Математички факултет,
Универзитета у Београду

Основи комбинаторике у средњој школи са освртом на такмичарске задатке

Ментор:
Александар Липковски

Студент:
Немања Илић

Јул, 2016. године

Садржај

1 Увод

Тема која је обухваћена овим радом у највећој мери односи се на изучавање комбинаторике у средњошколској настави, уз посебан осврт на задатке са математичких такмичења, који су у уској вези са облашћу комбинаторике. Рад је подељен у неколико тематских целина. У уводу је дат кратак историјат изучавања комбинаторике, као и преглед основних појмова о скуповима и функцијама, који се у даљем раду неретко користе.

Свака научна област има сопствену терминологију и комбинаторика у том погледу није изузетак. Стога су, у оквиру друге главе, описане основне технике пребројавања коначних скупова, дефинисане основне комбинаторне конфигурације: варијације, пермутације и комбинације, обрађена је и биномна формула, тј. појмови које стандардно садрже средњошколски програми. Сви уведени појмови илустровани су бројним и једноставним примерима.

Потом, у наредној глави, следи анализа удела који комбинаторика заузима у настави математике у средњој школи, конкретно у гимназијама свих профила. Дати су циљеви и задаци наставе математике у средњој школи, у жељи аутора да укаже на важност изучавања логике и комбинаторике ради испуњавања задатих циљева у настави. Такође је одрађена и неколицина разноврсних средњошколских задатака у складу са наведеним разредима.

У четвртој глави дата је својеврсна збирка задатака са разних нивоа математичких такмичења за средње школе, у организацији Друштва математичара Србије. Углавном су одрађени задаци који припадају такозваној Б категорији, тј. задаци који су блиски напредном нивоу у гимназијској настави, уз пар задатака који припадају А категорији, односно задаци предвиђени за ученике Математичких гимназија. Решења свих задатака су детаљно објашњена, а у решавању истих је неопходно комбиновање разних идеја из претходних глава.

1.1 О предмету комбинаторике[1]

Комбинаторика или **комбинаторна анализа** је важан део дискретне математике чији су предмет задаци следећих основних типова:

(1) Доказивање постојања или непостојања комбинаторних конфигурација за које важе одређени услови. Специјално, конструкција конфигурација датог типа.

(2) Пребројавање комбинаторних конфигурација за које важе дати услови, када је евидентна егзистенција таквих конфигурација.

(3) Класификација комбинаторних конфигурација.

(4) Задаци комбинаторне оптимизације, тј. одређивање у датом скупу конфигурација такве конфигурације, која у највећој мери задовољава одређене услове.

У овом раду разматрају се методи пребројавања конфигурација чија је егзистенција евидентна.

Корени комбинаторике леже у древној прошлости, у времену почетка математике и науке уопште. Елементи комбинаторних расуђивања срећу се код првих конструкција или пребројавања једноставних конфигурација, као што су магични квадрати или комбинације елемената. Комбинаторика се током историје развијала заједно са другим областима математике прожимајући се са њима. Тако је ближе проучавање ове области почело у $XVII$ веку, упоредо са настанком теорије вероватноће, када су се комбинаторна питања појавила, наметнула, у вези са играма на срећу. Данас се комбинаторни методи користе у алгебри, теорији бројева, геометрији, топологији, анализи, теорији вероватноћа, математичкој статистици, рачунарству и многим другим областима.

[1]Младеновић П., *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

1.2 Скупови, функције - преглед основних појмова[2]

Скуп, као основни појам у математици, одређен је, ако је познато које елементе садржи. Користимо следеће ознаке:

$a \in A$ - елемент a припада скупу A;

$a \notin A$ - елемент a не припада скупу A;

$A = \{a|P(a)\}$ - скуп свих елемената који имају својство $P(a)$;

$A \subset B$ - скуп A је подкуп скупа B, тј. за сваки елемент $a \in A$, важи $a \in B$;

$A = B$ - ако је $A \subset B$ и $B \subset A$;

$\varnothing$ - празан скуп, тј. скуп који не садржи ниједан елемент;

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{a|a$ припада бар једном од скупова $A_1, A_2, ..., A_n\}$;

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{a|a$ припада сваком од скупова $A_1, A_2, ..., A_n\}$;

$A \setminus B = \{a|a \in A$ и $a \notin B\}$;

$P(A)$ - партитивни скуп скупа A, тј. скуп свих подскупова скупа A;

N - скуп природних бројева $1, 2, 3, ...$;

N_0 - скуп ненегативних целих бројева.

За неке бројеве уводимо посебне ознаке:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n - n$- факторијел, специјално је $0! = 1$;

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot ... \cdot 2n$; $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$;

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ за $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}, n \in N_0$;

$\binom{n}{0} = 1$.

[2] Младеновић П., *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

Осим наведених користићемо и ознаке $\forall$ и $\exists$ редом за универзални и егзистенцијални квантификатор.

Нека су A и B непразни скупови. *Функција* $f : A \to B$ је дефинисана, ако је сваком елементу $a \in A$, придружен тачно један елемент $b = f(a) \in B$. Елемент $a \in A$ зове се *оригинал*, а елемент $f(a) \in B$ је вредност функције f у тачки a или *слика* оригинала a. Скуп A зове се *област дефинисаности*, а скуп B *област вредности* функције f.

Функција $f : A \to B$ је $1-1$ пресликавање, ако важи $f(a_1) \neq f(a_2)$, увек када је $a_1 \neq a_2$ и $a_1, a_2 \in A$.

Функција $f : A \to B$ је *на* пресликавање, ако за сваки елемент $b \in B$, постоји елемент $a \in A$, такав да важи $b = f(a)$.

Функција $f : A \to B$ је бијекција, ако је $1-1$ и *на* пресликавање.

Елемент $a \in A$ је *непокретна(фиксна)* тачка функције $f : A \to A$, ако важи једнакост $f(a) = a$. Ако је свака тачка $a \in A$ непокретна тачка функције $f : A \to A$, онда је та функција *константна* или *идентична*.

Нека су дате функције $f : A \to B$ и $g : B \to C$. *Композиција* функција g и f је функција $g \circ f : A \to C$ дефинисана са $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Непразан скуп A је *коначан скуп*, ако за неки природан број n постоји бијекција $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$. У том случају кажемо да скуп A садржи n елемената, да је A *n-точлани скуп* или просто да је A *n-скуп*. Број елемената непразног коначног скупа A означавамо са $|A|$. Празан скуп је коначан по дефиницији. Непразан скуп је бесконачан, ако није коначан. *n-подскуп* скупа A је *n-скуп* који је подскуп скупа A.

Свака *n-торка* елемената скупа A је функција $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$. Ако за сваки број $k \in \{1, 2, ..., n\}$ важи $f(k) = a_k$, онда одговарајућу n-торку елемената скупа A означавамо са $(a_1, a_2, ..., a_n)$, ређе и са $a_1 a_2 ... a_n$, а елементе $a_1, a_2, ..., a_n$ зовемо члановима те n-торке.

Низ елемената скупа A је функција $f : N \to A$. Ако је $f(n) = a_n \in A$ за $n \in N$, онда одговарајући низ елемената скупа A означавамо са $(a_1, a_2, a_3, ...)$ или краће са (a_n).

Декартов производ скупова $A_1, A_2, ..., A_n$ је скуп n-торки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ за које важи $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$. Означавамо га са $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Ако је $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, онда Декартов производ скупова $A_1, A_2, ..., A_n$ означавамо са A^n.

2 Основне технике пребројавања

Енумерација, или пребројавање, представља важан део комбинаторике који се бави пребројавањем скупа објеката са одређеним својствима. Скупове морамо пребројавати да бисмо решили различите врсте проблема.

Стога је главна тема ове главе развијање ефикасних метода за пребројавање коначних скупова. Елементи оваквих скупова обично имају структуру коју је лако описати математичким језиком, али су за њихово пребројавање потребни много делотворнији методи од пуког набрајања свих елемената. Следећа једноставна тврђења, тачније правила, ће у даљем често бити коришћена.

2.1 Правила пребројавања[3]

Теорема 1 (Правило бијекције)**.** *Два непразна коначна скупа A и B имају једнак број елемената ако и само ако постоји бијекција $f : A \to B$.*

Теорема 2 (Правило већег броја)**.** *Нека су A и B коначни скупови и $f : A \to B$ функција таква да за сваки елемент $b \in B$, постоји тачно k елемената скупа A, чије су слике при пресликавању f једнаке елементу b. Тада важи једнакост*

$$|A| = k \cdot |B|.$$

Теорема 3 (Правило збира)**.** *Ако су A и B дисјунктни коначни скупови (тј. $A \cap B = \varnothing$), тада је*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Доказ. Пошто су A и B коначни скупови, можемо да их запишемо у следећем облику:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\},\ B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}.$$

Како су они још и дисјунктни, унија $A \cup B$ може да се запише у облику:

$$A \cup B = \{c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, ..., c_{n+m}\},$$

где је $c_i = a_i, 1 \leq i \leq n$ и $c_{n+i} = b_i, 1 \leq i \leq m$.

Према томе, $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$. □

[3]Стевановић Д., Ћирић М., Симић С., Балтић В., *Дискретна математика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

Ово правило се може проширити на унију произвољног броја дисјунктних коначних скупова $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Пример 1. *Студент може да изабере испитно питање из једне од три дисјунктне групе, које садрже* $15, 19$ *и* 21 *питање, редом. Колико има различитих питања које студент може да изабере?*

Решење. Означимо са A_1, A_2 и A_3 поменуте групе испитних питања. Студент бира питање из скупа $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, који, по правилу збира, има

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 15 + 19 + 21 = 55$$

различитих питања. △

Често смо у ситуацији да бројимо ствари које се лакше представљају као парови објеката, него као појединачни објекти. Претпоставимо, на пример, да је студентска служба Математичког факултета сређивала пријаве студената за јунски испитни рок. При том су дошли до ситуације као у табели

	Алгебра	Програмирање	...	Анализа
Ана	$\surd$	$\surd$		
Владимир		$\surd$		$\surd$
Милица	$\surd$			$\surd$
$\vdots$				
Раде	$\surd$	$\surd$		$\surd$

Ако је студент x пријавио испит y тада је на одговарајућој позицији (x, y) у табели постављен знак $\surd$. Укупан број ових знакова у табели је уједно и број испитних пријава. Сада је проблем пребројати скуп S парова (x, y) таквих да је студент x пријавио испит y. У општем облику, ако су X и Y дати скупови, проблем је пребројати подскуп S скупа $X \times Y$.

Постоје два начина пребројавања испитних пријава из табеле. С једне стране, можемо да пребројимо предмете које је пријавио сваки студент понаособ и саберемо резултате, док с друге стране, можемо да пребројимо студенте који су пријавили сваки предмет понаособ и саберемо резултате. Наравно, оба начина даће исти резултат.

Ова разматрања можемо да прецизирамо на следећи начин. Претпоставимо да је подскуп S скупа $X \times Y$ (где су X и Y коначни скупови) дат помоћу знакова $\surd$ у општем облику наредне табеле.

