UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Nemanja Jelenić

Značajne tačke i linije u trouglu i veze izmedju njih

-master rad-

Beograd, 2016.

Sadržaj

Predgovor

Predmet izučavanja ovog master rada su značajne tačke i linije u trouglu, pod kojima se podrazumevaju tačke, prave, kružnice i druge krive 2, reda. Neke značajne tačke bile su poznate jos u antičkoj matematici, neke su otkrivene u srednjem veku a mnoge su otktivene u poslednjih 50 godina. Trenutno je poznato oko 5400 značajnih tačaka. Od tih mnogobrojnih tačaka u ovom radu je predstavljen jedan mali broj.

Prva glava je posvećena Opisanom krugu i njegovom centru. Pored definicije date su i neke osobine kao što su: Ako su date tri proizvoljne tačke na stranicama trougla, tada se krugovi opisani oko trouglova čija su temena date tri tačke i temena postojećeg trougla seku u jednoj tački; Da je tangenta kruga u tački dodira sa krugom normala na prečnik kruga u toj tački. Pored definicija i osobina dati su i grafički prikazi.
U drugoj glavi je obrađen upisan krug i njegov centar, spolja pripisan krug, i još neke osobine upisanog kruga u trougao. Treća je posvećena ortocentru. Dokazane su i neke osobine ortocentra kao što su: da tačke simetrične s ortocentrom u odnosu na prave određene stranicama trougla pripadaju krugu koji je opisan oko tog trougla, ili da rastojanje od temena do ortocentra trougla dvaput je veće od rastojanja centra opisane kružnice od naspramne stranice. U četvrtoj glavi se daje prikaz težišta sa nekim osobinama i grafičkim prikazima.

Peta glava govori o vezama opisanog i upisanog kruga i njihovih centara, težišta i ortocentra. Date su i dokazane neke njihove osobine, povezanost i grafički prikazi.
Šesta glava je posvećena Fermaovoj tački i Čevijevoj teoremi koja je potrebna za dokaz kako Fermaove tačke tako i za dokaze nekih osobina i ostalih tačaka koje su prikazane u ostalim glavama. U sedmoj glava je obrađena Ojlerova prava i kružnica, koje su nazvane po Leonardu Ojleru, Švajcarskom matematičaru. U sedmoj se dokazuje postojanje prve i druge Napoleonove tačke, i dalje u nared-

nim glavama Žergonova tačka, Presek simedijana, Nagelova tačka, Mikelova tačka i na kraju Simsonova prava.

Kao i prvih nekoliko tačaka i ostale tačke i linije su pored njihovih definicija i osobina predstavljene i grafički.

Na kraju je spisak korišćene literature.

Za tehničku izradu rada korišćeni su programi MikTex i WinGCLC.

Izuzetnu zahvalnost dugujem svom mentoru profesoru Lučiću na ukazanom poverenju, pruženom znanju, svim savetima i sugestijama. Posebnu zahvalnost dugujem svojoj porodici, roditeljima i sestri, kao i svim svojim prijateljima, koji su mi pružili podršku tokom dosadašnjeg školovanja.

Matematički fakultet
Beograd, 2016. godina

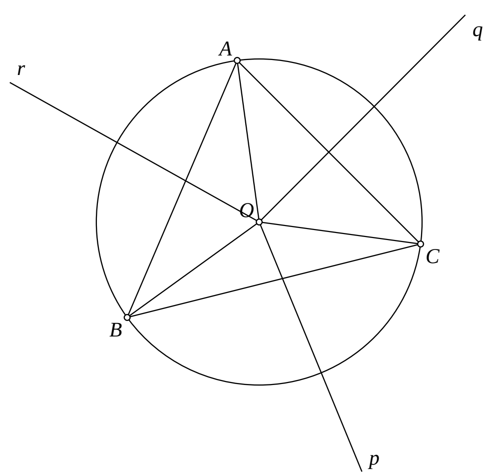
Nemanja Jelenić

Glava 1

Centar opisanog kruga

Poznato je da za svaki trougao postoji kružnica koja sadrži njegova temena. To se zasniva na činjenici da se simetrale stranica svakog trougla seku u jednoj tački. Tu tačku obično obeležavamo sa O.

Teorema 1.1 *Simetrale stranica svakog trougla seku se u jednoj tački.*

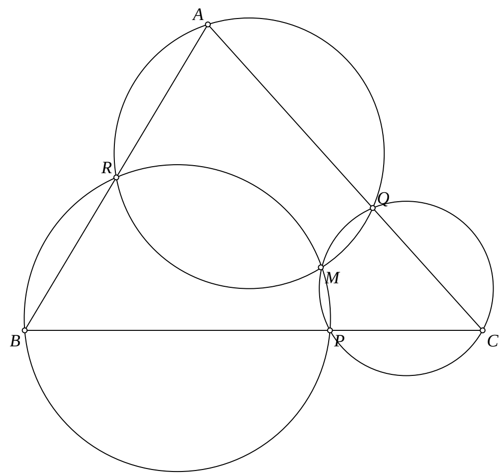


Slika 1.1:

Dokaz. Neka su p, q, r simetrale ivica BC, CA, AB trougla ABC. Dokažimo najpre da se prave p i q seku. Pretpostavimo suprotno tj. da su one paralelne i disjunktne. Na osnovu posledica Plejferove aksiome, kako prava AC seče pravu q, mora seći i njoj paralelnu pravu p. Prema teoremi o uglovima na transverzali je prava AC normalna i na pravoj p. Iz tačke C bi tada postojale dve normale na pravoj p što nije moguće. Dakle, simetrale p i q seku se u nekoj tački O. Tačka O je na simetrali duži BC pa je $OA \cong OB$. Takođe je i na simetrali duži AC pa je $OA \cong OC$. Tada je i $OA \cong OB$ tj. tačka O je i na simetrali r duži AB.

Teorema 1.2 *Ako su P, Q, R proizvoljne tačke stranica BC, CA i AB trougla ABC, dokazati da se krugovi opisani oko trouglova AQR, BRP, CPQ seku u jednoj tački.*

Dokaz. Krugovi opisani oko trouglova BRP i CPQ dodiruju se u tački P,ili se seku u tački P i još u nekoj tački M. U prvom slučaju, uglovi PQC i PRB su pravi, pa je četvorougao $ARPQ$ tetivan. Stoga tačka P pripada i krugu koji je opisan oko trougla AQR. U drugom slučaju tačka M je u trouglu ABC ili izvan njega. Ako je tačka M u trouglu ABC, bice susedni uglovi RMP i RMQ suplementni uglovima B i C, pa je i ugao QMR suplementan sa uglom A. Dakle četvorougao $MQAR$ je tetivan, pa je tačka M na krugu koji je opisan oko trougla AQR. Ako je tačka M izvan trougla ABC, npr. u uglu A, bice $\angle BRM = \angle BPM$ i $\angle MPC = \angle MQC$. No uglovi MPC i MQC su naporedni sa uglovima BPM i AQM, pa je $\angle BRM = \angle AQM$. S toga je četvorougao $MQAR$ tetivan, pa je i tačka M na krugu koji je opisan oko trougla AQR.



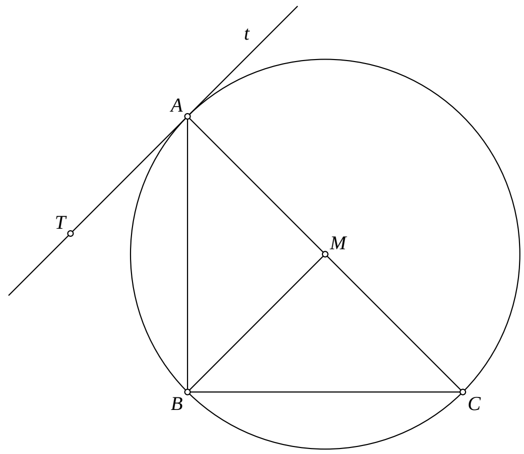
Slika 1.2:

Pre nego što dokažemo neku od osobina opisanog kruga uvešćemo jedan pojam.

Definicija 1.3 *Prava p neke ravni je tangenta kruga k te ravni u tački T ako je T njihova jedina zajednička tačka. Kaže se da u tom slučaju prava p dodiruje krug k u tački T.*

Dokažimo sledeći potreban i dovoljan uslov da je neka prava tangenta kruga:

Teorema 1.4 *Neka je T tačka kruga $k(O, r)$. Prava je PT tangenta tog kruga u tački T akko je $PT \perp TO$.*



Slika 1.3:

Dokaz. $\rightarrow$ Neka je PT tangenta kruga k u tački T. Ako ugao PTO nije prav, jedan od uglova koji određuju prave PT i TO je oštar. Neka je to ugao $\angle OTX = \omega < 90°$. Neka je l poluprava poluravni OTX sa početkom u tački O, takva da je $\angle OT, l = 180° - 2\omega$. Ako je Y presečna tačka polupravih TX i l, trougao OTY je jednakokraki ($\angle OTY = \angle OYT = \omega$), pa je $OT = OY = r$. To nije moguće jer je PT tangenta kruga k, pa sa njim ima samo jednu zajedničku tačku. Dakle, ugao PTO je prav.

$\leftarrow$ Neka je $PT \perp TO$. Za svaku tačku $T_1 \in T$ trougao OTT_1 je pravougli sa hipotenuzom OT_1, pa je $OT_1 > OT = r$. Dakle, proizvoljna tačka T_1 prave PT ne pripada krugu k, pa je PT zaista tangenta tog kruga.

Teorema 1.5 *Ako je k krug opisan oko trougla ABC, t tangenta kruga k u tački A i D tačka u kojoj prava kroz B uporedna sa t seče AC, dokazati da je $AB^2 = AC \cdot AD$.*

Dokaz. Ako sa T obeležimo proizvoljnu tačku tangenta t koja se nalazi s one strane prave AB s koje nije tačka C, biće $\angle TAB = \angle ACB$ i $\angle TAB = \angle ABD$, pa je $\angle ACB = \angle ABD$. Sem toga je $\angle BAC = \angle DAB$, pa je $\triangle ABC \sim \triangle ADB$. Otuda je $AB : AD = AC : AB$, i prema tome $AB^2 = AC \cdot AD$.

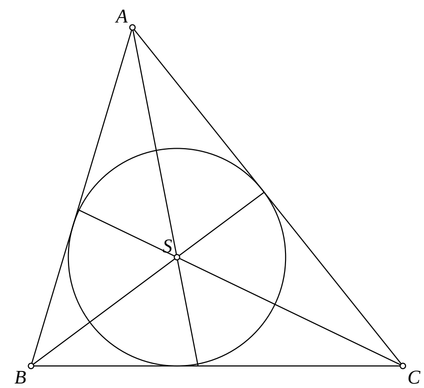
Glava 2

Centar upisanog kruga

Slično kao i za simetrale stranica, za simetrale unutrašnjih uglova trougla važi tvrđenje:

Teorema 2.1 *Simetrale unutršnjih uglova trougla seku se u jednoj tački.*

Dokaz. Neka su p , q i r simetrale unutrašnjih uglova α, β, γ kod temena A, B, C redom, trougla ABC. Ako bi prave odredjene polupravama q i r bile paralelne, na osnovu teoreme o transverzali paralelnih pravih bilo bi $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$. To nije moguće, jer je već $\alpha + \beta < 180°$, pa se simetrale q i r seku u nekoj tački S. Neka su K, L, M podnožja upravnih iz tačke S na ivicama AB, BC, AC redom. Trouglovi BSK i BSL su podudarni na osnovu stava USU jer su im svi uglovi podudarni, a imaju jednu zajedničku ivicu. Tada je $SK \cong SL$. Analogno, kako je tačka S na pravoj r, dokazujemo da je $SL \cong SM$. Koristeći tranzitivnost zaključujemo da je $SK \cong SM$. Sada je $SA \cong SA$, $SK \cong SM$, $\angle AKS \cong \angle AMS = 90°$ a uglovi KAS i MAS su oba oštra, pa su na osnovu stava SSU trouglovi AKS i AMS podudarni. Sledi da je $\angle KAS \cong \angle MAS$, pa je poluprava AS simetrala ugla α. Dakle, tačka S pripada i polupravoj p.

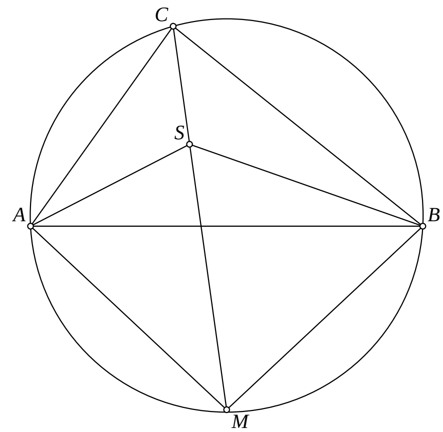


Slika 2.1:

Tačka S je jednako udaljena od stranica $\triangle ABC$, te je centar kruga koji ih dodiruje. Taj krug se zove upisani krug u $\triangle ABC$.

Osim toga, tačka S ima sledeću osobinu koja je povezuje sa opisanim krugom oko $\triangle ABC$.

