореме 1, придружујемо мрежу $\boldsymbol{L}^{\text{ord}} = (L, \leq)$.

Није тешко уочити да су наведена придруживања међусобно инверзна:

- Ако је уређење $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ мрежа, онда је $\left(\boldsymbol{L}^{\text{alg}}\right)^{\text{ord}} = \boldsymbol{L}$**;**
- Ако је алгебра $\boldsymbol{L} = (L,\ \wedge,\ \vee)$ мрежа, онда је $\left(\boldsymbol{L}^{\text{ord}}\right)^{\text{alg}} = \boldsymbol{L}$**.**

Запазимо да је дефиниција мрежа као алгебри симетрична у односу на замену симбола $\wedge$ и $\vee$. Наиме, ако је $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee)$ мрежа, тада је и $\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{\partial}} = (L, \vee, \wedge)$ мрежа коју зовемо дуал од $\boldsymbol{L}$. Слично принципу дуалности за уређене скупове, може се формулисати Принцип дуалности за мреже:

Ако је неко тврђење T тачно за све мреже, онда је и тврђење T^{∂} које се добија из T узајамном заменом $\wedge$ и $\vee$, односно $\leq$ и $\geq$, такође тачно за све мреже.

<u>Изоморфне мреже</u>

Дефиниција 2. Дате су две мреже $\boldsymbol{L_1} = (L_1, \leq_1)$ и $\boldsymbol{L_2} = (L_2, \leq_2)$.

1) Функција $\varphi : L_1 \to L_2$ је монотона (чува поредак) уколико за све $x, y \in L_1$ важи

$$x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y).$$

2) Бијекција $\varphi : L_1 \to L_2$ је изоморфизам (у ознаци $\varphi :\ \boldsymbol{L_1} \cong \boldsymbol{L_2}$) уколико за све $x, y \in L_1$ важи

$$x \leq_1 y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y).$$

Једноставно је наћи примере монотоних бијекција између два мрежно уређена скупа које нису изоморфизми.

Дефиниција 3. Дате су две мреже $\boldsymbol{L_1} = (L_1, \wedge_1, \vee_1)$ и $\boldsymbol{L_2} = (L_2, \wedge_2, \vee_2)$.

1) Функција $\varphi : L_1 \to L_2$ је хомоморфизам уколико за све $x, y \in L_1$ важи

$$\varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y),\ \varphi(x \vee_1 y) = \varphi(x) \vee_2 \varphi(y).$$

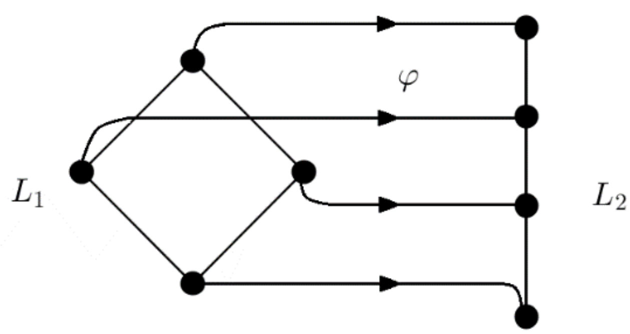
2) Бијективни хомоморфизам $\varphi : L_1 \to L_2$ је изоморфизам (у ознаци $\varphi :\ \boldsymbol{L_1} \cong \boldsymbol{L_2}$).

Теорема 3. Сваки хомоморфизам мрежа је монотона функција.

Доказ. Нека су $\boldsymbol{L_1} = (L_1, \wedge_1, \vee_1)$ и $\boldsymbol{L_2} = (L_2, \wedge_2, \vee_2)$ две мреже и $\varphi : L_1 \to L_2$ хомоморфизам међу њима. Означимо са $\leq_i$ одговарајуће уређење мреже $\boldsymbol{L_i}$, $i = 1, 2$. Треба доказати да за све $x, y \in L_1$ важи $x \leq_1 y \Rightarrow \varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$.

Ако је $x \leq_1 y$, онда је $x = x \wedge_1 y$, па је $\varphi(x) = \varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y)$, одакле следи да је $\varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$, што је и требало доказати. □

Да монотоно пресликавање не мора бити хомоморфизам показује наредни пример.



Теорема 4.

1) Ако $\varphi : (L_1, \leq_1) \cong (L_2, \leq_2)$, онда $\varphi : (L_1, \leq_1)^{\mathrm{alg}} \cong (L_2, \leq_2)^{\mathrm{alg}}$.

2) Ако $\varphi : (L_1, \wedge_1, \vee_1) \cong (L_2, \wedge_2, \vee_2)$, онда $\varphi : (L_1, \wedge_1, \vee_1)^{\mathrm{ord}} \cong (L_2, \wedge_2, \vee_2)^{\mathrm{ord}}$.

Доказ.

$1) \Longrightarrow 2)$: Нека је $x, y \in L_1$. Да бисмо доказали да је, на пример, $\varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y)$, треба показати да је $\varphi(x \wedge_1 y)$ инфимум за скуп $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$. Како је $x \wedge y \leq_1 x$ и $x \wedge y \leq_1 y$, а φ монотона функција, то је $\varphi(x \wedge_1 y) \leq_2 \varphi(x)$ и $\varphi(x \wedge_1 y) \leq_2 \varphi(y)$, то јест $\varphi(x \wedge_1 y) \leq_2 \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y)$.

Претпоставимо сада да је за неко $a \in L_2$, $a \leq_2 \varphi(x)$ и $a \leq_2 \varphi(y)$. Пошто је и φ^{-1} монотона функција, следи да је $\varphi^{-1}(a) \leq_1 x$ и $\varphi^{-1}(a) \leq_1 y$, што значи да је $\varphi^{-1}(a) \leq_1 x \wedge_1 y$, одакле се добија $a \leq_2 \varphi(x \wedge_1 y)$. Дакле, $\varphi(x \wedge_1 y)$ је највеће доње ограничење за $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$.

Дуално се показује да је $\varphi(x \vee_1 y) = \varphi(x) \vee_2 \varphi(y)$.

$2) \Longrightarrow 1)$: Нека је $x \leq_1 y$ за неке $x, y \in L_1$. Тада је $x \wedge_1 y = x$, па је $\varphi(x) = \varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y)$, што значи да је $\varphi(x) \leq_2 \varphi(y)$, то јест φ је монотона функција.

Пођимо сада од претпоставке да је $a \leq_2 b$ за неке $a, b \in L_2$, при чему је $x = \varphi^{-1}(a)$, $y = \varphi^{-1}(b)$. Знамо да је

$$\varphi(x \wedge_1 y) = \varphi(x) \wedge_2 \varphi(y) = a \wedge_2 b = a,$$

из чега следи

$$\varphi^{-1}(a) \wedge_1 \varphi^{-1}(b) = x \wedge_1 y = \varphi^{-1}(\varphi(x \wedge_1 y)) = \varphi^{-1}(a),$$

односно $\varphi^{-1}(a) \leq_1 \varphi^{-1}(b)$. Стога је и φ^{-1} монотона функција. $\square$

Према претходној теореми, два мрежно уређена скупа су изоморфна ако и само ако су изоморфне одговарајуће алгебре.

<u>Подмреже</u>

Дефиниција 4. Нека је $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee)$ мрежа. За мрежу $\boldsymbol{L_1} = (L_1, \wedge_1, \vee_1)$ кажемо да је подмрежа мреже $\boldsymbol{L}$, у ознаци $\boldsymbol{L_1} \leq \boldsymbol{L}$, ако је $L_1 \subseteq L$ и операције $\wedge_1, \vee_1$ су рестрикције операција $\wedge, \vee$ на L_1. Уобичајено је да се операције у подмрежи обележавају исто као и у самој мрежи.

Пример 5. [Мреже нормалних подгрупа]

Мрежа $N(G)$ нормалних подгрупа групе G јесте једна подмрежа мреже $S(G)$, јер ако су N_1 и N_2 нормалне подгрупе од G, онда су и $N_1 \cap N_2$ и $\langle N_1, N_2 \rangle = N_1 N_2$ такође нормалне подгрупе од G.

Пример 6. [Интервали] За мрежу $\boldsymbol{L}$ и $x, y \in L$ дефинишемо интервал одређен са x и y на следећи начин:

$$[x, y] = \{z \in L : x \leq z \leq y\}.$$

Јасно је да интервал увек дефинише подмрежу дате мреже $\boldsymbol{L}$.

Идеали

Дефиниција 5. $I \subseteq L$ се назива идеалом мреже $\boldsymbol{L}$ ако је $I \neq \emptyset$ и:

1) за све $x, y \in I$ је $x \vee y \in I$,
2) за све $x \in I$ и $a \in L$ је $x \wedge a \in I$.

Очигледно, услов 2. еквивалентан је следећем:

2') за све $x \in I$ и $c \leq x$ важи $c \in I$.

Дефиниција 6. Идеале облика $(a] = \{x \in L : x \leq a\}$ зовемо главним идеалима.

Дефиниција 7. Идеал I мреже $\boldsymbol{L}$ је прост ако за све $x, y \in L$, такве да $x \wedge y \in I$, важи да је $x \in I$ или $y \in I$.

Дефиниција 8. За $F \subseteq L$ кажемо да је филтер мреже $\boldsymbol{L}$ ако је $F \neq \emptyset$ и:

3) за све $x, y \in F$ је $x \wedge y \in F$,
4) за све $x \in F$ и $a \in L$ је $x \vee a \in F$.

Поново, услов 4. еквивалентан је са:

4') за све $x \in F$ и $c \geq x$ важи $c \in F$.

Дефиниција 9. Филтре облика $[a) = \{x \in L : x \geq a\}$ називамо главним филтрима.

Дефиниција 10. Филтер $F \subseteq L$ је ултрафилтер мреже $\boldsymbol{L}$ ако за све $x, y \in L$, такве да $x \vee y \in F$, важи да је $x \in F$ или $y \in F$.

Јасно, и идеали и филтри дате мреже чине њене подмреже.

1.2. Модуларне и дистрибутивне мреже

Теорема 5. Нека је $\boldsymbol{L}$ произвољна мрежа.

1) [Модуларна неједнакост] За све $x, y, z \in L$ важи:

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

2) [Дистрибутивне неједнакости] За све $x, y, z \in L$ важи:

(1) $(x \wedge y) \vee z \leq (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

(2) $(x \vee y) \wedge z \geq (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Доказ. 1) У мрежи $\boldsymbol{L}$ важе неједнакости:

$$x \leq x \vee y,$$

$$y \wedge z \leq y \leq x \vee y,$$

Одатле следи да је $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$. Такође, јасно је да важи и $y \wedge z \leq z$, што нам заједно са претпоставком $x \leq z$ даје $x \vee (y \wedge z) \leq z$. Отуда добијамо тражени закључак.

2) У свакој мрежи важе следеће неједнакости:

$$z \leq x \vee z,$$

$$z \leq y \vee z.$$

Одатле добијамо $z \leq (x \vee z) \wedge (y \vee z)$. Такође, приметимо да важи и:

$$x \wedge y \leq x \leq x \vee z,$$

$$x \wedge y \leq y \leq y \wedge z,$$

одакле следи $x \wedge y \leq (x \vee z) \wedge (y \vee z)$. Зато је испуњена неједнакост (1), док се неједнакост (2) доказује дуално. ☐

<u>Модуларне мреже</u>

Дефиниција 11. Мрежа $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee)$ је модуларна ако за све $x, y, z \in L$ важи:

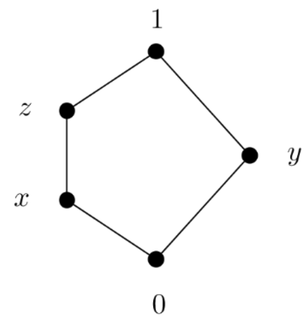
$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Према Теореми 5. 1) мрежа $\boldsymbol{L}$ је модуларна ако за све $x, y, z \in L$ важи:

$$x \leq z \Rightarrow (x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z).$$

Пример 7.

1) Мрежа $N(G)$ нормалних подгрупа групе G је модуларна. Наиме, за произвољне три нормалне подгрупе A, B, C групе G, такве да је $A \leq C$, важи $AB \cap C \leq A(B \cap C)$. Одавде директно следи да је мрежа подгрупа $S(G)$ Абелове групе G модуларна.
2) Мрежа подмодула произвољног модула је модуларна.
3) Из чињенице да је сваки прстен модул над самим собом и из претходног примера следи да је мрежа свих идеала датог прстена такође модуларна.
4) Нека је мрежа N_5 дата дијаграмом:



Ова мрежа није модуларна јер је $x < z$, али $x\vee(y\wedge z) = x$, док је $(x\vee y)\wedge z = z$.

Запажа се следеће: Ако се пентагон може потопити у мрежу $\boldsymbol{L}$, тада $\boldsymbol{L}$ није модуларна мрежа. Штавише, важи и обрнуто.

Теорема 6. [Дедекинд] Мрежа $\boldsymbol{L}$ је модуларна ако и само ако не садржи пентагон као подмрежу.

