УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

Геометријско решавање кубних и квадратних једначина

Аутор:
Милица Јовановић

Ментор:
Проф. др Зоран Лучић

јун, 2016.

Садржај

0 Сажетак **2**

1 Увод **4**

2 Вавилонско решавање једначина **6**

3 Квадратни корен из књиге "Сулвасутре" **11**

4 Квадратни корен из Еуклидове књиге "Елементи" **16**

5 Конусни пресеци и кубни корен **20**

6 Ал-Хајамова класификација квадратних и кубних једначина **26**

7 Решавање простих једначина **28**

8 Решавање квадратних једначина **32**

9 Решавање трочланих кубних једначина које се могу превести у квадратне **34**

10 Кубне трочлане једначине **37**

11 Кубне четворочлане једначине **49**

12 Закључак **69**

0 Сажетак

Тема овог мастер рада јесте геометријско решавање кубних и квадратних једначина и начин на који су ове једначине решавали Вавилоњани, Хиндуси, Грци и Арапи. Рад је подељен у 12 поглавља.

У поглављу 1 дат је кратак сажетак рада.

У поглављу 2 описана је такозвана реторичка алгебра вавилонских математичара уз објашњење три примера који су преузети из старовавилонских текстова. Примери илуструју решавање квадратних и кубних једначина као и система једначина.

У поглављу 3 објашњено је налажење квадратног корена из књиге "Сулвасутре", тј. наведена су објашњења геометријских тврђења Сутра 54, Сутра 51 и Сутра 50, као и конструкција квадратног корена из два.

У поглављу 4 наведено је објашњење налажења квадратног корена из Еуклидове књиге "Елементи". Такође је наведено геометријско налажење правоугаоника који је површински једнак задатој четвороугаоној површи и претварање правоугаоника у правоугаоник чија је једна ивица задата.

У поглављу 5 наведене су три леме из Аполонијеве књиге "Конусни пресеци" које су Хајаму биле потребне за доказивање кубних једначина. Такође, објашњено је налажење кубног корена, као и основна својства правоугле хиперболе.

У поглављу 6 наведена је Ал-Хајамова класификација квадратних и кубних једначина. Двадесет пет типова подељених у пет група: просте једначине, трочлане квадратне једначине, трочлане кубне једначине које се могу превести у квадратне, трочлане кубне једначине и четворочлане кубне једначине.

У поглављу 7 дато је решење шест типова простих једначина. Ал-Хорезмијеви примери првог, другог и четвртог типа, као и Ал-Хајамова геометријска решења.

У поглављу 8 дата су геометријска решења три типа трочланих

квадратних једначина.

У поглављу 9 размотрен је Хајамов начин решавања три типа кубних једначина које се могу превести у квадратне. Хајам ова решења, полазећи од кубних једначина, доводи до решења квадратних једначина.

У поглављу 10 размотрено је Хајамово геометријско решење шест типова трочланих кубних једначина. Дати су Хајамови геометријски услови при којима једначине имају 0, 1 или 2 позитивна решења, у зависности од тога да ли се конусни пресеци, који се појављују при решавању одговарајуће једначине, не секу или се секу у једној или две тачке.

У поглављу 11 размотрено је Хајамово геометријско решење седам типова четворочланих кубних једначина. Дати су Хајамови геометријски услови при којима једначине имају 0, 1, 2 или 3 позитивна решења, у зависности од тога да ли се конусни пресеци, који се појављују при решавању одговарајуће једначине, не секу или се секу у једној, две или три тачке.

У поглављу 12 дат је закључак рада.

1 Увод

"Можда ће неко од оних који ће
доћи после нас знати то..."
ОМАР ХАЈАМ

Решавање кубних и квадратних једначина само су један од доприноса савременој математици које су славни арапски математичар Ал-Хорезми[1] и персијски математичар Ал-Хајам[2] оставили за собом у својим делима. Овај мастер рад највише је посвећен геометријском али и алгебарском решавању квадратних и кубних једначина, које су ови математичари оставили за собом у својим делима.

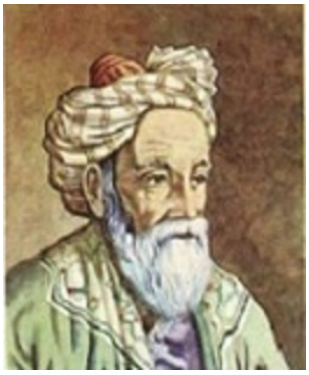
Састоји се из дванаест поглавља. Друго поглавље посвећено је добро изграђеној алгебри Вавилонских математичара. Вавилоњани су у то време потпуно владали техникама решавања система једначина, као и решавању квадратних и кубних једначина. У поглављу су такође поменуте њихове глинене плоче, јер су то први сачувани докази о решавању једначина. Пример глинене плочице која показује да су користили ирационалне бројеве, тј. корен из два, као и још два примера, један решавање система једначина алгебарским путем, а други решавање одређених кубних једначина. Треће поглавље представља осврт на решавање квадратног корена којим су се бавили Хинду математичари, тј. геометријски доказ налажења квадратног корена из књиге *Сулвасутре*. У поглављу је такође дата геометријска конструкција корена из два. Четврто поглавље описује Еуклидов доказ квадратног корена тј. његов четрнаести став из II књиге *Елемената*. Пето поглавље представља теорију из конусних пресека коју је Хајам користио у свом трактату "О доказима задатака алгебре и алмукабале" при геометријском доказивању кубних једначина. Такође, у овом поглављу објашњено је геометријско налажење кубног корена, као и основна својства правоугле хиперболе.

Остатак мастер рада посвећен је најзначајнијем математичком раду Омара Ал-Хајама, тј. његовом трактату *О доказима задатака*

[1] Арапски математичар Muhamed Ibn Musa Al-Horezmi (780—850).

[2] Персијски математичар Džias Ad-Din Abulfath Omar Ibn Ibrahim Al-Hajami An-Nišapuri (1048—1131).

алгебре и алмукабале. Овај трактат је првенствено посвећен решавању алгебарских једначина другог и трећег степена. Омар Ал-Хајам је био први који је систематски класификовао ове једначине и геометријски решио све типове једначина коришћењем општег метода конусних пресека. При томе узимао је у обзир само позитивна решења јер негативни бројеви тада нису постојали.



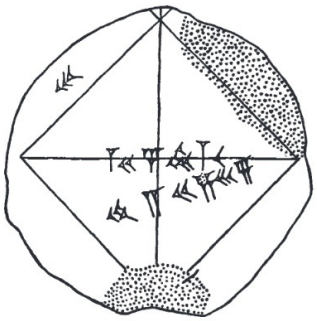
Омар Ал-Хајам
(1048-1131)

Мухамед Ибн Муса
Ал-Хорезми
(780-850)

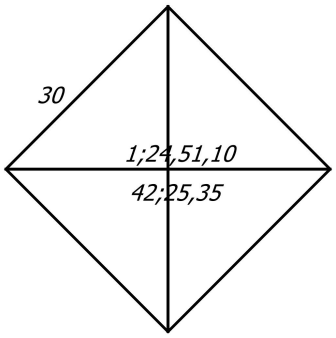
2 Вавилонско решавање једначина

Вавилонске глинене таблице сачуване из најстаријег вавилонског периода 1800 - 1600. п.н.е. показују да је сумерско-вавилонска алгебра доспела до решавања једначина првог, другог па чак и трећег степена и да су се служили обрасцима за решавање квадратних једначина.

Из старог вавилонског периода постоји таблица која доказује да су се тада користили ирационални бројеви, тачније $\sqrt{2}$. [8, стр 144]



Оригиналан изглед таблице



Преведен изглед таблице

На таблици је представљено да је број 30 дужина странице квадрата, а унутар квадрата су два броја. Први број је 1;24,51,10, што заправо представља:

$1 + 60^{-1}(24) + 60^{-2}(51) + 60^{-3}(10) \approx 1 + 0.4 + 0.01416667 + 0.0000463 = 1.41421297.$

А квадратни корен из 2 једнак је 1.41421356, што показује да су Вавилоњани рачунали $\sqrt{2}$ са тачношћу до 5 децимала. Доњи број представља производ броја 30 и $\sqrt{2}$, што је дужина дијагонале квадрата. Нека је d дужина дијагонале квадрата. Користећи Питагорину теорему добијамо:

$$d^2 = 30^2 + 30^2;$$
$$d = \sqrt{2}(30) \approx (1; 24, 51, 10)(30; 00) = 42; 25, 35.$$

Текст познат под ознаком АО 8862, записан клинастим писмом на глиненој четвоространој призми која се сада чува у Лувру, настао највероватније за време владавине Хамурабијеве династије око 1800. године п.н.е. који је нађен у Сенкереху, између осталог показује и начин на који су вавилонски математичари решавали једначине алгебарским путем. Текст почиње речима:

"Нисаба! Дужина, ширина. Дужину и ширину помножих и добих површину. Опет, што дужина прелази преко ширине, додадох површини и то даје 3;3. Опет, дужина и ширина сабрано даје 27. Дужина, ширина и површина шта су?"

Даље се у тексту из Сенкереха проблем не своди на решавање једначина већ се излаже процедура која доводи до решења проблема. Погледајмо овај текст (лева колона) и тумачење Милоша Радојчића (десна колона) [2, стр. 97-99]:

Нисаба!	Дозива се богиња Нисаба, заштитница науке.
Дужина, ширина. Дужину и ширину помножих и добих површину.	Именују се непознате. Оне се називају дужина, рецимо x и ширина, рецимо y. Површина је $x \cdot y$.
Опет, што дужина прелази преко ширине, додадох површини и то даје 3;3	$x \cdot y + x - y = 3;3$ (1) Знаком 3;3 смо означили број $3 \cdot 60 + 3 = 183$, написан у хексагезималном систему.
Опет, дужина и ширина сабрано даје 27	$x + y = 27$ (2) Сад треба решити систем добијених једначина (1) и (2).
Дужина, ширина и површина шта су? 27 и 3;3 су збирови, 15 дужина, 12 ширина, 3;0 површина.	Понављају се задати бројеви и одмах даје резултат. Ми ћемо схватити да је $3;3 = a$ и $27 = b$.

Ти при своме поступку, 27 збир дужине и ширине сабери ка 3;3. Даје 3;30. 2 сабери ка 27. Даје 29. Одбиј од 29 половину, 14'30.	Описује се поступак решавања. $a+b=3;30$, тј. 210, $b+2=29$, а $\frac{b+2}{2}=14'30$. Нека нам ово означава хексагезимални разломак $14+\frac{30}{60}=14,5$.
Пута 14'30 јесте 3;30'15	$14'30 \cdot 14'30 = 3;30'15$, тј. $14,5^2 = 210,25$.
Од 3;30'15 одузећеш 3;30. Разлика је 0'15.	$\left(\frac{b+2}{2}\right)^2 - (a+b) = 0'15$, тј. 0,25.
0'15 има 0'30 за квадратни корен.	$\sqrt{\left(\frac{b+2}{2}\right)^2 - (a+b)} = \sqrt{0'15} = 0'30$.
0'30 ка првој (величини) 14'30 сабери. Да је 15 за дужину.	$x = \frac{b+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b+2}{2}\right)^2 - (a+b)} = 15$.
0'30 од друге (величине) 14'30 одузми. Да је 14 за ширину.	$y^* = \frac{b+2}{2} - \sqrt{\left(\frac{b+2}{2}\right)^2 - (a+b)} = 14$. Ово y^* још није права "ширина".
2, колико си сабрао ка 27, одузми од 14, од дужине. Даје 12 као коначну ширину.	$y = y^* - 2 = 12$.
15 (дужину) и 12 (ширину) помножио сам. 15 пута 12 даје 3;0 за површину.	$x = 15 \cdot 12 = 180 = 3;0$.
Дужина 15 колико стрши изнад ширине 12? За 3 стрши. Три додај површини 3;0. Произилази 3;3.	Ово је сада контролни рачун. Заиста, $x - y = 3$ $x \cdot y + x - y = 3;3$

Из овога се види да су Вавилоњани у свом рачуну допуштали да се сабирају дужина и површина. Лако се примети да се реша-

вање овог проблема своди на решавање система двеју једначина са две непознате. Ако са x обележимо дужину, а са y ширину, одговарајуће једначине су:

$$x \cdot y + x - y = 183,$$

$$x + y = 27,$$

па је дужина $x = 15$, ширина $y = 12$, а површина $x \cdot y$ је 180.

Вавилоњани су били врло вични у прављењу табела. Највише су се користиле табеле за множење и за реципрочне вредности. Једна од битнијих табела је табела за решавање израза $n^3 + n^2$ за вредности n од 1 до 20 као и 30, 40 и 50. Ова табела је битна зато што се помоћу ње може решити кубна једначина $ax^3 + bx^2 = c$. [8, стр.147-148]

Пример: Решити једначину $144x^3 + 12x^2 = 21$.
Решење:
Помножимо обе стране једначине са 12 и уводимо смену $y = 12x$
$(12x)(12x)(12x) + (12x)(12x) = (12)(21)$;
$y^3 + y^2 = 252$ (или 4,12)
Из табеле налазимо да је $y = 6$ (или 0,6), односно $x = 0.5$ (или 0;30).

Постоји, међутим, веровање да су неки математичари могли решавати општи случај који илуструје једначина $x^3 + 5x^2 + 10x = 102$. Процедуру решавања опште кубне једначине ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$) можемо реконструисати на следећи начин, служећи се савременим симболима. Најпре, заменимо x са $X + d$ и применимо правило

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Имаћемо:

$$(X + d)^3 + a(X + d)^2 + b(X + d) + c = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$X^3 + 3X^2d + 3Xd^2 + d^3 + aX^2 + 2aXd + ad^2 + bX + bd + c = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$X^3 + (3d + a)X^2 + (3d^2 + 2ad + b)X + (d^3 + ad^2 + bd + c) = 0.$$

Можемо анулирати члан који садржи X ако ставимо да је

$$3d^2 + 2ad + b = 0,$$

тако да је

$$d = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Након што нађемо тражену вредност d, можемо израчунати $3d+a = A$ и $d^3 + ad^2 + bd + c = -B$. Одатле имамо

$$X^3 + AX^2 = B.$$

Таблица бројева $X^3 + AX^2$ за различите вредности A и X даје тражено решење, ако оно постоји.

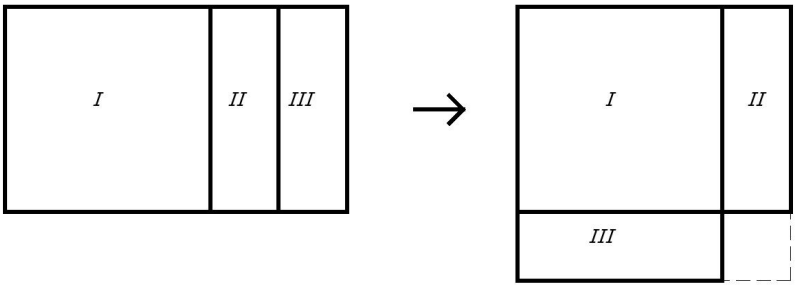
Између 2000. године п.н.е. и 1500. године н.е. није учињен никакав напредак у алгебарском решавању кубне једначине, а када се појавио формалан начин решавања у 16. веку наше ере, подсећао је на фундаментални корак вавилонске процедуре. Модеран начин решавања је компликованији и захтева да се општа кубна једначина сведе на једначину без члана који садржи X или X^2. [15, стр. 30--31]

3 Квадратни корен из књиге "Сулвасутре"

Проблемом налажења квадратног корена бавили су се и стари Хинду математичари. У њиховом приручнику за дизајнирање и изградњу светилишта, познатог под називом "Сулвасутре" написаног од стране *Baudhayana*. Прво поглавље те књиге је упутство из геометрије, које садржи геометријска тврђења звана "Сутра". *Сулвасутре* у преводу значи правило канапа и књига је написана око 600. година п.н.е.

Педесет четврта сутра је геометријско тврђење које даје методу за геометријску конструкцију квадрата чија је површина једнака површини датог правоугаоника. Ако је N било који реалан број, онда правоугаоник чија је једна страна N, а друга страна један, има исту површину као квадрат чија је страна једнака квадратном корену из N. Дакле, педесет четврта сутра даје геометријску конструкцију квадратног корена броја N.

Сутра 54: "Ако желите да претворите правоугаоник у квадрат, узмите дужину краће стране правоугаоника за дужину стране квадрата, остатак поделите на два дела, та два дела окрените и спојите са две стране квадрата. Празно место попуните додајући део (мали квадрат)." [10]

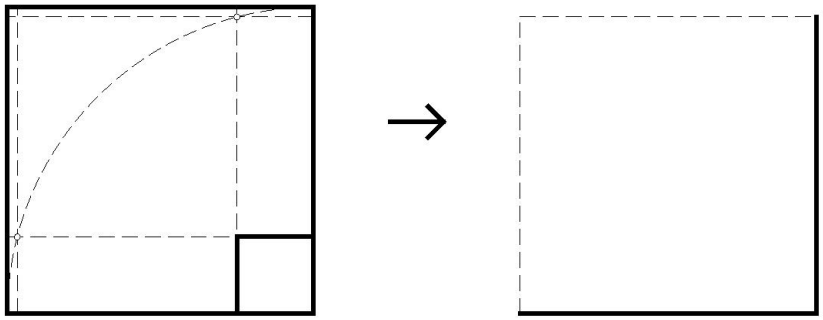


Сутра 54

Када додамо мањи квадрат у десни доњи угао (види слику Сутра 54) добијамо велики квадрат чија је површина једнака збиру

површине правоугаоника и површине малог квадрата. Зато морамо да одузмемо површину малог квадрата од површине великог (Сутра 51). Остаје нам квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника.