	.	.	y	...	Збир у врсти
.	$\surd$		$\surd$	$\surd$	.
.		$\surd$		$\surd$	.
x	$\surd$	$\surd$		$\surd$	$r_x(S)$
.			$\surd$		
.	$\surd$			$\surd$	
Збир у колони	.	.	$c_y(S)$	...	$\|S\|$

Први начин пребројавања је да, за свако x у X, нађемо број $r_x(S)$ појављивања знака $\surd$ у врсти x, тј.

$$r_x(S) = |\{(x,y) \in S | y \in Y\}|.$$

Укупан збир се добија сабирањем свих збирова по врстама:

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S).$$

Други начин је да, за свако y у Y, нађемо број $c_y(S)$ појављивања знака $\surd$ у колони y, тј.

$$c_y(S) = |\{(x,y) \in S | x \in X\}|.$$

У овом случају укупан збир се добија сабирањем свих збирова по колонама:

$$|S| = \sum_{y \in Y} c_y(S).$$

Чињеница да имамо два различита израза за $|S|$ често се користи у пракси за проверу резултата рачунања. Овим долазимо и до наредног принципа, правила пребројавања.

Теорема 4. *Нека су X и Y коначни скупови и нека је S подскуп скупа $X \times Y$. Тада важи:*

а) Број елемената скупа S је дат са

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S).$$

*б) (**Правило производа**) Број елемената скупа $X \times Y$ једнак је*

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

Доказ. а) Скуп S се може представити као дисјунктна унија скупова

$$S = \bigcup_{x \in X} \{(x, y) \in S | y \in Y\},$$

одакле, по правилу збира, добијамо

$$|S| = \sum_{x \in X} |\{(x, y) \in S | y \in Y\}| = \sum_{x \in X} r_x(S).$$

Аналогно се доказује и резултат за $c_y(S)$.
б) У овом случају је $S = X \times Y$, па је $r_x(S) = |Y|$ за свако x из X.
Из дела (a) сада следи да је $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. □

Ово правило се може проширити на производ произвољног броја коначних скупова $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Пример 2. *Колико постоји различитих низова битова* 0 *и* 1 *дужине* 8*?*

Решење. Тражени низови битова су елементи скупа $\{0, 1\}^8$. Сваки од осам битова може да се изабере на два начина (или 0 или 1), па примењујући правило производа лако уочавамо да постоји укупно $2^8 = 256$ различитих низова битова дужине 8. △

2.2 Варијације, пермутације и комбинације[4]

При решавању комбинаторних задатака пребројавања готово увек се срећу основне комбинаторне конфигурације *варијације, пермутације и комбинације.* Оне се формирају на одређени начин од елемената неког скупа (на пример, ређањем елемената тог скупа у низ, формирањем новог скупа од елемената датог скупа,...). У овом одељку даћемо дефиниције тих комбинаторних конфигурација, илустровати их једноставним примерима и формулисати тврђења која одређују њихов број.

Дефиниција 1. *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ од n елемената. Низ од k ($1 \leq k \leq n$) различитих чланова који су елементи скупа A називамо* ***варијацијом скупа*** *A (од n елемената)* ***класе*** *k (или k-те класе).*

У случају $k = n$, варијацију класе n скупа A називамо ***пермутацијом скупа*** *A.*

[4]Обрадовић М., Георгијевић Д., *Математика са збирком задатака за IV разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

Пример 3. *Дат је скуп* $A = \{1, 2, 3, 4\}$*. Образујмо све двоцифрене бројеве са различитим цифрама које припадају скупу* A*.*

Решење. Тражени двоцифрени бројеви су $12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43$. Има их укупно 12. Прва цифра може бити било која од датих: $1, 2, 3$ или 4, тј. имамо 4 могућности, а за сваки такав избор прве цифре имамо три могућности за другу цифру, па је број тражених двоцифрених бројева једнак $4 \cdot 3 = 12$.

Изражено термином низова, у овом примеру требало је формирати све низове облика $x_1 x_2$ чији су чланови различити и који припадају скупу $A = \{1, 2, 3, 4\}$. △

Пример 4. *На команду „Збор", 10 ученика се на произвољан начин постројава у једну врсту. На колико начина то могу учинити?*

Решење. Ако са $A = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$ означимо скуп ученика, тада је потребно одредити број низова облика $x_1 x_2 ... x_{10}$ чији су чланови различити елементи скупа A. Ако поступимо као у претходном примеру, закључићемо да је број таквих низова $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$, што је, дакле, укупан број постројавања у једну врсту, односно број свих пермутација скупа A од 10 елемената. △

Теорема 5. *Нека је дат скуп* A *од* n *елемената, тј. нека је* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$*. Ако са* V_k^n *означимо број свих варијација класе* k *од* n *елемената* $(1 \leq k \leq n)$*, односно са* P_n *број свих пермутација скупа* A*, тада је*

а) $V_k^n = n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)$*;*

б) $P_n = n!$*.*

Доказ. а) Нека $x_1 x_2 ... x_k$ означава произвољну варијацију класе k скупа $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. На првом месту у низу $x_1 x_2 ... x_k$, тј. први члан низа, може бити било који од n елемената скупа A. Са сваким од n елемената као првим чланом низа имамо да други члан низа може бити било који од $n-1$ преосталих елемената скупа A, тј. први и други члан низа можемо изабрати на $n(n-1)$ начина. За све такве изборе прва два члана имамо $n-2$ могућности за избор трећег члана, па се прва три члана могу изабрати на $n(n-1)(n-2)$ начина. Сличним поступком закључујемо да се k чланова низа могу изабрати на

$$n(n-1)(n-2)...\big(n-(k-2)\big)\big(n-(k-1)\big),$$

односно
$$n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)$$
начина.

б) Пошто је, по дефиницији, пермутација скупа A од n елемената једнака варијацији класе n скупа A, то је
$$P_n = V_n^n = n(n-1)...\big(n-(n-1)+1\big)(n-n+1) = n(n-1)...2\cdot 1 = n!.$$
$\square$

Дефиниција 2. *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ од n елемената. Подскуп од k $(1 \leq k \leq n)$ елемената скупа A називамо* ***комбинацијом класе*** *k од n елемената скупа A.*

Пример 5. *За шаховску екипу школе пријавило се 5 ученика. На колико начина је могуће формирати трочлану екипу састављену од пријављених ученика?*

Решење. Означимо са A скуп свих пријављених ученика, тј. нека је $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Запазимо да у овом случају не можемо поступити као у претходним примерима. Наиме, ако бисмо уочили све низове од 3 члана који су међусобно различити елементи скупа A, тада би на пример следећи низови
$$a_1a_2a_3,\ a_1a_3a_2,\ a_2a_1a_3,\ a_2a_3a_1,\ a_3a_1a_2,\ a_3a_2a_1$$
били различити, али би у нашем случају представљали једну исту екипу. Због тога је потребно формирати све трочлане подскупове скупа A. Ако се договоримо да уместо ознаке за подскуп, рецимо $\{a_1, a_2, a_3\}$ пишемо само $a_1a_2a_3$, тада имамо следеће могућности за формирање екипе:
$$\begin{array}{llll} a_1a_2a_3 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 & a_3a_4a_5 \\ a_1a_2a_4 & a_1a_3a_5 & a_2a_3a_5 & \\ a_1a_2a_5 & a_1a_4a_5 & a_2a_4a_5 & \end{array}$$

Дакле, укупно имамо 10 начина за формирање екипе. Напомињемо да код овако формираних низова редослед елемената није битан. $\triangle$

У претходним примерима имамо два различита начина издвајања k $(1 \leq k \leq n)$ различитих елемената скупа A који садржи n елемената. У трећем и четвртом примеру код издвајања водимо рачуна о поретку изабраних елемената, док у петом примеру поредак изабраних елемената није битан.

Теорема 6. *Нека је дат скуп A од n елемената, тј. нека је $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ако са C_k^n означимо број свих комбинација класе k од n елемената $(1 \leq k \leq n)$, тада је*

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$

Доказ. Нека је S_1 скуп свих варијација $k-$те класе скупа A од n елемената, а S_2 скуп свих комбинација $k-$те класе истог скупа A. Из теореме 5 следи да скуп S_1 садржи $n(n-1)...(n-k+1)$ елемената. Дефинишемо функцију $f : S_1 \to S_2$ на следећи начин: варијацији $k-$те класе $v = (a_1, a_2, ..., a_k) \in S_1$, придружимо комбинацију $k-$те класе $f(v) = s = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \in S_2$. Сваки елемент $s \in S_2$ је слика тачно $k!$ елемената скупа S_1. На основу теореме 2 добијамо

$$|S_2| \cdot k! = |S_1|,$$

одакле следи

$$C_k^n = |S_2| = \frac{|S_1|}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

У претходном поглављу бавили смо се варијацијама класе k и пермутацијама скупа A од n елемената, дефинишући их као низове са различитим члановима који су елементи скупа A, при чему је било задовољено $(1 \leq k \leq n)$. Међутим, можемо посматрати и низове код којих има и чланова који не морају обавезно бити различити, већ се, како се то обично каже, неки чланови могу и понављати у низу. У овом случају рећи ћемо да се ради о варијацијама и пермутацијама са понављањем. Јасно је, дакле, да овде може бити и $k > n$.

Дефиниција 3. *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Низ $x_1 x_2 ... x_k$ $(k \geq 1)$ код кога неки чланови низа могу бити међусобно и једнаки назива се* ***варијацијом са понављањем класе*** *k.*

Уколико се у низу $x_1 x_2 ... x_k$ појављују сви елементи скупа A, и то a_1 тачно k_1 пута, a_2 тачно k_2 пута,..., a_n тачно k_n пута (тада је $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$), такав низ се назива ***пермутацијом са понављањем класе*** *k скупа A од n елемената.*

Пример 6. *Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Образујмо све двоцифрене бројеве чије цифре припадају скупу A.*

Решење. За разлику од примера 3 овде се не захтева да све цифре тражених бројева буду различите. Зато ће и број таквих бројева бити већи. Од елемената скупа A можемо формирати следеће двоцифрене бројеве:

$$\begin{array}{cccc} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 12 & 22 & 32 & 42 \\ 13 & 23 & 33 & 43 \\ 14 & 24 & 34 & 44 \end{array}$$

Дакле, укупан број двоцифрених бројева је $16 = 4^2$. △

Пример 7. *Дат је скуп* $A = \{1, 2, 3\}$. *Одредимо број свих шестоцифрених бројева у чијем се запису цифра* 1 *појављује два пута, цифра* 2 *три пута, а цифра* 3 *једанпут.*

