Математички факултет

Универзитет у Београду

Нестандардна анализа као почетна настава анализе

Мастер рад

Ментор:

др Небојша Икодиновић

Студент:

Лазар Коковић

Београд,

2016.

Садржај

1 Мотивација

У Србији ученици се први пут срећу са „$\varepsilon - \delta$ анализом" у 4. или 3. разреду средњих школа. Могло би се рећи да је то сама круна школске математике, увод у виши свет математике. Кажем виши свет зато што се једино у математици ограничени људски разум бави конкретно појмовима који имају карактеристику бесконачности. До тада, ученици су упознати са елементарним функцијама и неким особинама поља реалних бројева. Што се тиче „$\varepsilon - \delta$ анализе" почиње се од дефиниције лимеса низа реалних бројева, па даље иду дефиниција непрекидности функције, лимес функције, извод, и што се тиче теорије ту се практично све завршава. Даље, прелази се на таблицу извода, која се неретко учи напамет. Па неодређен интеграл, који се неприродно учи пре одређеног интеграла. И када се ученици извежбају у тражењу примитивне функције прелази се на дефиницију одређеног интеграла. После дефиниције интеграла, која се само наведе, следи Њутн[1]-Лајбницова[2] формула, без доказа, и задаци са применом те формуле. Треба нагласити да доказ Њутн-Лајбницове формуле, није лак, тј. изискује математички алат из области извода који такође није једноставан, бар за ученике средњих школа, и ако говоримо о класичној анализи. Дакле ученици не знају како се дошло до Њутн-Лајбницове формуле већ је само слепо примењују као и остале дате им формуле. Овакав начин предавања математике за сигурно не испуњава један од основних васпитних задатака часова математике, да развије код ученика истинољубивост, и аналитичност и педантност у размишљању. За последицу свега овога ученици који наставе са изучавањем математике на академским студијама имају потешкоћа у савладавању теоријске математике а они који не наставе изучавање у великој мери заборављају све што се тиче извода и интеграла и онога што се учило у средњој школи. Због тога имамо математички неписмену нацију, и све већи

[1] Isaac Newton 1643-1727

[2] Gottfried Wilhelm von Leibnic 1646-1716

број људи који имају анимозитет према математици.

Због чега се овако ради? Професори су свесни тежине дефиниција математичких појмова изражених на стандардан начин, „$\varepsilon - \delta$ језиком". Због тога претрчавају преко теорије везане за ове појмове и прелазе на основне формуле потребне за решавање задатака, јер задаци су ти који се полажу на пријемном испиту. Сложићемо се да је за средњошколца сваки појам изражен „$\varepsilon - \delta$ језиком" права непознаноца и ретки су они који знају да читају „$\varepsilon - \delta$ језик" у том узрасту. На пример: ученицима је у потпуности интуитивно јасно шта је то непрекидна функција али бивају у потпуности збуњени у покушају да разумеју формулу којом се дефинише један тако, на први поглед, једноставан појам.

Хајде да анализирамо са каквим потешкоћама се сусреће средњошколац при покушају да дешифрује нпр. дефиницију непрекидности функције.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Као прво на почетку се јављају три квантификатора. Да ли је свеједно којим се редоследом пишу? Да ли у импликацији прво иде $|f(x_0) - f(x)|$ или $|x_0 - x|$? Да ли ε и δ могу да замене места и шта све то заједно значи? Ово су само нека од питања која муче средњошколца при учењу дефиниције непрекидности, а не бисмо претерали када би рекли да их има колико и пермутација свих чланова у формули.

Поставља се питање да ли постоји неки други, бољи, метод увођења средњошколаца у основне појмове анализе осим класичног? Одговор је позитиван, и тај метод који се зове нестандардна анализа представићемо у следећим поглављима. Како бисмо наговестили о како се једноставном методу ради, одмах ћемо показати како у нестандардној анализи изгледа формула непрекидности функције:

$$\forall x \in D\ x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0)$$

За сада је довољно да знате да ова формула може да се тумачи на следећи начин:

Ако је x много блиско x_0 онда је и $f(x)$ много блиско $f(x_0)$.

Постоје и места где се класичан и нестандардан приступ поклапају. Такве случајеве нећемо обрађивати у овом излагању. Није ми циљ да овде строго изложим теорију нестандардне анализе (то се може видети у [1]), већ да се појмови као што су непрекидност, лимес, извод и интеграл, као и неке важне теореме везане за њих, представе на начин ученицима погодан за разумевање и да се код средњошколаца створи једна добра, и за прелазак на класичну анализу погодна, основа.

2 Основи нестандардне анализе

2.1 Хиперреални бројеви

За разлику од класичне анализе која као полазиште има поље реалних бројева $\mathbb{R}$, нестандардна анализа се бави једним проширењем поља $\mathbb{R}$, које се назива поље хиперреалних бројева $^*\mathbb{R}$. За разлику од поља $\mathbb{R}$ које је настало проширењем поља $\mathbb{Q}$, и поља $\mathbb{C}$ које је настало проширењем поља $\mathbb{R}$, где нам је главни подстицај за проширење била немогућност решавања неких квадратних једначина као и не постојање граничних вредности неких Кошијевих низова (код поља $\mathbb{R}$, на пример $x^2 - 2 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, а код поља $\mathbb{C}$, $x^2+1=0$), овде је главни подстицај недостатак реалних бројева x који задовољавају следећу формулу $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < |x| < \frac{1}{n}$.

Пре него што се уведу ови нови бројеви представићемо неке проблеме у чијем решавању би они могли да нам помогну. У следећем примеру видећемо један такав проблем.

Пример 1. *Пређени пут тела које слободно пада дат је формулом* $s = \dfrac{gt^2}{2}$, *где је* $g \approx 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ *гравитациона константа. Колика је тренутна брзина тела после* $t_0 = 3\ \mathrm{s}$*?*

Први покушај ученика ће бити вероватно $15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ колико износи средња брзина тела после $3\ \mathrm{s}$. Средња брзина тела у периоду између тренутка t_0 и t_1 је дата следећом формулом:

$$v = \frac{\mathrm{s}(t_1) - \mathrm{s}(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Дакле, што мањи интервал $\triangle t = t_1 - t_0$ будемо узели, тј. што нам t_1 буде ближе t_0 то ћемо боље одредити тренутну брзину тела у тренутку t_0. Зато би нам најбоље било када би временски интервал $\triangle t$ могли да одаберемо тако да буде мањи од сваког „измерљивог” временског интервала, тј. да за њега важи $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0\ \mathrm{s} < \triangle t < \frac{1}{n}\ \mathrm{s}$.

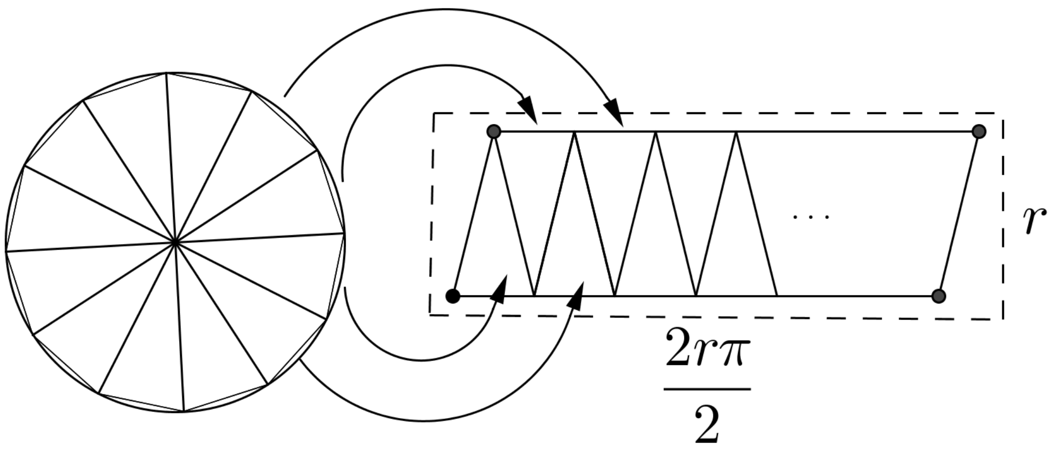
Пример 2. *(Површина круга) Површина круга P једнака је производу његовог полуобима и полупречника r.*

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r = r^2\pi$$

Означимо са r полупречник круга. За неко $n \in \mathbb{N}$ посматрајмо правилни n-тоугао уписан у круг K и његову површину P_n. Приметимо да што веће n изаберемо то ће површина n-тоугла P_n бити већа и све ближа површини круга P. Почевши од површине правилног троугла, па даље квадрата и петоугла, имамо низ површина

$$P_3 < P_4 < P_5 < \cdots < P_n < \cdots < P.$$

Ако би овај низ површина имао свој крај, његов последњи члан би требао бити једнак површини круга P. Изаберимо сада неко велико $n \in \mathbb{N}$ и поделимо n-тоугао централним угловима круга K на подударне троуглове. Затим поредајмо те троуглове као на слици:



Сл. 1

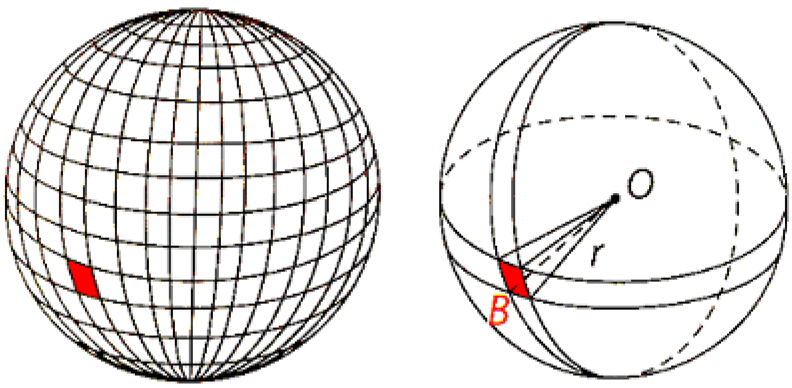
Површина добијеног четвороугла једнака је површини n-тоугла P_n. Што веће n изаберемо добијени четвороугао ће све више личити на правоугаоник *коме је краћа страница једнака полупречнику круга r а дужа тачно половини обима круга $\frac{1}{2}\cdot(2r\pi)$, тј. $r\pi$. Дакле, „последњи" члан низа P_n–површина круга P, требало би бити једнак управо површини овог правоугаоника односно $r\cdot r\pi$. Одатле је површина круга*

$$P = r^2\pi.$$

Пример 3. *(Запремина лопте) Запремина лопте V једнака је трећини производа њене површине и полупречника r.*

$$V = \frac{1}{3}\cdot 4r^2\pi\cdot r$$

На слици је дат модел лопте чија је сфера кружницама подељена на мање делове. Границе ових делова су делови кружница на лопти.



