Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Симплектичке многострукости и критичне тачке функција

Аутор:
Игор Уљаревић

Ментор:
др Дарко Милинковић

28. јуни 2011

Садржај

Предговор

Овај рад углавном има облик прегледног чланка у коме су описане Морсова и Флорова теорија као и неке њихове примјене. Из тог разлога докази многих тврђења су изостављени и дате су само референце. Проблем доње оцјене броја критичних тачака, који у раду заузима упечатљиво мјесто, служи као изговор и мотивација за излагање горе наведених теорија.

Искрено захваљујем професору Дарку Милинковићу, чији труд и залагање далеко превазилазе дужности ментора, као и члановима комисије професорима Синиши Врећици и Јелени Катић.

1 Увод

1.1 Елементи диференцијалне топологије

Нека је $f : M \to N$ глатко пресликавање глатких многострукости.

Дефиниција 1. $x \in M$ је регуларна тачка пресликавања f акко је извод у тој тачки НА, тј. $f_*(T_x M) = T_{f(x)}N$. Тачка која није регуларна је сингуларна. $y \in N$ је регуларна вриједност акко $f^{-1}\{y\}$ не садржи ниједну сингуларну тачку.

Теорема 1. *Инверзна слика регуларне тачке је подмногострукост димензије*

$$\dim M - \dim N,$$

или празан скуп.

Доказ. Теорема о имплицитној функцији. □

У наредном примјеру ријешићемо задатак са Градског такмичења из математике ученика средњих школа одржаног у Београду 20. фебруара 2010. Свјесни смо да постоји елементарно рјешење.

Примјер 1. n је природан број не мањи од 3. Доказати или оповргнути тврђење: Ако за n различитих комплексних бројева истог модула важи да им је збир 0 онда су они тјемена правилног многоугла.

Рјешење. Простор ових полигона (без услова о збиру, укључујући дегенерисане случајеве) јесте n-димензиони торус

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

$z_1 + ... + z_n$ је глатко пресликавање $\mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ и 0 је регуларна вриједност тог пресликавања. Значи, нуле овог пресликавања граде подмногострукост димензије $n-2$. Ако је $n > 3$ ова димензија је већа од 1 па правилан n-тоугао можемо „мрднути" у правцу тангентног вектора на $\mathbb{T}^n$ који не одговара ротацији, тј. покварити правилан полигон.

За $n = 3$ тврђење је тачно (тежиште се поклапа са центром описаног круга). □

Тачке многострукости N су углавном регуларне вриједности. Прецизније

Теорема 2 (Велика Сардова теорема)**.** *Нека је $f : M \to N$ пресликавање класе C^k многострукости димензија m, n редом. Ако је $k > \frac{m}{n} - 1$, тада је скуп критичних вриједности мјере нула у N.*

Притом за подскуп A n-димензионе многострукости кажемо да има мјеру нула ако за сваку карту (U, h) и сваки подскуп $V \subset U$ скуп $h(V \cap A)$ има мјеру нула у $\mathbb{R}^n$. За доказ погледати теорему 1 на страни 85 у [1].

Уопштимо претходне теореме. Нека је $S \subset N$ подмногострукост.

Дефиниција 2. f је трансверзално на S у тачки $x \in M$ ако $f(x) \notin S$ или

$$f(x) \in S \quad \text{и} \quad T_{f(x)}N \cong T_{f(x)}S + f_*(T_x M).$$

f је трансверзално на S (ознака: $f \pitchfork S$) ако је трансверзално у свакој тачки из M.

За двије подмногострукости кажемо да су трансверзалне ако је инклузија једне трансверзална на другу.

Теорема 3. *Ако је f трансверзално на S тада је $f^{-1}(S)$ подмногострукост димензије*

$$\dim M - \dim N + \dim S,$$

или празан скуп.

Доказ. Теорема о имплицитној функцији. $\square$

Теорема 4. *Ако је $f : M \to N$ произвољно пресликавање и S подмногострукост од N, онда постоји произвољно мала хомотопија f_t, $t \in [0, \varepsilon]$, таква да је $f_0 = f$ и $f_\varepsilon \pitchfork S$.*

Доказ. [1] $\square$

Наведимо још неке начине да од датих многострукости добијемо нове.

Дефиниција 3. Лијева група је група $(G, \diamond)$ таква да је G глатка многострукост и

$$\diamond : G \times G \to G, \quad (\cdot)^{-1} : G \to G$$

су глатка пресликавања.

Дефиниција 4. Лијево (постоји и десно) дејство Лијеве групе G на многострукости M је глатко пресликавање

$$M \times G \to M, \quad (x, g) \mapsto g \cdot x$$

са особинама

$$e \cdot x = x, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x.$$

За дато дејство дефинишемо орбиту и стабилизатор тачке $x \in M$ редом са

$$G \cdot x := \{g \cdot x \ : \ g \in G\} \subset M, \quad G_x := \{g \in G \ : \ g \cdot x = x\} \subset G.$$

Дефиниција 5. Дејство групе је

- транзитивно ако је $G \cdot x = M$ за неко (а тиме и за свако) $x \in M$
- слободно ако из $(\exists x \in M)\, g \cdot x = x$ слиједи $g = e$
- својствено ако је пресликавање

  $$M \times G \to M \times M, \quad (x, g) \mapsto (g \cdot x, x)$$

  својствено (инверзне слике компактних скупова су компактне).

Теорема 5. *Претпоставимо да Лијева група G дјелује слободно и својствено на многострукост M. Тада је простор орбита M/G тополошка многострукост димензије $\dim M - \dim G$ и постоји јединствена глатка структура на њој таква да је квоцијентно пресликавање $\pi : M \to M/G$ глатка субмерзија.*

Доказ. Теорема 9.16 у [16]. □

Теорема 6. *Ако G дјелује транзитивно на M тада је $M \cong G/G_x$ за свако $x \in M$.*

Доказ. Теорема 2 на страни 111 у [1]. □

На крају, увешћемо појам индекса пресјека.

Нека су A и B затворене, оријентисане подмногострукости оријентисане многострукости M такве да је $\dim A + \dim B = \dim M$. Ако важи и $A \pitchfork B$ тада је $A \cap B$ подмногострукост димензије 0 тј. коначан скуп тачака (јер је притом и компактна као пресјек компактних скупова). Свакој тачки $p \in A \cap B$ придружимо број $\varepsilon(p)$ једнак 1 ако се оријентација простора

$$T_pA \oplus T_pB \cong T_pM$$

индукована оријентацијама подмногострукости A и B подудара са оријентацијом овог простора задатом оријентацијом многострукости M и -1 ако то није случај.

Дефиниција 6. Индекс пресјека подмногострукости A, B (уз горе наведене услове) је број

$$A \cdot B = \sum_{p \in A \cap B} \varepsilon(p).$$

Теорема 7. *Индекс пресјека $A \cdot B$ зависи само од хомолошких класа подмногострукости A и B .*

Доказ. [1] □

Напоменимо још и да се индекс пресјека може дефинисати и без услова трансверзалности јер због теореме 4 једну од подмногострукости можемо мало „помјерити" и довести у трансверзалан положај са другом. Добру дефинисаност обезбјеђује теорема 7.

Илуструјмо претходно доказом једне очигледне чињенице.

Примјер 2. Криве које спајају наспрамна тјемена квадрата се сијеку (наравно, криве су унутар квадрата и парови наспрамних тјемена су различити).

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да постоје дисјунктне криве α, β које спајају наспрамна тјемена. Не умањујући општост претпоставимо да су криве глатке. Идентификујући наспрамне странице добијамо торус и двије петље (означене исто са α, β) на њему које се сијеку у тачно једној тачки (оној која одговара тјеменима квадрата). Можемо претпоставити да су петље глатке и у трансверзалном положају (прије идентификације проширимо хомотетијом мало квадрат и продужимо криве у угловима тако да у тјеме „улазе" под одговарајућим углом). Нека су d_1 и d_2 петље настале од дијагонала квадрата. Пошто је

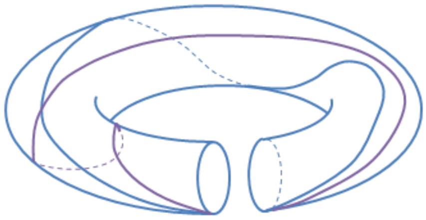
$$d_1 \simeq \alpha \quad \text{и} \quad d_2 \simeq \beta$$

важи

$$\alpha \cdot \beta = d_1 \cdot d_2.$$

Међутим, d_1 и d_2 се сијеку у двије тачке, а α и β у једној. То значи да је лијева страна непарна, а десна парна. Контрадикција!

□



Слика 1: Торус са двије петље

1.2 Елементи симплектичке геометрије

Дефиниција 7. Симплектичка многострукост (M, ω) је многострукост са затвореном, недегенерисаном 2-формом ω (тзв. симплектичком формом).

Примјер 3. $\mathbb{R}^{2n}$ са формом $\sum dx_i \wedge dy_i$ је симплектичка многострукост ($y_i = x_{n+i}$).

Симплектичка многострукост је обавезно парно-димензиона и оријентисана (канонска форма оријентације је $\omega^{\wedge n}$, гдје је n половина димензије од M).

У случају да је ω тачна, говоримо о тачној симплектичкој многострукости. Не постоји тачна, затворена симплектичка многострукост.

Примјер 4. Котангентно паслојење T^*M произвољне многострукости је тачна симплектичка многострукост. Симплектичка форма је $d\theta$ гдје је $\theta \in T^*T^*M$ дефинисано са

$$\theta_p(X) := p\left(\pi_* X\right), \quad \left(p \in T^*M,\, X \in T_pT^*M\right),$$

π је природна пројекција $T^*M \to M$.

Примјер 5. Ако је (M, ω) симплектичка многострукост, тада је и $(M \times M, \omega \ominus \omega)$, гдје је $\omega \ominus \omega = \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$.

Лема 1. *Пресликавање $T_pM \to T_p^*M$, $X_p \mapsto X \lrcorner \omega = \omega(X, \cdot)$ је линеарни изоморфизам ($p \in M$).*

Доказ. Слиједи из недегенерисаности. $\square$

Дефиниција 8. Симплектоморфизам је дифеоморфизам $\psi : M \to M$ који чува симплектичку структуру, тј. такав да важи $\psi^*\omega = \omega$.

Симплектичке многострукости немају локалних инваријанти.

Теорема 8 (Дарбу)**.** *Свака симплектичка моногострукост (M, ω) је локално симплектоморфна $\mathbb{R}^{2n}$ са формом из примјера 3. Прецизније, за свако $p \in M$ постоји околина (од p) $U \subset M$ и дифеоморфизам $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ такав да је*

$$\phi^*\left(\sum x_i \wedge y_i\right) = \omega.$$

Карту (U, ϕ) из претходне теореме називамо Дарбуовом.

Посматрајмо глатку фамилију дифеоморфизама $\psi_t : M \to M$, $\psi_0 = \mathrm{id}$ и њом дефинисано векторско поље на M (у општем случају зависно од времена)

$$\frac{d}{dt}\psi_t(x) = X_t(\psi_t(x)). \tag{1}$$

Лема 2. *Уз управо уведене ознаке,* $\psi_t^*\omega \equiv \omega$ *ако и само ако је* $X_t \lrcorner \omega$ *затворена форма.*

Доказ. Користимо Картанову формулу:

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \psi_t^*\left(X_t \lrcorner d\omega + d\left(X_t \lrcorner \omega\right)\right).$$

Пошто је први сабирак у загради 0 (због затворености ω), слиједи

$$d\left(X_t \lrcorner \omega\right) = 0 \quad \text{акко} \quad \psi_t^*\omega = const.$$

□

Специјално ако је $X_t \lrcorner \omega$ тачна за свако t, тј. једнака dH_t за глатку фамилију функција $H_t : M \to \mathbb{R}$ добијамо фамилију симплектоморфизама. Овакве симплектоморфизме називамо Хамилтоновим дифеоморфизмима. Прецизније

Дефиниција 9. Дифеоморфизам $\psi : M \to M$ је Хамилтонов ако и само ако постоји фамилија дифеоморфизама $\psi_t : M \to M, \psi_0 = \mathrm{id}$, $\psi_1 = \psi$ таква да је $X_t \lrcorner \omega$ тачна форма за свако t, гдје је X_t дефинисано са (1).

Свака функција $H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ са компактним носачем дефинише (на описани начин) фамилију Хамилтонових дифеоморфизама (Хамилтонов ток). Обрнуто, сваки Хамилтонов ток са компактним[1] носачем (тј. постоји компактан скуп ван кога су дифеоморфизми идентитети) одређује до на константу функцију

$$H : [0,1] \times M \to \mathbb{R}.$$

H зовемо Хамилтонијаном.

Дефиниција 10. Подмногострукост L симплектичке многострукости (M, ω) је Лагранжева ако је $\omega|_{TL} \equiv 0$.

Примјер 6. График $\Gamma_\psi = \{(x, \psi(x)) : x \in M\}$ симплектоморфизма ψ је Лагранжева подмногострукост у $(M \times M, \omega \ominus \omega)$. Специјално, дијагонала је Лагранжева подмногострукост.

Примјер 7. Нека је α затворен форма на многострукости M. Тада је $\alpha(M)$ Лагранжева подмногострукост од котангентног раслојења T^*M.

Дефинишимо још једну структуру која прати симплектичку многострукост.

Дефиниција 11. Скоро комплексна структура на M је глатка фамилија пресликавања $J_p : T_pM \to T_pM$ која задовољава $J_p^2 = -\mathrm{id}$.

Многострукост са скоро комплексном структуром називамо скоро комплексном многострукошћу. Многострукост M је комплексна ако постоји атлас на M такав да су пресликавања прелаза између карата бихоломорфна. Свака комплексна многострукост је скоро комплексна, обрнуто није тачно. Ако скоро комплексна структура долази од комплексне структуре, тада кажемо да је интеграбилна.

[1] Компактност носача нам је потребна због продужења рјешења диференцијалне једначине.

Теорема 9. *Скоро комплексна структура J је интеграбилна ако и само ако је*

$$[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = 0.$$

Дефиниција 12. Скоро комплексна структура J на симплектичкој многострукости (M, ω) је сагласна са симплектичком формом ω ако је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M.

Лема 3. *На свакој симплектичкој многострукости (M, ω) постоји скоро комплексна структура J сагласна са ω. Штавише, скуп таквих скоро комплексних структура је контрактибилна бесконачно-димензиона многострукост.*

Обрнуто не важи. Нпр. сефера $\mathbb{S}^6$ је скоро комплексна (посљедица постојања октониона), међутим није симплектичка. А то због тога што компактна симплектичка многострукост има нетривијалне парне хомолошке групе, а $H_4(\mathbb{S}^6) = 0$.

1.3 Фредхолмови оператори и Фредхолмова пресликавања

Уопштићемо појам многострукости дозвољавајући да димензија буде бесконачно. Пратимо [1] (стране 418-422) и на тај извор упућујемо за доказе и даље референце.

Нека је M скуп и X Банахов простор. Карта на M је пар (U, h), гдје је $U \subset M$ и $h : U \to U'$ бијекција на отворен скуп $U' \subset X$. За двије карте (U, h) и (V, k) кажемо да су сагласне ако су U, V дисјунктни или ако су $h(U \cap V)$ и $k(U \cap V)$ отворени и пресликавање

$$k \circ h^{-1} : h(U \cap V) \to k(U \cap V)$$

дифеоморфизам класе C^∞.

Дефиниција 13. Атлас је фамилија сагласних карти $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ таква да је $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

Дефиниција 14. Банахова многострукост је (M, A) гдје је A атлас на M.

Као и у коначно-димензионом случају можемо дефинисати појмове глатког пресликавања између Банахових многострукости, тангентног вектора и простора, извода глатког пресликавања итд.

Дефиниција 15. Ограничен, линеарни оператор $F : X \to Y$ између Банахових простора X, Y је Фредхолмов ако има затворен ранг ($\operatorname{im} F$) и коначнодимензионе $\ker F$ и $\operatorname{coker} F := Y / \operatorname{im} F$. Индекс Фредхолмовог оператора је број

$$\operatorname{index} F := \dim \ker F - \dim \operatorname{coker} F.$$

Лема 4. index *је непрекидна функција на простору ограничених оператора у односу на операторску норму.*

Лема 5. *Ако је F Фредхолмов оператор, а K компактан тада је $F + K$ Фредхолмов и важи*

$$\operatorname{index}(F + K) = \operatorname{index} F.$$

Пресликавање $f : M \to N$ класе C^r, $r \geqslant 1$ између Банахових многострукости је Фредхолмово ако је његов извод у свакој тачки Фредхолмов оператор. Ако је M повезана тада индекс Фредхолмовог оператора $df(x)$ не зависи од $x \in M$ па можемо говорити о индексу пресликавања f.

Сада слиједе аналози теорема 1, 2, 3 и 4.

Теорема 10. *Нека су M и N Банахове многострукости од којих је M повезана , $f : M \to N$ Фредхолмово пресликавање глткости C^r, $r > \max\{\operatorname{index} f, 0\}$ и $y \in N$ регуларна вриједниост. Тада је $f^{-1}\{y\}$ многострукост класе C^r и димензије* $\operatorname{index} f$ *или празан скуп.*

Дефиниција 16. Скуп прве категорије је пребројива унија нигдје густих подскупова Банахове многострукости. Резидуални скуп је комплемент скупа прве категорије.

Ако неко тврђење важи за генеричку тачку то значи да постоји резидуалан скуп такав да то тврђење важи за сваку тачку тог скупа.

Теорема 11 (Сард-Смејл)**.** *Нека важе услови теореме 10. Тада је скуп сингуларних вриједности од f скуп прве категорије у N.*

Дефиниција 17. Нека је $f : M \to N$ C^r пресликавање Банахових многострукости и $g : W \to N$ улагање класе C^s, гдје је W коначнодимензиона многострукост. f је трансверзално на g ако је

$$T_{f(x)}N = df(x)\,(T_xM) + dg(p)\,(T_pW)$$

за свако $x \in M$ и $p \in W$ за које важи $f(x) = g(p)$.

Теорема 12. *Нека су M, N Банахове многострукости, W коначно-димензиона многострукост, $g : W \to N$ улагање класе C^1 и $f : M \to N$ Фредхолмово пресликавање класе C^r, $r \geqslant \max\{\operatorname{index} f + \dim M, 0\}$. Тада постоји пресликавање g_0 произвољно C^1 близу g које је трансверзално на f.*

Теорема 13. *Уз услове претходне теореме, скуп $f^{-1}\big(g(W)\big)$ је или непразан или глатка многострукост димензије* $\operatorname{index} f + \dim W$.

1.4 Теореме Собољева

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен, непразан скуп. Означимо са $C_0^\infty(\Omega)$ простор глатких функција са компактним носачем у Ω, а са $C(\overline{\Omega})$ простор рестрикција глатких функција са доменом $\mathbb{R}^n$ на $\overline{\Omega}$. Функција u дефинисана скоро свуда на Ω је локално интеграбилна ($u \in L^1_{loc}(\Omega)$) ако $u \in L^1(A)$ за свако $A \Subset \Omega$, тј. за сваки скуп A који је садржан у компактном подскупу од Ω.

За сваки мулти-индекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ дефинишемо извод ∂^α са

$$\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Број $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n =: |\alpha|$ зовемо редом извода ∂^α.

Дефиниција 18. Нека је $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ и α мулти-индекс. Локално интеграбилна функција u_α је слаби извод функције u ако је

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha \phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha(x)\phi(x)dx$$

за сваку тест функцију $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Слаби извод је јединствен до на скуп мјере 0. Користимо исту ознаку ∂^α као и за јаки извод. Не долази до конфликта ознака јер се за C^k функцију слаби и јаки изводи до k-тог реда поклапају.