Сутра 51: Ако желите да одузмете површину једног квадрата од другог, у доњи десни угао великог квадрата нацртати мањи квадрат чију површину желите да одузмете. Паралелно са страницама великог квадрата продужити странице малог квадрата (видети слику Сутра 51). Узети у отвор шестара дужину странице великог квадрата. Иглу шестара ставити у доњи десни угао великог квадрата и нацртати лук од једног до наспрамног темена великог квадрата. Ту где се пресече лук са продуженим странама мањег квадрата, у тим тачкама, паралелно са страницама већег квадрата повучемо линије. Те линије нам дефинишу странице траженог квадрата.[3]

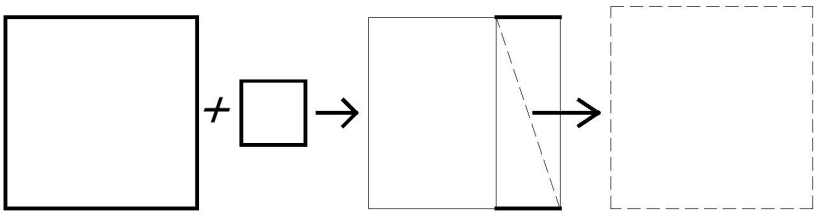


Сутра 51

Сутра 50: Ако желите да спојите два квадрата различите величине у један, на доњу и горњу страницу већег квадрата са десне стране уцртамо страницу мањег квадрата (видети слику Сутра 50)

[3]Сутра 51: "Ако желите да одузмете један квадрат од другог, одсеците део од већег квадрата, тако што означите на подлози странице мањег квадрата који желите да одсечете (видети слику Сутра 51), нацртајте лук дужине једне стране преко правоугаоника док не дођете до друге стране, тамо где дотакне (другу страну), одсечемо по тој линији и добијамо већи квадрат умањен за мањи." [10]

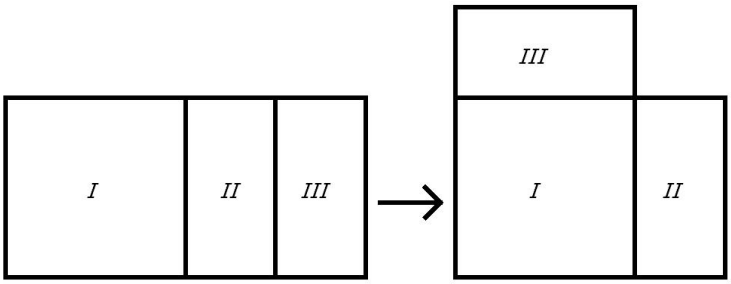
и довршимо правоугаоник чија је једна страница једнака страници већег квадрата, а друга једнака страници мањег квадрата. Дијагонала овог правоугаоника једнака је дужини странице квадрата добијеног спајањем два квадрата.[4]



Сутра 50

Конструкција квадратног корена из два

Узмимо два квадрата чије су ивице дужине један, спојимо их и на њих применимо педесет четврту сутру. Добијамо квадрат чија је страница дужине $1\frac{1}{2}$ коме фали квадрат чија је ивица дужине $\frac{1}{2}$ (Слика 1).

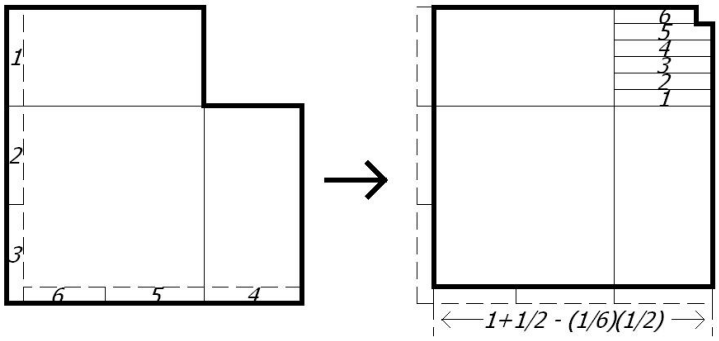


Слика 1

Сада од тако добијеног великог квадрата са доње и леве стране одузмемо део довољно танак да њиме када се исецка на мање делове

[4]Сутра 50 (Питагорина теорема): "Ако желите да спојите два квадрата различите величине у један, доцртајмо уз страну мањег квадрата исечени комад већег квадрата. Дијагонала овог исеченог дела је у ствари страница квадрата добијена спајањем два квадрата." [10]

можемо да попунимо квадрат који фали. Делови којима ћемо попунити квадрат који фали имаће дужину једне странице $\frac{1}{2}$, а таквих правоугаоника има скоро шест дуж доње и леве странице великог квадрата. Тако да ће нам висина делова којима попуњавамо мали квадрат и висина делова које одсецамо од великог квадрата бити $\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$(Слика 2).



Слика 2

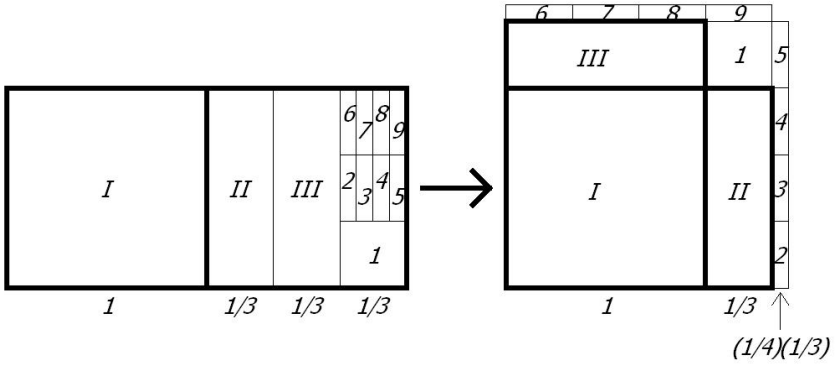
Још увек нам фали мали квадрат у десном горњем углу, јер се у доњем левом углу преклапају одсечени делови да би се претходни мали квадрат попунио.

Приметимо и да је $1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ што је дужина странице ново добијеног великог квадрата исто што и $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{12}$, па смо до овог дела констрикције могли доћи и на други начин.

Дакле, узмемо два квадрата чија је ивица дужине један, али сада други квадрат поделимо на три дела. Онда уз ивице квадрата дужине један стављамо делове исеченог квадрата, тако што једну трећину ставимо уз десну ивицу другу трећину уз горњу ивицу. Преосталу трећину поделимо додатно на још три дела, један део ставимо у десни горњи угао квадрата који правимо, а преостала два дела сваки поделимо на још четири дела. Мале четвртине које смо добили ређамо дуж десне и горње ивице квадрата који правимо (Слика 3). Тиме смо добило претходно, само на мало другачији начин.

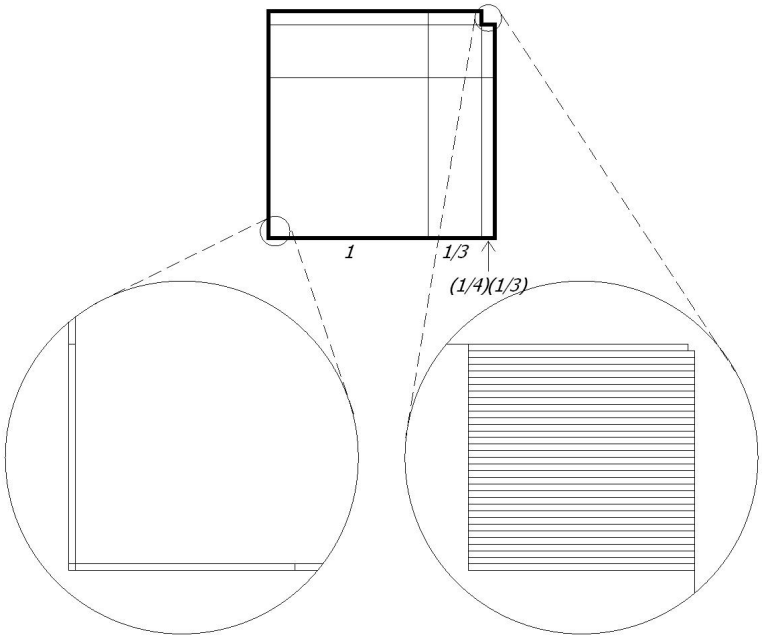
Ако поновимо део са одсецањем од доњег и левог дела овако до-

бијеног квадрата да би смо попунили квадратић који фали, имаћемо на свакој од ова два одсечена дела по 17 минијатурних правоугаоника којима попуњавамо квадратић, значи укупно 34.



Слика 3

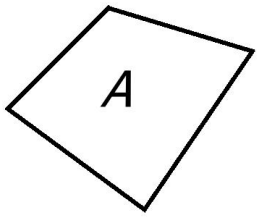
Овако добијена страница квадрата је $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, чему је приближно једнак $\sqrt{2}$ (Слика 4). Ако се настави са понављањем задњег поступка, долази се до приближније вредности $\sqrt{2}$, али ће поступак постати превише ситан и неизводљив. Слика 4:



4 Квадратни корен из Еуклидове књиге "Елементи"

Ово поглавље написано је на основу поглавља *квадратни корен* из књиге проф. др Зорана Лучића "Огледи из историје аналитичке геометрије". [2, стр. 118-120]

Грци су желели да тачно реше једначину облика $x^2 = A$. То су урадили геометријском методом, јер су умели да конструишу ивицу x квадрата код кога је површина једнака површини задатог "праволинијског" лика A, без обзира да ли је x рационална или ирационална мера.



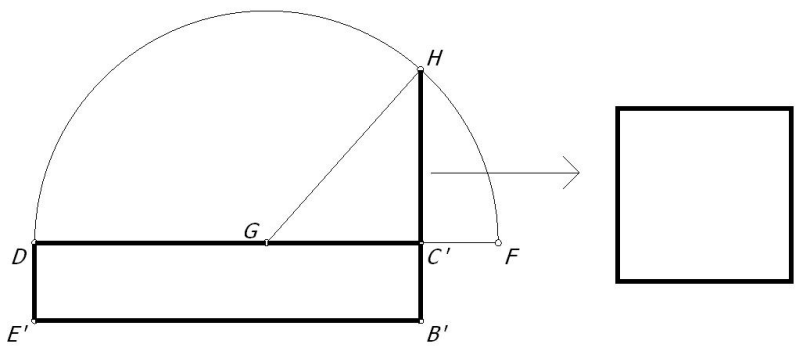
Праволинијски лик A

У последњем четрнаестом ставу друге књиге *Елемената*, Еуклид конструише "квадрат једнак датој праволинијској слици" тако што, најпре, ослањајући се на став I.45[5], конструише паралелограм, који потом лако претвара у њему површински једнак правоугаоник $E'B'C'D$ чија је једна ивица задата, а који је површински једнак задатој слици A. Потом, над збиром DF ивица DC' и $C'B'$ овог правоугаоника конструише полукруг и у његовом пресеку са правом $C'B'$, тачку H. На основу става II.5[6] збир правоугаоника $E'B'C'D$ и квадрата ивице GC' једнак је квадрату ивице GF. Како је GF једнако GH, на основу Питагорине теореме, квадрат над GH једнак је звиру квадрата над GC' и $C'H$, па је правоугаоник $E'B'C'D$ једнак квадрату ивице $C'H$. Тако је конструисан квадрат који је једнак "праволинијској" слици A. Дакле, конструисана је ивица x квадрата којем је површина једнака површини A неке четвороугаоне површи и то је геометријско решење једначине $x^2 = A$, односно

[5] Став I.45:"У датом праволинијском углу конструисати паралелограм једнак датој праволинијској слици." [12]

[6] Став II.5:"Ако се дата диж подели двема тачкама и на једнаке и на неједнаке делове, биће збир правоугаоника обухваћена неједнаким деловима целе дужи и квадрата на дужи између деоних тачака једнак квадрату на половини дужи." [12]

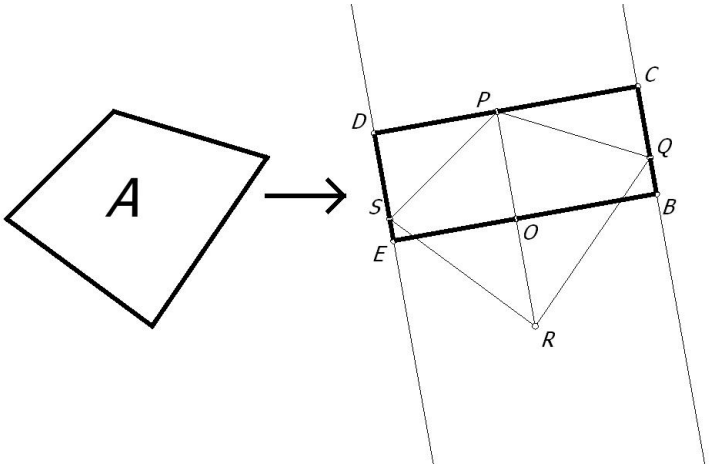
решен је проблем налажења квадратног корена броја A.



Елементи, II.14

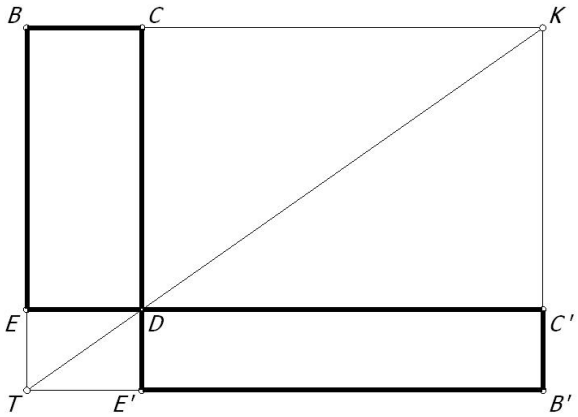
Када пише о "праволинијској слици" A, којој је једнак правоугаоник $CDEB$, Еуклид на слици која прати доказ теореме црта четвороугао. У доказу става I.45 када конструише "паралелограм подударан датој праволинијској слици", за њега је "праволинијска слика" заправо четвороугао, тј. четвороугаона површ. Паралелограм конструише тако што најпре четвороугао подели дијагоналом на два троугла са заједничком основицом, а затим конструише два паралелограма чија је површина једнака површини тих троуглова, који имају подударне углове један са другим, такве да је једна ивица једног од њих једнака једној ивици другог (нпр. да сваком од ових паралелограма једна ивица буде једнака половини заједничке ивице двају троуглова). Затим, споји ова два паралелограма дуж заједничке ивице и добије тражени паралелограм који је лако претворити у њему површински једнак правоугаоник. Следећи Еуклидове идеје из става I.42[7] и I.45, лако је конструисати правоугаоник $EBCD$ чија је површина једнака датом четвороуглу $PQRS$. Ако конструишемо средиште O дијагонале PR и два правоугаоника, $POED$ и $POBC$ којима су висине OE и OB једнаке висинама (из темена S и Q) троуглова SPR и QPR, конструисани правоугаоник $EBCD$ имаће исту површину као четвороугао $PQRS$.

[7]Став I.42:"У датом праволинијском углу конструисати паралелограм једнак датом троуглу." [12]



Правоугаоник $EBCD$ једнак четвороуглу $PQRS$

Претходном конструкцијом смо од четвороугла добили два троугла која смо претворили у правоугаонике исте површине са задатом ивицом и када их спојимо добијамо већи правоугаоник чија је површина једнака површини четвороугла. Потребно је да тај правоугаоник претворимо у правоугаоник чија је једна ивица задата. Еуклид то чини у ставу I.44[8] тако што конструише било који правоугаоник $EDCB$ једнак датом троуглу, а затим "продужава" полуправу CD



Правоугаоник $E'B'C'D$ једнак правоугаонику $EDCB$

[8]Став I.44:"На датој дужи конструисати у датом праволинијском углу паралелограм једнак датом троуглу." [12]

до тачке E' такве да је дуж $E'D$ једнака задатој дужи и консруише правоугаоник $TB'KB$ чије су ивице паралелне ивицама правоугаоника $EDCB$, а ивица TB' садржи тачку E'. Ако са C' обележимо пресек правих ED и KB', лако је утврдити (на основу подударности троуглова TKB' и KTB, TDE' и DTE, DKC' и KDC) да су правоугаоници $E'B'C'D$ и $EBCD$ површински једнаки.

Овим је конструисан правоугаоник коме је једна ивица задата, а његова површина једнака је површини задатог четвороугла. Потом уз помоћ става II.14[9], конструишемо квадрат једнак том четвороуглу и ивица тог квадрата је тражени корен, тј. x.

[9]Став II.14:"Конструисати квадрат једнак датој праволинијској слици." [12]

5 Конусни пресеци и кубни корен

За решавање кубних једначина Омару Ал-Хајаму биле су потребне особине конусних пресека. Он наводи основне леме из Аполонијеве књиге "Конусни пресеци" које су му потребне за даље доказивање кубних једначина. [4, стр. 14-17]

Лема 1:"Нађимо две линије између две дате линије тако да њих четири буду пропорционалне."

Хипократ са Хиоса утврдио је да налажење ових пропорционала доводи до решења делског проблема[10] или проблема удвостручавања коцке[11] [2, стр. 220]. Ако су a и b задате дужи, довољно је наћи дужи x и y, тако да је

$$a : x = x : y = y : b.$$

Одатле је

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}.$$

Ако је a ивица коцке и ако је задат однос $a : b$, тада ће и однос запремина коцки ивица a и x бити једнак задатом односу. На исти начин:

$$\frac{y^3}{b^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}$$

па је и однос запремина коцки ивица y и b једнак задатом односу $a : b$. У посебном случају када је дуж a двоструко већа од b, запремина коцке чија је ивица x биће двоструко мања од запремине коцке са задатом ивицом a, а запремина коцке са ивицом y биће двоструко већа од запремине коцке са задатом ивицом b. Тиме је проблем удвостручавања коцке редукован на конструкцију двеју средњих пропорционала.