Доказ*.* Смер ($\Rightarrow$) је већ показан. Докажимо сада смер ($\Leftarrow$). Претпоставимо да $\boldsymbol{L}$ није модуларна мрежа. Тада постоје елементи $x, y, z \in L$ такви да је $x \leq z$ и $x\vee(y\wedge z) < (x\vee y)\wedge z$. Очигледно, елементи $y\wedge z,\ x\vee(y\wedge z),\ (x\vee y)\wedge z,\ x\vee z$ чине ланац од 4 елемента. Заиста, ако би било $y\wedge z = x\vee(y\wedge z)$, тада следи $x \leq y\wedge z \leq y,\ \ x\vee y = y$, па је

$$x\vee(y\wedge z) = y\wedge z = (x\vee y)\wedge z,$$

што је у контрадикцији са претпоставком. Слично, не може бити ни $(x\vee y)\wedge z = x\vee z$. Сада покажимо да овај четвороелементни ланац заједно са y чини подмрежу пентагон. Једноставно се доказује да y не може бити једнак ниједном од уочена четири елемента. Такође, важе следеће једнакости:

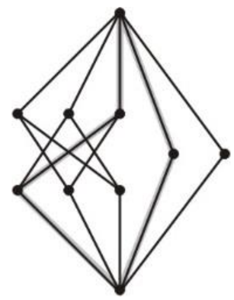
$$\begin{gathered} y\wedge\big(x\vee(y\wedge z)\big) = y\wedge z, \\ y\wedge\big((x\vee y)\wedge z\big) = y\wedge z, \\ y\vee\big(x\vee(y\wedge z)\big) = x\vee y, \\ y\vee\big((x\vee y)\wedge z\big) = x\vee y. \end{gathered}$$

Друга и трећа једнакост су јасне (последице су асоцијативности и закона апсорпције), док прва и четврта једнакост имају сличан доказ, па докажимо само прву:

$$\begin{gathered} y \geq y\wedge z, x\vee(y\wedge z) \geq y\wedge z \Rightarrow y\wedge\big(x\vee(y\wedge z)\big) \geq y\wedge z, \\ x \leq z\ \Rightarrow y\wedge\big(x\vee(y\wedge z)\big) \leq y\wedge\big(z\vee(y\wedge z)\big) = y\wedge z. \end{gathered}$$

□

Пример 8. Мрежа приказана на слици испод није модуларна, јер садржи пентагон као подмрежу.



Модуларне мреже је међу првима изучавао Дедекинд почетком овог века. Наравно, први резултати о модуларним мрежама добијени су апстракцијом одговарајућих особина мреже нормалних подгрупа дате групе. Једна од таквих теорема је и следећа.

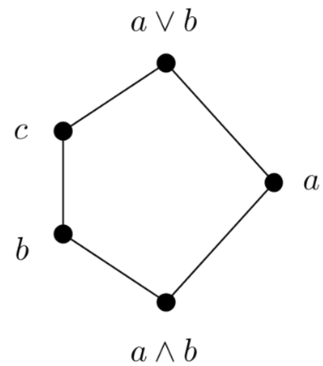
Теорема 7. [Дедекинд]

1) Нека је $\boldsymbol{L}$ модуларна мрежа и $a, b \in L$. Тада је пресликавање φ_a, дато са $\varphi_a(x) = x \wedge a$, изоморфизам интервала $[b, a \vee b]$ и $[a \wedge b, a]$. При томе је пресликавање ψ_b, дато са $\psi_b(x) = x \vee b$, инверзно пресликавању φ_a.
2) Ако $\boldsymbol{L}$ није модуларна мрежа, онда постоје елементи $a, b \in L$ тако да пресликавање φ_a из тачке 1) није изоморфизам интервала $[b, a \vee b]$ и $[a \wedge b, a]$.

Доказ.

1) Желимо да докажемо да је φ_a бијекција и хомоморфизам мрежа. Заиста, за $x \in [a \wedge b, a]$ важи $\varphi_a\big(\psi_b(x)\big) = (x \vee b) \wedge a = x \vee (a \wedge b) = x$. Слично је и за $x \in [b, a \vee b]$, $\psi_b\big(\varphi_a(x)\big) = x$. Дакле, φ_a и ψ_b су узајамно инверзна пресликавања и стога су бијекције.
   Осим тога, φ_a је хомоморфизам, јер је:
   $\varphi_a(x_1 \wedge x_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge a = (x_1 \wedge a) \wedge (x_2 \wedge a) = \varphi_a(x_1) \wedge \varphi_a(x_2)$,
   $$\begin{aligned} \varphi_a(x_1 \vee x_2) &= (x_1 \vee x_2) \wedge a = \Big(\big((x_i \wedge a) \vee b\big) \vee \big((x_i \wedge a) \vee b\big)\Big) \wedge a && [(x_i \wedge a) \vee b = x_i] \\ &= \big((x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) \vee b\big) \wedge a \\ &= (x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) \vee (a \wedge b) && [\text{модуларност; } (x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) \le a] \\ &= (x_1 \wedge a) \vee (x_2 \wedge a) = \varphi_a(x_1) \wedge \varphi_a(x_2) && [x_i \wedge a \ge a \wedge b] \end{aligned}$$

2) Ако мрежа $\boldsymbol{L}$ није модуларна, тада садржи подмрежу изоморфну са пентагоном N_5. Означимо елементе те подмреже као на следећој слици:



Тада је $\varphi_a\,(b) = a \wedge b = \varphi_a\,(c)$, па φ_a није инјективно пресликавање. □

Према Хауздорфовом принципу максималности, свака мрежа има максималан ланац. Ако је $\boldsymbol{L}$ ограничена мрежа, тада сви максимални ланци почињу са 0 и завршавају се са 1. Није тешко дати пример мреже у којој за свако $n \geq 1$ постоји максималан ланац дужине n. Међутим, то се не може догодити у модуларним мрежама. Та особина је прво примећена прво у мрежама нормалних подгрупа (Жордан-Хелдер-ова теорема) и сматра се да је то навело Дедекинда да формулише општи концепт модуларности.

Теорема 8. [Жордан-Дедекинд]

Нека је $\boldsymbol{L}$ модуларна мрежа, а x, y два њена елемента, таква да је $x < y$ и која су повезана следећим ланцем:

$$x = x_0 -\!< x_1 -\!< \cdots -\!< x_n = y.$$

Тада за сваки ланац $x = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = y$ важи $k \leq n$. Специјално, сви максимални ланци који повезују x и y су исте дужине.

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 1$ је $x -\!< y$ и по дефиницији релације $-\!<$ не постоји z тако да је $x < z < y$, па је ово најдужи ланац који повезује x и y.

За $n > 1$ разликујемо два случаја:

1. $x_1 \leq y_1$. Тада посматрајмо ланац: $x_1 \leq y_1 < \cdots < y_k = y$. Како између x_1 и x_n имамо максимални ланац дужине $n - 1$, то је у случају $x_1 = y_1$, $k - 1 \leq n - 1$, док је у случају $x_1 < y_1$, $k \leq n - 1$, оба пута по индуктивној претпоставци. Значи, $k \leq n$.
2. $\neg(x_1 \leq y_1)$. Тада је, јасно, $x_1 \wedge y_1 < x_1$, али је и $x \leq x_1 \wedge y_1$, па добијамо да је $x_0 \leq x_1 \wedge y_1 < x_1$. Стога је, због $x_0 -\!< x_1, x = x_0 = x_1 \wedge y_1$. По претходној теореми је $[x, x_1] \cong [y_1, x_1 \vee y_1]$, па као последицу имамо да је $y_1 -\!< x_1 \vee y_1$. Посматрајмо сада произвољни ланац од $x_1 \vee y_1$ до y, нека је он дужине l. Продужимо га надоле новим чланом x_1. Тиме је добијен ланац дужине $l + 1$. Међутим, од x_1 до y постоји максималан ланац дужине $n - 1$, па по

индуктивној претпоставци важи $l+1 \leq n-1, l \leq n-2$. Зато постоји максималан ланац

$$x_1 \vee y_1 = z_0 -\!\!< \cdots -\!\!< z_s = y,\ \ s \leq n-2.$$

Тада је, међутим, $y_1 -\!\!< x_1 \vee y_1 -\!\!< z_1 -\!\!< \cdots -\!\!< z_s = y$ максималан ланац, па је зато по индуктивној претпоставци за ланце између y_1 и y, $k-1 \leq s+1 \leq n-1$, односно $k \leq n$. $\square$

Интересантно је упоредити Жордан-Дедекиндову теорему и теорему Жордан-Хелдера за композиционе низове група. За сваку групу G, $N(G)$ је модуларна мрежа, па за њу важи теорема Жордан-Дедекинда. На први поглед чини се да је Жордан-Хелдерова теорема заправо специјални случај теореме Жордан-Дедекинда. Али, обратимо пажњу: код нормалних низова група тражимо да је $H_i \ll H_{i+1}$, тј. да је свака група у низу нормална у наредном члану низа, а не у целој групи.

Заправо, теорема Жордан-Хелдера важи не само за групе, већ и за друге класе алгебри, нпр. прстене у односу на њихове идеале и модуле у односу на њихове подмодуле. Та аналогна тврђења добијамо управо применом теореме Жордан-Дедекинда јер знамо да идеали датог прстена, односно подмодули датог модула образују модуларне мреже.

Дистрибутивне мреже

Дефиниција 12. Мрежа $\boldsymbol{L} = (L, \wedge, \vee)$ је дистрибутивна ако за све $x, y, z \in L$ важи:

д1)$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,

д2)$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Довољно је да важи само један од услова д1), д2).

Теорема 9. Нека је $\boldsymbol{L}$ мрежа. Тада за све $x, y, z \in L$ важи једнакост д1) ако и само ако за све $x, y, z \in L$ важи једнакост д2).

Доказ. д1) ⇒ д2):

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = \big(x \vee (y \wedge z)\big) \wedge \big(z \vee (y \wedge z)\big) = \big(x \vee (y \wedge z)\big) \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge z = (x \vee y) \wedge z.$$

Импликација д2) ⇒ д1) се доказује дуално. $\square$

Теорема 10. Свака дистрибутивна мрежа је модуларна.

Доказ. Нека су x, y, z три елемента дистрибутивне мреже, такви да је $x \leq z$. Тада је:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$. $\square$

Пример 9.

1) Сваки ланац је дистрибутивна мрежа.
2) Свака подмрежа од $(P(S), \cap, \cup)$ је дистрибутивна, где је S произвољан скуп.
3) Мрежа дијамант M_3 није дистрибутивна.
4) У општем случају мрежа $N(G)$ нормалних подгрупа групе G не мора бити дистрибутивна. То показује, на пример, Клајнова група V_4. Наиме, група V_4 је комутативна, па је $N(V_4) = S(V_4) \cong M_3$. С друге стране, $N(Z_n) = S(Z_n)$ јесте дистрибутивна мрежа.

Лема 1. Мрежа $\boldsymbol{L}$ је дистрибутивна акко за све $x, y, z \in L$ важи

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x).$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је $\boldsymbol{L}$ је дистрибутивна мрежа. Тада за произвољне $x, y, z \in L$ имамо:

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) &= [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z] \vee [(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge x] \\ &= [(x \vee y) \wedge z] \vee [x \wedge (y \vee z)] \text{ (апсорпција)} \\ &= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\ &= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $\boldsymbol{L}$ мрежа која задовољава дати идентитет. Докажимо најпре да је $\boldsymbol{L}$ модуларна мрежа. Нека је $x \leq z$. Тада је

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee x = x \vee (y \wedge z),$$

као и

$$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge z = (x \vee y) \wedge z,$$

одакле следи да је $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Најзад, за произвољне $x, y, z \in L$ имамо:

$$\begin{aligned}x \wedge (y \vee z) &= x \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) \quad \text{(апсорпција)} \\ &= x \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)] \quad \text{(претпостављени идентитет)} \\ &= [x \wedge (y \wedge z)] \vee (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \quad \text{(модуларност; } (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq x) \\ &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{(јер је } x \wedge y \wedge z \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)).\end{aligned}$$

□

Теорема 11. Мрежа $\boldsymbol{L}$ је дистрибутивна ако и само ако не садржи подмреже изоморфне са пентагоном и дијамантом.

Доказ. Неопходност услова је очигледна, јер је подмрежа дистрибутивне мреже такође дистрибутивна, а већ је показано да то није случај ни са дијамантом ни са пентагоном.

Претпоставимо да $\boldsymbol{L}$ не садржи ни дијамант ни пентагон као подмреже. Пошто $\boldsymbol{L}$ не садржи пентагон као подмрежу, према Теореми 6, $\boldsymbol{L}$ мора бити модуларна мрежа. Ако $\boldsymbol{L}$ није дистрибутивна мрежа, онда према Леми 1 постоје $x, y, z \in L$ такви да је

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) < (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x).$$

(Приметимо да увек важи $(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) \leq (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$.)

Нека је

$m = (x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$,

$M = (x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$,

$a = m\vee(x\wedge M) = (m\vee x)\wedge M$ (последња једнакост следи из модуларности, јер је $m < M$),

$b = m\vee(y\wedge M) = (m\vee y)\wedge M,$

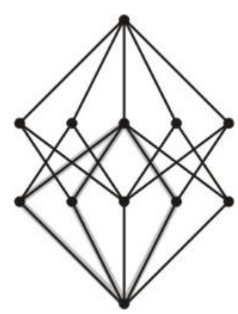
$c = m\vee(z\wedge M) = (m\vee z)\wedge M.$

Није тешко показати да су m, a, b, c, M међусобно различити елементи и да је

$$a\wedge b = b\wedge c = c\wedge a = m \text{ и } a\vee b = b\vee c = c\vee a = M,$$

што значи да ови елементи образују дијамант супротно претпоставци. □

Пример 10. Мрежа приказана на слици испод није дистрибутивна, јер садржи дијамант као подмрежу.