Дефиниција 19. Простор Собољева је

$$W^{m,p} := \{u \in L^p(\Omega) \, : \, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ за } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}, \quad m \in \mathbb{N}_0,\, p \in [1, +\infty]$$

са нормом

$$\|u\|_{m,p} := \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{за } p \text{ коначно,}$$
$$\|u\|_{m,\infty} := \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_\infty .$$

Алтернативно, за коначно p, могли смо дефинисати $W^{m,p}$ као комплетирање простора

$$\{u \in C^m(\Omega) \, : \, \|u\|_{m,p} < \infty\}$$

у односу на норму $\|\cdot\|_{m,p}$ (теорема 3.16 у [5]).

Дефиниција 20. $W_0^{m,p}(\Omega)$ је затворење скупа $C_0^\infty(\Omega)$ у $W^{m,p}(\Omega)$.

Теорема 14. *$W^{m,p}(\Omega)$ је Банахов простор. Ако је $1 \leqslant p < \infty$ тада је сепарабилан, а ако је додатно и $p \neq 1$ он је и рефлексиван. Простор $W^{m,2}(\Omega)$ је Хилбертов са скаларним производом*

$$\langle u, v\rangle_m := \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \langle u, v\rangle ,$$

гдје је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ у $L^2(\Omega)$.

Доказ. Теореме 3.2 и 3.5 у [5]. □

Дефиниција 21. За $0 < \mu \leqslant 1$ Хелдерове норме дефинишемо са

$$\|u\|_{C^{0,\mu}} := \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\mu} + \sup_{x\in\Omega} |u(x)| ,$$

$$\|u\|_{C^{m,\mu}} := \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha u\|_{C^{0,\mu}} .$$

Са $C^{m,\mu}(\Omega)$ означавамо простор свих C^m функција са коначном Хелдеровом нормом $\|\cdot\|_{C^{m,\mu}}$.

Сљедеће теореме су теореме Собољева о утапању. Њихов доказ се може наћи у додатку Б из [8].

Теорема 15. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ограничен Липшицов домен. Ако важи* $mp > n$ *и* $0 < \mu := m - \frac{n}{p}$ *тада постоји константа* $c = c(m, p, \Omega) > 0$ *таква да је*

$$\|u\|_{C^{0,\mu}} \leqslant c\,\|u\|_{m,p}$$

за $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Инклузија* $W^{m,p} \hookrightarrow C^0(\Omega)$ *је компактна.*

Теорема 16. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ограничен Липшицов домен и* $mp < n$. *Тада постоји константа* $c = c(m, p, \Omega)$ *таква да је*

$$\|u\|_{\frac{np}{n-mp}} \leqslant c\,\|u\|_{m,p}$$

за $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Ако је* $q < \frac{np}{n-mp}$ *тада је инклузија* $W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *компактна.*

Притом, Липшицов домен је отворен скуп чија се граница локално може представити као график Липшицове функције.

2 Љуштерник-Шнирељманова категорија

2.1 Проблем о конвексном тијелу

Историјски подаци о проблему о коме ће бити ријеч у овом потпоглављу могу се наћи у [14].

Конвексним тијелом у $\mathbb{R}^n$ називамо произвољан ограничен, конвексан скуп са бар једном унутрашњом тачком. Тетива конвексног тијела C је двострука нормала ако се C налази између хиперравни које су нормалне на њу у њеним крајевима.

Теорема 17. *Конвексно тијело у $\mathbb{R}^n$ има бар n двоструких нормала.*

Штавише, доказаћемо да скуп праваца двоструких нормала конвексног тијела C (ознака: $K(C)$) има бар n елемената.
Довољно је доказати теорему за случај централно-симетричног, конвексног тијела са глатком (C^1) границом, јер важи

Лема 6. *За свако конвексно тијело C у $\mathbb{R}^n$ постоји централно-симетрично конвексно тијело C' са C^1 границом, тако да важи*

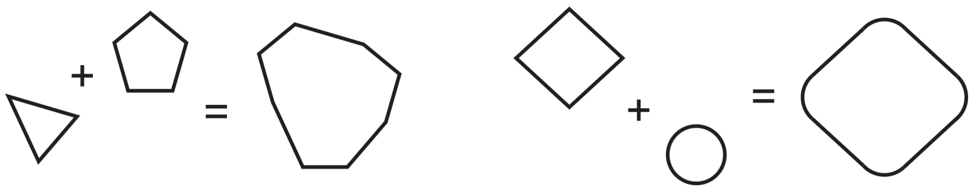
$$K(C) = K(C').$$

Доказ се може наћи у [15], а овдје ћемо навести само конструкцију тијела C'.

Дефиниција 22. $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b \,:\, a \in A\,, b \in B\} \quad \text{(сума Минковског)},\\ -A &:= \{-a \,:\, a \in A\}\,. \end{aligned}$$

Геометријски, $A + B$ је скуп свих тачака које „пребрише" B при проласку неке фиксиране тачке $b \in B$ кроз A.



Слика 2: Сума Минковског

$$C' := C - C + B_1,$$

Притом, $C - C = C + (-C)$, а B_1 је јединична лопта у $\mathbb{R}^n$.
Поставимо координатни почетак у центар симетрије тијела C'. Нека је

$$\rho = \rho(\omega) = \rho(-\omega) \quad \left(\omega \in \mathbb{S}^{n-1}\right)$$

једначина $\partial C'$ у поларним координатама. Тада је са

$$f(\pi(\omega)) = \rho(\omega)^2$$

добро дефинисана C^1 функција $\mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}$ (π је природна пројекција $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$).

Шта су критичне тачке функције f? Пошто је π локални дифеоморфизам, $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ је критична тачка функције ρ^2 акко је $\pi(p)$ критична тачка функције f. Нека је $a(\omega)$ тачка чије су поларне координате $(\rho(\omega), \omega)$, тј. $a(\omega) = \rho(\omega)\omega$.

$$\rho(\omega)^2 = \|a(\omega)\|^2 = \langle a(\omega), a(\omega)\rangle$$

Диференцирањем добијамо сљедећу једнакост

$$\left(\forall X \in T_\omega \mathbb{S}^{n-1}\right) \quad \left(\rho^2\right)_{*\omega}(X) = 2\left\langle a(\omega), a_{*\omega}(X)\right\rangle.$$

Пошто је $a_{*\omega}$ епиморфизам, ω је критична тачка функције ρ^2 акко је $a(\omega) \perp T_{a(\omega)}\left(\partial C'\right)$. Јасно је да је $a(\omega) \perp T_{a(\omega)}\left(\partial C'\right)$ акко је тетива $a(\omega)a(-\omega)$ двострука нормала (њен правац је управо $\pi(\omega)$). Управо смо за сваку критичну тачку $p \in \mathbb{R}P^{n-1}$ функције f пронашли двоструку нормалу тијела C' која има правац p (тј. која је паралелна са p).

$$\#K(C') \geqslant \#\operatorname{Crit}(f)$$

Заправо важи једнакост ([15]).
Колико најмање критичних тачака може имати функција из $C^1\left(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}\right)$?

2.2 Љуштерник-Шнирељманова категорија

Покушаћемо да одговоримо на питање из претходног поглавља уз претпоставку да је f глатка (C^∞). Општије, интересује нас доња граница за број критичних тачака глатке функције

$$f : M \to \mathbb{R},$$

гдје је M глатка, компактна многострукост.
Тривијално запажање: $f(M)$ је компактан па се достижу минимум и максимум. Све тачке које се сликају у минимум или максимум су критичне. Значи, број критичних тачака није мањи од 2.

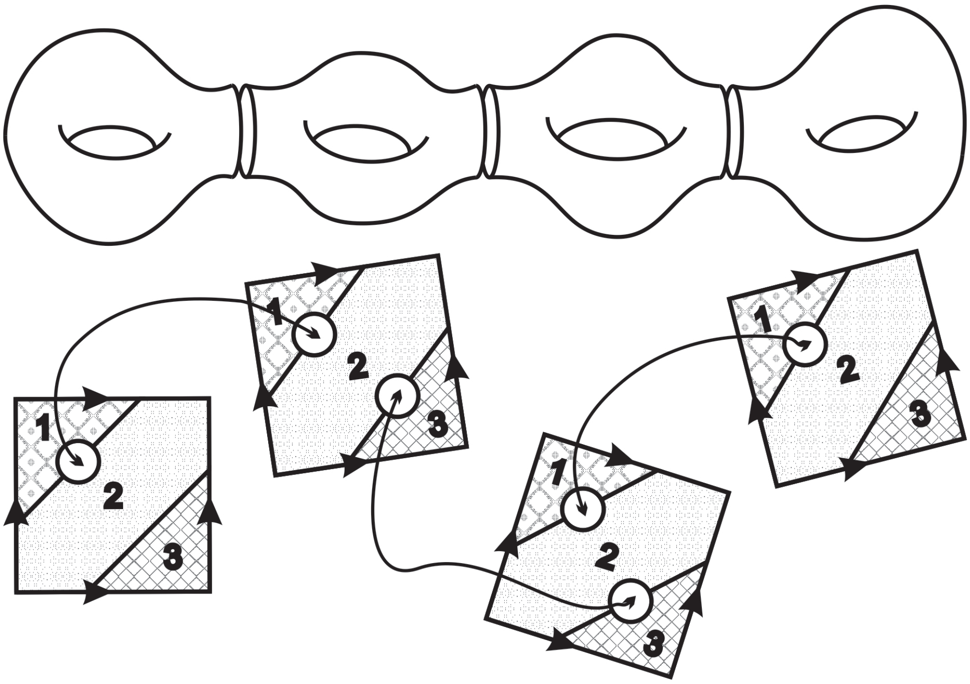
Дефиниција 23. Љуштерник-Шнирељманова категорија $\operatorname{Cat}(S)$ подскупа S многострукости M је најмањи број отворених, контрактибилних у M подскупова (од M) који покривају S.

Отворени скупови у претходној дефиницији не морају бити повезани.

Примјер 8. $\operatorname{Cat}(\mathbb{S}^n) = 2$.

Доказ. Нека су $p, q \in \mathbb{S}^n$ двије различите тачке. $\mathbb{S}^n - \{p\}$ и $\mathbb{S}^n - \{q\}$ су отворени , контрактибилни и покривају $\mathbb{S}^n$. Слиједи $\operatorname{Cat}(\mathbb{S}^n) \leqslant 2$. Пошто $\mathbb{S}^n$ није контрактибилна, важи једнакост. $\square$

Примјер 9. Нека је Σ_g Риманова површ рода $g \neq 0$. Тада је $\operatorname{Cat}(\Sigma_g) = 3$.



Слика 3: Подјела Σ_4 на 3 отворена, контрактибилна у Σ_4 скупа

Доказ. На слици 3 приказана је подјела површи Σ_4 на отворене, контрактибилне (у Σ_4) скупове (означене са 1,2,3 и на различите начине ишрафиране). Притом су наспрамне ивице сваког квадарата идентификоване и границе кругова спојених стрелицама (у одговарајућем смјеру). Одавде $\mathrm{Cat}(\Sigma_g) \leqslant 3$. Други смјер одлажемо за касније. □

Лема 7. *Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ на глаткој, компактној многострукости M има бар* $\mathrm{Cat}(M)$ *критичних тачака.*

Претпоставимо да f има коначно критичних тачака. Довољно је (за доказ леме 7) да критичним тачкама придружимо отворене, контрактибилне скупове (по 1 за сваку) који покривају M.

Изаберимо метрику g на M. Нека је ∇f градијентно векторско поље на M, тј. јединствено векторско поље које задовољава

$$(df)_{*p} = g(\nabla f(p), \cdot).$$

Посматрајмо негативну градијентну једначину

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = -\nabla f\left(\Phi_t(x)\right). \tag{2}$$

Ако је M компактна, рјешење

$$\gamma_x(t) := \Phi_t(x)$$

је дефинисано за свако $t \in \mathbb{R}$. Рјешење $\Phi : M \times \mathbb{R} \to M$ једначине (2) називамо (негативним) градијентним током, а $\gamma_x : \mathbb{R} \to M$ линијом градијентног тока.

Лема 8. *f опада дуж линија (свога) градијентног тока.*

Доказ.

$$\frac{d}{dt}f\circ\gamma_x(t) = df(\gamma_x(t))\left(\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right) = \langle\nabla f(\gamma_x(t)), -\nabla f(\gamma_x(t))\rangle = -\left\|\nabla f(\gamma_x(t))\right\|^2 < 0$$

□

Лема 9. *Ако су критичне тачке глатке функције $f : M \to \mathbb{R}$ изоловане, тада су $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma_x(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty}\gamma_x(t)$ критичне тачке за свако $x \in M$.*

Доказ. (Пратимо [6] и [3].) $h := f\circ\gamma_x : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ је ограничена јер се факторише кроз компактан скуп M, а на основу леме 8, она је и монотона, па постоји $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$.

Извод функције h' је непрекидна функција која се факторише кроз компактан простор. Одавде слиједи да је h' функција са ограниченим изводом, па је равномјерно непрекидна (штавише, Липшицова је).

Изаберимо произвољан низ $t_n \to +\infty$ и број $\varepsilon > 0$. Нека је $\delta > 0$ такав да важи

$$|x-y| \leqslant \delta \;\Rightarrow\; |h'(x)-h'(y)| < \varepsilon.$$

Тада

$$0 \overset{①}{=} \lim_{n\to\infty}\big(h\big((n+1)\delta\big) - h(n\delta)\big) \overset{②}{=} \lim_{n\to\infty}\delta h'(\xi_n),$$

① јер је $\lim\limits_{n\to\infty} h\big((n+1)\delta\big) = \lim\limits_{n\to\infty} h(n\delta)$,

② $\xi_n \in [t_n, t_n+\delta]$.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} h'(\xi_n) = 0$$

Пошто је

$$|t_n - \xi_n| \leqslant \delta \implies |h'(t_n) - h'(\xi_n)| < \varepsilon,$$

све тачке нагомилавања низа $h'(t_n)$ су по апсолутној вриједности мање од ε. Како то важи за сваки позитиван број ε,

$$0 = -\lim_{t\to+\infty} h'(t) = \lim_{t\to+\infty}\left\|\nabla f(\gamma_x(t))\right\|^2. \tag{3}$$

Докажимо сада да $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma_x(t)$ постоји. Претпоставимо супротно.
Нека је $t_n \to +\infty$ низ реалних бројева такав да $p = \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_x(t_n)$ постоји (такав низ се свакако може наћи због компактности). На основу (3) $p \in \mathrm{Crit}(f)$, а по услову леме постоје затворена околина $\widetilde{U}$ и отворена околина $\widetilde{V}$ тачке p, такве да је $\widetilde{U}\cap\mathrm{Crit}(f) = \{p\}$ и $\widetilde{V} \subset \widetilde{U}$. Пошто не постоји $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma_x(t)$, постоји низ $\mathbb{R} \ni s_n \to +\infty$ и отворена околина $W \ni p$ тако да $(\forall n\in\mathbb{N})\,\gamma_x(s_n) \notin W$. Нека је $V = W\cap\widetilde{V}$ И $U = \overline{W}\cap\widetilde{U}$. У $U - V$ не би требало да има критичних тачака. Али

- $\gamma_x^{-1}(V)$ и $\gamma_x^{-1}(U^c)$ су отворени и дисјунктни
- $(\forall T\in\mathbb{R})\ \gamma_x^{-1}(V)\cap[T,+\infty) \neq \emptyset \neq \gamma_x^{-1}(U^c)\cap[T,+\infty)$

- $(\forall T \in \mathbb{R})$ $[T, +\infty)$ је повезан.

То значи да ни за које $T \in \mathbb{R}$ скупови $\gamma_x^{-1}(V)$ и $\gamma_x^{-1}(U^c)$ не могу покрити $[T, +\infty)$, односно постоји $a \in [T, +\infty)$ тако да $\gamma_x(a) \in U - V$. Очигледно, можемо конструисати низ $a_n \to +\infty$ за који важи $\gamma_x(a_n) \in U - V$.
$U - V$ је затворен подскуп компактног скупа (значи и сам је компактан) па постоји подниз низа a_n (означен исто, наравно) који конвергира ка тачки $q \in U - V$. Као и p и q је критична тачка функције f. Но, то је контрадикција, па је постојање лимеса доказано (доказали смо и да он припада $\mathrm{Crit}(f)$).

Случај $-\infty$ је аналоган. □

Дефиниција 24. Нека је p критична тачка глатке функције $f : M \to \mathbb{R}$. Тада су стабилан и нестабилан скуп од p редом

$$W^s(p) := \left\{ x \in M \ : \ \lim_{t \to +\infty} \gamma_x(t) = p \right\},$$

$$W^u(p) := \left\{ x \in M \ : \ \lim_{t \to -\infty} \gamma_x(t) = p \right\}.$$

Доказ леме 7. Захваљујући леми 9 знамо да фамилија $\{W^s(p)\}_{p \in \mathrm{Crit}(f)}$ покрива многострукост M. Није се тешко увјерити (бар интуитивно) да су $W^s(p)$ контрактибилни скупови, али нису отворени. Међутим, постоје довољно мале, отворене, контрактибилне околине ових скупова ([1]). □

Примјер 10. Функција

$$G : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R},$$

$$G(x, y) = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi(x + y))$$

има тачно 3 критичне тачке.

Доказ. Количничко пресликавање $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ је локални дифеоморфизам, па је довољно наћи критичне тачке функције G посматране са доменом $\mathbb{R}^2$ и пребројати колико класа оне одређују (а то се своди на тражење броја критичних тачака у $[0, 1) \times [0, 1)$). Изједначавајући парцијалне изводе са 0 добијамо

$$\sin(\pi(2x + y)) \cdot \sin(\pi y) = \sin(\pi(x + 2y)) \cdot \sin(\pi x) = 0,$$

а одавде да су једине критичне тачке у $[0, 1) \times [0, 1)$

$$(0, 0)\,, \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

□

Одавде и из примјера 9 слиједи да се оцјена из леме 7 за торус достиже.

Уведимо још један појам који ће нам омогућити да ефективно оцијенимо Љустерник-Шнирељманову категорију одоздо.

Дефиниција 25. Кохомолошка дужина $\mathrm{cl}(M;\Lambda)$ многострукости M у односу на комутативан прстен Λ је највећи природан број k за који постоји k кохомолошких класа степена бар 1 чији је производ нетривијалан.

Лема 10. *За произвољан комутативан прстен Λ и многострукост M важи*

$$\mathrm{Cat}(M) > \mathrm{cl}(M;\Lambda)$$

(строга неједнакост).

Доказ. Нека је $k = \mathrm{Cat}(M)$ и нека су $U_1, \ldots, U_k$ отворени, контрактибилни скупови који покривају M. Довољно је доказати да је производ произвољних k кохомолошких класа $\alpha_i \in H^*(M)$, $\deg \alpha_i > 0$ тривијалан.
Посматрајмо дуги тачан низ пара (M, U_i):

$$\cdots \longrightarrow H^{\deg \alpha_i}(M, U_i) \xrightarrow{q_i^*} H^{\deg \alpha_i}(M) \xrightarrow{j_i^*} H^{\deg \alpha_i}(U_i) \longrightarrow \cdots$$

Притом су $j_i : U_i \hookrightarrow M$ и $q_i : M \hookrightarrow (M, U_i)$ инклузије. Пошто је U_i контрактибилан у M, хомоморфизам j_i^* је 0 у димензијама већим од 0. Одавде $j_i^*(\alpha_i) = 0$, па постоји $\tilde{\alpha_i} \in H^{\deg \alpha_i}(M, U_i)$ такво да је $q_i^*(\tilde{\alpha_i}) = \alpha_i$. Сада тврђење слиједи из

$$H^i(X, A) \times H^i(X, B) \overset{\smile}{\to} H^i(X, A \cup B),$$

за отворене подскупове A и B простора X (видјети [12] стр. 209 или [17] стр. 264). Тј.

$$\tilde{\alpha_1} \in H^*(M, U_1),$$
$$\tilde{\alpha_1} \smile \tilde{\alpha_2} \in H^*(M, U_1 \cup U_2),$$
$$\cdots$$
$$\tilde{\alpha_1} \smile \cdots \smile \tilde{\alpha_k} \in H^*(M, \underbrace{U_1 \cup \cdots \cup U_k}_{M}).$$

Без сумње $\tilde{\alpha_1} \smile \cdots \smile \tilde{\alpha_k} = 0$, па је и

$$\begin{aligned} \alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_k &= q_1^*(\tilde{\alpha_1}) \smile \cdots \smile q_k^*(\tilde{\alpha_k}) \\ &= q^*(\tilde{\alpha_1} \smile \cdots \smile \tilde{\alpha_k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Са q смо означили инклузију $q : M \to (M, U_1 \cup \cdots \cup U_k)$. Наравно, користили смо комутативност одговарајућег дијаграма.