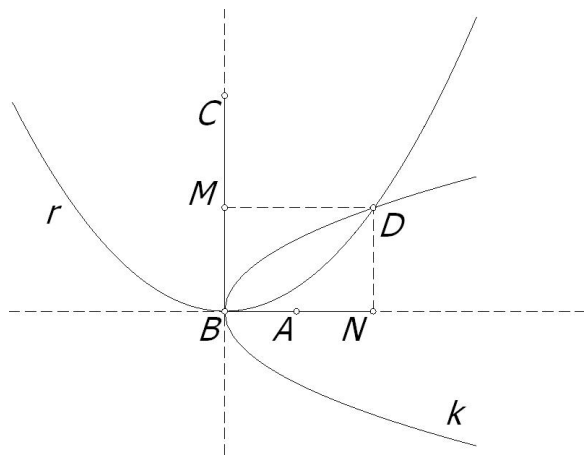
Два најстарија решења овог проблема потичу од Архите и Менехма. Архитин доказ и конструкција су детаљно објашњени у књизи проф.др Зорана Лучића *Огледи из историје аналитичке геометрије* (погледати стране 219-231).

[10] Становници острва Дела у Егејском мору имали су за проблем удвостручавање олтара које им је "пророчанство ставило у задатак".

[11] Проблем удвостручења коцке потиче од проблема удвостручења краљевске гробнице за Глаука познатог из Грчке митологије као син критског краља Миноја.

Вратимо се на Лему 1. Доказаћемо је коришћењем Хајамовог доказа. [4, стр. 14-15]

Нека су дате линије AB и BC, тако да важи $AB \perp BC$. Хајам конструише параболу r, са врхом B, осом BC и параметром BC. Из нормалности правих AB и BC добијамо да је права AB тангента на дату конику (видети Слика 1). Слично, конструише другу параболу k, са врхом B, осом AB и параметром AB. Права BC је тангента на конику k и две конике (r и k) се морају пресећи у тачки D. Конструишемо из D две линије DM и DN нормалне на BC и AB. Хајам тврди да су ове четири линије AB, BM, BN и BC пропорционалне.



Слика 1

Доказ: У савременој нотацији једначина параболе r је

$$BC \cdot y = x^2,$$

а једначина параболе k је

$$AB \cdot x = y^2.$$

Уводимо правоугли координатни систем, такав да је тачка B координатни почетак, тачка A се налази на позитивном делу апсцисне осе, а тачка C на позитивном делу ординатне осе.
Пошто се параболе секу у тачки D, означићемо са (x_0, y_0) координате тачке D. Уводимо ознаке $x_0 = MD = BN$ и $y_0 = DN = BM$, па из претходних једначина добијамо

$$BC \cdot DN = MD^2 \qquad \text{и} \qquad AB \cdot MD = DN^2,$$

односно

$$BN^2 = BM \cdot BC \qquad \text{и} \qquad BM^2 = AB \cdot BN.$$

Следи да је

$$\frac{BN}{BM} = \frac{BC}{BN} \qquad \text{и} \qquad \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BM},$$

стога су четири линије пропорционалне

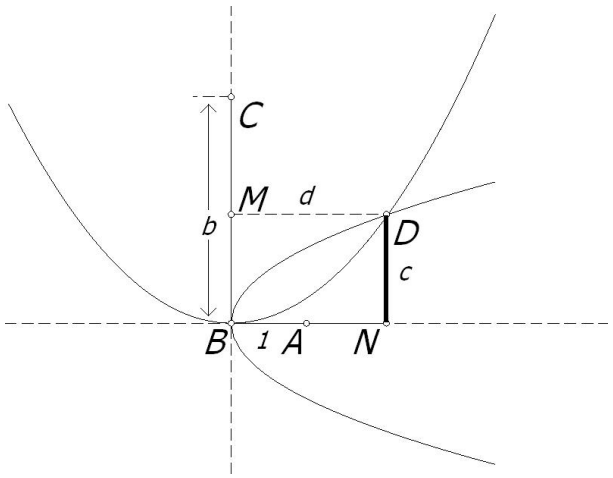
$$\frac{BC}{BN} = \frac{BN}{BM} = \frac{BM}{AB}.$$

Дакле, линије BM и BN су између линија AB и BC, и добијамо тражено:

$$AB : BM = BM : BN = BN : BC.$$

Налажење кубног корена

Нека је b позитиван реалан број и нека је $BC = b$, конструишемо A тако да је $AB \perp CB$ и нека је $AB = 1$ (видети Слику 2).



Слика 2

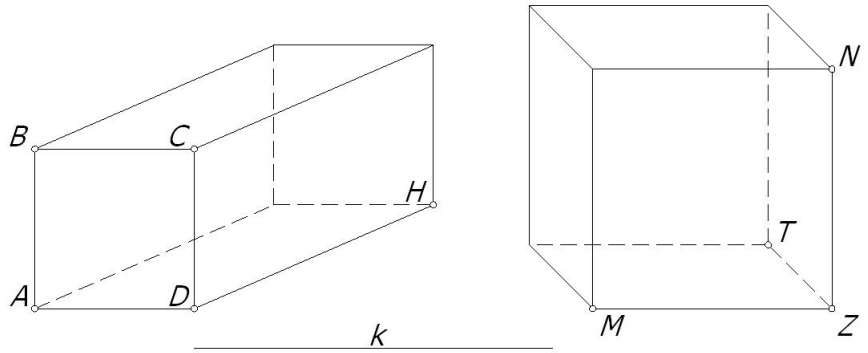
Конструишемо параболу са врхом B, осом BC и параметром BC и још једну параболу са врхом B, осом AB и параметром AB. Нека је тачка D пресек две параболе, доцртати правоугаоник $BMDN$. Одатле је $MD^2 = BM \cdot BC$ и $DN^2 = AB \cdot BN$. Пошто је $BMDN$ правоугаоник, имамо да је $c = DN = BM$ и да је $d = DM = BN$, дакле, имамо $d^2 = cb$ и $c^2 = d$. Из ове две једнакости добијамо

$c^3 = b$, тј. кубни корен из b је c. [14, стр. 132]

За решавање кубних једначина Хајам користи још две леме, па ћу навести и њих заједно са доказима које је користио. [4, стр. 15-17]

Лема 2: "Дат је квадрат $ABCD$, који је основа паралелопипеда $ABCDH$ са паралелним основама и правим угловима, и дат је квадрат MN. Треба да конструишемо паралелопипед такав да му је база квадрат MN, а запремина једнака запремини паралелопипеда $ABCDH$."

Хајам прави пропорције тако да је $AB : NZ = MZ : k$ и $AB : k = ZT : HD$. Онда конструише $ZT \perp NM$ у тачки Z и завршава паралелопипед $NMZT$. Тврди да је запремина овог паралелопипеда једнака запремини почетног, тј. $ABCDH$ (видети Слику 3).



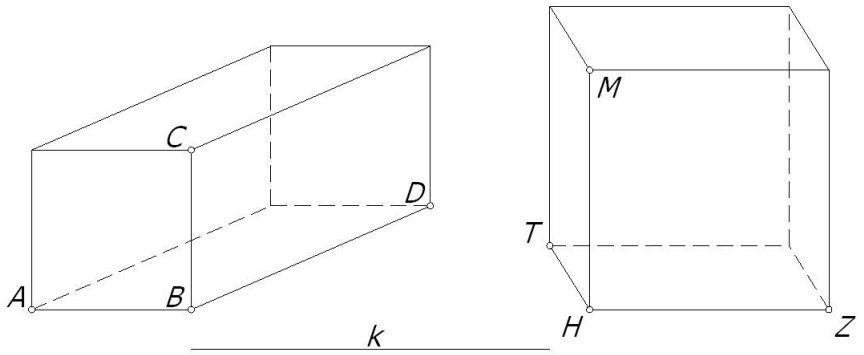
Слика 3

Доказ: Имамо да је $AC : MN = AB : k$. Дакле, из направљених пропорција следи $AC : MN = ZT : HD$, одакле добијамо $AC \cdot DH = MN \cdot ZT$. Стога, два паралелопипеда имају исту запремину јер су производ површине њихових основа и њихових висина једнаки, као што је показано у ставу XI.34[12] Еуклидове књиге *Елементи*.

[12]Став XI.34:"Код паралелопипеда једнаке запремине основе су обрнуто пропорционалне висинама. И ако су код паралелопипеда основе обрнуто пропорционалне висинама, они су једнаке запремине." [12]

Лема 3: "Паралелопипед $ABCD$ је дат и његова база је квадрат AC. Треба да конструишемо паралелопипед чија је база квадрат и чија је висина једнака датој дужи HT, а запремина је једнака запремини паралелопипеда $ABCD$."

Хајам прави пропорције $HT : BD = AB : k$ и $AB : ZH = ZH : k$. Конструише $HZ \perp HT$ и довршава правоугаоник TZ. Потом, конструише MH, тако да важи $MH \perp TZ$ и $MH = ZH$, затим завршава паралелопипед $MHTZ$. Хајам тврди да је паралепопипед T, чија је основа квадрат MZ, а висина дато HT, једнак (запремински) задатом паралелопипеду D (видети Слику 4).

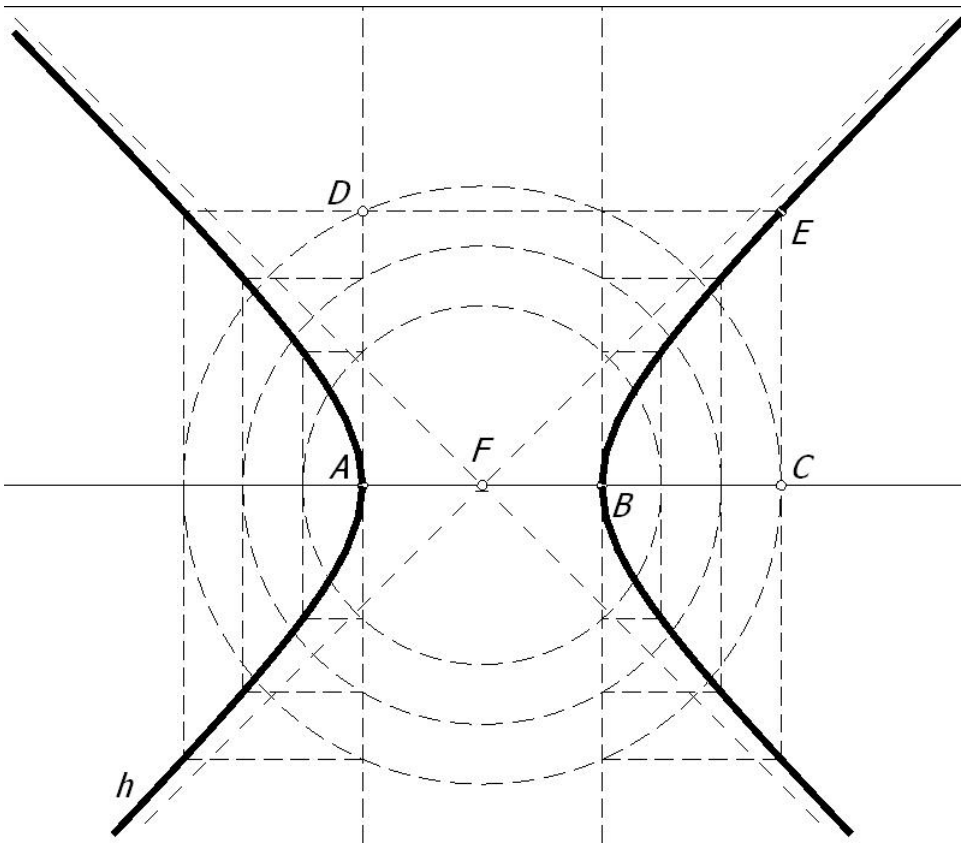


Слика 4

Доказ: Имамо да је $AC : MZ = AB : k$. Тако да је $AC : MZ = HT : BD$, одатле је $AC \cdot BD = MZ \cdot HT$, што даје да је производ основа два паралелопипеда и њихових висина једнак, тако да су они једнаки, што доказује тврђење.

Такође, за решавање кубних једначина биће нам потребно и познавање правоугле хиперболе са врхом B и A, чије је растојање између темена једнако дужи AB. То је крива h, таква да ако је E на h и $ACED$ одређен правоугаоник, онда је $EC^2 = BC \cdot AC$ (тачку E можемо конструисати коришћењем поглавља 4). Нека је F средиште дужи AB, онда ће круг са центром у F и полупречником FC пресећи у D линију нормалну на AB у тачки A. Са слике се такође види како ови кругови конструишу другу грану хиперболе

са врхом у A (видети Слику 5). [14, стр. 132-133]



Слика 5

6 Ал-Хајамова класификација квадратних и кубних једначина

Омар Ал-Хајам је био први који је системски класификовао једначине и решио типове једначина геометријским путем. Међутим, у његово доба негативни бројеви нису били познати и Хајам је решио само једначине које имају позитвина решења.

Прву групу једначина назива **просте једначине** и њих има шест типова:

1. **"Број једнак корену"** ($a = x$)
2. **"Број једнак квадрату"** ($a = x^2$)
3. **"Број једнак кубу"** ($a = x^3$)
4. **"Корен једнак квадрату"** ($x = x^2$)
5. **"Квадрат једнак кубу"** ($x^2 = x^3$)
6. **"Корен једнак кубу"** ($x = x^3$)

Следећа подела коју прави је на **вишечлане једначине**. Које даље дели на трочлане и четворочлане једначине.

Трочлане једначине дели на дванаест типова. Прва три типа су **трочлане квадратне једначине**:

1. **"Квадрат и корен једнак броју"** ($x^2 + bx = a$)
2. **"Квадрат и број једнак корену"** ($x^2 + a = bx$)
3. **"Корен и број једнак квадрату"** ($bx + a = x^2$)

Следећа три типа су **трочлане кубне једначине које се могу превести у квадратне**:

1. **" Куб и квадрат једнак корену"** ($x^3 + cx^2 = bx$)
2. **"Куб и корен једнак квадрату"** ($x^3 + bx = cx^2$)
3. **"Куб једнак корену и квадрату"** ($x^3 = bx + cx^2$)

Осталих шест типова су **трочлане кубне једначине**:

1. **"Куб и корен једнак броју"** ($x^3 + bx = a$)
2. **"Куб и број једнак корену"** ($x^3 + a = bx$)
3. **"Број и корен једнак кубу"** ($a + bx = x^3$)
4. **"Куб и квадрат једнак броју"** ($x^3 + cx^2 = a$)
5. **"Куб и број једнак квадрату"** ($x^3 + a = cx^2$)
6. **"Број и квадрат једнак кубу"** ($a + cx^2 = x^3$)

Следећа Хајамова подела су **четворочлане једначине**:

1. **"Куб, квадрат и корен једнак броју"** ($x^3 + cx^2 + bx = a$)
2. **"Куб, квадрат и број једнак корену"** ($x^3 + cx^2 + a = bx$)
3. **"Куб, корен и број једнак квадрату"** ($x^3 + bx + a = cx^2$)
4. **"Куб једнак корену, квадрату и броју"** ($x^3 = bx + cx^2 + a$)
5. **" Куб и квадрат једнак корену и броју"** ($x^3 + cx^2 = bx + a$)
6. **"Куб и корен једнак квадрату и броју"** ($x^3 + bx = cx^2 + a$)
7. **"Куб и број једнак корену и квадрату"** ($x^3 + a = bx + cx^2$)

Хајам је ових двадесет пет примера једначина решио геометријски помоћу особина конусних пресека. Неке од ових једначина су већ решаване од стране претходних математичара, што Хајам такође наводи при својим решењима.

7 Решавање простих једначина

Први, други и четврти тип простих једначина поменут је у Ал- -Хорезмијевој књизи "Алгебра и алмукабала". Овде ће бити наведени и Ал-Хорезмијеви примери и геометријска решења Ал-Хајама.

За разумевање Ал-Хајамових решења битно је да се на самом почетку објасне три појма: корен, квадрат и број. Корен је било шта што може бити помножено са самим собом, позитивним целим бројем и разломком. Квадрат је резултат множења самим собом корена, целих бројева и разломака. Број је количина која сама по себи нема ознаку корена или квадрата, али је пропорционална броју јединица од којих је састављена.

Први тип: Корен једнак броју $(x = a)$.

За ову једначину решавање није потребно. Али ћу навести Ал--Хорезмијеве примере:

"Корен је једнак 3. Следи 9 је квадрат овог корена $(x = 3; x^2 = 9)$. Четири корена једнако 20. Значи један корен је 5 $(4x = 20; x = 5; x^2 = 25)$. Пола корена је једнако 10. Одатле цео корен је једнак 20. Од чега, наравно, 400 представља квадрат $(\frac{1}{2}x = 10; x = 20; x^2 = 400)$." [6, стр. 71]

Други тип: Квадрат једнак броју $(x^2 = b)$.

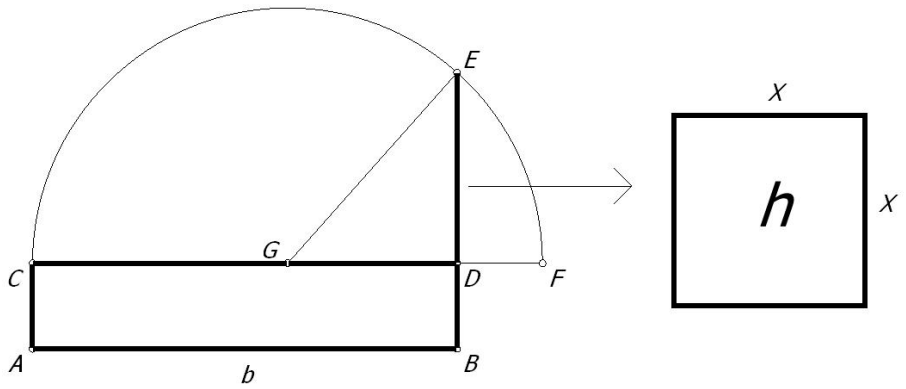
За решавање ове једначине даћу Ал-Хорезмијеве примере као и геометријско решење које је Хајам навео.