Решење. Потребно је одредити све низове $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ од 6 чланова, код којих су два члана једнака 1, три члана једнака 2, а један члан једнак 3. Првих неколико низова има облик: $112223, 112232, 112322, 113222, 121223, \ldots$ Овакве низове, где се сваки елемент скупа A појављује тачно одређен број пута, називамо пермутацијама са понављањем. У конкретном случају означимо са $P^3_{2,3,1}$ број пермутација са понављањем, где нам горњи индекс означава број елемената, а доњи индекси означавају број појављивања сваког елемента у низу. Када би сви елементи у низу били међусобно различити, а има их 6, тада би укупан број пермутација, на основу теореме 5, био једнак 6!. Међутим, код произвољне пермутације са понављањем можемо мењати места једнаким члановима у низу, а да се пермутација (низ) не промени. Тако чланови који су једнаки 1 могу мењати места, тј. пермутовати се на 2! начина. Чланови који су једнаки 2 (има их три) могу мењати места на 3! начина, а елемент 3 на 1! начин. Другим речима, једнаки чланови могу укупно мењати места на 2!3!1! начина, а да се пермутација не промени. Дакле, за сваку пермутацију са понављањем имали бисмо 2!3!1! пермутација (без понављања) у којима се не мења распоред различитих елемената. С обзиром на уведене ознаке и претходне закључке, можемо писати

$$2!3!1!P^3_{2,3,1} = 6!,$$

одакле је

$$P^3_{2,3,1} = \frac{6!}{2!3!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 60.$$

△

Теорема 7. *Нека је дат скуп* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

а) Ако са $\overline{V}_k^n$ *означимо број свих варијација са понављањем класе* k $(k \geq 1)$, *тада је*

$$\overline{V}_k^n = n^k.$$

б) Ако $P^n_{k_1,k_2,...,k_n}$ *означава број свих пермутација са понављањем скупа* A, *код којих се елемент* a_1 *појављује (понавља)* k_1 *пута, елемент* a_2 *се појављује* k_2 *пута,...,* a_n *се појављује* k_n *пута, тада је*

$$P^n_{k_1,k_2,...,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1!k_2! \cdots k_n!}.$$

Доказ. а) На првом месту у низу (тј. први члан низа) $x_1x_2...x_k$ може се налазити било који од n елемената, независно од осталих чланова низа. Исто важи и за сва остала места у низу (за све остале чланове низа). Зато ће укупан број варијација таквог типа бити једнак

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^k.$$

б) Уколико за тренутак претпоставимо да су сви чланови у пермутацији са понављањем различити, тада бисмо имали пермутацију (без понављања) од $k_1 + k_2 + ... + k_n$ елемената, па је укупан број једнак $(k_1 + k_2 + ... + k_n)!$. Код сваке пермутације са понављањем можемо мењати места члановима који су једнаки a_1, а да се пермутација не промени. Таквих размештања има $k_1!$. Слично можемо учинити са члановима који су једнаки a_2. Такви чланови могу мењати места на $k_2!$ начина итд. Дакле, за сваку пермутацију са понављањем имамо $k_1!k_2! \cdots k_n!$ пермутација (без понављања) у којима се не мења међусобни распоред различитих чланова скупа A. Мењајући и такве распореде добили бисмо укупан број пермутација (без понављања) од $k_1 + k_2 + ... + k_n$ елемената. Отуд важи

$$k_1!k_2! \cdots k_n! \cdot P^n_{k_1,k_2,...,k_n} = (k_1 + k_2 + ... + k_n)!,$$

одакле је, коначно,

$$P^n_{k_1,k_2,...,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_n)!}{k_1!k_2! \cdots k_n!}.$$

□

Дефиниција 4. *Нека је на скупу* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *дат строги линеарни поредак:* $a_1 < a_2 < ... < a_n$. *Комбинација* $k-$*те класе са понављањем елемената скупа* A *је* $k-$*торка* $(f(1), f(2), ..., f(k))$, *која је одређена монотоно растућом функцијом* $f : \{1, 2, ..., k\} \to A$, *тј. функцијом за коју важи* $f(1) \leq f(2) \leq ... \leq f(k)$.

Пример 8. *Дат је скуп* $A = \{a, b, c\}$. *Одредити све комбинације треће класе са понављањем елемената скупа* A.

Решење. Постоји 10 таквих комбинација треће класе наведеног скупа A, и то су:

$$aaa, bbb, ccc, aab, aac, abb, acc, bbc, bcc, abc.$$

△

Пример 9. *У продавници спортске опреме продају се три врсте лопти: за фудбал, кошарку и одбојку. На колико начина се могу купити* 4 *лопте?*

Решење. Јасно је да се ради о комбинацијама, јер поредак куповине лопти није битан. Међутим, јасно је такође да је реч о понављањима, јер се барем једна лопта мора поновити. Могући распореди лопти су: $4+0+0$ (све четири лопте су исте врсте), $3+1+0$ (три су једне, а једна је друге врсте), $2+2+0$ (по две лопте од две врсте) и $2+1+1$ (две лопте једне врсте и по једна од преосталих врста).

Очигледно је да се проблем пребројавања свих могућности заснива на једначини $m_1 + m_2 + m_3 = 4$, где су m_1, m_2, m_3 ненегативни цели бројеви који представљају број купљених фудбалских, кошаркашких и одбојкашких лопти. Решења уочене једначине су:
$4+0+0 = 0+4+0 = 0+0+4 = 3+1+0 = 3+0+1 = 1+3+0 = 1+0+3 = 0+1+3 = 0+3+1 = 2+2+0 = 2+0+2 = 0+2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2.$
Дакле, имамо укупно 15 могућности. △

Ако желимо да проблем уопштимо онда тражимо број ненегативних целобројних решења једначине $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$.

Пример 10. *Колико ненегативних целобројних решења има једначина* $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$ $(0 \leq m_1, m_2, ..., m_n \leq k)$*?*

Решење. Поређајмо у низ k јединица (јер је њихов збир управо k). Ако k јединица преградимо са $n-1$ преградом, онда је сваким таквим распоредом дефинисано једно решење дате једначине. Значи да пребројавање броја решења подразумева пребројавање места на којима је могуће поставити преграде. С обзиром да бројеви $m_1, m_2, ..., m_n$ могу бити и нуле, преграде је могуће ставити и пре прве јединице, али и иза последње јединице. Ако је за преграде испред прве јединице резервисано p места, онда је иза последње јединице преостало још $n-1-p$ места, па је укупан број позиција на које је могуће распоредити преграде једнак

$$p + k + n - 1 - p = k + n - 1.$$

Дакле, $n-1$ преграда се распоређује на $k+n-1$ места, што је могуће учинити на укупно $\binom{k+n-1}{n-1}$ начина. Користећи познату особину

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

добијамо да је

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k+n-1-(n-1)} = \binom{k+n-1}{k},$$

што је укупан број решења полазне једначине. $\triangle$

Теорема 8. *Број комбинација $k-$те класе са понављањем елемената $n-$скупа A ($A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$) једнак је*

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Доказ. Како код комбинација поредак елемената није битан, свака од комбинација $k-$те класе са понављањем од n елемената $a_1, a_2, ..., a_n$ може се приказати у облику

$$\underbrace{a_1a_1...a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2...a_2}_{m_2}...\underbrace{a_na_n...a_n}_{m_n},$$

јер се елементи $a_1, a_2, ..., a_n$ могу понављати $m_1, m_2, ..., m_n$ пута, тако да је $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$ $(0 \leq m_1, m_2, ..., m_n \leq k)$.

То значи да је број комбинација $k-$те класе са понављањем од n елемената једнак броју решења једначине $m_1 + m_2 + ... + m_n = k$ $(0 \leq m_1, m_2, ..., m_n \leq k)$. Из претходног примера следи да је број решења поменуте једначине

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

$\square$

Број комбинација $k-$те класе са понављањем од n елемената се најчешће означава са $\overline{C}_k^n = \binom{k+n-1}{k}$.

2.3 Особине биномних коефицијената[5]

Биномни коефицијенти $\binom{n}{k}$ имају необично велики број примена и сасвим сигурно су један од најважнијих комбинаторних појмова. У овој секцији ћемо проучити неке од њихових основних особина.

Дефиниција 5. ***Биномним коефицијентом****, у ознаци $\binom{n}{k}$ (читамо „n над k“), где $k, n \in N$ и $1 \leq k \leq n$, називамо број*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}. \tag{1}$$

По дефиницији узимамо да је $\binom{n}{0} = 1$.

Биномни коефицијенти се најједноставније представљају помоћу факторијела.

Теорема 9 (Факторијелна репрезентација)**.** *За целе бројеве k и n, тдј. $0 \leq k \leq n$ важи*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказ. За $k = 0$ и $k = n$ једнакост је тачна, јер је по дефиницији $\binom{n}{0} = 1$ и $0! = 1$, док је $\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Нека је $1 \leq k < n$. Тада је, према једнакости (1)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\square$

[5] Стевановић Д., Ћирић М., Симић С., Балтић В., *Дискретна математика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

Помоћу теореме 9 лако се доказују и следеће две теореме.

Теорема 10 (Услов симетричности)**.** *За сваки природан број* n *и сваки ненегативан цео број* $k \leq n$ *важи*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Доказ. Из једнакости теореме 9 добијамо

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

па је заиста $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. □

Теорема 11 (Адициона формула)**.** *За ненегативне целе бројеве* n *и* k *тдј.* $k \leq n$ *важи*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Доказ. Применом теореме 9 и чињенице да је $k! = (k-1)! \cdot k$, имамо

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

□

Једнакост

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

се у страној литератури назива Паскалов[6] идентитет (енг. *Pascal's identity*). Један од главних разлога за то је што је блиско повезана са тзв. **Паскаловим троуглом**:

[6] *Blaise Pascal* (1623-1662), француски математичар.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & \vdots & & & & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Паскалов троугао се добија тако што се почне са редом који садржи само број 1, а затим се сваки следећи ред добија тако што се испод сваког пара узастопних бројева у претходном реду напише њихов збир, и на крају се на оба краја новог реда стави број 1. Индукцијом се уз помоћ једнакости може доказати да $(n+1)-$ви ред садржи биномне коефицијенте $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$. Паскалов троугао омогућава и да се произвољан биномни коефицијент израчуна користећи само сабирање. Тако је за налажење вредности $\binom{n}{k}$ довољно израчунати само оне вредности које се у Паскаловом троуглу налазе горе лево и горе десно од $(k+1)-$ве позиције у $(n+1)-$вом реду троугла.

Најважније својство биномних коефицијената исказано је у следећој теореми.

Теорема 12 (Биномна теорема). *За сваки природан број n важи*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Доказ. Доказ изводимо методом математичке индукције. За $n = 1$ формула има облик

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^1 + \binom{1}{1} y^1,$$

што је очигледно тачно. Нека је формула тачна за неко n. Тада је

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$= \left(\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \right) (x+y)$$

$$= \binom{n}{0} x^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) x^n y + \cdots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

(примена теореме 11)

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \cdots + \binom{n+1}{n} x y^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1},$$

одакле следи да је формула тачна и за $n+1$, па је самим тим доказана и теорема. $\square$

Користимо и ознаку T_{k+1} за општи члан у развијеном облику бинома $(x+y)^n$, а који је дат формулом

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Биномна формула се назива и Њутнова[7] формула по познатом енглеском физичару и математичару Исаку Њутну.

Пример 11. *Помоћу биномне формуле одредити* $(x+y)^4$.

Решење.

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^{4-k} y^k \\ &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

$\triangle$

Приметимо да се коефицијенти $1, 4, 6, 4, 1$ у биномном развоју јављају као та 5-врста у Паскаловом троуглу. Уопште, имамо да за развој $(x+y)^n$ користимо $(n+1)$-ву врсту у Паскаловом троуглу.

