МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ — БЕОГРАД

БОЖИДАР П. ЂЕРАСИМОВИЋ

ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

БЕОГРАД
1969

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ — БЕОГРАД

БОЖИДАР П. ЂЕРАСИМОВИЋ

ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

БЕОГРАД
1969

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ — БЕОГРАД

БОЖИДАР П. ЂЕРАСИМОВИЋ

ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

БЕОГРАД
1969

ПОСЕБНА ИЗДАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ИНСТИТУТА У БЕОГРАДУ

КЊИГА 8

Редактор
М. Стојаковић

БОЖИДАР П. ЂЕРАСИМОВИЋ

ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

Републички фонд за научни рад СРС финансирао је штампање ове књиге

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

У току времена од 1955 до 1968 године објавио сам неколико радова из теорије правилних верижних разломака и њихових примена (радови под бр. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11). У тим радовима употребљавао сам уређене комплексе целих бројева и операције са њима (дефинисане у радовима под бр. 3 и 4). Тако сам увидео да би се читава теорија правилних верижних разломака могла изградити служећи се само том апаратуром. Ова књига представља такав покушај. У излагању сам ипак, али само понекад, прибегавао класичној аритметичкој методи (на пример у доказима ставова 6.1, 6.2 и 9.6).

Уређене комплексе природних бројева увео је у теорију правилних верижних разломака Frobenius 1913 године (рад под бр. 13), али су његови комплекси састављени само од природних бројева, а од операција увео је само инверзију. Ипак подстицај и оправдање за увођење уређених комплекса целих бројева у теорију правилних верижних разломака нашао сам у радовима A. A. Markova: Sur les formes quadratiques binaires indéfinies I i II. Math. Ann. Bd. 15 и 17 (1879 и 1880).

Неоцењиву помоћ за израду ове монографије, како у избору материје тако и у мери при том избору, имао сам од монографије prof. Dr. Oskara Perron-a: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Band I (1954). Истичем исто тако и помоћ коју ми је prof. Perron указао својим писмима при дефинисању уређених комплекса и операција са њима

Београд
19. 10. 1969

Божидар П. Ђерасимовић

1. УРЕЂЕНИ КОМПЛЕКСИ ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

1.1. ПОЈАМ И ВРСТЕ УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА

Уређене комплексе означавамо великим латинским словима A, B, C, $E, \ldots$, а њихове чланове малим словима a, b, $c, \ldots$, a_1, a_2, $a_3, \ldots$, b_1, b_2, $b_3, \ldots$, e_1, e_2, $e_3, \ldots$. На пример $A = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$, $B = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$, $E = e_1 e_2 e_3 \ldots e_s$, где су m, n и s природни оројеви, који означавају бројеве чланова наведених комплекса.

Дефиниција 1.1. 1°. *Уређени комплекс $A = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m$ чији су чланови a_1, $a_2, \ldots, a_m$ цели бројеви, а природни број m број његових чланова, назива се уређеним комплексом целих бројева. Уређени комплекс је стабилан, ако је*

$$a_\nu \neq 0 \text{ за } \nu = 2, 3, \ldots, m-1.$$

У противном, ако је ма један од чланова $a_2, a_3, \ldots, a_{m-1}$ нула, комплекс је нестабилан.

2°. *Уређени комплекс $A = a_1 a_2 \ldots a_m$ чији су крајни чланови a_1 и a_m цели, а остали чланови a_2, $a_3, \ldots, a_{m-1}$ природни бројеви, назива се уређеним комплексом природних бројева.*

3°. *Празан комплекс означавамо са V.* [3]

Примери:

$$-5,\ 2,\ -1,\ 1,\ -3,\ 0;$$
$$2,\ 0,\ 3,\ -5,\ 0,\ 0,\ 7$$
$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1;$$
$$-1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 1,\ 0;$$
$$2,\ 3,\ 2,\ 2,\ 1,\ -7.$$

Први, четврти и пети од наведених комплекса су стабилни, а други и трећи нестабилни. Последња два су уређени комплекси природних бројева.

1.2. ЈЕДНАКОСТ УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА

(1) Дефиниција 1.2. 1°. *Два стабилна уређена комплекса целих бројева $A = a_1 a_2 \ldots a_m$ и $B = b_1 b_2 \ldots b_n$ међусобно су једнаки, ако је $m = n$, $a_1 = b_1$. $a_2 = b_2, \ldots, a_m = b_n$.*

2°. *Ако се у нестабилном уређеном комплексу члан који је једнак нули замени збиром суседних чланова, а суседни чланови изоставе, добија се комплекс једнак првобитноме:*

(1.1) $$a_1 a_2 \ldots a_{k-1}\ 0\ a_{k+1} \ldots a_m = a_1 a_2 \ldots a_{k-2},\ a_{k-1}+a_{k+1},\ a_{k+2} \ldots a_m.$$

Примери:

$$a,\ 0,\ b = a+b;$$
$$2,\ 0,\ 3,\ -5,\ 0,\ 0,\ 6 = 5,\ -5,\ 6;$$
$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1 = 2,\ 0,\ 1 = 3,$$
$$a,\ 0,\ 0 = a$$
$$a,\ 0,\ 0,\ 0 = a+0,\ 0 = a,\ 0.$$

(2) Из дефиниције 1.2 следује закључак:

Ако је $A = B$ онда је

$$m \equiv n \pmod 2.$$

(3) Према дефиницији 1.2, релација једнакости уређених комплекса има ове особине:

1° $A = A$;

2° ако је $A = B$ онда је и $B = A$;

3° ако је $A = B$, $B = C$ онда је и $A = C$.

1.3. ОПЕРАЦИЈЕ НА ЈЕДНОМ УРЕЂЕНОМ КОМПЛЕКСУ

(1) Дефиниција 1.3. *На једном уређеном комплексу целих бројева $A = a_1 a_2 \ldots a_m$, где је $m \geqslant 1$, могу се вршити операције:*

1° *Инверзија:*

(1.2) $$\underline{A} = a_m a_{m-1} \ldots a_3 a_2 a_1.$$

2° *Изостављање чланова*

$$'A = a_2 a_3 \ldots a_m,\quad A' = a_1 a_2 \ldots a_{m-1},$$
$$''A = a_3 a_4 \ldots a_m,\quad A'' = a_1 a_2 \ldots a_{m-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(1.3) $$^{(k)}A = a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_m,\quad A^{(k)} = a_1 a_2 \ldots a_{m-k},$$

где је $k = 1, 2. 3, \ldots, m$.

Операција изостављања чланова врши се само на стабилном комплексу.

3° *Операција* „*“

(1.4) $$*A = 1,\ a_1 - 1,\ 'A;\quad A^* = A',\ a_m - 1,\ 1.$$ [3]

Примери:

$$\underline{3,\ 2,\ -1} = -1,\ 2,\ 3;$$

$$\{-2,\ -3,\ 4,\ 0\}' = -2,\ -3,\ 4;$$

$$\{5,\ 0,\ 3,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 3\}' = \{8,\ -1,\ 4\}' = 8,\ -1;$$

$$A^{(m)} = V;\quad {}^{(m)}A = V;\quad \{a\}' = V;$$

$$*\{3,\ 2,\ 4\} = 1,\ 2,\ 2,\ 4;$$

$$\{a,\ b,\ 1\}^* = a,\ b,\ 0,\ 1 = a,\ b+1;$$

$$1^* = 0,\ 1;\quad *0 = 1,\ -1.$$

(2) Дефиниција 1.4: *Кад је на једном уређеном комплексу назначено више операција, онда се прво врши операција инверзије, па затим две остале, и то, ако су са исте стране, прво она чији је знак ближи слову које означава комплекс, а ако су са разних страна, онда прво операција „*“*

Примери:

$$\underline{A}^* = \{\underline{A}\}^* = a_m a_{m-1} \dots a_2,\ a_1-1,\ 1;$$

$$'\underline{A} = '\{\underline{A}\} = a_{m-1} a_{m-2} \dots a_2\, a_1;$$

$$*'A = *\{'A\} = 1,\ a_2-1,\ ''A;$$

$$*A' = \{*A\}' = \{1,\ a_1-1,\ 'A\}' = 1,\ a_1-1,\ 'A';$$

$$*\{a\}' = \{1,\ a-1\}' = 1;\quad \{a\}^{*\prime} = \{a-1,\ 1\}' = a-1;$$

$$*\{a\}^* = *\{\{a\}^*\} = \{*\{a\}\}^* = 1,\ a-2,\ 1;$$

$$\{a,\ b,\ 1\}^{*\prime} = \{a,\ b,\ 0,\ 1\}' = \{a,\ b+1\}' = a.$$

(3) На основу дефиниција 1.3 и 1.2, операција инверзије има ове особине:

1° *Ако је* $B = \underline{A}$, *онда је* $\underline{B} = A$ *тј.*

$$\underline{\{\underline{A}\}} = A. \tag{1.5}$$

2° *Ако је* $A = B$, *онда је* $\underline{A} = \underline{B}$ *и обрнуто.*

Доказ: 1° Ако је $A = a_1 a_2 \dots a_m$ онда је $B = \underline{A} = a_m\, a_{m-1} \dots a_2\, a_1$, па је $\underline{B} = \underline{a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1} = a_1 a_2 \dots a_m = A$.

2° Ако је $A = a_1 a_2 \dots a_m$, $B = b_1 b_2 \dots b_n$ онда из $A = B$ следује $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n,\ m = n$, па је и $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 = b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1$, тј. $\underline{A} = \underline{B}$.

Обрнут закључак је последица т. 1°.

(4) На основу дефиниција 1.3 и 1.2 операција „*“ има ове особине:

1° *Ако је* $B = A^*$ *онда је* $B^* = A$ *тј.*

$$\{A^*\}^* = A. \tag{1.6}$$

2° *Ако је* $A=B$, *онда је* $A^*=B^*$ *и обрнуто.*

Доказ: Ако је $A=a_1 a_2 \ldots a_m$ онда је

$$Б=A^*=a_1 a_2 \ldots a_{m-1}, a_m-1, 1,$$

па је

$$B^*=\{a_1 a_2 \ldots a_{m-1}, a_m-1, 1\}^*=$$
$$=a_1 a_2 \ldots a_{m-1}, a_m-1, 0, 1=$$
$$=a_1 a_2 \ldots a_{m-1}, a_m=A.$$

2° Ако је $a_m=b_n$, тврдња је очевидна, али ако је $a_m \neq b_n$ на пример

$$B=A', a_m-b_n, 0, b_n,$$

онда је

$$B^*=A', a_m-b_n, 0, b_n-1, 1=$$
$$=A', a_m-1, 1=A^*.$$

Обрнут закључак је последица тачке 1°.

(5) На основу дефиниција 1.3 и 1.2 операција изостављања чланова има ову особину:

Ако је $A=B$ *и* $a_m=b_n$ *онда је и* $A'=B'$.

1.4. ОПЕРАЦИЈЕ У СКУПУ УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

(1) У скупу уређених комплекса целих бројева дефинишемо две операције. Прва од њих је *конкатенација.*

Дефиниција 1.5 *Израз* AB (*читамо* „*а бе*“), *где су*

$$A=a_1 a_2 \ldots a_m, \quad B=b_1 b_2 \ldots b_n,$$

уређени комплекси целих бројева, такође је уређени комплекс целих бројева, и то [13]:

$$AB=a_1 a_2 \ldots a_m b_1 b_2 \ldots b_n. \tag{1.7}$$

Према овој дефиницији за конкатенацију важи асоцијативни закон

$$\{AB\}C=A\{BC\}=ABC, \tag{1.8}$$

па је једнозначно одређен и смисао израза

$$a^k=\underbrace{a\,a\,a \ldots a}_{k \text{ пута}}, \quad A^k=\underbrace{A\,A\,A \ldots A}_{k \text{ пута}} \tag{1.9}$$

где је k природан број, као и израза

$$a^\circ=V, \quad A^\circ=V. \tag{1.10}$$

Исто тако важе и једнакости

$$a^{p+q}=a^p a^q, \quad A^{p+q}=A^p A^q,$$

где је $p>0$, $q>0$.

(2) Ако су

$$A=a_1 a_2 \ldots a_m, \quad B=b_1 b_2 \ldots b_n, \quad C=c_1 c_2 \ldots c_p$$

уређени комплекси целих бројева, на основу дефиниција 1.2, 1.3 и 1.5, конкатенција има ове особине

1°. *Ако је* $A=B$ *онда је и* $AC=BC$.

2° *Ако је* $AC=BC$ *онда је и* $A=B$.

Доказ: Ако је $A=B$ и ако су A и B доведени на стабилни облик, онда је $m=n$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2, \ldots, a_m=b_n$, па је и $AC=BC$.

2° Овај закључак је непосредна последица закључака под (5) у т. 1.3.

(3) Празан комплекс V је неутрални елемент за конкатенацију

$$VA=AV=A. \tag{1.11}$$

Како је, према дефиницији 1.2 под 2°;

$$A,\, 0,\, 0=A,$$
$$0,\, 0,\, A=A,$$
$$A,\, 0,\, 0,\, B=AB,$$

на основу закључка 2° у т. 1.4 (2) следује:

Став 1.1. *Празан комплекс је једнак комплексу чији су чланови две нуле:*

$$V=0,\, 0. \tag{1.12}$$

Тако се операција „*“ и операција изостављања чланова могу применити и на празан комплекс:

$$\begin{cases} V^*=\{0,\, 0\}^*=0,\ -1,\ 1; \\ {}^*V={}^*\{0,\, 0\}=1,\ -1,\ 0; \\ {}^*V^*={}^*\{0,\, 0\}^*=1,\ -1,\ -1,\ 1; \end{cases} \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} V'=\{0,\, 0\}'=0; \\ {}'V={}'\{0,\, 0\}=0; \\ {}'V'={}'\{0,\, 0\}'=V=0,\, 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

(4) Према дефиницијама 1.2 и 1.5 и обрасцима (1.13) вреде обрасци

$$\{AB\}^*=AB^*, \quad {}^*\{AB\}={}^*AB \tag{1.15}$$

за $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Ако је $n \geqslant 1$ или $m \geqslant 1$, онда су — према дефиницији операције „*“ — обрасци очевидни, али они вреде и за $n=0$ односно $m=0$ заиста:

$$\{AV\}^* = AV^* = A,\ 0,\ -1,\ 1 = A',\ a_m - 1,\ 1 = A^*.$$

(5) Потребно је нагласити да је, пре него што се изврши операција изостављања чланова у изразима

$$\{AB\}^{(k)},\ {}^{(k)}\{AB\}$$

потребно комплекс AB довести на стабилан облик:

(6) Другу операцију у скупу уређених комплекса целих бројева називаћемо: операција „|“ („црта“).

Дефиниција 1.6: *Израз $A|B$ (читамо „A црта B“), где су*

$$A = a_1 a_2 \ldots a_m,\quad B = b_1 b_2 \ldots b_n$$

уређени комплекси целих бројева, такође је уређени комплекс целих бројева, и то:

(1.16) $$A|B = A,\ -1,\ {}^*B.$$ [4]

Примери:

$$V|A = -1,\ {}^*A;$$

$$A|V = A,\ -1,\ 1,\ -1,\ 0;$$

$$V|V = -1,\ 1,\ -1,\ 0.$$

И за операцију „|“ вреди асоцијативни закон.

(1,17) $$\{A|B\}|C = A|\{B|C\},$$

јер је:

$$\{A,\ -1,\ {}^*B\},\ -1,\ {}^*C = A,\ -1,\ {}^*\{B,\ -1,\ {}^*C\} = A,\ -1,\ {}^*B,\ -1,\ {}^*C,$$

Тако можемо писати

$$A|B|C.$$

(7) Потребно је нагласити да је

(1.18) $$\underline{\{A|B\}} \neq \underline{B}|\underline{A},$$

јер је:

$$\underline{\{A|B\}} = \underline{\{A,\ -1,\ {}^*B\}} = \underline{B}^*,\ -1,\ \underline{A}$$

$$\underline{B}|\underline{A} = \underline{B},\ -1,\ {}^*\underline{A}.$$

1.5 СИМЕТРИЧНИ УРЕЂЕНИ КОМПЛЕКСИ

Дефиниција 1.7 *Стабилни уређен комплекс $K = a_1 a_2 \ldots a_p$ који је једнак своме инверзном комплексу $\underline{K}$:*

(1.19) $$K = \underline{K}$$

назива се симетричним комплексом.

Према (1.19), чланови комплекса K који су подједнако удаљени од крајева, једнаки су међусобно:

$$a_1 = a_p,\ a_2 = a_{p-1},\ a_3 = a_{p-2}, \ldots .$$

Симетрични су, на пример, комплекси:

$$S = a_1\, a_2 \ldots a_m\, a_m \ldots a_2\, a_1,\quad T = a_1\, a_2 \ldots a_m\, a\, a_m \ldots a_2\, a_1$$

који се краће могу написати у облику

(1.20) $$S = A\underline{A},\quad T = A\, a\, \underline{A},$$

где је $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$. Први од ових комплекса има паран, а други непаран број чланова.

Симетричан је и празан комплекс:

$$V = \underline{V} = 0,\ 0.$$

2. EULER-ОВА ФУНКЦИЈА ЈЕДНОГ УРЕЂЕНОГ КОМПЛЕКСА

2.1 ФУНКЦИЈА $[A]$

(1) Увођењем Euler-ове функције уређеног комплекса, може се сваком уређеном комплексу целих бројева доделити један цео број.