"Квадрат је једнак 9. Онда 9 означава квадрат чији је 3 један корен $(x^2 = 9; x = 3)$. Пет квадрата једнако 80. Следи један квадрат је једнак петини од 80, што је наравно 16 $(5x^2 = 80; x^2 = \frac{1}{5}80 = 16; x = 4)$. Пола квадрата једнако је 18. Значи цео квадрат је једнак 36 $(\frac{1}{2}x^2 = 18; x^2 = 36; x = 6)$. Ове операције морају се примењивати на бројевима који прате[13] квадрат." [6, стр. 69]

[13] Корен им је цео број

Геометријско решавање се заправо заснива на Еуклидовом налажењу квадратног корена већ објашњеног у четвртој глави. Заправо треба конструисати правоугаоник чија је површина једнака датом броју, а затим конструисати квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника, одатле добијамо да је квадратни корен датог броја заправо дужина странице квадрата који смо конструисали.

"Конструисати линију AB чија је дужина једнака датом броју и линију AC (дужине један) нормално на AB и онда завршити површину (правоугаоник) AD. Површина површи AD је једнака датом броју. Конструисати квадрат чија је површина једнака површини површи AD, зовемо је h (видети Слика 1), помоћу Еуклидовог доказа (глава 4). Површина квадрата h једнака је датом броју, који је познат и чија је страница такође позната и то је тражени резултат." [4, стр. 5-6]

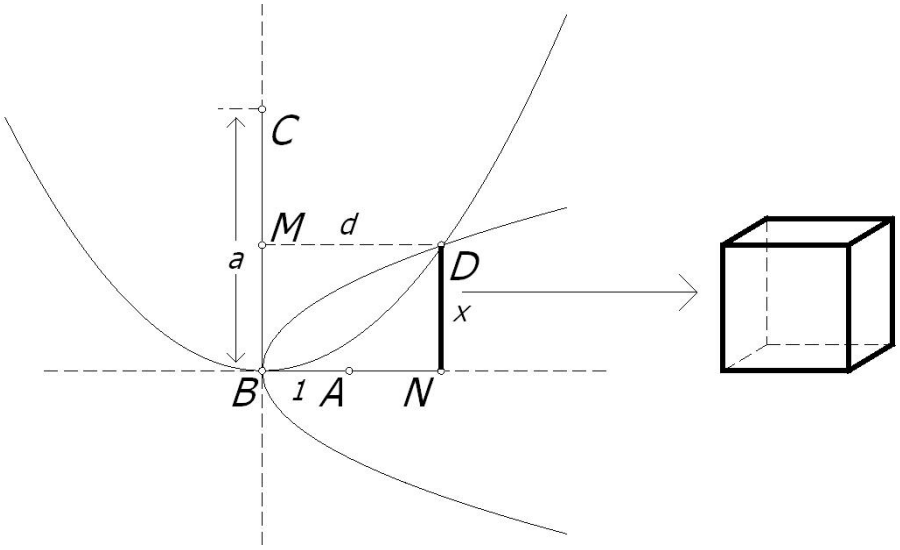


Слика 1

Трећи тип: Број једнак кубу $(a = x^3)$.

Геометријско решење ове једначине већ је дато у петој глави. Ако конструишемо параболу са врхом B , осом BC и параметром BC и још једну параболу са врхом B, осом AB и параметром AB. Нека је $BC \perp AB$ и нека је $AB = 1$ и $BC = a$, где је a позитиван

реалан број (видети Слику 2). Решење једначине престављено је са x.

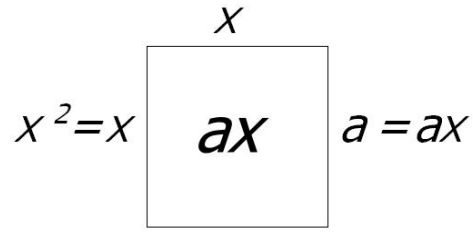


Слика 2

Четврти тип: Квадрат једнак корену ($x^2 = ax$).

"Квадрат једнак свом петоструком корену. Добијамо да је корен овог квадрата 5, а 25 је квадрат чији је корен 5 ($x^2 = 5x; x = 5; x^2 = 25$). Трећина квадрата једнака његовом четвороструком корену. Добијамо да је корен 12, а да је квадрат 144 ($\frac{1}{3}x^2 = 4x; x = 12; x^2 = 144$)." [6, стр. 69]

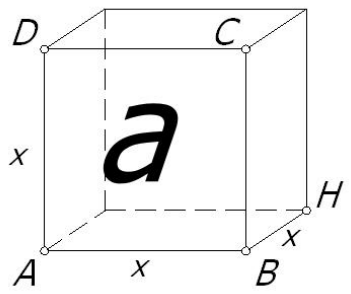
За геометријско решење Хајам конструише квадрат чија је површина једнака a пута дужина његове стране.



Слика 3

Пети тип: Корен једнак кубу ($ax = x^3$).

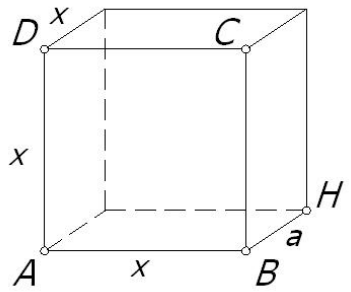
Геометријско решење: Хајам конструише коцку $ABCDH$ чија је запремина једнака производу броја a (површина квадрата) и дужине њене странице AB. Дакле, $a \cdot AB = AB^3$, али и $AB \cdot AC = AB^3$, где је AC површина основе коцке. Одавде се види да је површина основе AC једнака a (видети Слику 4). [4, стр. 7]



Слика 4

Шести тип: Квадрат једнак кубу ($ax^2 = x^3$).

Хајам конструише коцку $ABCDH$ чија је запремина једнака производу површине његове стране AC и броја a. Ако је $AC \cdot a = AB^3$, такође је $AC \cdot BD = AB^3$. Одавде је дужина BD једнака a, што је и тражено (видети Слику 5). [4, стр. 7-8]



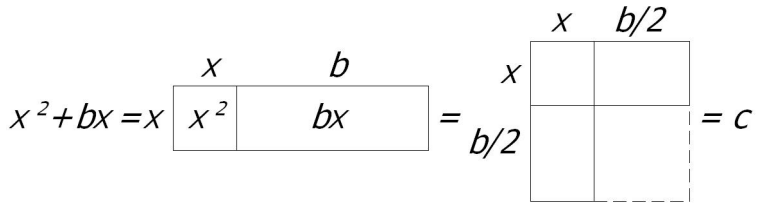
Слика 5

8 Решавање квадратних једначина

Сада ћемо прећи на геометријско решавање трочланих квадратних једначина којих имамо три типа. [14, стр. 129-130]

Први тип: Збир квадрата и његовог корена једнак је броју $(x^2 + bx = c)$.

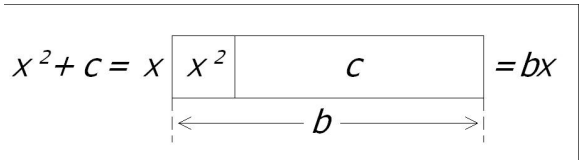
Геометријско решење:



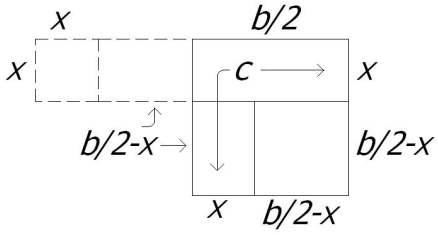
Ако доцртамо квадрат чија је страница једнака $x + b/2$, добијамо $(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$, одавде добијамо $x = -b/2 + \sqrt{[(b/2)^2 + c]}$. Приметимо сличност належења решења x са налажењем квадратног корена помоћу сутри (видети поглавље 3).

Други тип: Збир квадрата и броја једнак је корену $(x^2 + c = bx)$.

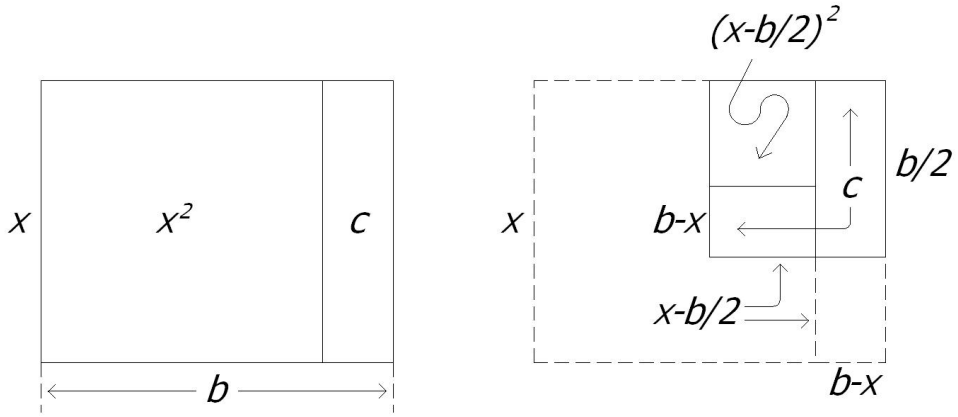
Прво претпоставимо да је $x < (b/2)$, геометријско решење једначине:



Приметимо да је квадрат чија је страница једнака $b/2$ једнак $(b/2 - x)^2 + c$, тј. $(b/2)^2 = (b/2 - x)^2 + c$.



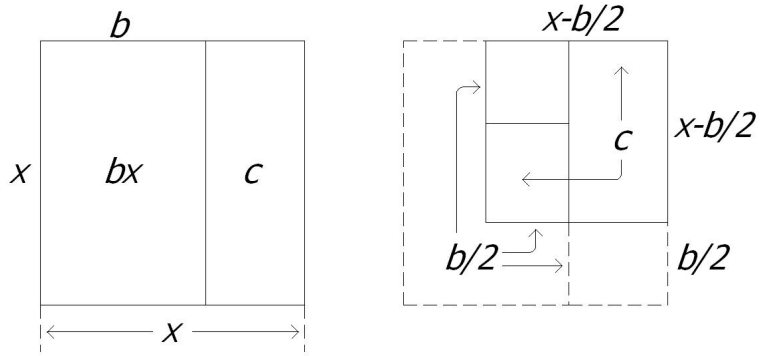
Одавде добијамо да је $x = b/2 - \sqrt{[(b/2)^2 - c]}$, ако је $c > (b/2)^2$ геометријско решење је немогуће. Када је $x > (b/2)$, геометријско решење је:



Сада је квадрат чија је страница $b/2$ једнак $(x-b/2)^2+c$, тј. $(b/2)^2 = (x-b/2)^2 + c$. Одавде је $x = b/2 + \sqrt{[(b/2)^2 - c]}$.

Трећи тип: Збир броја и корена једнак је квадрату $(c+bx = x^2)$.

Геометријско решење:



Приметимо да је квадрат чија је страница једнака $x - b/2$ једнак $(b/2)^2 + c$, тј. $(x - b/2)^2 = (b/2)^2 + c$. Одавде је $x = b/2 + \sqrt{[(b/2)^2 + c]}$.

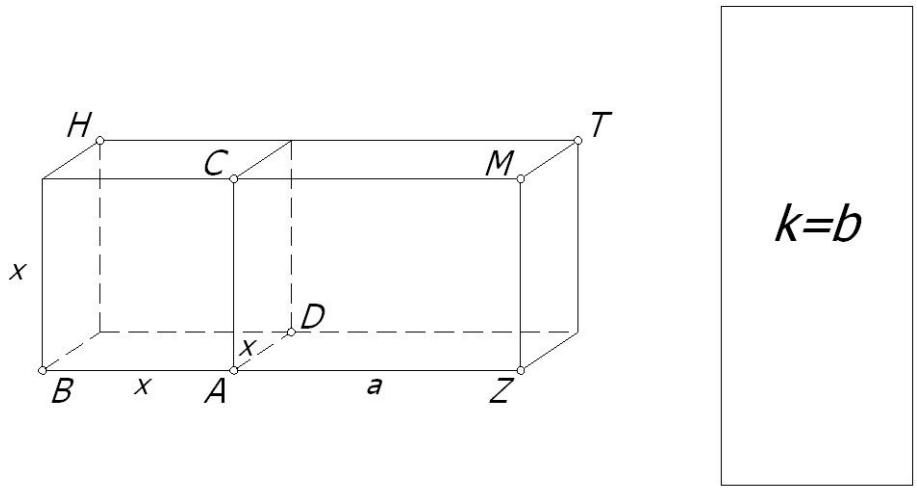
9 Решавање трочланих кубних једначина које се могу превести у квадратне

Размотрићемо овде Хајамов начин решавања кубних једначина које се могу превести у квадратне. Хајам решења (полазећи од кубних једначина) доводи до решења квадратних једначина из претходног поглавља. [4, стр. 12-14]

Први тип: Куб и квадрат једнак корену $(x^3 + ax^2 = bx)$.

Из $x^3 + ax^2 = bx$ треба да добијемо $x^2 + ax = b$.

Констрише коцку $ABCDH$ (x^3), тако да важи $x^3 + ax^2 = bx$. Затим, продужава AB до Z тако да је $AZ = a$ (видети Слику 1). Потом, довршава паралелопипед $AZMTCD$ уз коцку AH, запремина паралелопипеда AT једнака је ax^2. Дакле, запремина добијеног великог паралелопипеда BT једнака је x^3+ax^2, што је једнако bx. Хајам, затим, конструише правоугаоник k чија је површина једнака b. Страница коцке AH конструисана је тако да је $AD = x$. Ако површину правоугаоника k помножи са дужином AD резултат ће бити bx. Сада, ако површину правоугаоника MB помножи са дужином AD добија $x^3 + ax^2$, што је исто запремини коју је добио множењем k и AD, тј. bx.

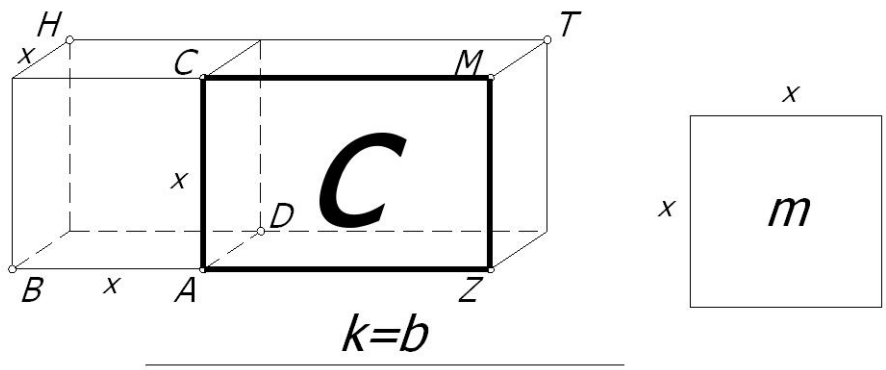


Слика 1

Дакле, паралелопипед BT и паралелопипед конструисан над површи k са висинама AD имају исте запремине, а пошто имају исте запремине и исте висине морају имати и исте основе. Основа MB једнака је збиру површине квадрата CB (x^2) и површи MA, која је једнака ax. Како је површ k конструисао као површински једнаку b, добија $x^2 + ax = b$, што је хтео да покаже и што је решено у претходном поглављу.

Други тип: Куб и корен једнак квадрату ($x^3 + cx = bx^2$).

Поново нам је циљ да покажемо да се ова једначина преводи у квадратну, чије је решење у поглављу осам. Из $x^3 + cx = bx^2$ добијамо $x^2 + c = bx$.



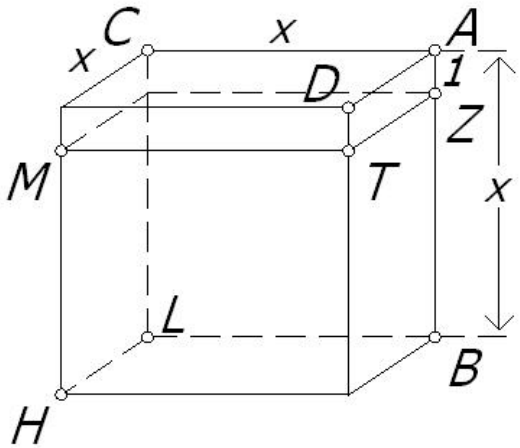
Слика 2

Доказ: Хајам конструише коцку $ABCDH$ (x^3), тако да важи $x^3+cx = bx^2$. Затим, конструише квадрат m једнак квадрату CB (x^2) и црта дуж k, тако да је $k = b$, дакле, $k \cdot m = bx^2$, где је $x = AC$ (страница коцке $ABCDH$). Потом, конструише на AC правоугаоник чија је површина једнака c, затим, довршава паралелопипед $AZCTD$, запремина паралелопипеда $AZCTD$ једнака је cx. Ако дужину странице BZ помножи са површином квадрата BC, добија запремину паралелопипеда BT. Међутим, запремина паралелопипеда AT једнака је cx, дакле, запремина паралепопипеда BT једнака је x^3+cx. Значи, запремина паралелопипеда BT једнака је bx^2, одакле је дужина BZ једнака b. Правоугаоник MB површински је једнак $x^2 + c$, дакле, $x^2 + c = bx$, јер је правоугаоник MB производ AC и b и то је оно што је хтео да покаже (видети Слику 2).

Трећи тип: Куб једнак квадрату и корену $(x^3 = x^2 + cx)$.

Из $x^3 = x^2 + cx$ треба да добијемо $x^2 = x + c$.

Доказ: Хајам је прво конструисао коцку $ABCDH$ (x^3), која је једнака $x^2 + cx$. Потом, одузима од AB $(AB = x)$ дужину AZ $(AZ = 1)$. Затим, довршава паралелопипед $AZTMC$ тако да је његова запремина једнака x^2. Оно што остаје је паралелопипед ZH, који је запремински једнак cx. Пропорција запремина два паралелопидеда једнака је пропорцији основе ZC према основи ZL, тј. $(x^2 : cx = x : c)$, као што је показано у ставу XI.32[14] књиге *Елементи*, пошто су њихове висине исте. Али површина правоугаоника ZC једнака је x, а површина ZL једнака је c. Дакле, квадрат CB (x^2) једнак је $x + c$, и то је оно што је хтео да покаже (видети Слику 3).