<u>Булове мреже</u>

Дефиниција 13. Мрежа $\boldsymbol{L}$ је ограничена ако има најмањи и највећи елемент.

Уколико постоје, највећи и најмањи елементи мреже су јединствени и означавамо их редом са 1 и 0.

Није тешко приметити да је свака коначна мрежа ограничена. Такође, сваки идеал ограничене мреже садржи 0, док сваки филтер ограничене мреже мора садржати 1.

Лема 2. У ограниченој мрежи $\boldsymbol{L}$ за све $x \in L$ важи:

$$x \vee 0 = x,\ x \wedge 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \wedge 1 = x.$$

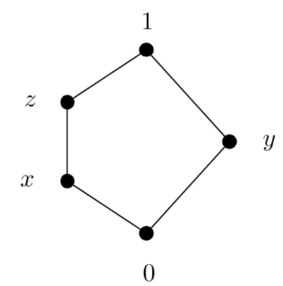
Дефиниција 14. Дате су две мреже $\boldsymbol{L_1} = (L_1, \wedge_1, \vee_1)$ и $\boldsymbol{L_2} = (L_2, \wedge_2, \vee_2)$. Утапање мреже $\boldsymbol{L_1}$ у $\boldsymbol{L_2}$ је сваки инјективни хомоморфизам $\varphi : L_1 \to L_2$.

Теорема 12. Свака мрежа се може утопити у неку ограничену мрежу.

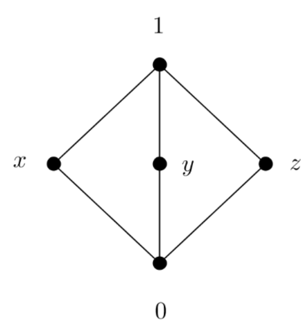
Доказ. Дата је мрежа $\boldsymbol{L}$. Додајмо јој два нова елемента 0 и 1, тако да за све $x \in L$ важи $0 < x < 1$. Сада је парцијално уређен скуп $(L \cup \{0,1\}, \leq)$ мрежа, што се лако проверава. □

Дефиниција 15. Елемент $y \in L$ произвољне ограничене мреже $\boldsymbol{L}$ је комплемент елемента $x \in L$ ако је $x \wedge y = 0,\ x \vee y = 1$.

Пример 11. У ограниченим мрежама могу постојати елементи који немају комплемент. Пример таквих мрежа су ланци. Такође, може се десити да уочени елемент има више комплемената. Тако су у пентагону x, z комплементи за y.



Пример мреже M_3, дате на следећој слици, показује да постоје модуларне мреже у којима неки елемент има више комплемената.



Теорема 13. У ограниченој дистрибутивној мрежи сваки елемент има највише један комплемент.

Доказ. Нека су y, z комплементи за $x \in L$. Тада је:

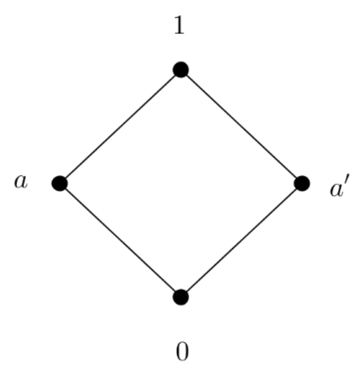
$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee z) = (y \wedge x) \vee (y \wedge z) = 0 \vee (y \wedge z) = y \wedge z,$$

односно $y \leq z$. Аналогно се добија и $z \leq y$, па је $y = z$. $\square$

Дефиниција 16. За мрежу кажемо да је комплементирана ако сваки њен елемент има комплемент.

Дефиниција 17. Булова мрежа је комплементирана дистрибутивна мрежа.

Свака Булова мрежа $(L, \wedge, \vee)$ одређује Булову алгебру $(L, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, где за операцију $'$ треба узети пресликавање које сваком елементу из L додељује његов комплемент. Наравно, свака Булова алгебра одређује и једну Булову мрежу. Иако су Булове мреже и Булове алгебре у суштини "исте", оне се другачије понашају у односу на подалгебре. Подмреже Булових мрежа, у општем случају, не морају бити Булове мреже. На пример, мрежа дата на наредној слици јесте Булова, али има две подмреже које нису Булове.



Код Булових алгебри таква ситуација није могућа. Ако је $\boldsymbol{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ Булова алгебра, онда је B_1 носач подалгебре од $\boldsymbol{B}$ ако је $\emptyset \neq B_1 \subseteq B$ и B_1 чини Булову алгебру у односу на рестрикције одговарајућих операција из $\boldsymbol{B}$. Наиме, непразан подскуп $B_1 \subseteq B$ је носач подалгебре од $\boldsymbol{B}$ ако и само ако је затворен у односу на операције алгебре $\boldsymbol{B}$.

1.3. Комплетне и алгебарске мреже

Раније смо видели да све подгрупе групе G формирају мрежу $S(G)$. Међутим, та мрежа има једну додатну особину коју немају све мреже. Наиме, из чињенице да је пресек сваке фамилије подгрупа групе G поново подгрупа од G, следи да сваки скуп елемената у $S(G)$ има инфимум, а самим тим и супремум. Ова особина одликује и друге алгебарске структуре, односно мреже њихових подалгебри. Изучавајући управо те мреже, тридесетих година прошлог века, Бирхоф је дошао до појма комплетне мреже.

Дефиниција 18. За уређен скуп $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ кажемо да је комплетан ако сваки подскуп $A \subseteq L$ има супремум и инфимум.

Очигледно, сваки комплетан уређен скуп је мрежа, док обрнуто не мора да важи, што се види на примеру мреже $(\mathbb{R}, \leq)$.

Дефиниција 19. Мрежу $\boldsymbol{L}$ која је комплетан уређен скуп називамо комплетном мрежом.

Теорема 14. Свака комплетна мрежа $\boldsymbol{L}$ је ограничена.

Доказ. Доказаћемо да је $\sup\emptyset$ најмањи елемент у $\boldsymbol{L}$. Нека је $y = \sup\emptyset$. По дефиницији супремума, за све $a \in \emptyset$ важи $a \leq y$ и за све $x \in L$ важи:

$$(\forall a)\big((a \in \emptyset \ \Rightarrow a \leq x) \Rightarrow y \leq x\big)$$

Како је $a \in \emptyset$ увек нетачно, добијамо да је $y = \sup\emptyset$ еквивалентно са $y \leq x$ за све $x \in L$, тј. да је y најмањи елемент у $\boldsymbol{L}$. Аналогно се показује да је $\inf\emptyset$ највећи елемент. Наравно, све горе показано важи због претпоставке да $\sup\emptyset$ и $\inf\emptyset$ постоје. ☐

Пример 12.

1) Свака коначна мрежа је комплетна.
2) $(P(S), \subseteq)$ је комплетна мрежа, где је S произвољан скуп.
3) За сваку групу G, $S(G)$ је комплетна мрежа. Наиме, за $\emptyset \neq F \subseteq S(G)$ важи:
$$\inf F = \bigcap F,$$
$$\sup F = \bigcap\{H \in S(G) \colon \bigcup F \subseteq H\}.$$

Теорема 15. За сваки уређен скуп $(A, \leq)$ следећи услови су еквивалентни:

1) $(A, \leq)$ је комплетна мрежа.
2) За све $B \subseteq A$ постоји $\inf B$.
3) За све $B \subseteq A$ постоји $\sup B$.

Доказ. Довољно је показати да су услови 2) и 3) еквивалентни. Како су импликације $2) \Rightarrow 3)$ и $3) \Rightarrow 2)$ дуалне, доказаћемо само прву од њих. Нека је $B \subseteq A$

и нека је C скуп свих горњих ограничења за B. По претпоставци, у A постоји елемент $\inf C = x$. Доказаћемо да је $x = \sup B$. Најпре, како је за све $b \in B, c \in C$, $b \leq c$, то је сваки елемент из B доње ограничење за C, па је $b \leq x$. Другим речима, x је горње ограничење за B. Ако је сада y неко произвољно горње ограничење за B, тада је $y \in C$, па је зато $x \leq y$. То значи да је x најмање горње ограничење за B.

$\square$

Последица 1. Нека је $(A, \leq)$ уређен скуп. Следећи услови су еквивалентни:

1) $(A, \leq)$ је комплетна мрежа.
2) $(A, \leq)$ има најмањи елемент и $\sup B$ за све $\emptyset \neq B \subseteq A$.
3) $(A, \leq)$ има највећи елемент и $\inf B$ за све $\emptyset \neq B \subseteq A$.

Теорема 16. Ако је $\boldsymbol{L}$ комплетна мрежа, онда свако монотоно пресликавање $f : L \to L$ има фиксну тачку.

Доказ. Нека је $S = \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$. Како $0 \in S$, скуп S је непразан. Нека је $a = \sup S$. Из услова монотоности следи: $x \leq f(x) \leq f(a)$, за сваки $x \in S$. Дакле, $a = \sup S \leq f(a)$. Опет на основу монотоности важи $f(a) \leq f\big(f(a)\big)$, па $f(a) \in S$, одакле следи да је $f(a) \leq a$. $\square$

Напомена. Важна последица претходне теореме јесте позната Кантор-Бернштајнова теорема: Ако су A и B скупови и $f : A \to B$ и $g : B \to A$ 1-1 пресликавања, онда постоји бијекција $h : A \to B$. Није тешко показати да је пресликавање $\varphi : P(A) \to P(A)$ дато са $\varphi(X) = A \setminus g\big[B \setminus f[X]\big]$ монотоно пресликавање комплетне мреже $(P(A), \subseteq)$ у себе, па према претходној теореми има фиксну тачку. Пресликавање h дефинисано је као f на C, а као g^{-1} на $A \setminus C$.

Комплетна мрежа може имати подмрежу која није комплетна. На пример, $(\mathbb{R}, \leq)$ није комплетна мрежа, али јесте подмрежа комплетне мреже $(\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \leq)$. Такође, може се десити да је подмрежа комплетне мреже опет комплетна мрежа, али да се супремуми и инфимуми у тој подмрежи не поклапају са супремумима и инфимумима целе мреже. Илуструјмо наведено следећим примером:

Пример 13. Нека је $\boldsymbol{L} = ([0,1], \leq)$ и $\boldsymbol{L_1} = ([0,0.5) \cup \{1\}, \leq)$. Тада је $\boldsymbol{L_1}$ заиста подмрежа од $\boldsymbol{L}$, која јесте комплетна мрежа, али је супремум скупа $[0,0.5)$ у $\boldsymbol{L}$ једнак 0.5, а у $\boldsymbol{L_1}$ једнак 1.

Дефиниција 20. Подмрежа $\boldsymbol{L_1}$ комплетне мреже $\boldsymbol{L}$ је њена комплетна подмрежа ако је за све $A \subseteq L_1$ важи $\sup A, \inf A \in L_1$.

Комплетне мреже обично настају на један типичан начин: као мреже затворених скупова за неки оператор затворења.

Дефиниција 21. Ако је A неки скуп, пресликавање $C: P(A) \to P(A)$ је оператор затворења на скупу A, ако за све $X, Y \subseteq A$ важи:

1. $X \subseteq C(X)$,
2. ако је $X \subseteq Y$, тада је $C(X) \subseteq C(Y)$,
3. $C(C(X)) = C(X)$.

За скуп $X \subseteq A$ кажемо да је затворен ако је $C(X) = X$.

Пример 14.

1) Нека $C(X)$ подгрупа неке групе G генерисана са $X \subseteq G$. Тада је C оператор затворења на G, а затворени скупови су подгрупе од G.
2) Дата је група G, и $C(X)$ њена нормална подгрупа генерисана са $X \subseteq G$. Поново, C је оператор затворења на G, чији су затворени скупови нормалне подгрупе од G.
3) Нека је R прстен и $C(X)$ идеал генерисан са $X \subseteq R$. Тада је C оператор затворења на R, при чему су затворени скупови идеали од R.
4) Нека је A произвољан скуп и $\mathcal{C}$ фамилија подскупова од A затворена за произвољне пресеке елемената из $\mathcal{C}$: ако $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$, онда $\bigcap\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, при чему подразумевамо да је $\bigcap \emptyset = U$. Тада је $C_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ дато са
$$C_{\mathcal{C}}(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}, \quad X \subseteq A,$$
оператор затворења на A.

Значај оператора затворења је у томе што њихови затворени скупови чине комплетне мреже. Али, важи чак и више од тога: све комплетне мреже настају на овај начин.

Теорема 17. Нека је C оператор затворења на скупу A. Тада је уређен скуп $(L_C, \subseteq)$ C-затворених скупова комплетна мрежа.

Доказ. Најпре, $C(A) = A$, па је A затворен скуп. Осим тога, приметимо да је пресек произвољне непразне фамилије C-затворених скупова C-затворен скуп. Заиста, ако су $\{A_i : i \in I, I \neq \emptyset\}$ затворени скупови и $X = \bigcap\{A_i : i \in I, I \neq \emptyset\}$, тада је за све $i \in I$, $C(X) \subseteq C(A_i) = A_i$, па је отуда, $C(X) \subseteq X$. Међутим, тада следи $C(X) = X$. Тврђење сада добијамо из Последице 1. □

Теорема 18. Нека је C оператор затворења на скупу A. Тада за сваку фамилију затворених скупова $\{A_i : i \in I\}$ важи:
$$\sup\{A_i : i \in I\} = C(\bigcup\{A_i : i \in I\}),$$
при чему је супремум узет у комплетној мрежи $(L_C, \subseteq)$.