□

Посљедица 1. *Крај доказа примјера 9.*

Доказ. Кохомолошка дужина Риманове површи рода не нула је 2. □

На крају, наводимо још једну оцјену Љуштерник-Шнирељманове категорије и још један примјер.

Теорема 18. *Ако је M компактна многострукост, тада је* $\mathrm{Cat}(M) \leqslant \dim M + 1$.

Доказ. [1] □

Примјер 11. $\mathrm{Cat}(\mathbb{R}P^n) = n + 1$.

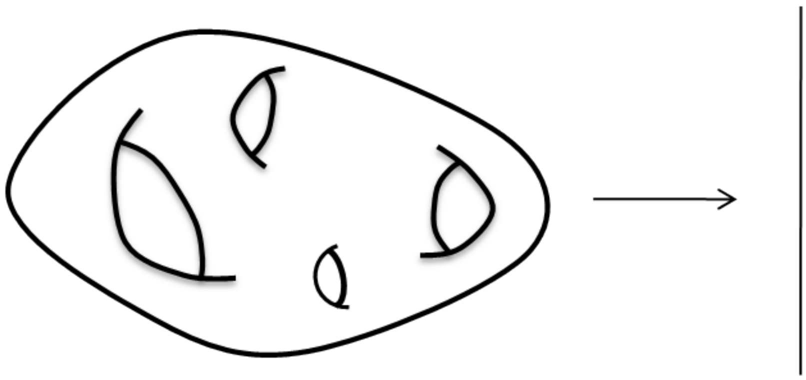
Доказ. На основу претходне теореме $\mathrm{Cat}(\mathbb{R}P^n) \leqslant n + 1$. Нека је $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ фундаментална класа. Тада је $\alpha^n \in H^n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ генератор (видјети [17]), тј. није 0. Одавде $\mathrm{cl}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = n$, па на основу леме 10 слиједи тврђење. □

3 Морсова теорија

На основу изложеног у претходном поглављу а нарочито примјера 9, са сигурношћу можемо да тврдимо да

$$f : \Sigma_g \to \mathbb{R}$$

има бар 3 критичне тачке. И ова оцјена је добра јер се за нпр. $g = 1$ (примјер 10) достиже. Међутим, посматрајући природну функцију висине на Σ_g (слика 4) и „варирајући" мало слику стиче се утисак да за произвољно изабрану функцију можемо да очекујемо много више критичних тачака. У овом поглављу увјерићемо се да $f : \Sigma_g \to \mathbb{R}$ „углавном" има бар $2g + 2$ критичних тачака (управо толико критичних тачака има и поменута функција висине).



Слика 4: Функција висине на Σ_4

3.1 Морсове функције

Нека је M затворена многострукост димензије n.

Дефиниција 26. Функција $f : M \to \mathbb{R}$ је Морсова ако је диференцијал $df : M \to T^*M$ трансверзалан на нулто сјечење $\mathbb{O}_M$.

Критичне тачке функције f су тачке скупа $(df)^{-1}(\mathbb{O}_M)$. Пошто је $df \pitchfork \mathbb{O}_m$, овај скуп је многострукост димензије $\dim M + \dim \mathbb{O}_M - \dim T^*M = n + n - 2n = 0$. Та 0-димензиона многострукост је компактна јер је затворен (инверзна слика затвореног скупа) подскуп компактног скупа. Одавде

Лема 11. *Скуп критичних тачака Морсове функције $M \to \mathbb{R}$ је коначан. Специјално, критичне тачке су изоловане.*

Дефинишимо форму H другог извода (Хесијан) на многострукости M у критичној тачки. Нека је $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и X, Y вектори, тада важи

$$d^2g(X, Y) = d_X(dg(Y)) = d_X d_Y g.$$

Мотивисани овом релацијом, можемо поступити на сљедећи начин

$$H_p(f) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},$$

$$H_p(f)(X_p, Y_p) := X_p(Y(f)),$$

притом је Y произвољно векторско поље чија је вриједност у тачки p вектор Y_p. Да би дефиниција била добра, десна страна треба да буде независна од избора верторског поља Y, а она то и јесте. Нека је X векторско поље такво да важи $X(p) = X_p$. Тада је

$$X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y]_p\,(f) = df_p([X, Y]_p) = 0, \quad (p \text{ је критична тачка})$$

односно

$$X_p(Y(f)) = Y_p(X(f)).$$

Десна страна не зависи од Y, а лијева не зависи од X. Одавде слиједи не само да је H_p добро дефинисана, већ и да је симетрична форма.

Лема 12. *Глатка функција $f : M \to \mathbb{R}$ је Морсова ако и само ако је форма другог извода недегенерисана у свакој критичној тачки.*

Доказ.

$$H_p(f)(X_p, Y_p) = X_p(Y(f)) = X_p(df(Y)) = \left(\nabla_{X_p} df\right) Y_p + df_p(\nabla_{X_p} Y) = \left(\nabla_{X_p} df\right) Y_p$$

df је трансверзално на $\mathbb{O}_M$ у тачки p ако и само ако $(df)_* X_p \notin T\mathbb{O}_M$ за свако $X_p \in T_pM$ (узимамо у обзир да су димензије простора T_pM, $\mathbb{O}_M$ и $T_{df_p}T^*M$ редом n, n и $2n$). А ово је задовољено ако и само ако $\nabla_{X_p}(df) \neq 0$ за свако $X_p \in T_pM$. Ово управо значи да је H_p недегенерисана јер за свако X_p постоји Y_p такво да је $\nabla_{X_p}(df) Y_p \neq 0$. □

Матрицом можемо представити линеарно пресликавање али и билинеарну форму. То представљање није јединствено, па да би утврдили да ли је нека карактеристика матрице заправо карактеристика самог линеарног пресликавања (или квадратне форме) морамо провјерити како се она понаша при промјени координата. Ако матрица A представља линеарно пресликавање тада и свака од матрица

$$P^{-1}AP, \quad \det P \neq 0 \tag{4}$$

представља то исто пресликавање. Међутим, ако A представља билинеарну форму, тада је ријеч о матрицама

$$P^{\mathrm{T}}AP, \quad \det P \neq 0. \tag{5}$$

Док матрице (4) имају исте сопствене вриједности, матрице (5) немају. Ово значи да су сопствене вриједности карактеристике линеарног пресликавања али не и билинеарне форме.

H_p је симетрична, билинеарна форма. Као што рекосмо у претходној реченици, не можемо говорити о њеним сопственим вриједностима јер за различите базе простора T_pM матрице које представљају H_p ће имати различите сопствене вриједности. Међутим, број позитивних (индекс), нула и негативних сопствених вриједности је инваријантан у односу на смјену координата (видјети [11] поглавље IX). Збир ових бројева је једнак димензији простора јер су све сопствене вриједности реалне симетричне матрице реалне.

Дефиниција 27. Морсов индекс критичне тачке p (ознака: $\mathrm{Ind}(p)$) је $n - \mathrm{index}(H_p)$ тј. број негативних сопствених вриједности било које матрице која представља H_p у некој бази.

Теорема 19. *Скуп Морсових функција је отворен, свуда густ подскуп скупа* $\mathcal{C}^2(M)$.

Доказ се може наћи у [4] (теорема 1.1.3).

3.2 Томова декомпозиција

Из леме 11 Морсова функција има изоловане критичне тачке, па на основу леме 9

$$M = \bigcup_{p \in \mathrm{Crit}(f)} W^u(p).$$

Ово је Томова декомпозиција многострукости M. Но, сада можемо рећи нешто више о скуповима $W^u(p)$.

Теорема 20. *За Морсову функцију* $W^u(p)$ *и* $W^s(p)$ *су дискови димензија редом* $\mathrm{Ind}(p)$ *и* $n - \mathrm{Ind}(p)$.

Доказ. Теорема 4.2 у [6]. □

Кад је ријеч о декомпозицији простора отвореним ћелијама, природно се поставља питање када је та декомпозиција CW декомпозиција.
У нашем случају то ће бити задовољено ако важи Морс-Смејлов услов

$$(\forall p, q \in \mathrm{Crit}(f))\ W^u(p) \pitchfork W^s(q). \tag{6}$$

(За ово тврђење и даље референце погледати напомену 6.36 у [6].)
Да би се овај услов постигао, није потребно даље сужавати класу функција. Стабилне и нестабилне многострукости не зависе само од Морсове функције већ и од метрике, а увијек је могуће „наћи" такву метрику да Морс-Смејлов услов буде задовољен ([24]).

Посматрајмо ћелијски, ланчасти комплекс са коефицијентима у пољу $\mathbb{F}$ придружен CW декомпозицији многострукости M нестабилним многострукостима:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots$$

Хомологија овог ланчастог комплекса изоморфна је сингуларној хомологији $H_*(M;\mathbb{F})$.

$$\frac{\mathrm{Ker}\,\partial_k}{\mathrm{Im}\,\partial_{k+1}} \cong H_k(M;\mathbb{F}). \tag{7}$$

Пошто је $\mathbb{F}$ поље, $C_k, \mathrm{Ker}\,\partial_k, \mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ и $H_k(M;\mathbb{F})$ су векторски простори, а због (7) и $C_k \geqslant \mathrm{Ker}\,\partial_k$ важи

$$\dim C_k \geqslant \dim \mathrm{Ker}\,\partial_k \geqslant \dim H_k(M;\mathbb{F}).$$

$\dim C_k$ је управо број k-димензионих ћелија, а у нашем случају и број критичних тачака индекса k. Одавде,

$$\#\,\mathrm{Crit}(f) \geqslant \sum_{k=0}^{\dim M} \dim H_k(M;\mathbb{F}).$$

Специјално, за $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$

$$\#\operatorname{Crit}(f) \geqslant \sum_{k=0}^{\dim M} \beta_k,$$

притом су β_i Бетијеви бројеви.

А сад оно што смо обећали на почетку поглавља.

Примјер 12. Морсова функција на Σ_g има бар $2g+2$ критичних тачака.

Доказ. Збир Бетијевих бројева многострукости Σ_g је управо $2g+2$. □

Но, постоје случајеви када резултати Морсове теорије (бар што се тиче доње оцјене броја критичних тачака) нису толико упечатљиви у односу на Љустерник-Шнирељманову теорију. Нпр. примјењујући претходна разматрања на $\mathbb{R}P^n$ са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима добијамо једнако добру оцјену, али ако умјесто $\mathbb{Z}_2$ узмемо нпр. $\mathbb{Z}_{101}$, она је чак и знатно слабија (1 или 2), јер је

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_{101}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{101} & \text{за } k = 0 \\ 0 & \text{за } 0 < k < n \\ \mathbb{Z}_{101} & \text{за } k = n \text{ и } n \text{ непарно} \\ 0 & \text{за } k = n \text{ и } n \text{ парно} \end{cases}.$$

3.3 Морсова хомологија

Промијенимо угао гледања. Дефинисаћемо хомологију помоћу критичних тачака Морсове функције не позивајући се на CW декомпозицију многострукости. Једноставности ради, ограничићемо се на коефицијенте у пољу $\mathbb{Z}_2$.

Означимо са $\operatorname{Crit}_k(f)$ скуп критичних тачака Морсове функције $f : M \to \mathbb{R}$ индекса k. Нека је $CM_k(f)$ $\mathbb{Z}_2$-векторски простор генерисан са $\operatorname{Crit}_k(f)$, тј.

$$CM_k(f) := \left\{ \sum \alpha_j x_j : x_j \in \operatorname{Crit}_k(f),\ \alpha_j \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

У циљу дефинисања граничног оператора уведимо пар појмова.

За критичне тачке $p, q \in \operatorname{Crit}(f)$ са $\mathcal{M}_f(p,q)$ означимо скуп параметризованих линија градијентног тока које „полазе" из p а „завршавају" у q:

$$\mathcal{M}_f(p,q) := \left\{ \gamma : \mathbb{R} \to M : \frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f(\gamma),\ \lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = p,\ \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = q \right\}.$$

Овај скуп се може идентификовати са $W^u(p) \cap W^s(q)$ који је многострукост кодимензије

$$\operatorname{codim} W^u(p) \cap W^s(q) = \operatorname{codim} W^u(p) + \operatorname{codim} W^s(q) = n - \operatorname{Ind}(p) + \operatorname{Ind}(q),$$

ако је задовољено (6), па не изненађује сљедећа

Теорема 21. *За генеричку Риманову метрику скуп* $\mathcal{M}_f(p,q)$ *је многострукост димензије* $\operatorname{Ind}(p) - \operatorname{Ind}(q)$.

Дејство групе $\mathbb{R}$ на $\mathcal{M}_f(p,q)$ је задато са

$$(\gamma, s) \mapsto \gamma(\cdot + s). \tag{8}$$

Нека је

$$\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q) := \mathcal{M}_f(p,q)/\mathbb{R} \quad \text{(посјечено по горе описаном дејству)}.$$

$\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q)$ можемо да видимо као простор непараметризованих градијентних линија које спајају p и q, јер γ и $\gamma(\cdot + s)$ представљају исту трајекторију.

Надамо се да ће и $\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q)$ имати лијепу структуру. И заиста, на основу пропозиције 2.31 у [24], дејство (8) је глатко, слободно и својствено, а то је довољно да закључимо да је $\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q)$ многострукост димензије $\dim \mathcal{M}_f(p,q) - 1$ (погледати теорему 5).

Посљедица 2. *Ако је* $\operatorname{Ind}(p) - \operatorname{Ind}(q) = 1$*, многострукост* $\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q)$ *је компактна ([24]) многострукост димензије 0 (тј. коначан скуп тачака) за генеричку Риманову метрику.*

Уз услове посљедице 2, нека је

$$n(p,q) := \#\widehat{\mathcal{M}}_f(p,q) \pmod 2.$$

Јасно је да је довољно дефинисати ∂ на генераторима.

$$\partial_k : C_k(f) \to C_{k-1}(f),$$
$$\partial_k(x) := \sum_{\operatorname{Ind}(y)=k-1} n(x,y)y, \quad x \in \operatorname{Crit}_k(f).$$

Теорема 22. *Ако је* $\operatorname{Ind}(p) - \operatorname{Ind}(q) = 2$*, тада је (за генеричку метрику)* $\widehat{M}_f(p,q)$ *многострукост димензије један са границом*

$$\partial \widehat{M}_f(p,q) = \bigcup_{\operatorname{Ind}(q)<\operatorname{Ind}(r)<\operatorname{Ind}(p)} \widehat{\mathcal{M}}_f(p,y) \times \widehat{\mathcal{M}}_f(y,q).$$

Лема 13. *Уз услове претходних теорема*

$$\partial^2 = 0.$$

Доказ. Довољно је да докажемо да важи $\partial^2 = 0$ на генераторима, тј на елементима скупа $\operatorname{Crit}_k(f)$.

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k(x) = \sum_{\substack{\operatorname{Ind}(y)=k-1 \\ \operatorname{Ind}(z)=k-2}} n(y,z)n(x,y)z = \sum_{\operatorname{Ind}(z)=k-2} \left(\sum_{\operatorname{Ind}(y)=k-1} n(y,z)n(x,y) \right) z$$

Број $\sum_{\operatorname{Ind}(y)=k-1} n(y,z)n(x,y)$ је по модулу 2 једнак броју тачака 0-димензионе многострукости

$$\bigcup_{\operatorname{Ind}(z)<\operatorname{Ind}(r)<\operatorname{Ind}(x)} \widehat{\mathcal{M}}_f(x,y) \times \widehat{\mathcal{M}}_f(y,z),$$

која је на основу теореме 22 граница 1-димензионе многострукости. Пошто свака једнодимензиона многострукост има за границу паран број тачака, овај број је 0 (рачунамо у $\mathbb{Z}_2$). Ово важи за свако $z \in \mathrm{Crit}_{k-2}(f)$, па је

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0.$$

□

Дефиниција 28. За пар (Морсова функција, Риманова метрика) (f, g) кажемо да је регуларан ако су задовољени услови теорема 21 и 22.

Дефиниција 29. Морсова хомологија је количнички простор

$$HM_k(f, g) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial_k)}{\mathrm{Im}(\partial_{k+1})}.$$

Претпостављамо да је пар (f, g) регуларан.

Примјер 13. Израчунати Морсову хомологију за модификовану кружницу на слици 5 и функцију висине на њој.

Рјешење. Функција висине има 4 критичне тачке, и то двије индекса 1 (a и b) и двије индекса 0 (c и d), па је Морсов ланчасти комплекс

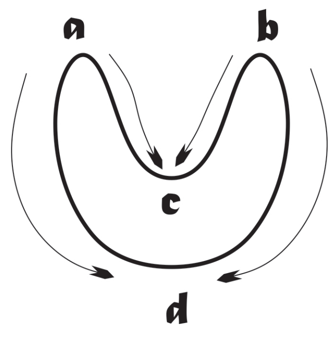
$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Постој јединствена градијентна трајекторија за сваки од парова (a, c), (a, d), (b, c) и (b, d). Одавде

$$\partial a = \partial b = c + d,$$

па добијамо хомологију

$$HM_1 \cong \mathbb{Z}_2, \quad HM_0 \cong \mathbb{Z}_2.$$



Слика 5:

□

3.4 Аналитички приступ

Пратећи [24] навешћемо основне кораке у доказу теореме 21 аналитичким методама.

Пошто посматрамо трајекторије $\gamma : \mathbb{R} \to M$ за које постоје $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \gamma(t)$, згодније је за домен узети компактификацију $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ са структуром ограничене многострукости. Та структура се може задати условом да је сљедеће пресликавање дифеоморфизам.

$$h : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]\,,$$
$$h : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Сада можемо скуп $M_f(x, y)$ записати и као

$$M_f(x, y) = \left\{\gamma : \overline{\mathbb{R}} \to M : \frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f(\gamma),\, \gamma(-\infty) = x,\, \gamma(+\infty) = y\right\}.$$

Главна идеја

Нека је F Фредхолмово пресликавање Банахове многострукости у Банахово раслојење

$$F : \mathcal{P}^{1,2}_{x,y} \to L^2_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{P}^{1,2*}_{x,y} TM\right).$$

Ако је $M_f(x, y)$ инверзна слика нултог сјечења, из трансверзалности F и нултог сјечења слиједи да је $M_f(x, y)$ многострукост димензије $\mathrm{Ind}(F)$.

За произвољне тачке $x, y \in M$ означимо са $C^\infty_{x,y}$ скуп глатких, компактних кривих са крајевима x, y. Тј.

$$C^\infty_{x,y} = C^\infty_{x,y}\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right) = \left\{\gamma \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right) \,:\, \gamma(-\infty) = x,\, \gamma(+\infty) = y\right\}.$$

Конструкција Банахових простора $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ и $L^2_{\mathbb{R}}(\xi)$

Нека је $\xi \in \mathrm{Vec}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ векторско раслојење над $\overline{\mathbb{R}}$ коначног ранга r. С обзиром да је $\overline{\mathbb{R}}$ контрактибилан, постоји глатка тривијализација

$$\phi : \xi \to \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^r.$$

Тривијализација индукује бијекцију ϕ_* између векторских простора сјечења.