Сл. 2

Ако су $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ површине тих делова, онда је њихов збир једнак површини сфере.

$$B_1 + B_2 + \cdots + B_n = 4r^2\pi$$

*Што је већи број делова на које је сфера подељена, то су ти делови „равнији". Претпоставимо да можемо да поделимо сферу на **бесконачно велики број** делова тако да ти делови буду потпуно равни. Узмимо сада те делове као базе пирамида са врхом у центру сфере. Тада ће и висина ових пирамида* *бити једнака полупречнику лопте r. Збир запремина ових пирамида даће нам запремину лопте.*

$$V = \frac{1}{3}B_1 r + \frac{1}{3}B_2 r + \cdots + \frac{1}{3}B_n r + \cdots = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \cdots + B_n + \ldots)r$$

Како је збир површина свих делова сфере једнак површини лопте, то се за запремину лопте узима

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4r^2\pi \cdot r = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Пример 4. *(Дихотомија) Да ли је збир*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{2.1.1}$$

коначан и ако јесте колики је?

Дихотомија („дељење на пола") је назив за један од четри доказа против кретања познатих као Зенонови[3] парадокси. Изложићу га у целини: ***„Ти не можеш доспети на један крај стадиона с другог краја, не можеш прећи дуж стадиона у једном одређеном коначном времену, јер не можеш прећи бесконачни број тачака. Ти си принуђен да пређеш половину једног датог растојања, а пре него што пређеш ово растојање и половину те половине и тако редом до бесконачности, тако да ћеш имати да савладаш бесконачни број тачака без обзира на то колика је раздаљина коју си наумио да пређеш; а не можеш ни у једном коначном времену савладати бесконачни број тачака или одсечака, један по један."*** [4]

На крају долазимо до закључка да се не можемо ни померити с места, јер сваки пут када то пожелимо, ми морамо савладати бесконачно много половина, односно бесконачно много тачака. Тако смо, одједном, од сасвим „нормалног" стадиона, са неким одређеним димензијама, добили бесконачност коју, једноставно, не можемо савладати корак по корак.

[3]Зенон из Елеје (грч. $Z\eta\upsilon\omega\upsilon$ o $E\lambda\varepsilon\alpha\tau\eta\varsigma$, око 490–око 430. п. н. е.) био је антички грчки филозоф, припадник елејске школе, коју је основао Парменид.

[4]Аристотел,*Топика*

Ево математичког решења парадокса дихотомије.

Рецимо да имамо извесну дужину од два метра и делимо је на пола у бесконачност као у парадоксу. Ако саберемо дужине тих добијених делова добијамо управо израз 2.1.1. Дакле ако овај бесконачни збир има било какав смисао, мора да је једнак броју 2. Ако започнемо израчунавање овог (немогућег) задатка добићемо међурезултате:

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2} &= 2-\frac{1}{2} \\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} &= 2-\frac{1}{4} \\
&\vdots \\
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} &= 2-\frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Дакле оно што на крају недостаје збиру 2.1.1 да би био једнак 2 је нешто неизмерљиво-мање од сваког броја $\frac{1}{2^n}$, за $n \in \mathbb{N}$.

Сада је добар тренутак да се уведу *хиперреални бројеви*.

Скуп хиперреалних бројева означавамо са $^*\mathbb{R}$. Како је већ напред наведено, скуп хиперреалних бројева је проширење скупа реалних бројева, и зато садржи све реалне бројеве. Али осим њих садржи и неке друге бројеве (који нису реални).

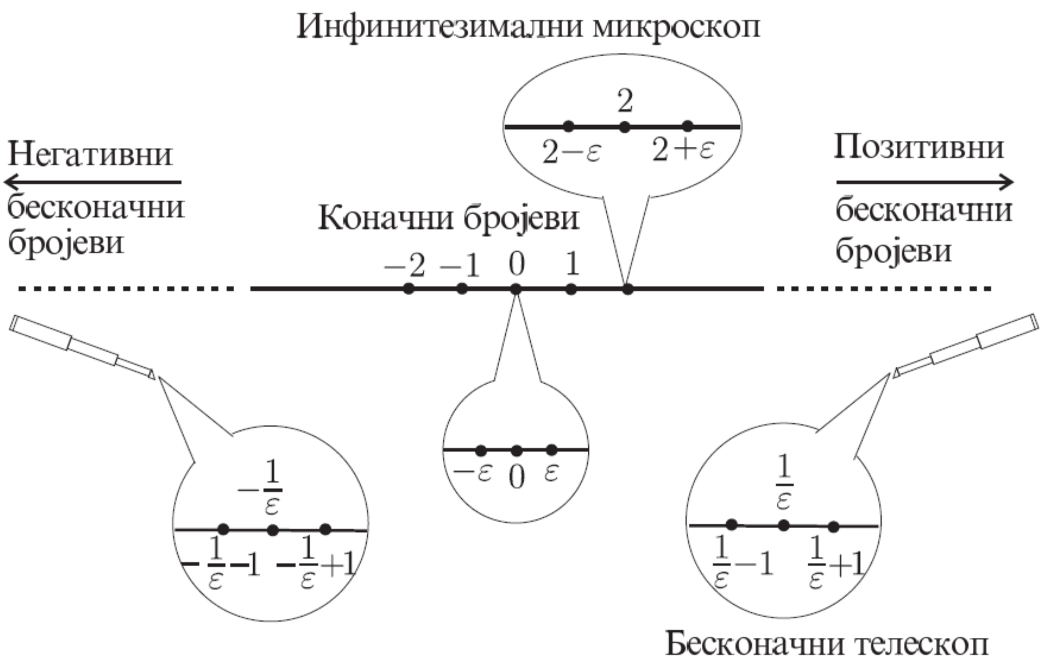
Дефиниција 1. *Бесконачно мали број или инфинитезимала је број који је по модулу мањи од сваког реалног позитивног броја. Аналогно, бесконачно велики број је онај који је по модулу већи од сваког реалног позитивног броја.*

Једини реалан број који је инфинитезимала је нула. Постоје три врсте ифинитезимала у скупу хиперреалних бројева: позитивне, негативне и нула. Исто тако, у скупу ($^*\mathbb{R}$) постоје и позитивни и негативни бесконачно велики бројеви. Хиперреални бројеви који нису бесконачни називају се *коначни хиперреални бројеви*.

Скуп инфинитезимала ћемо обележавати са **BM**, а скуп бесконачно великих са **BV**.

Вежбање 1. *Доказати:* $\varepsilon \in \boldsymbol{BM} \setminus \{0\}$ *ако и само ако* $\dfrac{1}{\varepsilon} \in \boldsymbol{BV}$.

„Инфинитезимални микроскоп” ће нам омогућити да довољно увеличамо хиперреалну праву, односно раван, како би видели хиперреалне бројеве, односно тачке(из хиперреалне равни (${}^*\mathbb{R}^2$)). То су микроскопи који увеличавају $\frac{1}{\varepsilon}$ пута, где је ε нека позитивна инфинитезимала. Тако ћемо, за дату инфинитезималу ε, инфинитезимални микроскоп који увеличава $\frac{1}{\varepsilon}$ пута звати ε-инфинитезимални микроскоп(сл.3).



Сл. 3

Разлику имеђу две тачке ε-инфинитезимални микроскоп неће приметити ако је количник растојања између те две тачке и ε инфинитезимале инфинитезимала, тј. ако је то растојање бесконачно мало у односу на ε. На пример, ε-инфинитезималним микроскопом не можемо видети разлику између бројева ε и

$\varepsilon - \varepsilon^2$. Да би уочили разлику ова два броја може се искористити моћнији ε^2-инфинитезимални микроскоп.

„Бесконачни телескоп" ће нам омогућити да видимо делове хиперреалне праве, односно равни који садрже бесконачне бројеве, односно тачке(сл.3).

Став 1. *(Правила рачунања са хиперреалним бројевима) Нека је $r \in \mathbb{R}, \varepsilon, \delta \in$ **BM**, $H \in$ **BV**. Тада важи:*

i) $r \cdot \varepsilon \in$ ***BM***

ii) $\dfrac{r}{\varepsilon} \in$ ***BV***

iii) $\varepsilon + \delta \in$ ***BM***

iv) $H + r \in$ ***BV***

Напомена: Производ инфинитезимале и бесконачно великог броја може бити и инфинитезимала, и бесконачно велики, али и коначан број.

Приметимо да из претходног става следи да у скупу $^*\mathbb{R}$ постоје бројеви a и b (нпр.$a = \varepsilon \in$ **BM** $\setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$) ,где је $a < b$, такви да за било који природан број n увек важи $n \cdot a < b$. Из овога имамо да је поље хиперреалних бројева, за разлику од поља реалних, **Неархимедско**.