Доказ. Јасно, ако је $Y = \bigcup\{A_i : i \in I\}$, тада $C(Y)$ јесте затворен скуп који је горње ограничење за фамилију $\{A_i : i \in I\}$. Претпоставимо сада да је Z затворен скуп који садржи све $A_i, i \in I$. Тада је $Y \subseteq Z$, па је $C(Y) \subseteq C(Z) = Z$. Тако, $C(Y)$ је заиста супремум за $\{A_i : i \in I\}$ у мрежи C-затворених скупова. ☐

Теорема 19. Свака комплетна мрежа је изоморфна са мрежом затворених скупова за неки оператор затворења.

Доказ. Нека је $\boldsymbol{L}$ комплетна мрежа. Дефинишимо оператор затворења C на L на следећи начин: ако је $X \subseteq L$, тада је $C(X) = \{a \in L : a \leq \sup X\}$, односно најмањи главни идеал мреже $\boldsymbol{L}$ који садржи X, $(\sup X]$. Јасно, затворени скупови овог оператора затворења су сви главни идеали мреже $\boldsymbol{L}$. Сада се лако показује да је пресликавање $x \in L \mapsto C(\{x\}) = (x]$ изоморфизам мреже $\boldsymbol{L}$ и мреже њених главних идеала. ☐

Наш наредни циљ је да опишемо мреже затворених скупова неких специфичних оператора затворења, што ће нас довести до појма алгебарских мрежа.

Пример 15.

1) Нека је G група и $C(X)$ њена подгрупа генерисана са $X \subseteq G$. Поред тога што је C оператор затворења на G који даје комплетну мрежу $S(G)$, приметимо да C има и следећу особину: за све $X \subseteq G$ је
$$C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X, Y \text{ је коначан}\}.$$
2) Нека је A произвољан скуп и $\mathcal{C}$ фамилија подскупова од A затворена за произвољне пресеке елемената из $\mathcal{C}$ и уније усмерених подфамилија од $\mathcal{C}$: ако је $\mathcal{D}$ усмерена подфамилија од $\mathcal{C}$ (за све $X, Y \in \mathcal{D}$ постоји $Z \in \mathcal{D}$ да је $X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$), онда $\bigcup\mathcal{D} \in \mathcal{C}$. Тада оператор затворења $C_{\mathcal{C}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ (Пример 14. 4), $C_{\mathcal{C}}(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$, $X \subseteq A$, задовољава исту особину као под 1).

Дефиниција 22. Оператор затворења $C : P(A) \to P(A)$ је алгебарски ако за све $X \subseteq A$ важи $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X, Y \text{ је коначан}\}$.

Напомена. Услов из Дефиниције 22 еквивалентан је следећем услову: за сваку усмерену фамилију $\mathcal{D}$ подскупова од A важи $C(\bigcup\mathcal{D}) = \bigcup\{C(Y) \mid Y \in \mathcal{D}\}$.

Дефиниција 23. Дата је мрежа $\boldsymbol{L}$.

1) Елемент $a \in L$ називамо компактним ако за све $A \subseteq L$, за које постоји $\sup A$, важи: ако је $a \leq \sup A$, тада постоји коначан $B \subseteq A$ тако да је $a \leq \sup B$.
2) Мрежа је компактно-генерисана ако је сваки елемент супремум компактних елемената.
3) Мрежа је алгебарска ако је комплетна и компактно-генерисана.

Пример 16.

1) Свака коначна мрежа је алгебарска.
2) Подгрупе и, респективно, нормалне подгрупе дате групе чине алгебарску мрежу.

3) Сви идеали датог прстена чине алгебарску мрежу.
4) Сви идеали, односно филтри дате мреже образују алгебарске мреже.
5) Мрежа $([0,1], \leq)$ није алгебарска јер осим елемента $x = 0$, ниједан њен елемент није компактан.

Термин "алгебарска мрежа" говори нам да ће управо ове мреже бити тражене мреже затворених скупова алгебарских оператора затворења.

Теорема 20. Нека је C алгебарски оператор затворења на скупу A. Тада је мрежа $\boldsymbol{L_C}$ његових затворених скупова алгебарска и компактни елементи у $\boldsymbol{L_C}$ су затворени скупови облика $C(X)$, где је подскуп $X \subseteq A$ коначан.

Доказ. Најпре ћемо показати да је затворен скуп $C(X)$ компактан ако и само ако је $X \subseteq A$ коначан подскуп. Тада из дефиниција алгебарског оператора затворења и алгебарске мреже, као и из Теореме 18, следи да је $\boldsymbol{L_C}$ алгебарска мрежа.

(⇒) Нека је затворен скуп $Z \subseteq A$ компактан. Како је, по Теореми 18, $Z = C(Z) = \sup\{C(\{z\}): z \in Z\}$, следи да је $Z \subseteq \sup\{C(\{x\}): x \in X\}$ за неки коначан подскуп $X \subseteq Z$. Међутим, супремум на десној страни је баш $C(X)$, што значи да је $X \subseteq Z \subseteq C(X)$. Како је Z затворен скуп, одавде лако следи да је $Z = C(X)$.

(⇐) Претпоставимо да је $Z = C(X)$ за неки коначан подскуп $X \subseteq A$ и нека је $\{A_i: i \in I\}$ произвољна фамилија C-затворених скупова, таква да је

$$Z \subseteq \sup\{A_i: i \in I\} = C(\bigcup\{A_i: i \in I\}).$$

Како је C оператор алгебарског затворења, то постоји коначан подскуп $Y \subseteq \{A_i: i \in I\}$ тако да је $Z \subseteq C(Y)$. Али, Y је тада садржано у некој коначној подфамилији од $\{A_i: i \in I\}$, рецимо $\{A_1, \dots, A_n\}$. Зато је $Z \subseteq \sup\{A_1, \dots, A_n\}$, па је Z компактан скуп. □

Дефиниција 24. Нека је C оператор затворења на скупу A и $Y = C(X)$ неки затворен скуп. Тада кажемо да X генерише Y. Y је коначно-генерисан ако постоји коначан скуп X који га генерише.

Напомена. У мрежи затворених скупова алгебарског оператора затворења, компактни елементи се поклапају са коначно-генерисаним елементима.

Теорема 21. Свака алгебарска мрежа изоморфна је са мрежом затворених скупова за неки алгебарски оператор затворења.

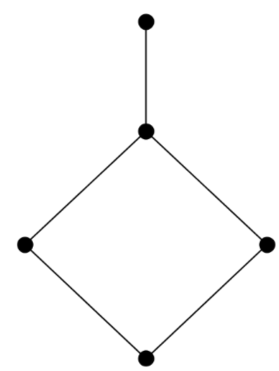
Доказ. Нека је $\boldsymbol{L}$ алгебарска мрежа и A скуп њених компактних елемената. Дефинишимо оператор затворења на A са

$$C(X) = \{a \in A: a \leq \sup X\},$$

где је $X \subseteq A$. Из дефиниције компактних елемената следи да је овај оператор затворења алгебарски. Како је $\boldsymbol{L}$ компактно-генерисана, лако се показује да је пресликавање $x \in L \mapsto \{b \in A : b \leq a\}$, при чему је наведени скуп затворен, тражени изоморфизам.

□

Пример 17. Уопште, поставља се питање да ли се свака алгебарска мрежа може представити као мрежа подгрупа неке групе. На пример, једноелементна мрежа је мрежа подгрупа тривијалне групе, а двоелементна мрежа је мрежа подгрупа групе Z_p, где је p прост број. Међутим, постоје алгебарске мреже које нису изоморфне мрежи подгрупа ниједне групе. Посматрајмо мрежу дату дијаграмом:



Ово није мрежа подгрупа ниједне групе. Наиме, ако је $S(G)$ коначна мрежа са јединственим непосредним претходником највећег елемента, тада је G циклична група: G има јединствену максималну подгрупу M, па је G генерисана произвољним елементом из $G \setminus M$. Међутим, тада је $S(G)$ ланац. Тиме добијамо читав низ примера коначних мрежа које се не могу представити као мреже подгрупа неке групе.

2. Мреже партиција

2.1 Релације еквиваленције и партиције

Познато је да релације еквиваленције (рефлексивне, симетричне и транзитивне бинарне релације) на неком скупу A можемо идентификовати са партицијама скупа A, тј. са фамилијама непразних подскупова од A таквим да су свака два члана фамилије дисјунктна, а унија свих чланова фамилије једнака је A. Заиста, свака релација еквиваленције одређује јединствену партицију коју чине класе еквиваленције. Такође, свака партиција одређује јединствену релацију еквиваленције, при чему су два елемента у релацији акко припадају истом члану партиције. Прецизније, ако је ρ релација еквиваленције на A, а a/ρ класа еквиваленције елемента a, тј.

$$a/\rho = \{b \in A : (a, b) \in \rho\},$$

тада је $A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}$ једна партиција скупа A. Партиција $\pi = \{A_i : i \in I\}$ скупа A одређује релацију $eqv(\pi)$ на следећи начин:

$$(x, y) \in \ eqv(\pi) \ \Leftrightarrow \ (\forall i \in I)(x \in A_i \ \Leftrightarrow y \in A_i).$$

Притом, важи $A/eqv(\pi) = \pi$ и $eqv(A/\rho) = \rho$.

У наредној леми наводимо неке основне особине релација еквиваленције које ћемо користити у наставку.

Лема 3. Нека су ρ_1 и ρ_2 релације еквиваленције на скупу A.

1) $\rho_1 \cup \rho_2$ је релација еквиваленције на A акко је $\rho_1 \cup \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2$.

2) $\rho_1 \circ \rho_2$ је релација еквиваленције на A акко је $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

3) Ако је $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$, онда је $\rho_1 \circ \rho_2$ најмања (у смислу инклузије) релација еквиваленције на A која садржи $\rho_1 \cup \rho_2$.

Лема 4. Нека је ρ_i, $i \in I$, фамилија релација еквиваленције на скупу A.

1) $\bigcap_{i \in I} \rho_i$ је релација еквиваленције на A.

2) Постоји најмања релација еквиваленције ρ на A која садржи $\bigcup_{i \in I} \rho_i$. Штавише, важи:

$$(*) \quad \rho = \bigcup\{\rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \dots \circ \rho_{i_k} \mid k \geq 0, i_1, \dots, i_k \in I\}.$$

Напомена. Композиција бинарних релација ρ и σ скупа A дефинисана је на следећи начин:

$$(x, y) \in \rho \circ \sigma \Leftrightarrow (\exists z \in A)\big((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma\big).$$

Једноставно се показује да је композиција асоцијативна операција скупа свих бинарних релација на A.

Доказ. 2) Скуп $\mathcal{E} = \{\theta \mid \theta \text{ је релација еквиваленције на } A \text{ и } \bigcup_{i \in I} \rho_i \subseteq \theta\}$ је непразан, јер пуна релација $A \times A$ припада $\mathcal{E}$. Тада је $\bigcap \mathcal{E}$, према 1), такође релација еквиваленције на A. Једноставно се уочава да је $\bigcap \mathcal{E}$ најмања релација еквиваленције која садржи $\bigcup_{i \in I} \rho_i$.

Да бисмо доказали други део тврђења, тј. једнакост $(*)$, приметимо најпре да за свако $i \in I$ важи

$$\rho_i \subseteq \sigma = \bigcup\{\rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \mid k \geq 0, i_1, \ldots, i_k \in I\},$$

одакле следи да је $\bigcup_{i \in I} \rho_i \subseteq \sigma$.

Покажимо да је σ релација еквиваленције.

Рефлексивност је очигледна.

Ако $(x, y) \in \sigma$, тада за неко $k \geq 0$ и неке $i_1, \ldots, i_k \in I$:

$$(x, y) \in \rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \cdots \circ \rho_{i_k},$$

па постоје $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1} \in A$ такви да:

$$(x, z_1) \in \rho_{i_1}, (z_1, z_2) \in \rho_{i_2}, \ldots, (z_{k-1}, y) \in \rho_{i_k}.$$

Како су $\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_k}$ релације еквиваленције, следи да

$$(y, z_{k-1}) \in \rho_{i_k}, \ldots, (z_2, z_1) \in \rho_{i_2}, (z_1, x) \in \rho_{i_1},$$

односно $(y, x) \in \rho_{i_k} \circ \cdots \circ \rho_{i_1} \subseteq \sigma$. Дакле, σ је симетрична релација.

Из $(x, y) \in \sigma$ и $(y, z) \in \sigma$ следи да за неке $k, \ell \geq 0$ и неке $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_\ell \in I$:

$$(x, y) \in \rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \text{ и } (y, z) \in \rho_{j_1} \circ \rho_{j_2} \circ \cdots \circ \rho_{j_\ell}.$$

Једноставно се уочава да

$$(x, z) \in \rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \cdots \circ \rho_{i_k} \circ \rho_{j_1} \circ \rho_{j_2} \circ \cdots \circ \rho_{j_\ell} \subseteq \sigma,$$

одакле следи да је σ транзитивна релација.