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xleftarrow{\ \phi\ } & \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^r \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \\ \overline{\mathbb{R}} & & \end{array} \qquad \phi_*^{-1} : s \mapsto s \circ \phi^{-1}$$

$H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ дефинишемо као

$$H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi) = \phi^{-1}\left(H^{1,2}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^r\right)\right).$$

Захтијевајући да је ϕ хомеоморфизам на $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ задајемо топологију Банаховог простора. Она не зависи од избора тривијализације ϕ (посљедица 2.3 у [24]). Аналогно дефинишемо $L^2_{\mathbb{R}}(\xi)$.

Конструкција Банахове многострукости $\mathcal{P}^{1,2}_{x,y}$

Нека је $\mathcal{D}$ отворена, конвексна околина нултог сјечења раслојења TM. За произвољну функцију $h \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right)$ са $h^*\mathcal{D}$ означимо одговарајућу отворену, конвексну околину нултог сјечења раслојења h^*TM. Пресликавање

$$\begin{aligned} \exp_h : H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D}) &\to C^0\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right) \\ s(\cdot) &\to \exp_{h(\cdot)} s(\cdot) \end{aligned}$$

је добро дефинисано за све $h \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right)$. Иако $h^*\mathcal{D}$ није векторско раслојење и иако смо дефинисали $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(\xi)$ само за векторска раслојења, јасно је шта $H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D})$ представља.

$$\mathcal{P}^{1,2}_{x,y} = \mathcal{P}^{1,2}_{x,y}\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right) := \left\{\exp_h(s) \ : \ s \in H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D}),\, h \in C^\infty_{x,y}\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right)\right\} \subset C^0_{x,y}\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right)$$

Картама

$$\left\{H^{1,2}_{\mathbb{R}}(h^*\mathcal{D}), \exp_h\right\}_{h \in C^\infty_{x,y}\left(\overline{\mathbb{R}}, M\right)}$$

је задата структура Банахове многострукости на $\mathcal{P}^{1,2}_{x,y}$.

Конструкција Банаховог раслојења $L^2_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{P}^{1,2*}_{x,y}TM\right)$

$$L^2_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{P}^{1,2*}_{x,y}TM\right) := \bigcup_{s \in \mathcal{P}^{1,2}_{x,y}} L^2_{\mathbb{R}}\left(s^*TM\right)$$

Пресликавање F

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}^{1,2}_{x,y} &\to L^2_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{P}^{1,2*}_{x,y}TM\right) \\ s &\mapsto \dot{s} + \nabla f \circ s. \end{aligned}$$

F је глатко сјечење. На основу пропозиције 2.9 у [24] његове нуле су елементи скупа $M_f(x, y)$ (и само они). Трансверзалност F на нулто сјечење не важи у општем случају, али може се постићи малим варијацијама Риманове метрике.

3.5 Инваријантност Морсове хомологије

Ми смо дефинисали HM_* у зависности од регуларног пара (f, g). Међутим, за различите регуларне парове не добијамо ништа ново. Заправо, важи

Теорема 23. *$HM_*(f, g) \cong H_*(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Опишимо канонски изоморфизам између $HM_*\left(f^\alpha, g^\alpha\right)$ и $HM_*\left(f^\beta, g^\beta\right)$, за регуларне парове $\left(f^\alpha, g^\alpha\right)$ и $\left(f^\beta, g^\beta\right)$ (пратимо [19]).
Нека је $h^{\alpha,\beta} : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ хомотопија између f^α и f^β, тј. пресликавање за које важи

$$h^{\alpha,\beta}_s(x) = \begin{cases} f^\beta(x), & s \geqslant 1 \\ f^\alpha(x), & s \leqslant 0 \end{cases},$$

и нека је $g^{\alpha,\beta}$ пут Риманових метрика такав да је

$$g_s^{\alpha,\beta} = \begin{cases} g^\beta, & s \geqslant 1 \\ g^\alpha, & s \leqslant 0 \end{cases}.$$

За $x^\alpha \in \mathrm{Crit}(f^\alpha)$ и $x^\beta \in \mathrm{Crit}(f^\beta)$ посматрајмо скуп

$$\mathcal{M}_{h^{\alpha,\beta}}(x^\alpha, x^\beta) := \left\{\gamma : \overline{\mathbb{R}} \to M \;:\; \frac{d\gamma}{dt}(t) = -\nabla_{g^{\alpha,\beta}} h^{\alpha,\beta}(\gamma(t)),\, \gamma(-\infty) = x^\alpha,\, \gamma(+\infty) = x^\beta\right\}.$$

За генерички пут $\left(h^{\alpha,\beta}, g^{\alpha,\beta}\right)$ он је многострукост димензије $\mathrm{Ind}(x^\alpha) - \mathrm{Ind}(x^\beta)$, а ако је задовољено $\mathrm{Ind}(x^\alpha) = \mathrm{Ind}(x^\beta)$ - коначан скуп тачака. Број тих тачака (у $\mathbb{Z}_2$) означимо са $b\left(x^\alpha, x^\beta\right)$. Дефинишимо пресликавање између ланчастих комплекса придружених Морсовим функцијама f^α и f^β.

$$\Phi^{\beta,\alpha} : CM_*(f^\alpha) \to CM_*(f^\beta),$$
$$(\forall x \in \mathrm{Crit}_k(f^\alpha)) \quad \Phi^{\beta,\alpha}(x) = \sum_{y \in \mathrm{Crit}_k(f^\beta)} b(x,y)y, \tag{9}$$

и продужимо по линеарности.

Теорема 24.

- $\Phi^{\beta,\alpha}$ *је ланчасто пресликавање и индукује изоморфизам у хомологији,*
- *Индуковани изоморфизам* $\Phi_*^{\beta,\alpha}$ *не зависи од избора генеричког пута* $\left(h^{\alpha,\beta}, g^{\alpha,\beta}\right)$,
- $\Phi_*^{\alpha,\alpha} = \mathrm{id}$ *и* $\Phi_*^{\gamma,\beta} \circ \Phi_*^{\beta,\alpha} = \Phi_*^{\gamma,\alpha}$.

Дефиниција 30. Нека је (C, ∂) ланчасти комплекс са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима, и нека је $B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ његова база. $e \in B$ је хомолошки есенцијалан ако за сваки ∂-инваријантни потпростор K линеарног омотача од $B - \{e\}$ важи

$$H_*(K, \partial) \to H_*(C, \partial) \quad \text{није НА}.$$

Притом, јасно је о ком се пресликавању ради.

Лема 14. *Нека је f генеричка Морсова функција са јединственом тачком x^+ апсолутног максимума. Посматрајмо комплекс $(C(f), \partial)$ за генеричку Риманову метрику и базу* $\mathrm{Crit}(f)$. *Тада је x^+ хомолошки есенцијална.*

Скица доказа. f опада дуж линија градијентног тока, па је линеарни омотач Q скупа $\mathrm{Crit}(f) - \{x^+\}$ ∂-инваријантан. $H_{\dim M}(Q, \partial) = 0$, интуитивно због тога што је скуп

$$\{x \in M \;:\; f(x) < \max F - \varepsilon\}$$

отворена многострукост (за мало ε). Одавде, сваки ∂-инваријантни потпростор од Q индукује тривијалну $\dim M$-ту хомолошку групу. Пошто је $HM_{\dim M}(f) \cong H_{\dim M}(M) \cong \mathbb{Z}_2$, тачка x^+ је хомолошки есенцијална. □

Посљедица 3. *Задржавамо услове претходне леме. Нека је (f_s, g_s), $s \in \mathbb{R}$ генеричка фамилија таква да је $f_s \equiv f_0$ за $s \leqslant 0$ и $f_s \equiv f$ за $s \geqslant 1$. Тада постоји $x \in \mathrm{Crit}(f_0)$ тако да је $b\left(x, x^+\right) \neq 0$. ($b$ је дефинисано прије формуле (9).)*

Доказ. Нека је Φ природан изоморфизам између $HM_*(f_0, g_0)$ и $HM_*(f_1, g_1)$ индукован фамилијом (f_s, g_s). Ако је $b(x, x^+) = 0$ за свако $x \in \mathrm{Crit}(f_0)$ тада је слика од Φ садржана у линеалу од $\mathrm{Crit}(f) - \{x^+\}$. Али тада Φ не може бити изоморфизам јер је x^+ хомолошки есенцијална. □

4 Флорова теорија

4.1 Арнолдова хипотеза

Нека је (M, ω) компактна, симплектичка многострукост, и H_t 1-периодичан, нормализован Хамилтонијан, којем одговарају Хамилтоново векторско поље X_t и једнопараметарска група дифеоморфизама ϕ_t.
1-периодична Хамилтонова петља је свако 1-периодично рјешење једначине

$$\dot{x}(t) = X_t(x(t)). \tag{10}$$

Скуп свих оваквих петљи означимо са $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$.

Дефиниција 31. $x \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)$ је недегенерисана ако је задовољено

$$\det(\mathrm{id} - d\phi_1(x(0))) \neq 0.$$

Сада смо спремни да формулишемо Арнолдову хипотезу.

Хипотеза 1 (Арнолд)**.** *Ако су све 1-периодичне Хамилтонове петље недегенерисане тада их има бар онолико колики је збир Бетијевих бројева многострукости M. Односно, има их не мање од*

$$\sum_{k=0}^{\dim M} \dim H_k(M).$$

Овдје ћемо доказати хипотезу у случају да је ријеч о хомологији са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима и уз додатну претпоставку да је многострукост асферична (тј. $\pi_2(M) = 0$).

Ако је H аутономан, доказ слиједи из Морсове теорије, јер свака критична тачка задовољава (10) и 1-периодична је. А важи и

Лема 15. *Критична тачка аутономног Хамилтонијана је недегенерисана као петља ако и само ако је недегенерисана и као критична тачка глатке функције.*

Доказ. Не умањујући општост доказаћемо теорему за $\dim M = 2$. Изаберимо Дарбуову карту ($\omega = dp \wedge dq$) у којој 0 одговара критичној тачки Хамилтонијана.

$$\phi_t(p, q) = \big(A_t(p, q), B_t(p, q)\big)$$

Хамилтонов ток је задат са

$$\dot{A} = \frac{\partial H}{\partial q}(A, B), \quad \dot{B} = -\frac{\partial H}{\partial p}(A, B).$$

$$\frac{d}{dt}\phi_{t*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{A}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial q} \\ \frac{\partial \dot{B}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{B}}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix}$$

Знамо да Хамилтонов ток фиксира тачку 0 (јер 0 одговара критичној тачки), тј. $\phi_t(0) = const$. Одатле, десна страна не зависи од t. Па је

$$\phi_{t*}(0) = t \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix} + \mathrm{id}\,.$$

id се појављује јер је $\phi_0 = \mathrm{id}$, тј. почетни услов је $\phi_{0*}(0) = \mathrm{id}$. Тврђење леме слиједи из

$$\det(\mathrm{id} - \phi_{1*}(0)) = \det \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 H}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \end{bmatrix}.$$

□

И у много општијем случају послужићемо се идејама Морсове теорије (прецизније, аналитичког погледа на њу). За почетак изведимо еквивалент изолованости критичних тачака Морсове функције.

Лема 16. *График пресликавања $\phi_1 : M \to M$ је трансверзалан на дијагоналу у $M \times M$ ако и само ако су све петље из $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ недегенерисане.*

Доказ. $\det(\mathbb{1} - d\phi_1(x(0))) \neq 0$ акко је језгро линеарног оператора

$$(\mathrm{id} - \phi_1)_*(x(0)) : T_{x(0)}M \to T_{x(0)}M$$

тривијално. Пресликавање $(\mathrm{id} \times \phi_1)\, T_{x(0)}M \to T_{(x(0),x(0))}M \times M$ остварује изоморфизам простора $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - \phi_1)$ и $T_{(x(0),x(0))}\Gamma \cap T_{(x(0),x(0))}\Delta$ (са Γ смо означили график пресликавања ϕ_1), што значи да је један тривијалан акко је и други. И коначно, како су $T_{(x(0),x(0))}\Gamma$ и $T_{(x(0),x(0))}\Delta$ димензије $\dim M$, а $T_{(x(0),x(0))}M \times M$ двоструко веће, $T_{(x(0),x(0))}\Gamma \cap T_{(x(0),x(0))}\Delta$ је $\{0\}$ акко је

$$T_{(x(0),x(0))}\Gamma \oplus T_{(x(0),x(0))}\Delta T = T_{(x(0),x(0))}M \times M.$$

□

Посљедица 4. *Претпоставимо да су све петље из $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ недегенерисане. Тада је $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ коначан и*

$$\min_{x,y \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)} \inf_t d\left(x(t), y(t)\right) > 0.$$

Доказ. Придруживање $\widetilde{\mathcal{P}}(H) \ni x \mapsto x(0)$ је $1-1$, што значи да број елемената скупа $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ није већи од броја фиксних тачака дифеоморфизма ϕ_1, који је једнак броју елемената скупа $\Delta \cap \Gamma$. Овај скуп је затворен (као пресјек два затворена скупа) подскуп компактне многострукости $M \times M$ па је компактан. Он је и подмногострукост димензије 0 због трансверзалности. Компактна многострукост димензије 0 је коначан скуп тачака.
Нека је $U_n := \left\{t \in [0,1] \ : \ \min_{x,y \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)} d\left(x(t), y(t)\right) > \frac{1}{n}\right\}$. Функција

$$t \mapsto \min_{x,y \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)} d\left(x(t), y(t)\right) = \min_{x,y \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)} d\left(\phi_t(x(0)), \phi_t(y(0))\right)$$

је непрекидна јер је $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$ коначан и ϕ_t глатко зависи од t, па су скупови U_n отворени. Они покривају интервал $[0,1]$ јер су ϕ_t дифеоморфизми па сваки од њих раздваја различите тачке (и поново, минимум је узет по коначном скупу и може бити 0 само ако је неки од елемената тог скупа 0). Интервал је компактан па постоји коначан потпокривач $\left\{U_{n(k)}\right\}_{k=1}^m$. Важи

$$\min_{x,y \in \widetilde{\mathcal{P}}(H)} \inf_t d\left(x(t), y(t)\right) > \frac{1}{\max n(k)}.$$

□

4.2 Функционал дејства

Мјесто критичних тачака у Морсовој теорији у Флоровој теорији заузимају Хамилтонове петље. Потребан нам је аналог Морсове функције, тј. функционал чије ће критичне тачке (екстремале) бити елементи скупа $\widetilde{\mathcal{P}}(H)$. Узећемо функционал дејства, али да бисмо га добро дефинисали, морамо се нечега одрећи. Можемо се одрећи компактности и ограничити на посматрање тачних, симплектичких многострукости (а то нећемо) и дефинисати

$$\mathcal{A}_H(x) := \int_0^1 \left(x^*\theta - H_t(x(t))\right) dt,$$

или претпоставити да је M асферична и посматрати функционал на простору $\mathcal{L}M$ контрактибилних, 1-периодичних петљи.

Дефиниција 32. Функционал дејства за Хамилтонијан H је функција

$$\mathcal{A}_H : \mathcal{L}M \to \mathbb{R},$$

$$\mathcal{A}_H(x) = -\int_B u^*\omega - \int_0^1 H_t(x(t))dt,$$

гдје је $u : B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\} \to M$ глатко пресликавање такво да је $u\left(e^{2\pi i t}\right) = x(t)$.

На први поглед $\mathcal{A}_H$ зависи и од продужења u петље x (тј. пресликавања кружнице у M) на диск. Међутим, усљед услова асферичности дефиниција је ипак добра.
А сада провјеримо оно за шта смо и тражили функционал.

Лема 17. $d\mathcal{A}_H(x;\xi) = \displaystyle\int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), \xi(t))dt, \quad \xi \in T_x\mathcal{L}M.$

Доказ. Посматрајмо глатку криву $\mathbb{R} \to \mathcal{L}M : s \mapsto x_s$ у простору $\mathcal{L}M$, такву да је тангентни вектор у тачки x_0 једнак ξ (наравно „тачка" је заправо 1-периодична петља на M, а „тангентни вектор" векторско поље дуж ње). Нека је u_s глатка, једнопараметарска фамилија пресликавања $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\} \to M$, таква да важи $u_s\left(e^{2\pi i t}\right) = x_s(t)$.

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(x_0;\xi) &= \partial_s \mathcal{A}_H(x_s)|_{s=0} = \partial_s \left(-\int_B u_s^*\omega - \int_0^1 H_t(x_s(t))dt\right)\Bigg|_{s=0} \\ &= -\int_B \partial_s u_s^*\omega\Big|_{s=0} - \int_0^1 \partial_s H_t(x_s(t))|_{s=0}\, dt \end{aligned}$$

$$\partial_s H_t(x_s(t))|_{s=0} = dH_t(x_0(t); \partial_s x_s(t)|_{s=0}) = \omega\left(X_t(x_0(t)), \xi(t)\right) \quad \text{(извод сложене функције)}$$

$$\partial_s u_s^*\omega = u_s^*\left(d(Y \lrcorner \omega) + Y \lrcorner \underbrace{d\omega}_{0}\right) = du_s^*\left(Y \lrcorner \omega\right) \quad \text{(Картанова формула)}$$

гдје је Y векторско поље дефинисано са

$$Y(u_r(p)) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=r} u_s(p).$$

Одавде слиједи

$$d\mathcal{A}_H(x_0;\xi) = -\int_B du_0^*(Y \lrcorner \omega) - \int_0^1 \omega(X_t(x_0(t)), \xi(t))dt,$$

а након примјене Стоксове теореме на први интеграл

$$d\mathcal{A}_H(x_0;\xi) = \int_0^1 \omega(\dot{x}_0(t), Y(x_0(t)))dt - \int_0^1 \omega(X_t(x_0(t)), \xi(t))dt.$$

У случају да је $Y(x_0(t)) = \xi(t)$ доказ је завршен. Међутим, ми можемо изабрати фамилију u_s на такав начин да ово буде задовољено. С обзиром да нам је битно понашање криве $s \mapsto x_s$ у околини 0, можемо претпоставити да је $x_s \equiv c$, $c \in M$ за $s \leqslant -1$, затим дефинишимо фамилију u_s на сљедећи начин

$$u_s\left(e^{2\pi(r+it)}\right) = x_{s+r}(t), \quad r \leqslant 0,\ t \in \mathbb{R}; \qquad u_s(0) = c.$$

И заиста

$$Y(x_0(t)) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} u_s(e^{2\pi it}) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} x_s(t) = \xi(t).$$

□

Из претходног тврђења, x је критична тачка функционала дејства акко

$$(\forall \xi \in T_x\mathcal{L}M)\ \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), \xi(t))dt = 0,$$

што је могуће једино у случају $\dot{x} = X_t(x)$. Па су критичне тачке функционала $\mathcal{A}_H$ елементи скупа $\widetilde{\mathcal{P}}(H) \cap \mathcal{L}M =: \mathcal{P}(H)$ и само они.

4.3 Градијентни ток

Нека је J_t 1-периодична фамилија скоро комплексних структура компатибилних са ω. Тада је $\omega(\cdot, J_t\cdot) =: \langle\cdot,\cdot\rangle_t$ одговарајућа фамилија Риманових метрика. Дефинишимо скаларни производ на простору $T_x\mathcal{L}M = C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, x^*TM)$ са

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_0^1 \langle \xi(t), \eta(t) \rangle_t \, dt.$$

Теорема 25. $\operatorname{grad}\mathcal{A}_H(x)(t) = J_t(x(t))\dot{x}(t) - \nabla H_t(x(t))$.