Дефиниција 2. *Два броја $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ су бесконачно близу, у ознаци $a \approx b$, ако за њих важи $b - a \in$ **BM**.*

Вежбање 2. *Доказати: Релација $\approx$ је релација еквиваленције.*

Дефиниција 3. *Нека је x хиперреалан. Монада броја x, у ознаци $\mu(x)$, је скуп који садржи све хиперреалане бројеве који су му бесконачно близу.*

$$\mu(x) = \{y \in {}^*\mathbb{R} |\ y \approx x\}$$

Теорема 1. *Сваки коначни $x \in {}^*\mathbb{R}$ је бесконачно близу тачно једном реалном броју $r \in \mathbb{R}$.*

Доказ. Нека је $x \in {}^*\mathbb{R}$ коначан.

Јединственост: претпоставимо да су r и s реални бројеви за које важи $r \approx x,\ s \approx x$. Како је $\approx$ релација еквиваленције имамо да је $r \approx s$, тј. $r - s \approx 0$. Али $r - s$ је реалан, па је $r - s = 0$ тј. $r = s$.

Егзистенција: Нека је $X = \{s \in \mathbb{R} :\ s < x\}$. X је ограничен одозго зато што постоји позитиван реалан број a, такав да је $|x| < a$. На основу аксиоме комплетности [5] постоји најмање горње ограничење $t \in \mathbb{R}$ скупа X. За сваки реалан број a важи:

$$x \leqslant t + a, \quad x - t \leqslant a$$

и

$$t - a \leqslant x, \quad -(x - t) \leqslant a.$$

Следи да је $x - t \approx 0$, тј. $x \approx t$. □

Напомена: И ако смо у доказу претходне теореме користили аксиому комплетности за скуп реалних бројева X, сама аксиома не важи у скупу хиперреалних бројева.[6]

Дефиниција 4. *Нека је $x \in {}^*\mathbb{R}$ коначан. Јединствен реални број r за који важи $r \approx x$ назива се стандардни део од x и пише се $r = \mathrm{st}(x)$.*

Стандардни део представља функцију $\mathrm{st} : {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbf{BV} \to \mathbb{R}$ која сваки хиперреалан број, који није бесконачан, слика у његов стандардни део. Претходна теорема обезбеђује добру дефинисаност.

Став 2. *Особине функције стандардни део. Нека су $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ коначни и $r \in \mathbb{R}$, тада важи:*

[5] Сваки одозго ограничен скуп $S \subset \mathbb{R}$ има супремум(тј. најмање горње ограничење) у $\mathbb{R}$.

[6] Видети поглавље 4

i) $x \approx y \Leftrightarrow \operatorname{st}(x) = \operatorname{st}(y)$

ii) $x \approx \operatorname{st}(x)$

iii) $\operatorname{st}(r) = r$

iv) $x < y \Rightarrow \operatorname{st}(x) < \operatorname{st}(y)$

v) $\operatorname{st}(x \pm y) = \operatorname{st}(x) \pm \operatorname{st}(y)$

vi) $\operatorname{st}(xy) = \operatorname{st}(x)\operatorname{st}(y)$

vii) $\operatorname{st}(y) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{st}(\frac{x}{y}) = \dfrac{\operatorname{st}(x)}{\operatorname{st}(y)}$

viii) $x \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N},$
$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow \operatorname{st}(y) = \sqrt[n]{\operatorname{st}(x)}.$

Сада ученицима можемо поставити питање из примера 1. Дакле, ако је $\Delta t = \varepsilon \cdot 1s$, онда број $\varepsilon > 0$ треба да буде инфинитезимала. Нека је, дакле, $\varepsilon > 0$ инфинитезимала, покушајмо да решимо задатак из примера 1.

$$\begin{aligned} v =& \frac{\mathrm{s}(3\ \mathrm{s} + \Delta t) - \mathrm{s}(3\ \mathrm{s})}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(3\ \mathrm{s} + \varepsilon\ \mathrm{s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 9\ \mathrm{s}^2}{\varepsilon\ \mathrm{s}} \\ =& \frac{30\ \mathrm{m} \cdot \varepsilon + 5\ \mathrm{m} \cdot \varepsilon^2}{\varepsilon\ \mathrm{s}} = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Ученике сада треба вратити у „реалност” тј. треба им нагласити да крајњим резултатима инфинитезималне величине занемарују. Те би стога било најлогичније да тренутна брзина, чија је бројна вредност хиперреалан број, у „реалности” буде реалан број најближи добијеном хиперреалном, тј. његов стандардни део. Стога ће наша тренутна брзина v_t у тренутку $t_0 = 3\mathrm{s}$ бити $v_t = \operatorname{st}(30 + 5\varepsilon) \cdot 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Иако нас претходни пример наводи на извод ипак ћемо ићи по реду, како се то ради у школама. У наставку уводимо појам непрекидности.

У даљем излагању нећемо посебно правити разлику између скупова као што су $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и $[a, b]^* \subset {}^*\mathbb{R}$. Ако не будемо нагласили о каквом се броју ради, реалном или хиперреалном, значи да нам то суштински није битно. Хиперреалне бројеве ћемо углавном користити као математички алат при доказивању тврђења из реалне анализе. Зато нећемо посебно дефинисати хиперреалне функције, већ се ослонимо на интуитивно схватање природних проширења реалних елементарних функција на хипрреалне бројеве. Ако се подсетимо, интуиција нам је била главни ослонац при увођењу елементарних функција у средњој школи. Нпр. за експоненцијалну функцију, дефинише се прво степен рационалним бројем, а затим се интуитивно уводи функција $x \mapsto 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ иако није дефинисано шта значи 2 на неки ирационалан број.

2.2 Непрекидност функције

Интуитивно, непрекидне функције су оне чији се графици цртају у једном потезу руке, без дизања оловке. Формално, такве функције се дефинишу на следећи начин.

Дефиниција 5. *Нека је функција f дефинисана на интервалу (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Функција је непрекидна у тачки x_0 ако важи:*

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R}) \quad x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0). \tag{2.2.1}$$

Јасно је, из дефиниције, да ако је функција f непрекидна у тачки a онда важи

$$f\left[\mu(a)\right] \subset \mu(f(a)).$$

Пример 5. *Испитати непрекидност функција $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $h(x) = \frac{1}{x}$ у тачки $x_0 = 0$.*

Приметимо да су прве две функције дефинисане у тачки x_0 док за трећу h то не важи, па зато и не можемо говорити о непрекидности функције у тој тачки.

Нека је $\varepsilon > 0$ инфинитезимала. Пошто је $x_0 = 0$, следи $x_0 \approx \varepsilon$. Да ли онда важи $f(\varepsilon) \approx f(x_0)$, односно $g(\varepsilon) \approx g(x_0)$?

$$f(\varepsilon) - f(x_0) = \varepsilon^2 - 0^2 = \varepsilon^2$$

*Пошто $\varepsilon^2 \in$ **БМ** следи да је $f(\varepsilon) \approx f(x_0)$ тј. функција f је непрекидна у тачки x_0.*

Како је за функцију g разлика $g(\varepsilon) - g(0) = 1$ реалан број, следи да функција има прекид у тачки $x_0 = 0$.

Теорема 2. *Ако је f непрекидна функција на затвореном интервалу $[a, b]$, онда постоји $x_{max} \in [a, b]$ такав да за све $x \in [a, b]$ важи $f(x) \leqslant f(x_{max})$.*

Доказ. Без губитка општости претпоставимо да је $[a,b]=[0,1]$. Изаберимо један бесконачно велик природан број H(већи од свих стандардних природних бројева). „Поделимо" интервал $[0,1]$ на H делова, $T_H=\{0,\frac{1}{H},\frac{2}{H},\dots\frac{H-1}{H},1\}$. Постоји хиперприродан број $K_{max}<H$ такав да је $f\left(\frac{K}{H}\right)\leqslant f\left(\frac{K_{max}}{H}\right),\ \ 0\leqslant K\leqslant H$ [7]. Нека је $c=\operatorname{st}\left(\frac{K_{max}}{H}\right)\in[0,1]$. Показаћемо да је овај реалан број тражени број тј. можемо узети да је $x_{max}=c$. Нека је $d\in[0,1]$ произвољан. Тада $\frac{[dH]}{H}\in T_H$, $d\approx\frac{[dH]}{H}$ и на основу непрекидности функције f важи:

$$f(d)\approx f\left(\frac{[dH]}{H}\right)\leqslant f\left(\frac{K_{max}}{H}\right)\approx f(c).$$

Приметимо да не знамо поредак између $f(c)$ и $f(\frac{K_{max}}{H})$, али да нам то није ни важно. $\square$

Теорема 3. *Нека је функција f непрекидна на затвореном интервалу $[a,b]$. Тада за сваки број C између $f(a)$ и $f(b)$ постоји тачка $\xi\in[a,b]$, таква да је $f(\xi)=C$.*

Доказ. Без губитка општости претпоставимо да је $[a,b]=[0,1]$, да функција на крајевима интервала узима различите знакове и да је $C=0$ (то можемо урадити јер ако за неку непрекидну функцију g важи $g(\xi)=C$ онда за функцију $f(x)=g(x)-C$ важи $f(\xi)=0$, и обратно). Као и у доказу претходне теореме изаберимо један бесконачно велик природан број H. „Поделимо" интервал $[0,1]$ на H делова, $T_H=\{0,\frac{1}{H},\frac{2}{H},\dots\frac{H-1}{H},1\}$. Нека је $K_0=\max\{K:0\leqslant K\leqslant H,\ f\left(\frac{K}{H}\right)<0\}$ [8]. Покажимо да је $\operatorname{st}\left(\frac{K_0}{H}\right)$ тражени број ξ.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{K_0}{H}\right) &\leqslant 0\leqslant f\left(\frac{K_0+1}{H}\right)\\ f(\xi)=\operatorname{st}\left(f\left(\frac{K_0}{H}\right)\right) &\leqslant 0\leqslant \operatorname{st}\left(f\left(\frac{K_0+1}{H}\right)\right)=f(\xi). \end{aligned}$$

$\square$

[7] Могућност да одаберемо овакав број обезбеђује нам **принцип трансфера**, видети поглавље 4 и [1].