Најзад, ако је σ' релација еквиваленције на A таква да $\bigcup_{i \in I} \rho_i \subseteq \sigma'$, онда је и $\sigma \subseteq \sigma'$: ако $(x, y) \in \rho_{i_1} \circ \rho_{i_2} \circ \cdots \circ \rho_{i_k}$, за неко $k \geq 0$ и неке $i_1, \ldots, i_k \in I$, онда постоје $z_1, z_2, \ldots, z_{k-1} \in A$ такви да:

$$(x, z_1) \in \rho_{i_1}, (z_1, z_2) \in \rho_{i_2}, \ldots, (z_{k-1}, y) \in \rho_{i_k},$$

а самим тим и $(x, z_1) \in \sigma'$, $(z_1, z_2) \in \sigma'$, , … , $(z_{k-1}, y) \in \sigma'$, одакле због транзитивности релације σ' добијамо да $(x, y) \in \sigma'$. Овим је тврђење у потпуности доказано.

□

Означимо са $P(n)$ број свих партиција n-тоелементног скупа. Бројеви $P(n)$ се зову и Белови бројеви. Комбинаторном интерпретацијом добија се следећа рекурентна веза:

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(k).$$

Занимљиво је да су Белови бројеви заправо коефицијенти Тејлоровог реда у околини 0 у развоју функције $e^{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}$.

Притом, конвенцијом се уводи да је $P(0) = 1$. Првих 10 чланова овог низа су:

$$1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \dots$$

Белови бројеви могу се лако израчунати користећи такозвани Белов троугао, који формирамо на следећи начин:

1. У првом реду налази се само број 1.
2. Сваки наредни ред започињемо последњим десним елементом претходног реда.
3. Следећи елемент тог реда одређујемо као збир два броја, његовог претходника и елемента изнад тог претходника.
4. Понављамо поступак број 3. док сваки нови ред има за један број више него претходни ред.
5. Бројеви у првој колони дате троугаоне шеме представљају низ Белових бројева почев од $P(0)$, док су бројеви на дијагонали Белови бројеви почев од $P(1)$.

1					
1	2				
2	3	5			
5	7	10	15		
15	20	27	37	52	
52	67	87	114	151	203

2.1 Мреже партиција

На основу претходних разматрања, једноставно се уочава да све релације еквиваленције на неком скупу A образују мрежу $(Eqv(A), \subseteq)$, коју означавамо са Π_A. Наиме, ако су $\rho, \sigma \in Eqv(A)$, тада је

$$\rho \wedge \sigma = \rho \cap \sigma,$$

$$\rho \vee \sigma = \bigcap\{\theta \in Eqv(A) : \rho \cup \sigma \subseteq \theta\}.$$

Према Леми 4, $\rho \vee \sigma$ је заправо унија свих производа сачињених од ρ и σ. Прецизнији опис релације $\rho \vee \sigma$ даје наредна лема.

Лема 5. Ако су ρ и σ две релације еквиваленције на A, тада је

$$\rho \vee \sigma = \rho \cup (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \sigma \circ \rho) \cup (\rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma) \cup \cdots$$

или еквивалентно, $(a, b) \in \rho \vee \sigma$ акко постоји низ елемената $z_1, z_2, \ldots, z_n$ из A таквих да $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$ или $(z_i, z_{i+1}) \in \sigma$, за $i = 1, \ldots, n-1$ и $a = z_1$, $b = z_n$.

Напомена. Како је $\circ$ асоцијативна операција на скупу свих бинарних релација скупа A, то је $(P(A^2), \circ)$ полугрупа, па ако уочимо њену подполугрупу $< \rho, \sigma >$ генерисану са ρ и σ, добијамо $\rho \vee \sigma = \cup < \rho, \sigma >$.

Мрежу Π_A можемо дефинисати и на следећи начин. На скупу свих партиција датог скупа A дефинишемо релацију $\leq$ на следећи начин:

$$\pi_1 \leq \pi_2 \iff eqv(\pi_1) \subseteq eqv(\pi_2),$$

при чему $\pi_1 \leq \pi_2$ тумачимо тако да је сваки елемент партиције π_2 унија елемената партиције π_1.

Лема 6. Π_A је комплетна мрежа.

Доказ. Како је мрежа Π_A ограничена, а пресек сваке фамилије еквиваленција скупа A поново јесте еквиваленција тог скупа, Π_A је комплетна мрежа. Наиме, ако је $\{\rho_i\}_{i \in I}$ подскуп скупа $Eqv(A)$, онда је очигледно $\inf\{\rho_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \rho_i$, док се супремум дефинише као: $\sup\{\rho_i : i \in I\} = \bigcup\{\rho_{i_0} \circ \rho_{i_1} \circ \ldots \circ \rho_{i_k} : i_0, \ldots, i_k \in I, k < \infty\}$. $\square$

Приметимо, мрежа Π_A не зависи од природе елемената скупа A, већ само од кардиналности скупа A. Означимо са Π_n мрежу партиција скупа од n елемената.

Интересантно је проанализирати како изгледају мреже Π_n за мало n.

За $n = 1$, реч је о тривијалној мрежи која се састоји од једног елемента.

За $n = 2$, $A = \{a_1, a_2\}$, партиције скупа A су

$$\pi_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}\},$$

$$\pi_2 = \{\{a_1, a_2\}\},$$

па добијамо ланац дужине 1.

За $n = 3$, скуп $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ може бити разбијен следећим партицијама:

$$\pi_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\},$$

$$\pi_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\},$$

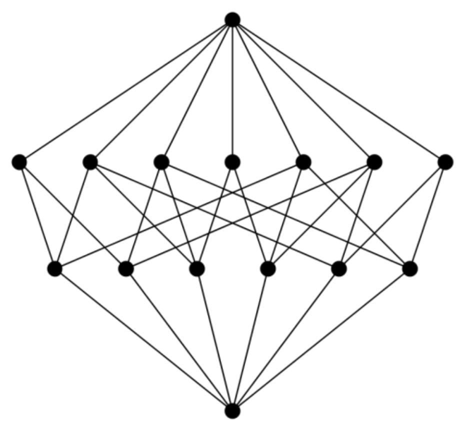
$$\pi_3 = \{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}\},$$

$$\pi_4 = \{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}\},$$

$$\pi_5 = \{\{a_1, a_2, a_3\}\}.$$

и тражена мрежа је дијамант.

За $n = 4$ имамо следећу 15-тоелементну мрежу:



Теорема 22. За $n \geq 4$, Π_n није модуларна мрежа.

Доказ. Нека је скуп A дат са $A = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$. У мрежи Π_n уочимо следеће партиције скупа A:

$$\pi_1 = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\},$$

$$\pi_2 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \dots, \{a_n\}\},$$

$$\pi_3 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \dots, \{a_n\}\},$$

$$\pi_4 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \dots, \{a_n\}\},$$

$$\pi_5 = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \dots, \{a_n\}\}.$$

Партиције π_3 и π_5 су специјалног типа, оне су сингуларне партиције, чије су све класе, осим једне од њих, једноелементне.

Директном провером добијамо да $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ формирају мрежу пентагон, па на основу Дедекиндове теореме из поглавља о модуларним мрежама, следи да Π_n није модуларна мрежа. □

Теорема 23. За све $n \in \mathbb{N}, \Pi_n$ је комплементирана мрежа.

Доказ. Посматрајмо партицију $\{A_1, \dots, A_k\}$ n-тоелементног скупа A, при чему смо индексирање извршили тако да је $|A_1| \geq \cdots \geq |A_k|$. Нека је $A_i = \{a_{ir} : 1 \leq r \leq n_i\}$. Дефинишимо сада нову партицију:

$$A'_r = \{a_{ir} : 1 \leq r \leq n'_r\},$$

за $1 \leq r \leq n_1$, где је n'_r укупан број свих индекса s за које је $r \leq |A_s|$. Другим речима, партицију A_i смо најпре исписали по врстама, па смо конструисали нову партицију, коју добијамо посматрајући колоне исписане шеме као класе.

Тврдимо да релација еквиваленције дефинисана партицијом $\{A'_i : 1 \leq i \leq n_1\}$ јесте комплемент за релацију еквиваленције дефинисану почетном партицијом. Заиста, одмах се уочава да је њихов пресек дијагонала, јер се два различита елемента скупа A не могу наћи истовремено и у истој колони и у истој врсти описане шеме.

Тачније, два елемента се налазе у почетној релацији ρ ако и само ако су у истој врсти, односно у новодобијеној релацији σ ако и само ако су у истој колони дате троугаоне шеме. Али, очигледно је да се свака два елемента у тој шеми могу повезати низом вертикалних и хоризонталних потеза, што значи, преведено на језик релација, да су свака два елемента из A у релацији $\rho \vee \sigma$, тј. $\rho \vee \sigma = A \times A$. □

2.1 Утапања мрежа у мреже партиција

Мреже партиција у извесном смислу "покривају" све мреже.

Теорема 24. [Whitman] Свака мрежа се може потопити у мрежу партиција неког скупа.

Пре доказа теореме наводимо неколико корисних запажања. За било коју мрежу $\boldsymbol{L}$ једноставно је дефинисати $\wedge$-утапање $F : L \xrightarrow{1-1} \Pi_L$, тј. 1-1 функцију која чува операцију $\wedge$ (али не нужно и $\vee$), тј. важи $F(a \wedge b) = F(a) \cap F(b)$, $a, b \in L$. Заиста, нека је пресликавање $F : L \to \Pi_L$ дефинисано са:

$$F(a) = \{(x,y) \in L \times L \mid x, y \leq a \text{ или } x = y\}.$$

Тада је, за свако $a \in L$, $F(a)$ релација еквиваленције, и F је једно $\wedge$-утапање мреже L у Π_L.

Ово запажање се природно може уопштити дефинисањем $\wedge$-утапања одређених тзв. L-метрикама на произвољном скупу A: L-метрика на A је функција

$$d : A \times A \overset{\text{на}}{\rightarrow} L$$

која задовољава следеће услове:

I. d је симетрично, тј. $d(x,y) = d(y,x)$, $x, y \in A$;
II. d је нормализовано, тј. $d(x,x) = 0$, $x \in A$;
III. d задовољава неједнакост троугла, тј. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $x, y, z \in A$.

Функција $F_d : L \to \Pi_A$ дата са:

$$(x,y) \in F_d(a) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} d(x,y) \leq a,$$

јесте једно $\wedge$-утапање. За свако $a \in A$, $F_d(a)$ је релација еквиваленције. Такође, за све $a, b \in L$:

$(x,y) \in F_d(a) \cap F_d(b)$ акко $(x,y) \in F_d(a)$ и $(x,y) \in F_d(b)$

акко $d(x,y) \leq a$ и $d(x,y) \leq b$

акко $d(x,y) \leq a \wedge b$

акко $(x,y) \in F_d(a \wedge b)$,

одакле следи да је $F_d(a) \cap F_d(b) = F_d(a \wedge b)$. Покажимо и да је F_d 1-1 функција. Нека $a, b \in L$ и $a \neq b$. Без губљења општости претпоставимо да је $a \nleq b$. Како је d на функција, постоје $x, y \in A$ такви да је $d(x,y) = a$, па $(x,y) \in F_d(a)$. Због $a \nleq b$, имамо да $(x,y) \notin F_d(b)$, одакле следи да $F_d(a) \neq F_d(b)$.

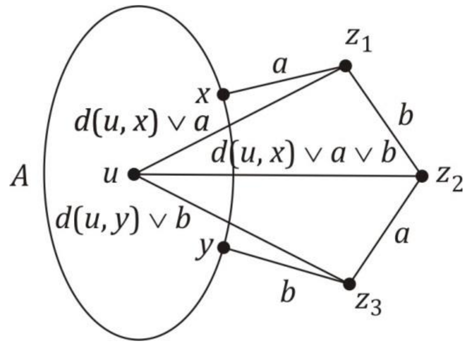
Основна конструкција у наредном доказу је следећа: ако је $d : A \times A \to L$ нека L-метрика и (x, y, a, b) уређена четворка таква да $x, y \in A$, $a, b \in L$ и важи $d(x,y) \leq a \vee b$, онда се на скупу $A^* = A \cup \{z_1, z_2, z_3\}$, где су z_1, z_2, z_3 нови елементи који не припадају A, дефинише L-метрика $d^* : A^* \times A^* \to L$, као симетрична и нормализована функција која задовољава следеће услове:

$d^*(u,v) = d(u,v)$, $u, v \in A$, $d^*(z_1, z_2) = b$, $d^*(z_2, z_3) = a$, $d^*(z_1, z_3) = a \vee b$,

И за све $u \in A$,

$d^*(u, z_1) = d(u, x) \vee a$, $d^*(u, z_2) = d(u, x) \vee a \vee b$, $d^*(u, z_3) = d(u, y) \vee b$.

Наведене једнакости илустроване су на наредној слици.



Користећи чињеницу да је $d(x, y) \leq a \vee b$, једноставно се доказује да је d^* једна L-метрика на A.

Доказ. Нека је $\boldsymbol{L}$ произвољна мрежа. Без губљења општости можемо претпоставити да мрежа $\boldsymbol{L}$ има најмањи елемент 0, јер се свака мрежа може утопити у мрежу са најмањим елементом (видети Теорему 12). Дефинишимо метрику $d : L \times L \to L$ на следећи начин: $d(x, y) = x \vee y$ ако је $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$.