Teorema 2.2 *Neka simetrala $\angle ACB$ seče krug opisan oko trougla ABC u tački M. Tada je $MS = MA = MB$, gde je S centar upisanog kruga.*



Slika 2.2:

Dokaz. $\angle ACM = \angle BCM = \frac{\gamma}{2}$, odakle dobijamo da je M središte luka $\widehat{AB}$, pa je $MA = MB$ (1)

$\angle ASM = \angle SAC + \angle SCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (2)

$\angle SAM = \angle SAB + \angle BAM = \frac{\alpha}{2} + \angle BBCM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (3)

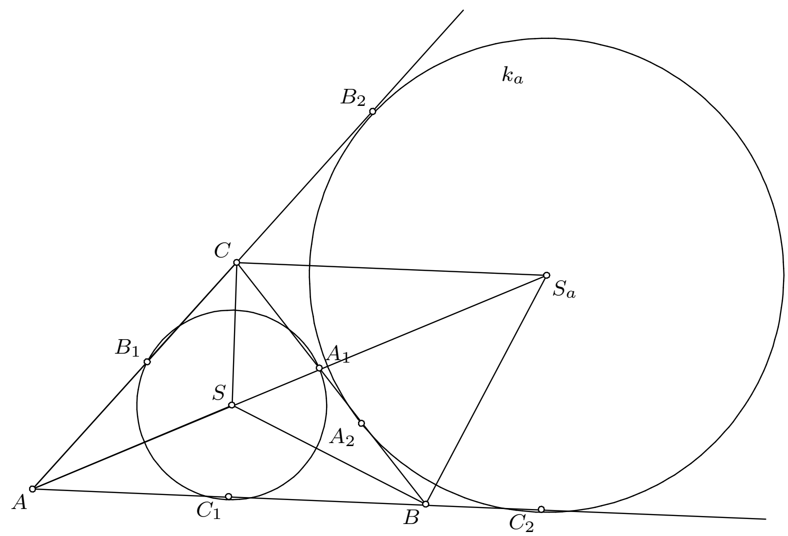
Iz (2) i (3) je $MA = MS$, a odatle i iz (1) da je $MA = MB = MS$.

Za simetrale jednog unutrašnjeg i dva spoljašnja ugla trogla važi slična teorema:

Teorema 2.3 *Simetrala jednog unutrašnjeg ugla trougla i simetrale spoljašnjih uglova kod druga dva temena seku se u jednoj tački - centru spolja pripisanog kruga.*

Teorema 2.4 *Neka krug upisan u trougao ABC dodiruje stranice BC, CA i AB redom u tačkama A_1, B_1 i C_1 i neka spolja pripisan krug k_a dodiruje stranicu BC u tački A_2 i produžetke stranica CA i AB u tačkama $B_2 i C_2$ redom. Tada je:*

a) $AC_2 = AB_2 = \frac{a+b+c}{2}$
b) $BA_2 = BC_2 = CA_1 = CB_1$, $CA_2 = CB_2 = BA_1 = BC_1$
c) $B_1B_2 = C_1C_2 = a$.



Slika 2.3:

Dokaz. Primetimo da su duži AB_1 i AC_1 jednake. Obeleimo njihovu duinu sa x. Takođe važi da je $BC_1 = BA_1 = y$ i $CA_1 = CB_1 = z$ (1). Na isti način dobijamo da je $BA_2 = BC_2$ i $CA_2 = CB_2$ (2)

Važi da je $AC_2 = AB_2$. Odatle dobijamo da je $x + y + BC_2 = x+z+CB_2$. Sada koristeći (2) imamo da je $x+y+BA_2 = x+z+CA_2$, pa je

$x + y + BA_2 + x + z + CA_2 = (x + y) + (x + z) + (BA_2 + CA_2) = a + b + c = 2(x + y + z)$

Sada imamo $x + y + BA_2 = \frac{1}{2}(a + b + c) = x + y + z$, odakle sledi da je $BA_2 = BC_2 = z$

Takođe, $x + z + CA_2 = x + y + z$ *, pa je* $CA_2 = CB_2 = y$.

Dobijamo: $BA_2 = BC_2 = CA_1 = CB_1 = z$ *i* $CA_2 = CB_2 = BA1 = BC1 = y$ *, pa je* $B1B2 = C1C2 = y + z = a$.

Glava 3

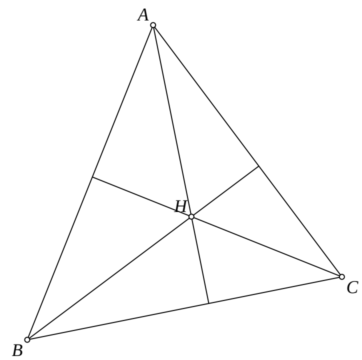
Ortocentar

Visina trouga je duž određena temenom trougla i podnožjem normale spuštene iz tog temena na naspramnu stranicu trougla. Za visine u trouglu važi sledeće tvrđenje.

Teorema 3.1 *Prave određene visinama trougla seku se u jednoj tački.*

Tu tačku obično obeležavamo sa H i nazivamo ortocentar trougla ABC.

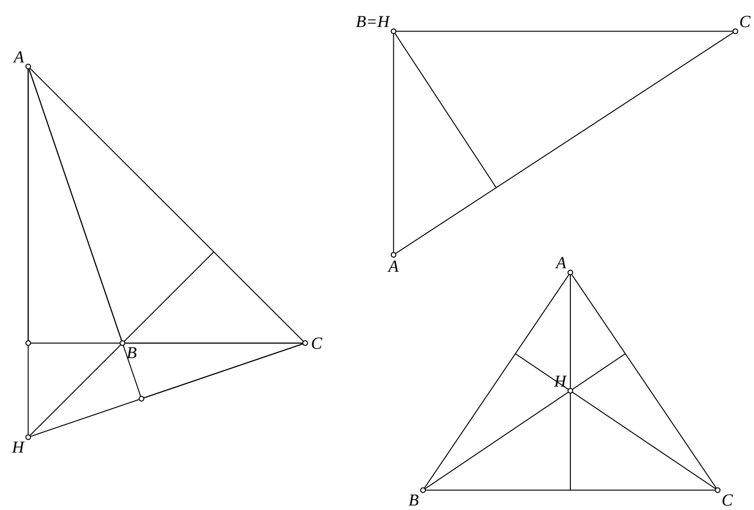
Dokaz. Neka su p, q, r prave koje sadrže temena A,B,C redom trougla ABC, normalne na njegove odgovarajuće visine $AA^{'}$, $BB^{'}$, $CC^{'}$. Prava $AA^{'}$ je zajednička normala pravih BC i p, pa je na osnovu teoreme o uglovima na transverzali $BC \parallel p$. Slično dokazujemo da je $AC \parallel q$ i $AB \parallel r$. Prave p i q ne mogu biti paralelne, jer bi tada bile paralelne i prave BC i AC, što nije moguˇce. Dakle, prave p i q se seku i njihovu presečnu tačku označimo sa R. Presečnu tačku pravih p i r označimo sa Q a pravih q i r sa P. Četvorougao $BCQA$ je paralelogram jer je $BC \parallel QA$ i $AB \parallel QC$. Na osnovu teoreme o paralelogramu je $BC \cong QA$. Slično dokazujemo da je i četvorougao $BCAR$ paralelogram pa je $BC \cong AR$. Dakle, važi i $QA \cong AR$ tj. tačka A je središte ivice RQ trougla PQR a prava AA' odgovarajuˇca tangenta. Analogno, i prave BB' i CC' su tangente ivica trougla PQR. Na osnovu teoreme 1.1, prave AA', BB', CC' seku se u nekoj tački H.



Slika 3.1:

Pogledajmo sada u kakvom su odnosu tačke A,B,C,H trougla ABC.

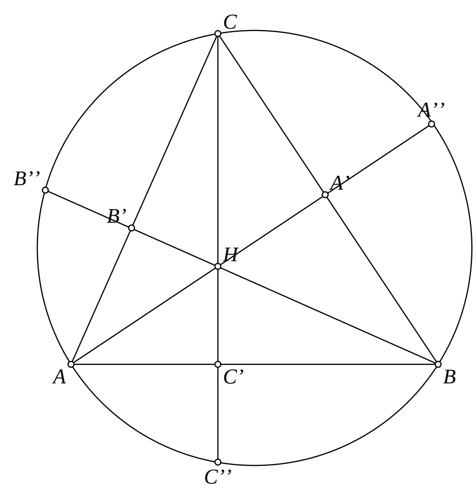
Teorema 3.2 *Ako je H ortocentar oštrouglog ili tupouglog trougla ABC tada je svaka od tačaka A,B,C,H ortocentar trougla koji obrazuju preostale tri.*



Slika 3.2:

Teorema 3.3 *Dokazati da tačke simetrične s ortocentrom u odnosu na prave određene stranicama trougla pripadaju krugu koji je opisan oko tog trougla.*

Dokaz. Obeležimo sa H tačku u kojoj se seku prave određene visinama AA', BB' i CC' trougla ABC, a sa A'', B'' i C'' tačke simetrične s ortocentrom H u odnosu na prave BC, CA i AB. Jedan od uglova B i C, npr. ugao B, je oštar, pa su tačke B i A'' s iste strane prave AC. Sem toga je $\angle AA''C = \angle HA''C = \angle A''HC = \angle A'HC = \angle C'B'A' = \angle ABC$, pa je tačka A'' na krugu koji je opisan oko trougla ABC. Analogno se dokazuje da i tačke B'' i C'' pripadaju tome krugu.

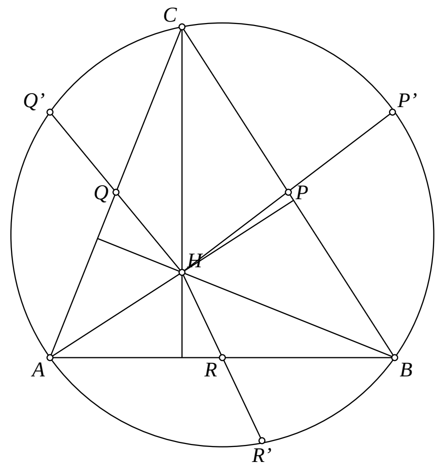


Slika 3.3:

Teorema 3.4 *Ako je H ortocentar, O središte opisanog kruga, i D podnožje visine iz temena A trougla ABC, zatim M tačka u kojoj se seku prave AO i BC, E središte duži OH i F središte duži AM, dokazati da tačke D, E, F pripadaju jednoj pravoj.*

Dokaz. Ako obeležimo sa A' središte stranice BC i sa A'' središte duži AH, duži OAA' i AA'' su jednake i istosmerna, pa je četvorougao $OAA''A'$ paralelogram, i prema tome $OA \parallel A'A'$, tj. $MA \parallel A''A'$. No duži OA' i HA'' su jednake i suprotno usmerene, te se središte E duži OH poklapa sa središtem duži $A'A''$. S obzirom da su tačke E i F središta dveju uporednih duži AM i $A''A'$, prava EF sadrži presek D pravih MA' i AA'.

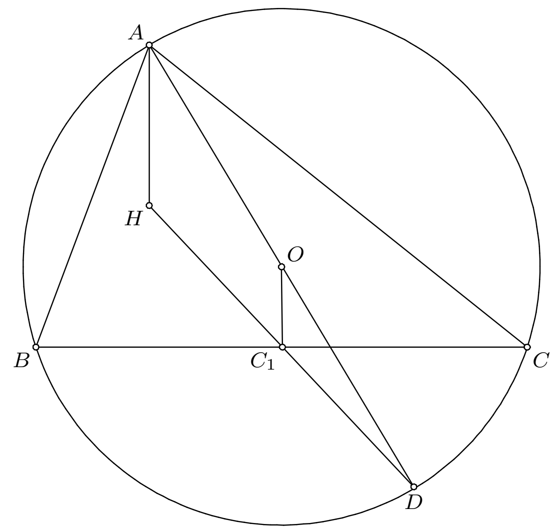
Teorema 3.5 *Tačke simetrične ortocentru trougla u odnosu na sredine stranica trougla pripadaju krugu opisanom oko trougla.*



Slika 3.4:

Dokaz. Neka su P, Q i R središta stranica BC, CA, AB redom trougla ABC. $\sigma_p(H) = P' \Rightarrow HP = P'P$ i važi da je $BP = CP$, pa je $BP'CH$ paralelogram (dijagonale se polove). Odavde sledi da je $\angle BP'C = \angle HPC = 180° - \alpha$. Odavde imamo da $P' \in k(A, B, C)$. Slično važi: $Q' \in k(A, B, C)$ i $R' \in k(A, B, C)$.

Teorema 3.6 *Rastojanje od temena do ortocentra trougla dvaput je veće od rastojanja centra opisanog kruga od naspramne stranice.*



Slika 3.5:

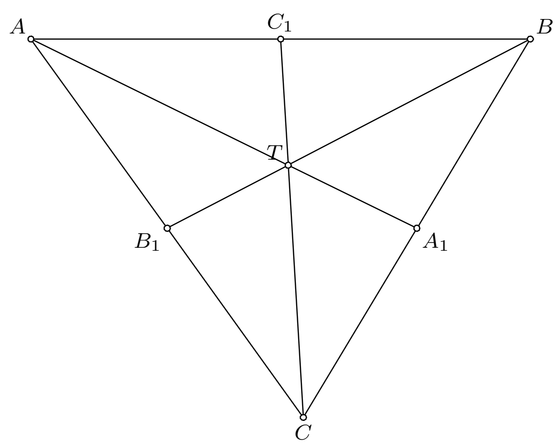
Dokaz. Iz prethodne teoreme dobijamo da je $HC_1 \cap CO = \{D\}$, gde $D \in k(A, B, C)$ i CD je prečnik tog kruga. Tada je OC_1 srednja linija trougla HDC odakle sledi traženo tvrđenje.