Слика 3

[14]Став XI.32: "Паралелопипеди са истом висином се односе један према другом као основе." [12]

10 Кубне трочлане једначине

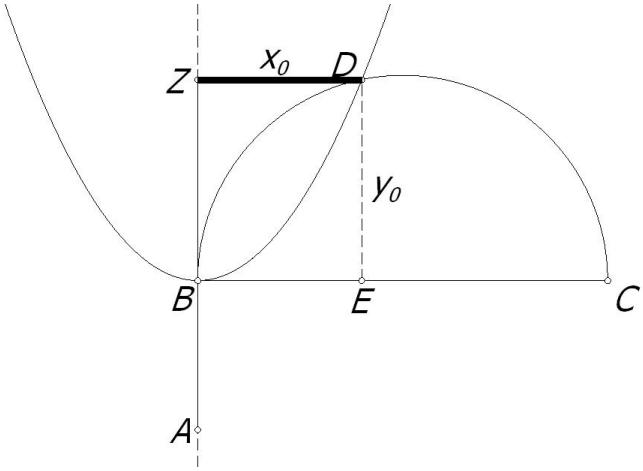
Размотрићемо овде Хајамов начин решавања трочланих кубних једначина. Хајам користи грчку идеју хомогености, па сваку кубну једначину разматра као једнакост тела (запремина).

За разумевање решења битно је да на почетку објаснимо да под параметром параболе подразумевамо дужину $2p$ (p - растојање изме- ђу жиже и директрисе) која се користи у савременој нотацији једна- чине параболе (нпр. $y^2 = 2px$).

Такође, да напоменем да су решења за први тип овог поглавља и пети тип наредног поглавља преузети из књиге "Математика и поезија Омара Хајама" проф. др Павла Младеновића, а сви остали типови из ова два поглавља написани су на основу та два решења.

Први тип: Збир куба и корена једнак броју ($x^3 + ax = b$).

Хајам једначину $x^3 + ax = b$ разматра као једнакост тела. С обзиром да x представља страницу коцке, то је a површ, која се може представити као квадрат. Дакле, ax је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 1):



Слика 1.

Прво конструише дуж AB која је једнака страници квадрата a, тј. $AB = \sqrt{a}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp AB$ и $BC \cdot AB^2 = b$, тј. $BC = b/a$. Затим, конструише параболу са теменом B, чија

је оса права AB и параметар једнак дужи AB, тако да се тачка A и парабола налазе са разних страна праве BC. У савременој нотацији, једначина те параболе је

$$\sqrt{a} \cdot y = x^2.$$

Хајам затим конструише полукружницу са пречником BC, која се налази у истој полуравни одређеној правом BC као и парабола. Једначина те полукружнице је

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \qquad y \geq 0,$$

односно, у еквивалентном облику,

$$x\left(\frac{b}{a} - x\right) = y^2, \qquad y \geq 0.$$

Полукружница и парабола секу се у тачки D. Ако је E подножје нормале из D на BC, онда дуж $x_0 = BE$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и кружнице.

Ако је Z подножје нормале из D на праву AB и ако се уведе ознака $y_0 = BZ = ED$, онда важи

$$\sqrt{a} \cdot y_0 = x_0^2 \qquad \text{односно} \qquad \frac{\sqrt{a}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0},$$

јер тачка D припада параболи. Осим тога,

$$x_0\left(\frac{b}{a} - x_0\right) = y_0^2 \qquad \text{односно} \qquad \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{\frac{b}{a} - x_0},$$

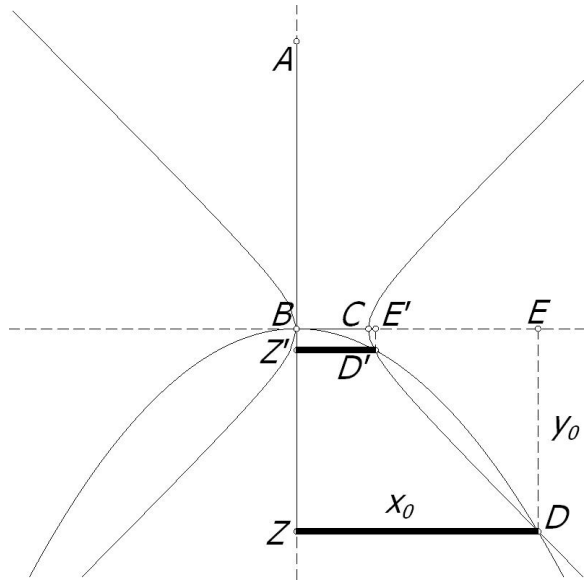
јер тачка D припада и полукружници. Из ових једнакости следи

$$\frac{a}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{y_0}{\frac{b}{a} - x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{\frac{b}{a} - x_0},$$

па је даље $x_0^3 = b - ax_0$, односно $x_0^3 + ax_0 = b$, тј. x_0 је решење разматране једначине. Хајам је овде приметио да ова класа једначина увек има јединствено (позитивно) решење, јер се парабола и полукружница секу у једној тачки која је различита од координатног почетка. [3, стр. 26-27]

Други тип: Збир куба и броја једнак корену $(x^3 + a = bx)$.

Због разматрања једначина као једнакости тела, у једначини $x^3 + a = bx$, x представља страницу коцке, b је површ, која се може представити као квадрат. Што даје да је bx тело и a је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 2):



Слика 2.

Прво конструише дуж AB која је једнака страници квадрата b, тј. $AB = \sqrt{b}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp AB$ и $BC \cdot AB^2 = a$, тј. $BC = a/b$ и BC је са десне стране праве AB. Затим конструише параболу са теменом B, чија је оса права AB и параметар једнак дужи AB, тако да се тачка A и парабола налазе са разних страна праве BC. У савременој нотацији, једначина те параболе је

$$-\sqrt{b} \cdot y = x^2.$$

Хајам затим конструише правоуглу хиперболу са теменима C и B, чија је оса права BC и растојање између темена једнако дужи BC. Означимо са R средиште дужи BC. Тада важи:

$$BR = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2b} = CR.$$

Зато се једначина хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x - BR)^2}{CR^2} - \frac{y^2}{CR^2} = 1.$$

Заменимо CR и BR у претходну једначину и добијамо

$$\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2-y^2=\left(\frac{a}{2b}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину хиперболе у облику

$$y^2=x\left(x-\frac{a}{b}\right).$$

Ако се парабола и хипербола секу, сваки њихов пресек даје решење кубне једначине (осим пресека у тачки B). Хипербола и парабола секу се у тачки D. Ако је E подножје нормале из D на BC, онда дуж $x_0=BE$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и хиперболе.

Ако је Z подножје нормале из D на праву AB и ако се уведе ознака $y_0=BZ=ED$, онда важи

$$-\sqrt{b}\cdot y_0=x_0^2 \qquad \text{односно} \qquad -\frac{\sqrt{b}}{x_0}=\frac{x_0}{y_0},$$

јер тачка D припада параболи. Осим тога,

$$x_0\left(x_0-\frac{a}{b}\right)=y_0^2 \qquad \text{односно} \qquad \frac{x_0}{y_0}=\frac{y_0}{x_0-\frac{a}{b}},$$

јер тачка D припада и хиперболи. Из ових једнакости следи

$$\frac{b}{x_0^2}=\frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{y_0}{x_0-\frac{a}{b}}\cdot\frac{x_0}{y_0}=\frac{x_0}{x_0-\frac{a}{b}},$$

па је даље $x_0^3=bx_0-a$, односно $x_0^3+a=bx_0$, тј. x_0 је решење разматране једначине (негативно ако је са леве стране и позитивно ако је са десне стране праве AB). Хајам је овде приметио да у случајевима ако се парабола и хипербола не секу (са десне стране) нема могућих решења.

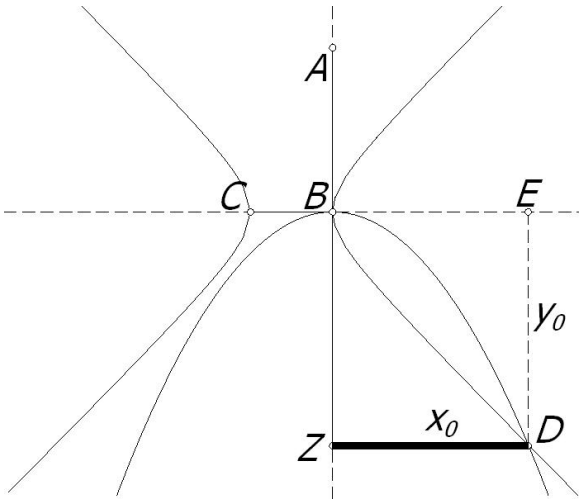
Трећи тип: Куб једнак збиру корена и броја ($x^3=ax+b$).

У једначини $x^3=ax+b$, x представља страницу коцке, a је површ, која се може представити као квадрат, што даје да је ax је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети

Слику 3):

Прво конструише дуж AB која је једнака страници квадрата a, тј. $AB = \sqrt{a}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp AB$ и $BC \cdot AB^2 = b$, тј. $BC = b/a$ и BC је са леве стране праве AB. Затим, конструише параболу са теменом B, чија је оса права AB и параметар једнак дужи AB, тако да се тачка A и парабола налазе са разних страна праве BC. У савременој нотацији, једначина те параболе је

$$-\sqrt{a} \cdot y = x^2.$$



Слика 3.

Хајам затим конструише правоуглу хиперболу са теменима C и B, чија је оса права BC и растојање између темена једнако дужи BC. Означимо са R средиште дужи BC. Тада важи:

$$BR = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2a} = CR.$$

Зато се једначина хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x + BR)^2}{CR^2} - \frac{y^2}{CR^2} = 1.$$

Заменимо CR и BR у претходну једначину и добијамо

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину хиперболе у облику

$$y^2 = x\left(x + \frac{b}{a}\right).$$

Ако се парабола и хипербола секу, сваки њихов пресек даје решење кубне једначине (осим пресека у тачки B). Хипербола и парабола секу се у тачки D. Ако је E подножје нормале из D на BC, онда дуж $x_0 = BE$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и хиперболе.

Ако је Z подножје нормале из D на праву AB и ако се уведе ознака $y_0 = BZ = ED$, онда важи

$$-\sqrt{a} \cdot y_0 = x_0^2 \qquad \text{односно} \qquad -\frac{\sqrt{a}}{x_0} = \frac{x_0}{y_0},$$

јер тачка D припада параболи. Осим тога,

$$x_0\left(x_0 + \frac{b}{a}\right) = y_0^2 \qquad \text{односно} \qquad \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{b}{a}},$$

јер тачка D припада и хиперболи. Из ових једнакости следи

$$\frac{a}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{y_0}{x_0 + \frac{b}{a}} \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0}{x_0 + \frac{b}{a}},$$

па је даље $x_0^3 = ax_0 + b$, тј. x_0 је решење разматране једначине (негативно ако је са леве стране и позитивно ако је са десне стране праве AB). Јасно је да овај тип има само једно позитивно решење (видети Слика 3).

Четврти тип: Збир куба и квадрата једнак броју $(x^3 + ax^2 = b)$.

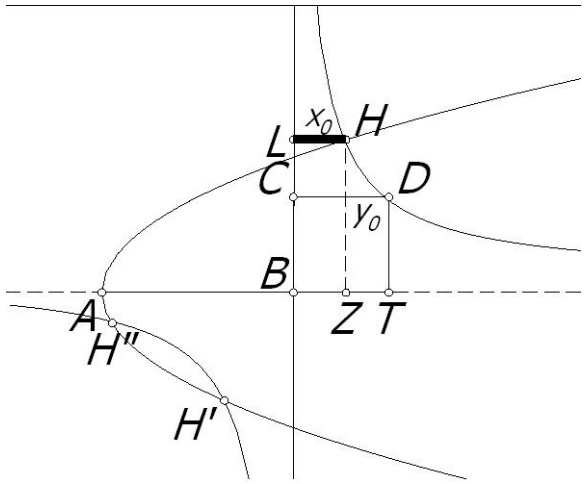
Сада ћемо објаснити Хајамову конструкцију решења једначине $x^3 + ax^2 = b$, где x представља страницу коцке, a је дуж, што даје ax^2 је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 4):

Прво конструише дуж AB која је једнака броју уз квадрат, тј. a, добијамо $AB = a$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp AB$ и $BC^3 = b$, тј. $BC = \sqrt[3]{b}$. Затим, конструише квадрат $BTDC$ чија је страница BC

и који је са супротне стране праве BC у односу на A. Затим, конструише хиперболу која пролази кроз тачку D и којој су асимптоте праве AB и BC.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка T припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка C припада позитивном делу ординатне осе. У савременој нотацији, једначина те хиперболе је

$$xy = \frac{(\sqrt{2}\sqrt[3]{b})^2}{2} \qquad \text{односно} \qquad xy = (\sqrt[3]{b})^2.$$



Слика 4.

Хајам затим конструише параболу са теменом A, чија је оса права AB и параметар једнак дужи BC. Једначина те параболе је

$$y^2 = \sqrt[3]{b}(x + a).$$

Хипербола и парабола секу се у тачки H. Ако је Z подножје нормале из H на AB, онда дуж $x_0 = BZ$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и хиперболе.

Ако је L подножје нормале из H на праву BC и ако се уведе ознака $y_0 = BL = ZH$, онда са (x_0, y_0) означавамо координате тачке H. Пошто тачка H припада параболи и хиперболи, то из претходних једначина добијамо да је

$$x_0 y_0 = (\sqrt[3]{b})^2, \qquad y_0^2 = \sqrt[3]{b}(x_0 + a).$$

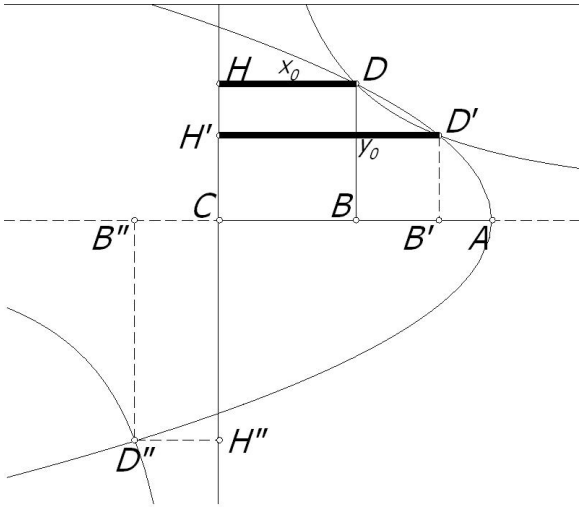
Из прве од претходно наведених једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{(\sqrt[3]{b})^4}{x_0^2} = \sqrt[3]{b}(x_0 + a),$$

одакле једноставно следи $x_0^3 + ax_0^2 = b$, тј. x_0 је решење разматране једначине. Хајам је овде приметио да ова класа једначина увек има јединствено (позитивно) решење, јер се парабола и хипербола секу у једној тачки која је различита од координатног почетка.

Пети тип: Збир куба и броја једнак квадрату $(x^3 + a = bx^2)$.

Разматрамо објашњење Хајамове конструкције решења једначине $x^3 + a = bx^2$, где x представља страницу коцке, b је дуж, што даје bx^2 је тело и a је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин:



Слика 5.1

Прво конструише дуж AC која је једнака броју уз квадрат, тј. b, добијамо $AC = b$. Затим конструише коцку чија је запремина a и нека јој је страница m, тј. $m = \sqrt[3]{a}$. Имамо три могућности: $m < b$, $m > b$ или $m = b$. Ако је $m = b$, једначина нема решења.[15] У случају

[15] Ако је $m = b$, m мора задовољавати једну од могућности: $m > x$, $m < x$ или $m = x$. Одакле имамо за $m > x \Rightarrow x^3 + m^3 > mx^2$, за $m < x \Rightarrow x^3 + m^3 > mx^2$ и за $m = x \Rightarrow 2m^3 > m^3$. Што показује да једнакост за овај случај не важи.

да је $m > b$, једначина такође нема решење.[16] Дакле, m мора бити мање од b да би једначина имала решење.

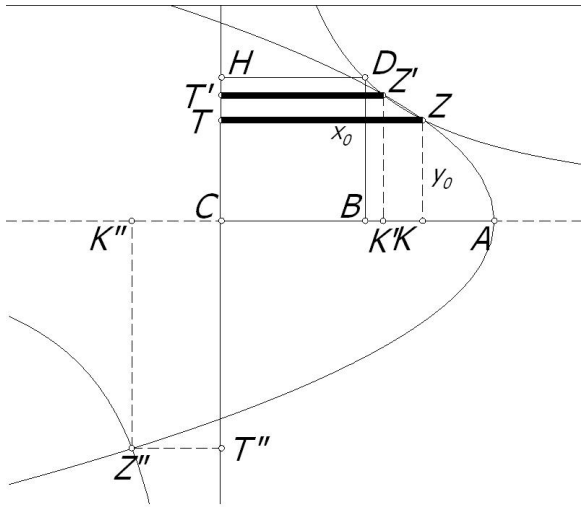
Конструише дуж BC на дужи AC, тако да важи $BC^3 = a$, тј. $BC = m = \sqrt[3]{a}$. Затим, конструише квадрат $BDHC$ чија је страница BC и који је са супротне стране праве BD у односу на A. Затим, конструише хиперболу која пролази кроз тачку D и којој су асимптоте праве AC и CH. Хајам затим конструише параболу са теменом A, чија је оса права AC и параметар једнак дужи BC.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка C координатни почетак и да тачка A припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка H припада позитивном делу ординатне осе. У савременој нотацији, једначина те хиперболе је

$$xy = \frac{(\sqrt{2}\sqrt[3]{a})^2}{2} \qquad \text{односно} \qquad xy = (\sqrt[3]{a})^2.$$

Једначина те параболе је

$$y^2 = -\sqrt[3]{a}(x - b).$$



Слика 5.2

[16] Ако је $m > b$, m мора задовољавати једну од могућности: $m > x$, $m < x$ или $m = x$. Одакле имамо за $m > x \Rightarrow x^3 + m^3 > bx^2$, за $m < x \Rightarrow x^3 + m^3 > bx^2$ и за $m = x \Rightarrow 2m^3 > bm^2$. Што показује да једнакост и у овом случају не важи.