Теорема 13. *За природан број n важи*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Доказ. Ако у биномној формули ставимо да је $x = y = 1$, добијамо

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

$\square$

Пример 12. *Сума биномних коефицијената разлагања бинома* $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ *једнака је 64. Одредити члан таквог развоја који не садржи x.*

[7] *Isaac Newton* (1643-1727), енглески математичар и физичар.

Решење. Користећи теорему 13 закључујемо да је сума биномних коефицијената једнака 2^{3n}, па је $2^{3n} = 64$, тј. $2^{3n} = 2^6$. Одавде је $n = 2$. Дакле, имамо

$$\left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \left(4x\right)^{6-k} \left(\frac{1}{4x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 4^{6-2k} x^{6-3k}.$$

Члан претходног развоја који не садржи x се добија за $6-3k=0$, односно за $k = 2$, и једнак је

$$\binom{6}{4} 4^2 = 15 \cdot 16 = 240.$$

△

3 Настава комбинаторике у средњој школи[8]

Због великог броја различитих профила и програма средњих школа, овим истраживањем биће обухваћено градиво из предмета математика које се обрађује у гимназијама свих профила. Средње стручне, уметничке и друге школе користе исте или сличне моделе наставних планова и програма, тако да на истраживање које се спроводи у оквиру овог рада ни најмање неће утицати то што се обрађују само модели наставних планова и програма математике за гимназије. Такође, с обзиром на то да се комбинаторика ближе обрађује једино у првом и четвртом разреду гимназија, истраживање које следи неће обухватити планове и програме математике за други, односно трећи разред гимназија.

Циљ наставе математике у гимназији јесте: да ученици усвоје елементарне математичке компетенције (знања, вештине и вредносне ставове) које су потребне за схватање појава и законитости у природи и друштву и које ће да оспособе ученике за примену усвојених математичких знања (у решавању разноврсних задатака из животне праксе) и за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

Задаци наставе математике су да ученици:

-развијају логичко и апстрактно мишљење;

-развијају способности јасног и прецизног изражавања и коришћења основног математичко-логичког језика;

-развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њиховог односа;

-разликују геометријске објекте и њихове узајамне односе и трансформације;

-разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;

-развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност; развијају радне навике и способности за самостални и групни рад; формирају систем вредности;

-стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;

[8]Подаци о наставним плановима и програмима преузети са интернет странице http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/

-формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;

-буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу са индивидуалним способностима и потребама друштва;

-развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу.

У оквиру редовне наставе математике, утврђена су три модела наставних планова и програма математике за гимназије:
$M1$ $(4+4+4+4=16)$ - за општи тип гимназије;
$M2$ $(4+3+2+2=11)$ - за друштвено-језички смер гимназије;
$M3$ $(4+5+5+4=18)$ - за природно-математички смер гимназије;
За први разред у сва три модела програм је исти.

3.1 Први разред гимназија[9]

У првом разреду гимназија свих профила, настава математике се одржава 4 пута недељно, односно, ученици имају 148 часова годишње.
Садржај програма:
Гимназија-сви модели (148)
Логика и скупови (15)
Реални бројеви (14)
Пропорционалност (8)
Увод у геометрију (8)
Подударност (36)
Рационални алгебарски изрази (32)
Сличност (14)
Тригонометрија правоуглог троугла (9)

Комбинаторика се у првом разреду обрађује делимично у наставној теми „Логика и скупови", и то у две наставне јединице, од којих је једна предвиђена за обраду, а друга за утврђивање градива. Од укупно 148 часова годишње, то чини свега $1,35\%$ укупног градива предвиђеног за први разред гимназија.

Елементи комбинаторике дати су на једноставнијим примерима и задацима, као примена основних принципа пребројавања коначних скупова (правило збира и правило производа).

[9]Богославов В., *Збирка решених задатака из математике 1*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

Пример 13. *Колико има троцифрених бројева у чијем запису се појављују 3 различите цифре?*

Решење. Цифра c_1 троцифреног броја $c_1c_2c_3$ може бити било која од цифара $1, 2, ..., 9$. Цифра c_2, где је $c_2 \neq c_1$, може бити изабрана на 9 начина, а цифра c_3, где је $c_3 \neq c_1$ и $c_3 \neq c_2$, може бити изабрана на 8 начина. На основу правила производа добијамо да је тражени број једнак $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. △

Пример 14. *Колико има четвороцифрених бројева, код којих је збир цифара* 10*, а цифра десетица једнака* 5*?*

Решење. Примењујући правило збира и правило производа закључујемо да их има 15 и то су: 5050, 4051, 4150, 3250, 3052, 3151, 2350, 2053, 2251, 2152 1450, 1054, 1351, 1153 и 1252. △

Пример 15. *Колико има петоцифрених бројева дељивих са* 5 *и у чијем запису нема понављања цифара?*

Решење. Да би број био дељив са 5, неопходно је да се завршава са цифром 0 или 5. Посматрајмо, најпре, случај када је последња цифра 0. Тада за избор прве цифре имамо 9 могућности; за тако изабрану прву цифру, постоји 8 могућности за другу, 7 за трећу, односно 6 за четврту, јер се цифре не понављају. Према томе, број таквих избора је $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Други случај је када је за последњу цифру изабрана цифра 5. За избор прве цифре имамо 8 могућности (не може нула), за избор друге такође 8, треће 7 и четврте 6, на основу чега закључујемо да у овом случају постоји $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$ таквих избора.

Коначно, примењујући правило збира, добијамо да тражених бројева има 5712. △

3.2 Четврти разред гимназија[10]

За четврти разред гимназија утврђена су три модела наставних планова и програма математике и то:

Програм М1 за гимназије општег типа

У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 4 часа математике недељно, што укупно представља 128 часова математике годишње.

[10] Богославов В., *Збирка решених задатака из математике 4*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

Садржај програма:
Општи тип (128)
Функције (28)
Извод функције (26)
Интеграл (22)
Комбинаторика (12)
Вероватноћа и статистика (28)

Програм М2 за гимназије друштвено-језичког смера

У оквиру овог наставног програма, ученици похађају 2 часа математике недељно, што укупно представља 64 часова математике годишње.
Садржај програма:
Друштвено-језички смер (64)
Функције (14)
Извод функције (17)
Комбинаторика (6)
Вероватноћа и статистика (15)

Програм М3 за гимназије природно-математичког смера

Програм је истоветан са програмом за четврти разред гимназије општег типа (програм М1).

У оквиру модела М1 и М3 наставних планова и програма математике за гимназије општег типа и природно математичког смера, од укупно 128 часова годишње, комбинаторика се обрађује у 12 наставних јединица, од којих је 5 предвиђено за обраду, а 7 за утврђивање градива, што представља $9,37\%$ укупног градива предвиђеног за четврти разред гимназија.

У оквиру модела М2 наставних планова и програма математике за гимназије друштвено-језичког смера, од укупно 64 часова годишње, комбинаторика се обрађује у 6 наставних јединица, од којих је 3 предвиђено за обраду, а за 3 утврђивање градива, што представља $9,37\%$ укупног градива предвиђеног за четврти разред гимназија.

У четвртом разреду, ученици треба да, на основу раније стечених знања о пребројавању коначних скупова, упознају суштину издвајања, распоређивања и одређивања броја одређених распореда, уочавајући разлику између појединих врста распоређивања објеката (на погодно одабраним примерима), при чему је нарочито важно да се добро увежба препознавање појединих врста комбинаторних објеката на довољном броју разноврсних задатака. Тек онда треба да уследе одговарајуће формуле за број варијација, пермутација и комбинација. Повезујући биномне коефицијенте са комбинацијама, могу се приказати неке примене биномног обрасца.

Пример 16. *У једном одељењу од* 25 *ученика треба изабрати председника, секретара и благајника (један ученик добија једну функцију). На колико начина можемо направити овај избор?*

Решење. Покушаћемо, за почетак, да одговоримо на два битна питања. Да ли су изабрани сви елементи почетног скупа и да ли је поредак елемената битан? Ако правилно одговоримо на та питања имаћемо представу о којим је комбинаторним конфигурацијама реч. Од 25 ученика у одељењу бирамо само 3, одакле следи да нису изабрани сви ученици. Такође, важно је кога ћемо изабрати за председника, кога за секретара а кога за благајника, односно, битан је поредак нашег избора. На основу претходног, јасно је да је реч о варијацијама треће класе скупа од 25 елемената, и то без понављања, јер не може исти ученик добити две функције. Примењујући теорему 5 добијамо да је тражени број избора

$$V_3^{25} = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800.$$

$\triangle$

Пример 17. *Колико има петоцифрених бројева у чијем запису нема цифара* $6, 7, 8, 9$*?*

Решење. Број низова дужине 5 чији чланови припадају скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ једнак је $\overline{V_5^6} = 6^5$. Међутим, низ који почиње цифром 0 не сматрамо петоцифреним бројем. Број таквих низова који почињу цифром 0 једнак је $\overline{V_4^6} = 6^4$. Тражени број једнак је $6^5 - 6^4 = 6480$. $\triangle$

Пример 18. *На колико начина можемо да поређамо три књиге на полицу?*

Решење. Приметимо да су у овом случају сви елементи почетног скупа изабрани и да је њихов поредак битан. Стога је реч о пермутацијама скупа од три елемента, чији је број, на основу теореме 5, једнак $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. И заиста, ако означимо поменуте књиге бројевима $1, 2$ и 3 добићемо 6 могућих распореда: $123, 132, 213, 231, 312$ и 321. $\triangle$

Пример 19. *Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова речи МАТЕМАТИКА?*

Решење. У питању су очигледно пермутације са понављањем, јер се у запису речи МАТЕМАТИКА три пута појављује слово А, по два пута слова М и Т и по једанпут слова Е, К, И. Зато је тражени број једнак

$$P^6_{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151200.$$

$\triangle$

Пример 20. *У одељењу има* 12 *ученица и* 8 *ученика. Треба изабрати* 3 *ученице и* 2 *ученика који ће представљати одељење на такмичењу младих математичара. На колико начина се то може урадити?*

Решење. Очигледно је да и код избора девојчица и код избора дечака нису сви елементи почетног скупа изабрани, као и да поредак изабраних елемената није битан. Стога је реч о комбинацијама и код првог и код другог избора. Од 12 ученица можемо изабрати њих три на $\binom{12}{3}$ начина, а од 8 ученика можемо изабрати два на $\binom{8}{2}$ начина. На основу правила производа добијамо да је тражени број једнак $\binom{12}{3}\binom{8}{2} = 220 \cdot 28 = 6160$. $\triangle$

Пример 21. *На колико начина од* 10 *врста разгледница туриста може купити* 3 *(не обавезно међусобно различите) разгледнице?*

Решење. Проблем пребројавања свих могућности заснива се на једначини $m_1 + m_2 + ... + m_{10} = 3$, где су $0 \leq m_1, m_2, ..., m_{10} \leq 3$. На основу теореме 8, добијамо да је број решења дате једначине, па самим тим и тражени број начина, једнак $\binom{12}{3} = 220$. $\triangle$

Пример 22. *Решити једначину* $V^x_2 = 380$.