Glava 4

Težište

Duž čija je jedna krajnja tačka teme trougla a druga krajnja tačka sredina naspramne stranice naziva se težišna duž tog trougla.

Teorema 4.1 *Težišne duži trougla ABC seku se u tački T , koja ih deli u odnosu $2:1$, i to tako da je $AT = 2TA_1$; gde je A_1 sredite stranice BC.*



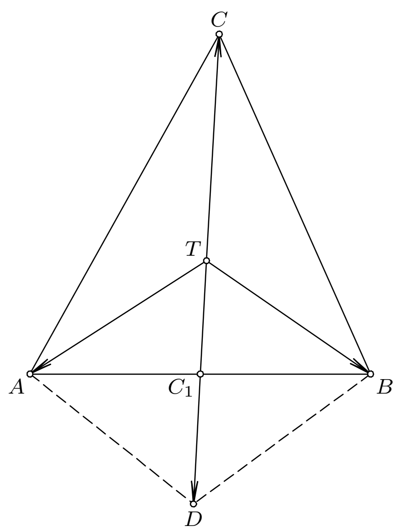
Slika 4.1:

Teorema 4.2 *Tačka T je težište trougla ABC ako i samo ako je*

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 0$$

Dokaz. $(\rightarrow)$ Neka je T težište trougla ABC i neka je tačka C_1 središte stranice AB. Tada je raspored $C-T-C_1$ i $CT = 2TC_1$. Neka je tačka D takva da važi $T-C_1-D$ i $TC_1 = C_1D$. Sada je $TADB$ paralelogram i važi: $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{TC_1} = -\overrightarrow{TC}$, a odatle sledi da je $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC} = 0$

$(\leftarrow)$ Neka je tačka X takva da važi $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC} = 0$, $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{XC_1}$ (C_1 je središte stranice AB) odavde sledi da je $\overrightarrow{TC} = -\overrightarrow{TC_1}$ odakle dobijamo $C-X-C_1$ i $CX = 2XC_1$, iz čega dobijamo da je tačka X u stvari težište trougla, tj. $X = T$.



Slika 4.2:

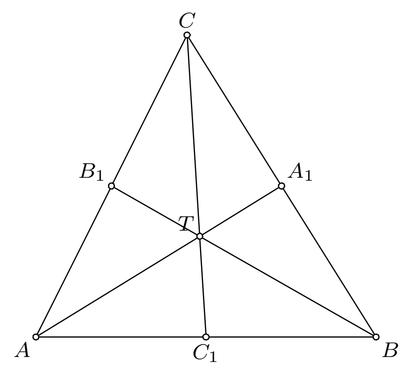
Teorema 4.3 *Težišne linije dele trougao na 6 trouglova jednakih površina.*

Dokaz. $P(ABC) = S$

$P(AC_1C) = P(BC_1C) = \frac{S}{2}$ (visina iz C zajednička, a osnovice jednake $\frac{C}{2}$)

$(AC_1T) = \frac{1}{3}P(AC_1C) = \frac{S}{6}$

Onda je $P(ATC) = \frac{S}{3}$, a trouglovi ATB_1 i B_1CT imaju jednake povrine (osnovica $\frac{b}{2}$), pa su i one jednake $\frac{S}{6}$.

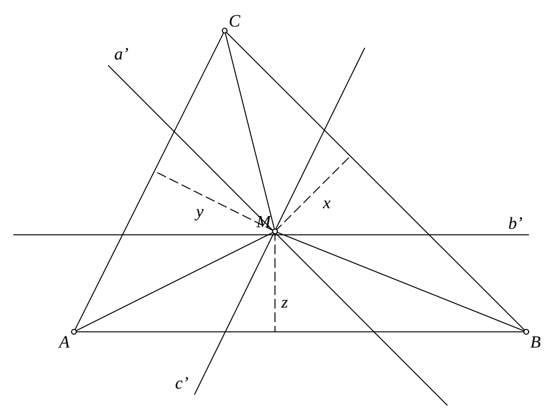


Slika 4.3:

Teorema 4.4 *Neka je M tačka koja pripada unutrašnjosti trougla ABC. Tačka M je težičšte trougla ABC ako i samo ako je $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM)$.*

Dokaz. $(\rightarrow)$ Neka je tačka M težište $\triangle ABC$. Iz prethodne teoreme $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM) = \frac{1}{3}P(ABC)$

$(\leftarrow)$ Neka je tačka M iz unutrašnjosti trougla ABC za koju važi $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM)$. Odavde dobijamo da je $P(ABM) = P(BCM) = P(CAM) = \frac{1}{3}P(ABC)$ (1). Obeležimo sa x, y, z rastojanja od tačke M do BC, CA i AB redom. Iz (1) sledi da je $x = \frac{1}{3}h_a$, $y = \frac{1}{3}h_b$, $z = \frac{1}{3}h_c$. Dobijamo da $M \in a' \cap b' \cap c' = T$, gde su a', b', c' prave paralelne sa a, b, c na udaljenosti x, y, z redom.



Slika 4.4:

Glava 5

Veze između težišta, ortocentra, opisane i upisane kružnice u trouglu

U ovom delu ćemo pokazati neke veze između do sada pomenutih značajnih tačaka trougla.

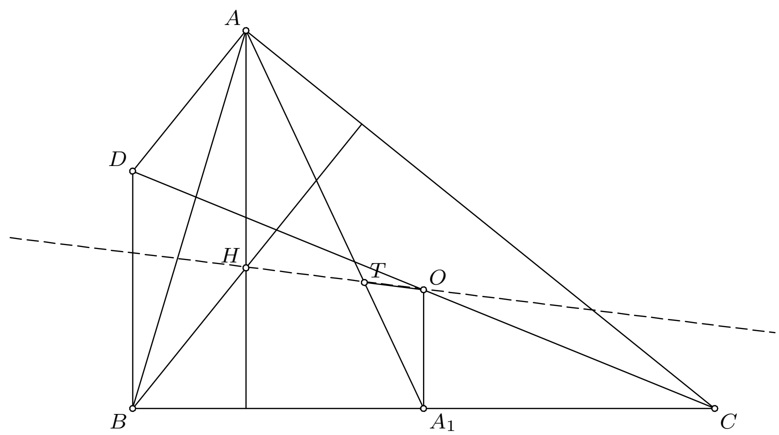
Teorema 5.1 *Ako je H ortocentar, T središte, O središte kruga opisanog oko trougla ABC i A_1 središte stranice BC, dokazati:*

(a) *da je duž OA_1 istosmerna s duži AH i jednaka njenoj polovini*

(b) *da tačke O, T, H pripadaju jednoj pravoj, pri čemu je $HT = 2TO$.*

Dokaz. (a) Heka je D tačka u kojoj prava OC seče krug l. Kako su tačke O i A_1 središta duži BC i CD, duž OA_1 je srednja linija trougla BCD, prema tome, ona je istosmerna s duži BD i jednaka njenoj polovini. Pored toga, prave BD i AH upravne su na pravoj BC, dakle, uporedne medu sobom. Isto tako, prave AD i BH upravne su na pravoj AC, te su i one medu sobom uporedne. Otuda sleduje da je četvorougao $AHBD$ paralelogram, pa je duž BD jednaka i istosmerna s duži AH, prema tome, duž OA_1 je istosmerna s duži AH i jednaka njenoj polovini.

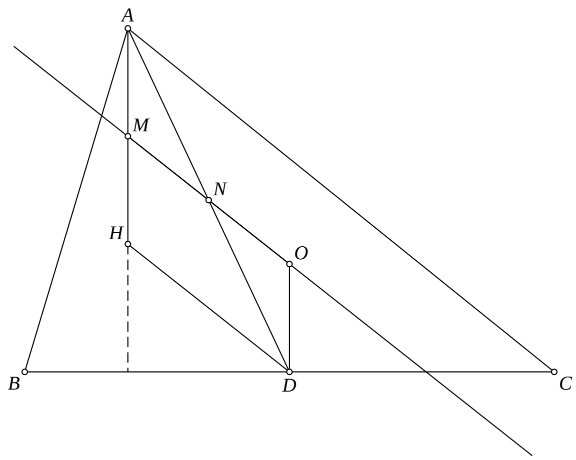
(b) S obzirom da je tačka T između tačaka A i A_1, takva da je $AT = 2TA_1$, a duži AH i OA_1 istosmerne pri čemu je $AH = 2OA_1$, biće tačka T između tačaka O i H takva da je $HT = 2TO$.



Slika 5.1:

Teorema 5.2 *Ako su H i O ortocentar i središte opisanog kruga trougla ABC, a M i N središte duži AH i težišne linije AD iz temena A, dokazati da tačke O, M, N pripadaju jednoj pravoj, štaviše da je tačka N središte duži OM.*

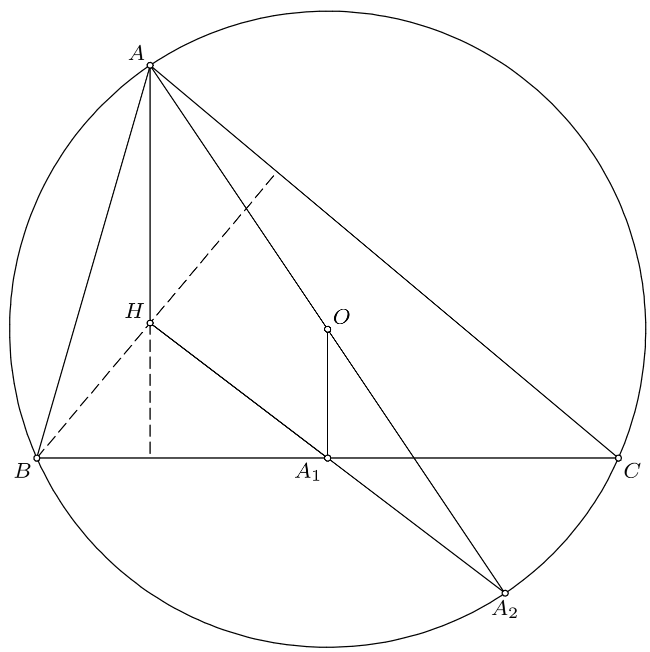
Dokaz. S obzirom da je tačka M središte duži AH, a duž OD istosmerna s duži AH i jednaka njenoj polovini, biće duž OD istosmerna i jednaka s duži MN, pa je četvorougao $HDOM$ paralelogram. Stoga je duž MO istosmerna i jednaka sa duži HD. No tačke M i N su središta stranica AH i AD trougla AHD, pa je duž MN istosmerna s duži HD i jednaka njenoj polovini. Otuda sleduje da su tačke O, M i N na jednoj pravoj, štaviše da je tačka N središta duži OM.



Slika 5.2:

Teorema 5.3 *Dokazati da tačke simetrične s ortocentrom u odnosu na središta stranica trougla pripadaju krugu koji je opisan oko tog trougla.*

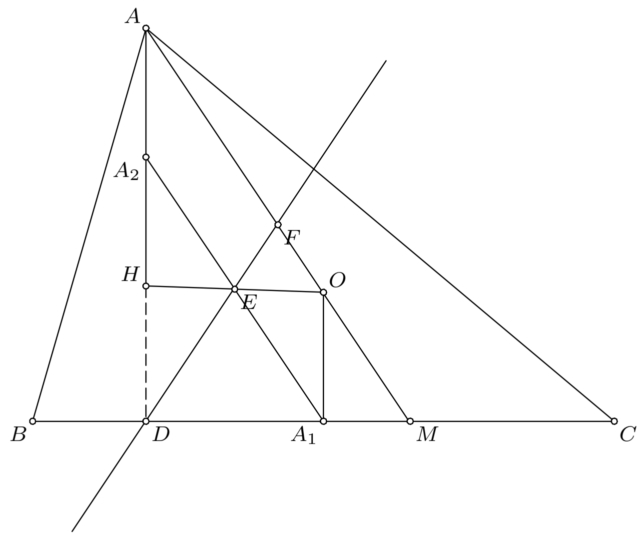
Dokaz. Obeleimo sa O središte kruga opisanog oko trougla ABC, sa H ortocentar tog trougla, sa A_1 središte stranlce BC i sa A_2 tačku koja je simetrična s tačkom H u odnosu na A_1. S obzirom da je tačka A_1 središte duži HA_2 a duž A_1O istosmerna s duži HA i jednaka njenoj polovini, biće tačka O središte duži AA_2, pa je tačka A_2 na krugu opisanom oko trougla ABC.



Slika 5.3:

Teorema 5.4 *Ako je H ortocentar, O središte opisanog kruga, i D podnožje visine iz temena A trougla ABC, zatim M tačka u kojoj se seku prave AO i BC, E središte duži OH i F središte duži AM, dokazati da tačke D, E, F pripadaju jednoj pravoj.*

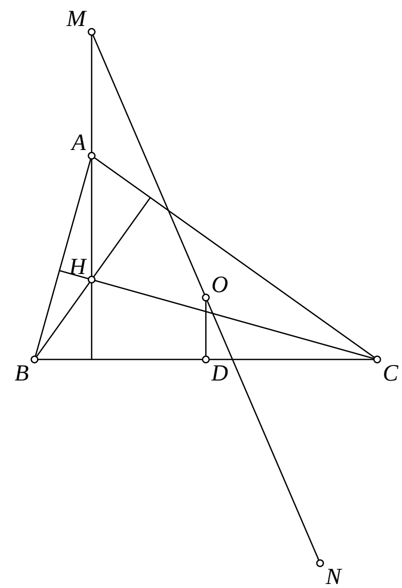
Dokaz. Ako obeležimo sa A_1 središte stranice BC i sa A_2 središte duži AH, prema teoremi 5.1, biće duži OA_1 i AA_2 jednake i istosmerna, pa je četvorougao OAA_2A_1 paralelogram, i prema tome $OA \parallel A_1A_2$, tj. $MA \parallel A_1A_2$. No duži OA_1 i HA_2 su jednake i suprotno usmerene, te se središte E duži OH poklapa sa središtem duži A_1A_2. S obzirom da su tačke E i F središta dveju uporednih duži AM i A_2A_1, prava EF sadrži presek D pravih MA_1 i AA_2.