Имамо три могућности за конструкцију решења ове једначине; прво да је $BC = AB$ (видети Слику 5.1), друго да је $BC > AB$ (видети Слику 5.2) и $BC < AB$ (видети Слику 5.3).

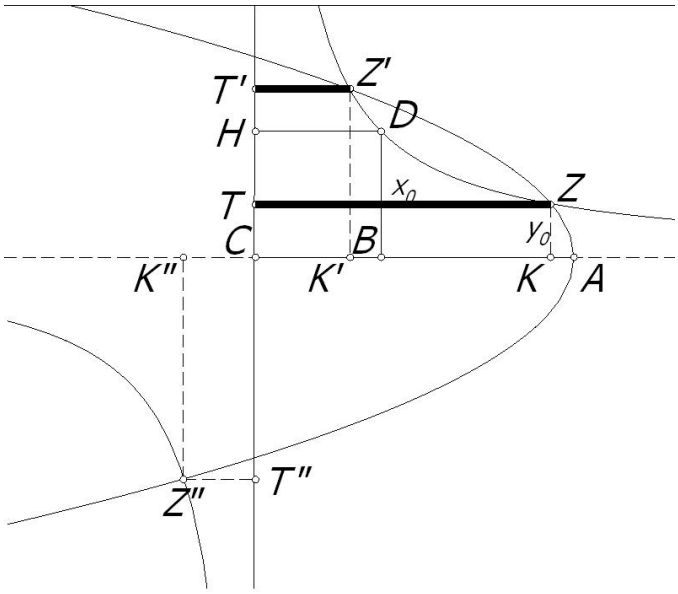
У првом случају када је $BC = AB$ парабола и хипербола се секу у тачки D јер је $BD^2 = AB \cdot BC$. Онда дуж $x_0 = HD$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и хиперболе. Ако се уведе ознака $y_0 = BD$, онда са (x_0, y_0) означавамо координате тачке D. Пошто тачка D припада параболи и хиперболи, то из претходних једначина добијамо да је

$$x_0 y_0 = (\sqrt[3]{a})^2, \qquad y_0^2 = -\sqrt[3]{a}(x_0 - b).$$

Из прве од претходно наведених једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^4}{x_0^2} = -\sqrt[3]{a}(x_0 - b),$$

одакле једноставно следи $-a = x_0^3 - bx_0^2$, односно $x_0^3 + a = bx_0^2$, тј. x_0 је решење разматране једначине. Хајам је овде приметио да се парабола и хипербола могу пресећи и у још једној тачки која такође даје позитивно решење једначине.



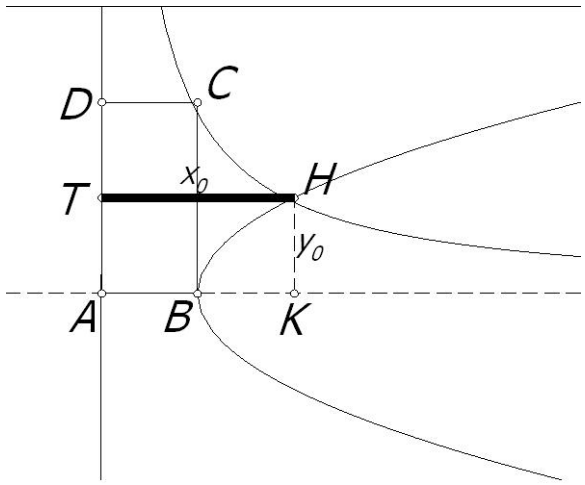
Слика 5.3

Други случај $BC > AB$ тачка D пада ван параболе, јер је $DB^2 > AB \cdot BC$. Две конике се могу пресећи на два места или дотаћи тангентно у тим случајевима имамо решење. Ако се парабола и хипербола не секу, нема решења.

У трећем случају када је $BC < AB$ тачка D пада унутар параболе, па се конике секу на два места, имамо два позитивна решења. Свако решење се доказује исто као и у случају када се конике секу у тачки D, јер ако је пресек рецимо тачка Z површина правоугаоника ZC једнака је површини квадрата DC, па је једначина хиперболе иста (узимамо координате тачке Z).

Шести тип: Куб једнак збиру квадрата и броја ($x^3 = ax^2 + b$).

Сада ћемо објаснити Хајамову конструкцију решења једначине $x^3 = ax^2+b$, где x представља страницу коцке, a је дуж, што даје ax^2 је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 6):



Слика 6.

Прво конструише дуж AB која је једнака броју уз квадрат, тј. a, добијамо $AB = a$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp AB$ и $BC^2 \cdot AB = b$, тј. $BC = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. Затим, конструише правоугаоник $BADC$, па хиперболу која пролази кроз тачку C и којој су асимптоте праве AB и AD.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је

тачка A координатни почетак и да тачка B припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка D припада позитивном делу ординатне осе.

Хајам конструише параболу са теменом B, чија је оса права AB и параметар једнак дужи AB. Једначина те параболе је

$$y^2 = a(x - a).$$

Хипербола и парабола секу се у тачки H. Ако је K подножје нормале из H на AB, онда дуж $x_0 = AK$ представља решење разматране једначине. Хајам доказује да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства параболе и хиперболе.

Ако је T подножје нормале из H на праву AD и ако се уведе ознака $y_0 = AT = KH$, онда са (x_0, y_0) означавамо координате тачке H. Површина правоугаоника $BADC$ једнака је површини правоугаоника $AKHT$ и из једнакости ових површина добијамо једначину хиперболе

$$xy = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot a.$$

Пошто тачка H припада параболи и хиперболи, то из претходних једначина добијамо да је

$$x_0 y_0 = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \cdot a, \qquad y_0^2 = a(x_0 - a).$$

Из прве од претходно наведених једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{b \cdot a^2}{a \cdot x_0^2} = a(x_0 - a),$$

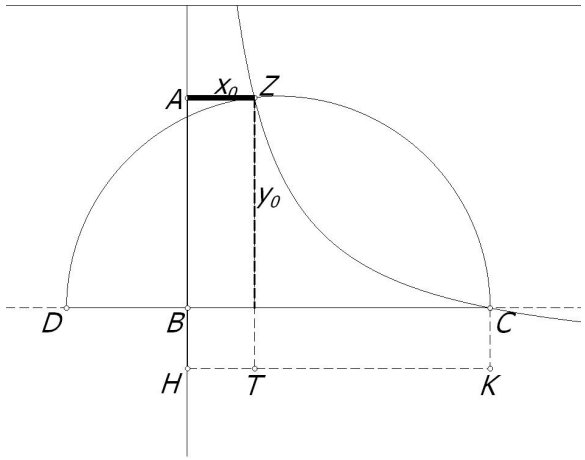
одакле следи $b = x_0^3 - ax_0^2$, односно $x_0^3 = ax_0^2 + b$, тј. x_0 је решење разматране једначине. Хајам је овде приметио да ова класа једначина увек има јединствено (позитивно) решење, јер се парабола и хипербола секу у једној тачки која је различита од координатног почетка.

11 Кубне четворочлане једначине

У овом поглављу размотрићемо Хајамов начин решавања четворочланих кубних једначина.

Први тип: Збир куба, квадрата и корена једнак је броју ($x^3 + ax^2 + bx = c$).

Једначину $x^3 + ax^2 + bx = c$ разматрамо као једнакост тела. С обзиром да x представља страницу коцке, то је b површ, која се може представити као квадрат, a је дуж. Дакле, ax^2 је тело, bx је тело и c је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 1):



Слика 1.

Прво конструише дуж BH која је једнака страници квадрата b, тј. $BH = \sqrt{b}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp BH$ и $BC \cdot BH^2 = c$, тј. $BC = c/b$. Потом, конструише дуж BD на дужи BC, тако да су C и D са разних страна тачке B и важи $BD = a$, па конструише правоугаоник $BHKC$. Затим, конструише хиперболу која пролази кроз тачку C, којој су асимптоте праве HK и BH. Хајам затим конструише полукружницу са пречником DC, која се налази у различитој полуравни од тачке H у односу на праву BC.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка C припада позитивном

делу апсцисне осе, а тачка H припада негативном делу ординатне осе.

Полукружница и хипербола секу се у тачкама C и Z. Ако је T подножје нормале из Z на HK и ако је A подножје нормале из Z на праву BH, онда је површина правоугаоника $HKCB$ једнака површини правоугаоника $THAZ$. Ако са x и y означимо координате тачке Z, која припада хиперболи, онда важи

$$ZA = x, \qquad ZT = y + \sqrt{b},$$

па из једнакости површина правоугаоника добијамо једначину хиперболе у савременој нотацији

$$x(y + \sqrt{b}) = \frac{c}{b}\sqrt{b} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{b}\left(\frac{c}{b} - x\right).$$

За једначину полукружнице морамо прво да изразимо следеће: означимо са R средиште дужи DC. Тада важи:

$$CR = \frac{DC}{2} = \frac{BC + DB}{2} = \frac{\frac{c}{b} + a}{2},$$

$$BR = CR - BD = \frac{a + \frac{c}{b}}{2} - a = \frac{\frac{c}{b} - a}{2}.$$

Једначина полукружнице може записати у облику

$$(x - BR)^2 + y^2 = CR^2.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x - \frac{\frac{c}{b} - a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\frac{c}{b} + a}{2}\right)^2, \qquad y \geq 0,$$

односно, у еквивалентном облику,

$$\left(\frac{c}{b} - x\right)(x + a) = y^2, \qquad y \geq 0.$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке Z. Пошто тачка Z припада и хиперболи и полукружници, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{b}\left(\frac{c}{b} - x_0\right), \qquad y_0^2 = \left(\frac{c}{b} - x_0\right)(x_0 + a).$$

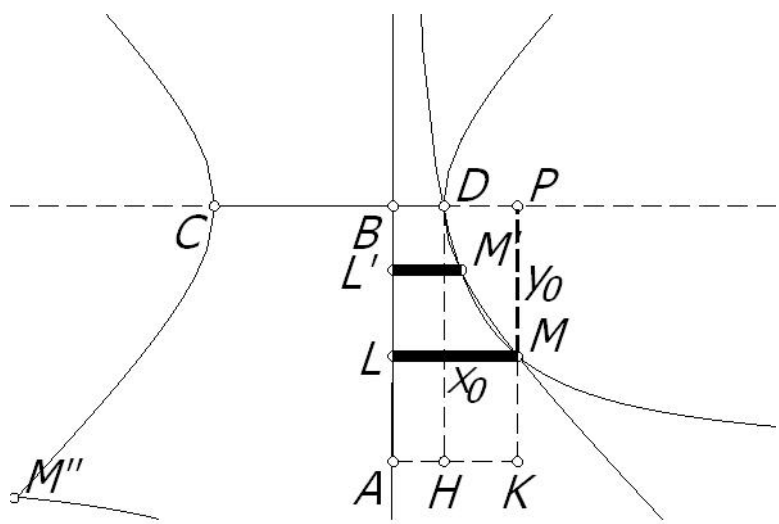
Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{b}{x_0^2}\left(\frac{c}{b}-x_0\right)^2=\left(\frac{c}{b}-x_0\right)(x_0+a),$$

одакле једноставно следи да је $c-bx_0=x_0^3+ax_0^2$, односно $x_0^3+ax_0^2+bx_0=c$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека хиперболе и полукружнице задовољава дату једначину. Хајам је доказао да је ова дуж заиста решење једначине користећи својства хиперболе и кружнице. Хајам је овде приметио да ова класа једначина нема других случајева и увек има (позитивно) решење, јер се хипербола и полукружница секу у једној тачки (са десне стране ординатне осе) која је различита од координатног почетка.

Други тип: Збир куба, квадрата и броја једнак је корену ($x^3+ax^2+b=cx$).

Једначину $x^3+ax^2+b=cx$ разматрамо као једнакост тела. Ако са x представљамо страницу коцке, то је c површ, која се може представити као квадрат, a је дуж. Дакле, ax^2 је тело, cx је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 2):



Слика 2.

Прво конструише дуж AB која је једнака страници квадрата c, тј. $AB=\sqrt{c}$ и дуж BC, тако да важи $BC\perp AB$ и $BC=a$. Потом,

конструише дуж BD на дужи BC, тако да су C и D са различите стране тачке B и важи $BD \cdot AB^2 = b$, тј. $BD = b/c$, па конструише правоугаоник $DBAH$. Затим, конструише хиперболу кроз тачку D и којој су асимптоте праве AB и AH. Хајам затим конструише још једну хиперболу са теменом D, осом BD и којој је растојање између два темена једнако дужи DC.

Две хиперболе се пресецају у тачки D, јер их је тако конструисао. Ако се секу у још некој тачки сем D, једначина има два позитивна решење, у супротном има једно (позитивно) решење.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка D припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка A припада негативном делу ординатне осе.

Узмимо да је друга тачка пресека хипербола, тачка M. Ако је K подножје нормале из M на AH, а P подножје нормале из M на AB, онда је површина правоугаоника $ALMK$ једнака површини правоугаоника $BDHA$. Ако са x и y означимо апсолутне вредности координата тачке M, која припада првој од конструисаних хипербола, онда важи

$$ML = x, \qquad MK = \sqrt{c} - y,$$

па из једнакости површина правоугаоника добијамо једначину хиперболе у савременој нотацији

$$x(\sqrt{c} - y) = \frac{b}{c}\sqrt{c} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{c}\left(x - \frac{b}{c}\right).$$

За једначину друге хиперболе морамо прво да изразимо следеће: означимо са R средиште дужи DC. Тада важи:

$$CR = \frac{DC}{2} = \frac{BC + DB}{2} = \frac{a + \frac{b}{c}}{2},$$

$$BR = CR - BD = \frac{a + \frac{b}{c}}{2} - \frac{b}{c} = \frac{a - \frac{b}{c}}{2}.$$

Зато се једначина друге хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x + BR)^2}{CR^2} - \frac{y^2}{CR^2} = 1.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x+\frac{a-\frac{b}{c}}{2}\right)^2-y^2=\left(\frac{a+\frac{b}{c}}{2}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину друге хиперболе у облику

$$y^2=\left(x-\frac{b}{c}\right)(x+a).$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке M. Пошто тачка M припада обема хиперболама, добијамо да је

$$x_0y_0=\sqrt{c}\left(x_0-\frac{b}{c}\right), \qquad y_0^2=\left(x_0-\frac{b}{c}\right)(x_0+a).$$

Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{c}{x_0^2}\left(x_0-\frac{b}{c}\right)^2=\left(x_0-\frac{b}{c}\right)(x_0+a),$$

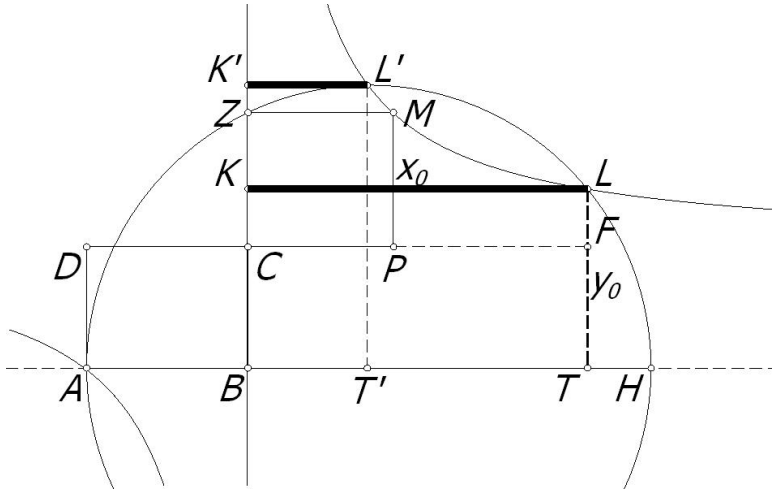
одакле једноставно следи да је $x_0^3+ax_0^2=cx_0-b$, односно $x_0^3+ax_0^2+b=cx_0$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека хипербола задовољава дату једначину. Хајам је ово доказао користећи својство хиперболе. Хајам је овде приметио да ова класа једначина нема различитих случајева и може имати једно или два (позитивна) решења.

Трећи тип: Збир куба, корена и броја једнак је квадрату $(x^3+ax+b=cx^2)$.

Једначину $x^3+ax+b=cx^2$ разматрамо као једнакост тела. С обзиром да x представља страницу коцке, то је a површ, која се може представити као квадрат, c је дуж. Дакле, ax је тело, cx^2 је тело и b је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 3).

Прво конструише дуж BH, тако да је $BH=c$ и дуж BC, тако да важи $BC\perp BH$ и $BC=\sqrt{a}$. Потом, конструише дуж AB на дужи BH, тако да су H и A са различитих страна тачке B и важи

$BC^2 \cdot AB = b$, тј. $AB = b/a$. Хајам затим конструише полукружницу са пречником AH, која се налази у истој полуравни као тачка C у односу на праву AB. Имамо три могућности, тачка C се налази унутар, на или ван полукружнице.



Слика 3.

Хајам прво разматра случај да је тачка C унутар полукружнице. Нека је тачка Z пресек праве BC са полукружницом. Хајам конструише правоугаонике $ABCD$ и $CZMP$ који су истих површина. Поново имамо три могућности, тачка M је унутар, на или изван полукружнице.

Прво разматра случај да су тачке C и M унутар полукружнице. Конструише хиперболу која пролази кроз тачку M и којој су асимптоте праве CB и CD.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка A припада негативном делу апсцисне осе, а тачка C припада позитивном делу ординатне осе.