Дефиниција 2.1, *Израз* $[A]$, *где је* $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$ *уређени комплекс целих бројева, зове се Euler-ова функција комплекса* A, *краће „функција* $[A]$", *а њена вредност је увек цео број, и што*

(2.1) $$[A] = a_m\, [A'] + [A''],$$

где је m *нула или природан број, и посебно за* $m = 1$:

(2.2) $$[a] = a.$$

Према (1.12) и (2.2) је:

$$[V'] = [0] = 0,$$

па се поређењем образаца (2.1) и (2.2) за $A = a$ добија

(2.3) $$[V] = 1.$$

Тако се из образаца (2.2), (2.1) и (2.3) поступно добија

(2.4) $$\begin{cases} [a_1] = a_1 \\ [a_1\, a_2] = a_2\, [a_1] + [V] = a_1\, a_2 + 1, \\ [a_1\, a_2\, a_3] = a_3\, [a_1\, a_2] + [a_1] = a_1\, a_2\, a_3 + a_1 + a_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

(2) За нумеричко израчунавање вредности функције $[A]$, где је $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$ дати комплекс, можемо ставити

$$A_\nu = a_1\, a_2 \ldots a_\nu,\quad \nu = -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots, m,$$

па се образац (2.1) може написати у облику

$$(2.5) \qquad [A_\nu]=a_\nu [A_{\nu-1}]+[A_{\nu-2}].$$

Тако се, полазећи од $A_{-1}=V'$ и $A_0=V$, добијају редом вредности $[A_\nu]$ за $\nu=1, 2, \ldots, m$. Израчунавање обично сврставамо у таблицу:

ν	-1	0	1	2	3	$\ldots$
a_ν			a_1	a_2	a_3	$\ldots$
$[A_\nu]$	0	1	a_1	$a_1 a_2+1$	$a_3(a_1 a_2+1)+a_1$	$\ldots$

На пример, израчунавање вредности [2, 3, 1, 1, 5, 2] сврстано је у таблицу

ν	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_ν			2	3	1	1	5	2
$[A_\nu]$	0	1	2	7	9	16	89	194

То значи да је

$$[2, 3, 1, 1, 5, 2]=194$$

а у исто време:

$$[1]=2,\ [2, 3]=7,\ [2, 3, 1]=9,$$

$$[2, 3, 1, 1]=16,\ [2, 3, 1, 1, 5]=89.$$

2.2. ФУНКЦИЈА $[AB]$

Став 2.1 *Поред обрасца* (2.1) *за функцију* $[K]$ *вреде и рекурентни обрасци* [3]

$$(2.6) \qquad [AB]=[A][B]+[A'][{}'B],$$

$$(2.7) \qquad [A]=a_1[{}'A]+[{}''A],$$

где је

$$A=a_1 a_2 \ldots a_m,\ B=b_1 b_2 \ldots b_n.$$

Доказ: Из обрасца (2.1) следује:

$$[A b_1]=b_1[A]+[A']=[A][b_1]+[A'][V],$$

$$[A b_1 b_2]=(b_1 b_2+1)[A]+b_2[A']=[A][b_1 b_2]+[A'][b_2],$$

па ако се претпостави да је

$$[AB'']=[A][B'']+[A'][{}'B''],$$

$$[AB']=[A][B']+[A'][{}'B'],$$

онда је

$$[AB] = b_n [AB'] + [AB''] =$$
$$= b_n [A] [B'] + b_n [A'] ['B'] + [A] [B''] + [A'] ['B''],$$

тј.

$$[AB] = [A] \{b_n [B'] + [B'']\} + [A'] \{b_n ['B'] + ['B'']\},$$

одакле, према (2.1), следује образац (2.6). Образац (2.7) се добија из обрасца (2.6), ако се у њему A смени са a_1, а B са $'A$.

2.3. ФУНКЦИЈЕ $[K]$ ЈЕДНАКИХ КОМПЛЕКСА

Став 2.2. *Ако је*

$$K = H$$

где су K и H уређени комплекси целих бројева, онда је

$$(\alpha) \qquad [K] = [H], \ ['K] = ['H], \ [K'] = [H'], \ ['K'] = ['H'],$$

независно од тога да ли су K *и H стабилни или нестабилни комплексни, или је један стабилан а други нестабилан.*

Доказ. Ако су K и H стабилни комплекси, онда је — према дефиницији 1.2 — став 2.2 очевидан. Али, претпоставимо да је

$$K = A, \ 0, \ B$$

где је

$$A = a_1 a_2 \ldots a_m, \quad B = b_1 b_2 \ldots b_n,$$

па, ако се још стави

$$H = A', \ a_m + b_1, \ 'B,$$

онда је $K = H$. Према обрасцу (2.6) тада је

$$[K] = [A, \ 0, \ B] = [A, \ 0] [B] + [A] ['B]$$

а како је, према (2.1):

$$[A, \ 0] = 0 [A] + [A'] = [A'],$$

то је:

$$[K] = [A'] [B] + [A] ['B].$$

Даље је, према (2.7) и (2.1)

$$[K] = [A'] \{b_1 ['B] + [''B]\} + \{a_m [A'] + [A'']\} ['B],$$

тј.

$$[K] = [A'] \{(a_m + b_1) ['B] + [''B]\} + [A''] ['B[,$$

или, према (2.7):

$$[K] = [A'] [a_m + b_1, \ 'B] + [A''] ['B],$$

па је најзад, према (2.6):

$$[K]=[A',\ a_m+b_1,\ 'B]=[H].$$

На исти начин се доказују и једнакости:

$$['K]=['H],\ [K']=[H'],\ ['K']=['H'].$$

Потребно је нагласити да изложени доказ вреди чак и ако је један од комплекса A или B празан или једночлан. Тако је став 2.2 доказан у целини.

Једнакости (α) претстављају само *потребне услове* за једнакост комплекса K и H јер *обрнут став* не важи. На пример, комплекси

$$K=3,\ 5 \text{ и } H=2,\ 1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 3$$

задовољавају услове (α):

$$[K]=[H]=16,\ ['K]=['H]=5,\ [K']=[H']=3,\ ['K']=['H']=1,$$

а као што се види нису међусобно једнаки.

2.4. ФУНКЦИЈА $[\underline{A}]$

Став 2.3. *Инверзија комплекса $A=a_1 a_2 \ldots a_m$ не мења вредност Euler-ове функције* $[A]$:

$$[A]=[\underline{A}]. \tag{2.8}$$

Доказ. Према (2.4) је:

$$[a_1 a_2]=a_1 a_2+1=[a_2 a_1]$$

$$[a_1 a_2 a_3]=a_1 a_2 a_3+a_1+a_2=[a_3 a_2 a_1],$$

па ако се претпостави да је

$$[A'']=[''\underline{A}],\ [A']=['\underline{A}],$$

онда је, према (2.7)

$$[\underline{A}]=a_m['\underline{A}]+[''\underline{A}]=a_m[A']+[A'']=[A],$$

те је став 2.3 доказан.

2.5 НЕКОЛИКО ОБРАЗАЦА

Као најважније последице рекурентних образаца (2.1), (2.6), (2.7) и обрасца (2.8) могу се још истаћи обрасци:

$$[A^*]=[A],\ [{}^*A]=[A], \tag{2.9}$$

$$[A^{*\prime}]=[A]-[A'],\ ['{}^*A]=[A]-['A], \tag{2.10}$$

$$[A,\ 0]=[A'],\ [0,\ A]=['A], \tag{2.11}$$

$$[A,\ -a]=-[A^*,\ a-1],\ [-a,\ A]=-[a-1,\ {}^*A], \tag{2.12}$$

где је

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \quad m \geqslant 0.$$

Доказ: (2.9): обрасци следују из дефиниције (1.4), на основу образаца (2.1) и (2.7).

(2.10): Из дефиниције (1.4) узимајући у обзир став 4, следује:

$$[A^{*\prime}] = [\{A', a_m - 1, 1\}'] = [A', a_m - 1].$$

Затим, на основу обрасца (2.1):

$$[A^{*\prime}] = (a_m - 1)[A'] + [A''],$$

тј.

$$[A^{*\prime}] = \{a_m [A'] + [A'']\} - [A'],$$

одакле се, на основу обрасца (2.1), добија први од образаца (2.10). **Други** следује из првог, на основу обрасца (2.8).

(2.11). Први од образаца (2.11) је доказан у току извођења доказа става 4, а други следује из првог на основу обрасца (2.8).

(2.12): На основу обрасца (2.1) добија се:

$$[A, -a] = -a[A] + [A'],$$

тј.

$$[A, -a] = -\{(a-1)[A] + [A] - [A']\}.$$

Затим, на основу (2.9) и (2.10)

$$[A, -a] = -\{(a-1)[A^*] + [A^{*\prime}]\}$$

одакле, на основу обрасца (2.1) следује први од образаца (2.12). Други следује из првог на основу обрасца (2.8),

2.6 ФУНКЦИЈА $[A \mid B]$

О Euler-овој функцији комплекса $A \mid B$ где су

$$A = a_1 a_2 \dots a_m, \quad B = b_1 b_2 \dots b_n \quad (m \geqslant 0, \ n \geqslant 0),$$

уређени комплекси целих бројева, говори

Став 2.4: 1° *За Euler-ову функцију комплекса $A \mid B$ вреди образац:*

$$[A \mid B] = [A'][B] - [A]['B]. \tag{2.13}$$

2°. *Операција „|" дозвољава скраћивање једнаких чланова, ако се налазе са разних страна црте, непосредно уз њу, тј.:*

$$[AK \mid \underline{K}B] = (-1)^k [A \mid B], \tag{2.14}$$

где је K ма који уређени комплекс целих бројева, а k број његових чланова.

3°. *За функцију* $[A\,|\,B]$ *вреди образац* [4]

$$[\underline{B}\,|\,\underline{A}] = -[A\,|\,B]. \tag{2.15}$$

Доказ: 1° На основу дефиниције 1.16 и образаца (2.6), (2.1), (2.9) и (2.10), добија се:

$$[A\,|\,B] = [A,\ -1,\ {}^*B] = [A,\ -1]\,[{}^*B] + [A]\,['{}^*B],$$

тј.

$$[A\,|\,B] = \{-[A] + [A']\}\,[B] + [A]\,\{[B] - ['B]\}$$

одакле следује образац (2.13).

2°. Према обрасцу (2.13) је

$$[A\,a\,|\,a\,B] = [A]\,[a\,B] - [A\,a]\,[B],$$

тј. према (2.7) и (2.1):

$$[A\,a\,|\,a\,B] = [A]\,\{a\,[B] + ['B]\} - \{a\,[A] + [A']\}\,[B]$$

и најзад, према (2.13):

$$[A\,a\,|\,a\,B] = -[A\,|\,B].$$

3° Према (2.13) је:

$$[\underline{B}\,|\,\underline{A}] = [\underline{B}']\,[\underline{A}] - [\underline{B}]\,['\underline{A}],$$

тј.

$$[\underline{B}\,|\,\underline{A}] = ['B]\,[A] - [B]\,[A'],$$

те, према (2.13), следује образац (2.15).

Тако је став 6 доказан у целини.

Примери:

$$\begin{cases} [A\,|\,V] = [A'],\ [V\,|\,A] = -['A],\ [V\,|\,V] = 0, \\ [A\,|\,V\,|\,V] = -[A],\ [V\,|\,V\,|\,A] = -[A],\ [A\,|\,V\,|\,B] = -[AB]. \end{cases} \tag{2.16}$$

2.7. ОСНОВНА РЕЛАЦИЈА

Помоћу образаца (2.13) и (2.14) доказаћемо основну релацију коју задовољава сваки уређени комплекс целих бројева.

Став. 2.5: *Сваки уређени комплекс целих бројева*

$$A = a_1\,a_2 \ldots\ a_m,\quad (m \geqslant 0),$$

задовољава идентичност:

$$[A]\,['A'] - [A']\,['A] = (-1)^m. \tag{2.17}$$

Доказ: На основу обрасца (2.13) леву страну једнакости (2.17) можемо написати у облику $['A\,|\,\underline{A}]$, а затим, на основу обрасца (2.14), добијамо:

$$['A\,|\,\underline{A}] = (-1)^{m-1}\,[V\,|\,a_1] = (-1)^m.$$

Из става 2.5 непосредно следује

Последица става 2.5: *Цели бројеви* $[A]$ *и* $['A]$, *као и бројеви* $[A]$ *и* $[A']$ *су узајамно йросши.*

2.8 НЕКОЛИКО ИДЕНТИЧНОСТИ

На крају одељка о Euler-овој функцији $[A]$ дајемо још неколико идентичности које често могу бити корисне. То су:

$$[A,\,0,\,B]=[A'][B]+[A]['B], \tag{2.18}$$

$$[A,\,0\,|\,B]=[A][B]-[A']['B], \tag{2.19}$$

$$[A,\,x,\,B]=x[A][B]+[A,\,0,\,B], \tag{2.20}$$

$$[A,\,-a,\,B]=-[A^*,\,a-2,\,{}^*B], \tag{2.21}$$

$$[AB]+['AB']=[BA]+['BA'], \tag{2.22}$$

$$[AB][C]-[AC][B]=[A'][\underline{B}\,|\,C], \tag{2.23}$$

$$[B][ABC]=[AB][BC]+(-1)^n[A']['C], \tag{2.24}$$

$$[AB']-['AB]=[B\,|\,A]+['B\,|\,A'], \tag{2.25}$$

$$[K\underline{E}K']-['KE\underline{K}]=(-1)^k\{[E']-['E]\}, \tag{2.26}$$

$$[BA^{\nu+1}]=\{[A]+['A']\}[BA^{\nu}]-(-1)^m[BA^{\nu-1}], \tag{2.27}$$

$$['E'][Z]^2-\{[E']+['E]\}[Z]['Z]+[E]['Z]^2=-[\underline{Z}\,|\,E\,|\,Z], \tag{2.28}$$

где су:

$$A=a_1a_2\ldots a_m,\quad B=b_1b_2\ldots b_n,\quad C=c_1c_2\ldots c_p,$$

$$K=g_1g_2\ldots g_k,\quad E=e_1e_2\ldots e_s,\quad Z=z_1z_2\ldots z_q,$$

уређени комплекси целих бројева, а ν природан број.

Доказ. Идентичности (2.18), (2.20) и (2.22) су непосредне последице обрасца (2.6), а идентичност (2.19) последица обрасца (2.13).

(2.21): на основу идентичности (2.20) и (2.18) лева страна се може написати у облику:

$$-a[A][B]+[A'][B]+[A]['B],$$

па затим

$$-(a-2)[A][B]-\{[A]-[A']\}[B]-[A]\{[B]-['B]\},$$

тј. на осносу образаца (2.9) и (2.10):

$$-(a-2)[A^*][{}^*B]-[A^{*\prime}][{}^*B]-[A^*]['{}^*B].$$

Ако се узме у обзир и образац (2.1) добија се

$$-[A^*,\, a-2]\,[{}^*B]-[A^*]\,[{}'{}^*B],$$

одакле, на основу обрасца (2.6), следује десна страна идентичности (2.21).

(2.23): На основу обрасца (2.6) лева страна се може написати у облику

$$[A']\,\{[{}'B]\,[C]-[B]\,[{}'C]\},$$

тј.

$$[A']\,\{[\underline{B}']\,[C]-[\underline{B}]\,[{}'C]\},$$

одакле, на основу обрасца (2.13), следује десна страна.

Идентичност (2.24) је непосредна последица идентичности (2.23), ако се комплекс C смени са B, а комплекс B са BC.

Идентичност (2.25) је непосредна последица образаца (2.6) и (2.13).

Идентичност (2.26) следује из идентичности (2.25), ако се у њој стави $A=KE$, $B=\underline{K}$.

(2.27): На основу обрасца (2.6) добија се:

$$[BA^{\nu+1}]=[BA^{\nu}]\,[A]+[BA^{\nu-1}A']\,[{}'A],$$

а из обрасца (2.13):

$$[BA^{\nu}\,|\,\underline{A}']=[BA^{\nu-1}A']\,[\underline{A}']-[BA^{\nu}]\,[{}'\underline{A}'],$$

тј.

$$(-1)^{m-1}\,[BA^{\nu-1}]=[BA^{\nu-1}A']\,[{}'A]-[BA^{\nu}]\,[{}'A'].$$

Одузимањем последње од ових једнакости од прве, добија се

$$[BA^{\nu+1}]-(-1)^{m-1}\,[BA^{\nu-1}]=[BA^{\nu}]\,[A]+[BA^{\nu}]\,[{}'A'],$$

одакле следује образац (2.27).

(2.28): Лева страна се може написати у облику:

$$-\{[\underline{Z}\,|\,E']\,[Z]-[\underline{Z}\,|\,E]\,[{}'Z]\},$$

одакле следује десна страна.

3. КОНАЧНИ ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

3.1 ПОЈАМ И ВРЕДНОСТ КОНАЧНОГ ПРАВИЛНОГ ВЕРИЖНОГ РАЗЛОМКА

(1) Коначан верижни разломак

$$\gamma_1=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{m-1}+\cfrac{1}{a_m}}}}$$

је *правилан*, ако је његов први члан a_1 *ма који цео број*, а остали чланови $a_2, a_3, \ldots, a_m$ *природни бројеви*. Такав разломак краће означавамо симболом:

$$\gamma_1 = (a_1\, a_2 \ldots a_m)$$

или

$$\gamma_1 = (A), \tag{3.1}$$

где је $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$ уређени комплекс формиран од чланова датог разломка.

Вредност коначног правилног верижног разломка је *рационалан број*, ер се такав разломак састоји од коначног броја рационалних бројева, везаних операцијама сабирања и дељења. Како се, осим тога, разломак (3.1) може написати у облику

$$(A) = a_1 + \frac{1}{('A)} \tag{3.2}$$

следује да је *бројилац разломка* $('A)$ *једнак имениоцу разломка* (A). Ако бројилац разломка (A) означимо са $\varphi(A)$, онда је

$$(A) = \frac{\varphi(A)}{\varphi('A)}, \quad ('A) = \frac{\varphi('A)}{\varphi(''A)},$$

па је, према (3,2)

$$\varphi(A) = a_1 \varphi('A) + \varphi(''A).$$

Како је, осим тога

$$\varphi(a_1) = a_1, \quad \varphi(a_1, a_2) = a_1 a_2 + 1,$$

из једнакости (2.4) и (2.7) следује да је функција $\varphi(A)$ истоветна са функцијом $[A]$, па је:

$$(A) = \frac{[A]}{['A]}. \tag{3.3}$$

Напомињемо да су, према последици става 2.5 $[A]$ и $['A]$ узајамно прости бројеви.

(2) Из обрасца (3.3) следују два закључка:

1° Број чланова сваког коначног правилног верижног разломка може се, не мењајући његову вредност, повећати или смањити за 1, и то, повећати ако је његов последњи члан $a_m \geqslant 2$, а смањити ако је $a_m = 1$.

Из образаца (3.3) и (2.9) следује:

$$(A) = \frac{[A]}{['A]} = \frac{[A^*]}{['A^*]} = (A^*),$$

тј.

$$(A) = (A^*), \tag{3.4}$$

где је и A^* стабилан комплекс.

Према томе, сваки коначан правилан верижни разломак, чији је последњи члан $a_m \geqslant 2$, можемо претворити у други разломак, једнак првоме, који се завршава јединицом, али који има један члан више, и обрнуто.

На пример, $(-1, 5, 1, 7) = (-1, 5, 1, 6, 1)$.

2° Однос према јединици и знак верижног разломка (A) зависи од величине првог члана a_1, и то:

а) ако је $a_1 \geqslant 1$, онда је $(A) > 1$;

б) ако је $a_1 = 0$, онда је $0 < (A) < 1$:

ц) ако је $a_1 \leqslant -1$, онда је $(A) < 0$.

Заиста, како су $a_2, a_3, \ldots,$ природни бројеви, према обрасцу (2.7), увек је:

$$['A] > [''A] > 0$$

па је:

$$[A] > ['A], \text{ ако је } a_1 \geqslant 1;$$

$$[A] = [''A], \text{ ако је } a_1 = 0;$$

$$[A] < 0, \text{ ако је } a_1 \leqslant -1,$$

одакле, на основу обрасца (3.3), следују наведени закључци.

3.2 ПРИБЛИЖНИ РАЗЛОМЦИ

(1) Дефиниција 3.2: *приближним разломцима верижної разломка*

$$\frac{p}{q} = (A),$$

īge je $A = a_1 a_2, \ldots, a_m$, *називају се коначни верижни разломци*

(3.5) $$\frac{p_\nu}{q_\nu} = (A_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m$$

где је

(3.6) $$A_\nu = a_1 a_2 \ldots a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Разломци p_ν / q_ν *називају се шакође приближним разломцима и рационалної броја* p/q.