Slika 5.4:

Teorema 5.5 *Ako je O središte opisanog kruga trougla ABC, M tačka simetrična s ortocentrom H tog trougla u odnosu na teme A i N tačka simetrična s temenom A u odnosu na središte D stranice BC, dokazati da tačke O,M,N pripadaju jednoj pravoj.*

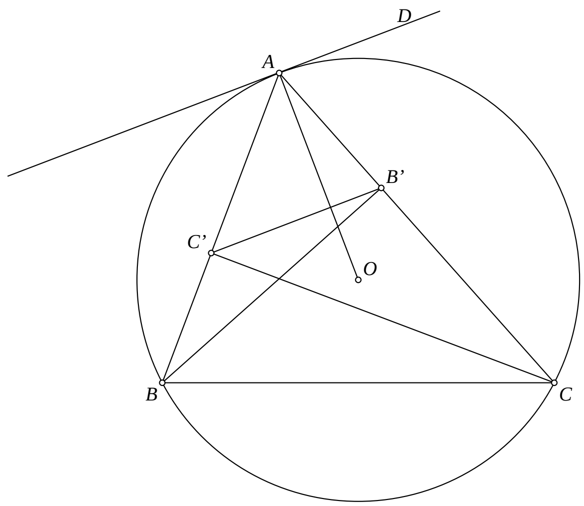
Dokaz. S obzirom da je tačka D središte duži AN, a prema teoremi 5.1 duž DO istosmerna s duži HA, odnosno duži AM, i jednaka njenoj polovini, tačke O, M, N pripadaju jednoj pravoj.



Slika 5.5:

Teorema 5.6 *Ako je $\angle A$ trougla ABC oštar i ako su B_1 i C_1 podnožja visina iz temena B i C, a O središte kruga k opisanog oko tog trougla, dokazati da je $OA \perp B_1C_1$.*

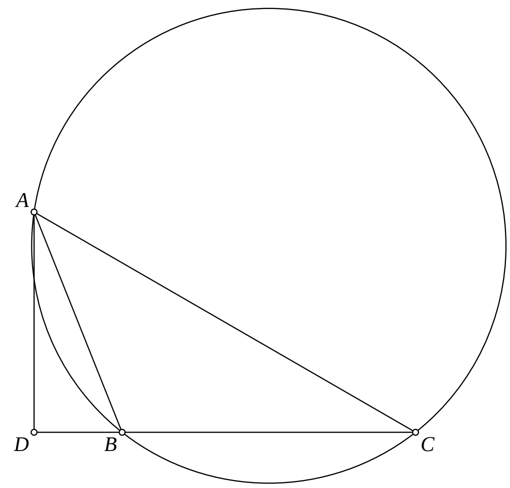
Dokaz. Ako je AD tangenta kruga k u tački A i D tačka te tangente koja se nalazi sa one strane prave AC s koje nije teme B,biće $\angle ABC = \angle CAD$. Otuda iz jednakosti $\angle ABC = \angle AB_1C_1$,sleduje $\angle AB_1C_1 = \angle CAD$. S obzirom da je $\angle A$ oštar,tačke B_1 i C_1 su na polupravama AC i AB. Stoga je $\angle CAD = \angle B - 1AD$ i prema tome $\angle AB_1C_1 = \angle B - 1AD$. Sem toga,tačke C_1 i D su s raznih strana prave AB_1,te su uglovi AB_1C_1 i B_1AD naizmenični. Iz jednakosti tih naizmeničnih uglova sleduje da su prave AD i B_1C_1 uporedne. Kako je prava koja sadrži poluprečnik OA kruga k upravna na tangentu AD, ona je upravna i na pravoj B_1C_1 koja je uporedna sa AD,pa je tvrdenje dokazano.



Slika 5.6:

Teorema 5.7 *Ako je prava koja sadrži visinu AD trougla ABC tangenta kruga opisanog oko trougla, dokazati da je razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao.*

Dokaz. S obzirom da prava AD dodiruje krug opisan oko trougla ABC, tačka D prave BC je izvan toga kruga , dakle iza B u odnosu na C ili iza C u odnosu na B. Neka je npr. tačka D iza B u odnosu na C. U tom slučaju je ugao DAB odreden tagentom AD i tetivom AB jednak periferijskom uglu ACB , pa je $\angle B - \angle C = \angle ABC - \angle DAB = \angle ADB$.



Slika 5.7:

Teorema 5.8 *Ako je H ortocentar trougla ABC i O središte kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je $BC^2 + AH^2 = 4OA^2$.*

Dokaz. Ako obeležimo sa D središte stranice BC trougla ABC, biće duž OB hipotenuza pravouglog trougla OBD, pa je $BD^2 + OD^2 = OB^2$. Pri tome je $BD = \frac{1}{2}BC, OD = \frac{1}{2}AH$, i $OB = OA$, pa je $BC^2 + AH^2 = 4OA^2$.

Glava 6

Fermaova tačka i Čevijeva teorema

Ovo je prvi centar u trouglu otkriven posle vremena starih Grka. Otkrivena je u 17. veku i dobila je ime po Pjeru de Fermau. Pjer de Ferma(Pierre de Fermat) je rođen 20. avgusta 1601. godine u gradu Bomon de Lomanj (Beamount de Lomagne), malom gradu na jugu Francuske nedaleko od Tuluza, u provinciji Langedok.

Slika 6.1: Pjer de Ferma

Fermaov otac, Dominik Ferma, bio je bogati trgovac kožom tako da je Pjer imao sreće da se obrazuje pri franačkom manastiru, a zatim da studira na univerzitetima u Tuluzu, Orleanu i Bordou i završi pravo. Još kao student pokazivao je nesumljivi talenat za matematiku istakavši se 1629. svojom restauracijom Apolonijevog dela "Značajne tačke u ravni".

Da bismo pokazali teoremu koja tvrdi postojanje Fermaove tačke biće nam potrebna Čevijeva teorema kao i lema 1.

Teorema 6.1 *(Čevijeva teorema) Neka je ABC proizvoljan trougao i neka su X, Y, Z, tačke na pravama BC, CA i AB redom, tako da nijedna nije teme trougla ABC . Prave AX, BY, CZ se seku u jednoj tački ili su sve tri paralelne ako i samo ako je*

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1 \qquad (1)$$

.

Dokaz.

Uslov je potreban. Neka se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u tački P. Postavimo pravu kroz teme A trougla ABC paralelnu pravoj BC i neka su presečne tačke te prave se BB_1 i CC_1 redom tačke N i M.

Iz Talesove teoreme sledi:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{BC}}$$

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{MA}}$$

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AN}}$$

.

Množeći ove tri proporcije dobija se tražena jednakost (1).

Neka su prave AA_1, BB_1, CC_1 paralelne.

Tada po Talesovoj teoremi imamo:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{BC}}$$

i

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}},$$

pa je jednakost (1) tačna.

Uslov je dovoljan.

Neka je tačna jednakost (1). Treba dokazati da se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u jednoj tački, ili da se paralelne. Za dve prave AA_1, BB_1 su moguća dva slučaja:

(a) Prave AA_1, BB_1 seku se u jednoj tački P.

(b) Prave AA_1, BB_1 su paralelne.

Razmotrimo prvi slučaj i dokažimo da i CC_1 sadrži tačku P.
Pretpostavimo suprotno. Neka prava CP seče AB u tački C_2.

Tada je po uslovu (1)

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = 1$$

Kako važi i da je

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

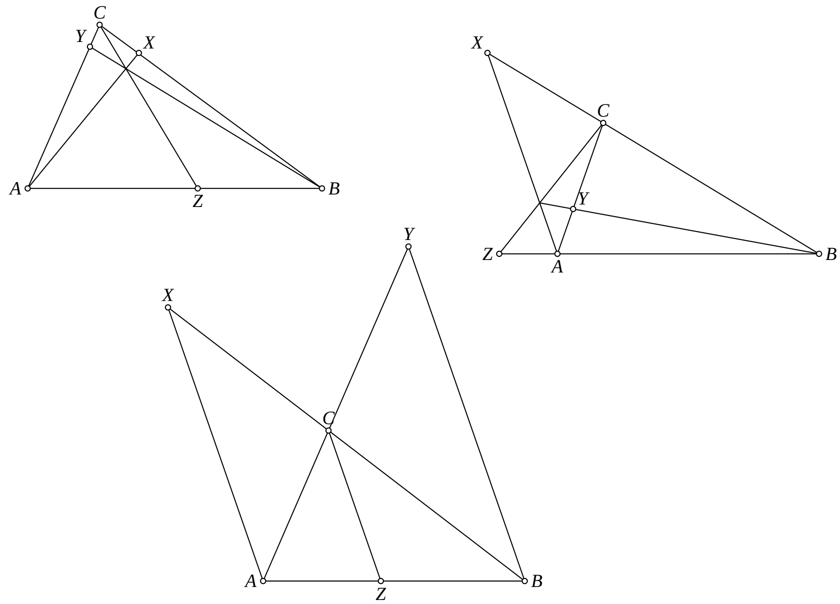
, to dobijamo

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}}$$

.

To znači da se tačke C_1 i C_2 poklapaju, a to opet znači da tačka P pripada pravoj CC_1.

(b) Ako su prave AA_1 i BB_1 paralelne, to će i prava CC_1 biti paralelna, jer ako bi CC_1 sekla BB_1. tada bi po ranije dokazanom, i prava AA_1 prolazila kroz presečnu tačku, što je u suprotnosti sa paralelnošću pravih AA_1, BB_1.



Slika 6.2:

Lema 1 *Neka su tačke C i D van prave AB i neka se prave CD i AB seku u tački S. Tada je $P_1 : P_2 = CS : DS$, gde je*
$P_1 = P(ABC)$ i $P_2 = P(ABD)$.

Teorema 6.2 *Neka je ABC proizvoljan trougao i neka su BCA', ACB', ABC' jednakostranični trouglovi, takvi da tačke A', B' i C' leže sa onih strana pravih BC, CA i AB sa kojih nisu temena A, B i C redom. Tada se prave AA', BB' i CC' seku u tački F - Fermaovoj tački trougla ABC.*

Dokaz. Na slici je slučaj kada su sva tri ugla u trouglu manja od $120°$.

Obeležimo $AA' \cap BC = \{K\}$, $BB' \cap CA = \{L\}$, $CC' \cap AB = \{M\}$.

Trouglovi BCB i ACA su podudarni, jer važi:$\angle BCB = \angle ACA = \gamma + 60°$, stranice CA i CB' su podudarne i stranice CA' i CB su podudarne. Analogno, trouglovi CAC i BAB , kao i ABA i CBC su podudarni. Tada je:

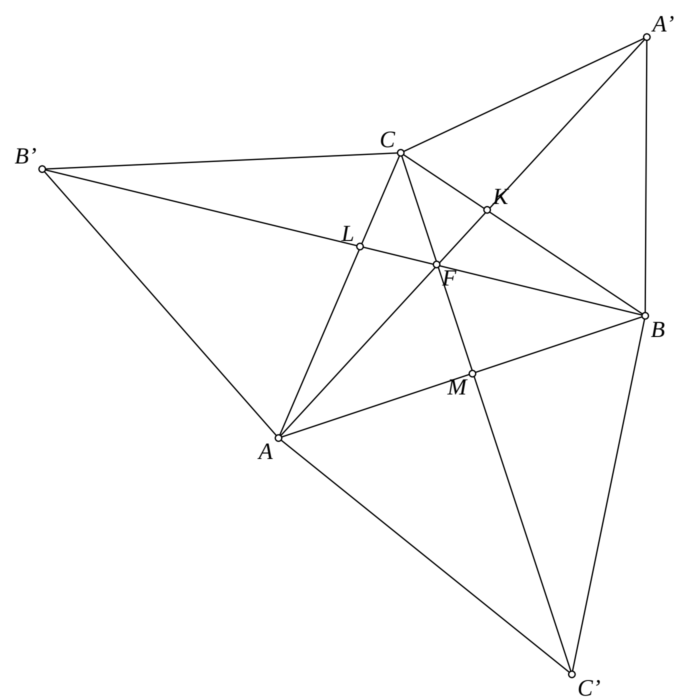
$$P(BCB) = P(ACA) = P_1 \ ; \ P(CAC) = P(BAB) = P_2 \ \ ;$$

$$P(ABA) = P(CBC) = P_3 \quad (1)$$

Na osnovu Leme 1 sledi

$$\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = \frac{P_3}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_3} = 1$$

Sada iz Čevijeve teoreme dobijamo da se AA', BB' i CC' seku u nekoj tački F.