Доказ. На основу дефиниције градијента (у односу на неку метрику) слиједи

$$\langle \operatorname{grad}\mathcal{A}_H(x), \xi \rangle = d\mathcal{A}_H(x;\xi),$$

$$\int_0^1 \langle \operatorname{grad}\mathcal{A}_H(x)(t), \xi(t) \rangle_t \, dt = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), \xi(t))\, dt,$$

$$\int_0^1 \omega(-J_t \operatorname{grad}\mathcal{A}_H(x)(t), \xi(t))\, dt = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)), \xi(t))\, dt,$$

$$\int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_t(x(t)) + J_t \operatorname{grad} \mathcal{A}_H(x)(t), \xi(t))\, dt = 0.$$

Посљедња једнакост важи за свако ξ, па мора бити задовољено

$$\dot{x}(t) - X_t(x(t)) + J_t \operatorname{grad} \mathcal{A}_H(x)(t) = 0,$$

односно

$$\operatorname{grad} \mathcal{A}_H = J_t \dot{x}(t) - J_t X_t(x(t)), \qquad (J_t^2 = -\operatorname{id}).$$

Да би завршили доказ, потребно је да важи још и једнакост

$$\nabla H_t = J_t X_t, \tag{11}$$

а она важи јер је

$$dH_t(p;\cdot) = \omega(X_t(p),\cdot) = \langle J_t X_t(p), \cdot \rangle .$$

□

По узору на теорију Морса, глатку, једнопатраметарску фамилију петљи $\mathbb{R} \to \mathcal{L}M : s \mapsto u(s,\cdot)$, која је рјешење диференцијалне једначине

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \operatorname{grad} \mathcal{A}_H(u(s,\cdot)) = 0,$$

називамо негативном градијентном линијом. Ову диференцијалну једначину можемо написати у сљедећем облику

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u) = 0. \tag{12}$$

У случају да J_t не зависи од t и да је $H_t \equiv 0$ ово је једначина J-холоморфних кривих. С друге стране, у случају да H_t и u не зависе од t, једначина дефинише (позитиван) градијентни ток функције $H = H_t$.

4.4 Енергија рјешења

Дефиниција 33. Енергија рјешења једначине (12) је

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u)\right|^2 \right) dsdt.$$

Из (11) и (12) слиједи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u) = J_t(u)\frac{\partial u}{\partial s},$$

а одатле

$$\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 = \left|J_t(u)\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u)\right|^2,$$

па енергију рјешења можемо записати и као

$$E(u) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dsdt = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial t} - X_t(u)\right|^2 dsdt.$$

Теорема 26. *Нека је $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ контрактибилно рјешење једначине* (12). *Сљедећа тврђења су еквивалентна*

- $E(u) < \infty$.
- *Постоје периодична рјешења $x^{\pm} \in \mathcal{P}(H)$ таква да је*

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s,t) = x^{\pm}(t),$$

$$\lim_{s\to\pm\infty} \partial_s u(s,t) = 0,$$

  при чему су лимеси униформни по промјенљивој t.

- *Постоје константе $\delta > 0$ и $c > 0$ тако да важи*

$$(\forall s,t \in \mathbb{R})\ |\partial_s u(s,t)| \leqslant ce^{-\delta|s|}.$$

Потребна су нам сљедећа помоћна тврђења.

Лема 18. *Постоје константе $\hbar, c > 0$ (које зависе од (M,ω,H,J)) такве да за свако рјешење $u : B_r \to M$ једначине* (12) *важи*

$$\int_{B_r}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dtds \leqslant \hbar \implies \left|\frac{\partial u}{\partial s}(0)\right|^2 \leqslant cr^2 + \frac{8}{\pi r^2}\int_{B_r}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dtds.$$

Доказ. [22]. □

Лема 19. *Претпоставимо да су 1-периодична рјешења $x \in \mathcal{P}(H)$ недегенерисана. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваку глатку петљу $y : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$,*

$$\int_0^1 |\dot{y}(t) - X_t(y(t))|^2 \, dt < \delta \implies (\exists x \in \mathcal{P}(H)) \sup_t d(x(t), y(t)) < \varepsilon$$

Доказ. [22]. □

Доказ теореме 26. ($1 \Rightarrow 2$) Нека је $r \in \left(0, \sqrt[3]{\hbar}\right)$. Пошто је $E(u) < \infty$, постоји T такво да је $\int_T^{+\infty}\int_0^1 |\partial_s u|^2 < r^3$. Тада је за произвољну лопту $B_r(s,t) \subset (T,+\infty)\times\mathbb{S}^1$ задовољено

$$\int_{B_r(s,t)}\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dtds \leqslant r^3 < \hbar,$$

а на основу леме 18 и

$$|\partial_s u(s,t)|^2 < cr^2 + \frac{8r^3}{\pi r^2} = r\left(cr + \frac{8}{\pi}\right).$$

Пошто можемо изабрати произвољно мало r слиједи да $\partial_s u$ конвергира равномјерно ка 0 кад $s \to +\infty$ (за $-\infty$ доказ је исти). С обзиром да је $|\partial_t u - X_t(u)| = |\partial_s u|$, $\partial_t u - X_t(u)$ конвергира равномјерно (по t) ка 0 кад $s \to \pm\infty$. Користећи лему 19, закључујемо да за довољно велико $|s|$, $u(s,t) \in \bigcup_{x\in\mathcal{P}(H)} B_\varepsilon(x(t))$.

Остаје још да се ослободимо ове уније. Претпоставимо да то не можемо да урадимо. Тада постоје петље $x, y \in \mathcal{P}(H)$ и растући низови индекса $a(n)$ и $b(n)$ такви да је $\mathbb{R} \ni s_{a(n)}, s_{b(n)} \to +\infty$ и

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\, n > N \implies \sup_t d(u(s_{a(n)}, t), x(t)) < \varepsilon, \\ &(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\, n > N \implies \sup_t d(u(s_{b(n)}, t), y(t)) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{13}$$

Нека је

$$3c := \min_{x,y \in \mathcal{P}(H)} \inf_t d\left(x(t), y(t)\right).$$

На основу посљедице 4, $c > 0$. Изаберимо N тако да важе неједнакости (13) за $\varepsilon = c$.

$$(\forall t \in [0,1])\,(\forall n > N)\;\; d(u(s_{a(n)}, t), x(t)) < c \wedge d(u(s_{b(n)}, t), y(t)) < c \wedge d(x(t), y(t)) > 3c.$$

Користећи неједнакост троугла

$$d(x(t), u(s_{a(n)}, t)) + d(u(s_{a(n)}, t), u(s_{b(n)}, t)) + d(u(s_{b(n)}, t), y(t)) \geq d(x(t), y(t)),$$

долазимо до сљедеће неједнакости

$$(\forall t \in [0,1])\,(\forall n > N)\;\; d(u(s_{a(n)}, t), u(s_{b(n)}, t)) > c.$$

Нека је $m(n) := \min\left\{s_{a(n)}, s_{b(n)}\right\}$. Дужина криве која спаја двије тачке није мања од растојања између те двије тачке.

$$(\forall t \in [0,1])\,(\forall n > N)\;\; \left|\int_{s_{a(n)}}^{s_{b(n)}} |\partial_s u(s,t)|\, ds\right| > c,$$

$$(\forall t \in [0,1])\,(\forall n > N)\;\; \int_{m(n)}^{+\infty} |\partial_s u(s,t)|\, ds > c,$$

$$(\forall n > N)\;\; \int_{m(n)}^{+\infty} \int_0^1 |\partial_s u(s,t)|\, dtds = \int_0^1 \int_{m(n)}^{+\infty} |\partial_s u(s,t)|\, dsdt > c$$

Међутим, пошто је $E(u)$ коначан број и пошто $m(n) \to \infty$ кад $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{m(n)}^{+\infty} \int_0^1 |\partial_s u(s,t)|\, dtds = 0.$$

Контрадикција! Овим смо доказали да постоји петља x^+ таква да

$$\lim_{s \to +\infty} u(s,t) = x^+(t), \text{ (равномјерно по } t).$$

Доказ за $-\infty$ је аналоган.

$(2 \Rightarrow 3)$ [23]

$(3 \Rightarrow 1)$ Тривијално.

$\square$

Дефиниција 34 (Модулски простори)**.** Нека су $x, y \in \mathcal{P}(H)$.

$$\mathcal{M}\left(x^-, x^+\right) := \left\{u : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to M \ : \ (12) \wedge \lim_{s\to\pm\infty} u(s,t) = x^{\pm}(t)\right\},$$

$$\mathcal{M} := \{u : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to M \ : \ (12) \wedge E(u) < \infty \wedge u \text{ контрактибилно}\}.$$

Посљедица 5. $\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{M}(x,y)$*, гдје је унија узета по свим паровима* $x, y \in \mathcal{P}(H)$.

Представимо $E(u)$ у још једном облику.

Лема 20. *Ако је* $u \in \mathcal{M}\left(x,y\right)$, *тада*

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y).$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 dtds = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, \nabla H_t(u) - J(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle dtds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, \nabla H_t(u)\right\rangle dtds - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\langle \frac{\partial u}{\partial s}, J(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle dtds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 dH_t(u)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) dtds - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, -\frac{\partial u}{\partial t}\right) dtds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(\int_0^1 H_t(u)dt\right) ds + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) dtds \\
&\overset{①}{=} \int_0^1 H_t(y)dt - \int_0^1 H_t(x)dt + \int_{\mathbb{S}^2} u^*\omega + \int_{B_y} u^*\omega - \int_{B_x} u^*\omega \\
&\overset{②}{=} \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y).
\end{aligned} \tag{14}$$

① Користећи контрактибилност петљи x и y продужили смо пресликавање u на $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \cup B_x \cup B_y$, гдје су B_x, B_y два диска.

② Због асферичности $\int_{\mathbb{S}^2} u^*\omega = 0$; рестрикције u на ∂D_x и ∂D_y су редом x, y.

□

4.5 Конли-Цендеров индекс

У аналогији са Морсовом хомологијом дефинисаћемо Флорову хомологију, тј. хомологију ланчастог комплекса

$$\cdots \xrightarrow{\partial} CF_{k+2}(H,J) \xrightarrow{\partial} CF_{k+1}(H,J) \xrightarrow{\partial} CF_k(H,J) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

који је генерисан петљама из $\mathcal{P}(H)$. Већ ту настаје проблем како распоредити петље у $CF_k(H)$, или другачије, на који начин придружити петљи цио број (тј. индекс групе коју ће да генерише).

Дефинисаћемо функцију (Конли-Цендеров индекс)

$$\mu_H : \mathcal{P}(H) \to \mathbb{Z},$$

која ће ријешити проблем градуисања.

Нека је $Sp(2n)$ група симплектичних $2n \times 2n$ матрица, а $Sp^*(2n)$ скуп оних чије су све сопствене вриједности различите од 1.

Теорема 27. *Постоји јединствено, непрекидно продужење* $\rho : Sp(2n) \to \mathbb{S}^1$ *пресликавања* $\det : U(n) = Sp(2n) \cap O(2n) \to \mathbb{S}^1$ *које има сљедеће особине:*

- $\rho(A \oplus B) = \rho(A)\rho(B)$
- *Ако су* A *и* B *сличне, онда* $\rho(A) = \rho(B)$
- *Ако* A *нема сопствених вриједности на јединичном кругу, тада* $\rho(A) = \pm 1$.

Ову теорему нећемо доказати. За даље референце погледати страну 20 у [23].

Матрица $W^+ = -E(2n)$ је унитарна па је $\rho(W^+) = \det(W^+) = (-1)^n$. Посматрајмо матрицу

$$W^- = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & \\ & -2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -2 & & & & \\ & & & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Она нема сопствених вриједности модула 1, па из особина које одређују ρ слиједи $\rho(W^-) = \pm 1$.

Скуп $Sp^*(2n)$ има двије компоненте повезаности, које су просто повезане. W^+ и W^- припадају различитим компонентама (јер $\det(E - \cdot)$ узима у њима вриједности супротног знака). Одавде, свака матрица из $Sp^*(2n)$ може се спојити путем (кроз $Sp^*(2n)$) са тачно једном од тих матрица.

Дефиниција 35. Конли-Цендеров индекс за пут

$$\Psi : [0,1] \to Sp(2n),\ \Psi(0) = E,\ \Psi(1) \in Sp^*(2n)$$

је број

$$\mu_{CZ}(\Psi) = \deg(\rho(\widetilde{\Psi})^2),$$

гдје је $\widetilde{\Psi} : [0,2] \to Sp(2n)$ продужење пута Ψ такво да је $\widetilde{\Psi}(2) = W^{\pm}$.

Природно се постављају два питања у вези са овом дефиницијом:

- Да ли зависи од продужења $\widetilde{\Psi}$?
- Да ли уопште има смисла израз $\deg(\rho(\widetilde{\Psi})^2)$?

Одговоримо прво на друго питање. Већ смо се увјерили да је $\rho(W^{\pm}) = \pm 1$ (и то $\pm$ не морају бити усаглашени), а одатле $\rho(W^{\pm})^2 = 1$. Дакле, $\rho(\widetilde{\Psi}(\cdot))$ је пресликавање $[0,2] \to \mathbb{S}^1$ које крајеве интревала слика у 1 (тј. у исту тачку), па се може посматрати и као пресликавање $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ које има свој степен.
Независност од продужења је јасна ако се узме у обзир $\pi_1(Sp^*(2n)) = 0$ и чињеница да је степен хомотопска инваријанта.

Навешћемо још једну еквивалентну дефиницију Конли-Цендеровог индекса ([20]).

Лема 21. *За пут* $\Psi_t \in Sp(2n)$, $\Psi_0 = \mathrm{id}$ *симплектичких матрица постоји пут симетричних матрица* S_t *такав да је*

$$\dot{\Psi}_t = J_0 S_t \Psi_t.$$

Важи и обрнуто.

Доказ. Дефинишимо S са

$$S_t := -J_0 \dot{\Psi}_t \Psi_t^{-1}.$$

Ψ_t је пут симплектичких матрица па важи

$$0 = \frac{d}{dt}\Omega = \frac{d}{dt}\left(\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t\right) = \dot{\Psi}_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t + \Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t$$

Користећи $\Omega^{\mathrm{T}} = -\Omega$ закључујемо

$$\left(\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t\right)^{\mathrm{T}} = \Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t,$$

тј. $\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t$ је симетрична.

$$\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t = \Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega J_0 S_t \Psi_t = -\Psi_t^{\mathrm{T}} S_t \Psi_t.$$

Одавде слиједи симетричност матрице са десне стране, тј.

$$\Psi_t^{\mathrm{T}} S_t \Psi_t = \left(\Psi_t^{\mathrm{T}} S_t \Psi_t\right)^{\mathrm{T}} = \Psi_t^{\mathrm{T}} S_t^{\mathrm{T}} \Psi_t.$$

Пошто је Ψ_t инвертибилна и S_t је симетрична.
Обрнуто, диференцирајмо $\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t$ по t.

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t\right) = \dot{\Psi}_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t + \Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \dot{\Psi}_t = \Psi_t^{\mathrm{T}} S_t^{\mathrm{T}} J_0^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t + \Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega J_0 S_t \Psi_t = \Psi_t^{\mathrm{T}} S_t \Psi_t - \Psi_t^{\mathrm{T}} S_t \Psi_t = 0.$$

Што значи да је $\Psi_t^{\mathrm{T}} \Omega \Psi_t$ константно, па је једнако Ω јер је $\Psi_0 = \mathrm{id}$. □

Број $t \in [0,1]$ је тачка пресјецања ако важи $\det(\mathrm{id} - \Psi_t) = 0$. Тачки пресјецања придружимо форму пресјецања

$$\Gamma(\Psi, t) : \ker(\mathrm{id} - \Psi_t) \to \mathbb{R},$$

$$\Gamma(\Psi, t)X = X^{\mathrm{T}} \Omega \dot{(\Psi)}_t X = X^{\mathrm{T}} S_t X.$$

Ако је ова форма недегенерисана кажемо да је тачка пресјецања регуларна. Регуларне тачке пресјецања су изоловане.

Дефиниција 36. Конли-Цендеров индекс за пут $\Psi : [0,1] \to Sp(2n)$, $\Psi_0 = \mathrm{id}$ који има само регуларне тачке пресјецања је број

$$\mu_{CZ}(\Psi) := \frac{1}{2}\operatorname{sign} S_0 + \sum \operatorname{sign}\Gamma(\Psi, t),$$

притом је збир узет по свим тачкама пресјецања.

Наш сљедећи корак је да сваком елементу скупа $\mathcal{P}(H)$ придружимо Конли-Цендеров индекс. Већ смо дефинисали индекс за пут у $Sp(2n)$ чији крајеви немају 1 за сопствену вриједност, стога ћемо петљи прво придружити пут симплектичких матрица.

Нека је $x \in \mathcal{P}(H)$ и $u : B \to M$ неко продужење пресликавања x на диск (због контрактибилности елемената скупа $\mathcal{P}(H)$ продужење постоји). B је контрактибилан па су сва векторска раслојења над њим тривијална. Специјално, u^*TM је тривијално раслојење. Изаберимо симплектичку тривијализацију $\alpha : B \times \mathbb{R}^{2n} \to u^*TM$, тј. тривијализацију за коју важи

$$(\forall z \in B)\, (\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n})\, \omega(\alpha(z, X), \alpha(z, Y)) = X^{\mathrm{T}}\Omega Y,$$

гдје је Ω матрица стандардне симплектичке форме на $\mathbb{R}^{2n}$. Постојање такве тривијализације је предмет сљедећа два тврђења.

Лема 22. *Постоји конексија која чува метрику $\omega(\cdot, J\cdot)$ и скоро комплексну структуру (посљедично чува и ω).*

Доказ. Знамо да постоји конексија која чува било коју метрику, нпр. Леви-Чивита конексија (означимо са ∇ ону која одговара метрици $g(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$), међутим ова конексија не чува J у општем случају. Да бисмо то постигли модификујмо ∇ на сљедећи начин

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \frac{1}{2}\big(\nabla_X Y - J\nabla_X(JY)\big).$$

Или другачије (и несиметричније) записано

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}\big(\nabla_X Y - J\,(\nabla_X J)\,Y - JJ\nabla_X Y\big) = \nabla_X Y - \frac{1}{2}J\,(\nabla_X J)\,Y.$$

И заиста

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{\nabla} J\right) Y &= \widetilde{\nabla}(JY) - J\widetilde{\nabla}Y = \frac{1}{2}\big(\nabla(JY) - J\nabla(JJY)\big) - J\widetilde{\nabla}Y \\ &= \frac{1}{2}\big(\nabla(JY) + J\nabla Y\big) - J\widetilde{\nabla}Y = J\widetilde{\nabla}Y - J\widetilde{\nabla}Y = 0.\end{aligned}$$

Докажимо сада да $\widetilde{\nabla}$ чува и g, али прије тога изведимо пар идентитета.

$$0 = \nabla(-\mathrm{id}) = \nabla\left(J^2\right) = J\nabla J + (\nabla J)J \tag{15}$$

$$\begin{aligned}Z\big(\omega(X,Y)\big) &= Z\big(\omega(JX,JY)\big) = Z\big(g(JX,Y)\big) = g(\nabla(JX),Y) + g(JX,\nabla Y) \\ &= g\big((\nabla J)X + J\nabla X, Y\big) + g(JX,\nabla Y) \\ &= \omega\big((\nabla J)X, JY\big) + \omega(J\nabla X, JY) + \omega(JX, J\nabla Y) \\ &= \omega\big((\nabla J)X, JY\big) + \omega(\nabla X, Y) + \omega(X, \nabla Y)\end{aligned} \tag{16}$$

С друге стране мијењајући улоге X и Y и користећи антисиметричност ω добијмо

$$Z\big(\omega(JX,JY)\big)=\omega\big(JX,(\nabla J)Y\big)+\omega(X,\nabla Y)+\omega(\nabla X,Y). \tag{17}$$

Из (16) и (17) слиједи

$$\omega\big((\nabla J)X,JY\big)=\omega\big(JX,(\nabla J)Y\big). \tag{18}$$

Пошто већ знамо да ∇ чува g, довољно је доказати

$$g\left(\widetilde{\nabla}X,Y\right)+g\left(X,\widetilde{\nabla}Y\right)=g\left(\nabla X,Y\right)+g\left(X,\nabla Y\right).$$

$$g\left(\widetilde{\nabla}X,Y\right)=\omega\left(\widetilde{\nabla}X,JY\right)=\omega(\nabla X,JY)-\frac{1}{2}\omega((\nabla J)X,Y)=g\left(\nabla X,Y\right)-\frac{1}{2}\omega((\nabla J)X,Y)$$

$$g\left(X,\widetilde{\nabla}Y\right)=\omega(X,J\nabla Y)+\frac{1}{2}\omega(X,(\nabla J)Y)=g\left(X,\nabla Y\right)+\frac{1}{2}\omega(X,(\nabla J)Y)$$

Сљедеће једнакости завршавају доказ

$$\begin{aligned}\omega((\nabla J)X,Y)=\omega((\nabla J)X,J(-J)Y)&\overset{①}{=}\omega(JX,(\nabla J)(-J)Y)\\&\overset{②}{=}\omega(JX,J(\nabla J)Y)=\omega(X,(\nabla J)Y).\end{aligned}$$

① важи због (18), а ② због (15). □

Лема 23. *Постоји симплектичка тривијализација* $\alpha: B\times\mathbb{R}^{2n}\to u^*TM$.