Полукружница и хипербола секу се у тачкама L и L'. Ако је T подножје нормале из L на AH, а T' подножје нормале из L' на AH и ако је K подножје нормале из L на праву BC. Онда је површина правоугаоника $LKCF$ једнака површини правоугаоника $CZMP$, који је већ површински једнак правоугаонику $ABCD$. Ако са x и y означимо координате тачке L, која припада хиперболи, онда важи

$$LK = x, \qquad LF = y - \sqrt{a},$$

па из једнакости површина правоугаоника добијамо једначину хиперболе у савременој нотацији

$$x(y-\sqrt{a}) = \frac{b}{a}\sqrt{a} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{a}\left(\frac{b}{a}+x\right).$$

Означимо са R средиште дужи AH. Тада важи:

$$AR = \frac{AH}{2} = \frac{AB+BH}{2} = \frac{c+\frac{b}{a}}{2},$$

$$BR = AR - AB = \frac{\frac{b}{a}+c}{2} - \frac{b}{a} = \frac{c-\frac{b}{a}}{2}.$$

Зато се једначина полукружнице може записати у облику

$$(x-BR)^2 + y^2 = AR^2.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x - \frac{c-\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c+\frac{b}{a}}{2}\right)^2, \qquad y \geq 0,$$

односно, у еквивалентном облику,

$$\left(\frac{b}{a}+x\right)(c-x) = y^2, \qquad y \geq 0.$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке L. Пошто тачка L припада и хиперболи и полукружници, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{a}\left(\frac{b}{a}+x_0\right), \qquad y_0^2 = \left(\frac{b}{a}+x_0\right)(c-x_0).$$

Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{a}{x_0^2}\left(\frac{b}{a}+x_0\right)^2 = \left(\frac{b}{a}+x_0\right)(c-x_0),$$

одакле једноставно следи да је $b+ax_0 = cx_0^2 - x_0^3$, односно $x_0^3+ax_0+b = cx_0^2$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека хиперболе и полукружнице задовољава дату једначину. Хајам је доказао да је

x_0 заиста решење једначине користећи својства кружнице и хиперболе.

У случају да је тачка M на полукружници, узмемо да је $M = L$. Ако тачка M пада изван полукружнице, поново конструише хиперболу кроз тачку M. Полукружница и хипербола се секу или се додирују тангентно. У оба случаја, доказ је исти као у претходном случају.

У случајевима да је тачка C на или изван полукружнице, доказ је такође сличан као у претходном случају. Ако се хипербола и полукружница секу, имамо решење, ако се не секу, решење је немогуће.

Хајам је још приметио и чињеницу да страница коцке мора бити мања од дужи BH, за коју важи $BH = c$. Јер ако је $x = c$, онда је $x^3 = cx^2$, па не важи $x^3 + ax + b = cx^2$. Ако је $x > c$, онда добија да је $x^3 > cx^2$, одакле се види да једнакост $x^3 + ax + b = cx^2$ не важи.

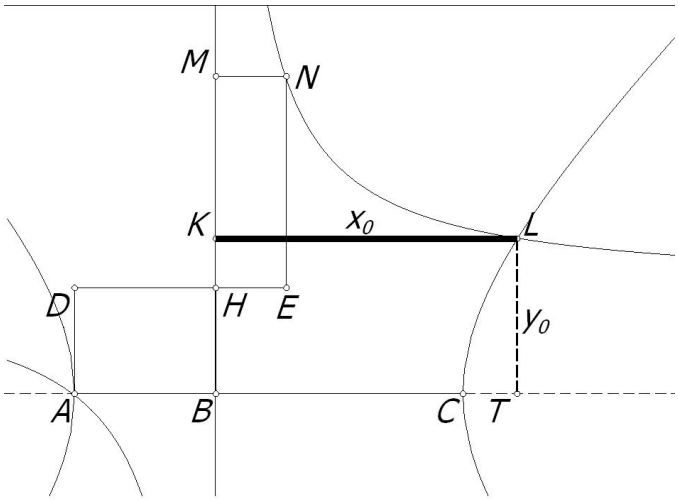
Хајам је овде приметио да ова класа једначина има много случајева и нема увек решења, јер се хипербола и полукружница не морају увек сећи.

Четврти тип: Збир броја, корена и квадрата једнак је кубу $(a + bx + cx^2 = x^3)$.

Једначину $a + bx + cx^2 = x^3$ разматрамо као једнакост тела. С обзиром да x представља страницу коцке, то је b површ, која се може представити као квадрат, c је дуж. Дакле, cx^2 је тело, bx је тело и a је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин (видети Слику 4).

Прво конструише дуж BH која је једнака страници квадрата b, тј. $BH = \sqrt{b}$ и дуж AB, тако да важи $AB \perp BH$ и $AB \cdot BH^2 = a$, тј. $AB = a/b$. Потом, конструише дуж BC на дужи AB, тако да су C и A са различитих страна тачке B и важи $BC = c$. Онда конструише правоугаонике $ABHD$ и $HMNE$, који су истих површина и тачке B и M су са различитих страна тачке H. Дужи HM и HB су различитих дужина. Затим, конструише хиперболу кроз тачку N и којој су асимптоте праве HM и HE. Хајам затим конструише

још једну хиперболу са теменом C, осом BC и којој је растојање између темена једнако дужи AC.



Слика 4.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка C припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка H припада позитивном делу ординатне осе. Ако са x и y означимо координате тачке N, која припада првој од конструисаних хипербола, онда важи

$$NM = x, \qquad NE = y - \sqrt{b},$$

па из једнакости површина правоугаоника $ABHD$ и $HMNE$ добијамо једначину те хиперболе у савременој нотацији

$$x(y - \sqrt{b}) = \frac{a}{b}\sqrt{b} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{b}\left(\frac{a}{b} + x\right).$$

Означимо са Z средиште дужи AC. Тада важи:

$$AZ = \frac{AC}{2} = \frac{BC + AB}{2} = \frac{c + \frac{a}{b}}{2},$$

$$BZ = BC - AZ = c - \frac{c + \frac{a}{b}}{2} = \frac{c - \frac{a}{b}}{2}.$$

Зато се једначина друге хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x - BZ)^2}{AZ^2} - \frac{y^2}{AZ^2} = 1.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x - \frac{c - \frac{a}{b}}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{c + \frac{a}{b}}{2}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину друге хиперболе у облику

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b}\right)(x - c).$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке L. Пошто тачка L припада обема хиперболама, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{b}\left(\frac{a}{b} + x_0\right), \qquad y_0^2 = \left(\frac{a}{b} + x_0\right)(x_0 - c).$$

Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{b}{x_0^2}\left(\frac{a}{b} + x_0\right)^2 = \left(\frac{a}{b} + x_0\right)(x_0 - c),$$

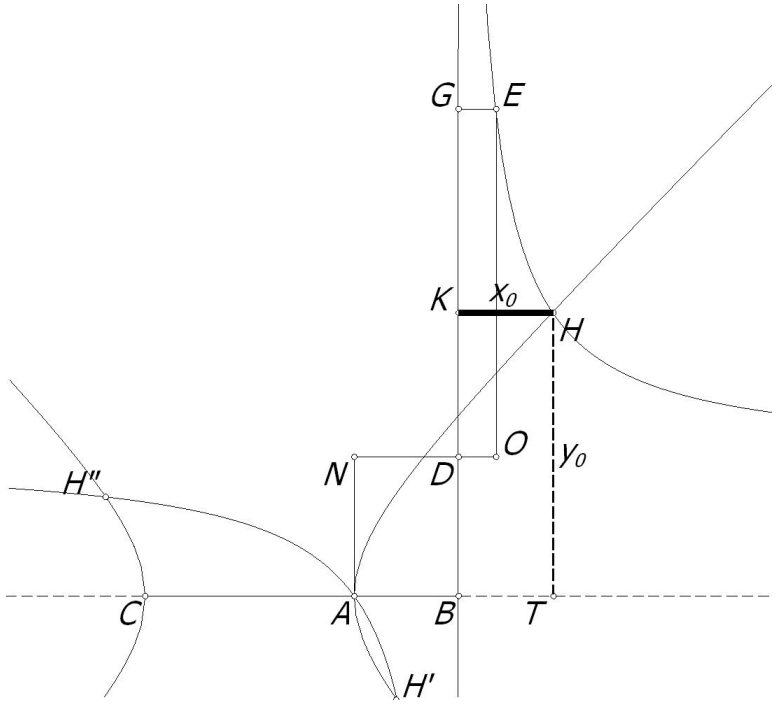
одакле једноставно следи да је $a + bx_0 = x_0^3 - cx_0^2$, односно $a + bx_0 + cx_0^2 = x_0^3$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека хипербола задовољава дату једначину. До овог доказа Хајам је дошао коришћењем својства хиперболке. Хајам је овде приметио да ова класа једначина нема других случајева и увек има (позитивно) решење које је различито од координатног почетка.

Пети тип: Збир куба и квадрата једнак збиру корена и броја $(x^3 + ax^2 = bx + c)$.

Разматрамо објашњење Хајамове конструкције решења једначине $x^3 + ax^2 = bx + c$, где x представља страницу коцке, a је дуж, b је површ, која се може представити као квадрат, што даје ax^2 је тело, bx је тело и c је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин.

Прво конструише дуж BD која је једнака страници квадрата чија је површина једнака b, добијамо $BD = \sqrt{b}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp BD$ и $BC = a$. Затим, конструише паралелопипед чија је основа квадрат странице BD, а запремина c и нека му је висина s, тј. $s = c/b$. Имамо три могућности: $s < a$, $s > a$ или $s = a$.

Прво ћемо размотрити случај када је $s < a$ (види Слику 5.1).



Слика 5.1

Конструише дуж AB на дужи BC, тако да важи $AB = s = c/b$. Затим, конструише правоугаоник $BAND$ и правоугаоник $EODG$ који су истих површина и налазе се са различитих страна тачке D, тако да су B, D и G на истој правој. Затим, конструише хиперболу која пролази кроз тачку E и којој су асимптоте праве DB и DO. Хајам затим конструише још једну хиперболу са теменом A, чија је оса права AC и растојање између два темена хиперболе једнако дужи AC.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка A припада негативном делу апсцисне осе, а тачка D припада позитивном делу ординатне осе. Ако са x и y означимо координате тачке E, која припада првој од конструисаних хипербола, онда важи

$$EG = x, \qquad EO = y - \sqrt{b},$$

па из једнакости површина правоугаоника $ANDB$ и $EODG$ добијамо једначину те хиперболе

$$x(y - \sqrt{b}) = \sqrt{b} \cdot \frac{c}{b} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{b}\left(x + \frac{c}{b}\right).$$

Означимо са Z средиште дужи AC. Тада важи:

$$AZ = \frac{AC}{2} = \frac{BC - AB}{2} = \frac{a - \frac{c}{b}}{2},$$

$$BZ = BA + AZ = \frac{c}{b} + \frac{a - \frac{c}{b}}{2} = \frac{a + \frac{c}{b}}{2}.$$

Зато се једначина друге хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x + BZ)^2}{AZ^2} - \frac{y^2}{AZ^2} = 1.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x + \frac{a + \frac{c}{b}}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{a - \frac{c}{b}}{2}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину друге хиперболе у облику

$$y^2 = \left(x + \frac{c}{b}\right)(x + a).$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке H која се налази у пресеку хипербола. Пошто тачка H припада обема хиперболама, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{b}\left(x_0 + \frac{c}{b}\right), \qquad y_0^2 = \left(x_0 + \frac{c}{b}\right)(x_0 + a).$$

Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

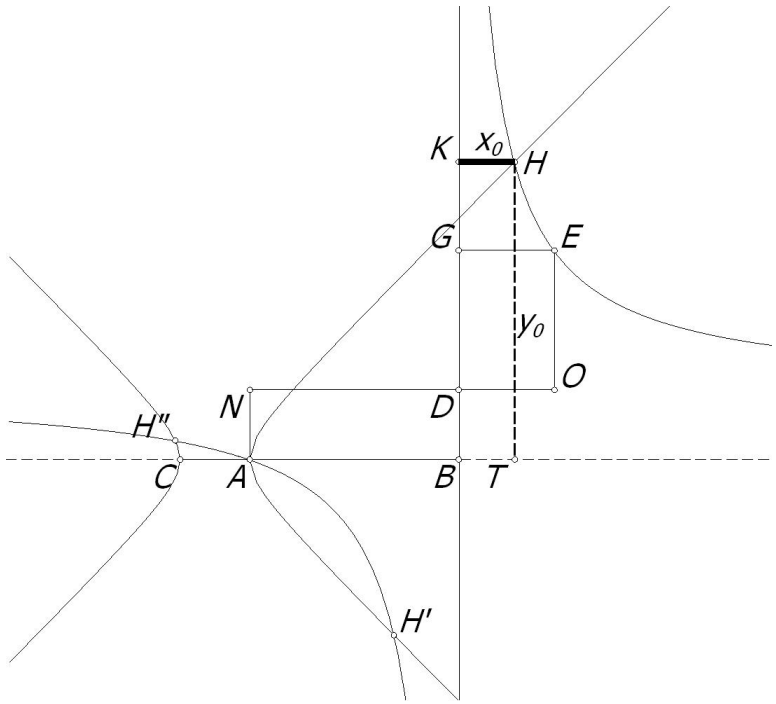
$$\frac{b}{x_0^2}\left(x_0 + \frac{c}{b}\right)^2 = \left(x_0 + \frac{c}{b}\right)(x_0 + a),$$

одакле једноставно следи да је $x_0^3 + ax_0^2 = bx_0 + c$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека двеју хипербола задовољава дату једначину. Хајам је и до овог доказа дошао користећи својства хиперболе.

Приметимо још да се случајеви $s < BC$, $s = BC$ и $s > BC$, еквивалентно изражавају преко коефицијената ове једначине релацијама $\frac{c}{b} < a$, $\frac{c}{b} = a$ и $\frac{c}{b} > a$, респективно.

За други случај, када је $s > a$, конструише $AB = s$ и конструише другу хиперболу кроз тачку C, тако да јој је оса права AC и расто-

јање између два темена једнако дужи AC. Поново имамо пресек две хиперболе (видети Слику 5.2). Остатак доказа је сличан као за претходни случај. [3, стр. 27-31]



Слика 5.2

У трећем случају када је $s = a$, онда је дуж BD страница тражене коцке.
Доказ: Коцка чија је страница BD једнака је телу, чија је основа квадрат ивице BD и чија је висина такође BD, тј. $x^3 = bx$ (јер нам је $x = BD$). Тело, чија је основа квадрат BD, а висина - BC ($BC = a$), једнако је телу, чија је основа квадрат BD, а висина - s ($BD^2 = b, s = \frac{c}{b} \Rightarrow BD^2 \cdot s = b \cdot \frac{c}{b} = c$) и које представља дати број, тј. $ax^2 = c$. Зато је $x^3 + ax^2 = bx + c$, а то је и тражено. Али важи и $x^3 + bx = ax^2 + c$; одавде следи да овај случај улази у шести тип: збир куба и корена једнак збиру квадрата и броја.

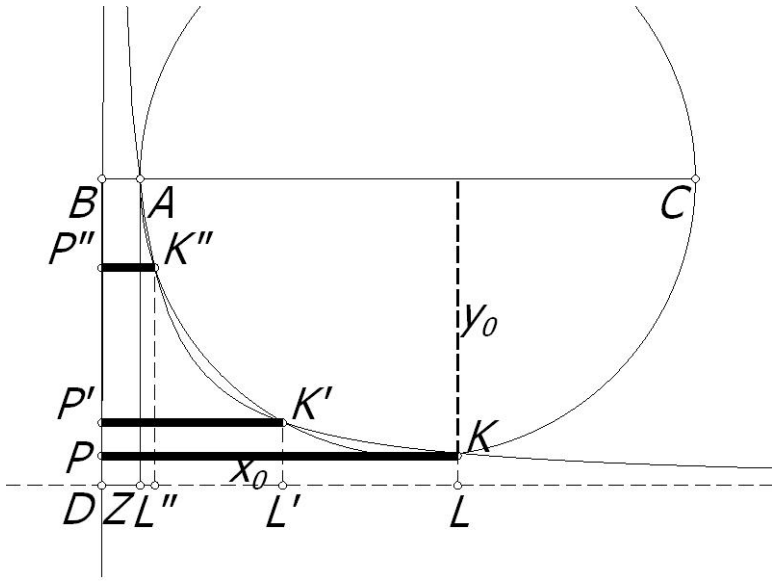
Шест тип: Збир куба и корена једнак збиру квадрата и броја ($x^3 + ax = bx^2 + c$).

Разматрамо објашњење Хајамове конструкције решења једна-

чине $x^3 + ax = bx^2 + c$, где x представља страницу коцке, b је дуж, a је површ, која се може представити као квадрат, што даје bx^2 је тело, ax је тело и c је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин.

Прво конструише дуж BC, тако да важи $BC = b$ и дуж BD која је једнака страници квадрата чија је површина једнака a, тј. $BD = \sqrt{a}$, тако да важи $BC \perp BD$. Затим конструише паралелопипед чија је основа квадрат странице BD, запремина c и висина s, тј. $s = c/a$. Имамо три могућности: $s < b$, $s > b$ или $s = b$.

Прво ћемо размотрити случај када је $s < b$ (види Слику 6.1).