Slika 6.3:

Za Fermaovu tačku F važe sledeća tvrđenja:
1) prave AA', BB' i CC' seku jedna drugu pod uglom od 60°
2) Duži AA', BB' i CC' su jednake
3) $k\,(B, C, A') \cap k\,(C, A, B') \cap k\,(A, B, C') = \{F\}$

Glava 7

Ojlerova prava i krug

Leonard Ojler, rođen 1707. godine u Švajcarskoj, a umro 1783. godine. Tokom svog života radio je širom Evrope. Do svoje tridesete godine oslepeo je na jedno oko, a do svoje šezdesete godine potpuno je izgubio vid. Uprkos tome nastavio je da radi, diktirajući svoje obimne teorije i izračunavanja asistentima. Ojlerov lik je nekoliko puta štampan na poštanskim markicama u Švajcarskoj, Nemačkoj i Rusiji, na novčanici od 10 švajcarskih franaka a asteroid 2002 Ojler je dobio ime u njegovu čast. Luteranska crkva ga je uvrstila u svoj kalendar svetaca. Sećanju na Ojlera su posvetili 24. maj.

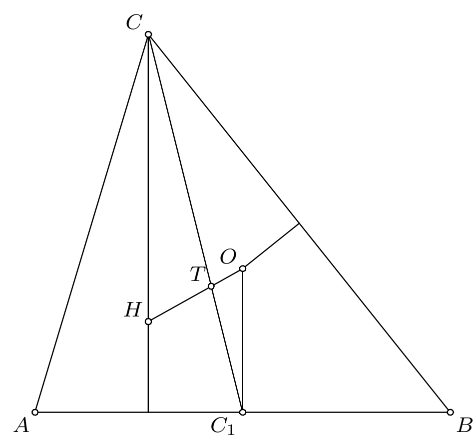
Slika 7.1: Ojler

Ojler je 1765. godine ustanovio da su centar opisane kružnice oko trougla, težište trougla i ortocentar uvek tri kolinearne tačke koje se u slučaju jednakostraničnog trougla poklapaju. U čast Ojlera ta prava se zove Ojlerova prava.

Posmatraemo sada u kakvom su odnosu tačke H, T i O.

Teorema 7.1 *U svakom trouglu tačke H, T i O su kolinearne i važi $HT = 2TO$. Ova prava naziva se Ojlerova prava.*

Dokaz. Neka su T i O težište i centar opisane kružnice i neka je G tačka na pravoj OT takva da je $GT = 2TO$ i $G - T - O$. Neka je $_1$ središte stranice AB. Trouglovi C_1OT i CGT su slični, zato što važi: $\angle C_1OT = \angle CTG$ i $C_1T : CT = OT : GT = 1 : 2$. Odatle dobijamo da su uglovi $\angle OC_1T = \angle GCT$, što povlači da su prave OC_1 i GT paralelne. Pošto je $OC_1 \perp AB$ dobijamo da je i $GC \perp AB$ .Analogno dobijamo da su i prave BG i AG visine trougla pa se tačka G poklapa sa ortocentrom, tj. $G \equiv H$.

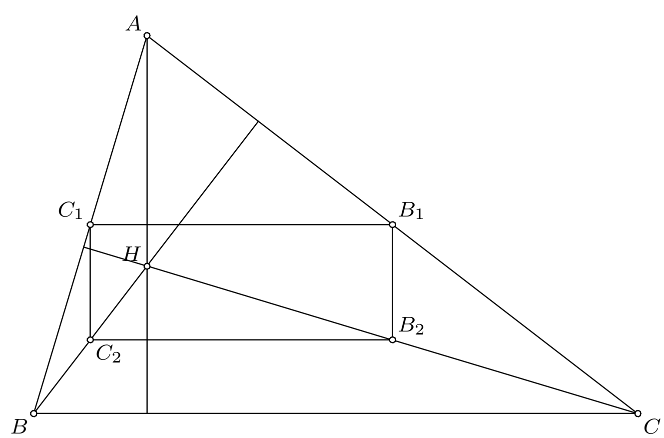


Slika 7.2:

Fojerbah je otkrio da podnožja visina trougla kao i središta duži koje spajaju ortocentar sa temenima trougla pripadaju istoj kružnici, a Ojler je 1765. godine pokazao da ta kružnica sadrži i središta stranica trougla. Nju nazivamo Ojlerovom kružnicom, a ponekad koristimo i termin kružnica dvet tačaka.

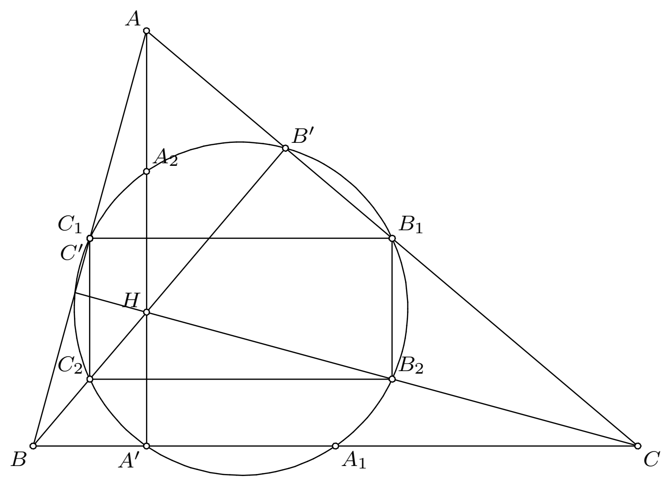
Teorema 7.2 *Središta ivica, podnožja visina i središta duži određenih ortocentrom i temenima proizvoljnog trougla pripadaju jednom krugu (Ojlerov krug).*

Dokaz. Pokazaćemo najpre da važi tvrđenje: ako je H ortocentar trougla ABC i ako su C_1, B_1, C_2, B_2 središta duži AB, AC, HC, HB tada je četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ pravougaonik. Duži C_1B_1 i C_2B_2 su srednje linije trouglova ABC i HBC i odgovaraju istoj ivici BC, pa su kao takve podudarne i paralelne. Dakle, četvorougao $C_1B_1C_2B_2$ je paralelogram. Dovoljno je dokazati još i da mu je jedan ugao prav. Ali, duž C_1B_2 je srednja linija trougla ABH, pa je paralelna sa AH, tj. sa visinom trougla iz temena A. Dakle, C_1B_2 je normalna na ivicu BC, odnosno njoj paralelnu duž C_1B_1, pa je paralelogram $C_1B_1C_2B_2$ zaista pravougaonik. Slično, ako je AA_1 središte ivice BC i AA_2 središte duži AH, tada je i $A_1C_2A_2C_1$ takođe pravougaonik. Kako je C_1C_2 zajednička dijagonala tih pravougaonika, oko njih se može opisati krug (nad C_1C_2 kao prečnikom).
Ostaje da dokažemo da i podnožja visina pripadaju tom krugu. Ali tačka A', kao podnožje visine iz temena A, pripada tom krugu jer je ugao $A_2A'A_1$ prav (A_1A_2 prečnik). Slično se dokazuje i za preostale dve tačke.



Slika 7.3:

U ovom primeru imamo krug koji sadrži devet tačaka, a njegov centar nazivamo centar devet tačaka, i on takođe spada u značajne tačke trougla.



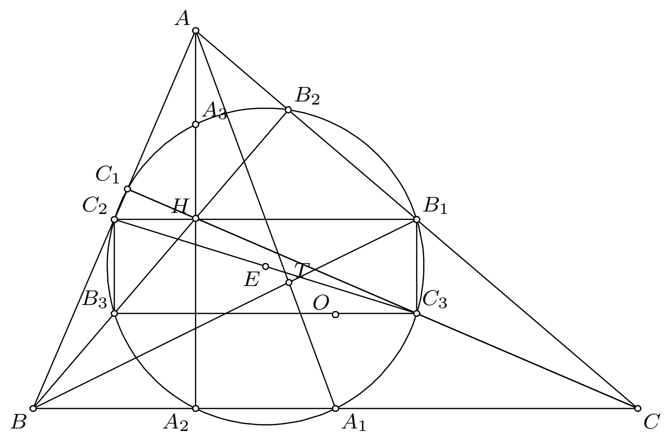
Slika 7.3:

Za centar Ojlerove kružnice G i njen poluprečnik r važi sledeće tvrđenje:

Teorema 7.3 *Neka su O i H redom centar opisane kružnice i ortocentar trougla ABC i neka je $k(G, r)$ Ojlerova kružnica za $\triangle ABC$. Tada je G sredina duži OH i $r = \frac{1}{2}R$, gde je R poluprečnik opisanog kruga.*

Teorema 7.4 *Dokazati da se središte Ojlerovog kruga bilo kojeg trougla poklapa sa središtem duži koja spaja ortocentar sa središtem opisanog kruga tog trougla, zatim da je poluprečnik toga kruga jednak polovini poluprečnika opisanog kruga.*

Dokaz. Pored oznaka uvedenih u prethodnoj teoremi, obeležimo sa O središte kruga l opisanog oko trougla ABC. Prema teoremi 145, duž OA_1 jednaka je i istosmerna s duži A_3H, pa je četvorougao A_1HA_3O paralelogram. Stoga se središte E duži A_1A_3, tj. središte Ojlerovog kruga l' trougla ABC, poklapa sa središtem duži OH. S obzirom da su tačke E i A_3 središta starnica OH i AH trougla OAH, duž EA_3 jednaka je polovini duži OA, pa je poluprečnik Ojlerovog kruga l' jednak polovini poluprečnika opisanog kruga trougla ABC.



Slika 7.4:

Teorema 7.5 *Ako su A_1, B_1, C_1 središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da se Ojlerova prava trougla $A_1B_1C_1$ poklapa sa Ojlerovom pravom trougla ABC.*

Dokaz. Središte O kruga opisanog oko trougla ABC je ortocentar trougla $A_1B_1C_1$, a težište T trougla ABC istovetno s težištem trougla $A_1B_1C_1$, pa se Ojlerova prava trougla $A_1B_1C_1$ poklapa s Ojlerovom pravom trougla ABC.

Glava 8

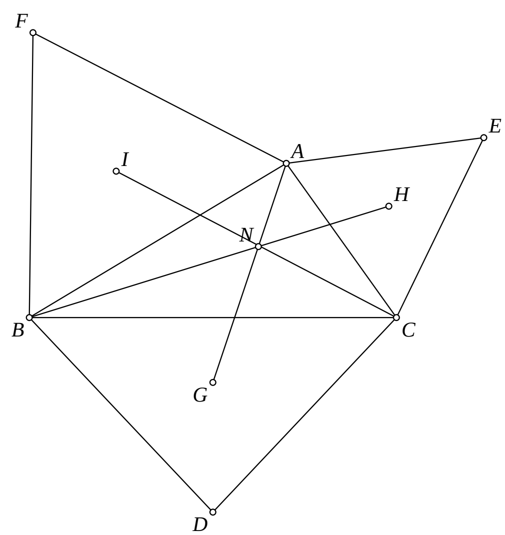
Napoleonove tačke

Veruje se da je postojanje ovih tačaka otkrio Napoleon Bonaparta početkom 18. veka.

Slika 8.1: Napoleon

Napoleon I Bonaparta (Ajačo, 15. avgust 1769. Longvud, Sveta Jelena, 5. maj 1821.) je bio general u Francuskoj revoluciji i kao vođa bio je prvi konzul Francuske Republike od 11. novembra 1799. do 18. maja 1804. i car Francuske i kralj Italije. Napoleonovo plemićko i umereno imućno poreklo i porodične veze pružile su mu mnogo veće mogućnosti da se obrazuje i školuje. Kada je imao devet godina upisan je 15. maja 1779. u francusku vojnu školu, Nakon maturiranja na vojnoj školi u Brijanu 1784. Napoleon je primljen na elitnu Kraljevsku vojnu školu u Parizu. Tu je u jednoj godini završio dva razreda. Jedan ispitivač je smatrao da je dobar za proučavanje apstraktnih nauka i da poseduje duboko znanje matematike i geografije. Na vojnoj školi je specijalizovao artiljeriju, iako je u početku tražio mornaricu. Diplomirao je septembra 1785. i preuzeo je vojnu dužnost kao artiljerijski potporučnik u januaru 1786. sa samo 16 godina.

Neka je ABC trougao. Neka su D, E i F tačke, takve da važi da su trouglovi DBC, CAE, ABF jednakostranični. Neka je tačka G težište trougla DBC, tačka H težište trougla CAE i tačka I težište trougla ABF.
Prave AG, BH i CI seku se u tački N. Nju nazivamo prva Napoleonova tačka.

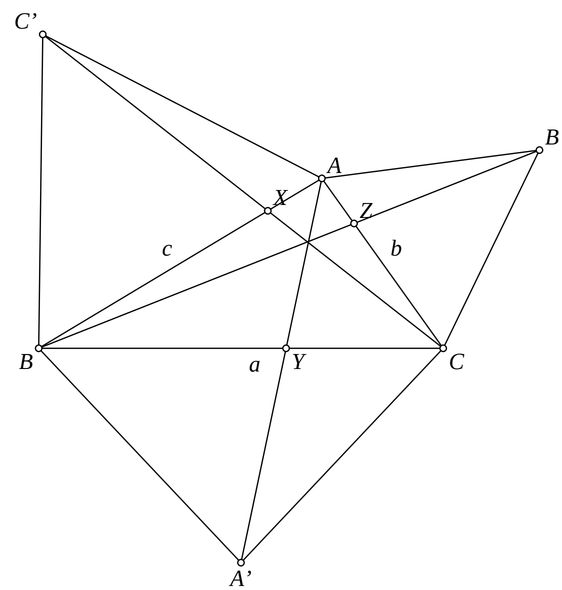


Slika 8.2:

Dokažimo sada postojanje prve Napoleonove tačke.