Решење. Дата једначина еквивалентна је следећој квадратној једначини $x(x-1) = 380 = 20 \cdot 19$, одакле следи да је решење $x = 20$. $\triangle$

Пример 23. *Решити једначину* $3 \cdot C^{2n}_{n-1} = 5 \cdot C^{2n-1}_{n}$.

Решење. Дата једначина еквивалентна је следећој једначини $3 \cdot \binom{2n}{n-1} = 5 \cdot \binom{2n-1}{n}$, односно једначини

$$3 \cdot \frac{2n(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)n!} = 5 \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}.$$

Погодним сређивањем добијамо

$$3 \cdot \frac{2n}{n+1} = 5,$$

одакле следи да је решење једначине $n = 5$. △

Пример 24. *Решити једначину* $P_{x+2} = 210 \cdot V_{x-4}^{x-1} \cdot P_3$.

Решење. Полазна једначина еквивалентна је следећој

$$(x+2)! = 210 \cdot (x-1) \cdots 4 \cdot 3!,$$

односно

$$(x+2)(x+1)x(x-1)! = 210 \cdot (x-1) \cdots 4 \cdot 3!,$$

одакле погодним скраћивањем добијамо:

$$x(x+1)(x+2) = 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7.$$

Према томе, решење полазне једначине је $x = 5$. △

Пример 25. *Одредити члан који не садржи x у развоју бинома:*

$$\left(\sqrt[4]{a^2x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13}.$$

Решење. Одредимо за почетак општи члан датог бинома:

$$T_{k+1} = \binom{13}{k} \cdot \left(\left(a^2x\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{13-k} \cdot \left(\left(\frac{1}{ax^2}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^k,$$

одакле, погодним сређивањем добијамо да је

$$T_{k+1} = \binom{13}{k} \cdot a^{\frac{13-k}{2}} \cdot x^{\frac{13-k}{4}} \cdot a^{-\frac{k}{5}} \cdot x^{-\frac{2k}{5}},$$

односно

$$T_{k+1} = \binom{13}{k} \cdot a^{\frac{65-7k}{10}} \cdot x^{\frac{65-13k}{20}}.$$

Члан у развоју датог бинома који не садржи x добија се за $\frac{65-13k}{20} = 0$, односно за $k = 5$. Према томе, решење задатка је шести члан у развоју, тј.

$$T_6 = \binom{13}{5} \cdot a^3.$$

△

4 Одабрани задаци са математичких такмичења

С обзиром на честу појаву логичко-комбинаторних задатака на свим нивоима разних математичких такмичења, а имајући у виду и ограничен број часова посвећен овој наставној теми у редовној настави, посебан простор изучавање комбинаторике заузима у додатној настави, и то у свим разредима. Поменимо још да се логичко-комбинаторни задаци последњих година редовно појављују на пријемним испитима из математике на бројним озбиљним факултетима (ЕТФ, Математички факултет, ФОН,...), као и да се комбинаторика обрађује у склопу припреме матураната за завршни матурски испит из математике. Међутим, предмет овог рада, а специјално и ове теме, јесте обрада комбинаторике у додатној настави. У даљем тексту следе оријентациони програми за додатни рад у свим разредима гимназија, као и задаци комбинаторне природе са разних математичких такмичења.

4.1 Оријентациони програми за додатни рад у гимназијама[11]

У сваком разреду треба обрадити $6-8$ тема (по избору наставника), зависно од програма редовне наставе. Назначени број часова за поједине теме је оријентациони и може се повећати (смањити) за 1 или 2 часа.

Оријентациони програм за први разред (32 **часа годишње**):

1. Елементи математичке логике (6)
2. Елементарна теорија бројева одабрани задаци (6)
3. Полиноми (8)
4. Рационални алгебарски изрази, једначине и неједначине (5)
5. Апсолутна вредност броја и примене (4)
6. Системи линеарних једначина и неједначина (5)
7. Равне геометријске фигуре (6)
8. Одабрани доказни и рачунски задаци
9. Једнакост многоуглова (4)

[11] Подаци о наставним плановима и програмима преузети са интернет странице http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/

10. Геометријске конструкције у равни (8)
11. Инверзија (4)
12. Аполонијев проблем додира (4)
13. Елементи топологије (4)
14. **Логички и комбинаторни задаци** (5)
15. Одабрани задаци за такмичења из математике (6)

Оријентациони програм за други разред (32 **часа годишње**):

1. Квадратне једначине, функције и неједначине (4)
2. Нелинеарне Диофантове једначине (4)
3. Ирационални алгебарски изрази, једначине и неједначине (4)
4. Експоненцијални и логаритамски изрази, једначине и неједначине (4)
5. Проблеми екстремних вредности (6)
6. Реални бројеви (4)
7. Геометријске конструкције у простору (5)
8. Одабрана поглавља тригонометрије (8)
9. **Логичко комбинаторни и слични нестандардни задаци** (4)
10. Одабрани задаци за математичка такмичења (5)

Оријентациони програм за трећи разред (32 **часа годишње**):

1. Полиедри, правилни полиедри; тетраедар (6)
2. Обртна тела. Комбинована тела (4)
3. Математичка индукција. Низови (6)
4. Рекурентнте формуле и неке њихове примене (4)
5. Разне примене вектора (4)
6. Метод координата. Функције и графици (8)

7. Комплексни бројеви и полиноми (6)
8. Системи једначина и неједначина другог или вишег реда (4)
9. Конусни пресеци (6)
10. Сферна геометрија (8)
11. **Логичко комбинаторни задаци** (4)
12. Одабрани задаци за математичка такмичења (6)

Оријентациони програм за четврти разред (30 **часова годишње**):

1. Математичке структуре (4)
2. Развој и врсте геометрија (4)
3. Кратак преглед историје математике (8)
4. Функције у природи и техници (4)
5. Извод и интеграл (8)
6. Непрекидност (4)
7. Нумеричке методе (5)
8. **Елементи комбинаторике и вероватноће** (8)
9. Елементи теорије информација и основи кибернетике (5)
10. Математика у применама: елементи математичког моделирања (6)
11. Елементи теорије игара (4)
12. Одабрани задаци за математичка такмичења (4)

Лако се примећује да се комбинаторика у далеко већој мери изучава на додатној, него у редовној настави. Главни разлог за то је свакако тежина самог градива, које је, с правом, углавном намењено даровитим и успешнијим ученицима. На додатној настави се, између осталог, усавршавају методи пребројавања коначних скупова, изучава Дирихлеов принцип, комбинаторна геометрија, примењују се формуле за број варијација, пермутација и комбинација, са и без понављања. Такође, примењују се разне особине биномних коефицијената и биномне формуле, и проучавају разни нестандардни и „главоломни“ задаци (проблеми куглица, математичко-шаховски задаци, разноврсне математичке игре и сл.).

4.2 Задаци са математичких такмичења

Задатак 1. *Дато је* 2015 *једнаких плавих и* 3 *једнаке беле куглице. На колико начина их можемо поређати у низ од* 2018 *куглица уз услов да прва и последња куглица у низу буду исте боје?*

Решење. Приметимо два случаја. Ако су прва и последња куглица у низу плаве, од преосталих 2016 позиција треба одабрати 3 на којима ћемо распоредити беле куглице (док на осталим позицијама распоређујемо плаве), што је могуће на $\binom{2016}{3} = \frac{2016 \cdot 2015 \cdot 2014}{3!} = 336 \cdot 2015 \cdot 2014$ начина.

У другом случају, ако су прва и последња куглица у низу беле, од преосталих 2016 позиција треба одабрати 2015 на којима ћемо распоредити плаве куглице (док на преосталој једној позицији имамо белу куглицу), што можемо урадити на $\binom{2016}{2015} = \frac{2016 \cdot 2015!}{2015!} = 2016$ начина.

Применом правила збира закључујемо да је решење задатка

$$336 \cdot 2015 \cdot 2014 + 2016.$$

(Општинско такмичење 2016 1Б) △

Задатак 2. *Колико има* 100*−цифрених бројева који се записују цифрама* 1, 2 *и* 3 *тако да им никоје две суседне цифре нису једнаке?*

Решење. Прву цифру можемо изабрати на 3 начина. Након таквог одабира прве цифре другу можемо изабрати на 2 начина (мора бити различита од прве цифре). Слично, сваку следећу цифру можемо одабрати на 2 начина па је тражени број $3 \cdot 2^{99}$.
(Општинско такмичење 2014 1Б) △

Задатак 3. *Колико има петоцифрених бројева дељивих са* 5 *формираних од цифара* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *ако се:*

а) цифре не понављају;

б) цифре могу понављати?

Решење. а) Да би број био дељив са 5, последња цифра тог броја мора бити 0 или 5. Посматрајмо, за почетак, случај када је последња цифра нула. Тада за прву цифру можемо узети било коју од преосталих 7 цифара из почетног скупа. За такав избор прве цифре, имамо 6 могућности за избор друге, 5 за трећу и 4 за четврту цифру, јер се цифре не понављају. Према томе, број таквих избора је $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

У случају када је последња цифра пет, за избор прве цифре имамо 6 могућности (не може нула); за такав избор прве цифре, постоји 6 могућности за избор друге, односно 5 и 4 опције за избор треће и четврте цифре, на основу чега следи да је број таквих избора у овом случају $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$.

Коначно, примењујући правило збира, добијамо да тражених бројева има $840 + 720 = 1560$.

б) Као и у примеру под а), и овде примећујемо два случаја. У првом случају, када је последња цифра нула, за почетну цифру можемо узети било коју од цифара $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, дакле, 7 могућности. За свако од преостала три места, конкурише 8 цифара јер се цифре могу понављати. Дакле, укупан број таквих избора је $7 \cdot 8^3 = 3584$. Једноставно се примећује и да је у другом случају, када је последња цифра пет, исти број избора $7 \cdot 8^3 = 3584$, одакле је укупан број решења $2 \cdot 3584 = 7168$.
(Тангента 81, страна 28, Писмени задаци, задатак 5) $\triangle$

Задатак 4. *У врсту је поређано* 2016 *столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број плавих столица буде паран?*

Решење. Првих 2015 столица обојимо произвољно, тј. за сваку столицу постоје два могућа бојења (црвено или плаво). За преосталу столицу одговара нам у сваком случају тачно једно бојење да би број плавих столица био паран. Зато је тражени број 2^{2015}.
(Општинско такмичење 2016 4Б) $\triangle$

Задатак 5. *Колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара* $1, 2$ *и* 3*, али тако да се ниједна цифра не појављује више од два пута у запису броја?*

Решење. Како се ниједна цифра не сме појављивати више од два пута, сваки од посматраних четвороцифрених бројева записан је или помоћу две цифре од којих се свака појављује по два пута, или помоћу све три дозвољене цифре међу којима се једна појављује тачно два пута, а преостале две тачно по једном. У првом случају, уколико су те две цифре 1 и 2, тада можемо добити бројеве $1122, 1212, 1221, 2112, 2121$ и 2211, тј. шест могућности; исто важи уколико фиксирамо цифре 1 и 3, односно 2 и 3, што све заједно даје 18 могућности у првом случају. У другом случају, уколико се цифра 1 појављује два пута а преостале две цифре по једном, тада можемо добити бројеве $1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, 2113, 3112, 2131, 3121, 2311$ и 3211, тј. дванаест могућности; исто важи уколико се цифра 2 (а не цифра 1) појављује два пута, као и уколико се цифра 3

(а не цифра 1) појављује два пута, што све заједно даје 36 могућности у другом случају. Дакле, имамо укупно 54 таква броја.
(Општинско такмичење 2015 2Б) △

Задатак 6. *За екипу једне школе у шаху треба изабрати три такмичара од* 11 *кандидата међу којима је* 6 *дечака и* 5 *девојчица. На колико начина се то може учинити ако се зна да у екипи мора бити барем једна девојчица?*

Решење. По услову задатка, екипа се може састојати од: три девојчице, две девојчице и једног дечака, или једне девојчице и два дечака. У првом случају екипа се може одабрати на $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ начина. У другом случају екипа се може одабрати на $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 6 = 60$ начина а у трећем случају на $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} = 5 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 75$ начина. Дакле, укупан број начина да се екипа одабере једнак је 145.
(Општинско такмичење 2014 3Б) △

Задатак 7. *Колико се петоцифрених бројева може написати помоћу цифара* $0, 1, 2, ..., 9$ *ако се цифре:*

а) не могу понављати;

б) могу понављати?