[8] Исто

2.3 Гранична вредност функције

На врло сличан начин као непрекидност дефинише се гранична вредност (**лимес**) функције.

Дефиниција 6. *Нека су $a, b \in \mathbb{R}$. b је граничана вредност или лимес функције $f(x)$ кад x тежи a, у ознаци*

$$b = \lim_{x \to a} f(x),$$

ако важи следећа формула:

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{a\})\ x \approx a \Rightarrow f(x) \approx b. \tag{2.3.1}$$

Лимес се може израчунати употребом функције стандардни део. Из формуле 2.3.1 може се видети да је $b = \mathrm{st}(f(a+\delta))$ за било које $\delta \in$ **BM**, $\delta \neq 0$, тј. важи $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathrm{st}(f(a+\delta))$.

Дефиниција 7. *Нека су a и b реални бројеви.*

i) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ *ако је* $f(H) \approx b$ *за све позитивне бесконачне* H.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *ако је* $f(x)$ *бесконачно за* $x \approx a,\ x \neq a$.

Пример 6. *Одредити* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 1000}$.

Нека је H бесконачан.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 1000} &= \mathrm{st}\left(\frac{H^2 + 3H + 1}{H^3 - 1000}\right) \\
&= \mathrm{st}\left(\frac{\frac{1}{H} + \frac{3}{H^2} + \frac{1}{H^3}}{1 - \frac{1000}{H^3}}\right) = \\
&= \frac{\mathrm{st}(\frac{1}{H}) + \mathrm{st}(\frac{3}{H^2}) + \mathrm{st}(\frac{1}{H^3})}{\mathrm{st}(1) - \mathrm{st}(\frac{1000}{H^3})} \\
&= \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0} = 0
\end{aligned}$$

Дефиниција 8. *Нека су a и $h > 0$ реални бројеви и $f(x)$ реална функција. Вредност $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ односно $\lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$ означаваћемо са $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ односно $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ и зваћемо десном односно левом граничном вредношћу функције f у тачки a.*

Пример 7. *Израчунати $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x)$.*

Нека је $\varepsilon > 0$ инфинитезимала. Тада је

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{st}(\operatorname{sgn}(0-\varepsilon)) = \operatorname{st}(\operatorname{sgn}(-\varepsilon)) = \operatorname{st}(-1) = -1.$$

Напомена: За израчунавање лимеса функцију **стандардни део** можемо користити само када лимес постоји и коначан је.

Дефиниција 9. *Под околином тачке c подразумевамо било који отворен интервал који садржи тачку c.*

Теорема 4. *Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ и ако у некој околини тачке a (осим, можда, у самој тачки a) задовољена неједнакост $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ тада је и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.*

Доказ. Због претпоставке да у некој околини тачке a важи $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, за свако $\delta \in \mathsf{BM}$, $\delta \neq 0$ важи:

$$f(a+\delta) \leqslant g(a+\delta) \leqslant h(a+\delta).$$

Када узмемо стандардни део из претходне релације, добијемо:

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x) \leqslant \lim_{x\to a} h(x) = b.$$

Закључујемо:

$$\lim_{x\to a} g(x) = b,$$

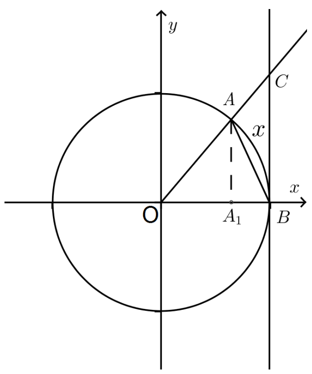
што је и требало доказати. □

Пример 8. *Доказати да је* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Како је функција $\dfrac{\sin x}{x}$ *парна, то ћемо размотрити случај када је* $x>0$. *Докажимо најпре неједнакост*

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1, \tag{2.3.2}$$

за $0<x<\dfrac{\pi}{2}$.



Сл. 4

Ову неједнакост докажимо помоћу тригонометријске кружнице (сл.1). Тада ће x *бити дужина лука* $\widehat{AB}$, *где је* B *тачка кружнице са координатама* $(1,0)$, *а* A *произвољна тачка кружнице у првом квадранту. Означимо са* A_1 *нормалну пројекцију тачке* A *на* x*-осу, а са* C *пресечну тачку праве* OA *и тангенте кружнице у тачки* B. *Добро нам је познато да је тада* $AA_1=\sin x$, $BC=\operatorname{tg}x$.

На слици (сл.1) може се видети да је површина кружног исечка OAB *већа од површине троугла* OAB, *а мања од површине троугла* OBC, *па пошто је пречник кружнице једнак* 1 *то важи:*

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\operatorname{tg}x,$$

одакле је

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

или ако узмемо реципрочне вредности

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

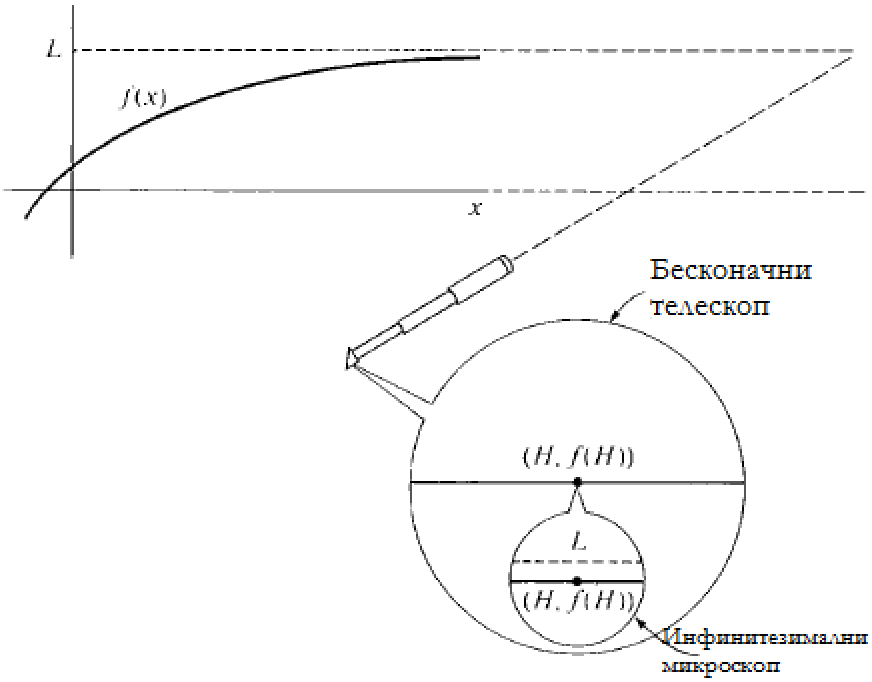
На основу теореме 4 и чињенице да је $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, *из неједнакости 2.3.2 добијамо*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

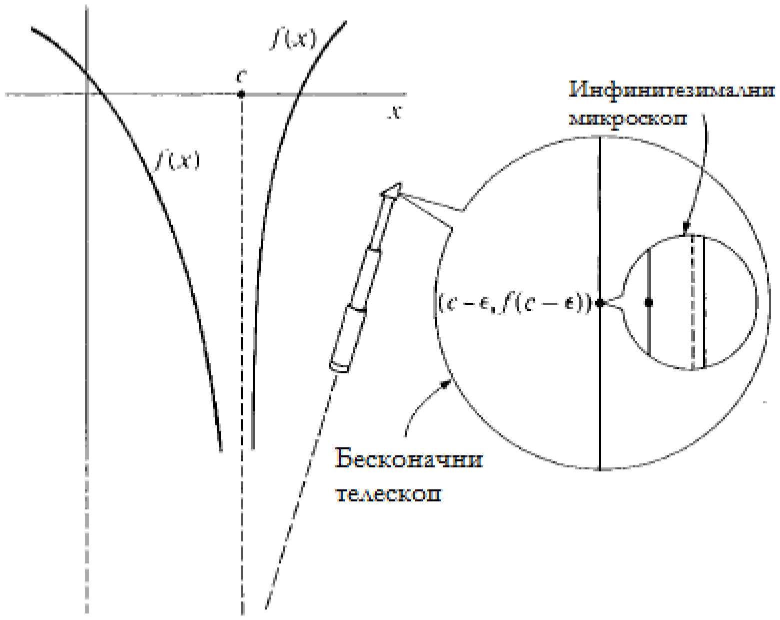
Као што смо напоменули на почетку функција $\frac{\sin x}{x}$ *је парна, па је* $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = 1$, *тј.* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Бесконачне телескопе можемо искористити за посматрање асимптотског понашања функција код којих имамо неки од следећа три случаја:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R}$ (сл.5);
2. $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \infty$ (сл.6);
3. $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \infty$ (сл.6).