Teorema 8.1 *Neka je dat trougao ABC i neka su A', B' i C' tačke takve da važi*
$\angle ABC' = \angle CBA' = \angle BCA' = ACB' = \angle CAB' = \angle BAC' = 60°$
(Pri čemu su tačke A', B' i C' ili istovremeno sa iste strane kao i

taA', B' i C'ke A, B i C, redom, u odnosu na odgovarajuće stranice trougla ABC, ili istovremeno sa različitih strana). Tada se prave AA', BB' i CC' seku u istoj tački.



Slika 8.3:

Dokaz. Neka su trouglovi ABC', $AB'C$ i $A'BC$ izvan trougla ABC. Drugi slučaj radi se slično.
Primećujemo da je $BC' = AC'$. Tačka X je presek AB i CC'. Površina trougla BCC' jednaka je $a \cdot BC' \cdot \sin(B + 60°)$, pa važi

$$\frac{P(ACC')}{P(BCC')} = \frac{b \cdot AC' \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot BC' \cdot \sin(B + 60°} = \frac{b \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot \sin(B + 60°}$$

Pošto ACC' i BCC' imaju istu stranicu CC', visine iz temena B i A na CC' moraju biti u istom odnosu kao i površine tih trouglova, pa i BX i AX. Iz toga sledi:

$$\frac{AX}{BX} = \frac{b \cdot \sin(A + 60°)}{a \cdot \sin(B + 60°)}$$

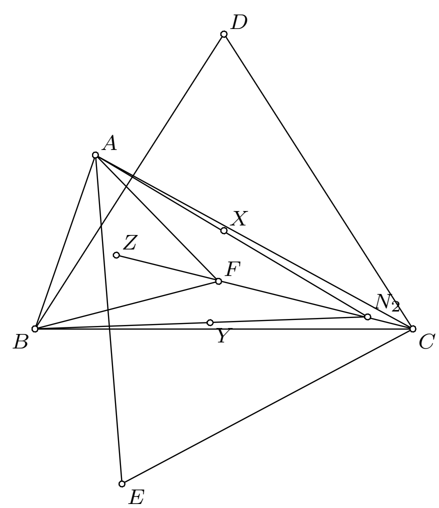
Analogno dobijamo i za odnose $\frac{BY}{CY}$ i $\frac{AZ}{CZ}$. Množenjem ovih jednakosti dobijamo:

$$\frac{b \cdot \sin(A+60^\circ)}{a \cdot \sin(B+60^\circ)} \cdot \frac{c \cdot \sin(B+60^\circ)}{b \cdot \sin(C+60^\circ)} \cdot \frac{a \cdot \sin(C+60^\circ)}{c \cdot \sin(A+60^\circ)} = 1$$

Sada, iz Čevine teoreme dobijamo da se XC, YA i ZB seku u istoj tački, a tada se i AA', BB' i CC' seku u istoj tački.

Napomena. Kada bismo u prethodnoj teoremi umesto ugla od 60° stavili bilo koji ugao t, tvrđenje bi takođe važilo.

Sada sa unutrašnjih strana trougla ABC konstruišimo jednakostranične trouglove DBC, ECA, FAB redom i neka su X, Y i Z njihova težišta . Tada se prave AX, BY i CZ seku u istoj tački N_2, koju nazivamo druga Napoleonova tačka.

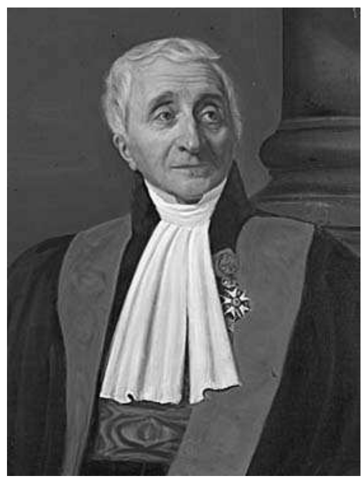


Slika 8.4:

Glava 9

Žergonova tačka

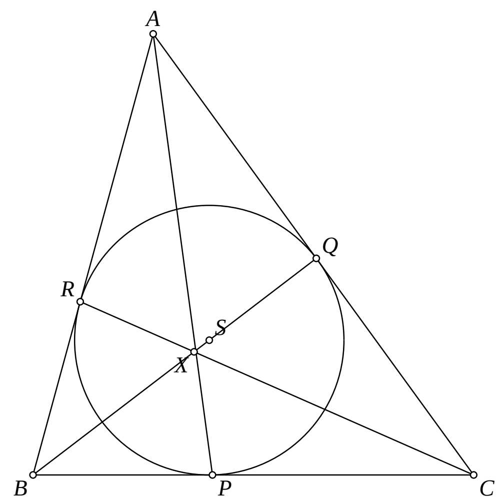
Žergonovu tačku je 1818. godine otkrio francuski matematičar J.D. Žergon $(1771 - 1859)$, po kome je i dobila ime.



Slika 9.1: Gergonne

Dzozef Dijaz Žergon (19. Jun 1771. - 4. Maj 1859.) je francuski matematičar i logičar. Zbog mnogobrojnih bitaka usled Francuske revolucije i invazije na Španiju, bio je u vojsci do 1795. godine, a zatim odlazi u Pariz gde počinje svoju matematičku karijeru. 1810. osniva svoj matematički časopis, usled prepreka na koje je nailazio u pokušajima da publikuke svoje radove u postojećim naučnim časopisima. 1816. odlazi na Univerzitet u Monpeljeu, gde je 1830. postavljen za rektora univerziteta, a u tom periodu prestaje da izdaje svoj časopis. Penzionisan je 1844.

Neka je k kružnica upisana u trougao ABC i neka su njeni preseci sa stranicama BC, CA i AB tačke P, Q i R, redom. Tada se duži AP, BQ i CR seku u jednoj tački X i ona se naziva Žergonova tačka trougla ABC.



Slika 9.2:

Pokažimo sada postojanje ove tačke.

Teorema 9.1 *Prave određene temenima i dodirnim tačkama naspramnih ivica sa upisanim krugom trougla ABC seku se u jednoj tački.*

Dokaz. Neka su P, Q i R dodirne tačke kruga upisanog u trougao ABC sa njegovim ivicama BC, CA i AB redom. Tada su podudarne odgovarajuće tangentne duži: $BP \cong BR$, $CP \cong CQ$, $AQ \cong AR$. Tada je $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$. Kako važi da je raspored $(B - P - C)$, $(C - Q - A)$, $(A - R - B)$, mora biti $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} > 0$. Odatle sledi $\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$. Odavde i iz Čevine teoreme prave AP, BQ i CR seku se u jednoj tački (nisu paralelne jer se AP i BQ seku na osnovu Pašove aksiome).

Glava 10

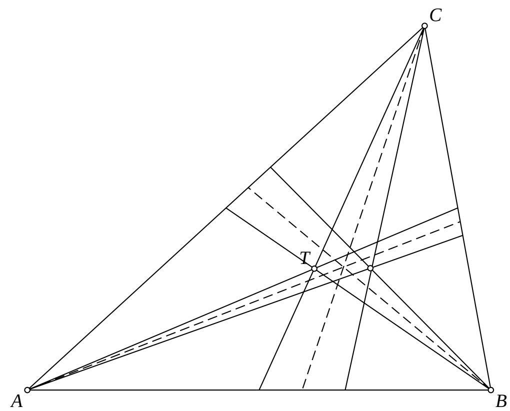
Presek simedijana (Lemoanova tačka i Lemoanova prava trougla)

Francuski matematičar Emil Lemoan dokazao je postojanje tačke preseka simedijana 1873. godine. Iz tog razloga ovu tačku često zovemo Lemoanova tačka.

Slika 10.1: Lemoine

Emil Lemoan $(1840-1912)$ bio je civilni inženjer i matematižčar, njegova oblast istraživanja bila je pre svega geometrija. Školovao se na različitim univerzitetima. Kao dečak pristupa stipendiranom školovanju na Military Prytanee of La Fleche, buduci da je njegov otac inače ugledni kapetan pomogao osnivanju ove škole. U svojoj dvedesetoj godini, biva primljen na EcolePolytechnique u Parizu, a iste godine mu i umire otac. Kao student, Lemon učestvuje u osnivanju amaterske muzičke grupe pod imenom La Trompette. Posle diplomiranja razmišlja o pravnoj karijeri, međutim, njegova republikanska ideologija i liberalni religijski pogledi kose se sa idealima službene vlasti. Umesto toga, studira i podučava na više različitih univerziteta, i bavi se privatnim podučavanjem a onda biva postavljen za profesora na EcolePolytechniqu. Lemon je najpoznatiji po svom dokazu postojanja Lemonove tačke trougla. Drugi matematički radovi uključuju sistem koji je on nazvao Geometrographie i metode koje se odnose na algebarske izraze za geometrijske objekte. 1894. Lemon učestvuje u osnivanju matematičkog časopisa pod imenom Lintermediaire des mathematiciens, zajedno sa Charles Laisant. Godinu dana od početka publikovanja časopisa Lemon se povlačči od matematčkih istraživanja, ali nastavlja sa uredništvom časopisa. Umire 21. februara 1912, u svom domu u Parizu.

Ako je duž AA' medijana iz temena A trougla ABC, a A'' tačka u kojoj prava simetrična s pravom AA' u odnosu na simetralu unutrašnjeg ugla $\angle A$ seče stranicu BC, kažemo da je duž AA'' unutrašnja simedijana ili samo simedijana iz temena A trougla ABC. Ako je T tačka u kojoj tangenta kroz tačku A kruga opisanog oko trougla ABC seče pravu BC, kažemo da je duž AT spoljašnja simedijana iz temena A trougla ABC. Specijalno, ako je ugao $\angle A$ trougla ABC prav, simedijana iz temena A poklapa se s visinom iz tog istog temena.

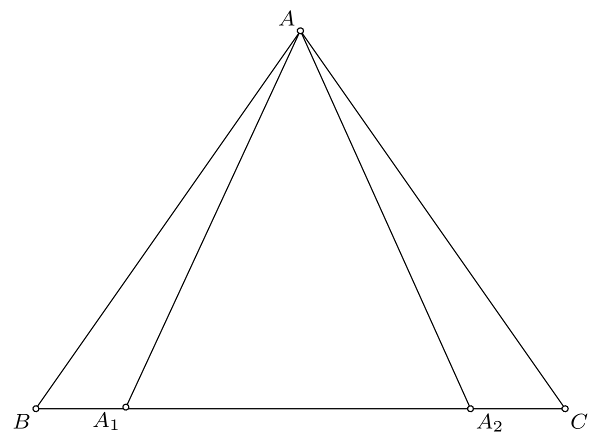


Slika 10.2:

Sledeće teoreme će nam biti potrebne da bismo pokazali glavno tvrđenje da se simedijane seku u istoj tački.

Rekal Štajnerova teorema tvrdi da u trouglu ABC, ako su AA_1 i AA_2 duži koje obrazuju jednake uglove sa strnicama koje ishode iz temena A, onda važi:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1|\,|BA_2|}{|CA_1|\,|CA_2|}$$



Slika 10.3:

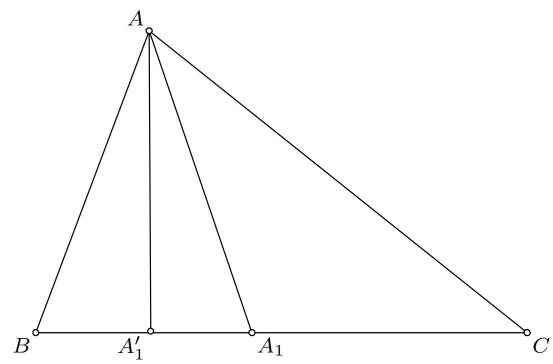
Teorema 10.1 *Duž AA_1' u trouglu ABC je simedijana ako i samo ako*

$$\frac{|BA_1'|}{|CA_1'|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

Dokaz. Duž AA_1' je simedijana ako je AA_1 težišna duž i $AA_1' = \sigma_{AA_3}(AA_1)$, tj. AA_1' i AA_1 zaklapaju jednake uglove sa stranicama AB i AC redom.
Važi $|BA_1| = |CA_1|$, pa koristeći Štajnerovu teoremu, dobijamo da je AA_1' simedijana ako i samo ako

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1'|\,|BA_1|}{|CA_1'|\,|CA_1|} = \frac{|BA_1'|}{|CA_1'|}$$

Dakle, dobili smo da simedijana deli naspramnu stranicu ugla iz kojeg kreće na dva dela u proporciji kvadrata stranica koje obrazuju taj ugao.