Нека је $(x_\xi, y_\xi, a_\xi, b_\xi), \xi < \alpha$, трансфинитан низ свих уређених четворки елемената из L таквих да важи $d(x_\xi, y_\xi) < a_\xi \vee b_\xi$.

Нека је $L_0 = L^*$ и $d_0 = d^*$ добијено описаном $*$-конструкцијом за четворку (x_0, y_0, a_0, b_0).

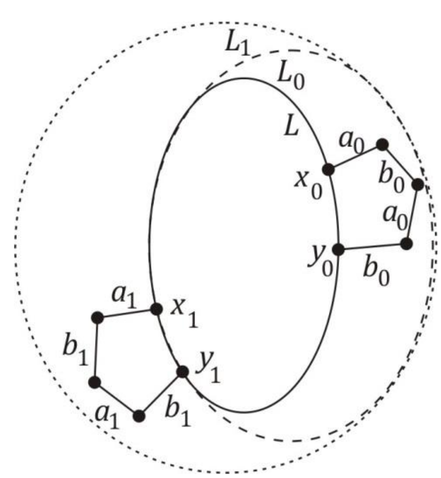
Ако су L_ξ и d_ξ дефинисани за све $\xi < \beta$, за неко $\beta < \alpha$, на скуп $\bigcup_{\xi<\beta} L_\xi$ и L-метрику $\bigcup_{\xi<\beta} d_\xi$ примењујемо $*$-конструкцију, узимајући у обзир четворку $(x_\beta, y_\beta, a_\beta, b_\beta)$ (слика доле):

$L_\beta = \left(\bigcup_{\xi<\beta} L_\xi\right)^*$ и $d_\beta = \left(\bigcup_{\xi<\beta} d_\xi\right)^*$.

Нека је $L^+ = \bigcup_{\xi<\alpha} L_\xi$ и $d^+ = \bigcup_{\xi<\alpha} d_\xi$.

На овај начин добијамо метрику $d^+ : L^+ \times L^+ \to L$, која проширује d и за све $x, y, a, b \in L$, ако важи $d(x, y) \leq a \vee b$, онда постоје $z_1, z_2, z_3 \in L^+$ такви да:

$d^+(x, z_1) = d^+(z_2, z_3) = a$ и $d^+(z_1, z_2) = d^+(z_3, y) = b$.



Најзад, описану +- конструкцију итерирамо ω пута. Дефинишимо индуктивно низ скупова и метрика: $A_0 = L^+$, $\delta_0 = d^+$,

$$A_{n+1} = (A_n)^+ \text{ и } \delta_{n+1} = (\delta_n)^+,$$

као и $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$, $\delta = \bigcup_{n<\omega} \delta_n$.

Очигледно је δ једна метрика на A. Нека је F_δ $\wedge$-утапање одређено метриком δ. Ако $(x, y) \in F_\delta(a \vee b)$, онда је $\delta(x, y) \leq a \vee b$, па како $x, y \in A_n$, за неко $n < \omega$, онда постоје z_1, z_2, z_3 из A (заправо из A_{n+1}) такви да је

$$\delta(x, z_1) = \delta(z_2, z_3) = a \text{ и } \delta(z_1, z_2) = \delta(z_3, y) = b,$$

Самим тим,

$(x, z_1) \in F_\delta(a)$, $(z_1, z_2) \in F_\delta(b)$, $(z_2, z_3) \in F_\delta(a)$ и $(z_3, y) \in F_\delta(b)$,

одакле следи:

$(x, y) \in F_\delta(a) \circ F_\delta(b) \circ F_\delta(a) \circ F_\delta(b) \subseteq F_\delta(a) \vee F_\delta(b)$.

Дакле, $F_\delta(a \vee b) = F_\delta(a) \vee F_\delta(b)$, па је F_δ заправо утапање мреже L у Π_A. □

Напомена. У доказу претходне Теореме конструисано је утапање $F : L \xrightarrow{1-1} \Pi_A$ које задовољава следећу једнакост:

$$F(a \vee b) = F(a) \circ F(b) \circ F(a) \circ F(b), \qquad a, b \in L.$$

Оваква утапања се називају утапања типа 3. Ако под репрезентацијом мреже подразумевамо утапање у неку мрежу партиција, онда се претходна теорема може и строже формулисати: Свака мрежа има репрезентацију типа 3.

Природно је поставити питање да ли се за тип 3 може редуковати на тип 2:

$$F(a \vee b) = F(a) \circ F(b) \circ F(a), \qquad a, b \in L$$

односно тип 1:

$$F(a \vee b) = F(a) \circ F(b), \qquad a, b \in L.$$

Може се доказати да мрежа има репрезентацију типа 2 акко је модуларна. Испоставља се да мреже које имају репрезентацију типа 1 могу бити окарактерисане неким бесконачним скупом идентитета Σ, при чему ниједан коначан подскуп од Σ не карактерише овакве мреже. Занимљиво је да све мреже које имају репрезентацију типа 1 задовољавају један идентитет који је уопштење Дезаргове теореме. Такође, познато је да свака мрежа која се може утопити у мрежу нормалних подгрупа неке групе има репрезентацију типа 1.

Као мотивација за претходну теорему послужило је запажање Герета Бирхофа, 30-их година прошлог века: репрезентација мреже $\boldsymbol{L}$ помоћу релација еквиваленције индукује утапање мреже $\boldsymbol{L}$ у мрежу подгрупа неке групе.

Последица 2. Свака мрежа се може утопити у мрежу подгрупа неке групе.

Доказ. Нека је $\boldsymbol{L}$ произвољна мрежа и $F : L \to \Pi_A$ утапање мреже $\boldsymbol{L}$ у мрежу партиција скупа A. Нека је G група свих пермутација скупа A. Сваком елементу $a \in L$ придружимо подгрупу H_a генерисану свим транспозицијама (xy) таквим да $(x, y) \in F(a)$. (Транспозиција (xy) је пермутација која замењује места елементима x и y, а остале елементе из A фиксира.) Очигледно је да

$$(xy) \in H_a \text{ акко } (x, y) \in F(a),$$

одакле следи да $F(a)$ једнозначно одређује H_a, тј. да је $a \mapsto H_a$ 1-1 функција. Једноставно се уочава да је $H_a \wedge H_b = H_{a \wedge b}$. Најзад, транспозција (xy) припада $H_a \vee H_b$ акко је

$$(xy) = (x_1 y_1)(x_2 y_2) \cdots (x_n y_n),$$

при чему $(x_i y_i) \in F(a)$ или $(x_i y_i) \in F(b)$, што је еквивалентно са $(x, y) \in F(a) \vee F(b)$. Дакле, $H_a \vee H_b = H_{a \vee b}$. □

3. Мреже конгруенција алгебри

3.1 Појам алгебре

Један од циљева универзалне алгебре је издвајање заједничких елемената наизглед различитих типова алгебарских структура. Наиме, универзална алгебра нам открива опште концепте, конструкције и резултате који не само да генерализују и обједињују познате специјалне ситуације и случајеве, већ и воде ка економичнијим презентацијама. Такође, могу се применити и на потпуно нове ситуације, будући да се ради о вишем нивоу апстракције. У овом поглављу описаћемо основне концепте универзалне алгебре и њихове међусобне односе. Од посебног значаја је концепт алгебре, а у оквиру овог појма, посебну пажњу посветићемо конгруенцијама алгебри.

Нека је A непразан скуп и n ненегативан цео број. n-арна операција на A је произвољна функција f из A^n у A. n се назива арност (дужина) f.

Дефиниција 25. Уређен пар $\boldsymbol{A} = (A, F)$, при чему је F неки скуп операција скупа A, називамо алгебром. Низ арности операција из F зовемо тип алгебре $\boldsymbol{A}$.

Алгебра $\boldsymbol{A}$ је коначна ако је скуп A коначан, а тривијална ако је A једноелементан скуп.

Пример 18.

1) Групе: Група G је алгебра $(G, \cdot, ()^{-1}, 1)$ са бинарном, унарном и нуларном операцијом, у којој важе следеће једнакости: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Група је Абелова тј. комутативна ако је $x \cdot y = y \cdot x$.
2) Полугрупе и моноиди: Полугрупа је групоид $(G,\cdot)$ у коме важи $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Моноид је алгебра $(M,\cdot,1)$ са бинарном и нуларном операцијом које задовољавају услове: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
3) Квазигрупе и петље: Квазигрупа је алгебра $(Q,/,\cdot,\backslash)$ са три бинарне операције које испуњавају наведено: $x \backslash (x \cdot y) = y, (x \cdot y)/y = x$, као и $x \cdot (x \backslash y) = y, (x/y) \cdot y = x$. Петља је квазигрупа са јединичним елементом у односу на $\cdot$.
4) Прстени: Прстен је алгебра $(R, +, \cdot, -, 0)$, где су $+$ и $\cdot$ бинарне операције, $-$ је унарна операција, 0 нуларна, и притом важи: $(R, +, -, 0)$ је Абелова група, $(R,\cdot)$ је полугрупа, и испуњена је дистрибутивност $\cdot$ према $+$.
5) Модули над прстеном: Дат је прстен R. (Леви) R-модул је алгебра $(\mathrm{M}, +, -, 0, (f_r)_{r \in R})$, где је $+$ бинарна, $-$ унарна, 0 нуларна, и свако f_r је унарна операција, при чему су испуњени следећи услови: $(\mathrm{M}, +, -, 0)$ је Абелова група, а за f_r важи: $f_r(x + y) = f_r(x) + f_r(y), r \in R,$

$$f_{r+s}(x) = f_r(x) + f_s(x), r, s \in R,$$

$$f_r\big(f_s(x)\big) = f_{rs}(x), r, s \in R.$$

Унитаран R-модул је R-модул који поред наведених услова задовољава још један: $f_1(x) = x$.

6) Алгебре над прстенима: Алгебра над прстеном R је алгебра $(A, +, \cdot, -, 0, (f_r)_{r\in R})$, у којој важи: $(A, +, -, 0, (f_r)_{r\in R})$ је унитаран R-модул, $(A, +, \cdot, -, 0)$ је прстен, и $f_r(x \cdot y) = f_r(x) \cdot y = x \cdot f_r(y), r \in R$.

7) Полумреже: Полумрежа је полугрупа $(S, \cdot)$ која задовољава комутативни закон и закон идемпотентности.

8) Мреже: $(L, \wedge, \vee)$, као што је већ показано, представља једну алгебру.

Дефиниција 26. Нека су $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ две алгебре истог типа.

1) Функција $\alpha : A \to B$ је хомоморфизам ако важи:

$$\alpha f^A(a_1, \dots, a_n) = f^B(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$$

за сваку n-арну операцију f и за сваки низ $a_1, \dots, a_n \in A$.

2) Сваки бијективни хомоморфизам је изоморфизам. $\boldsymbol{A}$ је изоморфно $\boldsymbol{B}$, у ознаци $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, ако постоји изоморфизам $\alpha : A \to B$.

3.2 Мреже подалгебри

Дефиниција 27. Нека су $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ две алгебре истог типа. Кажемо да је $\boldsymbol{B}$ подалгебра алгебре $\boldsymbol{A}$, у ознаци $\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{A}$, ако је $B \subseteq A$ и свака основна операција из B је рестрикција одговарајуће операције из A.

Дефиниција 28. Дата је алгебра $\boldsymbol{A}$ и $X \subseteq A$. Скуп

$$Sg(X) = \bigcap\{B : X \subseteq B \text{ и } B \text{ је подалгебра од } \boldsymbol{A}\}$$

називамо подалгебром генерисаном са X.

Дефиниција 29. За скуп $X \subseteq A$ кажемо да генерише $\boldsymbol{A}$ (X је скуп генератора од $\boldsymbol{A}$) ако је $Sg(X) = \boldsymbol{A}$. Алгебра је коначно генерисана ако има коначан скуп генератора.

Теорема 25. Sg је алгебарски оператор затворења на алгебри $\boldsymbol{A}$.

Доказ. Најпре уочимо следеће: пресек подалгебри алгебре $\boldsymbol{A} = (A, F)$ је опет подалгебра, одакле следи да је Sg оператор затворења на A, чији су затворени скупови управо подалгебре од $\boldsymbol{A}$. Сада уочимо произвољно $X \subseteq A$ и дефинишимо

$$E(X) = X \cup \big\{f\big(a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(f)}\big) : f \text{ је операција из } F \text{ и } a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(f)} \in X\ \big\},$$

а затим и $E^n(X)$ на следећи начин:

$$E^0(X) = X$$
$$E^{n+1}(X) = E\big(E^n(X)\big),$$

где је $n \geq 0$.
Како су све основне операције на A коначне дужине и

$$X \subseteq E(X) \subseteq E^2(X) \subseteq \cdots,$$

лако се показује да је

$$Sg(X) = X \cup E(X) \cup E^2(X) \dots,$$

одакле следи да ако $a \in Sg(X)$, онда $a \in E^n(X)$ за неко $n < \omega$, па за неко коначно $Y \subseteq X, a \in E^n(Y)$, а самим тим и $a \in Sg(Y)$. Одавде следи тражени закључак. ☐

Последица 3. Мрежа подалгебри алгебре $\boldsymbol{A}$, у ознаци $\boldsymbol{L}_{Sg}$, је алгебарска мрежа.