Доказ. Нека је $\alpha(0,\cdot):\mathbb{R}^{2n}\to(u^*TM)_{u(0)}$ изоморфизам. Пошто је ω антисиметрична, недегенерисана, билинеарна форма

$$\omega(\alpha(0,X),\alpha(0,Y))=X^{\mathrm{T}}\Omega_1 Y,$$

за неку антисиметричну, недегенерисану матрицу Ω_1. Постоји $S\in GL(\mathbb{R},2n)$ таква да је $S^{\mathrm{T}}\Omega_1 S=\Omega$. Мијењајући α са $\alpha(\cdot,S\cdot)$ можемо постићи да умјесто Ω_1 буде Ω. Тај нови изоморфизам означићемо исто са α.
Нека је

$$\tau_{re^{i\varphi}}:T_{u(0,0)}M\to T_{u(re^{i\varphi})}M,$$

паралелни транспорт дуж криве $\gamma(t)=te^{i\varphi}$ у односу на конексију $\widetilde{\nabla}$ из леме 22. Тривијализацију дефинишемо са

$$\alpha(z,X):=\tau_z\circ\alpha(0,X).$$

Провјеримо да су услови задовољени.

$$\omega(\alpha(z,X),\alpha(z,Y))=\omega(\tau_z\circ\alpha(0,X),\tau_z\circ\alpha(0,Y))=\omega(\alpha(0,X),\alpha(0,Y))=X^{\mathrm{T}}\Omega Y.$$

□

Довршимо дефиницију Конли-Цендеровог индекса за петље. Посматрајмо дијаграм

$$\begin{array}{ccc} T_{x(0)}M & \xrightarrow{d\phi_t(x(0))} & T_{x(t)}M \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha(1,\cdot)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \alpha(e^{2\pi i t},\cdot)} \\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{\Psi(t)} & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Нека је

$$\Psi(t) := \left(\alpha(e^{2\pi i t}, \cdot)\right)^{-1} \circ d\phi_t(x(0)) \circ \alpha(1, \cdot).$$

$\Psi(t)$ је фамилија симплектичких пресликавања (матрица). Пошто важи

$$\Psi(1) := (\alpha(1, \cdot))^{-1} \circ d\phi_1(x(0)) \circ \alpha(1, \cdot),$$

пресликавања $\Psi(1)$ и $d\phi_1(x(0))$ су слична па имају исте сопствене вриједности. Због недегенерисаности петље x, $d\phi_1(x(0))$ нема 1 за сопствену вриједност а одавде ни $\Psi(1)$. ϕ_0 је идентитет, а то повлачи $\Psi(0) = E$. Другим ријечима, пут симплектичких матрица $\Psi(t)$ задовољава све услове из дефиниције Конли-Цендеровог индекса.

Дефиниција 37. Конли-Цендеров индекс за петљу $x \in \mathcal{P}(H)$ је

$$\mu_H(x) := n - \mu_{CZ}(\Psi),$$

гдје је Ψ фамилија симплектичких матрица из претходне конструкције.

Дефиниција је добра захваљујући асферичности. Изостављајући тај услов за различите дискове чија је граница посматрана петља добијамо различите индексе.

4.6 Флорова хомологија

Сада смо спремни да дефинишемо Флорову хомологију у потпуној аналогији са Морсовом. Претпоставимо да важе услови регуларности за H и J о којима ће касније бити више ријечи, а засад се задовољимо чињеницом да се они могу постићи варирајући само J или само H. $CF_k(H, J)$ је $\mathbb{Z}_2$ векторски простор генерисан са

$$\{x \in \mathcal{P}(H) \;:\; \mu_H(x) = k\}.$$

$$(x \in \mathcal{P}(H)) \quad \partial x := \sum_{\mu_{CZ}(y) = \mu_{CZ}(x) - 1} n(x, y) y,$$

гдје је $n(x, y)$ број тачака многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(y, x)$ (видјети теорему 31). Након продужавања по линеарности добијамо гранични оператор, јер из коментара након теореме 35 на основу истог аргумента као и за Морсов случај добијамо $\partial^2 = 0$. Хомологију овако конструисаног ланчастог комплекса називамо Флоровом (ознака: $HF_*(H, J)$). Има смисла рећи „Флорова хомологија многострукости M", јер важи

Теорема 28. *Нека су (H^α, J^α), $\left(H^\beta, J^\beta\right)$ и (H^γ, J^γ) парови који задовољавају услове регуларности. Тада постоји природан изоморфизам*

$$\Phi^{\beta\alpha} : HF_*(M, \omega, H^\alpha, J^\alpha) \to HF_*\left(M, \omega, H^\beta, J^\beta\right).$$

И притом важи

$$\Phi^{\gamma\alpha} = \Phi^{\gamma\beta}\Phi^{\beta\alpha}, \quad \Phi^{\alpha\alpha} = \mathrm{id}.$$

Конструкција је иста као за Морсов случај. За детаље погледати [23].

Одавде одмах слиједи

$$\#\mathcal{P}(H) \geqslant \sum \dim HF_k(H, J).$$

А ово је доказ Арнолдове хипотезе, јер за аутономан Хамилтонијан H који је уз то и Морс-Смејлова функција у односу на метрику индуковану са (такође аутономним) J постоји $t > 0$ такво да се Флорова хомологија $HF_*(tH, J)$ своди на Морсову $HM_*(tH, \omega(\cdot, J\cdot))$ (за коју смо се већ увјерили да је изоморфна сингуларној). Притом, под „своди" подразумијевамо подударање свих елемената из конструкције ових хомологија (нпр. периодичне орбите су критичне тачке, Конли-Цендеров индекс - Морсов индекс, . . .).

У наредним потпоглављима размотрићемо детаљније нека од тврђења која смо овдје навели.

4.7 Многострукост $\mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$

Теорема 29. *Постоји густ скуп $J_{reg} \subset C^\infty(\mathrm{End}(TM))$ скоро комплексних структура таквих да је $\mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$ многострукост димензије $\mu_H(x^-) - \mu_H(x^+)$ за свако $J \in J_{reg}$ и $x^\pm \in \mathcal{P}(H)$.*

Треба доказати да за свако $u \in \mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$ постоји околина дифеоморфна $\mathbb{R}^{\dim}$. Искористићемо теорему о имплицитној функцији за бесконачно димензиони случај, што значи да нам је потребан амбијент.

Нека је

$$\mathcal{X}_u \subset C^\infty\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, u^*TM\right)$$

векторски простор свих векторских поља која експоненцијално опадају кад $s \to \pm\infty$. Експоненцијално пресликавање је локални дифеоморфизам, па се свака функција $u_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ довољно близу u која задовољава исте (као u) граничне услове може на јединствен начин представити као $\exp_u(\xi)$, за $\xi \in \mathcal{X}_u$. Одавде, елементи скупа $\mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$ у близини u могу се видјети као нуле функције

$$\mathcal{F}_u : \mathcal{X}_u \to \mathcal{X}_u,$$

$$\mathcal{F}_u(\xi) = \tau_u(\xi)^{-1}\overline{\partial}_{H,J}(\exp_u(\xi)),$$

притом $\tau_u(\xi) : T_uM \to T_{\exp_u(\xi)}M$ означава паралелни транспорт дуж геодезијске $t \mapsto \exp_u(t\xi)$, а

$$\overline{\partial}_{H,J}(u) := \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u).$$

Диференцијал од $\mathcal{F}_u$ у 0 је оператор

$$D_u : \mathcal{X}_u \to \mathcal{X}_u,$$

$$D_u\xi = \nabla_s\xi + J(u)\nabla_t\xi + \left(\nabla_\xi J\right)(u)\partial_t u + \nabla_\xi \nabla H(u, t). \tag{19}$$

Нека је $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{2n} \to u^*TM$ тривијализација раслојења u^*TM таква да важи

$$\omega\left(\alpha_{s,t}X, \alpha_{s,t}Y\right) = X^{\mathrm{T}}\Omega Y, \quad J \circ \alpha_{s,t} = J_0.$$

Тада је

$$DX := \alpha^{-1}D_u(\alpha X) = \alpha^{-1}\big(\nabla_s(\alpha X) + J(u)\nabla_t(\alpha X) + \left(\nabla_{\alpha X}J\right)(u)\partial_t u + \nabla_{\alpha X}\nabla H(u,t)\big).$$

Примјењујући Лајбницово правило

$$\begin{aligned} DX &= \alpha^{-1}\big((\nabla_s\alpha)X + \alpha\partial_s X + J(u)(\nabla_t\alpha)X + J\alpha\partial_t X + \left(\nabla_{\alpha X}J\right)(u)\partial_t u + \nabla_{\alpha X}\nabla H(u,t)\big) \\ &= \partial_s X + J_0\partial_t X + \alpha^{-1}\big((\nabla_s\alpha)X + J(u)(\nabla_t\alpha)X + \left(\nabla_{\alpha X}J\right)(u)\partial_t u + \nabla_{\alpha X}\nabla H(u,t)\big). \end{aligned}$$

Трећи сабирак означимо са SX, тј. $DX = \partial_s X + J_0\partial_t X + SX$. Матрице $S_{s,t}$ су до на компактну пертурбацију симетричне, па не умањујући општост можемо претпоставити да су симетричне увијек (јер се Фредхолмовост не мијења при сабирању са компактним оператором, штавише не мијења се ни индекс Фредхолмовог оператора, а то је оно шта нас овдје интересује). Симетричним матрицама $S_{s,t}$ можемо придружити симплектичке матрице $\Psi_{s,t}$ на начин описан лемом 21, прецизније

$$J_0\partial_t\Psi_{s,t} + S_{s,t}\Psi_{s,t} = 0, \quad \Psi_{s,0} = \mathrm{id}\,.$$

Теорема 30. *Ако је* $\det\left(\mathrm{id} - \Psi^{\pm}(1)\right) \neq 0$*, тада је горе дефинисани оператор*

$$D : W^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n})$$

Фредхолмов.

Притом су $W^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n})$ и $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n})$ комплетирања простора $\alpha^{-1}\mathcal{X}_u$ у нормама

$$\|\xi\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \|\xi\|_{W^{1,2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 |\xi|^2 + |\partial_s\xi|^2 + |\partial_t\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

и матрице $\Psi^{\pm}$ су дефинисане са

$$\lim_{s \to \pm\infty} \Psi_{s,t} = \Psi^{\pm}_t.$$

Доказ ове теореме одлажемо за сљедеће потпоглавље.

Слично као за пут симплектичких матрица, тачка пресјецања за пут оператора $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ је сваки реалан број s за који $\ker A(s) \neq \{0\}$. У тачки пресјецања дефинишемо форму пресјецања са

$$\Gamma(A,s)\xi := \left\langle \xi, \dot{A}(s)\xi \right\rangle_H .$$

Тачка пресјецања је регуларна ако је одговарајућа форма недегенерисана.

Дефиниција 38. Спектрални ток фамилије оператора $s \mapsto A(s)$ са само регуларним тачкама пресјецања је

$$\mu^{spec}(A) := \sum \operatorname{sing} \Gamma(A, s),$$

гдје се сабира по свим тачкама пресјецања.

Посматрајмо оператор $A = J_0 \frac{\partial}{\partial t} + S(s, \cdot) : W^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2n}) \to L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}; \mathbb{R}^{2n})$ (тада је $D = \partial_s + A(s)$). Под одређеним условима које пут оператора $A(s)$ задовољава (видјети [21]) индекс Фредхолмовог оператора D је једнак $\mu^{spec}(A)$. Довешћемо у везу $\mu^{spec}(A)$ са Конли-Цендеровим индексом.

Лема 24. *$A(s)$ има исте тачке пресјецања као и пут симплектичких матрица $s \mapsto \Psi_{s,1}$ и одговарајуће форме пресјецања су изоморфне.*

Доказ. Доказаћемо да $\xi \in \ker A(s)$ ако и само ако је $\xi(t) = \Psi_{s,t}\xi_0$ за неко $\xi_0 \in \ker(\mathrm{id} - \Psi_{s,1})$.
($\Longleftarrow$) Пошто је $\xi_0 = \Psi_{s,1}\xi_0$ пресликавање $t \mapsto \Psi_{s,t}\xi_0$ има домен $\mathbb{S}^1$.

$$\frac{d}{dt}(\Psi_{s,t}\xi_0) = \partial_t \Psi_{s,t}\xi_0 = J_0 S_{s,t} \Psi_{s,t}\xi_0.$$

Односно $A(\Psi(s, \cdot)\xi_0) = 0$.
($\Longrightarrow$) Ако је $\xi(t) \in \ker A(s)$ тада су $\xi(t)$ и $t \mapsto \Psi_{s,t}\xi(0)$ рјешења диференцијалне једначине

$$J_0 \frac{dx}{dt} + S_{s,t} = 0$$

са истим почетним условима $\xi(0) = \Psi_{s,0}\xi(0)$, што значи да су идентична (на основу теореме о јединствености). Специјално, пошто је $\xi(t)$ 1-периодично

$$\xi(0) = \xi(1) = \Psi_{s,1}\xi(0),$$

па $\xi(0) \in \ker(\mathrm{id} - \Psi_{s,1})$. Одавде слиједи

$$\ker A(s) = \{0\} \iff \ker(\mathrm{id} - \Psi_{s,1}) = \{0\},$$

тј. тачке пресјецања се поклапају.
Пресликавање

$$\xi \mapsto \xi(0)$$

је изоморфизам између $\ker A(s)$ и $\ker(\mathrm{id} - \Psi_{s,1})$. Доказаћемо да овај изоморфизам преводи једну форму пресјецања у другу, тј. да важи

$$\Gamma(A, s)(\xi) = \Gamma(\Psi(\cdot, 1), s)\xi(0).$$

Означимо са $\widehat{S}_{s,t}$ фамилију симетричних матрица одређених са

$$\frac{\partial}{\partial s}\Psi_{s,t} = J_0 \widehat{S}_{s,t} \Psi_{s,t}. \tag{20}$$

Тада је

$$\begin{aligned}
\partial_t(\Psi^{\mathrm{T}}\widehat{S}\Psi) &= (\partial_t\Psi)^{\mathrm{T}}\widehat{S}\Psi + \Psi^{\mathrm{T}}\partial_t(\widehat{S}\Psi) = (J_0 S\Psi)^{\mathrm{T}}\widehat{S}\Psi - \Psi^{\mathrm{T}}\partial_t(J_0\partial_s\Psi) \\
&= -\Psi^{\mathrm{T}} S J_0 \widehat{S}\Psi - \Psi^{\mathrm{T}} J_0 \partial_s\partial_t\Psi = -\Psi^{\mathrm{T}} S \partial_s\Psi - \Psi^{\mathrm{T}} J_0 \partial_s(J_0 S\Psi) \\
&= -\Psi^{\mathrm{T}} S\partial_s\Psi + \Psi^{\mathrm{T}}\partial_s(S\Psi) = \Psi^{\mathrm{T}}\partial_s S\Psi.
\end{aligned}$$

Интегралећи по t од 0 до 1 добијамо

$$\Psi_{s,1}^{\mathrm{T}} \widehat{S}_{s,1} \Psi_{s,1} - \Psi_{s,0}^{\mathrm{T}} \widehat{S}_{s,0} \Psi_{s,0} = \int_0^1 \Psi_{s,t}^{\mathrm{T}} \partial_s S_{s,t} \Psi_{s,t} dt.$$

Остаје још да примијетимо да је $\Psi_{s,0}^{\mathrm{T}} \widehat{S}_{s,0} \Psi_{s,0} = 0$ (због $\Psi_{s,0} = \mathrm{id}$ и (20)) и $\frac{d}{ds} A = \partial_s S$ (јер оператор $J_0 \partial_t$ не зависи од s). $\square$

Лема 25. $\operatorname{index} D = \mu_{CZ}(\Psi^+) - \mu_{CZ}(\Psi^-)$.

Доказ. [23]. $\square$

Из бесконачно-димензионе теореме о имплицитној функцији и претходних лема слиједи да је $\mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$ многострукост димензије наведене у теореми 29 ако је оператор D_u (дефинисан у (19)) НА за свако $u \in \mathcal{M}(H, J)$. Скуп свих скоро комплексних структура сагласних са ω за које је овај услов задовољен (за фиксан Хамилтонијан H) означимо са $J_{reg}(H)$.

Лема 26. *J_{reg} је густ у $C^\infty(\mathrm{End}(TM))$.*

Специјално, трансверзалност можемо постићи модификујући само J.
Помоћу $\mathbb{R}$ дејства $u(\cdot, \cdot) \mapsto u(\cdot + s, \cdot)$ на елементе многострукости $\mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)$ можемо смањити димензију за 1. Случај који је нама интересантан изражава сљедећа

Теорема 31. *Ако је $J \in J_{reg}$ и $\mu_H(x^-) - \mu_H(x^+) = 1$ тада је*

$$\widehat{\mathcal{M}}(x^-, x^+; H, J) = \mathcal{M}(x^-, x^+; H, J)/\mathbb{R}$$

0-димензиона, компактна многострукост тј, коначан скуп тачака.

4.8 Фредхолмова теорија

У овом потпоглављу изложићемо доказ теореме 30 пратећи [21]. Означимо просторе $L^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n})$ и $W^{1,2}(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^{2n})$ редом са H и W (у овом дијелу нећемо спомињати Хамилтонијан H). Ови простори су Хилбертови и инклузија $W \hookrightarrow H$ је компактна са густим рангом. Нека је

$$A(s) : W \to H,$$
$$A(s)\xi := J_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} + S\xi.$$

Тада је оператор D једнак $\partial_s + A(s)$. A има сљедеће особине

- $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(W, H)$ је непрекидно диференцијабилан у слабој операторској топологији и

$$(\exists c_0 > 0)\, (\forall t \in \mathbb{R})\, (\forall \xi \in W)\ \|A(s)\xi\|_H + \|\partial_s A(s)\xi\|_H \leqslant c_0 \|\xi\|_W. \tag{21}$$

- Ако посматрамо A као неограничен оператор на H са доменом W, A је самоадјунгован и

$$(\exists c_1 > 0)\, (\forall t \in \mathbb{R})\, (\forall \xi \in W)\ \|\xi\|_W^2 \leqslant c_1 \left(\|A(s)\xi\|_H^2 + \|\xi\|_H^2\right). \tag{22}$$

- Постоје инвертибилни оператори $A^{\pm} \in \mathcal{L}(W,H)$ такви да

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\|A(s) - A^{\pm}\right\|_{\mathcal{L}(W,H)} = 0. \tag{23}$$

Дефинишимо и Хилбертове просторе ($T > 0$)

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, H), \quad \mathcal{W} = L^2(\mathbb{R}, W) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}, H),$$

$$\mathcal{H}(T) = L^2([-T,T], H), \quad \mathcal{W}(T) = L^2([-T,T], W) \cap W^{1,2}([-T,T], H),$$

са нормама (редом)

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\xi(t)\|^2_H \, dt, \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{W}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\|\xi(t)\|^2_W + \left\|\dot{\xi}(t)\right\|^2_H \right) dt.$$

Лема 27. *Нека су X, Y и Z Банахови простори, $F : X \to Y$ ограничен, а $K : X \to Z$ компактан оператор. Ако постоји $c > 0$ такво да је*

$$\|\xi\|_X \leqslant c \left(\|F\xi\|_Y + \|K\xi\|_Z \right) \tag{24}$$

за $\xi \in X$, тада је ранг оператора F затворен и језгро му је коначно-димензионо.