Сл. 5


f(x)
c
x
f(x)
Инфинитезимални
микроскоп
(c − ϵ, f(c − ϵ))
Бесконачни
телескоп

Сл. 6

2.4 Извод функције

Дефиниција 10. *Нека је f дефинисана на интервалу (a,b) и $x_0 \in (a,b)$ фиксна тачка. Извод функције f у тачки x_0, у ознаци $f'(x_0)$, уколико постоји, је број:*

$$f'(x_0) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right). \tag{2.4.1}$$

Из дефиниције лимеса функције, није тешко закључити да је

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пример 9. *(Изводи неких функција)*

i)

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \mathrm{st}\left(\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}\right)\\ &= \mathrm{st}(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(\ln(x))' &= \mathrm{st}\left(\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\right)\\ &= \mathrm{st}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(\sin(x))' &= \mathrm{st}\left(\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}\right)\\ &= \mathrm{st}\left(\frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x) - \sin(x)}{\Delta x}\right)\\ &= \sin(x)\,\mathrm{st}\left(\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right) + \cos(x)\,\mathrm{st}\left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin(x)\operatorname{st}\left(\frac{1-2\sin^2(\frac{\Delta x}{2})-1}{\Delta x}\right)+\cos(x)\cdot 1\\
&= \sin(x)\operatorname{st}\left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2\cdot\Delta x\right)+\cos(x)\\
&= \sin(x)\cdot(-1)\cdot 0+\cos(x)=\cos(x)
\end{aligned}
$$

Нека је $y=f(x)$ реална функција дефинисана на интервалу (a,b), $x\in(a,b)$ фиксна тачка и $\Delta x\neq 0$ инфинитезимала.

Дефиниција 11. *За функцију $y=f(x)$ се каже да је диференцијабилна у тачки x ако се прираштај функције Δy може написати у облику*

$$\Delta y = A\Delta x+\varepsilon\Delta x, \tag{2.4.2}$$

где је A реалан број, а ε инфинитезимала. Величину $A\Delta x$ зовемо диференцијалом функције f у тачки x и обележавамо са dy.

Теорема 5. *Функција f је диференцијабилна у тачки x ако и само ако има извод у тој тачки.*

Доказ. Из $f'(x)=\operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ следи да је $f'(x)\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}$ тј. за неко $\varepsilon\in$ ВМ важи

$$\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x).$$

Множењем са Δx добијамо

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\Delta x &= \Delta y - f'(x)\Delta x,\\
\Delta y &= f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x.
\end{aligned}
$$

Једноставно се доказује да важи и друга страна еквиваленције. □

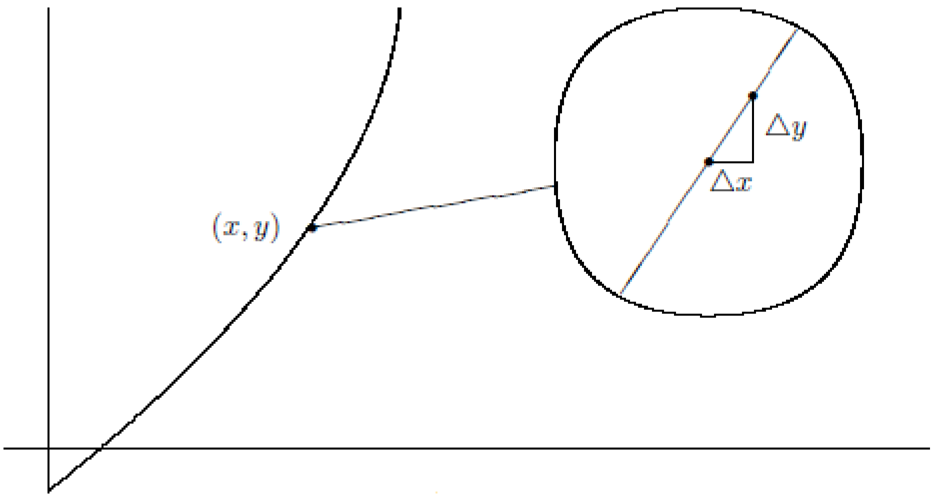
Теорема 6. *Нека је $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна на (a,b) и $c\in(a,b)$. Ако функција има локални максимум или минимум у тачки c онда је $f'(c)=0$.*

Доказ. Претпоставимо да функција у тачки $c \in (a, b)$ има локални максимум. Нека је $\Delta x > 0$ инфинитезимала. Тада важи:

$$f(c+\Delta x) - f(c) < 0, \quad f(c-\Delta x) - f(c) < 0$$
$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \leqslant \frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x}$$
$$\mathrm{st}\left(\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}\right) \leqslant 0 \leqslant \mathrm{st}\left(\frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x}\right)$$
$$f'(c) \leqslant 0 \leqslant f'(c)$$
$$f'(c) = 0.$$

Доказ за случај када функција има локални минимум је аналоган. □

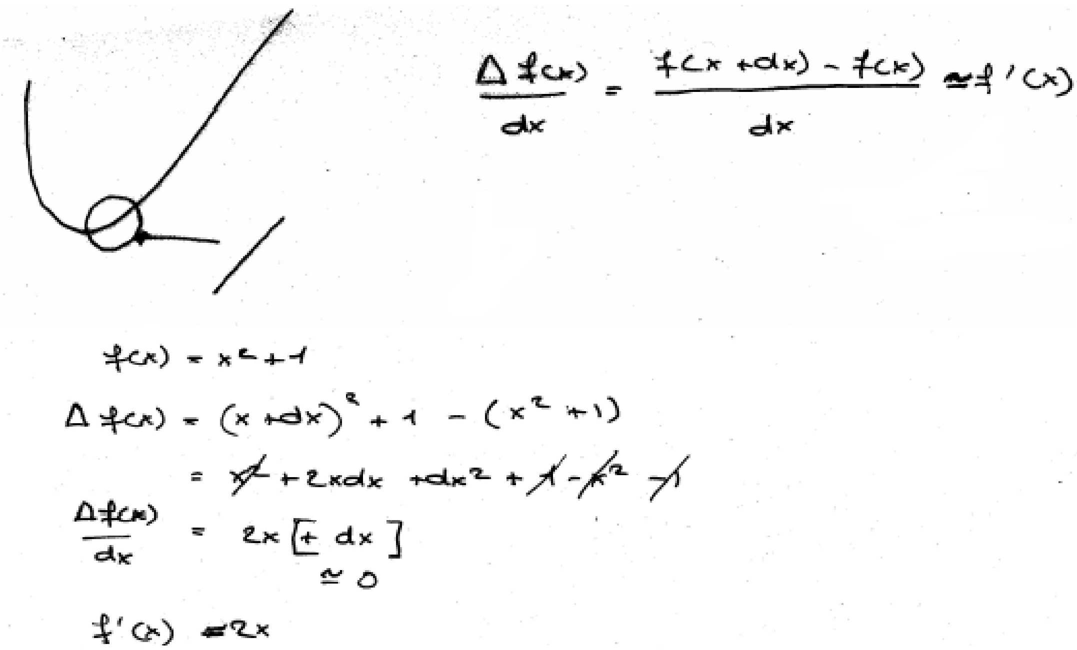
На примеру израчунавања извода функције f у тачки a показаћемо како се може искористити инфинитезимални микроскоп.



Сл. 7

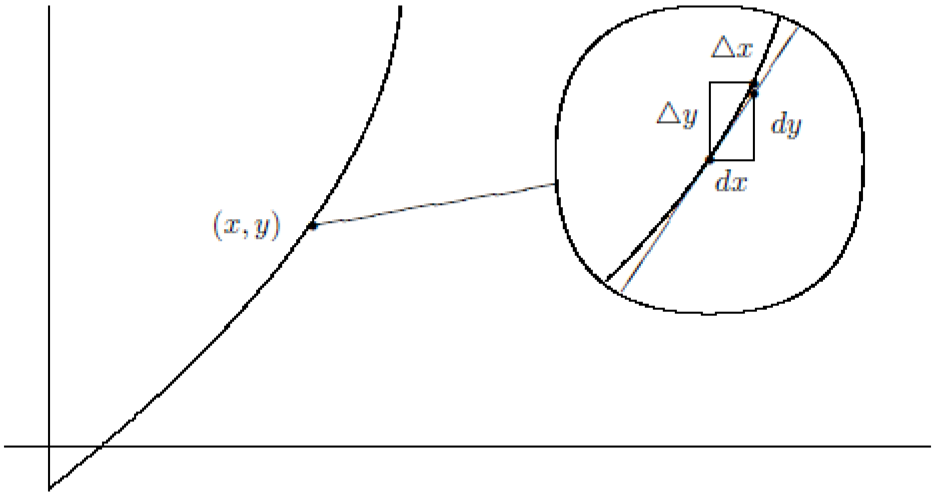
На основу теореме 5 знамо да за диференцијабилну функцију f важи $\Delta f \approx f'\Delta x$, односно график функције f у тачки a је бесконачно близу тангенти функције f у тачки a. То значи да на било ком инфинитезималном микроскопу график функције f изгледа као права са коефицијентом правца $f'(a)$, тако да се израчунавање извода своди на одређивање коефицијента правца „праве" коју видимо кроз неки инфинитезимални микроскоп посматрајући њиме график функције f у тачки $(a, f(a))$(Сл.7).

Када добијемо тражени „коефицијент правца" преостаје нам да из завршног рачуна избацимо оно што се не види, тј. оно што неможемо видети без помоћи инфинитезималног микроскопа, и добили смо извод функције(сл.8).