На основу једнакости (3.3) је:

(3.7) $$\frac{p_\nu}{q_\nu} = (A_\nu) = \frac{[A_\nu]}{['A_\nu]}, \quad \begin{cases} \nu = 1, 2, \ldots, m \\ A_\nu = a_1 a_2 \ldots a_\nu \end{cases}$$

па приближне разломке израчунавамо применом обрасца (2.5):

$$\begin{cases} [A_\nu] = a_\nu [A_{\nu-1}] + [A_{\nu-2}], \\ ['A_\nu] = a_\nu ['A_{\nu-1}] + ['A_{\nu-2}], \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

тј.

(3.8) $$\begin{cases} p_\nu = a_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2}, \\ q_\nu = a_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

полазећи од почетних вредности

$$p_{-1} = [A_{-1}] = [V'] = 0, \quad q_{-1} = ['A_{-1}] = ['V'] = 1,$$
$$p_0 = [A_0] = [V] = 1, \quad q_0 = ['A_0] = ['V] = 0.$$

Израчунавање обично сврставамо у таблицу

ν	-1	0	1	2	3	. . .
a_ν			a_1	a_2	a_3	. . .
p_ν	0	1	a_1	$a_2 a_1 + 1$	$a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1$	. . .
q_ν	1	0	1	a_2	$a_3 a_2 + 1$	. . .

У следећој таблици, на пример, налази се израчунавање приближних разломака верижног разломка

$$\frac{p}{q} = (2, 3, 1, 1, 5, 2)$$

ν	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_ν			2	3	1	1	5	2
p_ν	0	1	2	7	9	16	89	194
q_ν	1	0	1	3	4	7	39	85

тако је

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{9}{4},$$
$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{16}{7}, \quad \frac{p_5}{q_5} = \frac{89}{39}, \quad \frac{p_6}{q_6} = \frac{p}{q} = \frac{194}{85},$$

јер приближни разломак највишег реда представља вредност коначног верижног разломка.

3.3 ПОТПУНИ КОЛИЧНИЦИ

(1) Дефиниција 3.2: *Верижни разломци*

(3.9) $$\gamma_\nu = ({}^{(\nu-1)}A), \text{ за } \nu = 2, 3, \ldots, m,$$

īge je $A = a_1 a_2 \ldots a_m$, *називају се йошйуним количницима верижноī разломка* (A), *а шакође йошйуним количницима и броја* $\gamma_1 = (A)$.

На основу ове дефиниције, према закључку под 2° а) у т. 3.2 (2), ако је (A) правилан верижни разломак, увек је

(3.10) $$\gamma_\nu > 1 \text{ за } \nu = 2, 3, \ldots, m-1,$$

а, ако је $a_m \geqslant 2$, онда је и

(3.11) $$\gamma_m > 1.$$

Осим тога, на основу дефиниције 3.2, ма која два узастопна потпуна количника везана су релацијом

(3.12) $$\gamma_\nu = a_\nu + \frac{1}{\gamma_{\nu+1}}, \text{ за } \nu = 1, 2, \ldots, m-1,$$

где је $\gamma_1 = (A)$, а за $\nu = m$ је

(3.13) $$\gamma_m = a_m.$$

Према томе, на основу (3.10) и (3.11) из релација (3.12) и (3.13) следује да је a_ν *највећи цео број који није већи од* γ_ν:

(3.14) $$a_\nu = [\gamma_\nu], \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

што значи да је низ једнакости (3.12) и (3.13) настао применом Euklidovog алгоритма на рационалан број γ_1.

(2) Ако су K и H уређени комплекси чији су сви чланови природни бројеви, осим првог члана комплекса K, који може бити ма који цео број, онда се, на основу образаца (3.3) и (2.6) добија

$$(KH) = \frac{[K]\,[H] + [K']\,['H]}{['K]\,[H] + ['K']\,['H]}$$

тј.

(3.15) $$(KH) = \frac{[K]\,(H) + [K']}{['K]\,(H) + ['K']}.$$

Применимо добијени образац на један дати правилан верижни разломак $\gamma_1 = (A)$ где је $A = a_1 a_2 \ldots a_m$, стављајући

$$K = a_1 a_2 \ldots a_\nu, \quad H = a_{\nu+1} a_{\nu+2} \ldots a_m,$$

где је $1 \leqslant \nu \leqslant m-1$. Тада је

$$[K] = p_\nu, \quad ['K] = q_\nu, \quad [K'] = p_{\nu-1}, \quad ['K'] = q_{\nu-1}, \quad (H) = \gamma_{\nu+1},$$

па образац добија облик

(3.16) $$\gamma_1 = \frac{p_\nu \gamma_{\nu+1} + p_{\nu-1}}{q_\nu \gamma_{\nu+1} + q_{\nu-1}},$$

где је $1 \leqslant \nu \leqslant m-1$. Овај образац се може написати и у облику

(3.17) $$\gamma_1 = (a_1 a_2, \ldots, a_\nu, \gamma_{\nu+1}), \quad \nu = 1, 2, \ldots, m-1,$$

где је

$$\gamma_{\nu+1} = (a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_m).$$

(3) Обрнуто, ако је $K=a_1 a_2, \ldots, a_m$, $H=b_1 b_2, \ldots, b_n$, где је a_1 ма који цео број, а остали a_ν и сви b_ν природни бројеви, онда је на основу обрасца (2.18)

$$\frac{[K](OH)+[K']}{['K](OH)+['K']}=(K',\ a_m+b_1,\ 'H), \tag{3.15'}$$

што се може написати и у облику

$$\left(K,\ \frac{1}{(H)}\right)=(K',\ a_m+b_1,\ 'H). \tag{3.15''}$$

3.4 ПРЕДСТАВЉАЊЕ РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА КОНАЧНИМ ВЕРИЖНИМ РАЗЛОМЦИМА

(1) Ако је дат рационалан број $\gamma_1=p/q$, где је $(p;\ q)=1$, $p>0$, онда се применом Euklidovog алгоритма добија:

$$\begin{cases} p=a_1 q+r_1, & 0<r_1<q, \\ q=a_2 r_1+r_2, & 0<r_2<r_1, \\ r_1=a_3 r_2+r_3, & 0<r_3<r_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ r_{\nu-2}=a_\nu r_{\nu-1}+r_\nu, & 0<r_\nu<r_{\nu-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases} \tag{3.18}$$

Низ бројева $q, r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots$ је *ойадајући низ йриродних бројева*, па увек постоји једно $\nu=m$, за које је $r_m=0$. Тако се низ (3.18) завршава једнакостима:

$$\begin{cases} r_{m-3}=a_{m-1} r_{m-2}+r_{m-1}, & 0<r_{m-1}<r_{m-2}, \\ r_{m-2}=a_m r_{m-1}, & r_m=0. \end{cases} \tag{3.18'}$$

Пошто је $(p;\ q)=1$, $r_m=0$, увек је $r_{m-1}=1$, $a_m=r_{m-2}\geqslant 2$. Ако једнакости (3.18) напишемо у облику

$$\begin{cases} \dfrac{p}{q}=a_1+\dfrac{r_1}{q}, & 0<\dfrac{r_1}{q}<1, \\ \dfrac{q}{r_1}=a_2+\dfrac{r_2}{r_1}, & 0<\dfrac{r_2}{r_1}<1, \\ \dfrac{r_1}{r_2}=a_3+\dfrac{r_3}{r_2}, & 0<\dfrac{r_3}{r_2}<1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{r_{\nu-2}}{r_{\nu-1}}=a_\nu+\dfrac{r_\nu}{r_{\nu-1}}, & 0<\dfrac{r_\nu}{r_{\nu-1}}<1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{r_{m-3}}{r_{m-2}}=a_{m-1}+\dfrac{r_{m-1}}{r_{m-2}}, & 0<\dfrac{r_{m-1}}{r_{m-2}}<1, \\ \dfrac{r_{m-2}}{r_{m-1}}=a_m, & r_m=0, \end{cases} \tag{3.19}$$

па елиминишемо количнике q/r_1 $r_1/r_2, \ldots, \dfrac{r_{m-2}}{r_{m-1}}$, добијамо верижни разломак:

$$\frac{p}{q}=(a_1\, a_2 \ldots a_m).$$

Низ једнакости (3.18) је истоветан са низом једнакости (3.12), што значи да потпуни количници броја $\gamma_1=p/q$ имају вредности:

$$\gamma_2=\frac{q}{r_1}, \ \gamma_3=\frac{r_1}{r_2}, \ldots, \gamma_m=\frac{r_{m-2}}{r_{n-1}}.$$

Јединост овако добијеног верижног развитка, са последњим чланом $a_m \geqslant 2$, осигурана је једнакостима (3.18), јер је члан a_1 једнозначно одређен као највећи цео број који није већи од $\gamma_1=p/q$, a_2 као највећи цео број који није већи од $\gamma_2=q/r_1$ итд.

(2) Према томе, имајући у виду једнакост (3.4), можемо исказати:

Став 3.1: *Сваки рационалан број може се на један и само на један начин изразити у облику коначног правилног верижног разломка, чији је последњи члан* $a_m \geqslant 2$ (*или чији је последњи члан* $a_m = 1$).

Водећи рачуна да се бројеви чланова комплекса A и A^* разликују за 1, на основу једнакости (3.4) и става 3.1, можемо исказати:

Став 3.2: *Ако су* $A=a_1\, a_2 \ldots a_m$, $B=b_1\, b_2 \ldots b_n$, *уређени комплекси чији су први чланови* a_1 *и* b_1 *ма који цели бројеви, а сви остали чланови природни бројеви, и ако је*

$$(A)=(B), \quad m\equiv n \pmod 2,$$

онда је

$$A=B.$$

(3) Развијање датог рационалног броја p/q у правилан верижни разломак обично сврставамо у шему:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \overset{a_1}{\smile} & & \overset{a_2}{\smile} & \overset{a_3}{\smile} & \\
p & : & q & : & r_1 & : r_2 : & \ldots \\
\underline{-a_1 q} & & \underline{-a_2 r_1} & & \underline{-a_3 r_2} & \ldots & \\
r_1 & & r_2 & & r_3 & &
\end{array}$$

На пример, ако је дат рационалани број $\gamma_1=194/85$:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 2 & & 3 & & 1 & & 1 & & 5 & \ \ 2 \\
194 & : & 85 & : & 24 & : & 13 & : & 11 & : & 2 & : 1 \\
\underline{-170} & & \underline{-72} & & \underline{-13} & & \underline{-11} & & \underline{-10} & & \underline{-2} & \\
24 & & 13 & & 11 & & 2 & & 1 & & 0 &
\end{array}$$

према томе је:

$$\frac{194}{85}=(2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 5,\ 2).$$

а исто тако је, према обрасцу (3.4)

$$\frac{194}{85}=(2,\ 3,\ 1,\ 1,\ 5,\ 1,\ 1).$$

3.5 РАСПОРЕД ПРИБЛИЖНИХ РАЛОМАКА РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

Испитивање распореда приближних разломака рационалног броја

$$\frac{p}{q}=(A),\quad A=a_1\,a_2\ldots a_m,\quad (p;\ q)=1,$$

као и положаја тога броја према њима, извршићемо посматрањем разлике

$$(A_\nu)-(A_\mu),\quad 1\leq\mu<\nu\leq m,$$

где је

$$A_k=a_1\,a_2\ldots a_k \text{ за } k=\nu,\ \mu.$$

Применом образаца (3.7) и (2.13) добија се

$$(A_\nu)-(A_\mu)=\frac{[A_\nu]\,['A_\mu]-[A_\mu]\,['A_\nu]}{['A_\mu]\,['A_\nu]}$$

тј.

$$(A_\nu)-(A_\mu)=\frac{[A_\mu\,|\,A_\nu]}{['A_\mu[\,['A_\nu]}\,.$$

Затим, према (2.14):

$$(A_\nu)-(A_\mu)=(-1)^\mu\,\frac{[V|\,a_{\mu+1}\,a_{\nu+2},\ldots,a_\nu]}{['A_\mu]\,['A_\nu]}\,,$$

и најзад, опет према (2.13):

$$(A_\nu)-(A_\mu)=(-1)^{\mu+1}\,\frac{[a_{\mu+2}\,a_{\mu+3},\ldots,a_\nu]}{['A_\mu]\,['A_\nu]} \tag{3.20}$$

где је

$$1\leqslant\mu<\nu\leqslant m.$$

Водећи рачуна да десна страна обрасца (3.20) има знак $(-1)^{\mu+1}$ јер су $a_2, a_3, \ldots, a_m$ природни бројеви; и узимајући у том обрасцу прво да су μ и ν обоје непарни, затим обоје парни и најзад један паран а други непаран, долазимо до ових закључака:

1°. Приближни разломци непаЗног реда расту кад њихов ред расте:

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\cdots<\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}<\cdots$$

2°. Приближни разломци парног реда опадају кад њихов ред расте

$$\cdots<\frac{p_{2k}}{q_{2k}}<\cdots<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}\,.$$

3°. Сваки приближни разломак непарног реда мањи је од сваког приближног разломка парног реда:

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}<\frac{p_{2l}}{q_{2l}}.$$

На основу тога, узимајући у обзир да је рационалан број p/q приближни разломак навишег реда $p/q=p_m/q_m$, можемо исказати:

Став 3.3: *Сви приближни разломци непарног реда рационалног броја p/q су мањи од тог броја, а имају све већу вредност што им је ред већи. Напротив, сви приближни разломци парног реда су већи од p/q, а имају све мању вредност што им је ред већи:*

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\cdots<\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}<\cdots<\frac{p}{q}<\cdots<\frac{p_{2k}}{q_{2k}}<\cdots<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}. \tag{3.21}$$

4. ИЗРАЖАВАЊЕ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА У ОБЛИКУ ФУНКЦИЈЕ A

4.1 ПРИМИТИВНИ ИЗРАЗИ $[A]$ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

(1) Сваки природни број p може се на неограничено много начина изразити у облику функције $[A]$, где је $A=a_1 a_2 \ldots a_m$ уређени комплекс *природних* бројева, али се помоћу одређеног, коначног броја таквих израза могу написати сви остали. Ради тога уводимо појам примитивног израза $[A]$.

Дефиниција 4.1: *Израз природног броја у облику функције $[A]$, назива се примитивним изразом, ако је $A=a_1 a_2 \ldots a_m$ уређени комплекс природних бројева чији су први и последњи члан већи од јединице:*

$$a_1\geqslant 2, \quad a_m\geqslant 2. \tag{4.1}$$

Обрасци (2.9), (2.11) и (2.12) казују да се сви остали изрази $[A]$, у којима је A уређени комплекс природних бројева, могу свести на примитивне, и обрнуто, да се ма који од њих може добити из одговарајућег примитивног израза.

(2) За примитивне изразе природног броја p вреди

Став 4.1 1° *Израз $[A]$, где је $A=a_1 a_2 \ldots a_m$, је примитивни израз природног броја p онда и само онда, ако је*

$$\frac{p}{q}=(A), \tag{4.2}$$

где је

$$(p;q)=1, \quad q\in\left[1, \frac{p}{2}\right), \tag{4.3}$$

а верижни разломак (A) има последњи члан $a_m\geqslant 2$.

2°. *Ако је $[A]$ примитивни израз броја p, онда је и $[\underline{A}]$ његов примитивни израз.*

3°. *Број примитивних израза природног броја $p \geqslant 3$ је*

$$N = \frac{1}{2}\varphi(p), \tag{4.4}$$

где је $\varphi(p)$ функција индикатриса броја p.

Доказ. 1°. Ако је дат ма који примитивни израз $[A]$ броја p онда је $['A] > 0$, па постоји верижни разломак

$$\frac{[A]}{['A]} = (A).$$

Како је $a_1 \geqslant 2$, то је $[A] > 2\,['A]$, што значи да су услови (4.3) задовољени. Обрнуто, из верижног развитка сваког разломка

$$\frac{p}{q} = (A),$$

чији именилац q задовољава услове (4.3), добија се примитивни израз $p = [A]$, јер је $p/q > 2$, па је $a_1 \geqslant 2$, а увек може бити $a_m \geqslant 2$ (т. 3.1 (2) под 1°).

2°. Према ставу 2., сваки уређени комплекс задовољава једнакост

$$[A] = [\underline{A}],$$

а осим тога, ако комлекс A задовољава услове дефиниције 4.1, задовољава их и комплекс $\underline{A}$. Потребно је још само нагласити да из комплекса A *једнозначно* сзедује комплекс $\underline{A}$ и обрнуто, јер, према т. 1.3 (3) под 1°, ако је $\underline{A} = B$ онда је $\underline{B} = A$ тј.

$$\underline{\{\underline{A}\}} = A.$$

3°. Ако је $(p\colon q) = 1$, онда је и $(p, p-q) = 1$, што значи да су природни бројеви, који немају заједничких чинилаца са бројем p, а мањи су од њега, симетрично распоређени у односу на $p/2$. Према томе, у интервалу $\left[1, \frac{p}{2}\right)$ налази се половина њиховог броја. Број 2 има само један примитивни израз [2].

(3) **Пример 1.** Примитивни изрази броја 21 су:

[21] за $q = 1$,	[4, 5] за $q = 5$,
[10, 2] за $q = 2$,	[2, 1, 1, 1, 2] за $q = 8$,
[5, 4] за $q = 4$,	[2, 10] за $q = 10$.

Пример 2. Примитивни изрази броја 46 су:

[46] за $q=1$,	[9, 5] за $q=5$,
[15, 3] за $q=3$,	[6, 1, 1, 3] за $q=7$,
[5, 9] за $q=9$,	[3,15] за $q=15$,
[4, 5, 2] за $q=11$,	[2, 1, 2, 2, 2] за $q=17$,
[3, 1, 1, 6] за $q=13$,	[2, 2, 2, 1, 2] за $q=19$,

[2, 5, 4] за $q=21$.

Пример 3. Примитивни изрази броја 65 су:

[65] за $q=1$,	[3, 1, 4, 1, 2] за $q=17$,
[32, 2] за $q=2$,	[3, 1, 1, 1, 1, 3] за $q=18$,
[21, 1, 2] за $q=3$,	[3, 2, 2, 1, 2] за $q=19$,
[16, 4] за $q=4$,	[3, 10, 2] за $q=21$,
[10, 1, 5] за $q=6$,	[2, 7, 21] за $q=22$,
[9, 3, 2] за $q=7$,	]2, 1, 4, 1, 3] за $q=23$,
[8, 8] за $q=8$,	[2, 1, 2, 2, 3] за $q=24$,
[7, 4, 2] за $q=9$,	[2, 2, 2, 5] за $q=27$,
[5, 1, 10] за $q=11$,	[2, 3, 9] за $q=28$,
[5, 2, 2, 2] за $q=12$,	2, 4, 7 за $q=2$ 9,
[4, 1, 1, 1, 4] за $q=14$,	[2, 10, 3] за $q=31$,
[4, 16] за $q=16$,	[2, 32] за $q=32$.