Решење. а) За прву цифру постоји 9 могућности (не може нула), за другу такође 9, трећу 8, четврту 7 и пету 6 могућности, јер се цифре не могу понављати. Према томе, укупан број таквих бројева јесте $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$.
б) Број низова дужине 5 чији чланови припадају почетном скупу једнак је 10^5. Међутим, низ који почиње цифром 0 не сматрамо петоцифреним бројем. Број таквих низова који почињу цифром 0 једнак је 10^4 па је тражени број $10^5 - 10^4 = 9 \cdot 10^4 = 90000$.
(Тангента 69, страна 28, Писмени задаци, задатак 4) △

Задатак 8. *На колико начина* 20 *људи може сести на* 20 *места једног реда у биоскопу, тако да Ана седи поред Бојана, а Весна поред Горана?*

Решење. Потребно је распоредити 16 људи и 2 пара, с тим што ова два пара схватамо као две целине, јер се не могу одвајати. Самим тим, тих 18 група можемо распоредити на 18! начина. Како у свакој од две групе са по два члана имамо 2 различита распореда, укупан број распореда

јесте $2 \cdot 2 \cdot 18!$.
(Општинско такмичење 2011 1Б) $\triangle$

Задатак 9. *Колико има петоцифрених бројева који имају тачно једну цифру* 6*?*

Решење. Разликујемо два случаја, уколико је цифра 6 на првом месту и уколико није на првом месту. У првом случају, лако се примећује да постоји 9^4 таквих бројева. У другом случају, за прву цифру имамо 8 могућности (не могу 0 и 6), док на три од преостала четири места треба поставити било коју од цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$, што можемо учинити на $8 \cdot \binom{4}{3} \cdot 9^3 = 32 \cdot 9^3$ начина. Коначно, закључујемо да је укупан број таквих петоцифрених бројева једнак

$$9^4 + 32 \cdot 9^3 = 41 \cdot 9^3 = 29889.$$

(Опптинско такмичење 2007 1Б) $\triangle$

Задатак 10. *Свако од јединичних поља таблице* 3×3 *обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља(тј. поља са заједничком страницом) различите боје?*

Решење. Нека су боје означене са a, b и c. Ако је централно поље обојено бојом a, могући су следећи случајеви:

1) Сва четири поља суседна централном су обојена истом бојом. Та боја се може одабрати на 2 начина и тада за свако угаоно поље постоје 2 могућности за избор боје (ако је, на пример, боја поља суседних централном b, угаона могу бити боје a или c), па је у овом случају број могућих бојења $2 \cdot 2^4 = 32$.

2) Три поља суседна централном су исте, а четврто је различите боје. Таквих бојења има $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$ и за свако такво бојење преостала (угаона) поља се могу обојити на 2^2 начина (2 угаона поља имају суседна поља различите боје, па је њихова боја једнозначно одређена; преостала два имају суседна исте боје, па за њихово бојење постоје 2 могућности), па је број бојења у овом случају $8 \cdot 2^2 = 32$.

3) По два суседна поља су обојена истом бојом. У овој ситуацији разликујемо два случаја:

(а) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су различите боје (оваквих бојења има 4). Тада два угаона поља имају суседна поља различите боје (па је њихова боја јединствено одређена), а два угаона поља имају суседна поља исте боје (па се њихова боја може изабрати на 2 начина). Следи да је број бојења у овој ситуацији $4 \cdot 2^2 = 16$.

(б) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су исте боје (оваквих бојења има 2). Тада свако угаоно поље има суседна поља различите боје, па је њихова боја јединствено одређена, тј. број бојења у овој ситуацији је 2.

Дакле, ако је централно поље обојено бојом a, тражених бојења има $32 + 32 + 16 + 2 = 82$, па је укупан број бојења $3 \cdot 82 = 246$.
(Општинско такмичење 2010 1Б) △

Задатак 11. *Колико има петоцифрених бројева записаних непарним цифрама, међу којима је бар једна јединица?*

Решење. I начин: Разликујемо пет случајева, сваки у зависности од броја јединица у посматраним бројевима. Постоји тачно 1 петоцифрени број који садржи пет јединица (11111). Са четири јединице постоји укупно $\binom{5}{1} \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ бројева (на једно од пет могућих места поставимо неку од преостале 4 непарне цифре). Слично закључујемо да тражених бројева са три јединице има $\binom{5}{2} \cdot 4^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 16 = 160$, односно са две јединице $\binom{5}{3} \cdot 4^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 64 = 640$. Коначно, са једном јединицом постоји $\binom{5}{4} \cdot 4^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 256 = 1280$ бројева. Дакле, тражених бројева који задовољавају услове задатка укупно постоји: $1 + 20 + 160 + 640 + 1280 = 2101$.

II начин: Постоји укупно 5^5 петоцифрених бројева који се могу записати помоћу цифара $1, 3, 5, 7, 9$. Од тог броја одузмемо све петоцифрене бројеве који су записани помоћу цифара $3, 5, 7, 9$ (дакле без јединице), а таквих је 4^5. Коначно, постоји укупно $5^5 - 4^5 = 3125 - 1024 = 2101$ бројева који задовољавају услове задатка.
(Општинско такмичење 2008 1Б) △

Задатак 12. *Од* 16 *људи, међу којима су по* 4 *из Србије, Румуније, Бугарске и Македоније, треба изабрати* 6.

(а) Колико има таквих избора у којима је заступљена свака земља?

(б) *Колико има таквих избора у којима нема више од два представника неке земље?*

Решење. (а) Како је заступљен представник сваке земље, следи да или једна земља има 3 представника (а остале три по 1) или две земље имају 2 представника (а остале две по 1).

1) Ако једна земља има 3 представника, њен избор се може извршити на $\binom{4}{1}$ начина, њена 3 представника на $\binom{4}{3}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може изабрати на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1}^3 = 4^5 = 1024$$

избора.

2) Ако две земље имају 2 представника, њихов избор може се извршити на $\binom{4}{2}$ начина, за сваку од њих 2 представника на $\binom{4}{2}$ начина, док се представник неке од преосталих земаља може изабрати на $\binom{4}{1}$ начина, па у овој ситуацији постоји

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{4}{1}^2 = 6^3 \cdot 4^2 = 3456$$

избора.

Дакле, одговор на питање дела под (а) јесте $1024 + 3456 = 4480$ избора.

(б) Како свака од земаља има највише 2 представника, следи да бар три земље морају имати представнике, тј. или три земље имају по 2 представника или две земље имају 2, а две једног представника.

1) Ако три земље имају по 2 представника, њихов избор се може извршити на $\binom{4}{3}$ начина, а по 2 представника у свакој од њих на $\binom{4}{2}$ начина, па у овој ситуацији постоји

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}^3 = 4 \cdot 6^3 = 864$$

избора.

2) Ако две земље имају 2 представника, а две једног, број избора је исти као у другом случају дела (а), тј. има 3456 таквих избора.

Коначно, одговор на питање дела (б) јесте $864 + 3456 = 4320$ избора.
(Општинско такмичење 2009 1А) △

Задатак 13. *Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за осам већа од најмање цифре?*

Решење. Разликујемо два случаја: највећа цифра је 9 а најмања 1, и највећа цифра је 8 а најмања 0. То су једине две могућности. У првом случају јединица може доћи на било коју од 6 позиција, а потом деветка на било коју од преосталих 5 позиција. Даље, на прву од преостале четири позиције може доћи било која од цифара $2, 3, ..., 8$, што је 7 могућности, за наредну позицију имамо 6 могућности, за позицију после ње 5 могућности и за последњу преосталу позицију 4 могућности. Тиме смо набројали укупно $6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 25200$ бројева у првом случају.

Посматрајмо сада други случај. Постоји 5 могућих позиција на којима се може наћи нула (јер нула не може на прво место), а након постављања нуле имамо 5 могућих позиција за осмицу. Даље резонујемо слично као у претходном случају, и израчунавамо да у овом случају имамо укупно $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 21000$ бројева. Дакле, решење задатка је $25200 + 21000 = 46200$ бројева.
(Окружно такмичење 2015 3Б) △

Задатак 14. *На контролној вежби сваки ученик добио је задатке једне од две групе задатака. Уколико одељење има* 20 *ученика, а по* 10 *ученика ради сваку групу задатака, на колико начина их дежурни наставник може поређати у два реда тако да ученици који су добили исту групу задатака седе један иза другог, а да ученици који седе један до другог раде различите групе задатака?*

Решење. Одредимо најпре ученике који ће седети у првом реду. Ово су ученици који раде прву или другу групу задатака, тако да то можемо урадити на 2 начина. Затим, у сваком реду треба распоредити по 10 ученика у произвољном редоследу. За сваки ред то можемо урадити на $10!$ начина, тако да је тражени број распореда једнак $2 \cdot (10!)^2$.
(Окружно такмичење 2013 3Б) △

Задатак 15. *Колико има четвороцифрених бројева који садрже бар две цифре* 5*?*

Решење. Број 5555 је једини четвороцифрени број који има четири цифре 5. Одредимо колико има четвороцифрених бројева који имају тачно три цифре 5. У том циљу, морамо разликовати два случаја. Најпре, ако је петица на првом месту, тада бирамо једну од преостале три позиције на коју ћемо поставити неку од цифара $0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$, што можемо учинити на $\binom{3}{1} \cdot 9 = 27$ начина. У другом случају, постоји тачно 8 бројева код којих цифра хиљада није једнака 5 (цифра хиљада не може бити 0 или 5, док су остале цифре једнаке 5), према томе постоји $27+8 = 35$ четвороцифрених бројева који имају тачно три цифре 5.

Одредимо, на крају, колико има четвороцифрених бројева којима су тачно две цифре једнаке 5. Уколико је цифра хиљада једнака 5, тада имамо три могућности за преосталу цифру 5 (она може бити цифра јединица, десетица или стотина), а затим за сваку од преостале две цифре имамо 9 могућности, тј. ових бројева има $3 \cdot 9^2 = 243$. Уколико цифра хиљада није једнака 5, ту цифру можемо одабрати на 8 начина, а затим и место за преосталу цифру која није једнака 5 на 3 начина и ту цифру на 9 начина, тј. ових бројева има $8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$.