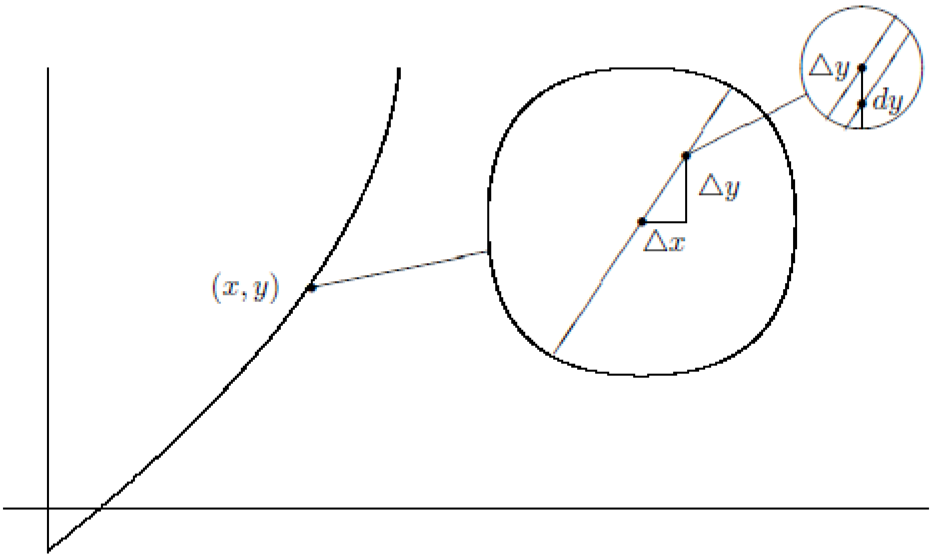


Сл. 8: Увеличај, израчунај, умањи и избаци из резултата оно што се не види

Сада ћемо употребити инфинитезимални микроскоп како би илустровали разлику између тангенте и графика функције чији извод постоји, односно разлику између прираштаја и диференцијала функције. Како разматрамо диференцијабилну функцију то важи релација $\Delta f \approx f'\Delta x$. Ако поделимо ту релацију са Δx добићемо $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f' \approx 0$ тј. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - \dfrac{df}{dx} \approx 0$. Закључујемо да је разлика прираштаја и диференцијала функције, за прираштај аргумента Δx бесконачно мала у односу на сам прираштај аргумента. То значи да се разлика између тангенте и графика, односно прираштаја и диференцијала функције не може видети (Δx)-инфинитезималним микроскопом посматрајући тачку $(a, f(a))$(сл.9). Зато треба искористити моћнији $(\Delta x)^2$–инфинитезимални микроскоп(сл.10).



Сл. 9



Сл. 10

2.5 Одређени интеграл

Наш циљ у овој секцији је да одредимо површину фигуре ограничену кривом $y = f(x)$, и правама $y = 0,\ x = a,\ x = b$, другим речима површину испод графика функције f и изнад x-осе на интервалу $[a, b]$.

Дефиниција 12. *Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и нека је $\Delta x > 0$ инфинитезимала и $x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, \ldots, x_n = x_0 + n\Delta x$ подела интервала $[a, b]$, где је n највећи бесконачан природан број такав да је $a + n\Delta x < b$. Бесконачна Риманова сума се дефинише као сума*

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)(b - x_n). \tag{2.5.1}$$

Бесконачна Риманова сума је коначан број што се може видети из следећег. Пошто је функција непрекидна на интервалу, то она на њему достиже своје екстремуме. Ако је m најмања а M највећа вредност функције f на $[a, b]$, тада важи:

$$\begin{aligned} \sum_a^b m\Delta x \leqslant \sum_a^b f(x)\Delta x \leqslant \sum_a^b M\Delta x \\ m\sum_a^b \Delta x \leqslant \sum_a^b f(x)\Delta x \leqslant M\sum_a^b \Delta x \\ m(b-a) \leqslant \sum_a^b f(x)\Delta x \leqslant M(b-a) \end{aligned}$$

Дефиниција 13. *Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна. Одређен интеграл функције f од a до b је стандарднан део бесконачне Риманове суме,*

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x)\Delta x\right). \tag{2.5.2}$$

Дефиницију можемо памтити лакше на следећи начин:

$$\int = \int \text{tandardni deo} \int \text{ume}.$$

Што значи да је интеграл стандардни део суме и указује на порекло ознаке интеграла $\int$, која је настала стилизовањем латиничног слова S као првог слова речи *сума*.

Израчунавање одређеног интеграла по дефиницији је, у већини случајева, тежак посао. Тај проблем у многоме олакшава Њутн-Лајбницова формула. Наведимо ученике да сами дођу до ње.

Вежбање 3. *Нека је* $f(x) = x^2$ *и нека је* $A(x) = \int_0^x f(t)dt$ *функција која рачуна површину испод графика функције* f *од* 0 *до* x.

Скицирати график функције f *и обележити* $\Delta A(x)$*(сл.11).*

Израчунати $\Delta A(x)$ *и* $dA(x)$*?*

Хајде да претходни задатак генерализујемо на било коју непрекидну функцију. Прираштај функције $A(x)$ је бесконачно близу збиру површина правоугаоника одређеног тачкама

$$(x, 0), (x + \Delta x, 0), (x, f(x)), (x + \Delta x, f(x))$$

и троугла

$$(x, f(x)), (x + \Delta x, f(x)), (x + \Delta x, f(x) + \Delta f(x)) :$$

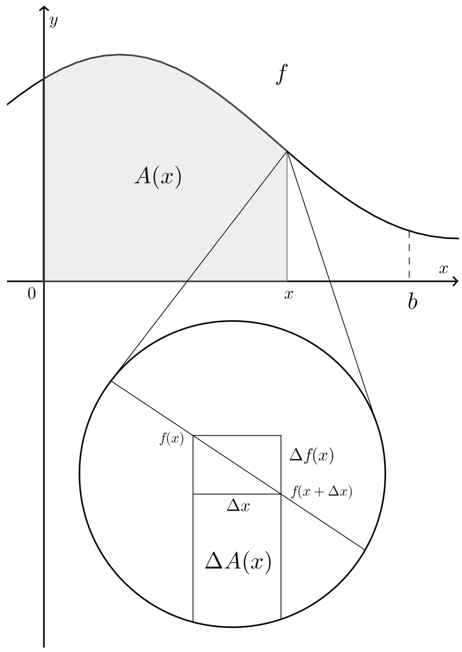
$$\Delta A(x) \approx f(x) \cdot \Delta x + \frac{\Delta f(x) \cdot \Delta x}{2}. \tag{2.5.3}$$

Прираштај функције A је представљен у форми (2.4.2), па закључујемо да је она диференцијабилна, тј. важи

$$dA(x) = f(x) \cdot dx.$$

Дакле, извод функције A је

$$A'(x) = f(x).$$



Сл. 11

До овог резултата можемо доћи и ако поделимо једнакост (2.5.3) са Δx и узмемо стандардни део обе стране:

$$\begin{aligned} \operatorname{st}\left(\frac{\Delta A(x)}{\Delta x}\right) =& \operatorname{st}\left(f(x)+\frac{\Delta f(x)}{2}\right) \\ A'(x) =& f(x) \end{aligned}$$

Из претходно наведеног закључујемо: да би одредили одређен интеграл функције f од a до b, морамо наћи „антиизвод” од те функције, тј. функцију F чији је извод функција f, прецизно речено **примитивну функцију** F функције f.

Јасно је да ће тада веза између одређеног и неодређеног интеграла важити у облику:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.5.4}$$

који се назива **Њутн-Лајбницова формула**.

3 Кратак приказ неких резултата из Ојлерове књиге Introduction in Analysis Infinitorum (1748. год)

Много пре Абрахама Робинсона[9], творца нестандардне анализе, бесконачно мале и велике величине употребио је чувени Леонард Ојлер[10] када је у својој књизи *Introductio in Analysin Infinitorum*(Увод у анализу бесконачности) без икаквог појма о изводу, дошао до резултата које ми данас изучавамо као последицу Тејлорове теореме базиране на изводу. У уводу своје књиге Ојлер напомиње: „ Све ово следи из обичне алгебре и све у овој књизи је за почетнике”. Шта је то Ојлер сматрао под „обичном алгебром” и како је он из ње дошао до резултата као што су: развој експоненцијалне и логаритамске функције у степени ред, Ојлеров идентитет и развој тригонометријских функција у степени ред.

Свакако да је мајстор рачуна и велики манипулатор симболима, како га многи сматрају, под „обичном алгебром” сматрао много више него што ми данас подразумевамо. Са развијеном, брилијантном интуицијом о бесконачности Ојлер је отворено користио аритметику бесконачно малих и великих величина, често примењујући на њих законе који важе за коначне. На пример, сматрајући степене редове полиномима са бесконачним степеном несмотрено им је доделио све особине коначних полинома. Иако су овакви поступци по савременим стандардима математичке строгости неприхватљиви, Ојлер је често захваљујући њима долазио до великих истинитих тврђења.

Данас увиђамо да Ојлер није био толико прецизан у коришћењу бесконачних величина. Његово убеђење да се сви коначно генерисани обрасци и формуле могу аутоматски продужити до бесконачног случаја је више ствар вере него науке, а касније ће математичари наћи десетине примера који показују лудост

[9] Abraham Robinson 1918 – 1974

[10] Leonhard Euler 1707-1783

такве исхитрене генерализације.

3.1 Експоненцијална функција

Сада ћемо у светлу претходно изложене теорије нестандардне анализе приказати како је Ојлер дошао до развоја неких елементарних функција у степене редове. Он прво почиње са експоненцијалном функцијом a^x, $a > 1$. За $x > 0$ важи $a^x > 1$, тако да за сваки експонент већи од нуле добијамо да је експоненцијална функција већа од један. Ако је $\varepsilon \in$ **ВМ**, $\varepsilon > 0$, тада је $a^\varepsilon = 1 + \psi$ за неку инфинитезималу ψ. Нека је $\psi = \lambda\varepsilon$ где је λ реалан, тада имамо да је $a^\varepsilon = 1 + \lambda\varepsilon$.