4.2 ИНВЕРЗНИ И СИМЕТРИЧНИ ПРИМИТИВНИ ИЗРАЗИ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

За инверзне и симетричне уређене комплексе природних бројева, као и одговарајуће пирмитивне изразе природних бројева вреде следећа четири става:

(1) Став 4.2. *Уређени комӣлексни ӣриродних бројева* $A=a_1\,a_2\ldots a_m$, *и* $B=b_1\,b_2\ldots b_n$ *инверзни су један друīоме онда и само онда, ако су задовољене једнакосӣи:*

$$(4.5)\qquad \begin{cases} [A]=[B], \\ [A']=['B], \\ ['A]=[B'], \\ ['A']=['B']. \end{cases}$$

Д о к а з. Ако је $B=\underline{A}$, онда су једнакости (4.5) задовољене.

Обрнуто, ако су дате једнакости (4.5), из релације (2.17) следује

$$m \equiv n \pmod 2.$$

Осим тога, пошто су A и B уређени комплекси природних бројева са најмање два члана, увек је $['A']>0$, $['B']>0$, па се деобом друге и треће једнакости (4.5) четвртом добијају једнакости:

$$(A')=(B'), \quad ('A)=('B).$$

Према ставу 3.2, из ових једнакости следује:

$$A'=\underline{B}', \quad \underline{A}'=B'$$

па је

$$B=\underline{A}.$$

С т а в 4.3. *Уређени комплекс природних бројева* $A=a_1\, a_2 \ldots a_m$, *симетричан је онда и само онда, ако је задовољена једнакост*

$$[A']=['A]. \tag{4.6}$$

[Frobenius 13].

Д о к а з. Став 4.3 је непосредна последица става 4.2, јер ако је $\underline{A}=A$, онда се једнакости (4.5) своде на једну једину једнакост (4.6). Ипак дајемо посебан доказ става 4.3.

Сваки симетрични комплекс S задовољава једнакост

$$S'=\underline{S}'$$

па је

$$[S']=[\underline{S}']=['S].$$

Обратно, ако је A уређени комплекс природних бројева чији је број чланова $m>2$, онда је $['A']>0$, па ако је

$$[A']=['A],$$

онда је и

$$\frac{[A']}{['A']}=\frac{['A]}{['A']}$$

тј.

$$(A')=(\underline{A}')$$

што, према ставу 3.2, значи да је $A'=\underline{A}'$. Одатле непосредно следује $a_1=a_m$ и затим $A=\underline{A}$.

(2) С т а в 4.1 казује да се примитивни изрази $[A]$ природних бројева јављају у паровима инверзних израза $[A]$ и $[\underline{A}]$ или да су симетрични, ако је $A=\underline{A}$. О одређивању парова инверзних израза говори став 4.4, а о одређивању симетричних став 4.5.

Став 4.4. *Из верижних развитака разломака p/q и p/r добијају се примитивни инверзни изрази природног броја p онда и само онда, ако се имениоци q и r налазе у интервалу $[1, p/2)$ и ако задовољавају конгруенцију.*

$$qr+\varepsilon\equiv 0 \pmod{p}, \tag{4.7}$$

где је $\varepsilon=+1$ или $\varepsilon=-1$. У првом случају примитивни изрази имају паран, а у другом случају непаран број чланова.

За сваки дати број $q\in[1, p/2)$ који нема заједничких чинилаца са бројем p, постоји један и само један број $r\in[1, p/2)$ који задовољава конгруенцију (4.7).

Доказ. Ако је

$$\frac{p}{q}=(A), \quad \frac{p}{r}=(\underline{A}),$$

где је

$$A=a_1 a_2 \ldots a_m \text{ и } (p;\, q)=1, \ (p;\, r)=1,$$

онда је

$$p=[A], \ q=['A], \ r=[A'],$$

па из релације (2.17) следује

$$p\,['A']-qr=(-1)^m,$$

тј.

$$qr+(-1)^m\equiv 0 \pmod{p}.$$

Обратно, ако разломке p/q и p/r, где су q и r бројеви који задовољавају конгруенцију (4.7), развијемо у вравилне верижне разломке са парним бројем чланова, ако је $\varepsilon=+1$, или непарним ако је $\varepsilon=-1$, добијамо:

$$\frac{p}{q}=(A), \quad \frac{p}{r}=(B), \text{ где је } \begin{cases} A=a_1 a_2 \ldots a_m, \\ B=b_1 b_2 \ldots b_n, \\ (-1)^m=(-1)^n=\varepsilon. \end{cases}$$

Из ових разломака следује;

$$p=[A]=[B], \ q=['A], \ r=['B], \tag{4.8}$$

па су задовољене релације

$$p\,['A']-q\,[A']=\varepsilon,$$

$$p\,['B']-r\,[B']=\varepsilon,$$

тј.

$$q\,[A']+\varepsilon\equiv 0 \pmod{p},$$

$$r\,[B']+\varepsilon\equiv 0 \pmod{p}.$$

Ако се сад од дате конгруенције

$$qr+\varepsilon\equiv 0 \pmod{p}$$

одузме свака од претходних добијају се конгруенције

$$(4.9)\qquad \begin{cases} q\{r-[A']\}\equiv 0 \pmod p, \\ r\{q-[B']\}\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Пошто је

$$r<p,\ [A']<p,\ q<p,\ [B']<p,$$

то је и

$$|r-[A']|<p,\ |q-[B']|<p.$$

а пошто је и $(p;q)=1$, $(r;p)=1$, конгруенције (4.9) могу бити задовољене само ако је

$$r=[A'],\ q=[B'].$$

То значи, према (4.8), да је

$$[A]=[B],\ [A']=['B],\ ['A]=[B'],$$

а како је $m\equiv n \pmod 2$, то је према (2.17), и $['A']=['B']$. Према томе, комплекси A и B задовољавају услове (4.5), па је, на основу става 4.2:

$$B=\underline{A}.$$

Да за свако дато $q\{(p;q)=1,\ q\in[1,p/2)\}$ постоји једно и само једно $r\in[1,p/2)$, које задовољава конгруенцију (4.7), казује нам

Лема 4.1 *Једна и само једна од конгруенција*

$$(4.10)\qquad qx+1\equiv 0 \pmod p;\quad qx-1\equiv 0 \bmod p),$$

има решење у интервалу

$$(4.11)\qquad \left[1,\ \frac{p}{2}\right)$$

Доказ леме. Познато је да свака од конгруенција (4.10), пошто је $(p;q)=1$, има по једно и само по једно решење у интервалу $x\in[1,p-1]$, Ако је $x=r$ решење прве, тј. ако је

$$qr+1\equiv 0 \pmod p$$

онда је

$$q(p-r)-1\equiv 0 \pmod p$$

што значи да је $x=p-r$ решење друге, а један од бројева r и $p-r$ налази се у интервалу (4.11).

На крају је потребно напоменути да став 4.4 вреди и ако се $q\in[1,p-1]$ и $r\in[1,p-1]$ не налазе оба, али чак ни један, у интервалу $[1,p/2)$, али тада добијени изрази $[A]$ и $[\underline{A}]$ нису примитивни.

Став 4.5. *Из верижног развитка разломка p/q добија се примитивни симетрични израз природног броја p онда и само онда ако се именилац q налази у интервалу* $[1,p/2)$ *и ако задовољава конгруенцију*

$$(4.12)\qquad q^2+\varepsilon\equiv 0 \pmod p,$$

где је $\varepsilon = +1$ *или* $\varepsilon = -1$. *У првом случају примитивни симетрични израз има паран, а у другом случају непаран број чланова.*

Доказ. Став 4.5 је непосредна последица става 4.4, јер ако је $\underline{A} = \overline{A}$, онда је $['A] = [A']$, тј $q = r$ па се конгруенција (4.7) своди на конгруенцију (4.12). Ипак дајемо посебан доказ става 4.5.

Ако је

$$\frac{p}{q} = (S), \quad (p;\, q) = 1,$$

где је S симетрични комплекс, онда је

$$p = [S], \quad q = ['S],$$

па је, према (4.6) и (2.17) задовољена релација

$$p\,['S'] - q^2 = (-1)^s,$$

где је s број чланова комплекса S. Тада је и

$$q^2 + (-1)^s \equiv 0 \pmod p,$$

што значи да је услов (4.12) потребан.

Обратно, ако разломак p/q, где је $q \in [1, p/2)$ број који задовољава услов (4.12) развијамо у правилан верижни разломак, са парним бројем чланова, ако је $\varepsilon = +1$, или непарним ако је $\varepsilon = -1$, добијамо

$$\frac{p}{q} = (A), \text{ где је } \begin{cases} A = a_1 a_2 \dots a_m \\ (-1)^m = \varepsilon. \end{cases}$$

Из овог разломка следује

$$p = [A], \quad q = ['A], \tag{4.13}$$

па је задовољена релација

$$p\,['A'] - q\,[A'] = \varepsilon,$$

тј.

$$q\,[A'] + \varepsilon \equiv 0 \pmod p.$$

Ако се ова конгруенција одузме од дате

$$q^2 + \varepsilon \equiv 0 \pmod p,$$

добија се

$$q\,\{q - [A']\} \equiv 0 \pmod p. \tag{4.14}$$

Пошто је $q < p$, $[A'] < p$, то је и $|q - [A']| < p$, те конгруенција (4.14) једино може бити задовољена, ако је

$$q = [A'],$$

јер је $(p;\, q)=1$. Тако је, према (4.8):

$$['A]=[A'].$$

То значи, на основу става 4.3, да је $A=\underline{A}$.

Потребно је напоменути, да уколико коогруенција (4.12) има решење $q\in[1, p/2)$, онда је њено решење и $q_1=p-q$. Из првог решења се добија, примитивни симетрични израз $[S]$ а из другог опет симетричан израз $[{}^*S^*]$, али који није примитиван.

(3) Следећа два става говоре о неким особинама природних бројева који се могу претставити изразом $[S]$, где је S симетрични уређени комплекс.

С т а в 4.6. *Природни број* $[S]$, *где је* S *симетрични уређени комплекс природних бројева са парним бројем чланова, може се претставити у облику збира квадрата два узајамно проста броја:*

$$[\underline{H}\,H]=[H]^2+['H]^2. \tag{4.15}$$

Д о к а з. Из обрасца (2.6) следује

$$[\underline{H}\,H]=[\underline{H}]\,[H]+[\underline{H}']\,['H],$$

али ако је

$$[\underline{H}]=[H],\ [\underline{H}']=['H],$$

добија се образац (4.15).

С т а в 4.7. *Примитивни израз* $[S]$, *где је* S *симетрични уређени комплекс са непарним бројем чланова, који има најмање три члана, не може претстављати степен први или виши непарног простог броја, нити двоструки такав степен.*

Д о к а з. Применом обрасца (2.6) добијају се идентичностти

$$\begin{cases} [\underline{H},\, 2a,\, H]=2\,[H]\,[a\,H], \\ [\underline{H},\, 2a+1,\, H]=[H]\,[2,a,H], \end{cases} \tag{4.16}$$

а пошто су $[H, 2a, H]$ и $[H, 2a+1, H]$ примитивни изрази са најмање три члана, то је $[H]\geqslant 2$. Осим тога је

$$([H];\, [a\,H])=1,\ ([H];\, [2,a,H])=1 \text{ или } 2,$$

јер је

$$[2,a,H]=(2a+1)\,[H]+2\,['H].$$

Према томе примитивни израз $[\underline{H}, 2a, H]$ претставља паран број, који осим чиниоца 2, има још бар два узајамно проста чиниоца, а израз $[\underline{H}, 2a+1, H]$ је производ два непарна узајамно проста чиниоца или је дељив са 4.

(4) На крају овог одељка доказаћемо један став за примитивне изразе простих бројева облика $p=4n+1$, као непосредну последицу ставова 4.1 и 4.7.

Став 4.8. *Сваки прост број облика $p=4n+1$ може се представити симетричним примитивним изразом [S] са парним бројем чланова.*

Доказ. Ако је $p=4n+1$, онда је

$$\varphi(p)=p-1=4n,$$

па је број примитивних израза броја p паран број $N=2n$. Како, осим тога сваки природни број p има примитиван једночлани симетрични израз $[p]$, а несиметрични изрази јављају се у паровима један другом инверзних, посматрани број $p=4n+1$ има још један симетрични израз са два или више чланова. Тај израз, према ставу 4.7, не може имати непаран број чланова, те је став 4.8 доказан.

4.3. НЕКОЛИКО РЕЗУЛТАТА ИЗ ЕЛЕМЕНТАРНЕ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

(1) *Линеарна Диофантова једначина са две непознате*

Линеарна Диофантова једначина са две непознате обично се пише у облику

$$ax-by=c,\quad (a;\ b;\ c)=1, \tag{4.17}$$

где су a, b и c дати, а x и y непознати цели бројеви. Претпоставимо да је $(a;\ b)=1$ и да једначина (4.17) има једно решење $x=x_0$, $y=y_0$, па је идентички

$$ax_0-by_0=c. \tag{4.18}$$

Одузимањем једначина (4.17) и (4.18) добија се

$$a(x-x_0)=b(y-y_0). \tag{4.19}$$

Пошто је $(a;\ b)=1$, последња једначина ће бити задовољена једино ако је

$$x-x_0=tb,\quad y-y_0=ta \tag{4.20}$$

где је t *произвољан цео број*. Према томе, ако једначина (4.17) има једно решење x_0, y_0, она их има бесконачно много, и то:

$$x=x_0+tb,\quad y=y_0+ta,\quad t=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots. \tag{4.21}$$

Обрнуто, ако је x_1, y_1 ма које решење једначине (4.17) онда је задовољена и једначина (4.19)

$$a(x_1-x_0)=b(y_1-y_0)$$

што значи да је заједничка вредност количника

$$\frac{x_1-x_0}{b}=\frac{y_1-y_0}{a}$$

цео број, јер је $(a;\ b)=1$. Према томе, обрасци (4.21) садрже сва решења једначине (4.17).

Ако би било $(a; b) = d > 1$, онда је $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ где су a_1 и b_1 цели бројеви, па се једначина (4.17) може написати у облику

$$a_1 x - b_1 y = \frac{c}{d},$$

а пошто c није дељиво са d, ова једначина не може бити задовољења целим бројевима x и y, што значи да у том случају једначина (4.17) нема решења.

Да бисмо доказали да једначина (4.17) има решења, ако је $(a; b) = 1$ и нашли једно решење посматрајмо верижни развитак разломка a/b са *парним бројем чланова*

$$\frac{a}{b} = (A), \quad A = a_1 a_2 \ldots a_{2k}.$$

Тада је $a = [A]$, $b = ['A]$ па је, према (2.17):

$$a['A'] - b[A'] = 1,$$

тј.

$$a(c['A']) - b(c[A']) = c,$$

па се поређењем са једначином (4.17), добија једно њено решење

$$x_0 = c['A'], \quad y_0 = c[A'].$$

Према томе, једначина (4.17) има решења онда и само онда, ако је $(a; b) = 1$ *и сва њена решења су дата обрасцима*

$$\text{(4.22)} \qquad \begin{cases} x = c['A'] + bt, \\ y = c[A'] + at, \end{cases} \text{ где је } \begin{cases} \dfrac{a}{b} = (A), \\ t = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots . \end{cases}$$

(2) *Линеарна конгруенција са једном непознатом*

Конгруенција

$$\text{(4.23)} \qquad ax + b \equiv 0 \pmod{m},$$

где је $(a; m) = 1$, може написати у облику Диафантове једначине

$$ax + b = my$$

где је y цео број. Поређењем са једначином (4.17) и решењем (4.22), добијају се сва решења конгруенције (4.23) у облику

$$\text{(4.24)} \qquad x = b[A'] + mt, \text{ где је } \begin{cases} \dfrac{m}{a} = (A), \ A = a_1 a_2 \ldots a_{2k}, \\ t = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots . \end{cases}$$

(3) *Збир квадрата два узајамно проста броја*

(1) Из ставова 4.6 и 4.8 непосредно следује познати и веома лепи Fermat-ов став:

Став 4.9. *Сваки прост број облика* $4n+1$ *може се изразити у облику збира квадрата два узајамно проста броја.* [Euler 12, Gauss 15].

(2) Из познате идентичности

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx+ay)^2+(ax-by)^2$$

следује закључак, *да се производ два броја који се могу изразити у облику збира два квадрата и сам може изразити у истом облику.*

Да бисмо показали да вреди и обрнут став, доказаћемо две леме.

Лема 4.2. *Сваки делилац* p *целог броја облика* q^2+1 *може се изразити у облику збира квадрата два узајамно проста броја.*

Лема је непосредна последица ставова 4.5 и 4.6, ако је $q<p$. Ако је $q>p$, онда увек постоји природан број $0<q-\lambda p<p$, па је p делилац и броја

$$(q-\lambda p)^2+1$$

ако је делилац броја q^2+1.

Лема 4.3. *Сваки делизац целог броја облика* a^2+b^2, *где је* $(a;\, b)=1$, *делилац је и неког целог броја облика* q^2+1.

Заиста, у идентичности

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx+ay)^2+(ax-by)^2$$

могуће је тако изабрати x и y, да буде

$$ax-by=1,$$

јер је $(a,\, b)=1$, па десна страна добија облик q^2+1.

На основу лема 4.2 и 4.3 можемо исказати.

Став 4.9. *Сваки делилац природног броја облика* a^2+b^2 *где су* a *и* b *узајамно прости бројеви, и сам има исти облик* $\alpha^2+\beta^2$ *где су* α *и* β *узајамно прости бројеви.*

5. БЕСКОНАЧНИ ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

5.1 ДЕФИНИЦИЈА БЕСКОНАЧНОГ ПРАВИЛНОГ ВЕРИЖНОГ РАЗЛОМКА

(1) Ако је дат низ

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots \tag{5.1}$$

чији је први члан a_1 *ма који цео број*, а остали чланови $a_2, a_3, a_4, \ldots$, *природни бројеви*, можемо формирати низ рационалних бројева

$$\frac{p_n}{q_n}=(A_n), \text{ где је } A_n=a_1\, a_2 \ldots a_n, \tag{5.2}$$

за $n=1, 2, 3, \ldots$. Чланови овог низа су правилни верижни разломци, а сваки од њих постаје кад се претходном допише један нов члан — одговарајући члан низа (5.1). Такав закон формирања идентичан је са законом формирања приближних разломака датог коначног верижног разломка, са јединим разликом што су сад чланови a_n дати низом (5.1). Заиста, кад се уочи ма који члан низа (5.2), онда су сви претходни чланови истог низа његови приближни разломци. Према томе, за верижне разломке (5.2) вреде обрасци (3.8). На пример, за имениоце q_n разломка (5.2) вреди рекурентни образац

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

одакле је

$$q_n > q_{n-1} \text{ за } n=2, 3, \ldots,$$

јер је $a_n \geqslant 1$ за $n \geqslant 2$. Низ q_n је, према томе, монотоно растући низ природних бројева, што значи да је *неограничен:*

$$q_n \to \infty \text{ кад } n \to \infty. \tag{5.3}$$

Из обрасца (3.20), на исти начин као у т. 3.5 произилази распоред разломака (5.2), истоветан са показаним распоредом приближних разломака, са јединим разликом што сад разломци непарног и разломци парног реда чине монотоне бројне низове

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \cdots < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \cdots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \cdots < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}. \tag{5.4}$$

Оба посматрана монотона низа су, према томе, ограничени, и то низ разломака непарног реда са горње стране (на пример разломком p_2/q_2), а низ разломака парног реда са доње стране (на пример разломком p_1/q_1). То значи да оба низа конвергирају, па ћемо њихове граничне вредности, означити — на пример — са ξ и η:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = \xi, \quad \lim \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \eta.$$

Према (5.4) је:

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \xi \leqslant \eta < \frac{p_{2k}}{q_{2k}},$$

па је

$$0 \leqslant \eta - \xi < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}},$$

тј., према обрасцу (2.17):

$$0 \leqslant \eta - \xi < \frac{1}{q_{2k} q_{2k+1}}.$$

Према (5.3) десна страна ове неједнакости тежи нули, кад $k \to \infty$, па је

$$\xi = \eta,$$

што значи да низ разломака (5.2) конвергира:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \xi. \tag{5.5}$$

На основу изложеног, помоћу низа (5.1) може се дефинисати *бесконачни правилни верижни разломак* и може му се доделити вредност дата граничном вредношћу (5.5).