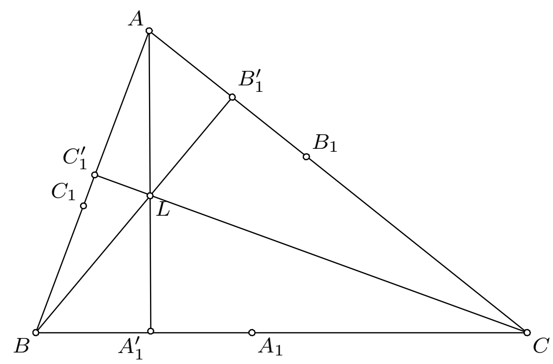
Slika 10.4:

Teorema 10.2 *Neka su AA_1', BB_1' i CC_1' simedijane trougla. Tada se ove tri duži seku u istoj tački L koju nazivamo i Lemoanova tačka.*

Dokaz. Koristeći prethodnu teoremu dobijamo

$$\frac{|A_1'B|}{|A_1'C|} = \frac{c^2}{b^2}, \frac{|B_1'C|}{|B_1'A|} = \frac{a^2}{c^2}, \frac{|C_1'A|}{|C_1'B|} = \frac{b^2}{a^2}$$

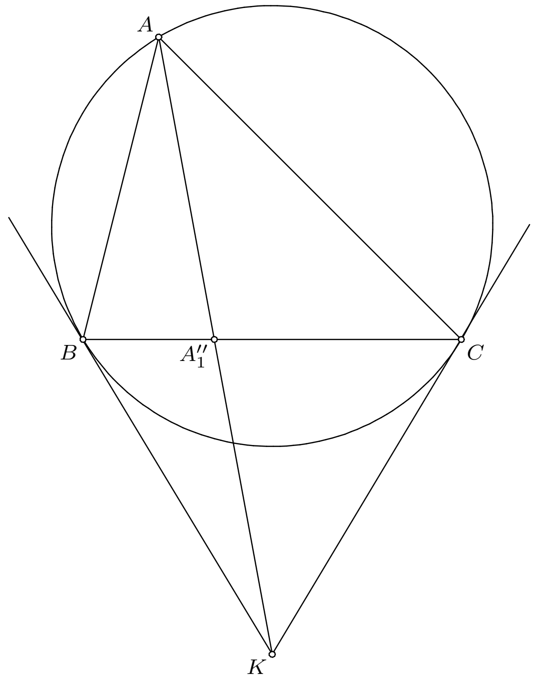
Sada, koristeći Čevijevu teoremu, simedijane se seku u jednoj tački.



Slika 10.5:

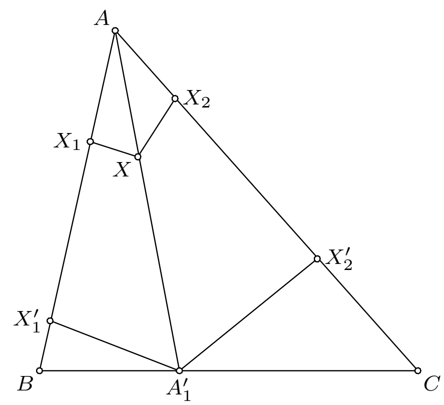
Navešćemo sada neke zanimljive osobine simedijane.

Teorema 10.3 *Tangente opisanog kruga oko trougla ABC kroz dva njegova temena seku se na simedijani koja polazi iz trećeg temena trougla.*



Slika 10.5:

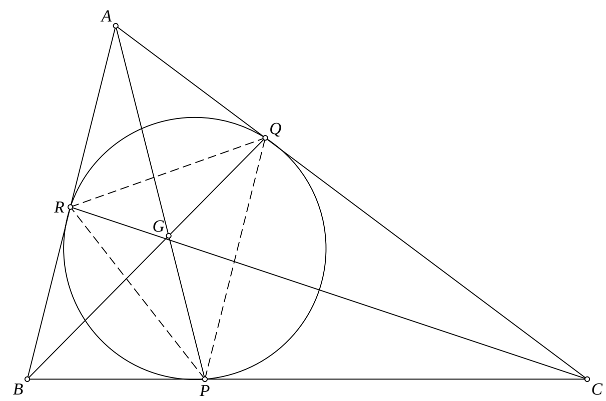
Teorema 10.4 *Ako je X tačka na simedijani iz temena A trougla ABC, onda je udaljenost tačke X od stranica AB i AC proporcionalna dužini tih stranica.*



Slika 10.6:

Teorema 10.5 *Lemoanova tačka pravouglog trougla poklapa sa središtem visine koja odgovara hipotenuzi tog trougla.*

Teorema 10.6 *Ako su P, Q, R tačke u kojima upisani krug dodiruje stranice BC, CA, AB trougla ABC, tada je Žergonova tačka G trougla ABC Lemoanova tačka trougla PQR.*

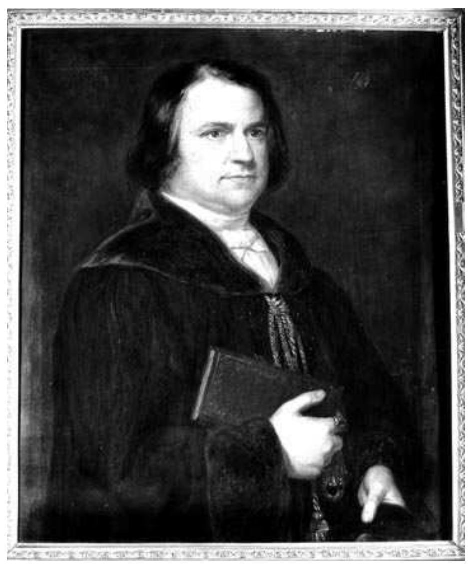


Slika 10.7:

Glava 11

Nagelova tačka

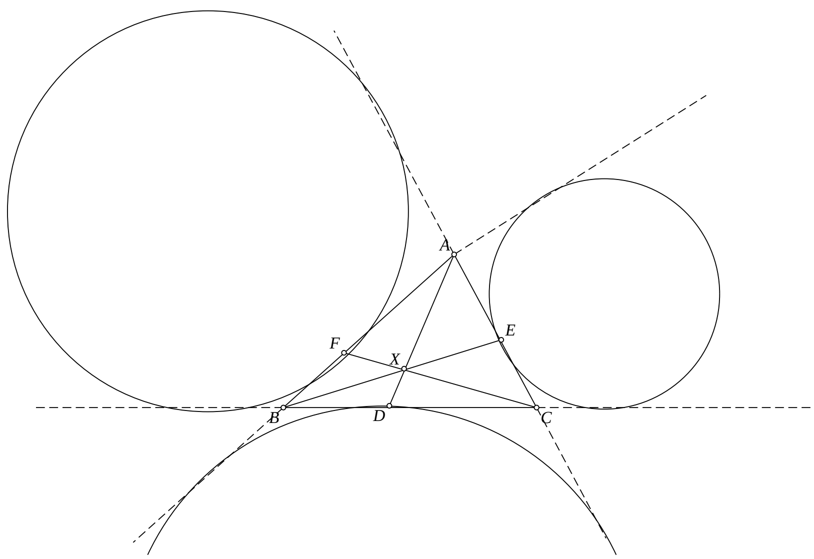
Nagelova tačka dobila je ime po nemačkom matematičaru Kristijanu Henrihu fon Nagelu koji je pisao o njoj 1836. godine.



Slika 11.1: Nagel

Kristijanu Henrih fon Nagel rođen je 28.02.1803. u Štutgartu u Nemačkoj. Nakog završetka gimnazije 1821. Nagel je počeo da studira teologiju u Tibingenu, a 1825. je tamo završio i postao sveštenik. Tokom četiri godine pohađao je predavanja iz matematike i fizike na univerzitetu Tubingen. U decembru 1826, postao je profesor matematike i nastavio doktorske studije matematike na univerzitetu. 1830. godine preselio se u Ulm, gde je imao bolje plaćen posao kao nastavnik u gimnaziji u Ulmu. Njegovi najbolji rezultati su vezani za trougao i geometriju, a jedna od najznačajnijih tačaka u trouglu, Nagelova tačka, je nazvana po njemu. Umro 27.10.1882. u Ulmu.

Ako su D, E i F tačke dodira spolja pripisanih kružnica sa stranicama BC, CA i AB. Tada se prave AD, BE, CF seku u tački obeleženoj sa X. Tu tačku nazivamo Nagelova tačka trougla ABC.



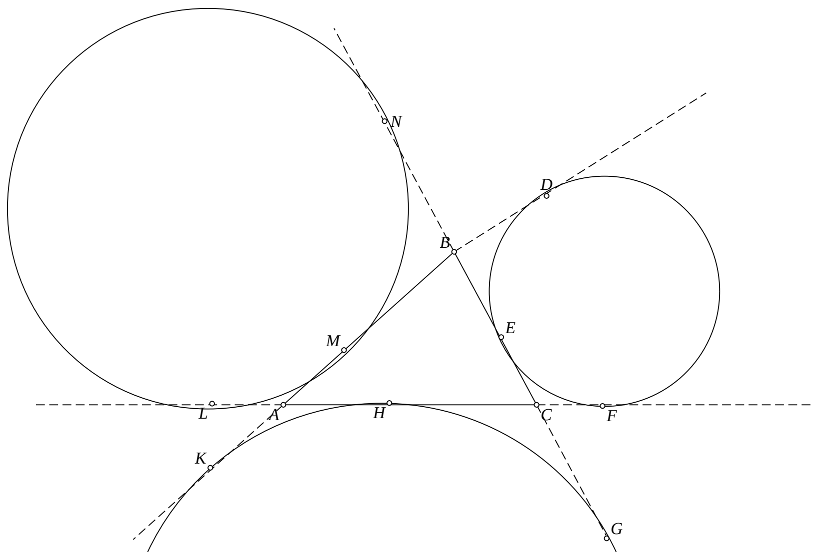
Slika 11.2:

Teorema 11.1 *Nagelova tačka postoji.*

Dokaz. Imamo da je $AF = AD = s$. Analogno, $BG = BK = s$ i $CL = CN = s$. Sada dobijamo da je $CF = CE = AL = AM = s-b$, na isti način je $BD = BE = AK = AH = s - c$ i $BN = BM = CG = CH = s - a$.
Dobili smo da je $AM = EC = s - b$, $BE = HA = s - c$ i $CH = MB = s-a$. Množeći ove jednakosti dobijamo da je $AM \cdot BE \cdot CH = EC \cdot HA \cdot MB$, a iz ovog važi

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1$$

Sada na osnovu Čevijeve teoreme dobijamo da se AE, BH i CM seku u istoj tački.



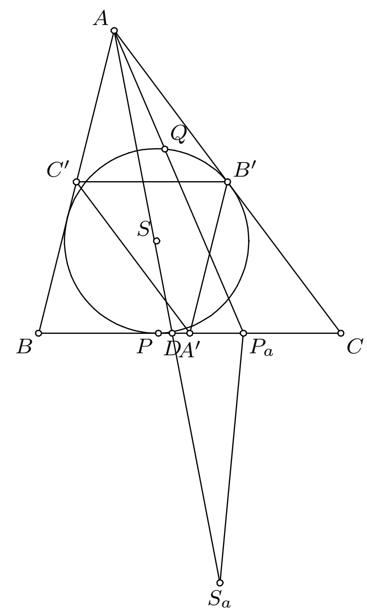
Slika 11.3:

Neke od osobina Nagelove tačke trougla.

Teorema 11.2 *Ako je N Nagelova tačka trougla ABC i P_a u kojoj spolja upisani krug dodiruje stranicu BC. Tada je*

$$\frac{AN}{NP_a} = \frac{a}{p-a}.$$

Teorema 11.3 *Ako su A', B', C' središta stranica BC, CA, AB trougla ABC, dokazati da je središte kruga upisanog u trougao ABC Nagelova tačka trougla $A'B'C'$.*



Slika 11.4:

Teorema 11.4 *Nagelova tačka N, težište T i središte S upisanog kruga trougla ABC pripadaju jednoj pravoj, pri čemu je tačka T izmedu tačaka N i S takva da je $NT : TS = 2 : 1$.*

Teorema 11.5 *Ako je O središte opisanog kruga, S središte upisanog kruga, H ortocentar i N Nagelova tačka trougla ABC, dokazati da je $HN \parallel OS$ i $HN = 2OS$.*

Glava 12

Mikelova tačka

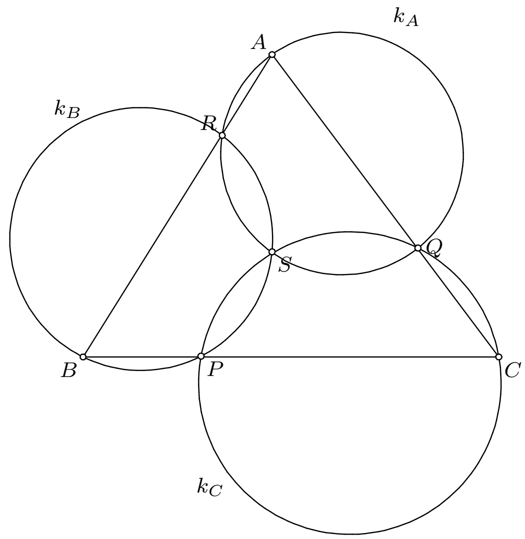
1838. godine je otkrivena ova tačka i dobila je ime po A. Mikelu.

Auguste Miquel (1816-1851) bio je francuski matematičar, poznat po svom doprinosu geometriji. Studirao je u Albi, a zatim godinu dana u Parizu. Još kao student napisao je matematički esej za časopis Le Geometre. Nakon završetka studija predavao je u Nantu i drugim mestima i objavljivao više eseja o geometriji u naučnim časopisima.

U sledećoj teoremi dokazaćemo postojanje ove tačke (u zavisnosti od izbora tačaka P, Q i R).