Бројева који задовољавају тражене услове има укупно $1 + 35 + 243 + 216 = 495$.
(Окружно такмичење 2013 1Б) △

Задатак 16. *Колико има функција* $f : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ *које нису бијекције и нису константне функције?*

Решење. Укупан број функција је 4^4, јер се сваки елемент скупа $\{a, b, c, d\}$ може пресликати у произвољан елемент скупа $\{a, b, c, d\}$. Број бијекција на скупу од четири елемента једнак је броју пермутација на скупу од четири елемента, односно $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, док је константних функција укупно 4. Према томе, тражени број функција које задовољавају услове једнак је $4^4 - 24 - 4 = 228$.
(Окружно такмичење 2013 4Б) △

Задатак 17. *Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за* 7 *већа од најмање цифре?*

Решење. Разликујемо три случаја:

(1) Највећа цифра је 7 а најмања 0. Нулу можемо поставити на 5 места (не може на прво), седмицу такође на 5 места. Даље, на

прву од преостале четири позиције може доћи било која од цифара $1, 2, 3, 4, 5, 6$, што је 6 могућности, за наредну позицију имамо 5 могућности, за позицију после ње 4 могућности и за последњу преосталу позицију 3 могућности. Одатле следи да је број таквих избора $5^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 9000$.

(2) Највећа цифра је 8 а најмања 1. Јединицу можемо поставити на 6 места, осмицу на 5 а даље резонујемо слично као у претходном случају па је број избора $6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10800$.

(3) Највећа цифра је 9 а најмања 2. Лако се закључује, примењујући поступак коришћен у претходном случају, да постоји укупно 10800 таквих бројева.

Дакле решење задатка је $9000 + 2 \cdot 10800 = 30600$ бројева.
(Окружно такмичење 2011 4Б) △

Задатак 18. *На колико начина се може поређати* 10 *различитих књига на полицу, али тако да за пет одређених важи да никоје две нису једна до друге?*

Решење. Распоредимо прво оних 5 књига које могу стајати у произвољном међусобном поретку, што можемо учинити на 5! начина. Преостале књиге се могу налазити између првобитно постављених (4 места), на почетку или на крају реда, тј. на укупно 6 места, и то тако да на сваком од ових места стоји тачно једна књига. Дакле, неопходно је изабрати 5 од 6 могућих места, и на њих поставити последњих 5 књига. Како је ово могуће учинити на $\binom{6}{5} \cdot 5! = 6 \cdot 5!$ начина, то је тражени број распореда једнак $5! \cdot 6 \cdot 5! = 5! \cdot 6!$.
(Окружно такмичење 2011 2Б) △

Задатак 19. *Колико има четвороцифрених бројева који се у бројном систему са основом* 10 *записују помоћу две различите цифре?*

Решење. Прву цифру броја можемо изабрати на 9 начина. Друга цифра може бити различита од прве цифре или једнака првој цифри. У случају да је друга цифра различита од прве можемо је изабрати такође на 9 начина. Тада за трећу и четврту цифру можемо одабрати једну од цифара које се налазе на првом и другом месту, па је укупан број бројева у овом случају једнак $9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 324$. Размотримо сада случај када је друга цифра једнака првој. Сличним разматрањем као у претходном случају закључујемо да постоји $9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ бројева код којих је трећа

цифра различита од прве две. На крају, уколико су прве три цифре једнаке, четврту можемо одабрати на 9 начина, па је број оваквих избора једнак $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 81$. Дакле, тражени број је једнак $324 + 162 + 81 = 567$.
(Окружно такмичење 2011 3Б) $\triangle$

Задатак 20. *Нека је n природан број већи од 2. Колико има тројки (A, B, C) подскупова скупа $\{1, 2, ..., n\}$ таквих да је*

$$A \cap B \cap C = \varnothing,\ |A \cap B| = 2 \text{ и } |A \cap C| = 1?$$

Решење. Сваки елемент скупа $\{1, 2, ..., n\}$ налази се или у скупу A, B, C или у $(A \cup B \cup C)^C$, па је тражени број једнак броју распореда бројева $\{1, 2, ..., n\}$ у ова четири скупа тако да су задовољени дати услови. Одредимо број ових распореда.

Елемент који припада скупу $A \cap C$ можемо изабрати на n начина. Изаберимо затим два елемента који припадају скупу $A \cap B$. Ови елементи различити су од елемента који се налази у $A \cap C$, јер мора бити задовољено $A \cap B \cap C = \varnothing$, па њих можемо изабрати на $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ начина.

Сваки од преосталих $n - 3$ елемената можемо сместити:

(1) или само у скуп A (тј. у $A \backslash (B \cup C)$);

(2) или само у скуп B (тј. у $B \backslash (A \cup C)$);

(3) или само у скуп C (тј. у $C \backslash (A \cup B)$);

(4) или у скуп $B \cap C$;

(5) или у комплемент $(A \cup B \cup C)^C$.

Дакле, постоји 5 могућности за сваки од преосталих $n - 3$ елемената, па за њихово размештање имамо 5^{n-3} начина. Према томе, тражене подскупове можемо одабрати на $n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 5^{n-3}$ начина.
(Окружно такмичење 2014 2Б) $\triangle$

Задатак 21. *(а) На колико начина се могу изабрати два несуседна двоцифрена броја?*

(б) Колико има петоцифрених бројева у којима се цифра 5 појављује тачно два пута и чије су преостале три цифре различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$?

Решење. (а) Двоцифрених бројева има 90 (за прву цифру 9, за другу 10 могућности), па парова двоцифрених бројева има $\binom{90}{2} = 4005$. Од тог броја одузмемо број свих парова узастопних двоцифрених бројева, којих има укупно $90 - 1 = 89$. Дакле, два несуседна двоцифрена броја се могу изабрати на $4005 - 89 = 3916$ начина.

(б) Да бисмо решили задатак довољно је да на три од пет могућих места поставимо неке од цифара $1, 2, 3, 4, 6, 7$, што можемо учинити на укупно $\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$ начина (преостала два места су предвиђена за цифру 5).

(Окружно такмичење 2008 1Б) △

Задатак 22. *Три Енглеза и два Француза заинтересовани су за 7 различитих књига: три на енглеском језику (траже их само Енглези), две на француском језику (траже их само Французи) и две на српском језику (траже их и Енглези и Французи). На колико начина сваком од њих можемо поклонити по једну књигу?*

Решење. Постоје три могућности.

(1) Оба Француза добила су књигу на француском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начина. За Енглезе имамо 5 могућих књига, па њима књиге можемо поклонити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Дакле, укупан број начина да се особама поклоне књиге је у овом случају $2 \cdot 60 = 120$.

(2) Један Француз је добио књигу на француском, а други на српском језику. У овом случају потребно је изабрати који ће од Француза добити књигу на француском језику, затим изабрати једну од две књиге коју ће он добити, а затим изабрати једну од две књиге на српском језику коју ћемо поклонити другом Французу. Дакле, Французима књиге можемо поклонити на $2^3 = 8$ начина. За Енглезе остају 4 књиге (три на енглеском и једна на српском језику), па њима књиге можемо поклонити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају је $8 \cdot 24 = 192$.

(3) Оба Француза добила су књиге на српском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начина. За три Енглеза преостале су три књиге, па њима поменуте књиге можемо поклонити на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају једнак је $2 \cdot 6 = 12$.

Коначно, укупан број начина да се особама поклоне књиге јесте $120 + 192 + 12 = 324$.
(Општинско такмичење 2014 1Б) $\triangle$

Задатак 23. *На колико начина се* 20 *карата, међу којима су* 4 *даме, могу поделити на две групе од по* 10 *карата, тако да у једној групи буду три даме, а у другој групи једна дама?*

Решење. Решење задатка јесте заправо број начина на који можемо попунити једну групу. Три даме од могућих четири можемо одабрати на $\binom{4}{3}$ начина, док преосталих седам карата које су нам неопходне да би смо формирали групу, бирамо од њих 16 (без даме због услова задатка). Према томе, број начина на који можемо попунити једну групу, а уједно и решење задатка, јесте

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{16}{7} = 45760.$$

(Окружно такмичење 2009 1Б) $\triangle$

Задатак 24. *На колико начина се могу обојити темена петоугла $ABCDE$ помоћу* 4 *боје ако суседна темена не могу бити исте боје?*

Решење. Претпоставимо најпре да су темена A и D исте боје. За то постоје 4 могућности. Теме E мора бити различито од њих, за шта постоје 3 могућности, па досад имамо $4 \cdot 3 = 12$ могућности за ова три темена. За теме B бирамо једну боју различиту од боје темена A, за шта постоје 3 могућности, а потом за теме C бирамо боју различиту од боја темена B и D, за шта преостају 2 могућности. Укупно, дакле, имамо $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ могућности за избор боја у овом случају.

Посматрајмо сада случај када су темена A и D различите боје. За то постоје $4 \cdot 3 = 12$ могућности. Теме E мора бити различите боје од њих, за шта преостају 2 могућности. Уколико је теме C исте боје као A, тада нам за B преостају 3 могућности. Међутим, ако је C различите боје од темена A тада имамо 2 могућности за C и потом 2 могућности за теме B. Према томе, у овом случају имамо укупно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (3 + 2 \cdot 2) = 24 \cdot 7 = 168$ избора. Коначно, решење задатка јесте $72 + 168 = 240$.
(Државно такмичење 2015 1Б) $\triangle$

Задатак 25. *Одредити број деветоцифрених бројева дељивих са* 225*, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је* 7*.*

Решење. Уочимо да је $225 = 9 \cdot 25$. Из дељивости са 25 закључујемо да су последње две цифре тражених бројева $00, 25, 50$ или 75. Случај 00 није могућ јер све цифре морају бити различите, као ни случај 75 јер је по услову задатка цифра стотина 7 (из истог разлога). Према томе, једина два могућа случаја јесу 25 и 50. Како је $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$, избацивањем једног од ових бројева добија се број дељив са 9 само ако је избачени број 0 или 9.