Ојлер тада закључује да сваки коначан x, који није инфинитезимала може да се запише као производ инфинитезимале и бесконачног броја, нпр. $x = K \cdot \frac{x}{K}$ где је K бесконачан. Нека је $K = \frac{x}{\varepsilon}$, тада уз помоћ мало рачуна користећи биномну формулу добијамо степени ред експоненцијалне функције a^x:

$$\begin{aligned}
a^x = a^{K\varepsilon} = (1+\lambda\varepsilon)^K &= \left(1 + \frac{\lambda x}{K}\right)^K \\
&= 1 + \frac{1}{1}\lambda x + \frac{1(K-1)}{1 \cdot 2K}\lambda^2 x^2 + \frac{1(K-1)(K-2)}{1 \cdot 2K \cdot 3K}\lambda^3 x^3 + \dots \\
&= 1 + \lambda x + \frac{K-1}{K} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2}\lambda^2 x^2 + \frac{K-1}{K} \cdot \frac{K-2}{K} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\lambda^3 x^3 + \dots
\end{aligned}$$

Тада је Ојлер применио оно што ми називамо принципом стандардног дела тј. увидео је да се разломци $\frac{K-1}{K}, \frac{K-2}{K}, \frac{K-3}{K}, \dots$ могу заменити односно добро апроксимирати јединицом, тако да је добио

$$a^x = 1 + \lambda x + \frac{1}{2!}\lambda^2 x^2 + \frac{1}{3!}\lambda^3 x^3 + \dots .$$

На крају, Ојлер је разматрао случај основе a када је λ једнака јединици, добивши природну **експоненцијалну функцију** и показавши да је у општем случају λ природни логаритам од a.

3.2 Развој тригонометријских функција у степене редове

Сада ћемо у Ојлеровом стилу доказати његов чувени идентитет

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

.

Из примера 8 знамо да је $\sin \frac{x}{N} = \frac{x}{N} + \frac{x}{N}\delta$, а исто тако важи и $\cos \frac{x}{N} = 1 + \frac{x}{N}\varepsilon$. Користећи **Муаврову формулу**[11] добијамо чувени Ојлеров идентитет:

$$\begin{aligned}
\cos x + i \sin x &= (\cos \frac{x}{N} + i \sin \frac{x}{N})^N \\
&= (1 + \frac{ix + x(i\delta + \varepsilon)}{N})^N \\
&= e^{ix + x(i\delta+\varepsilon)} \\
&= e^{ix} e^{x(i\delta+\varepsilon)} \approx e^{ix}.
\end{aligned}$$

Из овог идентитета имамо да је $\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ и $\sin x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, а знајући степени развој експоненцијалне функције добијамо и развој тригонометријских функција у степене редове:

$$\begin{aligned}
\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) &= \frac{1}{2}((1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} + \dots) \\
&\quad + (1 - ix - \frac{x^2}{2} + \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} + \dots)) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots,
\end{aligned}$$

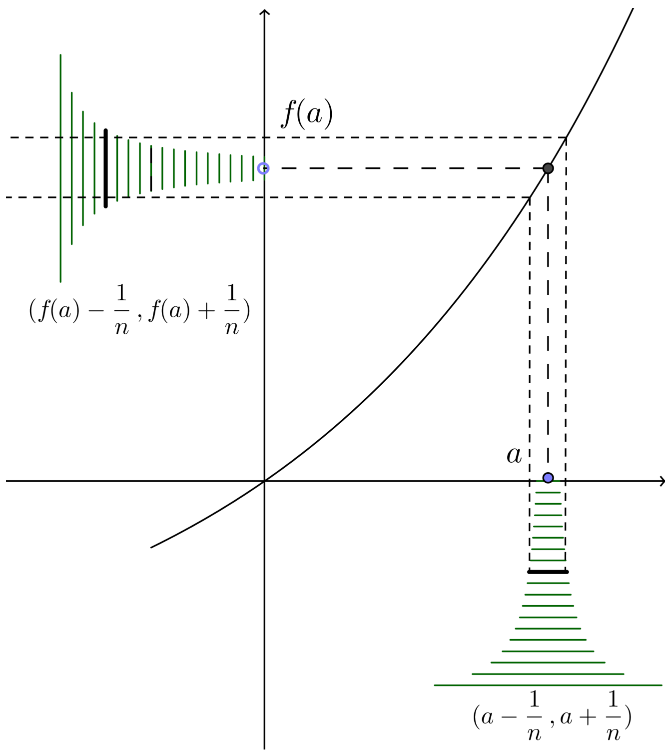
и

$$\begin{aligned}
\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) &= \frac{1}{2i}((1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} + \dots) \\
&\quad - (1 - ix - \frac{x^2}{2} + \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{ix^5}{120} - \frac{x^6}{720} + \dots)) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots.
\end{aligned}$$

[11] Abraham de Moivre 1667-1754

4 Прелаз на класичну анализу

Наша замисао је да се изучавање анализе почне нестандардним приступом, али би се свако даље изучавање наставило уобичајеним класичним начином. Циљ почетног изучавања анализе на нестандардан начин, управо има за циљ стицање интуиције, како би се прелаз на класичан начин изучавања учинио што безболнијим. Како се класична анализа не би доживела као нека нова област математике показаћемо да су ова два приступа изучавања анализе еквивалентна. Тачније, показаћемо да су дефиниције граничних вредности, централног појма анализе, еквивалентне. Како су дефиниције лимеса и непрекидности функције скоро исте ми ћемо, због једноставности записа, показати то на дефиницијама непрекидности.



Сл. 12

Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и a реалан број. Посматрајмо низове околина тачака a (на x–оси) и $f(a)$ (на y–оси) тј. околине $(a-\frac{1}{m}, a+\frac{1}{m})$ и $(f(a)-\frac{1}{n}, f(a)+\frac{1}{n})$, где су m и n природни бројеви. За било које n, ми можемо одабрати m тако да слика околине $(a-\frac{1}{m}, a+\frac{1}{m})$ функцијом f, скуп $f[(a-\frac{1}{m}, a+\frac{1}{m})]$ буде подскуп околине $(f(a)-\frac{1}{n}, f(a)+\frac{1}{n})$(за претходно изабрано n)(сл.12).

Да ли то исто можемо да урадимо и за функцију која није непрекидна?

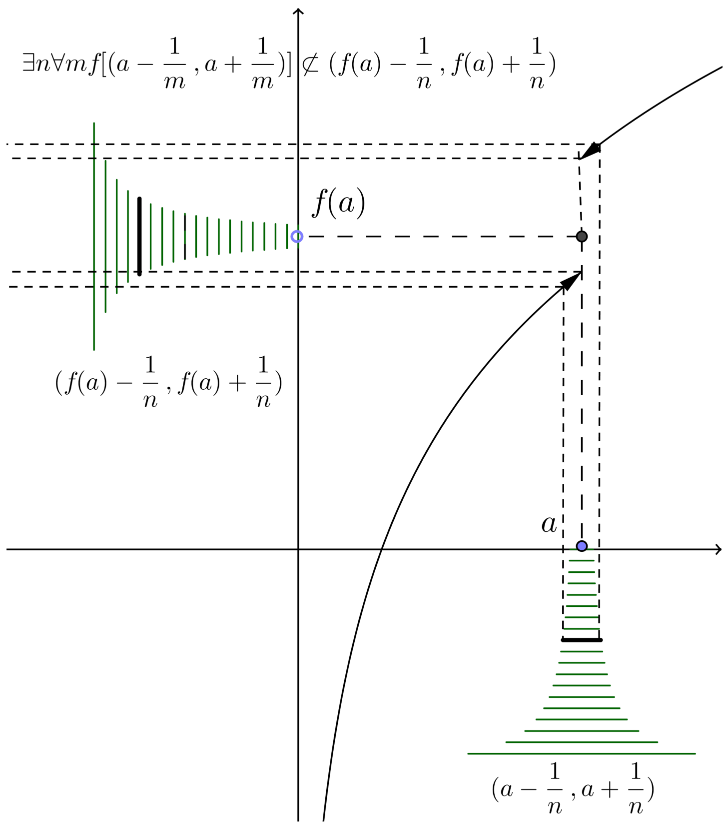
Нека је сада $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција која има прекид у тачки $a \in \mathbb{R}$(и са леве и са десне стране).

Тада важи

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad x \approx a \Rightarrow g(a) \not\approx g(x)$$

тј.

$$\exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad x \approx a \Rightarrow |g(a) - g(x)| > r.$$



Сл. 13

Нека је n_0 такво да је $\frac{1}{n_0} < r$. Посматрајмо сада низове околина $(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m})$ и њихове слике функцијом f. Какво год изабрали m скуп $f[(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m})]$ никад неће бити подскуп оклине $(f(a) - \frac{1}{n_0}, f(a) + \frac{1}{n_0})$, ни за било које n мање од r(сл.13).

Из претходних разматрања можемо рећи да важи следеће: Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је непрекидна у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ f[(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m})] \subset (f(a) - \frac{1}{n}, f(a) + \frac{1}{n})$$

другим речима,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x \in (a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m}) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \frac{1}{n}, f(a) + \frac{1}{n})$$

односно

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - a| < \frac{1}{m} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{1}{n}.$$

Уместо природних бројева n и m, односно разломака $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{m}$ можемо користити реалне бројеве ε и δ, чиме добијамо Вајерштрасову дефиницију непрекидности функције у контексту реалних бројева:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon,$$

где ε и δ замишљамо увек као мале бројеве.