Доказ. Нека је $\{\xi_k\}$ низ јединичних вектора из $\ker F$. Пошто је $\xi_l - \xi_k \in \ker F$ и (24)

$$\|\xi_l - \xi_k\|_X \leqslant c \|K\xi_l - K\xi_k\|_Z .$$

Одавде, из Кошијевости (под)низа $K\xi_k$ слиједи Кошијевост (под)низа ξ_k. Пошто је K компактан и ξ_k ограничен, низ $K\xi_k$ има конвергентан подниз, а на основу претходне реченице и низ ξ_k има конвергентан подниз. Управо смо доказали да је сфера у $\ker F$ компактна, но то је особина искључиво коначно-димензионих простора.
Докажимо да је ранг затворен. Нека је α_k низ у X такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} F\alpha_k = \beta$. Ако је α_k ограничен, тада постоји његов подниз (означен исто) такав да $K\alpha_k$ конвергира. Тада, користећи опет (24),

$$\|\alpha_l - \alpha_k\| \leqslant c \left(\|F\alpha_l - F\alpha_k\| + \|K\alpha_l - K\alpha_k\| \right).$$

Знамо да су $F\alpha_k$ и $K\alpha_k$ Кошијеви, слиједи и α_k је Кошијев, тј. конвергира (ка неком α). F је непрекидан, па је $F\alpha = \beta$.
Претпоставимо сада да α_k није ограничен. На основу теореме о комплетирању постоји затвирен потпростор V такав да је $X = \ker F \oplus V$. Ако постоји подниз од α_k у $\ker F$ тада је $\beta = 0 = F0$. Претпоставимо да такав подниз не постоји, тада постоји подниз чији елементи имају ненула пројекције на V и чије норме формирају строго растући низ. Посматрајмо низ γ_k тих пројекција (F има исту вриједност на вектору и на његовој пројекцији на V). Низ $\dfrac{\gamma_k}{\|\gamma_k\|}$ је ограничен, па понављајући претходни аргумент има подниз који конвергира ка неком γ ($\in V$ јер је V затворен). Тада

$$F\gamma = \lim_{k\to\infty} F\left(\frac{\gamma_k}{\|\gamma_k\|}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{F\gamma_k}{\|\gamma_k\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta}{\|\gamma_k\|} = 0.$$

Одавде, $\gamma \in \ker F \cap V = \{0\} \Rightarrow \gamma = 0$. Али ово је контрадикција јер

$$0 = \|\gamma\| = \left\| \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k}{\|\gamma_k\|} \right\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \frac{\gamma_k}{\|\gamma_k\|} \right\| = 1.$$

$\square$

Лема 28. *За свако $T > 0$ инклузија $\mathcal{W}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}(T)$ је компактан оператор.*

Доказ. [21]. $\square$

Лема 29. *Постоје константе $c, T > 0$ такве да је*

$$\|\xi\|_{\mathcal{W}} \leqslant c\left(\|\xi\|_{\mathcal{H}(T)} + \|D\xi\|_{\mathcal{H}}\right) \tag{25}$$

за свако $\xi \in \mathcal{W}$.

Доказ. Прво ћемо доказати оцјену за $T = \infty$. Нека је $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$.

$$\begin{aligned}
\|D\xi\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\partial_s\xi + A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\partial_s\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\partial_s\xi, A\xi\rangle\, ds \\
&\overset{①}{=} \|\partial_s\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\langle\xi, \partial_s A\xi\rangle\, ds \overset{②}{\geqslant} \|\xi\|_{\mathcal{H}} + \|A\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0\|\xi\|_{\mathcal{H}}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \\
&\overset{③}{\geqslant} \|\partial_s\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{c_1}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 - c_0\|\xi\|_{\mathcal{H}}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \\
&\overset{④}{\geqslant} \|\partial_s\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2c_1}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - \left(1 + \frac{c_0^2 c_1}{2}\right)\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \overset{⑤}{\geqslant} \frac{1}{2c_1}\|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 - c\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2
\end{aligned}$$

① $\partial_s\langle\xi, A\xi\rangle = \langle\partial_s\xi, A\xi\rangle + \langle\xi, \partial_s(A)\xi\rangle + \langle\xi, A\partial_s\xi\rangle = 2\langle\partial_s\xi, A\xi\rangle + \langle\xi, \partial_s(A)\xi\rangle$
У посљедњој једнакости користили смо да је A самоадјунгован. ξ је са компактним носачем па

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_s\langle\xi, A\xi\rangle = \langle\xi, A\xi\rangle|_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

② Користимо Коши-Шварцову неједнакост, а затим $\|\partial_s A\xi\|_{\mathcal{H}} \leqslant c_0\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}$, што је посљедица (21).

③ због (22)

④ Дијелећи неједнакост

$$0 \leqslant \left(\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} - c_0c_1\|\xi\|_{\mathcal{H}}\right)^2 = \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - 2c_1c_0\|\xi\|_{\mathcal{H}}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} + c_0^2c_1^2\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2$$

са $2c_1$ добијамо

$$\frac{1}{2c_1}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 - c_0\|\xi\|_{\mathcal{H}}\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} \geqslant -\frac{c_0^2c_1}{2}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

⑤ $\|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 = \|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)}^2 + \|\partial_s\xi\|_{\mathcal{H}}^2, \quad c = 1 + \frac{c_0^2c_1}{2}$, и константу c_1 можемо изабрати већу од 1.

$C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$ је густ у $\mathcal{H}$ и у $\mathcal{W}$, па је овим доказана неједнакост у овом случају.

Ако је $A(s) = A_0$ константан, бијективан оператор, докажимо да важи

$$\|\xi\|_{\mathcal{W}} \leqslant c\|D\xi\|_{\mathcal{H}}. \tag{26}$$

Означимо са $\hat{\xi}$ Фуријеову трансформацију од ξ. Тада је

$$i\omega\hat{\xi}(\omega) + A_0\hat{\xi}(\omega) = \widehat{D(\xi)}(\omega).$$

Примјењујући Коши-Шварцову неједнакост и користећи $\langle A_0\zeta, \zeta\rangle \in \mathbb{R}$ (због симетричности оператора A_0) добијамо

$$\|i\omega\zeta + A_0\zeta\|_H \|\zeta\|_H \geqslant |\langle i\omega\zeta + A_0\zeta, \zeta\rangle| = \left|i\omega \|\zeta\|_H^2 + \langle A_0\zeta, \zeta\rangle\right| \geqslant \left|i\omega \|\zeta\|_H^2\right| = |\omega| \|\zeta\|_H^2,$$

односно

$$|\omega| \|\zeta\|_H \leqslant \|i\omega\zeta + A_0\zeta\|_H. \tag{27}$$

Нека је $c = \left\|A_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H,W)}$.

$$\|\xi\|_W \leqslant c \|A_0\xi\|_H$$

Искористићемо $\|\xi\|_{\mathcal{H}} = \left\|\hat{\xi}\right\|_{\mathcal{H}}$ и $\|\xi\|_{L^2(\mathbb{R},W)} = \left\|\hat{\xi}\right\|_{L^2(\mathbb{R},W)}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\hat{\xi}\right\|_W^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty}\|\xi\|_W^2\, ds \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 \|A_0\xi\|_H^2\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 \left\|A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 d\omega \\ &\leqslant c^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 + \omega^2 \left\|\hat{\xi}\right\|_H^2\right) d\omega \overset{①}{=} c^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\left\|i\omega\hat{\xi} + A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 d\omega\end{aligned} \tag{28}$$

① јер је A_0 симетричан па је збир посљедња два сабирка у сљедећој једнакости 0.

$$\left\|i\omega\hat{\xi} + A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 = \left\|i\omega\hat{\xi}\right\|_H^2 + \left\|A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 + \left\langle i\omega\hat{\xi}, A_0\hat{\xi}\right\rangle + \left\langle A_0\hat{\xi}, i\omega\hat{\xi}\right\rangle$$

Користећи (27) ($\zeta = \hat{\xi}$) и (28) добијамо

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{W}}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\|\xi\|_W^2 + \|\partial_s\xi\|_H^2\right) ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\hat{\xi}\right\|_W^2 + \left\|\widehat{\partial_s\xi}\right\|_H^2\right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\hat{\xi}\right\|_W^2 + \omega^2\left\|\hat{\xi}\right\|_H^2\right) d\omega \leqslant (c^2+1)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|i\omega\hat{\xi} + A_0\hat{\xi}\right\|_H^2 ds \\ &= (1+c^2)\|D\xi\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Докажимо сада лему. Због (23) и (26), постоје константе $c, T > 0$ такве да за свако $\xi \in \mathcal{W}$ важи

$$\xi(s) = 0 \text{ за } |s| \leqslant T-1 \quad \Longrightarrow \quad \|\xi\|_{\mathcal{W}} \leqslant c\|D\xi\|_{\mathcal{H}}. \tag{29}$$

Нека је $\beta : \mathbb{R} \to [0,1]$ глатка функција таква да је $\beta(s) = 0$ за $|s| \geqslant T$ и $\beta(s) = 1$ за $|s| \leqslant T-1$. На $\beta\xi$ примјењујемо већ доказану неједнакост за $T = \infty$, а на $(1-\beta)\xi$ (29).

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{W}} &= \|\beta\xi + (1-\beta)\xi\|_{\mathcal{W}} \leqslant \|\beta\xi\|_{\mathcal{W}} + \|(1-\beta)\xi\|_{\mathcal{W}} \\ &\leqslant c_1\left(\|\beta\xi\|_{\mathcal{H}} + \|D\beta\xi\|_{\mathcal{H}} + \|D(1-\beta)\xi\|_{\mathcal{H}}\right) \\ &\leqslant c_2\left(\|\beta\xi\|_{\mathcal{H}(T)} + \|D\xi\|_{\mathcal{H}}\right).\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 32. *Претпоставимо да $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ задовољавају $\langle \partial_s \phi - A\phi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \phi, \eta \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ за сваку функцију $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, W)$. Тада $\xi \in \mathcal{W}$ и $D\xi = \eta$.*

Доказ. [21]. □

Теорема 33. *Оператор D је Фредхолмов.*

Доказ. На основу лема 27 ,28 и 29, D има коначно-димензионо језгро и затворен ранг. Пошто важи теорема 32, ко-језгро оператора D је језгро орератора $\partial_s - A : \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ које је коначно-димензионо јер на овај оператор можемо примијенити исте аргументе као за D. □

4.9 Компактност

Теорема 34. *За сваки низ $u_n \in \mathcal{M}$ (дефиниција 34) и за сваки компактан подскуп $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ постоји подниз (од $\{u_n\}$) који са изводима конвергира равномјерно ка $u \in \mathcal{M}$ на K.*

Користићемо сљедећу лему чији се доказ може наћи у [22].

Лема 30. *Нека је $G \subset \mathbb{C}$ отворен домен. Тада за сваки низ глатких рјешења $u_k : G \to M$ једначине* (12) *који задовољава*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\nabla u_k\|_{L^\infty(G)} < \infty$$

и сваки компактан подскуп $K \subset G$ постоји подниз који конвергира равномјерно са својим изводима на K.

Притом

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(G)} = \sup \left\{ \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial s}(s,t) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial t}(s,t) \right| \right\} \ : \ (s,t) \in G \right\}.$$

Доказ теореме 34. Због леме 30 довољно је доказати

$$\sup_{u \in \mathcal{M}} \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{C})} < \infty.$$

Претпоставимо супротно. Тада постоји низ $u_k \in \mathcal{M}$ такав да

$$c_k := \|\nabla u_k\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \to \infty.$$

Наравно, из теореме 26 слиједи да је за свако $k \in \mathbb{N}$ број c_k ограничен. Нека је

$$v_k(z) := u_k \left(z_k + \frac{z}{c_k} \right),$$

гдје је $z_k = s_k + it_k$ такав да важи

$$|\nabla u_k(z_k)| := \max \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial s}(z_k) \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial t}(z_k) \right| \right\} \geqslant \frac{c_k}{2}.$$

Пошто је

$$\frac{\partial v_k}{\partial s}(z) = \frac{1}{c_k}\frac{\partial u_k}{\partial s}\left(z_k + \frac{z}{c_k}\right), \quad \frac{\partial v_k}{\partial t}(z) = \frac{1}{c_k}\frac{\partial u_k}{\partial t}\left(z_k + \frac{z}{c_k}\right),$$

v_k задовољава сљедеће

$$|\nabla v_k(0)| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \|\nabla v_k\|_{L^\infty(\mathbb{C})} < \infty, \tag{30}$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial s} + J(v_k)\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{1}{c_k}\nabla H\left(v_k, t_k + \frac{t}{c_k}\right) = 0, \tag{31}$$

$$\int_{B_{c_k}(0)}\left|\frac{\partial v_k}{\partial s}\right|^2 = \int_{B_1(z_k)}\left|\frac{\partial u_k}{\partial s}\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_k-1}^{t_k+1}\left|\frac{\partial u_k}{\partial s}\right|^2 dtds \overset{①}{=} 2E(u_k) \overset{②}{\leqslant} C. \tag{32}$$

① јер је $u_k(s,t)$ 1-периодично по t,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_k-1}^{t_k}\left|\frac{\partial u_k}{\partial s}\right|^2 dtds = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{t_k}^{t_k+1}\left|\frac{\partial u_k}{\partial s}\right|^2 dtds = E(u_k).$$

② због леме 20.

Из (30) и (31) слиједи да низ v_k задовољава услове леме 30 (не баш јер Хамилтонијани нису исти за све чланове низа, али и у овом случају важи лема 30, тј. њен аналог), па постоји подниз који (са изводима) конвергира равномјерно на компактним подскуповима од $\mathbb{C}$. Гранична функција $v : \mathbb{C} \to M$ је глатка и задовољава

$$\nabla v(0) \neq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial s} + J(v)\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \int_{\mathbb{C}}\left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 < \infty.$$

Пошто v има коначну површину (неједнакост из посљедњег реда) на основу теореме о отклањању сингуларитета (теорема 3.6 у [18]) слиједи да се v може продужити на $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Међутим, због услова асферичности не постоји неконстантна холоморфна крива $\mathbb{S}^2 \to M$. Контрадикција! □

Теорема 35. *Нека је $u_k \in \mathcal{M}(y,x)$, тада постоји подниз (означен исто) и низ $s_k^j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$ тако да $u_k(s + s_k^j, t)$ конвергира са својим изводима равномјерно на компактима ка $u^j \in \mathcal{M}(x^j, x^{j-1})$. Притом, $x^j \in \mathcal{P}(H)$, $x^0 = x$, $x^m = y$ и важи*

$$\mu_H(x^m) > \mu_H(x^{m-1}) > \ldots > \mu_H(x^0).$$

Важи и обрнуто, тј. ако скуп $\{u^j\}$ задовољава наведене услове, онда постоји низ $u_k \in \mathcal{M}(y,x)$ који ка њему „конвергира” на горе описан начин. Одавде, ако је $\mu_H(x^-) - \mu_H(x^+) = 2$, скуп

$$\bigcup_{\mu_H(x^+)<\mu_H(y)<\mu_H(x^-)} \widehat{\mathcal{M}}(x^-, y) \times \widehat{\mathcal{M}}(y, x^+)$$

можемо видјети као границу 1-димензионе многострукости $\widehat{\mathcal{M}}(x^-, x^+)$.

4.10 Случај аутономног Хамилтонијана

Теорема 36. *Период неконстантног периодичног рјешења једначине*

$$x' = F(x),$$

гдје је $F : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ *Липшицова функција са константом* L*, није мањи од* $\frac{2\pi}{L}$.

Доказ овог тврђења може се наћи у [25].

Лема 31. *Постоји* $\varepsilon > 0$ *тако да све неконстантне периодичне орбите за аутономан Хамилтонијан* H *имају минимални период бар* ε.

Доказ. Докажимо да тврђење важи у случају да орбита припада отвореном скупу U чије је затворење садржано у карти V (φ је одговарајуће координатно пресликавање). Једначина $\dot{x} = X_H(x)$ у карти има облик.

$$\varphi_* \dot{x} \varphi_*^{-1} = (\varphi_* X_H) \left(\varphi \circ x \circ \varphi^{-1}\right).$$

Периоди петље на M и одговарајуће петље у $\varphi(U)$ су исти. $\varphi(U) \subset \varphi(\overline{U})$, $\varphi(\overline{U})$ је компактан и објекти са којим радимо су C^∞. Одавде $\varphi_* X_H$ је Липшицова функција, па на основу теореме 36, период орбите је бар ε_0 (ε_0 зависи само од скупова U, V).

Докажимо сада за произвољну петљу. Претпоставимо супротно, тј. да постоји низ Хамилтонових петљи чији периоди теже нули. Нека је $\{U_i\}$ коначан покривач многострукости M такав да $\overline{U}_i \subset V_i$ гдје су V_i карте, са ε_i означимо одговарајућа ограничења периода, а са λ Лебегов број покривача $\{U_i\}$.
Пошто је M компактна $|X_H| < C$ за неко C и сваку тачку многострукости. Оцијенимо дужину Хамилтонове петље периода τ.

$$l(\gamma) = \int_0^\tau \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_0^\tau |X_H| < \tau C.$$

Као посљедица $\operatorname{diam}(\gamma) < \tau C$. За довољно мало τ дијаметар петље ће бити мањи од λ што значи да ће петља бити садржана у једном U_i. А за τ мање од $\varepsilon = \min \varepsilon_i$ добијамо контрадикцију. □

Теорема 37. *Постоји скоро комплексна структура* J *за коју важи:*
Ако је $H : M \to \mathbb{R}$ *Морсова функција чији је градијентни ток Морс-Смејловог типа у односу на метрику индуковану са* J*, тада постоји константа* $\tau_0 > 0$ *таква да је свако рјешење једначине*

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \tau \nabla H(u) = 0,$$

$$\lim_{s \to \pm\infty} u(s,t) = x^\pm,$$

за $\tau < \tau_0$*, независно од* t.

За доказ погледати лему 7.1 у [13].

Лема 32. *Ако је x недегенерисана критична тачка аутономног Хамилтонијана H, тада је*

$$\mathrm{Ind}_{-H}(x) = \mu_H(x),$$

притом са лијеве стране x је тачка, а са десне константна петља $x : [0,1] \to M$.

Доказ. Задржавамо ознаке и претпоставке из доказа леме 15. Искористићемо дефиницију 36 Конли-Цендеровог индекса. Пошто је

$$\mathrm{id} - \phi_{t*}(0) = t \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix},$$

и матрица са десне стране недегенерисана, пут $\phi_{t*}(0)$ симплектичких матрица нема тачака пресјецања. Одавде

$$\mu_{CZ}\big(\phi_{t*}(0)\big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(S_0),$$

гдје је S дефинисано са

$$\frac{d}{dt}\phi_{t*}(0) = J_0 S_t \phi_{t*}(0).$$

Пошто је $\phi_{0*}(0) = \mathrm{id}$

$$S_0 = -J_0 \frac{d}{dt}\phi_{t*}(0) = \begin{bmatrix} & E \\ -E & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} \end{bmatrix}.$$

$$\mu_{CZ}\big(\phi_{t*}(0)\big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left(-D^2 H\right) = \frac{1}{2}\left(2n - 2\,\mathrm{Ind}_{-H}(x)\right) = n - \mathrm{Ind}_{-H}(x).$$

На основу дефиниције 37

$$\mu_H(x) = n - \mu_{CZ}\big(\phi_{t*}(0)\big) = \mathrm{Ind}_{-H}(x).$$

□

Изаберимо J из теореме 37. На основу теореме 6.6 у [6] постоји Морс-Смејлова функција $H : M \to \mathbb{R}$ у односу на метрику $\omega(\cdot, J\cdot)$. Због леме 31 постоји $\varepsilon \in (0, \tau_0)$ (τ_0 је из теореме 37) такво да су периодичне орбите Хамилтонијана εH само критичне тачке функција εH. Штавише, услијед леме 32, Конли-Цендеров индекс у односу на εH и Морсов индекс у односу на $-\varepsilon H$ су исти за сваку критичну тачку. На основу теореме 37

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla(\varepsilon H)(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{M}(\varepsilon H, J),$$

тј.

$$(\forall x, y \in \mathrm{H}) \quad \mathcal{M}_{-\varepsilon H}(x,y) = \mathcal{M}(x, y; \varepsilon H, J).$$

Из свега овога

$$HF_*(\varepsilon H, J) \cong HM_*(-\varepsilon H, \omega(\cdot, J\cdot)) = HM_*.$$

Да бисмо лијеву страну изједначили са HF_* остаје да покажемо да $(\varepsilon H, J)$ задовољава услове регуларности. А то важи јер

$$\frac{\partial}{\partial s} + J\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \nabla H = \frac{\partial}{\partial s} - \varepsilon \nabla H$$

на $\mathcal{M}(\varepsilon H, J)$. Пошто је $-\varepsilon H$ Морс-Смејловог типа у односу на $\omega(\cdot, J\cdot)$, линеаризација десне стране је НА, па то важи и за лијеву страну.