Уколико је троцифрени завршетак 725, тада првих шест позиција можемо попунити на $6!$ начина, уколико смо избацили 0, односно на $5 \cdot 5!$ начина, уколико смо избацили 9 (0 не може на прво место), па је укупан број таквих деветоцифрених бројева $6! + 5 \cdot 5! = 11 \cdot 5!$. Уколико је троцифрени завршетак 750, тада првих 6 позиција можемо попунити на $6!$ начина (користимо цифре $1, 2, 3, 4, 6$ и 8). Коначно, укупан број деветоцифрених бројева који задовољавају услове задатке јесте $11 \cdot 5! + 6! = 17 \cdot 5! = 2040$.
(Општинско такмичење, 2006 1Б) △

Задатак 26. *У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?*

Решење. С обзиром да никоја два Италијана не могу бити један до другог лако се примећује да су могућа два распореда (по националностима) ИФФФФИШШШШШИ и ИШШШШШИФФФФИ. Како у сваком од ових распореда Италијане можемо распоредити на $3!$ начина, Французе на $4!$ и Шпанце на $5!$ начина, добијамо да се ови људи могу распоредити на $3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 2 = 34560$ начина.
(Окружно такмичење 2004 1Б) △

Задатак 27. *За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији* $(2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5)$ *десно минимални су елементи на другој и петој позицији (елементи* 1 *и* 3*). Колико има различитих пермутација елемената скупа* $\{1, 2, 3, ..., 8\}$ *које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?*

Решење. Разликујемо 4 случаја, све у зависности од пете позиције, на којој се могу наћи једино цифре $2, 3, 4$ и 5. У првом случају, уколико је на петој позицији цифра 2, тада је друга позиција једнозначно одређена, док преосталих 6 места можемо попунити на 6! начина. У другом случају, када је на петој позицији цифра 3, за другу позицију постоје две могућности, цифре 1 и 2. Ако је цифра 1 на другој позицији, тада цифру 2 можемо распоредити на 3 места (не може десно од 3), па је број таквих пермутација $3 \cdot 5!$. Ако је, пак, цифра 2 на другој позицији, тада цифра 1 може искључиво на прво место, док се преостале позиције могу попунити на 5! начина, па је укупан број пермутација у другом случају $4 \cdot 5!$.

Посматрајмо сада случај када је на петој позицији цифра 4. Тада се на другој позицији могу наћи једино цифре 1 и 2. Уколико је цифра 1 на другом месту, тада цифре 2 и 3 можемо поставити на $3 \cdot 2$ начина, па је број одговарајућих пермутација са цифрама 1 и 4 на другом, односно петом месту, једнак $3 \cdot 2 \cdot 4! = 6 \cdot 4!$. Уколико је цифра 2 на другом месту, тада је прва позиција једнозначно одређена, цифру 3 можемо поставити на 2 позиције, док преостале позиције попуњавамо на 4! начина, па је укупан број пермутација са цифром 4 на петој позицији $6 \cdot 4! + 2 \cdot 4! = 8 \cdot 4!$.

Последњи случај који посматрамо јесу пермутације са цифром 5 на петој позицији. Тада као и у претходним случајевима, за другу позицију постоје свега две могућности. Уколико је цифра 1 на другој позицији, тада цифре $2, 3$ и 4 можемо распоредити на 3! начина (лево од цифре 5) док преостале три позиције десно од цифре 5 можемо попунити такође на 3! начина, па је број пермутација са цифрама 1 и 5 на другој , односно петој позицији, једнак $(3!)^2$. Уколико је, пак, цифра 2 на другој позицији, у аналогији са претходним случајевима, лако закључујемо да је број пермутација са цифрама 2 и 5 на другој, односно петој позицији $2 \cdot 3!$, па је укупан број пермутација у последњем случају $(3!)^2 + 2 \cdot 3!$. Стога је тражени број пермутација које испуњавају услове задатка

$$6! + 4 \cdot 5! + 8 \cdot 4! + (3!)^2 + 2 \cdot 3! = 1440.$$

(Окружно такмичење 2007 1А) △

Задатак 28. *На колико различитих начина се могу распоредити* 7 *истих куглица у* 4 *различите кутије?*

Решење. Могући распореди су $7 + 0 + 0 + 0$ (све куглице у прву кутију), $6 + 1 + 0 + 0$ (6 куглица у прву кутију а седма у другу), $5 + 2 + 0 + 0$, итд. Очигледно је да се проблем пребројавања свих могућности заснива на једначини $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ где су x_1, x_2, x_3, x_4 ненегативни цели бројеви који представљају број куглица у свакој од 4 посматране кутије.

Применом теореме 8 закључујемо да укупан број решења постављене једначине, а самим тим и решење задатка јесте

$$\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7} = 120.$$

(Окружно такмичење 2006 4А) $\triangle$

Задатак 29. *Квадрат* 2×2 *подељен је на* 4 *квадратића* 1×1. *Сваки од квадратића је обојен црвеном, плавом или белом бојом.*

а) Колико има различитих бојења?

б) Колико има различитих бојења у којима се све три боје појављују?

Решење. а) Сваки од квадратића може бити обојен на 3 начина, па је број различитих бојења једнак $3^4 = 81$.
б) Када се све боје појављују имамо 2 поља обојена једном бојом и још по једно поље обојено преосталим бојама. Та 2 поља можемо одредити на $\binom{4}{2} = 6$ начина, а боју за та 2 поља на 3 начина. Преостала 2 поља можемо обојити на још $2! = 2$, па укупно имамо $6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ бојења у којима се све боје појављују.
(Републичко такмичење 2005 1Б) $\triangle$

Задатак 30. *У равни су дата два скупа паралелних правих* $\{a_1, a_2, ..., a_{13}\}$ *и* $\{b_1, b_2, ..., b_7\}$. *Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правама?*

Решење. Сваки пар правих првог скупа и сваки пар правих другог скупа одређују тачно један паралелограм и обрнуто. Пар правих из првог скупа можемо изабрати на $\binom{13}{2}$ начина, а из другог на $\binom{7}{2}$ начина, па тражених паралелограма има

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{7}{2} = 1638.$$

(Окружно такмичење 2003 1Б) $\triangle$

5 Закључак

Како је дискретна математика добила на значају у претходних неколико деценија услед својих примена у области рачунарских алгоритама и програмских језика, тако и комбинаторика, наука о распоредима објеката, као важан део дискретне математике, стиче све већу популарност и примену. Међутим, и поред тога, њена основна предност и примена јесте у решавању најразличитијих практичних проблема. За решавање тих проблема неопходне су разне технике (конкретно технике пребројавања), као и познавање термина и појмова којима обилује комбинаторика. Проблеми (читај задаци) тог типа се постављају још пред ученике основних школа на разним нивоима различитих математичких такмичења. Међутим, услед сложености наставне теме, ближе проучавање комбинаторике почиње тек у средњошколској настави. Стога су, у оквиру овог рада, детаљно описане технике пребројавања и разни комбинаторни појмови, на начин, на који су они обрађени у гимназијској настави.

Но, без обзира на све већу практичну потребу за логичким размишљањем и расуђивањем, редовна настава математике у гимназијама сиромашна је наставним темама које подстичу логичко-комбинаторни приступ приликом решавања задатака. У то се можемо уверити посматрајући детаљну анализу наставних планова из математике, која је дата у трећој глави овог рада. Предмет анализе јесте градиво математике за први и четврти разред гимназија свих типова, јер се комбинаторика, као наставна тема, чак и не обрађује у другом и трећем разреду. Анализирајући наставне планове наилазимо на следеће податке: „Комбинаторика се у првом разреду обрађује делимично у наставној теми „Логика и скупови“, и то у две наставне јединице, од којих је једна предвиђена за обраду, а друга за утврђивање градива. Од укупно 148 часова годишње, то чини свега $1,35\%$ укупног градива предвиђеног за први разред гимназија.“

Посматрајући анализу градива четвртог разреда, уочавамо да је ситуација у том разреду незнатно боља: „У оквиру модела М1 и М3 наставних планова и програма математике за гимназије општег типа и природно математичког смера, од укупно 128 часова годишње, комбинаторика се обрађује у 12 наставних јединица, од којих је 5 предвиђено за обраду, а 7 за утврђивање градива, што представља $9,37\%$ укупног градива предвиђеног за четврти разред гимназија. У оквиру модела М2 наставних планова и програма математике за гимназије друштвено-језичког смера, од укупно 64 часова годишње, комбинаторика се обрађује у 6 наставних јединица, од којих је 3 предвиђено за обраду, а за 3 утврђивање градива, што представља $9,37\%$ укупног градива предвиђеног за четврти разред гимназија.“

Имајући у виду наведене податке, као и чињеницу да се број часова математике по разредима разликује у зависности од типа гимназије, долазимо до следећих поражавајућих закључака. У оквиру модела М1 наставних планова и програма математике за гимназије општег типа, од укупно 560 часова у сва четири разреда, комбинаторика се обрађује у 12 наставних јединица, што представља свега $2,5\%$ укупног градива предвиђеног за све разреде. У оквиру модела М2 наставних планова и програма математике за гимназије друштвено-језичког смера, од укупно 389 часова у сва четири разреда, комбинаторика се обрађује у 8 наставних јединица, што представља $2,06\%$ укупног градива предвиђеног за све разреде. Иако се математика, као предмет, више изучава у оквиру модела М3 за гимназије природно математичког смера, ситуација се у погледу теме овог рада не мења на боље, већ напротив. Како је једина разлика у поређењу са моделом М1 број часова математике недељно у другом и трећем разреду, а имајући у виду да се комбинаторика и не обрађује у поменутим разредима, закључујемо да се од 631-ог часа у сва четири разреда, комбинаторика обрађује у 14 наставних јединица, што представља мизерних $2,22\%$ укупног градива предвиђеног за све разреде.

Посматрајући оријентационе програме за додатни рад у гимназијама, који су наведени у четвртој глави овог рада, није тешко приметити да се, услед комплексности наставне теме, комбинаторика неупоредиво више обрађује на додатној него на редовној настави, и то у свим разредима. Но, како програм додатне наставе, неретко зависи једино од наставника, чест је случај да ученици остају ускраћени за озбиљније изучавање комбинаторике, што је свакако недопустиво, ако знамо да су задаци логичко-комбинаторне природе малтене неизоставан део свих математичких такмичења. У то се можемо уверити посматрајући разноврсне задатке са разних нивоа такмичења одржаних у последњих десетак година, а који су наведени и решени у склопу четврте главе. Такође, примећујемо да се поменути задаци најчешће стављају пред ученике првог разреда гимназија, што за њих свакако представља проблем, ако претходно знамо да се комбинаторика у првом разреду изучава на свега два часа у редовној настави.

У сваком случају, очигледна је неравнотежа између начина на који је комбинаторика обрађена, првенствено на редовној настави, и њене заступљености на математичким такмичењима, као и на, поменимо још, пријемним испитима на разним факултетима. У складу са наведеним, лако закључујемо да је озбиљније изучавање комбинаторике и логике уопште, сада већ прека потреба. Стога остаје нада да ће у неким наредним променама наставних планова и програма, комбинаторика заузети далеко већи простор него што је то сада случај.

Литература

[1] Младеновић П., *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

[2] Стевановић Д., Ћирић М., Симић С., Балтић В., *Дискретна математика*, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

[3] Обрадовић М., Георгијевић Д., *Математика са збирком задатака за IV разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

[4] Богославов В., *Збирка решених задатака из математике 1*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

[5] Ивановић Ж., Огњановић С., *Збирка задатака и тестова за 1. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2005.

[6] Богославов В., *Збирка решених задатака из математике 4*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.

[7] Ивановић Ж., Огњановић С., *Збирка задатака и тестова за 4. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд, 2005.

[8] Вукадиновић С., Стојановић В., *Mathematiskop 6*, Математископ, Београд, 1998.

[9] http://www.zuov.gov.rs/poslovi/nastavni-planovi/nastavni-planovi-os-i-ss/, приступљено 5.2.2016.

[10] *Тангента*, 2012, 69/1; 2015, 81/1; Друштво математичара Србије, Београд.