Теорема 7. *Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Ако је функција f непрекидна у тачки a онда за све $x \in {}^*\mathbb{R}$, из $x \approx a$ следи $f(x) \approx f(a)$, тј. важи $\forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad x \approx a \Rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(a)$.*

Доказ. Пошто је функција f непрекидна у тачки a важи

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ f[(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m})] \subset (f(a) - \frac{1}{n}, f(a) + \frac{1}{n}),$$

А како је $f\left[\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})\right] \subset f[(a - \frac{1}{m}, a + \frac{1}{m})]$ за било које $m \in \mathbb{N}$ имамо да је

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f\left[\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})\right] \subset (f(a) - \frac{1}{n}, f(a) + \frac{1}{n}),$$

односно
$$f\left[\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k})\right]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(f(a)-\frac{1}{n},f(a)+\frac{1}{n}).$$

Функције f и $^*f$ су идентичне на скупу $\mathbb{R}$, стога претходна релација важи и за функцију $^*f$, па је

$$^*f\left[\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k})\right]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(^*f(a)-\frac{1}{n},{}^*f(a)+\frac{1}{n}).$$

Како је у пољу хиперреалних бројева скуп $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}(a-\frac{1}{k},a+\frac{1}{k})$ управо монада тачке a, а скуп $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}(^*f(a)-\frac{1}{n},{}^*f(a)+\frac{1}{n})$ монада тачке $^*f(a)$ то је

$$^*f[\mu(a)]\subset\mu(f(a)),$$

односно

$$\forall x\in{}^*\mathbb{R}\quad x\approx a\Rightarrow{}^*f(x)\approx{}^*f(a),$$

што је и требало доказати. $\square$

Важи и обратно тврђење претходне теореме. Да би њега доказали, упознајмо се прво са принципом трансфера. Принцип трансфера тврди да свако реално тврђење које се односи на посебну реалну функцију важи и за њено хиперреално проширење. Важи и обратно с тим што под реалним односно хиперреалним тврђењем подразумевамо свако тврђење у чијој се формулацији квантификатори односе само на реалне, односно хиперреалне бројеве. Ево неколико примера реалних тврђења која важе и као хиперреална тврђења:

i) $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad x+y=y+x$;

ii) $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad 0<x<y\ \Rightarrow\ 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$

iii) $\forall x\in\mathbb{R}\quad \sin^2 x+\cos^2 x=1$

Као што смо рекли у реалним тврђењима квантификатори се односе само на реалне бројеве. То је разлог зашто аксиома комплетности не важи у пољу хиперреалних бројева. У њеној формулацији квантификатори се односе на скупове реалних бројева односно на елементе из скупа $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Превођење реалних формула, односно исказа, у хиперреалне врши се „звездовањем" одговарајућих елемената у формули, односно исказу. Звездовање се врши тако што се квантификатори реалних тврђења замене са $\forall x \in {}^*\mathbb{R}, \exists x \in {}^*\mathbb{R}$ а операције и релације њиховим $*-$варијантама. Тако се нпр. реални исказ $i)$, из претходних примера, преводи у хиперреални облик тако што се звездује симбол скупа реалних бројева:

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R} \quad x + y = y + x.$$

Принцип трансфера није ништа ново у математици. Нпр. сабирање се врло лако и природно уводи у рационалне бројеве. Да се подсетимо: ако су $s = \frac{n_1}{m_1}$ и $t = \frac{n_2}{m_2}$ рационални бројеви где су $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, а $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, њихов збир је $s + t = \dfrac{n_1 m_2 + n_2 m_1}{m_1 m_2}$.

Али шта је збир два реална броја који нису рационални? Прво се на скупу свих Кошијевих[12] низова рационалних бројева дефинише релација еквиваленције $\approx_k$, таква да су два низа у релацији ако њихова разлика конвергира нули. Затим сваки реалан број поистоветимо са класом еквиваленције низова, у односу на релацију $\approx_k$, који му конвергирају. Тада се збир два реална броја r и q дефинише на следећи начин:

$$r + q = \lim_{n \to \infty} (r_n + q_n),$$

где су r_n и q_n низови рационалних бројева који конвергирају редом реалним бројевима r и q. Дакле, то је реалан број коме конвергира низ рационалних бројева $r_n + q_n$. На овај начин се „рационални" исказ

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x + y = y + x$$

[12] Augustin Louis Cauchy 1789-1857

преноси у поље реалних бројева. Како све аксиоме поља рационалних бројева, захваљујући принципу трансфера, важе и за реалне бројеве, закључујемо да све што важи у пољу рационалних бројева важи и у пољу реалних.

На сличан начин функционише принцип трансфера при преносу реалних исказа у хиперреалне. Као и у случају односа рационалних и реалних бројева, дефинише се релација еквиваленције која нам омогућава да сваки хиперреалан број поистоветимо са класом еквиваленције низова реалних бројева у односу на ту релацију[13].

Тако нпр. ако је ε инфинитезимала за коју важи $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$ онда ћемо ε поистоветити са класом низова чији је представник низ $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. На сличан начин се поистовећује ε^2 са класом низова чији је представник низ $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ и тако даље,...

И тако се на сличан начин као са рационалним исказима, неки реални искази преносе у поље хиперреалних бројева. У томе је смисао принципа трансфера.

Теорема 8. *Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ и ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Ако је функција ${}^*f$ непрекидна у тачки a онда за произвољно ε постоји δ такво да за све $x \in \mathbb{R}$, из $|x-a| < \delta$ следи $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, тј. важи*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољан реалан број. Тада за сваку позитивну инфинитезималу δ и свако $x \in {}^*\mathbb{R}$, из $|x - a| < \delta$ следи $|{}^*f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Дакле, важи:

$$(\exists\delta \in {}^*\mathbb{R})(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |{}^*f(x) - f(a)| < \varepsilon),\ \text{за сваки реалан } \varepsilon > 0.$$

Самим тим, примењујући принцип трансфера, у супротном смеру, важи и

$$(\exists\delta \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

за сваки реалан $\varepsilon > 0$. □

[13] Ова релација еквиваленције се дефинише помоћу тзв. **ултрафилтера**, видети [4]

5 Предности и недостаци нестандардне анализе у настави

Блискост људској интуицији условила је да прва постигнућа из области математичке анализе буду развијена на концепту инфинитезимала тј. бесконачно малих бројева. Иако строго неутемељене инфинитезимале су од Њутна и Лајбница коришћене у наредних 200 година све док Вајерштрас није, крајем 19. века усавршио један строги приступ анализи који данас зовемо „$\varepsilon - \delta$"-формализам. Дакле разлог што се напустио интуитивни концепт инфинитезимала био је тај што није задовољавао строге математичке принципе заснованости. Тек је 1960. године Абрахам Робинсон решио проблем стар три стотине година дајући један прецизан третман у рачунању са инфинитезималама. Тиме је питање враћања концепта инфинитезимала у наставу анализе поново враћен у игру. Јер иако се иза њега налази тешка машинерија математичке логике као што су ултрафилтери све то може да буде изостављено у почетној настави анализе, као што се радило у 18. и 19. веку, знајући да он заиста ради и да питање његове исправности више није засновано на веровању.

5.1 Предности

Дакле, главна предност нестандардног приступа у настави анализе је његова блискост интуицији која је првобитно и довела до настанка анализе. Основни појмови као што су гранична вредност и непрекидност уводе се на баш онај начин који одговара нашем доживљају тих појмова. Имајући у виду да се на појму граничне вредности и граде и извод и одређен интеграл функције, целокупно градиво из анализе које се предаје, на пример, средњошколцима, могло би да се учини много лакшим за разумевање.

Оваквим приступом у многоме се избегавају моменти када предавач „извлачи зеца из шешира" или када намешта ствари, како би доказао неко тврђење, а када слушаоци остају у потпуности збуњени јер су очекивали ће из самог доказа тврђења схватити и његов смисао.

Нотација се такође поједностављује: Нема више тростуких квантификатора који се јављају на почетку формула, који стварају општу забуну код почетника и сасвим је очекујућа с обзиром да не познају логику првог реда. Дакле запис је краћи и све је много разумљивије.

5.2 Недостаци

С друге стране постоји и низ проблема који јављају при оваквом начину наставе анализе.

Највећи методички проблем нестандардног приступа анализи јесте чињеница да се бесконачно мали и бесконачно велики бројеви не могу геометријски представити. Увођење апстрактних уређаја као што су бесконачни микроскоп и телескоп су само неки покушаји да се интуицији јасније предоче нови бројеви. Интуиција о еуклидској правој се стиче од самих почетака школовања, и довољна је подршка за неформално увођење реалних бројева. Слична интуиција не постоји приликом увођења хиперреалних бројева и то је највећи проблем нестандардног приступа појмовима математичке анализе.

И таман када су ученици осетили да је реална бројевна права један добар модел праве линије у физичком простору и да не постоји тачка на њој која се не би могла представити реалним бројем, ученицима се уводе хиперреални бројеви од којих се „већина" налази између реалних бројева. Код неких ће се природно јавити питање, да ли постоје неки бројеви и између хиперреалних бројева? Увођењем хиперреалних бројева постоји осећај да се скуп реалних бројева на неки начин дискретизује, јер када избацимо хиперреалне бројеве ствара нам се утисак да реална бројевна права остаје непотпуна, огољена.

Управо се и овде јавља један проблем (чији је један предлог решења дат у поглављу 2.1 овог рада), тј. када треба да из рачуна елиминишемо инфинитезимале. Тада се употребљава функција стандардни део која слика скуп хиперреалних у скуп реалних бројева. Поставља се питање зашто смо уводили хиперреалне бројеве када их сад избацујемо и да ли смо увек сигурни да смо избацили праву ствар, односно да ли у рачуну постоји још нешто што би могло да се окарактерише као занемарљиво.

Такође при доказивању неких тврђења као што је теорема 2 потребно је позвати се на принцип трансфера иза којег као што смо напоменули стоји тешка машинерија математичке логике, а ако га покушамо избећи поставља се питање како смо из бесконачно много бројева могли да изаберемо један одговарајући.

Литература

[1] Х. Жероми Кислер, *Faundations of infinitesimal calculus*. Department of mathematics University of Wisconsin, Висконсин, САД 2011.

[2] М.Рашковић, Н.Икодиновић, *Приче о малим и великим бројевима*. Завод за уџбенике, Београд 2010

[3] Зоран Каделбург, Душан Аднађевић, *Математичка анализа I*. Математички факултет, Београд, 2008.

[4] Ж. Мијаиловић, Д.Аранђеловић, М.Рашковић, Р.Ђорђевић, *Нестандардна анализа*. Математички факултет, Београд 2014

[5] Марк МеКинзи, Курц Таки, *Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers, and Euler's Analysis of Infinities*, Mathematical Association of America, САД 2001

[6] Милутин Обрадовић, Душан Георгијевић, *Математика са збирком задатака за IV разред средње школе*. Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1996.