Teorema 12.1 *Neka su P, Q, R proizvoljne tačke ivica BC, AC, AB trougla ABC. Tada se krugovi opisani oko trouglova AQR, PBR, PQC seku u jednoj tački, nju zovemo Mikelova tačka.*

Dokaz. Označimo krugove opisane oko trouglova AQR, PBR, i PQC sa k_A, k_B, k_C i unutrašnje uglove trougla ABC redom sa α, β, γ.
Neka je S druga presečna tačka krugova k_B i k_C. Tada su četvorouglovi $BPSR$ i $PCQS$ tetivni, pa je $\angle RSP = 180^\circ - \beta$ i $\angle QSP = 180^\circ - \gamma$. Sledi da je $\angle RSQ = \beta + \gamma$, a zatim i $\angle RAQ + \angle RSQ = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Dakle i četvorougao $ARSQ$ je tetivan, pa se oko njega može opisati krug. To je baš krug k_A, opisan oko trougla AQR, pa se dati krugovi seku u tački S.



Slika 12.1:

Teorema 12.2 *Ako su P, Q, R tačke stranica BC, CA i AB, a M Mikelova tačka tog trougla za trojku P, Q, R, dokazati da duži MP, MQ, MR zahvataju s odgovarajućim stranicama tog trougla jednake uglove, zatim da je $\angle BMC = \angle BAC + \angle RPQ$.*

Dokaz. Tačka M je na trouglu ABC, u njemu, ili izvan njega. Ako je na trouglu ABC, ona se poklapa sa jednom od tačaka P, Q, R npr. sa P, pa je $\angle ARM = \angle CQM$; ako je tačka M u trouglu ABC biće $\angle ARM = \angle BPM = \angle CQM$, a ako je izvan trougla ABC, a u uglu npr. A, biće $\angle ARM = \angle CPM = \angle CQM$. Dakle, u svakom slučaju uglovi koje odreduju duži MP, MQ, MR sa odgovarajućim stranicama su medu sobom jednaki. Sada pokažimo drugi deo stava. Ako je tačka M na trouglu ABC, dokaz je jednostavan; ako je u trouglu ABC, biće $\angle BMC = \angle BMP + \angle PMC = \angle BRP + \angle PQC = (\angle RAP + \angle RPA) + (\angle PAQ + \angle APQ) = \angle BAC + \angle RPQ$. Analogno se izvodi dokaz i u slučaju kad je tačka M izvan trougla ABC.

Glava 13

Simsonova prava

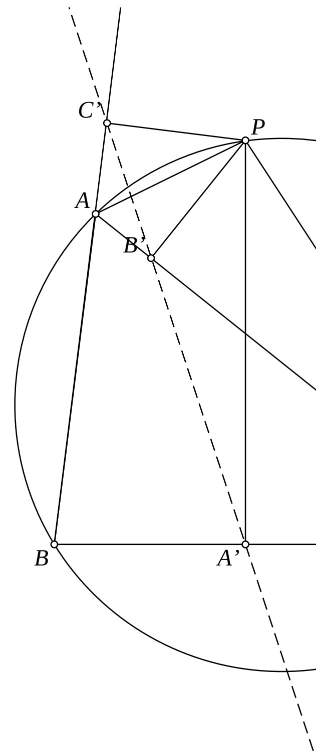
Robert Simson (14. 1687. - 1. 1768.) bio je škotski matematiar i profesor matematike na univerzitetu u Glazgovu.

Slika 13.1: Simson

Robert Simson je bio najstariji sin Džona Simsona i Agnes Simson. Njegov otac je imao želju da Robert studira teologiju i pristupi crkvi. Međutim, Simson nije pokazao zainteresovanost za dogmatska učenja, budući da ih je smatrao spekulativnim i naučno neutemeljenim. Stoga je napustio studije teologije i opredelio se za izučavanje matematike. 1710. Simsonu je ponuđena katedra, što je on sa zadovoljstvom prihvatio i zatražio dozvolu da neko vreme provede u Londonu, gde bi imao priliku da se upozna sa nekima od najeminentnijih matematičara u Engleskoj, što mu je i odobreno. Nakon toga se vraća na Univerzitet u Glazgovu 1711, gde ostaje sve do 1761. Simsonov doprinos matematici ogledao se u vidu obnove radova starih grčkih geometričara, kao što su Euklid i Apolonije. Simson je zaveštao svoju veliku biblioteku i radove na Univerzitetu u Glazgovu, koja se sastojala od brojnih geometrijskih problema, kao i radova iz algebre i astronomije. Za Simsonovo ime vezuju se mnoga otkrića, među kojima je i prava koja nosi naziv po njegovom imenu, takozvana Simsonova prava.

Teorema 13.1 *(Simsonova teorema) Dokazati da podnožja normala kroz bilo koju tačku kruga opisanog oko nekog trougla na pravama koje su odredene stranicama tog trougla, pripadaju jednoj pravoj.*

Dokaz. Obeležimo sa l opisani krug trougla ABC, a P bilo koju tačku toga kruga, a sa A', B' i C' podnožja upravnih iz P na pravama BC, CA i AB. Ako se tačka P poklapa s nekim temenom trougla ABC, stav je jednostavan. Ako je tačka P različita od temena A, B i C, ona je unutrašnja tačka jednog od lukova AB, BC i CA kruga l, npr. luka AC koji ne sadrži teme B. Sem toga, tačke A' i C' su na kracima ugla B ili je jedna od njih na produženju odgovarajuećeg kraka. Pretpostavimo da su tačke A' i C' na kracima ugla B. Iz uvedenih pretpostavki sleduje da su kod tetivnih četvorouglova $PABC$ i $PC'BA'$ uglovi APC i $C'PA'$ jednaki i istosmerni. Stoga su i uglovi $C'PA$ i $A'PC$ jednaki i istosmerni. Iz tetivnih četvorouglova $PC'AB'$ i $PB'A'C$ sleduje da su uglovi $C'PA$ i $A'PC$ jednaki i istosmerni s uglovima $C'B'A$ i $A'B'C$, pa su i uglovi $C'B'A$ i $A'B'C$ jednaki i istosmerni, i prema tome tačke A', B' i C' na jednoj pravoj. Analogan dokaz izvodi se i u slučaju kada je jedna od tačaka A' i C' na produženju odgovarajućeg kraka ugla B.

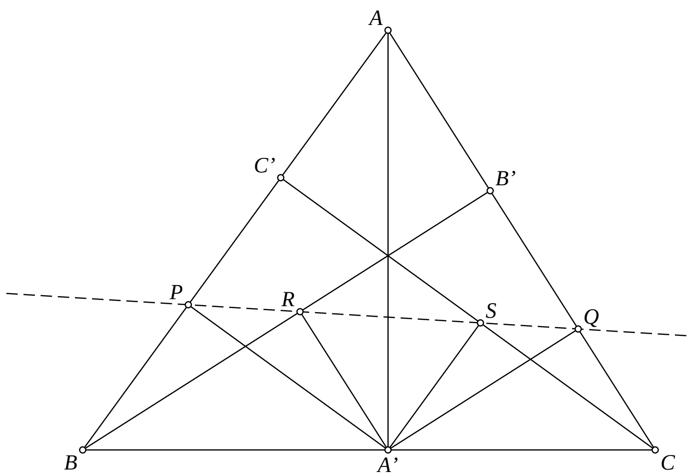


Slika 13.2:

Prava kojoj pripadaju tačke A', B' i C' naziva se Simsonova prava tačke P u odnosu na trougao ABC.

Teorema 13.2 *Ako su AA', BB', CC' visine trougla ABC, dokazati da podnožja P, Q, R, S normala iz tačke A' na prave AB, AC, BB', CC' pripadaju jednoj pravoj.*

Dokaz. Tačka A je na krugu koji je opisan oko trougla ABB', te se prema Simsonovoj teoremi podnožja P, Q, R normala iz tačke A na pravama AB, AB', BB' nalaze na jednoj pravoj. Isto tako, tačka A je na krugu koji je opisan oko trougla ACC', te se prema Simsonovoj teoremi podnožja P, Q, S normala iz tačke A na prave AC', AC, CC' nalaze na jednoj pravoj. Otuda sledi da tačke P, Q, R, S pripadaju jednoj pravoj.



Slika 13.3:

Teorema 13.3 *Ako se tri kruga s prečnicima PA, PB, PC seku u tačkama koje pripadaju jednoj pravoj, dokazati da je tačka P na krugu koji je opisan oko trougla ABC.*

Dokaz. S obzirom da se tačka P nalazi na krugu koji je opisan oko trougla ABC, podnožja A', B', C' upravnih iz tačke P na pravama BC, CA, AB pripadaju jednoj pravoj, Simsonovoj pravoj tačke P u odnosu na trougao ABC. Pri tome je $\angle A''AC = \angle A''PC = \angle A'PC = \angle A'B'C$, pa je $AA'' \parallel A'B'$. Analogno se dokazuje da je $BB'' \parallel A'B'$ i $CC'' \parallel A'B'$.

Teorema 13.4 *Ako su A'', B'', C'' tačke kruga opisanog oko trougla ABC takve da je AA'', BB'', CC'', dokazati da se prave kroz tačke A'', B'', C'' upravne na pravama BC, CA, AB seku u izvesnoj tački P koja se nalazi na krugu, zatim da se podnožja A', B', C' tih normala nalaze na jednoj pravoj, Simsonovoj pravoj tačke P u odnosu na trougao ABC.*

Dokaz. Prave kroz tačke A'' i B'' upravne na pravama BC i CA seku se u nekoj tački P, pri cemu je $\angle A''PB'' = \angle BCA = \angle BA''A = \angle A''AB''$, pa je tačka P na krugu l. Isto tako, prave kroz tačke A'' i C'' upravne na pravama BC i AB seku se u nekoj tački P' koja se nalazi na krugu l. Stoga su tačke P i P' istovetne. S obzirom da se prave kroz A'', B'', C'' upravne na pravama BC, CA, AB seku u tački P koja se nalazi na krugu l, podnožja A', B', C' tih normala su na jednoj pravoj, Simsonovoj pravoj tačke P u odnosu na trougao ABC.

Teorema 13.5 *Dokazaćemo da Simsonova prava tačke P u odnosu na trougao ABC sadrži središte duži koja spaja tu tačku P sa ortocentrom H trougla ABC.*

Dokaz. Pored oznaka uvedenih u teoremi 13.3, obeležimo sa K tačku u kojoj prava odredena visinom BB_1 seče krug l, a sa L tačku duži PB'' takvu da je $HLkBB''$. S obzirom da je četvorougao $BB''LH$ paralelogram, a četvorougao $BB''PK$ jednakokraki trapez, biće $BB'' = HL$ i $BB'' = KP$, pa je trapez $HLPK$ takode jedankokrak. Prema poznatom stavu, tačka K je simetrična sa tačkom H udnosu na pravu AC, pa je prava AC simetrala duži HK, dakle i duži LP. Iz $BB'' \parallel HL$ i $BB'' \parallel A'B'$ sledi da je $HL \parallel A'B'$. No B' je središte duži LP, pa je i presek S duži HP i prave $A'B'$ središte duži HP.

Teorema 13.6 *Ako tri trougla ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ upisana u istom krugu k imaju zajedničko težište, dokazati da se Simsonove prave proizvoljne tačke M kruga k u odnosu na te trouglove seku u jednoj tački.*

Dokaz. Trouglovi ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ imaju zajedničko središte O opisanog kruga, zajedničko težište T , dakle i zajednički ortocentar H. Simsonove prave tačke M u odnosu na trouglove ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ sadrže središte duži MH, te se iste seku u jednoj tački.

Zaključak

Značajne tačke i linije predstavljaju važne elemente trougla, jedne od osnovnih ravnih figura u geometriji. To je glavni razlog što iste i dan danas privlače pažnju matematičara. Stoga se može očekivati da će se ispitivanje i otkrivanje novih tačaka i linija trougla nastaviti i u budućnosti.

Literatura

[1] Dragomir Lopandić, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Savez studenata Prirodno-matematičkog fakulteta, Beograd, 1971.

[2] TRIANGLE CENTERS, http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/

[3] H.S.M. Coxeter, *Introduktion to Geomerty*, University of Toronto, Canada, 1969.

[4] H. S. M. Coxeter i S. L. Greitzer, *GEOMETRY REVISITED*, The Mathematical Association of America, 1967.

[5] M. Mitrović, M. Veljković, S. Ognjanović, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd 2003.

[6] Wikipedia, *Fermat point*, http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat point

[7] Geometry, Nagel Point, http://agutie.homestead.com/files/nagel point1.htm

[8] Geometry, Gergonne Point Theorem, ttp://gogeometry.com/gergonne.htm

[9] ASK DR MATH, The Napoleon Point and More, http://mathforum.org/library/drmath/view/55042.html

[10] MATHENR, Lemoine point, http://euclid.ucc.ie/pages/MATHENR/MathEnrichment/7.Le

[11] Wikipedia, Joseph Diaz Gergonne, https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph Diaz Gergonne

[12] Wikipedia, Auguste Miquel, https://de.wikipedia.org/wiki/Auguste Miquel

[13] Wikipedia, Christian Heinrich von Nagel, https://en.wikipedia.org/wiki/Christian Heinrich von Nagel

Biografija

Rođen sam 18.05.1989. u Šapcu. Osnovnu školu "Žika Popović" sam završio u Vladimircima a potom upisalo srednju "Ekomomsko - trgovinsku školu" u Šapcu i maturirao 2008. godine. Na Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer Diplomirani profesor matematike upisalo sam se 2008. godine i diplomirao 03.07.2014. godine. Nakon završetka osnovnih studija upisao sam master studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, odsek za matematiku, smer Master profesor matematike i računarstva. Položio sam sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija.

Beograd, datum

Nemanja Jelenić