Дефиниција 5.1. *Вредност бесконачног разломка*

$$(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots) \tag{5.6}$$

једнака је граничној вредности

$$(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots) = \lim_{n\to\infty} (A_n) = \xi$$

где је

$$A_n = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n, \quad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Реалан број ξ не може бити рационалан, јер сваки рационалан број има коначан верижни развитак. Према томе сваки бесконачан верижни разломак претставља *ирационалан број*.

(2) Из изложеног следује:

Став 5.1. *Сваки бесконачан правилан верижни разломак*

$$(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots)$$

је конвергентан и представља једнозначно одређен ирационални број ξ, *који је дат граничном вредношћу*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} (A_n)$$

где је $A = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$.

(3) Разломци (5.2), на тај начин постају приближни разломци бесконачног верижног разломка (5.6), односно ирационалног броја ξ.

(4) Појам потпуних количника, дат у т. 3.3 за рационалне бројеве, проширује се такође без ташкоће и на ирационалне бројеве. Тако су потпуни количници разломка (5.6), односно ирационалног броја ξ који претставља тај раломак:

$$\xi_2 = (a_2\, a_3 \ldots),$$

$$\xi_3 = (a_3\, a_4 \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_n = (a_n\, a_{n+1} \ldots).$$

Сви су они бесконачни правилни верижни разломци, односно ирационални бројеви, а сваки је већи од јединице: $\xi_n > 1$, за $n = 2, 3, \ldots$.

Ако ставимо

$$A_n = a_1 a_2 \dots a_n, \quad B_{n+1,m} = a_{n+1} a_{n+2} \dots a_m,$$

онда је идентички

$$(A_m) = \frac{[A_n](B_{n+1,m}) + [A_{n-1}]}{['A_n](B_{n+1,m}) + ['A_{n-1}]},$$

па ако $m \to \infty$, добија се образац:

$$\xi = \frac{[A_n]\,\xi_{n+1} + [A_{n-1}]}{['A_n]\,\xi_{n+1} + ['A_{n-1}]},$$

који је истоветан са обрасцем (3.16) доказаним за коначне верижне разломке. Овај образац се може написати у облику

(5.8) $$\xi = (A_n,\ \xi_{n+1}),$$

а према (5.2) и у облику:

(5.9) $$\xi = \frac{p_n\,\xi_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\,\xi_{n+1} + q_{n-1}}.$$

Исто тако потребно је приметити да и образац (3.15′) односно (3.15″) важи и кад број чланова комплекса H неограничено расте.

5.2 ПРЕДСТАВЉАЊЕ ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА ПРАВИЛНИМ ВЕРИЖНИМ РАЗЛОМЦИМА

(1) Ако је дат ирационалан број ξ и ако је a_1 највећи цео број који није већи од ξ, онда је

$$0 < \xi - a_1 < 1$$

и затим

$$\frac{1}{\xi - a_1} > 1,$$

па се може ставити

(5.10) $$\xi = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_2 > 1.$$

На исти начин даље следује једно за другим

(5.11) $$\begin{cases} \xi_2 = a_2 + \dfrac{1}{\xi_3}, & \xi_3 > 1, \\ \xi_3 = a_3 + \dfrac{1}{\xi_4}, & \xi_4 > 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \xi_n = a_n + \dfrac{1}{\xi_{n+1}}, & \xi_{n+1} > 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

где је a_n највећи цео број који није већи од ξ_n за $n=2, 3, 4, \ldots$. Из ових једнакости, као у т. 3.4 следује

(5.12) $$\xi=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \xi_{n+1}).$$

Пошто јә ξ ирационалан број, ирационални су исто тако и потпуни количници $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_n, \ldots$. Тако се у наведеном поступку — који је у ствари Euklidov алгоритам — никад не може десити да неки потпуни количник ξ_n буде цео број, што значи да се поступак неограничено продужава и увек добија бесконачан правилан верижни разломак

(5.13) $$(a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots).$$

(2) Разломак (5.10), према ставу 5.1, претставља неки ирационалан број, само је потребно утврдити да ли је то дати број ξ, или можда неки други. Одговор се добија применом једнакости (5.12). Према обрасцу (5.9), она се може написати у облику

$$\xi=\frac{p_n\,\xi_{n+1}+p_{n-1}}{q_n\,\xi_{n+1}+q_{n-1}}$$

где је

$$\frac{p_n}{q_n}=(A_n),\quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

па је, према (2.17):

(5.14) $$\xi-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_n\,(q_n\,\xi_{n+1}+q_{n-1})}\,.$$

Пошто је $\xi_{n+1}>1$, $q_{n-1}>0$, из ове једнакости следује неједнакост:

$$\left|\,\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{{q_n}^2}\,,$$

где је ξ дати ирационалан број.

Према ставу 5.1, кад $n\to\infty$, низ p_n/q_n тежи вредности разломка (5.13), а према последњој неједнакости низ p_n/q_n тежи броју ξ. То значи да добијени разломак (5.13) заиста претставља дати број ξ.

(5.15) $$\xi=(a_1\, a_2\, a_3 \ldots).$$

(3) Потребно је одговорити још на последње питање: да ли се дати ирационалан број може само на један или на више начина представити у облику правилног верижног разломка.

Ма која два узастопна потпуна количника везана су релацијама

(5.11) $$\xi_n=a_n+\frac{1}{\xi_{n+1}},\quad n=2, 3, 4, \ldots,$$

па како је $\xi_n>1$, $\xi_{n+1}>1$, то је a_n највећи цео број који није већи од ξ_n, те је увек једнозначно одређен.

Тако се може исказати:

Став 5.2. *Сваки реалан ирационалан број може се на један и само на један начин представити у облику правилног верижног разломка. Добијени разломак је увек бесконачан.*

Пример. Верижни развитак броја π није познат, али је израчунато више стотина његових чланова. Почетни део гласи:

$$\pi=(3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \ldots).$$

6. ПРИБЛИЖНИ РАЗЛОМЦИ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА КАО ЊИХОВЕ ПРИБЛИЖНЕ ВРЕДНОСТИ

6.1 ГРЕШКА АПРОКСИМАЦИЈЕ ПРИБЛИЖНИХ РАЗЛОМАКА

(1) Приближни разломци реалних бројева су њихове врло повољне приближне вредности. Према (5.14), грешка апроксимације приближног разломка p_n/q_n реалног броја ξ, дата је обрасцем

(6.1) $$\xi-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_n(q_n\xi_{n+1}+q_{n-1})}, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

где је q_{n-1} именилац претходног приближног разломка $(q_0=0)$, ξ_{n+1} следећи потпуни количник. На основу обрасца (6.1), из (5.4) следује неједнакост:

(6.2) $$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\cdots<\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}<\cdots<\xi<\cdots<\frac{p_{2k}}{q_{2k}}<\cdots<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}.$$

Осим тога, из (6.1) следује образац за апсолутну вредност грешке апроксимације

(6.3) $$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_n\xi_{n+1}+q_{n-1})}, \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

јер су све величине у имениоцу разломка на десној страни позитивне.

(2) Из једнакости (6.3) и неједнакости (6.2) следује:

Став 6.1. 1°. *Апсолутна вредност грешке апроксимације приближног разломка p_n/q_n реалног броја ξ лежи у размаку*

(6.4) $$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}<\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

2°. *Реалан број ξ налази се између ма која два своја узастопна приближна разломка, а ближи му је разломак вишег ранга.*

3°. *Айсолутна вредност грешке айроксимације приближног разломка* p_n/q_n *реалног броја* ξ *може се написати у облику*

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{c_n q_n^2}, \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{6.5}$$

где је

$$c_n>1. \tag{6.6}$$

[Lagrange 18]

Доказ. 1°. Неједнакост (6.4) следује из једнакости (6.3) на основу неједнакости

$$a_{n+1}<\xi_{n+1}<a_{n+1}+1.$$

2°. Према (6.2) разломци p_n/q_n и p_{n+2}/q_{n+2} налазе се са исте стране броја ξ, а други му је ближи од првог, па је:

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|>\left|\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\frac{p_n}{q_n}\right|,$$

тј.

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|>\frac{a_{n+2}}{q_n q_{n+2}},$$

те је, тим пре

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|>\frac{1}{q_n q_{n+2}}>\frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}},$$

ер је $a_{n+2}\geqslant 1$, $q_{n+1}>q_n$. Тако је, према неједнакости (6.4):

$$\left|\xi-\frac{p_n}{q_n}\right|>\left|\xi-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|.$$

3°. Према (6.3) је:

$$c_n=\xi_{n+1}+\frac{q_{n-1}}{q_n}, \quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{6.7}$$

па је $c_n>1$, јер је $\xi_{n+1}>1$.

6.2 УСЛОВИ ДА ДАТИ РАЗЛОМАК БУДЕ ПРИБЛИЖНИ РАЗЛОМАК ДАТОГ РЕАЛНОГ БРОЈА

(1) Понекад је потребно утврдити да ли је дати рационални разломак p/q, где је $(p; q)=1$, приближни разломак датог реалног броја ξ. Према ставу 6.1, под 3°, сваки приближни разломак задовољава неједнакост

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}, \tag{6.8}$$

што значи да та неједнакост претставља *потребан услов* да разломак p/q буде приближни разломак броја ξ. Потребан и довољан услов наћи ћемо на следећи начин.

Претпоставимо да дати разломак задољољава услов (6.8), па је

$$\xi - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon}{cq^2}$$

где је $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$ и $c > 1$. Развијемо тада разломак p/q у верижни ралзомак са n чланова:

$$\frac{p}{q} = (A), \text{ где је } A = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

тако да је $\varepsilon = (-1)^{n-1}$, па је

$$p_n = [A] = p, \; q_n = ['A] = q, \; p_{n-1} = [A'], \; q_{n-1} = ['A']$$

и

(6.9) $$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\varepsilon}{c q_n^2}, \quad c > 1.$$

Уводимо затим број ω једнакошћу

(6.10) $$\xi = \frac{p_n \omega + p_{n-1}}{q_n \omega + q_{n-1}},$$

одакле је

(6.11) $$\xi - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n (q_n \omega + q_{n-1})}$$

па се поређењем са (6.9) добија

(6.12) $$c = \omega + \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

што значи да је $\omega > 0$, јер је $c > 1$.

Сада можемо раликовати два случаја: $\omega > 1$ и $\omega < 1$.

У првом случају је

$$\omega = (b_1 b_2 \ldots)$$

где је $b_1 \geqslant 1$, па је, према (6.10) и (3.15)

$$\xi = (a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots),$$

што значи да је

$$\frac{p_n}{q_n} = (A) = \frac{p}{q}$$

йриближни разломак броја ξ.

Ако је $\omega < 1$, онда је

$$\omega = (0, b_1, b_2 \ldots), \; b_1 \geqslant 1,$$

па је, према (6.10) и (3.15′)

$$\xi = (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}, a_n + b_1, b_2, \ldots),$$

што значи да p/q *није йриближни разломак броја* ξ.

Према томе, на основу (6.12), *неједнакост*

$$c > 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n} \tag{6.13}$$

претставља потребан и довољан услов да разломак $p/q = (A)$ *буде приближни разломак броја* ξ. [Legendre 19]

Ако је $c \geqslant 2$, онда је неједнакост (6.13) увек задовољена, јер је $q_{n-1} < q_n$, па можемо исказати:

Став 6.2. *Ако дати разломак* p/q *задовољава неједнакост*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

онда је p/q *приближни разломак броја* ξ. [Legendre 19]

7. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА ЦЕЛИХ БРОЈЕВА

7.1. ПОЈАМ И ОСОБИНЕ ЕКВИВАЛЕНЦИЈЕ УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА

(1) Имајући у виду став 2.2, може се, у односу на функцију $[A]$, дефинисати еквиваленција уређених комплекса целих бројева.

Дефиниција 7.1. *Два уређена комплекса целих бројева* A *и* B *еквивалентни су један другоме*

$$A \sim B, \tag{ε}$$

ако су задовољене једнакости:

$$\begin{cases} [A] = \varepsilon [B], & [A'] = \varepsilon [B'], \\ ['A] = \varepsilon ['B], & ['A'] = \varepsilon ['B'], \end{cases} \tag{β}$$

где је $\varepsilon = +1$ *или* $\varepsilon = -1$, *у све четири једнакости исти број.* [4]

На пример:

$$3,\ -3,\ 1,\ 5 \sim 2,\ 1,\ 1,\ 6 \qquad (-1),$$

$$2,\ 1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 3 \sim 3,\ 5 \qquad (+1).$$

(2) Из услова (β), на основу релације (2.17), непосредно следује закључак:

Ако је $A \sim B$, *онда је*

$$m \equiv n \pmod 2$$

где су m *и* n *бројеви чланова комплекса* A *и* B.

(3) Према дефиницији 7.1, релација еквиваленције уређених комплекса има ове особине:

1. $A \sim A$.

2. *Ако је* $A \sim B \quad (\varepsilon)$, *онда је и* $B \sim A \quad (\varepsilon)$.

3. *Ако је* $A \sim B \quad (\varepsilon_1)$ *и* $B \sim C \quad (\varepsilon_2)$, *онда је* $A \sim C \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2)$.

(4) Према дефиницији 7.1. и ставу 2.2, *појам еквиваленције је шири од појма једнакости уређених комплекса*, јер ако је

$$A = B$$

онда је и

$$A \sim B \qquad (+1),$$

али *обратно не мора бити.*

(5) За еквивалентне комплексе $A = a_1 a_2 \ldots a_m$ и $B = b_1 b_2 \ldots b_n$ вреди став:

Став 7.1. *Из еквиваленције два уређена комплекса целих бројева*

(a) $$A \sim B \qquad (\varepsilon)$$

следују еквиваленције

(b) $$\underline{A} \sim \underline{B} \qquad (\varepsilon)$$

(c) $$A^* \sim B^* \qquad (\varepsilon), \quad {}^*A \sim {}^*B \qquad (\varepsilon).$$

Доказ. Еквиваленција (b) је последица обрасца (2.8), јер ако су задовољени услови (β), онда је

$$[\underline{A}] = \varepsilon [\underline{B}], \quad [\underline{A}'] = \varepsilon [\underline{B}'],$$
$$['\underline{A}] = \varepsilon ['\underline{B}], \quad ['\underline{A}'] = \varepsilon ['\underline{B}'].$$

Исто тако из услова (β), на основу обрасца (2.9) и (2.10) следују еквиваленције (c). Заиста:

$$[A^*] = [A] = \varepsilon [B] = \varepsilon [B^*]$$
$$[A^{*\prime}] = [A] - [A'] = \varepsilon \{[B] - [B']\} = \varepsilon [B^{*\prime}], \text{ итд.}$$

За два пара еквивалентних комплекса вреди став

Став 7.2. *Ако су* A, B, M *и* N *уређени комплекси целих бројева и ако је*

$$A \sim B \qquad (\varepsilon_1), \quad M \sim N \qquad (\varepsilon_2),$$

онда је и

$$AM \sim BN \qquad (\varepsilon_1 \varepsilon_2),$$
$$A \,|\, M \sim B \,|\, N \qquad (\varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

Доказ. На основу услова еквиваленције и обрасца (2.6) добија се

$$[AM] = [A][M] + [A']['M] = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \{[B][N] + [B']['N]\} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 [BN],$$
$$[AM'] = [A][M'] + [A']['M'] = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \{[B][N'] + [B']['N']\} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 [BN'],$$

итд., па је прва од изведених еквиваленција доказана. На исти начин, служећи се обрасцем (2.13) доказује се и друга.

7.2. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

(1) *За уређене комплексе природних бројева вреди основни став:*

Став 7.3. *Ма какви били цели бројеви* α, β, γ и δ, $(\delta>0)$, *који задовољавају релацију*

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\varepsilon \tag{7.1}$$

где је $\varepsilon=+1$ *или* $\varepsilon=-1$, *постоји један и само један уређени комплекс природних бројева* $A=a_1 a_2 \ldots a_m$, *тако да је*

$$\begin{cases} [A]=\alpha, & [A']=\beta, \\ ['A]=\gamma, & ['A']=\delta. \end{cases} \tag{7.2}$$

и то:

$$\frac{\beta}{\delta}=(A'), \quad a_m=\left[\frac{\gamma}{\delta}\right], \quad (-1)^m=\varepsilon.$$

Ако је $\delta=0$, $\beta=\gamma=1$, *комплекс* A *је једночлан:* $A=\alpha$.

Ако је $\delta<0$ *или* $\delta=0$, $\beta=\gamma=-1$ *или* $\delta=0$, $\beta\gamma=-1$ *уређени комплекс природних бројева који задовољавају једнакост* (7.2) *не постоји.*

Доказ. Ако је $\delta>0$, разломке β/δ и γ/δ можемо изразити правилним верижним разломцима, па ставимо

$$\frac{\beta}{\delta}=(M'), \quad \frac{\gamma}{\delta}=(N'), \tag{7.3}$$

где је $M=a_1 a_2 \ldots a_m$, $N=b_1 b_2 \ldots b_n$ а m и n су парни ако је $\varepsilon=+1$, а непарни ако је $\varepsilon=-1$. Тако је

$$\beta=[M'], \quad \gamma=[N'], \quad \delta=['M']=['N'], \tag{7.4}$$

па су, према (2.17), задовољене релације:

$$[M]\,\delta-['M]\,\beta=\varepsilon.$$
$$[N]\,\delta-['N]\,\gamma=\varepsilon.$$

Одузимањем ових једнакости од дате једнакости (7.1), добија се

$$\delta\,\{\alpha-[M]\}=\beta\,\{\gamma-['M]\},$$
$$\delta\,\{\alpha-[N]\}=\gamma\,\{\beta-['N]\}.$$

Пошто је $(\beta;\,\delta)=1$, $(\gamma;\,\delta)=1$ из ових релација следује:

$$\begin{cases} \alpha-[M]=\lambda\beta, & \gamma-['M]=\lambda\delta, \\ \alpha-[N]=\mu\gamma, & \beta-['N]=\mu\delta, \end{cases}$$

где су λ и μ произвољни цели бројеви. Узимајући у обзир једнакости (7.4), из последњих једнакости добијамо:

$$\alpha = [M',\, a_m + \lambda] = [N',\, b_n + \mu],$$

$$\beta = [{}'N',\, b_n + \mu],$$

$$\gamma = [{}'M',\, a_m + \lambda],$$

па ако ставимо:

(7.5) $$A = M',\, a_m + \lambda, \quad B = N',\, b_n + \mu,$$

и узмемо у обзир и једнакости (7.4), следује:

$$[A] = [B], \quad [A'] = [{}'B],$$

$$[{}'A] = [B'] \quad [{}'A'] = [{}'B'].$$

Из ових једнакости, на основу става 4.2, следује закључак

$$B = \underline{A}.$$

Како је, према (7.5): $A' = M'$, $B' = N'$ из једнакости (7.3) и последње једнакости добијамо једнакости

(7.6) $$\frac{\beta}{\delta} = (A'), \quad \frac{\gamma}{\delta} = (\underline{A}'),$$

којима је комплекс A једнозначно одређен.