Дефиниција 30. За произвољну алгебру $\boldsymbol{A}$, скуп свих подалгебри од $\boldsymbol{A}$, у ознаци $Sub(\boldsymbol{A})$, је алгебарска мрежа коју називамо мрежом подалгебри алгебре $\boldsymbol{A}$.

Теорема 26. [Бирхоф и Фринк] Свака алгебарска мрежа $\boldsymbol{L}$ је изоморфна мрежи подалгебри $Sub(\boldsymbol{A})$, за неку алгебру $\boldsymbol{A}$.

Доказ. Нека је C алгебарски оператор затворења на скупу A, тако да је $L \cong L_C$ (по Теореми 21). За сваки коначан подскуп $B \subseteq A$ и свако $b \in C(B)$, дефинишимо n–арну функцију $f_{B,b}$ на A , где је $n = |B|$, на следећи начин:

$$f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} b, & \text{ако је } B = \{a_1, \dots, a_n\} \\ a_1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Јасно, $f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) \in C(\{a_1, \dots, a_n\})$, па је $Sg(X) \subseteq C(X)$, за $X \subseteq A$. Са друге стране,

$$C(X) = \bigcup\{C(B) : B \subseteq X \text{ и } B \text{ је коначан}\}$$

и за коначно B је

$$C(B) = \big\{f_{B,b}(a_1, \dots, a_n) : B = \{a_1, \dots, a_n\}, b \in C(B)\big\} \subseteq Sg(B) \subseteq Sg(X),$$

што повлачи $C(X) \subseteq Sg(X)$, па је $C(X) = Sg(X)$. Одатле је $L_C = Sub(\boldsymbol{A})$, па је $Sub(\boldsymbol{A}) \cong \boldsymbol{L}$. ☐

3.3 Мреже конгруенција

Ако је $\boldsymbol{A} = (A, F)$ нека алгебра, конгруенције алгебре $\boldsymbol{A}$ јесу оне релације еквиваленције скупа A које су "инваријантне" у односу на операције алгебре $\boldsymbol{A}$.

Дефиниција 31. Релација еквиваленције ρ скупа A се назива конгруенцијом алгебре $\boldsymbol{A}$ ако за све n-арне операције $f \in F, n \geq 1$ и све $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ такве да је за све $1 \leq i \leq n, (x_i, y_i) \in \rho$ важи: $\big(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)\big) \in \rho$.

Скуп свих конгруенција алгебре $\boldsymbol{A}$ означавамо са $Con(\boldsymbol{A})$. Једноставно је показати да је $\boldsymbol{Con}(\boldsymbol{A})$ затворена за произвољне пресеке. Претпоставимо сада $\theta_i \in Con(\boldsymbol{A})$, $i \in I$. Ако је f n-арна операција на A, и

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \bigvee_{i \in I} \theta_i = \bigcup\{\theta_{i_0} \circ \dots \circ \theta_{i_k} \mid i_0, \dots, i_k \in I, k < \infty\},$$

можемо наћи $i_0, \dots, i_k \in I$ такве да $(a_i, b_i) \in \theta_{i_0} \circ \dots \circ \theta_{i_k}$, $0 \leq i \leq n$. Одатле следи $\big(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)\big) \in \theta_{i_0} \circ \dots \circ \theta_{i_k}$, па је $\bigvee_{i \in I} \theta_i$ такође конгруенција на $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{Con}(\boldsymbol{A}) = (Con(\boldsymbol{A}), \subseteq)$ је заправо алгебарска мрежа која је комплетна подмрежа од Π_A, мреже релација еквиваленције на скупу A.

Теорема 27. За сваку алгебру $\boldsymbol{A} = (A, F)$, постоји алгебарски оператор затворења Θ на $A \times A$ такав да су Θ-затворени подскупови од $A \times A$ управо конгруенције алгебре $\boldsymbol{A}$. Дакле, $\boldsymbol{Con}(\boldsymbol{A})$ је алгебарска мрежа.

Доказ. Дефинишимо најпре једну алгебру на $A \times A$. За сваку n-арну операцију f из F дефинишимо одговарајућу n-арну операцију на $A \times A$, коју ћемо такође означити са f:

$$f\big((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\big) = \big(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)\big).$$

Додајмо затим константе (a, a) за свако $a \in A$, унарну операцију s:

$$s\big((a, b)\big) = (b, a),$$

као и бинарну операцију t:

$$t\big((a, b), (c, d)\big) = \begin{cases} (a, d), \text{ако } b = c, \\ (a, b), \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Није тешко показати да је B подалгебра управо дефинисане алгебре на $A \times A$ ако и само ако је B конгруенција полазне алгебре $\boldsymbol{A}$. Тражени оператор затворења Θ јесте заправо оператор Sg алгебре на $A \times A$. $\square$

Дефиниција 32. Класа алгебри K истог типа је конгруенцијски модуларна (дистрибутивна) класа ако је за све алгебре $\boldsymbol{A} \in K$, $\boldsymbol{Con}(\boldsymbol{A})$ модуларна (дистрибутивна) мрежа.

Све групе, прстени и модули чине конгруенцијски модуларне класе. За класу свих мрежа важи и више: она је конгруенцијски дистрибутивна класа.

Дефиниција 33. Алгебра $\boldsymbol{A}$ је конгруенцијски пермутабилна ако за све $\rho,\sigma \in Con(\boldsymbol{A})$ важи $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

Приметимо: услов $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ је еквивалентан са $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$. Заиста, ако важи $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$, тада је $\sigma \circ \rho \subseteq \rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$, али је и

$$\rho \circ \sigma = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1} = (\sigma \circ \rho)^{-1} \subseteq (\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1} = \sigma \circ \rho$$

(јер је $\rho = \rho^{-1}$ еквивалентно чињеници да је ρ симетрична релација).

Обрнуто, ако је $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, тада је сваки елемент из $< \rho, \sigma >$ облика $\rho^n \circ \sigma^k$. Међутим, за релације еквиваленције важи да је $\rho = \rho^2$ (што добијамо из рефлексивности и транзитивности), па је $< \rho, \sigma > = \{\rho, \sigma, \rho \circ \sigma\}$, и даље следи $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$.

Теорема 28. [Бирхоф] Ако је алгебра A конгруенцијски пермутабилна, тада је и конгруенцијски модуларна.

Доказ. Нека је $\rho,\sigma,\tau \in Con(\boldsymbol{A})$ и $\rho \subseteq \tau$. Желимо да докажемо да је

$$(\rho \vee \sigma) \cap \tau = \rho \vee (\sigma \cap \tau).$$

Довољно је показати инклузију $\subseteq$ јер $\supseteq$ свакако важи по модуларној неједнакости. Дакле, нека је $(a, b) \in (\rho \vee \sigma) \cap \tau$. Тада је $(a, b) \in \tau$ и $(a, b) \in (\rho \vee \sigma) = \rho \circ \sigma$, па постоји $c \in A$ тако да је $(a, c) \in \rho, (b, c) \in \sigma$. Тада је по претпоставци $(a, c) \in \tau$, па је и $(b, c) \in \tau, (b, c) \in \sigma \cap \tau$. Зато је:

$$(a, b) \in \rho \circ (\sigma \cap \tau) = \rho \vee (\sigma \cap \tau).$$

□

Такође, групе, прстени и модули су конгруенцијски пермутабилни. Обратно, пак, не важи: на пример, свака мрежа је конгруенцијски модуларна (јер је конгруенцијски дистрибутивна), али не мора бити конгруенцијски пермутабилна. Међутим, то ће важити уколико је мрежа релативно комплементирана.

Теорема 29. Ако је $\boldsymbol{L}$ релативно комплементирана мрежа, тада за све $\rho,\sigma \in Con(\boldsymbol{L})$ важи $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

Доказ. Довољно је доказати да је $\rho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \rho$. Нека је $(a, b) \in \rho \circ \sigma$. Самим тим постоји $x \in L$ тако да је $(a, x) \in \rho$ и $(x, b) \in \sigma$. Изведимо доказ у два корака.

Најпре размотримо специјални случај када је $a \leq x \leq b$. Нека је тада y релативни комплемент за x у $[a, b]$. Тада је:

$$(a, y) = (x \wedge y, b \wedge y) \in \sigma,$$

$$(y,b) = (a \vee y, x \vee y) \in \rho,$$

па је $(a,b) \in \sigma \circ \rho$.

Посматрајмо сада општи случај. Важи:

$$a = a \vee a \ \rho \ a \vee x = \ a \vee x \vee x \ \sigma \ a \vee b \vee x,$$

$$b = b \vee b \ \sigma \ b \vee x = \ x \vee b \vee x \ \rho \ a \vee b \vee x.$$

Сада важе неједнакости $a \leq a \vee x \leq a \vee b \vee x$, па примењујући закључак из специјалног случаја, добијамо да постоји $u \in [a, a \vee b \vee x]$, тако да је $(a,u) \in \sigma$ и $(u, a \vee b \vee x) \in \rho$. Аналогно се долази до елемента $v \in [a, a \vee b \vee x]$, за који је $(b,v) \in \rho$ и $(v, a \vee b \vee x) \in \sigma$. Следи:

$$u = u \wedge (a \vee b \vee x) \ \sigma \ u \wedge v \ \rho \ (a \vee b \vee x) \wedge v = v,$$

$$a \ \sigma \ u \ \sigma \ u \wedge v \ \Rightarrow (a, u \wedge v) \in \sigma,$$

$$b \ \rho \ v \ \rho \ u \wedge v \ \Rightarrow (b, u \wedge v) \in \rho,$$

па је зато $(a,b) \in \sigma \circ \rho$. □

Размотримо како изгледају конгруенције код неких познатих класа алгебри. Најпре анализирајмо ситуацију која настаје код група. У извесном смислу, овде имамо еквиваленцију конгруенција дате групе и њених нормалних подгрупа.

Лема 7. Ако је ρ произвољна конгруенција групе G, тада је $1/\rho$ нормална подгрупа групе G.

Доказ. Нека су $x, y \in 1/\rho$. Тада је $(1,x), (1,y) \in \rho$, па је и $(1, x^{-1}), (1, xy) \in \rho$, односно $x^{-1}, xy \in 1/\rho$. Дакле, $1/\rho$ је подгрупа групе G. Јасно, реч је о нормалној подгрупи, јер је $x(1/\rho)= x/\rho = (1/\rho)x$. □

Теорема 30. Нека је G група и H њена нормална подгрупа. Релација ρ_H на скупу G, дефинисана са $(x,y) \in \rho_H \Leftrightarrow xH = yH$, задовољава следећа својства:

1) ρ_H је конгруенција групе G.
2) $1/\rho_H = H$.
3) За све конгруенције ρ групе G је $\rho_{1/\rho} = \rho$.

Доказ.

1) ρ_H је, очигледно, релација еквиваленције на скупу G. Нека је $(x,y) \in \rho_H$ и $(z,t) \in \rho_H$. Тада је $xH = yH$ и $zH = tH$, па је:
$$xzH = xHzH = \ yHtH = ytH,$$
тј. $(xz, yt) \in \rho_H$. Аналогно се показује да је $(x^{-1}, y^{-1}) \in \rho_H$.
2) $x \in 1/\rho_H \Leftrightarrow (1,x) \in \rho_H \Leftrightarrow H = xH \Leftrightarrow \ x \in H$.

3) Нека је $H = 1/\rho$. Важи: $(x, y) \in \rho_H \Leftrightarrow xH = yH \Leftrightarrow x(1/\rho) = y(1/\rho) \Leftrightarrow x/\rho = y/\rho \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$. □

Дакле, конгруенцијама облика ρ_H, где је H подгрупа од G, исцрпљене су све конгруенције групе G.

Последица 4. За произвољну групу G важи $\boldsymbol{Con}(\boldsymbol{G}) \cong N(G)$.

Слично се може показати да су све конгруенције прстена, односно модула, потпуно одређене својим идеалима, односно подмодулима. Како су мреже нормалних подгрупа, идеала, односно подмодула модуларне, то су модуларне и одговарајуће мреже конгруенција.

3.4 О Grätzer-Schmidt-овој теореми

У претходном одељку је показано да је за сваку алгебру $\boldsymbol{A}$, мрежа $\boldsymbol{Con}\,(\boldsymbol{A})$ алгебарска. Birkhoff и Frink су 1948. поставили питање да ли је тачно и обрнуто, тј. да ли је свака алгебарска мрежа изоморфна мрежи конгруенција неке алгебре. Проблем су решили Grätzer и Schmidt 1963. године. Међутим, њихов доказ је имао одређене пропусте које није било лако отклонити. Први комплетан доказ приписује се McKenzie-у. Ипак, задржане су све основне идеје и конструкције Grätzer-а и Schmidt-а.

Теорема 31. [Grätzer-Schmidt] Свака алгебарска мрежа изоморфна је мрежи конгруенција неке алгебре.

Доказ је прилично компликован и дугачак и до данас нема значајног поједностављења. Уместо детаљног доказа, наводимо само основне идеје. Доказ је донекле сличан доказу Withman-ове теореме (Теорема 24), при чему се поједини кораци значајно компликују.

У Gratzer-Schmidt-ом доказу полази се од пресликавања која имају само нека (не сва) жељена својства, а потом се постепено мењају док не буду задовољене све особине. Ако је $\boldsymbol{L}$ нека алгебарска мрежа, посматрамо алгебре $\boldsymbol{A}$ и 1-1 пресликавања $\phi : L \to Con\,(A)$ која чувају инфимуме произвољних подскупова од L и супремуме усмерених подскупова од L. Уређене парове $(\boldsymbol{A}, \phi)$ називаћемо репрезентацијама мреже $\boldsymbol{L}$.