Слика 6.1

Конструише дуж AB на дужи BC, тако да важи $AB = s = c/a$, па конструише правоугаоник $BAZD$. Потом, конструише кружницу са пречником AC. Хајам затим конструише хиперболу која пролази кроз тачку A и којој су асимптоте праве BD и DZ. Кружница и хипербола се секу, осим у тачки A и у још једној тачки, рецимо да је то тачка K.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка A припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка D припада негативном делу ординатне осе. Ако са x и y означимо апсолутне вредности координата тачке

K, која припада хиперболи, онда важи

$$KP = x, \qquad KL = \sqrt{a} - y,$$

па из једнакости површина правоугаоника $AZDB$ и $KLDP$ добијамо једначину те хиперболе:

$$x(\sqrt{a} - y) = \sqrt{a} \cdot \frac{c}{a} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{a}\left(x - \frac{c}{a}\right).$$

Означимо са R средиште дужи AC. Тада важи:

$$AR = \frac{AC}{2} = \frac{BC - AB}{2} = \frac{b - \frac{c}{a}}{2},$$

$$BR = AB + AR = \frac{c}{a} + \frac{b - \frac{c}{a}}{2} = \frac{b + \frac{c}{a}}{2}.$$

Зато се једначина кружнице може записати у облику

$$(x - BR)^2 + y^2 = AR^2.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x - \frac{b + \frac{c}{a}}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b - \frac{c}{a}}{2}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину кружнице у облику

$$y^2 = \left(x - \frac{c}{a}\right)(b - x).$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке K која се налази у пресеку хиперболе и кружнице. Пошто тачка K припада хиперболи и кружници, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{a}\left(x_0 - \frac{c}{a}\right), \qquad y_0^2 = \left(x_0 - \frac{c}{a}\right)(b - x_0).$$

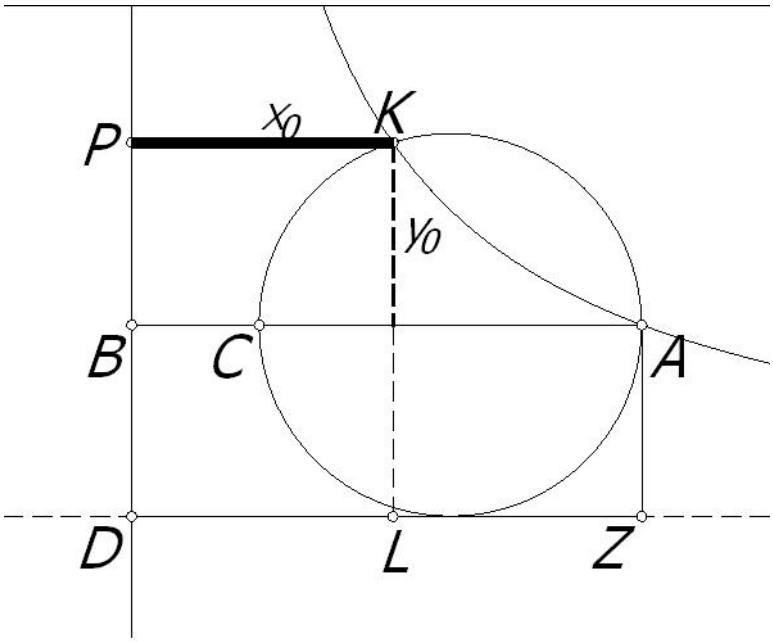
Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{a}{x_0^2}\left(x_0 - \frac{c}{a}\right)^2 = \left(x_0 - \frac{c}{a}\right)(b - x_0),$$

одакле једноставно следи да је $ax_0 - c = bx_0^2 - x_0^3$, тј. $x_0^3 + ax_0 = bx_0^2 + c$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека хиперболе и кружнице задовољава дату једначину. Хајам до овог решења долази коришћењем особина хиперболе и кружнице.

Приметимо још да се случајеви $s < BC$, $s = BC$ и $s > BC$, еквивалентно изражавају преко коефицијената ове једначине релацијама $\frac{c}{a} < b$, $\frac{c}{a} = b$ и $\frac{c}{a} > b$, респективно.

За други случај, када је $s > b$, конструише дуж $AB = s$ и конструише кружницу са пречником AC. Затим, конструише хиперболу кроз тачку A као у претходном случају и поново има пресек хиперболе и кружнице у тачки K (видети Слику 6.2). Остатак доказа је сличан као за претходни случај.



Слика 6.2

У трећем случају када је $s = b$, онда је дуж BC страница тражене коцке.

Доказ: Коцка чија је страница BC, једнака је броју квадрата (bx^2), јер је $b = BC$, тј. $x^3 = bx^2 (BC = x)$. Тело, чија је висина BC, а основа квадрат BD ($BD^2 = a$), једнако је датом броју c ($BC \cdot BD^2 = s \cdot a = \frac{c}{a} \cdot a = c$, које је такође једнако броју страна ax коцке чија је ивица BC, тј. $c = ax$. Добијамо $x^3 + ax = bx^2 + c$, што смо и тврдили.

Такође, $x^3+c=bx^2+ax$, одавде следи да овај случај улази у седми тип ове главе. [4 , стр. 35]

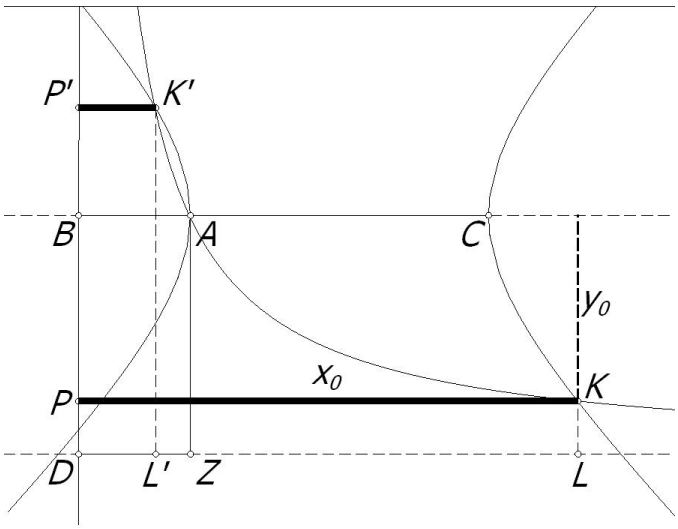
Хајам је овде приметио да ова класа једначина има различитих случајева. Једини пропуст Хајам је направио при решавању ове једначине, где, због недовољно прецизног цртежа, није открио да за неке вредности параметра једначина може имати три (позитивна) решења.

Седми тип: Збир куба и броја једнак збиру квадрата и корена $(x^3+a=bx^2+cx)$.

Разматрамо објашњење Хајамове конструкције решења једначине $x^3+a=bx^2+cx$, где x представља страницу коцке, b је дуж, c је површ, која се може представити као квадрат, што даје bx^2 је тело, cx је тело и a је такође тело. Хајам конструише решење на следећи начин.

Прво конструише дуж BD која је једнака страници квадрата чија је површина једнака c, тј. $BD=\sqrt{c}$ и дуж BC, тако да важи $BC \perp BD$ и $BC=b$. Затим, конструише паралелопипед чија је основа квадрат странице BD, запремина a и висина s, тј. $s=a/c$. Имамо три могућности: $s<b$, $s>b$ или $s=b$.

Прво ћемо размотрити случај када је $s<b$ (види Слику 7.1).



Слика 7.1

Конструише дуж AB на дужи BC, тако да важи $AB=s=a/c$,

па конструише правоугаоник $BAZD$. Затим, конструише хиперболу која пролази кроз тачку A и којој су асимптоте праве BD и DZ. Хајам затим конструише још једну хиперболу са теменом C, чија је оса права BC и растојање између два темена хиперболе једнако дужи AC.

Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да је тачка B координатни почетак и да тачка A припада позитивном делу апсцисне осе, а тачка D припада негативном делу ординатне осе. Ако са x и y означимо апсолутне вредности координата тачке K, која припада пресеку конструисаних хипербола, онда важи

$$KP = x, \qquad KL = \sqrt{c} - y,$$

па из једнакости површина правоугаоника $AZDB$ и $KLDP$ добијамо једначину те хиперболе

$$x(\sqrt{c} - y) = \sqrt{c} \cdot \frac{a}{c} \qquad \text{тј.} \qquad xy = \sqrt{c}\left(x - \frac{a}{c}\right).$$

Означимо са R средиште дужи AC. Тада важи:

$$AR = \frac{AC}{2} = \frac{BC - AB}{2} = \frac{b - \frac{a}{c}}{2},$$

$$BR = BA + AR = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{a}{c}}{2} = \frac{b + \frac{a}{c}}{2}.$$

Зато се једначина друге хиперболе може записати у облику

$$\frac{(x - BR)^2}{AR^2} - \frac{y^2}{AR^2} = 1.$$

Када заменимо једначине дужи у претходну једначину, добијамо еквивалентну једначину на следећи начин

$$\left(x - \frac{b + \frac{a}{c}}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{b - \frac{a}{c}}{2}\right)^2,$$

одакле коначно добијамо једначину друге хиперболе у облику

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{c}\right)(x - b).$$

Означимо са (x_0, y_0) координате тачке K која се налази у пресеку хипербола. Пошто тачка K припада обема хиперболама, добијамо да је

$$x_0 y_0 = \sqrt{c}\left(x_0 - \frac{a}{c}\right), \qquad y_0^2 = \left(x_0 - \frac{a}{c}\right)(x_0 - b).$$

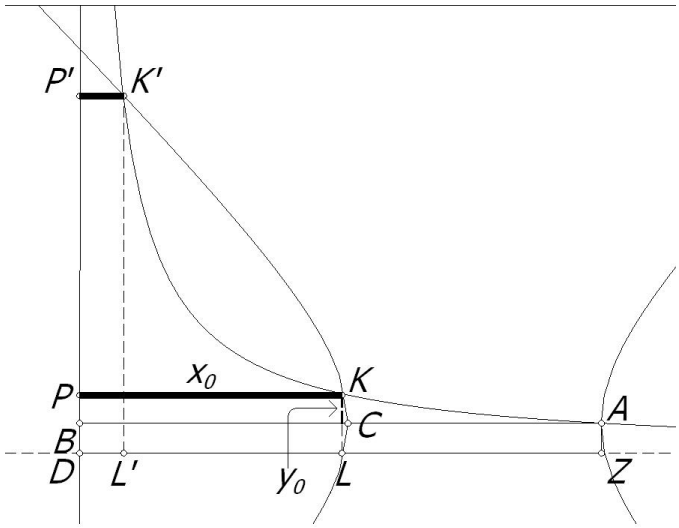
Из прве од ове две једнакости можемо изразити y_0 у функцији од x_0 и заменити у другу од тих једнакости. Добијамо једнакост

$$\frac{c}{x_0^2}\left(x_0-\frac{a}{c}\right)^2=\left(x_0-\frac{a}{c}\right)(x_0-b),$$

одакле једноставно следи да је $cx_0-a=x_0^3-bx_0^2$, тј. $x_0^3+a=bx_0^2+cx_0$. Тиме је доказано да апсциса x_0 тачке пресека двеју хипербола задовољава дату једначину. Хајам је до овог решења дошао коришћењем особина хиперболе.

Приметимо још да се случајеви $s<BC$, $s=BC$ и $s>BC$, еквивалентно изражавају преко коефицијената ове једначине релацијама $\frac{a}{c}<b$, $\frac{a}{c}=b$ и $\frac{a}{c}>b$, респективно.

За други случај, где је $s>b$, конструише дуж $AB=s$ и конструише правоугаоник $BAZD$. Потом, конструише обе хиперболе кроз тачку A. Као у претходном случају (видети Слику 7.2). Ове две хиперболе се не морају пресећи тако да имамо позитивно решење. У случајевима када се секу, могу се сећи у једној тачки, онда су тангенте једна другој, или се секу у две тачке. Остатак доказа је сличан као за претходни случај.



Слика 7.2

У трећем случају када је $s=a$, онда је дуж BC страница тражене коцке.

Доказ: Коцка чија је страница BC једнака је телу које представља

број квадрата (bx^2), јер је $BC = b$ и $BC = x$, тј. $x^3 = bx^2$. Тело, чија је висина BC, а основа квадрат $BD(BD^2 = c)$, једнако је датом броју a $\left(BC \cdot BD^2 = s \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c = a\right)$, које је такође једнако броју страница (cx) коцке чија је страница BC. Добијамо $x^3 + a = bx^2 + cx$, што смо и тврдили. Такође, $x^3 + cx = bx^2 + a$, одавде следи да овај случај улази у шести тип ове главе. [4, стр. 37]

12 Закључак

Обрађене методе за геометријско решавање кубних и квадратних једначина могу наћи сва реална решења, како позитивна тако и негативна. Узмимо на пример да је $-t$ (t је позитиван реалан број) негативно решење квадратне једначине $x^2 + bx = c$. Одатле добијамо $(-t)^2 + b(-t) = c$, тј. $t^2 = bt + c$. Дакле, t је позитивно решење квадратне једначине $x^2 = bx+c$. Одавде следи да је апсолутна вредност негативног решења квадратне једначине $x^2 + bx = c$ уствари позитивно решење квадратне једначине $x^2 = bx + c$, а важи и обрнуто. Такође, апсолутна вредност негативног решења квадратне једначине $x^2 + bx + c = 0$ је позитивно решење квадратне једначине $x^2 + c = bx$, а важи и обрнуто. Ал-Хајам и Ал-Хорезми нису нашли негативна решења јер негативни бројеви нису постојали, па су овај део изоставили и усредсредили се само на позитивна решења. Такође, тада није постојао ни негативни део координатног система у коме се лако виде негативна решења кубних једначина, као што се може видети на већини слика из десетог и једанаестог поглавља. Негативна решења кубних једначина у геометријском смислу, представљају тачке пресека два конуса (коришћена у доказу те кубне једначине) која се налазе лево у односу на ординатну осу.

Алгебарско решење кубне једначине добијено је тек у 16. веку. Математичари који су се бавили алгебарским решавањем кубних једначина, били су италијански математичари дел Феро, Тартаља и Ферари. Формуле којима се одређују сва решења кубних једначина открио је Николо Тартаља, али су оне познате по имену Карданове формуле, јер их је први објавио Ђироламо Кардано 1545. године у својој књизи "*Artis Magnae*". Кардано је користио само позитивне коефициенте у кубним једначинама и поделио их је на тринаест типова као и Ал-Хајам (не рачунајући једначину $x^3 = c$). Кардано је такође користио геометријски метод решавања кубних једначина за доказивање његових решења за сваки тип једначине.

Ако можемо узети за коефицијенте у кубним једначинама и позитивне и негативне реалне бројеве или нулу, број типова кубних једначина можемо свести на један. Добијамо једначину облика

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c могу бити позитивни или негативни реални бројеви или нула. Сада, ако ставимо да је $x = y - (a/3)$ у претходну кубну једначину, добијамо једначину облика $y^3 + sy + r = 0$, где су s и r позитивни или негативни реални бројеви или нула. Тако да нам се све кубне једначине могу свести на кубну једначину облика

$$x^3 + sx + r = 0.$$

Кардано је претпостављао да кубна једначина има решење облика $x = u^{1/3} + v^{1/3}$. Ако ово решење заменимо у нашу кубну једначину добијамо

$$(u^{1/3} + v^{1/3})^3 + s(u^{1/3} + v^{1/3}) + r = 0.$$

Даљим решавањем долазимо до једначине облика

$$u + v + r + (3u^{1/3}v^{1/3} + s)(u^{1/3} + v^{1/3}) = 0.$$

Одавде добијамо да је $x = u^{1/3} + v^{1/3}$ решење кубне једначине ако u и v задовољавају услове да је $u + v = -r$ и $u^{1/3}v^{1/3} = -(s/3)$. Решавањем овог система једначина добијамо да су u и v решења квадратне једначине облика

$$z^2 + rz - (s/3)^3 = 0.$$

До њих је Кардано дошао геометријским путем (погледати поглавље осам) и добио решења облика

$$u = -r/2 + \sqrt{(r/2)^2 + (s/3)^3} \qquad \text{и} \qquad v = -r/2 - \sqrt{(r/2)^2 + (s/3)^3}.$$

Дакле, решење кубне једначине је облика

$$x = u^{1/3} + v^{1/3}$$

$$= \left(-r/2 + \sqrt{(r/2)^2 + (s/3)^3}\right)^{1/3} + \left(-r/2 - \sqrt{(r/2)^2 + (s/3)^3}\right)^{1/3}.$$

Ова формула даје и конјуговано комплексна решења кубних једначина, иако у Карданово време није постојала теорија комплексних бројева. [14, стр. 37-38]

Литература

[1] Ранко Рисојевић, *Славни арапски математичари*, Нолит, стране 15–43. и стране 118–139, 1988.

[2] Зоран Лучић, *Огледи из историје аналитичке геометрије*, Службени гласник, страна 97–120. и 219–231.

[3] Павле Младеновић, *Математика и поезија Омара Хајама*, Александрија, Ваљево, страна 1–32, 2007.

[4] Omar Al-Khayyam, Algebra wa Al-Muqabala, AN ESSAY BY THE UNIQUEUY WISE 'ABEL FATH OMAR BIN AL-KHAYYAM ON ALGEBRA AND EQUATIONS, Translated by Professor Roshdi Khalil, Garnet publishing, 2008.

[5] Minna Burgess Connor, A HISTORICAL SURVEY OF METHODS OF SOLVING CUBIC EQUATIONS, A Thesis Presented to the Faculty or the Department of Mathematics University of Richmond, strana 13–46, 1956.

[6] Robert of Chester's, CONTRIBUTIONS TO THE HISTORY OF SCIENCE. PART I. ROBERT OF CHESTER'S LATIN TRANSLATION OF THE ALGEBRA OF AL-KHOWARIZMI. WITH AN INTRODUCTION, CRITICAL NOTES AND AN ENGLISH VERSIONBY LOUIS CHARLES KARPINSKI, university of Michigan, The Macmillan company, strana 1–12. i strana 67–89, 1915.

[7] K. V. Marida, OMAR KHAYYAM, RENE DESCARTES AND SOLUTIONS TO ALGEBRAIC EQUATIONS, 1999.

[8] George Gheverghese Joseph, THE CREST OF THE PEACOCK, Non-European Roots of Mathematics third edition, Princeton University Press, 2011.

[9] David W. Henderson, GEOMETRIC SOLUTIONS OF QUADRATIC AND CUBIC EQUATIONS, Department of Mathematics, Cornell University.

[10] David W. Henderson, SQUARE ROOTS IN THE SULBASUTRA, Department of Mathematics, Cornell University.

[11] Bibhutibhusan Datta, ANCIENT HINDU GEOMETRY. THE SCIENCE OF THE SULBA, Cosmo publications, 1993.

[12] Euklid: Elementi, prevod A. Bilimović.
http://www.matf.bg.ac.yu/nastavno/zlucic/

[13] Apollonius of Perga, TREATISE ON CONIC SECTIONS, T. L. Heath, M. A. Cambridge, 1896.

[14] David W. Henderson, EXPERIENCING GEOMETRY on Plane and Sphere, Cornell University.

[15] Master rad, *Matematika u Mesopotamiji*, Jovana Lazović, Matematički fakultet, 2016.