Ако је A уређени комплекс природних бројева онда је $[{}'A'] \geqslant 0$, па ако је $\delta < 0$, комплекс A не постоји.

Ако је $[{}'A'] = 0$, а A је комплекс природних бројева онда је ${}'A = A' = V$, па једино мора бити $\beta = \gamma = 1$. Тиме је став (7.3) доказан у целини.

Пример. Ако је $\alpha = -7$, $\beta = -17$, $\gamma = 2$, $\delta = 5$ онда је

$$A = -4,\, 1,\, 1,\, 2,\, 0.$$

(2) *Као непосредна последица става 7.3, следује*

Став 7.4. *Ако су два уређена комплекса природних бројева један другом еквивалентни, онда су и једнаки.*

Доказ: Ако су A и B уређени комплекси природних бројева, онда је $[{}'A'] \geqslant 0$, $[{}'B'] \geqslant 0$ па коефицијент еквиваленције $A \sim B$ има вредност $\varepsilon = +1$, те је:

$$[A] = [B], \quad [A'] = [B'],$$

$$[{}'A] = [{}'B], \quad [{}'A'] = [{}'B'],$$

што, према ставу 7.3, значи да је и $A = B$

(3) На онову става 7.4, може постојати само један уређени комплекс природних бројева који је еквивалентан датом уређеном комплексу целих бројева. О условима постојања тога комплекса говори

Став 7.5. *Уређени комплекс природних бројева A који је еквивалентан датом уређеном комплексу целих бројева B, постоји ондм и само онда ако је*

$$a)\ ['B']\neq 0,$$

или ако је

$$b)\ ['B']=0 \quad \text{i} \quad ['B]=[B']=\pm 1.$$

У случају b) комплек A је једночлан.

Доказ. Ставимо:

$$\alpha=\varepsilon[B], \quad \gamma=\varepsilon[B'],$$

$$\beta=\varepsilon['B], \quad \delta=\varepsilon['B'],$$

где ε има исти знак као $['B']$, или ако је $['B']=0$, као $['B]$, Тако став 7.5. следује из става 7.3.

Примери:

$$2,\ 3,\ 1,\ 1,-1,\ 2,\ 5\sim 1,\ 1,\ 1 \quad (+1),$$

$$2,\ 1,-2,\ 1,-5\sim -1 \quad (-1),$$

али комплекс $B=a,\ 1,-1,\ b$ нема еквивалентног комплекса у скупу уређених комплекса природних бројева, јер је

$$['B']=0, \quad ['B]=1, \quad [B']=-1.$$

(4) Ако су $A=a_1\, a_2 \ldots a_m$ i $B=b_1\, b_2 \ldots b_n$ уређени комплекти целих бројева ($m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$), према обрасцу (2.21) вреде једнакости:

$$[A,\ -a,\ B]=-[A^*,\ a-2,\ {}^*B],$$

$$['A,\ -a,\ B]=-['A^*,\ a-2,\ {}^*B],$$

$$[A,\ -a,\ B']=-[A^*,\ a-2,\ {}^*B'],$$

$$['A,\ -a,\ B']=-['A^*,\ a-2,\ {}^*B'],$$

па на основу услова (β) следује еквиваленција

$$A,\ -a,\ B\sim A^*,\ a-2,\ {}^*B \quad (-1). \tag{7.7}$$

Добијена еквиваленција омогућава уклањање *негативних* чланова датог комплекса—који не стоје ни на првом ни на последњем месту—уколико дати комплекс задовољава услове из става 7.5.

Примери:

1.

$$3,\ -3,\ 1,\ 5\sim 3^*,\ 3-2,\ {}^*\{1,\ 5\} \quad (-1)$$

тј.

$$3, -3, 1, 5 \sim 2, 1, 1, 6 \quad (-1).$$

2.

$$2, 1, -2, 1, -5 \sim \{2, 1\}^*, 2-2, {}^*\{1, -5\},$$

али је

$$\{2, 1\}^*, 2-2, {}^*\{1, -5\} = 3, 0, -4 = -1,$$

па је

$$2, 1, -2, 1, -5 \sim -1 \quad (-1).$$

3.

$$2, 3, 1, 1, -1, 2, 5 \sim \{2, 3\}^*, -1-2, {}^*\{1, -1, 2, 5\} \quad (-1),$$

али је:

$$\{2, 3\}^*, -1-2, {}^*\{1, -1, 2, 5\} = 2, 2, 1, -3, 0, 2, 5 = 2, 2, 1, -1, 5.$$

Ако на последњи комплекс опет применимо еквиваленцију (7.7), добијемо

$$2, 2, 1, -1, 5 \sim 2^*, -2-2, {}^*\{1, -1, 5\} \quad (-1),$$

али како је

$$2^*, -2-2, {}^*\{1, -1, 5\} = 1, 1, -4, 0, 5 = 1, 1, 1,$$

то је најзад

$$2, 3, 1, 1, -1, 2, 5 \sim 1, 1, 1 \quad (+1).$$

4.

$$4, 3, -1, 2, 5 \sim 3, 1, -5, 1, -2, 2, 5 \quad (-1),$$

$$3, 1, -5, 1, -2, 2, 5 \sim 3, 1, -4, 0, 1, 1, 5 \quad (-1),$$

$$3, 1, -4, 0, 1, 1, 5 = 3, 1, -3, 1, 5,$$

$$3, 1, -3, 1, 5 \sim 4, 1, 6 \quad (-1)$$

Дакле

$$4, 3, -1, 2, 5 \sim 4, 1, 6 \quad (-1)$$

7.3. КОМПЛЕКС $A \mid B$,

(1) У т. 2.6 видели смо да у изразу $[A \mid B]$ можемо скратити једнаке чланове, ако се налазе са разних страна црте, непосредно уз њу. Доказаћемо да се таквим скраћивањем у комплексу $A \mid B$ добија еквивалентни комплекс, тј. да вреди еквиваленција:

$$AK \mid \underline{K}B \sim A \mid B \quad ((-1)^k), \tag{7.8}$$

где је k број чланова комплекса K.

Заиста, $A\,a \mid a\,B = A, a, -1, 1, a-1, B,$

тј.

$$A\,a \mid a\,B \sim \{A, a, -1, 1\}^* -a -1, {}^*B \quad (-1),$$

затим

$$Aa\,|\,aB \sim A,\ a,\ 0,\ -a\ -1,\ {}^{*}B \quad (-1),$$

и најзад

$$Aa\,|\,aB \sim A,\ -1,\ {}^{*}B = A\,|\,B \quad (-1).$$

(2) За операцију " | " вреде и следеће две еквиваленције

$$\underline{\{A\,|\,B\}} \sim \underline{B}\,|\,\underline{A} \quad (-1), \tag{7.9}$$

$$A\,|\,V\,|\,B \sim AB \quad (-1), \tag{7.10}$$

који су у сагласности са обрасцем (2.15) и последњим од обрасца (2.16).

$$\text{Затста,}\ \underline{\{A\,|\,B\}} = \underline{A,\ -1,\ {}^{*}B} = \underline{B}^{*},\ -1,\ \underline{A},$$

па затим применом еквиваленције (7.7):

$$\underline{\{A\,|\,B\}} \sim \underline{B},\ -1,\ {}^{*}\underline{A} = \underline{B}\,|\,\underline{A} \quad (-1).$$

Исто тако је:

$$A\,|\,V\,|\,B = A,\ -1,\ {}^{*}V,\ -1,\ {}^{*}B,$$

тј.

$$A\,|\,V\,|\,B \sim A^{*},\ -1,\ V,\ -1,\ {}^{*}B \quad (-1),$$

затим

$$A\,|\,V\,|\,B \sim A,\ -1,\ 1,\ -2,\ {}^{*}B \quad (+1),$$

и најзад

$$A\,|\,V\,|\,B \sim A,\ 0,\ 0,\ B = AB \quad (-1).$$

(3) За комплекс $A\,|\,B$ где су A и B уређени комплекси *природних* бројева, вреди

Став 7.5. *Уређени комплекс природних бројева C који је еквивалентан комплексу $A\,|\,B$:*

$$C \sim A\,|\,B \quad (\varepsilon),$$

где су $A = a_1\, a_2 \ldots a_m$ и $B = b_1\, b_2 \ldots b_n$ уређени комплекси природних бројева ($a_m \neq b_1$), постоји онда и само онда, ако бар један од комплекса A и B није једночлан.

При томе је

$$[A\,|\,B] = \varepsilon\,[C] \tag{7.11}$$

где је

$$\varepsilon = -1,\ \text{ако је}\ m = 1,\ n \geqslant 2,$$

$$\varepsilon = +1,\ \text{ако је}\ m \geqslant 2,\ n = 1,$$

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(b_1 - a_m),\ \text{ако је}\ m \geqslant 2,\ n \geqslant 2.$$

Ако је један од комплекса A и B празан, сматра се као двочлани комплекс $V = 0,\ 0$. [4].

Доказ. Према ставу 7.5, комплекс C постоји ако је $['A\,|\,B']\neq 0$ или ако је $['A\,|\,B']=0$, али $['A\,|\,B]=[A\,|\,B']=\pm 1$. Према томе могу се резоновати ови случајеви

а) Ако је $m=1$, $n=1$ онда је $['A']=0$, $['B']=0$ па је и $['A\,|\,B']=0$, али су изрази $['A\,|\,B]=-1$, $[A\,|\,B']=1$ различити, што значи да комплекс C не постоји. Заиста:

$$a\,|\,b=a,\ -1,\ 1,\ b-1.$$

б) Ако је $m=1$, $n\geqslant 2$, онда је $['A']=0$, али је $['A]=1$, $['B']\neq 0$, па је и $['A\,|\,B']$, што значи да комплекс C постоји. Исти је случај кад је $m\geqslant 2$, $n=1$.

в) Ако је $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, испитајмо случај кад је $['A\,|\,B']=0$. Тада је $['A']\neq 0$, $['B']\neq 0$, па је једнакостт $['A\,|\,B']=0$ еквивалентна једнакости

$$(B')=(\underline{A}')$$

из које следују две могућности

$$B'=\underline{A}' \text{ или } B'=\underline{A}'^{*}.$$

У првом случају је

$$A\,|\,B\sim A\,|\,\underline{A}'\ b_n\sim a_1\,|\,b_n,$$

што значи да се A и B своде на једночлане комплексе, па комплекс C не постоји. У другом случају је

$$A\,|\,B\sim A\,|\,\underline{A}'^{*},\ b_n\sim a_1\,a_2\,|\,a_2-1,\ 1,\ b_n,$$

те је

$$['A\,|\,B]=[A\,|\,B']=\pm 1,$$

што значи да комплекс C постоји и да је једночлан. Заиста:

$$A\,|\,B\sim a_1+b_n+1.$$

У свима осталим случајевима је $['A\,|\,B']\neq 0$, те комплекс C постоји.

Вредности ε у једнакости (7.11) добијају се једноставном применом обрасца (2.13).

(4) Став 7.2 омогућава да се еквиваленције облика

$$A|B\sim C \text{ и } AB\sim C$$

где је

$$A=a_1\,a_2\ldots a_m,\quad B=b_1\,b_2\ldots b_n,\quad C=c_1\,c_2\ldots c_p$$

реше по сваком комплексу који фигурише у њима.

Тако из еквиваленције

$$A\,|\,B\sim C\quad (\varepsilon)$$

следује

$$A\,|\,B\,|\,\underline{B}\sim C\,|\,\underline{B}\quad (\varepsilon),$$

тј. према (7.8):

$$A\,|\,V\,|\,V\sim C\,|\,\underline{B}\quad (\varepsilon(-1)^{n})$$

и најзад, према (7.10):

$$A \sim C \,|\, \underline{B} \quad (\varepsilon(-1)^{n-1}).$$

Исто тако би се добило

$$B \sim \underline{A} \,|\, C \quad (\varepsilon(-1)^{m-1}).$$

На исти начин, из еквиваленције

$$AB \sim C \quad (\varepsilon)$$

следује

$$AB \,|\, \underline{B} \,|\, V \sim C \,|\, \underline{B} \,|\, V \quad (\varepsilon),$$

тј,

$$A \,|\, V \,|\, V \sim C \,|\, \underline{B} \,|\, V \quad (\varepsilon(-1)^{n})$$

и најзад

$$A \sim C \,|\, \underline{B} \,|\, V \quad (\varepsilon(-1)^{n-1}).$$

Исто тако се добија

$$B \sim V \,|\, \underline{A} \,|\, C \quad (\varepsilon(-1)^{m-1}).$$

7.4. НЕГАТИВНИ СТЕПЕНИ УРЕЂЕНИХ КОМПЛЕКСА

(1) У т. 1.4 дефинисали смо смисао израза A^{ν}, где је ν природан број или нула. Сада можемо то да учинимо и за негативне вредности експонента ν.

Дефиниција 7.2. *Израз A^{-1}, где је A уређени комплекс природних бројева, је уређени комплекс природних бројева који задовољава еквиваленцију.*

(7.12) $$AA^{-1} \sim V \quad (\pm 1).$$ [4]

Из ове дефиниције следује

$$V \,|\, \underline{A} \,|\, AA^{-1} \sim V \,|\, \underline{A} \,|\, V$$

тј.

(7.13) $$A^{-1} \sim V \,|\, \underline{A} \,|\, V \quad (\varepsilon)$$

Примери:

$$\{3,\ 1,\ 5\}^{-1} = -1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 2,\ 1,\ -1;$$

$$\{1,\ 1,\ 1,\ 0\}^{-1} = -2,\ 1,\ 1,\ -1;$$

$$V^{-1} = V;$$

$$a^{-1} = -1,\ 1,\ a-2,\ 1,\ -1, \quad a > 2;$$

$$2^{-1} = -1,\ 2,\ -1;$$

$$1^{-1} = -2,\ 1,\ -2;$$

$$\{-a\}^{-1} = 0,\ a,\ 0, \quad a > 0;$$

$$0^{-1} = 0.$$

(2) Према (7.13) и (7.10) је

(7.14) $$A^{-\nu} \sim V \mid \underline{A}^{\nu} \mid V.$$

(3) Потребно је нагласити да је и

$$A^{-1}\ A \sim V.$$

Заиста, према (7.13) је

$$A^{-1}\, A \sim V \mid \underline{A} \mid A \sim V \mid V \mid V \sim V,$$

(4) Исто тако, наглашавамо да је

$$\{A^{-1}\}^{-1} = A.$$

Заиста:

$$\{A^{-1}\}^{-1} \sim \{V \mid \underline{A} \mid V\}^{-1} \sim V \mid V \mid A \mid V \mid V \sim A.$$

(5) Потребно је још испитати егзистенцију комплекса A^{-1}, ако је A дати уређени комплекс природних бројева.

Ако је $B = A^{-1}$, онда из еквиваленције (7.13) следује:

$$[B] = -\varepsilon\, ['A'], \qquad [B'] = \varepsilon\, [A'],$$

$$['B] = \varepsilon\, ['A], \qquad ['B'] = -\varepsilon\, [A],$$

где је $\varepsilon = \pm 1$, тако изабрано да буде $['B'] > 0$, или—ако је $['B'] = 0$—да буде $['B] > 0$. Према томе, на основу става 7.5, *комплекс* $B = A^{-1}$ *постоји, ако је*

$$[A] \neq 0,$$

или, ако је

$$[A] = 0, \quad [A'] = ['A] = \pm 1,$$

Напротив, комплекс $B = A^{-1}$, *не постоји, ако је*

$$[A] = 0, \quad ['A] = \pm 1, \quad [A'] = \mp 1.$$

Такви су, на пример, комплекси $1, -1$ и $-1, 1, a, 0$.

8. ЕКВИВАЛЕЛЦИЈА ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

(1) Дефиниција 8.1. *Два ирационална броја* ξ *и* η *су еквивалентни један другоме, ако задовољавају релацију*

(8.1) $$\eta = \frac{\alpha\,\xi + \beta}{\gamma\,\xi + \delta}$$

где су α, β, γ и δ цели бројеви, и то

(8.2) $$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm 1.$$

Како је из (8.1):

$$\xi = \frac{\delta\eta - \gamma}{-\beta\eta + \alpha},$$

исказ је симетричан. Зато је у дефиницији речено „један другоме“. Исто тако исказ је рефлексиван, јер је сваки ирационални број еквивалентан самом себи ($\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=1$).)

Ако је

$$\eta=\frac{\beta\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\qquad \tau=\frac{\alpha_1\eta+\beta_1}{\gamma_1\eta+\delta_1},$$

уз услове

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1,\quad \alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1=\pm 1,$$

онда је

$$\tau=\frac{(\alpha\alpha_1+\beta_1\gamma)\,\xi+(\alpha_1\beta+\beta_1\delta)}{(\alpha\gamma_1+\gamma\delta_1)\,\xi+(\beta\gamma_1+\delta\delta_1)}\,.$$

При томе је

$$(\alpha\alpha_1+\beta_1\gamma)(\beta\gamma_1+\delta\delta_1)-(\alpha\gamma_1+\gamma\delta_1)(\alpha_1\beta+\beta_1\delta)=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1)=\pm 1,$$

што значи да исказ у дефиницији 8.1 има и особину транзитивности.

(2) Претпоставимо сад да верижни разломци који представљају два ирационална броја ξ и η имају облике:

$$\xi=(BA),\qquad \eta=(CA)$$

где су B и C коначни комплекси

$$B=b_1\,b_2\ldots b_m,\qquad C=c_1\,c_2\ldots c_p,$$

а A комплекс са бесконачно много чланова

$$A=a_1\,a_2\,a_3\ldots$$

тада је, према (5.7):

$$\xi=\frac{[B]\omega+[B']}{['B]\omega+['B']},\qquad \eta=\frac{[C]\omega+[C']}{['C]\omega+['C']},$$

где је

$$\omega=(A).$$

Према дефиницији еквиваленције и њеним особинама значи да су ξ и η еквивалентни један другом.