Када нађемо неку репрезентацију $(\boldsymbol{A}, \phi)$ мреже $\boldsymbol{L}$ (Лема 8), покушавамо да пронађемо "већу" алгебру $\boldsymbol{B}$ такву да се сваки елемент од $\phi[L]$ може на јединствен начин проширити до неког елемента из $Con\,(B)$, а да се остале конгруенције од $\boldsymbol{A}$ немају екстензије. Ако то постигнемо, пресликавање

(1) $\psi(a) = con_B\big(\phi(a)\big) \overset{\text{def}}{=} \bigcap\{R \in Con\,(B) \mid \phi(a) \subseteq R\}, \quad a \in L,$

ће бити један изоморфизам између $\boldsymbol{L}$ и $Con\,(\boldsymbol{A})$. До алгебре $\boldsymbol{B}$ се долази након трансфинитног броја корака. У сваком кораку се „елиминише“ по једна конгруенција θ која не припада $\phi[L]$. Поред тога, уводе се и екстензије конгруенције $\phi(a)$, које неће бити једниствене, али ће функција ψ дефинисана са (1) чувати операцију $\wedge$, па ће $(\boldsymbol{B}, \psi)$ бити нова репрезентација од $\boldsymbol{L}$. Сувишне екстензије од $\phi(a)$ биће елиминисане касније при конструкцији нових проширења репрезентација.

Како се „елиминише“ θ? Како је $\phi[L]$ алгебарска мрежа на $A \times A$, постоји одговарајући оператор затворења Γ. По претпоставци, $\theta \subset \Gamma(\theta)$, па постоји уређен пар $(c, d) \in \Gamma(\theta)$ који не припада θ. Штавише, постоји коначан подскуп M од θ такав да $(c, d) \in \Gamma(M)$. Поређајмо елементе скупа у низ

$$(a_0, b_0), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}).$$

Нека је $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$. На први поглед се чини да би се алгебри $\boldsymbol{A}$ могла додати n-арна парцијална операција

$$g = \{(a, c), (b, d)\}$$

и узети да $\boldsymbol{B}$ буде својеврсно (слободно) затворење тако добијене парцијалне алгебре. Очигледно је да се θ не може проширити до конгруенције алгебре $\boldsymbol{B}$, док свака конгруенција из $\phi[L]$ може бити проширена. Нажалост, функција ψ дефинисана са (1) неће чувати $\wedge$. Ове тешкоће се превазилазе основном идејом Gratzer-Schmidt-ог доказа. Они су уместо једне додали три нове парцијалне операције g_0, g_1, g_2, стављајући да је:

$g_0(a) = c$, $g_2(b) = d$, $g_0(b) = g_1(b) = r$ и $g_1(a) = g_2(a) = s$, где су r и s нови елементи додати домену алгебре $\boldsymbol{A}$. Затим су посматрали слободно затворење $\boldsymbol{B}$ овако дефинисане алгебре. Најтежи део доказа представља провера да при овој конструкцији функција ψ дефинисана са (1) чува $\wedge$.

Напомена. Појам парцијалне алгебре игра важну улогу у доказу Gratzer-Schmidt-ове теореме. Зато наводимо неке основне дефиниције и чињенице. Парцијална n-арна операција на скупу A јесте свака функција чији је домен подскуп од A^n, а кодомен подскуп од A. Парцијална алгебра је уређен пар (A, F), при чему је F неки скуп парцијалних операција скупа A. Ако су $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ две парцијалне алгебре истог типа, кажемо да је $\boldsymbol{B}$ подалгебра од $\boldsymbol{A}$, у ознаци $\boldsymbol{B} \leq_S \boldsymbol{A}$**,** ако је $B \subseteq A$ и за сваки операцијски симбол f: $f^{\boldsymbol{B}} = f^{\boldsymbol{A}} \cap \left(B^{\mathrm{ar}(f)} \times B\right)$. Ако је f n-арна парцијална операција скупа A и $X \subseteq A$, кажемо да је X релативно затворен за f, ако за све $x_1, \dots, x_n \in X$, из $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{dom}\,(f)$ следи да $f(x_1, \dots, x_n) \in X$. Ако је $\boldsymbol{A}$ парцијална алгебра подскуп X од A је подуниверзум од $\boldsymbol{A}$ ако је релативно затворен за све операције алгебре $\boldsymbol{A}$. Скуп свих подуниверзума од $\boldsymbol{A}$ означавамо $Su\,(\boldsymbol{A})$. Ако је $\boldsymbol{A}$ парцијална алгебра и $X \subseteq A$, нека је $Sg\,(X) = \bigcap\{Y \in Su(\boldsymbol{A}) \mid X \subseteq Y\}$. Алгебра $\boldsymbol{A}$ је генерисана скупом X ако је $Sg(X) = A$. Слободно затворење парцијалне алгебре $\boldsymbol{A}$ јесте алгебра $\boldsymbol{B}$ истог типа таква да важе следећа својства:

i. $\boldsymbol{A} \leq_S \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ генерише $\boldsymbol{B}$;

ii. За сваки n-арни операцијски симбол f и $x_1, \dots, x_n \in B$, ако $f^{\boldsymbol{B}}(x_1, \dots, x_n) \in A$, онда $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{dom}\,(f^{\boldsymbol{A}})$;

iii. За свака два операцијска симбола f и g, редом дужина m и n, и све $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in B$, ако је $f^{\boldsymbol{B}}(x_1, \dots, x_m) = g^{\boldsymbol{B}}(y_1, \dots, y_n)$, онда је $m = n$ и $(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n)$ или $(x_1, \dots, x_m) \in \mathrm{dom}\,(f^{\boldsymbol{A}})$ и $(y_1, \dots, y_n) \in \mathrm{dom}\,(g^{\boldsymbol{A}})$.

Може се доказати да свака парцијална алгебра има слободно затворење.

У доказу Grätzer-Schmidt-ове теореме уобичајено је да се поставе неке додатне претпоставке у вези са репрезентацијама $(\boldsymbol{A}, \phi)$ које ће нам омогућити да скуп M заменимо једним уређеним паром, тј. да посматрамо само унарне алгебре. Овакве измене нису суштинске и основни разлог је поједностављење нотације.

Дефиниција 34. Репрезентација алгебарске мреже $\boldsymbol{L}$ је уређен пар $(\boldsymbol{A}, \phi)$, где је $\boldsymbol{A}$ унарна алгебра, а ϕ 1-1 пресликавање из L у $Con(A)$, тако да важи следеће:

1) За све $X \subseteq L, \phi(\inf X) = \bigcap\{\phi(p): p \in X\}$,
2) За сваки уређен скуп $X \subseteq L, \phi(\sup X) = \bigcup\{\phi(a): a \in X\}$,
3) $\phi(0) = id_{A_0}$,
4) За сваки коначан скуп $M \subseteq A_0 \times A_0$ постоје $c, d \in A_0$ тако да је
$$(\forall a \in L)\big(M \subseteq \phi(a) \Leftrightarrow (c, d) \in \phi(a)\big).$$

Лема 8. Свака алгебарска мрежа има репрезентацију.

Доказ. Ако је L нека алгебарска мрежа, нека је $\boldsymbol{A}$ алгебра без операција чији је универзум скуп U свих компактних елемената од L. За $a \in L$ нека је

$$\phi(a) = \{(x, y) \in U \times U \mid x = y \text{ или } x \vee y \leq a\}.$$

Једноставно се проверава да $(\boldsymbol{A}, \phi)$ задовољава тражене услове. □

Дефиниција 35. Кажемо да је $(\boldsymbol{B}, \psi)$ продужење од $(\boldsymbol{A}, \phi)$ ако је $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ и за свако $a \in L$ је $\psi(a) = con_B(\phi(a))$ и $\phi(a) = \psi(a) \mid_A$.

Запажања:

1. Ако је $(\boldsymbol{B}, \psi)$ продужење од $(\boldsymbol{A}, \phi)$, а $(\boldsymbol{C}, \chi)$ продужење од $(\boldsymbol{B}, \psi)$, онда је $(\boldsymbol{C}, \chi)$ продужење од $(\boldsymbol{A}, \phi)$.
2. Претпоставимо да је $\lambda > 0$, $(\boldsymbol{A}_k, \phi_k), (k < \lambda)$ су репрезентације од $\boldsymbol{L}$, а $(\boldsymbol{A}_\tau, \phi_\tau)$ продужење од $(\boldsymbol{A}_k, \phi_k)$за $k < \tau < \lambda$. Нека је $B = \bigcup\{A_k: k < \lambda\}$, $\psi(a) = \bigcup\{\phi_k(a): k < \lambda\}$, $(a \in L)$. Тада је $(\boldsymbol{B}, \psi)$ репрезентација од $\boldsymbol{L}$ и продужење од $(\boldsymbol{A}_k, \phi_k)$ за свако $< \lambda$.
3. Ако је $(\boldsymbol{A}, \phi)$ репрезентација од $\boldsymbol{L}$, и ако је $\phi[L] = Con(\boldsymbol{A})$, онда је $\phi: \boldsymbol{L} \cong Con(\boldsymbol{A})$.

Лема 9. Свака репрезентација $(\boldsymbol{A}, \phi)$ алгебарске мреже $\boldsymbol{L}$ има продужење $(\boldsymbol{B}, \psi)$, са својством да за сваки коначан скуп $M \subseteq A_0 \times A_0$ и за све $c, d \in A$ услов

$$(\forall a \in L)\big(M \subseteq \phi(a) \Rightarrow (c, d) \in \phi(a)\big),$$

повлачи да $(c, d) \in con_{\boldsymbol{B}}(M)$.

Доказ ове леме је доста компликован па га изостављамо.

Доказ теореме 31. На основу Леме 8 и Леме 9, постоји низ репрезентација $(\boldsymbol{A}_k, \phi_k)$, $k < \omega$ од $\boldsymbol{L}$, тако да је сваки од њих продужење претходног и, за свако $k < \omega$, за сваки коначан подскуп $M \subseteq A_k \times A_k$, и за све $c, d \in A_{k,}$ услов

$$(\forall a \in L)\big(M \subseteq \phi_k(a) \Rightarrow (c, d) \in \phi_k(a)\big)$$

имплицира да $(c, d) \in con_{A_{k+1}}(M)$. Нека је

$$B = \cup\{A_k : k < \omega\}, \qquad \psi(a) = \cup\{\phi_k(a) : k < \omega\}, \qquad (a \in L).$$

Тада је (B, ψ) репрезентација од $\boldsymbol{L}$, и да бисмо завршили доказ, остаје нам да покажемо да је $\psi[L] = Con(\boldsymbol{B})$.

Нека је Γ оператор затворења мреже $\psi[L]$. Разматрајмо конгруенцију θ над $\boldsymbol{B}$ и претпоставимо да $(c, d) \in \Gamma(\theta)$. Тада постоји коначан подскуп M од θ такав да $(c, d) \in \Gamma(M)$ или, еквивалентно,

$$(\forall a \in L)\big(M \subseteq \psi(a) \Rightarrow (c, d) \in \psi(a)\big).$$

Постоји $k < \omega$ тако да $M \subseteq A_k \times A_k$и $c, d \in A_k$, одакле следи

$$(\forall a \in L)\big(M \subseteq \phi_k(a) \Rightarrow (c, d) \in \phi_k(a)\big).$$

На основу тога $(c, d) \in con_{A_{k+1}}(M) \subseteq con_B(M) \subseteq \theta$.

Стога је $\Gamma(\theta) = \theta$, и θ је у $\psi[L]$, што је и требало показати. □

Закључак

У проучавању особина које одликују све алгебарске структуре (као што су групе, прстени и тако даље), као и оних које их међусобно разликују, мреже су се наметнуле на суштински и сасвим природан начин. Посебно, мреже конгруенција играју важну улогу. Осим тога, мреже, као и групе или прстени, представљају значајну класу алгебри саме по себи, и зато су предмет изучавања овог рада, са жељом да се читалац упозна са основним дефиницијама и својствима мрежа. Једна од најлепших теорема у универзалној алгебри, Бејкерова теорема о коначној бази, инспирисана је управо Мекензијевом теоремом о коначној бази за мреже, што говори о битној улози мрежа у савременој алгебри.

У раду су представљене модуларне, дистрибутивне, комплетне, алгебарске мреже, а посебан акценат стављен је на мреже партиција и конгруенција алгебри. Између осталог, показано је битно својство мрежа: да се свака од њих може утопити у мрежу партиција неког скупа, али и у мрежу подгрупа неке групе, као и да је мрежа релација еквиваленције комплетна мрежа, док је мрежа конгруенција алгебарска мрежа која је њена комплетна подмрежа. И на крају, укратко је изложена идеја доказа једне од најбитнијих теорема у теорији мрежа, теореме Grätzer-Schmidt, која је довољно инспиративна да се о њој напише засебан рад и детаљно опише њен компликован доказ.

Литература

[1] Stanley Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, 1981
[2] S. Crvenković, I. Dolinka, R. Madarasz, *Odabrane teme opšte algebre - grupe, prsteni, polja, mreže*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998
[3] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser, 2011
[4] J. Ježek, *Universal algebra*, 2008 http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jezek/ua.pdf
[5] B. Jónsson, *Topics in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1972