Посљедица 6. *Флорова хомологија је изоморфна сингуларној хомологији многострукости.*

4.11 Флорова хомологија за Лагранжеве пресјеке

Флорова хомологија за Лагранжеве пресјеке уопштава Флорову хомологију за Хамилтонове петље и у извјестном смислу Морсову хомологију.

Нека су L, L' двије Лагранжеве подмногострукости симплектичке многострукости M. Посматрајмо простор путева

$$\gamma \in C^\infty([0,1], M)$$

са граничним условима $\gamma(0) \in L, \gamma(1) \in L'$. Претпоставимо да за свака два пута γ_0, γ_1 из овог простора постоји хомотопија $\gamma : [0,1]^2 \to M$, $\gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, $\gamma(1,t) = \gamma_1(t)$ кроз тај простор (тј. за свако s пут γ_s је из $C^\infty([0,1], M)$ и спаја L и L').

Дефинишимо функционал дејства на горе описаном простору путева са

$$\mathcal{A}_{\gamma_0}(\gamma_1) := \int_{[0,1]^2} \gamma^*\omega.$$

Притом смо фиксирали γ_0, а γ је хомотопија између γ_0 и γ_1 за коју смо претпоставили да постоји. $\mathcal{A}_{\gamma_0}$ је добро дефинисан и за различито γ_0 мијења се за константу. Одавде, извод овог функционала

$$(d\mathcal{A})(x)(\xi) = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t), \xi_t)dt \tag{33}$$

не зависи од γ_0 (које смо и изоставили). x је критична тачка функционала $\mathcal{A}_{\gamma_0}$ ако и само ако је константан пут који спаја L и L', тј. слика од x је пресјечна тачка ових Лагранжевих подмногострукости. Претпоставићемо $L \pitchfork L'$ (ово одговара условy недегенерисаности критичних тачака).

У односу на скаларни производ, дефинисан слично као у потпоглављу 4.3, градијент од $\mathcal{A}_{\gamma_0}$ је

$$\operatorname{grad} \mathcal{A}_{\gamma_0}(x) = J\dot{x}(t).$$

Означимо са $\mathcal{M}(p, q, L, L')$ скуп линија градијентног тока које спајају критичне тачке p, q. Линије градијентног тока су заправо псеудо-холоморфни дискови. Под одређеним условима (страна 281 у [6]) скуп $\mathcal{M}(p, q, L, L')$ је многострукост и постоји градуисање $\mu : L \cap L' \to \mathbb{Z}$ такво да је

$$\dim \mathcal{M}(p, q, L, L') = \mu(p) - \mu(q).$$

Аналогно описаном у овом поглављу можемо конструисати Флорову хомологију за Лагранжеве пресјеке

$$HF_*(L, L').$$

Примјер 6 нас води ка Флоровој теорији за Хамилтонове петље (посматрамо график Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ_1, гдје је ϕ_t Хамилтонов ток), а примјер 7 ка Морсовој теорији (посматрамо затворену форму df, гдје је f Морсова функција, за више детаља погледати [10]).

5 Примјена на геодезијске у Хоферовој геометрији

За доказе (или даље референце) чињеница које спомињемо у овом поглављу погледати [19] или [2].

Нека је $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ група Хамилтонових дифеоморфизама на M. Са X означимо јединствено векторско поље за које важи

$$X \lrcorner \omega = dH.$$

H је јединствено одређено са X до на константу. Да бисмо се ослободили овога „до на константу” сузиһемо класу Хамилтонијана.

Дефиниција 39. Нека је $\mathcal{A} = \mathcal{A}(M)$ простор (векторски) свих глатких функција $F : M \to \mathbb{R}$ таквих да је

- $\int_M F \omega^{\wedge n} = 0$, ако је M затворена
- F је са компактним носачем ако је M некомпактна.

За Хамилтонијан $H : M \times I \to \mathbb{R}$ кажемо да је нормализован ако за свако $t \in I$ функција $H_t \in \mathcal{A}(M)$ и (у случају да је M некомпактна) ако постоји компактан скуп $K \subset M$ који садржи носаче функција H_t. Скуп свих нормализованих Хамилтонијана означавамо са $\mathcal{F}$.

$\mathrm{Ham}(M, \omega)$ је Лијева подгрупа групе $\mathrm{Diff}(M)$ свих дифеоморфизама многострукости M. Тангентни вектор у јединици је

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h_t(x) = X_0,$$

притом је h Хамилтонов дифеоморфизам генерисан Хамилтонијаном H_t. Одавде, $\mathcal{A}(M)$ можемо посматрати као Лијеву алгебру Лијеве групе $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Слично, тангентни вектор Хамилтоновог пута h_t у тачки $t = s$ можемо идентификовати са H_s. Значи, $\mathcal{A}(M)$ представља тангентни простор не само у id већ и у било којој другој тачки групе $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

5.1 Мјерење растојања у $\mathrm{Ham}(M, \omega)$

Поступићемо у аналогији са коначно-димензионим случајем. Тамо је растојање између двије тачке инфимум дужина кривих које их спајају, а дужина криве је интеграл дужине тангентног вектора.

Почнимо, зато, са увођењем норме $\|\cdot\|$ на $\mathcal{A}(M)$ (тиме заправо дефинишемо Финслерову метрику на $\mathrm{Ham}(M, \omega)$). Наметнућемо још један услов

$$\|H\| = \|H \circ \phi\|, \quad \text{за} \quad \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega).$$

Ово је еквивалентно са условом да је лијево дејство групе $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ на саму себе изометрија. Природно је тражити $\|\cdot\|$ међу сљедећим нормама

- p норма:
$$\|H\|_p = \left(\int_M |H|^p \, \omega^{\wedge n}\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \geqslant 1,$$
- ∞ норма:
$$\|H\|_\infty = \max H - \min H.$$

Опредјелићемо се за L_∞ из пар добрих разлога које ћемо навести касније (теорема 38).

Дефиниција 40. Нека је $\{h_t\}$, $t \in [a,b]$ Хамилтонов пут генерисан нормализованим Хамилтонијаном H. Тада
$$\text{дужина}(\{h_t\}) := \int_a^b \|H_t\| \, dt.$$

Дефиниција 41. Растојање између два Хамилтонова дифеоморфизма α и β је
$$\rho(\alpha, \beta) = \inf \text{дужина}(\{\phi_t\}),$$
гдје је инфимум узет по свим Хамилтоновим путевима $\{\phi_t\}$, $t \in [a,b]$, који задовољавају $\phi_a = \alpha$, $\phi_b = \beta$.

ρ има сљедеће особине

- $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\beta, \alpha)$,
- $\rho(\alpha, \beta) + \rho(\beta, \gamma) \geqslant \rho(\alpha, \gamma)$ (неједнакост троугла),
- $\rho(\alpha, \beta) \geqslant 0$,
- $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \rho(\gamma\alpha, \gamma\beta)$, (биинваријантност)

За све $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. ρ је скоро метрика. Оно што је за метрику још потребно је недегенерисаност, тј.
$$\rho(\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = \beta.$$

Али и то важи захваљујући избору ∞ норме.

Теорема 38. *Псеудо-метрика ρ_∞ је недегенерисана, док ρ_p за коначно p нису (притом је јасно шта ово означава). Штавише, ако је многострукост затворена тада је $\rho_p \equiv 0$.*

5.2 Геодезијске у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$

У Римановој геометрији геодезијске су екстремале функционала дужине. На сличан начин желимо да дефинишемо геодезијске у Хоферовој геометрији.

Нека је h_t, $t \in [a,b]$ гладак пут у $\mathrm{Ham}(M,\omega)$. Његова варијација је глатка фамилија путева $\{h_{t,\epsilon}\}$, $t \in [a,b]$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ таква да је

$$h_{a,\varepsilon} = h_a, \quad h_{b,\varepsilon} = h_b, \quad h_{t,0} = h_t.$$

Претпостављамо да је носач сваког дифеоморфизма из ове фамилије садржан у компактном скупу. Функционал дужине је

$$l(\varepsilon) = \int_a^b \|H(\cdot,t,\varepsilon)\|\,dt = \int_a^b \Big(\max_x F(x,t,\varepsilon) - \min_x F(x,t,\varepsilon)\Big)\,dt.$$

И овдје настаје проблем јер l не мора да буде диференцијабилна, тако да не можемо геодезијске дефинисати директно као критичне тачке од l.

Лема 33. *Постоји конвексна функција $u(\varepsilon)$ и константе $C,\delta > 0$ тако да важи*

$$(\forall \varepsilon \in (-\delta,\delta)) \quad |l(\varepsilon) - u(\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2.$$

Дефиниција 42. Пут $\{h_t\}$ је геодезијска ако $\|H(\cdot,t)\|$ не зависи од t и ако је $\varepsilon = 0$ тачка минимума функције $u(\varepsilon)$ из леме 33.

Дефиниција је добра и подудара се са очекиваном у случају када је $l(\varepsilon)$ глатка.

Дефиниција 43. За функцију $H \in \mathcal{F}$ кажемо да има фиксне екстреме ако постоје двије тачке $x^\pm \in M$ такве да је

$$H(x^-,t) = \min_x H(x,t) \quad \text{и} \quad H(x^+,t) = \max_x H(x,t)$$

и $H(x^+,t) - H(x^-,t)$ не зависи од t.

Теорема 39. *Пут $\{h_t\}$ је геодезијска ако и само ако одговарајући нормализовани Хамилтонијан има фиксне екстреме.*

За геодезијску $\{h_t\}$, $t \in I$ кажемо да је локално минимална ако за свако $t \in I$ постоји околина $U \subset I$ од t таква да за свако $a,b \in U$ пут $\{h_t\}$, $t \in [a,b]$ минимизује дужину у хомотопској класи путева са фиксним крајевима.

5.3 Примјена Флорове теорије

Теорема 40. *Нека је (M,ω) затворена, асферична, симплектичка многострукост. Тада свака једнопараметарска подгрупа од $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ која је генерисана генеричким аутономним Хамилтонијаном је локално минимална.*

Нека је G нормализована Морсова функција са јединственим тачкама апсолутног минимума и максимума $(x^\pm)$. Одговарајући Хамилтонов ток означимо са $\{g_t\}$. Нека је даље $\{f_t\}$, $t \in [0,1]$ Хамилтонов ток хомотопан са $\{g_{\varepsilon t}, t \in [0,1]\}$ са фиксним крајевима и $F \in \mathcal{F}$ његов нормализовани Хамилтонијан.

Изаберимо генеричку скоро комплексну структуру J_0. Из леме 14 и свођења Флорове хомологије на Морсову (описаног у потпоглављу 4.10) знамо да је x^+ хомолошки есенцијална за Флоров ланчасти комплекс $CF_*(\varepsilon G, J_0)$, за довољно мало ε. Желимо то да постигнемо за ланчасти комплекс придружен Хамилтонијану F.

$h_t := f_t \circ g_{\varepsilon t}^{-1}$ је контрактибилна петља Хамилтонових дифеоморфизама. Нека је $J(t) = h_{t*}^{-1} J_0 h_{t*}$. Показаћемо да се $CF_*(\varepsilon G, J_0)$ може идентификовати са $CF_*(F, J)$ помоћу пресликавања ($\mathcal{L}M$ је као и раније простор контрактибилних петљи на M)

$$T_h : \mathcal{L}M \to \mathcal{L}M,$$

$$T_h(\gamma) = \{h_t(\gamma(t))\}_{t\in[0,1]}.$$

Провјеримо како се понашају метрика и функционал дејства при овом пресликавању.

$$T_h^* \omega(\cdot, J_0 \cdot) = \omega(h_{t*}\cdot, J_0 h_{t*}\cdot) = \omega(\cdot, h_{t*}^{-1} J_0 h_{t*}\cdot) = \omega(\cdot, J(t)\cdot)$$

Лема 34. *Ако је $h(F)$ нормализовани Хамилтонијан који генерише ток $h_t^{-1} \circ f_t$, тада*

$$\left(T_h^{-1}\right)^* \mathcal{A}_F = \mathcal{A}_{h(F)}.$$

Лема 35. *Петља $z^+(t) := f_t(x^+)$ је хомолошки есенцијална у $CF_*(F, J)$.*

Слично важи и за x^- односно $z^-(t) := f_t(x^-)$.

Лема 36. *Уз горе наведене претпоставке важе сљедеће неједнакости*

$$\int_0^1 \max_x F(x,t) \geqslant \varepsilon \max G,$$

$$\int_0^1 \min_x F(x,t) \leqslant \varepsilon \min G.$$

Доказ. Нека је $\delta \in (0, \varepsilon)$ и $a(s)$ неопадајућа реална функција идентички једнака 0 за $s \leqslant 0$ и 1 за $s \geqslant 1$.

$$F_s(x,t) := (1 - a(s))\delta G(x) + a(s) F(x,t)$$

Изаберимо и генерички пут скоро комплексних структура који се подудара са J_0 и $J(t)$ редом за $s \leqslant 0$ и $s \geqslant 1$. Користећи лему 35 и исти аргумент као у доказу посљедице 3 закључујемо да постоји $y \in \mathcal{P}(\delta G)$ таква да је $b(z^+, z^-) \neq 0$. То значи да постоји рјешење u једначине

$$\partial_s u + J_s(t)\partial_t u = \nabla F_s(u(s,t),t),$$

$$\lim_{s\to-\infty} u(s,t) = y, \quad \lim_{s\to+\infty} u(s,t) = z^-(t).$$

(∇ је у односу на метрику индуковану са J_s, па такође зависи од s). Поступајући као у доказу леме 20 добијамо

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 dF_s(u(s,t),t)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) dt ds + \int_{B_{z^+}} u^*\omega - \int_{B_{z^-}} u^*\omega.$$

Користећи

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F_s(u(s,t),t) &= dF_s(u(s,t),t)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{\partial F_s}{\partial s}(u(s,t),t)\\ &= dF_s(u(s,t),t)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \dot{a}(s)\left(F(x,t) - \delta G\right)\end{aligned}$$

претходни израз можемо записати као

$$\begin{aligned}E(u) &= \mathcal{A}_{\delta G}(y) - \mathcal{A}_F(z^-) - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \dot{a}(s)\left(F(u(s,t),t) - \delta G(u(s,t))\right)dtds\\ &= \mathcal{A}_{\delta G}(y) - \mathcal{A}_F(z^-) + \int_{-\infty}^{+\infty}\dot{a}(s)\int_0^1 \left(\delta G(u(s,t)) - F(u(s,t),t)\right)dtds\\ &\leqslant \mathcal{A}_{\delta G}(z^-) - \mathcal{A}_F(z^+) + \int_{-\infty}^{+\infty}\dot{a}(s)\int_0^1 \max_x\left(\delta G(x) - F(x,t)\right)dtds\\ &= \mathcal{A}_{\delta G}(z^-) - \mathcal{A}_F(z^+) + \int_0^1 \max_x\left(\delta G(x) - F(x,t)\right)dt.\end{aligned} \tag{34}$$

Из леме 34 и чињенице да се за константне орбите аутономног Хамилтонијана функционал дејства своди на негативну вриједност Хамилтонијана у тој тачки слиједи

$$\mathcal{A}_F(z^-) = \mathcal{A}_{\varepsilon G}(x^-) = -\varepsilon\min G, \quad \mathcal{A}_{\delta G}(z^-) \leqslant \delta\max(-G) = -\delta\min G.$$

Ово заједно са (34) и $E(u) \geqslant 0$ води ка неједнакости

$$0 \leqslant -\delta\min G + \varepsilon\min G + \int_0^1 \max_x\left(\delta G(x) - F(x,t)\right)dt.$$

$\delta \in (0,\varepsilon)$ можемо изабрати произвољно мало, па

$$0 \leqslant \varepsilon\min G + \int_0^1 \max_x(-F(x,t))dt.$$

Или, другачије записано

$$\int_0^1 \min_x F(x,t)dt \leqslant \varepsilon\min G.$$

Слично добијамо и другу неједнакост (умјесто z^- узмемо z^+ и користимо хомотопију од F до δG умјесто од δG до F као што је овдје био случај). $\square$

Теорема 40 слиједи директно из ове леме.

Литература

[1] Владимир Драговић, Дарко Милинковић, *Анализа на многострукостима,* Математички факултет, Студентски трг 16, Београд, 2003.

[2] Јована Ђуретић, *Геодезијске линије у Хоферовој метрици*, Мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2010.

[3] Јелена Катић, *Модулски простори комбинованога типа у Морс-Флоровој теоријии,* Докторска дисертација, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2008.

[4] Александра Перишић, *Морсова хомологија, диференцијално-тополошки и аналитички приступ,* Мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2009.

[5] Robert A. Adams, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, San Francisko, London, 1975.

[6] Augustin Banyaga, David Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[7] Octav Cornea, Gregory Lupton, John Oprea, Daniel Tanré , *Lusternik-Schnirelmann Category*, American Mathematical Society, 2003.

[8] Dusa McDuff, Dietmar Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society, 2004.

[9] Andreas Floer, *Symplectic Fixed Points and Holomorphic Spheres,* Comm. Math. Phys. 1989.

[10] Andreas Floer, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory,* J. Differential Geometry, 1989.

[11] Werner H. Greub, *Linear Algebra*, Springer-Verlag New York Inc. 1967.

[12] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[13] Helmut Hofer, Dietmar Salamon, *Floer Homology and Novikov Rings* у *The Floer Memorial Volume*,Birkhäuser, 1995.

[14] Victor Klee, *Unsolved Problems in Intuitive Geometry*, 1960. Репродуковано са коментарима од стране Бранка Гринбаума 2010.

[15] Nicolaas H. Kuiper, *Double Normals of Convex Bodies*, Israel Journal of Mathematics, 1964.

[16] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer Science+Business Media, Inc. 2003.

[17] John W. Milnor, James D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974.

[18] Thomas H. Parker, Jon G. Wolfson, *Pseudo-Holomorphic Maps and Bubble Trees*, The Journal of Geometric Analysis, 1993.

[19] Leonid Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism*, Birkhäuser Verlag, 2001.

[20] Joel Robbin, Dietmar Salamon, *The Maslov Index for Paths*,Israel Journal of Mathematics, 1993.

[21] Joel Robbin, Dietmar Salamon, *The Spectral Flow and the Maslov Index*, Bulletin of the London Mathematical Society, 1995.

[22] Dietmar Salamon, *Morse Theory, the Conley Index and Floer Homology*, Bulletin of the London Mathematical Society, 1990.

[23] Dietmar Salamon, *Lectures on Floer Homology*, 1997.

[24] Matthias Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser Verlag, 1993.

[25] James A. Yorke, *Periods of Periodic Solutions and Lipschitz Constant*, Proceedings of the American Mathematical Society, 1969.