Обрнуто, ако ирационални бројеви ξ и η задовољавају релацију (8.1):

$$\eta=\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$$

уз услове

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1,\qquad \delta\neq 0,$$

онда се увек може подесити да буде $\delta>0$, па—према ставу 7.3—постоји такав уређени комплекс *природних* бројева

$$K=k_1\,k_2\ldots k_s$$

да је

$$[K]=\alpha, \quad [K']=\beta$$

$$['K]=\gamma, \quad ['K']=\delta.$$

Ако је $\delta=0$, $\beta=\gamma=\pm 1$ онда је $K=\pm\alpha$. Ако је затим верижни развитак броја ξ:

$$\xi=(A),$$

где је $A=a_1\,a_2\,a_3\ldots$ онда је

$$\eta=\frac{[K](A)+[K']}{['K](A)+['K']},$$

Ставимо

$$A_p=a_1\,a_2\ldots a_p, \quad {}^{(p)}A=a_{p+1}, \quad a_{p+2},\ldots,$$

па претходна релација добија облик

$$\eta=\frac{[K](A_p{}^{(p)}A)+[K']}{['A](A_p{}^{(p)}A)+['K']},$$

што се, према (3.15) и (2.6) може написати у облику

$$\eta=\frac{[KA_p]({}^{(p)}A)+[KA'_p]}{['KA_p]({}^{(p)}A)+['KA'_p]},$$

Ако је H уређени комплекс природних бројева који је еквивалентан комплексу KA_p:

$$H\sim KA_p,$$

онда је, ако се узме довољно велико p, увек последњи члан комплекса H природан број, па је

$$\eta=(H\,{}^{(p)}A).$$

Остао је још случај када је $\delta=0$, $\beta\gamma=-1$. Тада је

$$\eta=\pm\alpha-\frac{1}{\xi},$$

што се, према (2.10), може написати у облику

$$\eta=(H^{(p)}A),$$

где је

$$H\sim\pm\alpha-1, \quad {}^*A_p.$$

Према томе можемо исказати став:

Став 8.1. *Верижни разломци који представљају два ирационална броја поклапају се од једног члана па на даље, онда и само онда ако су ти бројеви еквивалентни један другом.* [21].

9. ПЕРИОДИЧНИ ПРАВИЛНИ ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ

9.1. КВАДРАТНИ ИРАЦИОНАЛНИ БРОЈЕВИ.

(1) Дефиниција 9.1. *Ирационалан број*

$$\frac{\varepsilon\sqrt{D}+P}{Q}, \quad \varepsilon=+1 \text{ или } \varepsilon=-1, \tag{9.1}$$

ѓде су P и Q цели бројеви, $Q\neq 0$, а D природан број који није йошйун квадраш, назива се квадрашним ирационалним бројем.

Примери:

$$\sqrt{3}, \quad \frac{-\sqrt{7}-1}{2}, \quad \frac{\sqrt{5}-2}{-3}, \quad \frac{\sqrt{18}+7}{4}.$$

(2) Дефиниција 9.2. *Квадрашни ирационални број*

$$\frac{\varepsilon\sqrt{D}+P}{Q}, \quad \varepsilon=+1 \text{ или } \varepsilon=-1,$$

је у нормалном облику, ако су задовољени услови:

$$Q=0, \tag{9.2}$$

$$D-P^2\equiv 0 \pmod{Q}, \tag{9.3}$$

$$(Q;\ P;\ Q')=1, \ \textit{ѓде је} \tag{9.4}$$

$$Q'=\frac{|D-P^2|}{Q}. \tag{9.5}$$

[5]

Скраћивањем или проширивањем, сваки квадратни ирационални број се може довести на нормални облик. На пример, ако $D-P^2$ није дељиво са Q, довољно је посматрани број проширити погодним целим бројем λ:

$$\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda^2 D}+\lambda P}{\lambda Q},$$

па се увек λ може тако изабрати да израз

$$\frac{\lambda^2 D-(\lambda P)^2}{\lambda Q}=\frac{\lambda(D-P^2)}{Q}$$

буде цео број, а да буде задовољен и услов (9.4). Тако нормални облик броја $(\sqrt{5}+2)/3$ гласи $(\sqrt{45}+6)/9$, па је $D=45$, $P=6$, $Q=9$, $Q'=1$.

Дефиниција 9.3. *Скуй свих квадрашних ирационалних бројева који у нормалном облику имају исшу дискриминаншу D чини класу дискриминанше D ($D=2, 3, 5, 6, 7,\ldots$).*

На основу ове дефиниције доказаћемо

Став 9.1. *Ако квадратни ирационалан број припада класи дискриминанте D, онда и сви његови потпуни количници припадају истој класи. Обрнуто, ако један потпуни количник квадратног ирационалног броја припада класи дискриминанте D, и сам тај број припада истој класи.*

Доказ: Ако је

$$\xi=\frac{\varepsilon\sqrt{D}+P}{Q}\quad\begin{cases}\varepsilon=+1,\ Q>0,\\ D-P^2=\varepsilon_1\, Q\, Q',\end{cases}$$

и ако је b највећи цео број који није већи од ξ, онда је

$$\frac{\varepsilon\sqrt{D}+P}{Q}=b+\frac{Q_1}{\varepsilon\varepsilon_2\sqrt{D}+P_1},$$

где је $\varepsilon_2=\pm 1$ тако изабрано да буде $Q_1>0$. Из ове релације следују једнакости:

$$\begin{cases}P_1=\varepsilon_2\, b\, Q-\varepsilon_2\, P,\\ Q_1=\varepsilon_1\,\varepsilon_2\, Q'+2\,\varepsilon_2\, b\, P-\varepsilon_2\, b^2\, Q,\end{cases}\tag{9.5}$$

па је $|D-P_1^2|/Q_1=Q$ цео број. Осим тога из једнакости (9.5) следује

$$(Q;\ P;\ Q')=(Q_1;\ P_1;\ Q),$$

те је став 9.1 доказан.

(3) Дефиниција 9.4. *Квадратни ирационалан број ξ који је већи од 1, а чији коњуговани број $\overline{\xi}$ лежи у размаку*

$$-1<\overline{\xi}<0,$$

назива се редуцираним квадратним ирационалним бројем.

Ако нормални облици два коњугована броја гласе

$$\xi=\frac{\sqrt{D}+P}{Q},\quad \overline{\xi}=\frac{-\sqrt{D}+P}{Q},$$

онда из услова

$$\xi>1,\quad -1<\overline{\xi}<0\tag{9.6}$$

следује

$$\xi+\overline{\xi}>0,\quad \xi-\overline{\xi}>1$$

тј.

$$\frac{2P}{Q}>0,\quad \frac{2\sqrt{D}}{Q}>1,$$

што значи да је $Q>0$, $P>0$. Најзад, из $\bar{\xi}<0$, $P>0$ следује

$$0<P<\sqrt{D}, \tag{9.7}$$

а из $\xi-\bar{\xi}>1$, $Q>0$:

$$0<Q<2\sqrt{D}. \tag{9.8}$$

На основу неједнакости (9.7) и (9.8) можемо исказати

Став 9.2. *Постоји само коначан број редуцираних квадратних ирационалних бројева, који припадају класи једне дискриминанте D.* [18].

9.2. ВЕРИЖНИ РАЗВИТАК КВАДРАТНОГ ИРАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

(1) Верижни разломци који представљају квадратне ирационалне бројеве су *периодични*. Да бисмо доказали тај Lagrange-ов став, доказаћемо две леме.

Лема 9.3. *Ако је ξ, $\bar{\xi}$ ма који пар коњугованих квадратних ирационалних бројева, постоји пар η, $\bar{\eta}$ $(\eta>\bar{\eta})$, који су еквивалентни бројевима ξ, $\bar{\xi}$, а између којих лежи бар један цео број.* [11].

Доказ: Пошто сваки бесконачан правилни верижни разломак представља једнозначно одређен ирационалан број, верижни разломци који представљају ξ и $\bar{\xi}$ разликују се почев од неког члана. Зато можемо претпоставити да њихови верижни развици имају облик

$$\xi=(RK),\ \bar{\xi}=(RH)$$

где је $R=a_1 a_2 \ldots a_m$ коначан, а $K=b_1 b_2 b_3 \ldots$, $H=c_1 c_2 c_3 \ldots$ бесконачни уређени комплекси, уз услов $b_1 \neq c_1$. Ако је $b_1>c_1$ онда можемо ставити

$$\eta=(K),\ \bar{\eta}=(H)$$

па је

$$\eta>\bar{\eta},\ \eta\sim\xi,\ \bar{\eta}\sim\bar{\xi}.$$

Ако је $b_1<c_1$, стављамо

$$\eta=b_1+c_1-(K)=(c_1-1,\ *'K)$$

$$\bar{\eta}=b_1+c_1-(H)=(b_1-1,\ *'H)$$

па је опет $\eta>\bar{\eta}$, $\eta\sim\xi$, $\bar{\eta}\sim\bar{\xi}$. Тиме је лема 9.3 доказана

Лема 9.4. *Ако се између једног квадратног ирационалног броја ξ и њему коњугованог броја $\bar{\xi}$ $(\xi>\bar{\xi})$, налази бар један цео број, потпуни количници броја ξ, почев од ξ_3, $(\xi=\xi_1)$, су редуцирани квадратни ирационални бројеви.* [11].

Доказ: Ако је a_1 највећи цео број који није већи од ξ, онда је

$$\xi = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \text{ где је } \xi_2 > 1.$$

Кад у овој једнакости променимо знак пред $\sqrt{D}$, она добија облик

$$\bar{\xi} = a_1 + \frac{1}{\bar{\xi}_2},$$

а пошто је, према предпоставци $\bar{\xi} < a_1$, то је $1/\bar{\xi}_2 < 0$ тј. $\bar{\xi}_2 < 0$. Ако је, затим, a_2 највећи цео број који није већи од ξ_2, $(a_2 \geqslant 1)$, онда је

$$\xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3},$$

где је $\xi_3 > 1$, па следује

$$\bar{\xi}_2 = a_2 + \frac{1}{\bar{\xi}_3}.$$

Пошто је $\bar{\xi}_2 < 0$, то је $1/\bar{\xi}_3 < -a_2$, што значи да је

$$-1 < \bar{\xi}_3 < 0.$$

Према томе потпуни количник ξ_3 је редуцирани број, а пошто је $a_3 \geqslant 1$, $\bar{\xi}_3 < 0$, онда је и ξ_4 редуциран број, итд. Тиме је лема 9.4 доказана у целини.

(2) На основу лема 9.3 и 9.4 закључујемо да су од једног ранга па даље потпуни количници сваког квадратног ирационалног броја редуцирани бројеви. Пошто је, према ставу 9.2, њихов број коначан, можемо исказати

Став 9.5. *Верижни развитак сваког квадратног ирационалног броја је периодичан.* [18].

(3) **Примери:**

1.
$$\xi = \sqrt{7} = 2 + (\sqrt{7} - 2),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{3},$$

$$\xi_3 = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{7}-1}{2},$$

$$\xi_4 = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} = 1 + \frac{\sqrt{7}-2}{3},$$

$$\xi_5 = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \sqrt{7} + 2 = 4 + (\sqrt{7} - 2).$$

Значи да је $\xi_2=\xi_6$, па је тражени верижни разломак:

$$\sqrt{7}=(2, \overline{1, 1, 1, 4}).$$

2.

$$\frac{\sqrt{37}+4}{3}=(\overline{3, 2, 1}).$$

3.

$$\frac{-\sqrt{99}+17}{5}=(1, 2, \overline{2, 3, 1, 1}).$$

(4) Периодичне верижне разломке писаћемо у облику

$$\xi=(B\overline{A})$$

где је $B=b_1 b_2 \ldots b_n$ *предпериода*, а $A=a_1 a_2 \ldots a_m$ *периода*, n број чланова предпериоде, а m број чланова периоде. Ако је $B=V$, разломак је *чисто периодичан:*

$$\xi=(\overline{A}).$$

(5) За верижни развитак редуцираних квадратних ирационалних бројева вреди

Став 9.6, *Верижни развитак редуцираног квадратног ирационалног броја је чисто периодичан.* [Galois 14]

Доказ: Дат је квадратни ирационалан број ξ:

$$\xi>1, \quad -1<\overline{\xi}<0,$$

па, предпоставимо да је његов верижни развитак

$$\xi=(BA) \quad \begin{cases} B=b_1 b_2 \ldots b_n, \\ A=a_1 a_2 \ldots a_m. \end{cases}$$

Тада је

$$\xi_n-\xi_{n+m}=\left(b_n+\frac{1}{\xi_{n+1}}\right)-\left(a_m+\frac{1}{\xi_{n+m+1}}\right),$$

а пошто је $\xi_{n+1}=\xi_{n+m+1}$, једнакост постаје

$$\xi_n-\xi_{n+m}=b_n-a_m.$$

Ако сада променимо знак пред $\sqrt{D}$, једнакост добија облик

$$\overline{\xi}_n-\overline{\xi}_{n+m}=b_n-a_m.$$

Пошто су, према доказу леме 9.4, сви потпуни количници ξ_ν $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ редуцирани бројеви, лева страна последње једнакости је по апсолутној вредности мања од 1, а десна страна је цео број. То значи, да једно може бити

$$b_n - a_m = 0, \text{ тј, } b_n = a_m.$$

Понављањем овог поступка долази се до закључка да је $B = V$, па је став 9.6 доказан.

9.3. ВРЕДНОСТ И ОСОБИНЕ ПРАВИЛНИХ ПЕРИОДИЧНИХ ВЕРИЖНИХ РАЗЛОМАКА

(1) Да бисмо нашли реалан број који представља правилан периодичан верижни разломак

$$\xi = (B\overline{A}), \text{ где је } \begin{cases} B = b_1 b_2 \dots b_n, \\ A = a_1 a_2 \dots a_m, \end{cases} \tag{9.9}$$

ставимо $\theta = (\overline{A})$, па из (9.9) следују релације

$$\xi = (B, \theta), \quad \theta = (A, \theta)$$

тј.

$$\xi = \frac{[B]\theta + [B']}{[{}'B]\theta + [{}'B']}, \quad \theta = \frac{[A]\theta + [A']}{[{}'A]\theta + [{}'A']}.$$

Пошто из ових релација елиминишемо θ, добијамо

$$\frac{[B'] - [{}'B']\xi}{[{}'B]\xi - [B]} = \frac{[B \mid \underline{A}] - [{}'B \mid \underline{A}]\xi}{[B \mid \underline{A}'] - [{}'B \mid \underline{A}']\xi}.$$

Уведемо ли затим уређени комплекс природних бројева C:

$$C \sim B \mid \underline{A}, \tag{9.10}$$

последња једначина, после сређивања, добија облик

$$[{}'B\underline{C}']\xi^2 - \{[B\underline{C}'] + [{}'B\underline{C}]\}\xi + [B\underline{C}] = 0.$$

Посматрајући ову једначину видимо да је реалан број ξ квадратни ирационалан број, а коефицијенти казују да ξ зависи само од једног уређеног комплекса целих бројева $B\underline{C}$. Зато уређени комплекс *природних бројева* E:

$$E \sim B\underline{C} \tag{9.11}$$

називамо *језгром* квадратног ирационалног броја ξ. Тако претходна квадратна једначина добија облик

$$[{}'E']\xi^2 - \{[E'] + [{}'E]\}\xi + [E] = 0. \tag{9.12}$$

Квадратна једначина (9.12) има два решења: тражени број ξ и њему коњугован број $\overline{\xi}$, па се поставља питање може ли се одредити језгро броја $\overline{\xi}$. Ако је то језгро комплекс E_1, онда је квадратна једначина

$$(9.13) \qquad ['E_1']\xi^2 - \{[E_1'] + ['E_1]\}\xi + [E_1] = 0$$

еквивалентна једначини (9.12), што значи да су задовољене релације

$$\frac{[E_1'] + ['E_1]}{['E_1']} = \frac{[E'] + ['E]}{['E']}, \quad \frac{[E_1]}{['E_1']} = \frac{[E]}{['E']}.$$

Из ових релација следују четири нове релације:

$$[E \mid E_1] = [E_1 \mid E], \quad [E \mid E_1'] = [E_1 \mid E'],$$

$$['E \mid E_1] = ['E \mid E], \quad ['E \mid E_1'] = ['E_1 \mid E'],$$

из којих, према дефиницији 7.1, следује еквиваленција

$$(9.14) \qquad E \mid E_1 \sim E_1 \mid E.$$

Тако се одређивање траженог комплекса E_1 своди на решавање еквиваленције (9.14) по E_1.

Према (9.10) и (9.11) је:

$$(9.15) \qquad E \sim BA \mid \underline{B},$$

па, ако се то унесе у еквиваленцију (9.14) и у њој изврши смена непознате

$$(9.16) \qquad E_1 \sim BX \mid \underline{B},$$

где је X нова непозната, еквиваленција (9.14) добија једноставни облик

$$(9.17) \qquad AX \sim XA.$$

Узимајући у обзир чињеницу да се неће изгубити ни једно решење ове еквиваленције, ако се предпостави да је комплекс X састављен само од природних бројева (одељак 7), а пошто је и A такав комплекс, према ставу 7.4, еквиваленција (9.17) претвара се у једнакост

$$AX = XA.$$

Упоређивањем леве и десне стране ове једнакости, члан по члан, под условом да је A примитивна периода, добијамо сва њена решења у облику

$$X_\nu = A^\nu, \text{ где је } \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Према (9.16), одговарајућа решења еквиваленције (9.14) дата су низом

$$(9.18) \qquad E_\nu \sim BA^\nu \mid \underline{B}$$

тј., према (9.10)

(9.19) $$E_\nu \sim BA^{\nu-1}\underline{C},\quad \nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\dots.$$

За $\nu=1, 2, 3,\dots$ добијају се језгра

(9.20) $$E_\nu = BA^{\nu-1}\underline{C},\quad \nu=1, 2, 3,\dots,$$

тј. језгра $B\underline{C}$, $BA\underline{C}$, $BA^2\underline{C},\dots$, која одговарају броју ξ. Решење $E_0\sim V|V$ не одговара проблему, јер тада сви коејицијенти једначине (9.13) постају једнаки нули. Најзад за $\nu=-1, -2, -3,\dots$, према (9.18), добија се низ

$$E_{-\nu}\sim BA^{-\nu}|\underline{B}\sim B|\underline{A}^{\nu}\underline{B},$$

тј. према (9.10):

(9.21) $$E_{-\nu}\sim C\underline{A}^{\nu-1}\underline{B},\quad \nu=1, 2, 3,\dots$$

па је $E_{-\nu}=\underline{E}_\nu$.

Добијена језгра не одговарају броју ξ, те једино могу припадати броју $\bar\xi$. Ако упоредимо еквиваленције (9.20) и (9.21), видимо да су комплекси B и C променили улоге, а да је комплекс A замењен комплексом $\underline{A}$. Према томе, ако је претпоставка тачна, верижни развитак броја $\bar\xi$ имао би облик

$$\bar\xi=(C\underline{\overline{A}}).$$

Заиста, ако формирамо квадратну једначину чије је једно решење вредност овог разломка, према (9.10), добијамо једначину

$$['C\underline{B}']\bar\xi^2-\{['C\underline{B}]+[C\underline{B}']\}\bar\xi+[C\underline{B}]=0,$$

која је истоветна се једначином (9.12). Осим тога сваки реалан број може се на један и само један начин представити у облику правилног верижног разломка, те је

$$(B\overline{A})\neq(C\underline{\overline{A}}),$$

што значи да једино може бити $(C\underline{\overline{A}})=\bar\xi$. Према томе можемо исказати

Став 9.7. *Периодични правилни верижни разломак*

$$\xi=(B\overline{A}),\ \text{где је}\ \begin{cases}A=a_1a_2\dots a_m,\\ B=b_1b_2\dots b_n,\end{cases}$$

представља квадратни ирационалан број, а њему коњугован број представљен је периодичним верижним разломком

$$\bar\xi=(C\underline{\overline{A}}),$$

који има йериоду инверзну йериоди дашој разломка, а чија је йредйериода $C=c_1 c_2 \ldots c_p$ *даша еквиваленцијом*

$$C \sim B \mid \underline{A}.$$

[*Galois 14*, *Serret 21*, *Ђ. 4*].

(2) Кад је дат чисто периодичан разломак

$$\xi=(\overline{A}), \text{ где је } A=a_1 a_2 \ldots a_m,$$

онда је $B=V$, па је

$$C \sim B \mid \underline{A} \sim V \mid \underline{A} \sim -1, {}^*\underline{A}$$

те је

$$\overline{\xi}=(-1, {}^*\underline{A}, \overline{\underline{A}})$$

што значи да је: $-1<\overline{\xi}<0$. Тако можемо исказати:

Став 9.8: *Чисто йериодичан йравилан верижни разломак йредсшавља редуцирани квадрашни ирационалан број.* [Galois 14]

Према (9.12), квадратна једначина чија су решења ξ и $\overline{\xi}$ гласи

$$['A]\,\xi^2-\{[A]-['A']\}\,\xi-[A']=0. \tag{9.22}$$

(3) Вредност ξ периодичног разломка

$$\xi=(B\overline{A})$$

је једно од решења једначине (9.12), где је E језгро броја ξ. Да бисмо сазнали да ли је ξ већи или мањи корен те једначине, посматрајмо разлику $\xi-\overline{\xi}$. Очевидно је $B \neq C \sim B \mid \underline{A}$, па је

$$\operatorname{sgn}(\xi-\overline{\xi})=\operatorname{sgn}\{(B)-(C)\}=\operatorname{sgn}[\underline{C} \mid B],$$

тј., према (9.11) и ставу 7.5

$$\operatorname{sgn}(\xi-\overline{\xi})=\varepsilon \operatorname{sgn}[A \mid \underline{B} \mid B]$$

где је: $\varepsilon=-1$ за $n=0$, $\varepsilon=1$ за $n=1$, $\varepsilon=\operatorname{sgn}(b_n-a_m)$ за $n \geqslant 2$. Затим, према (2.14) и (2.16):

$$\operatorname{sgn}(\xi-\overline{\xi})=-\varepsilon\,(-1)^n.$$

Следује

Став 9.9. *Кад је* ξ *даши йериодичан верижни разломак*

$$\xi=(b_1 b_2 \ldots b_n \overline{a_1 a_2 \ldots a_m})$$

где је $b_n \neq a_m$, *а* $\overline{\xi}$ *њему коњугован број, онда је*

1. За $n=0$ *и* $n=1$ *увек* $\xi>\overline{\xi}$;

2. *За* $n \geqslant 2$ *разлика* $\xi - \bar{\xi}$ *има знак израза*

$$(-1)^n (a_m - b_n). \qquad [3]$$

(4) **Примери;**

1. *Наћи* $\bar{\xi}$, *ако је*

$$\xi = (1,\ 3,\ 2,\ \overline{5,\ 2,\ 1}).$$

Тада је $B = 1, 3, 2,\ A = 5, 2, 1$ па је према (9.10):

$$C \sim 1,\ 3,\ 2 \mid 1,\ 2,\ 5 \sim 1,\ 4,\ 1,\ 5$$

те је

$$\bar{\xi} = (1,\ 4,\ 1,\ 5,\ \overline{1,\ 2,\ 5}).$$

2. Наћи пар коњугованих квадратних ирационалних бројева ξ и $\bar{\xi}$ ако су предпериоде њихових верижних развитака $B = 3, 2, 1, 6$ и $C = 3, 6, 1$.

Према (9.10) је:

$$A \sim \underline{C} \mid B \sim 1,\ 6,\ 3 \mid 3,\ 2,\ 1,\ 6 \sim 1,\ 3,\ 7$$

па је

$$\xi = (3,\ 2,\ 1,\ 6,\ \overline{1,\ 3,\ 7}),\quad \bar{\xi} = (3,\ 6,\ 1,\ \overline{7,\ 3,\ 1}).$$

3. Наћи вредност разломка

$$\xi = (1,\ 2,\ \overline{2,\ 3,\ 1,\ 1}).$$

Из (9.10) следује:

$$C \sim B \mid \underline{A} \sim 1,\ 2 \mid 1,\ 1,\ 3,\ 2 \sim 5,\ 2$$

па је, према (9.11):

$$E \sim B\underline{C} = 1,\ 2,\ 2,\ 5.$$

Тако је ξ решење једначине

$$5\,\xi^2 - 34\,\xi + 38 = 0.$$

С друге стране је

$$\operatorname{sgn}(\xi - \bar{\xi}) = (-1)^2 \operatorname{sgn}(1 - 2) = -1,$$

што значи да је ξ мањи корен добијене једначине

$$\xi = \frac{-\sqrt{99} + 17}{5}.$$

(5) Приликом развијања датог квадратног ирационалног броја ξ у правилан верижни разломак може се унапред одредити број чланова предпериоде, ако је $\xi > \bar{\xi}$. О томе говори

С т а в 9.10. *Ако су ξ и $\bar{\xi}$ два узајамно коњуговна квадратна ирационална броја и ако је $\xi > \bar{\xi}$, онда:*

1. Ако се између ξ и $\bar{\xi}$ налазе два или више целих бројева, онда и само онда предпериода верижног развитка броја ξ има један члан (ако је $\bar{\xi} > 0$ или $\bar{\xi} < -1$) или је верижни развитак броја ξ чисто периодичан (ако је $-1 < \bar{\xi} < 0$).

2. Ако се између ξ и $\bar{\xi}$ налази само један цео број, онда и само онда предпериода верижног развитка броја ξ има два члана.

3. Ако се између ξ и $\bar{\xi}$ не налази ни један цео број, онда и само онда предпериода верижног развитка броја ξ има три или више чланова. [3].

Д о к а з 1. Ако ξ има облик $\xi = (b_1 \bar{A})$, ($b_1 \neq a_m$ или $b_1 = a_m$), онда је, на основу става 9.7

$$C = b_1 - a_m - 1, \ {}^{*\prime}\underline{A}$$

тј. $\bar{\xi} < b_1 - 1$. Обрнуто, ако је $\bar{\xi} < b_1 - 1$, онда је

$$-1 < \frac{1}{\bar{\xi} - b_1} < 0,$$

а пошто је $1 | (\xi - b_1) > 1$, онда је $1 | (\xi - b_1)$ редуцирани број, па је његов верижни развитак чисто периодичан

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (\bar{A}), \text{ тј. } \xi = (b_1 \bar{A}).$$

2. Ако је $\xi = (b_1 b_2 \bar{A})$ уз услове $\xi > \bar{\xi}$, $b_2 \neq a_m$, онда је, према ставу 9.9

$$(-1)^2 (a_m - b_2) > 0 \text{ тј. } b_2 < a_m,$$

па на основу става 9.7:

$$C \sim b_1 - 1, \ {}^*\{a_m - b_2, {}'\underline{A}\},$$

што значи да је

$$b_1 - 1 < \bar{\xi} < b_1,$$

Обрнуто, из тог услова следује $1 | (\bar{\xi} - b_1) < 1$, а пошто је $1 | (\xi - b_1) > 1$, онда је на основу тачке 1 овог става:

$$\frac{1}{\xi - b_1} = (b_2 \bar{A}), \ b_2 \neq a_m,$$

тј.

$$\xi = (b_1 b_2 \bar{A}), \ b_2 \neq a_m.$$

3. Доказ следује из 1° и 2°.

10. КВАДРАТНИ КОРЕН РАЦИОНАЛНОГ БРОЈА. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА

10.1. ВЕРИЖНИ РАЗВИТАК КВАДРАТНОГ КОРЕНА РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

(1) Дат је квадратни корен рационалног броја $D>1$:

$$\xi=\sqrt{D},$$

па је $\overline{\xi}=-\sqrt{D}$, што значи да је предпериода верижног развитка $\sqrt{D}$ једночлана:

$$\sqrt{D}=(b,\overline{A}), \tag{10.1}$$

где је $A=a_1 a_2 \dots a_m$ периода. Према ставу 9.7, предпериода верижног развитка коњугованог броја $\overline{\xi}$.

$$C\sim B\,|\,\underline{A}\sim b\,|\,\underline{A}\sim b-a_m-1\ {}^{*\prime}\underline{A},$$

па верижни развитак броја $\overline{\xi}$ има облик

$$\overline{\xi}=-\sqrt{D}=(b-a_m-1,\ {}^{*\prime}\underline{A}\,\overline{\underline{A}}).$$

Према томе, верижни разломак (10.1) задовољава једнакост:

$$(b\,\overline{A})=-(b-a_m-1,\ {}^{*\prime}\underline{A}\,\overline{\underline{A}}),$$

тј., према (3.4′)

$$(b,\overline{A})=(a_m-b,\ \overline{{}'\underline{A},\ a_m}).$$

Овде следују једнакости

$$b=a_m-b,\quad A'={}'\underline{A},$$

што значи да је $a_m=2b$, а комплекс A' симетричан

$$A'={}'\underline{A}=S=a_1 a_2 \dots a_2 a_1$$

Према томе, разломак (10.1) има облик

$$\sqrt{D}=(b,\overline{S,\ 2b}).$$

(2) Обнуто, кад је дат разломак

$$\xi=(b,\overline{S,\ 2b}),$$

где је b природан број, а S симетричан комплекс, онда је предпериода коњугованог броја $\overline{\xi}$:

$$C\sim -b-1,\ {}^{*}S,$$

па језгро броја ξ има облик

$$E=b,\ S^{*},\ -b-1,$$

тада је:

$$['E'] = [S^*] = [S],$$

$$['E] + [E'] = [S^*,\ -b-1] + [b\,S^*] = 0,$$

$$[E] = [b,\ S^*,\ -b-1] = -[b\,S\,b],$$

па је, према (9.12), ξ већи корен једначине

$$[S]\,\xi^2 - [b\,S\,b] = 0.$$

(3) Тако можемо исказати

Став 10.1. *Правилан верижни разломак који представља квадратни корен рационалног броја $D > 1$ има облик*

$$\sqrt{D} = (b,\ \overline{S,\ 2\,b}), \tag{10.2}$$

где је b природан број, а S симетричан комплекс $S = a_1\,a_2 \ldots a_2\,a_1$ природних бројева. Обрнуто, верижни разломак таквог облика представља квадратни корен рационалног броја

$$D = \frac{[b\,S\,b]}{[S]}. \tag{10.3}$$

[Legendre 19]

Потребно је напоменути да је уопште

$$D = \frac{[b\,S\,\{2\,b,\ S\}^{\nu-1},\ b]}{[S\,\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}]}. \tag{10.3'}$$

где је $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, јер се као периода верижног развитка $\sqrt{D}$ може сматрати сваки комплекс $\{S,\ 2\,b\}^{\nu}$, где је ν природан број, а као симетрични део периоде комплекс $S,\ \{2\,b,\ S\}^{\nu}$.

(4) **Примери:**

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = (1,\ \overline{3,\ 2}),$$

$$\sqrt{\frac{39}{5}} = (2,\ \overline{1,\ 3,\ 1,\ 4}),$$

$$\sqrt{29} = (5,\ \overline{2,\ 1,\ 1,\ 2,\ 10}).$$

(5) Сви потпуни количници $\sqrt{D}$ су редуцирани бројеви. Означимо их са

$$\xi_\nu = (\overline{A_\nu}) = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu},\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots m,\quad A_\nu = a_\nu\,a_{\nu+1} \ldots a_m\,a_1 \ldots a_{\nu-1} \tag{10.4}$$

па је, према (9.22)

$$\begin{cases} P_\nu = \dfrac{1}{2\,v}\,\{[A_\nu] - ['A_\nu']\}, \\[2ex] Q_\nu = \dfrac{1}{v}\,['A_\nu] \end{cases} \tag{10.5}$$

где је $1/v$ повољно изабрани фактор да потпуни количници буду у нормалном облику. Например, ако је D природан број, онда је $v=[S]$.

Ако симетрични део периоде S напишемо у облику

$$S=RH\underline{R},$$

где је $R=a_1 a_2 \ldots a_{r-1}$, $H=V$ кад је m непарно или $H=a_r$, кад је m парно ($m=2r-1$ или $m=2r$), онда се A_ν може написати у облику

$$A_\nu=a_\nu S_\nu a_\nu T_\nu, \quad \nu=1, 2, 3, \ldots, r-1, \tag{10.6}$$

где су S_ν и T_ν симетрични комплекси

$$S_\nu=a_{\nu+1} a_{\nu+2} \ldots a_{r-1} H a_{r-1} \ldots a_{r+2} a_{r+1},$$

$$T_\nu=a_{\nu-1} a_{\nu-2} \ldots a_1,\ 2b,\ a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1},$$

па је

$$\left.\begin{aligned} A_{\nu+1}&=S_\nu a_\nu T_\nu a_\nu \\ A_{m-\nu}&=a_\nu T_\nu a_\nu S_\nu \end{aligned}\right\} \nu=1, 2, \ldots, r-1.$$

Упоређивањем израза A_ν, $A_{\nu+1}$ и $A_{m-\nu}$ добија се

$$\left.\begin{aligned} A_{\nu+1}&=\underline{A_{m-\nu}} \\ {}'A_\nu&=\underline{A'_{m-\nu}} \end{aligned}\right\} \nu=1, 2, \ldots, r-1. \tag{10.7}$$

Према (10.5) из прве од једначина (10.7) следује:

$$P_{\nu+1}=P_{m-\nu} \text{ за } \nu=1, 2, \ldots, r-1.$$

Али како прва од једначина (10.7) вреди и за $\nu=0$, то је и $P_1=P_m$.

Из друге од једначина (10.7) следује

$$Q_\nu=Q_{m-\nu}, \quad \nu=1, 2, \ldots, r-1.$$

Осим тога, ако се стави $\xi_0=\sqrt{D}$, лако је уочити да је $Q_0=Q_m$, па можемо исказати лему:

Лема 10.2 *Низови природних бројева*

$$P_1,\ P_2 \ldots P_{m-1},\ P_m,$$

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2 \ldots Q_{m-1},\ Q_m$$

су симетрични, тј.

$$P_{\nu+1}=P_{m-\nu}, \quad \nu=0, 1, \ldots, m-1,$$

$$Q_\nu=Q_{m-\nu}, \quad \nu=0, 1, \ldots, m.$$ [Muir 20]

(6) Због испитивања неких особина разломка (10.2), ако је D природан број, потребно је утврдити да ли два узастопна члана низа P_ν могу бити једнаки, тј. да ли може бити

$$P_\nu = P_{\nu+1}.$$

Ако би то било, онда пошто је $P_{\nu+1} = P_{m-\nu}$, $Q_\nu = Q_{m-\nu}$ онда би $\xi_\nu = \xi_{m-\nu}$, што је немогуће. Зато је та неједнакост задовољена само у складу са лемом 10.2, тј. у средини низа P_ν, ако је m парно

$$P_r = P_{r+1}, \text{ ако је } m = 2r.$$

Тако можемо исказати лему:

Лема 10.3. *Једнакост*

$$P_\nu = P_{\nu+1}$$

задовољена је једино када је m парно ($m = 2r$) и то за $\nu = r$

$$P_r = P_{r+1}. \qquad [20]$$

10.2. ВЕРИЖНИ РАЗВИТАК КВАДРАТНОГ КОРЕНА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

(1) У верижном разломку који представља квадратни корен природног броја, чланови симетричног дела периоде подвргнути су неким ограничењима. Да бисмо то испитали доказаћемо лему:

Лема 10.4. *Постоји само један редуцирани број сваке дискриминанте $D \geqslant 2$ са имениоцем 1 и са имениоцем 2.*

Доказ: Ако је

$$\theta = \sqrt{D} + P, \quad D \geqslant 2,$$

редуцирани број, онда је

$$\sqrt{D} - 1 < P < \sqrt{D},$$

што значи да једино може бити $P = b$, где је b највећи цео број који није већи од $\sqrt{D}$.

Ако је затим

$$\theta = \frac{\sqrt{D} + P}{2}$$

редуцирани број, онда је

$$\sqrt{D} - 2 < P < \sqrt{D},$$

па постоје само две могућности $P = b$ или $P = b - 1$. Обе за исто D не долазе у обзир, јер је

$$D - b^2 \not\equiv D - (b-1)^2 \pmod 2.$$

Тако је доказана лема 10.4.

Предпоставимо сада да је D природан број, па посматрајмо верижни развитак

$$(10.8)\qquad \sqrt{D}=(b,\overline{R,H,\underline{R},2b})\ \text{где је}\ \begin{cases} R=a_1 a_2\ldots a_{r-1}, \\ H=V,\ m=2r-1 \\ \qquad \text{или} \\ H=a_r,\ m=2r. \end{cases}$$

Сви потпуни количници $\sqrt{D}$ су редуцирани бројеви, а према леми 10.2, имениоци два симетрична количника ξ_ν и $\xi_{m-\nu}$ (за $\nu=1, 2, 3, \ldots, r-1$) су једнаки, али су одговарајући потпуни количници различити. Према леми 10.4, пошто се ту појављују по два редуцирана броја са истим иментиоцем, њихови имениоци не могу бити 1 или 2, тј.

$$Q_\nu \geqslant 3,\ Q_{m-\nu} \geqslant 3,\ \text{за}\ \nu=1, 2, \ldots, r-1.$$

Пошто је највећи цео број, који није већи од бројиоца $\sqrt{D}+P_\nu$ потпуног количника ξ_ν највише $2b$, јер су сви ξ_ν редуцирани бројеви, из последњих неједнакости следују нове

$$(10.9)\qquad a_\nu < \frac{2b}{3}\ \text{за}\ \nu=1, 2, \ldots, r-1.$$

Како последњи потпуни количник у периоди (ξ_m) може имати само именилац 1, јер је $a_m=2b$, именилац потпуног количника ξ_r, ако је $H=a_r$, тј. $m=2r$, може бити најмање 2. Према томе, срецњи члан a_r симетричног дела периоде може највише имати вредност $b\,(a_r \leqslant b)$.

Остало је још да покажемо да у неједнакости (10.9) не може бити задовољен знак једнакости. Два узастопна потпуна количника ξ_ν и $\xi_{\nu+1}$ задовољавају релацију

$$\frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}=a_\nu+\frac{Q_{\nu+1}}{\sqrt{D}+P_{\nu+1}},$$

из које следује

$$P_\nu+P_{\nu+1}=a_\nu Q_\nu.$$

Ако је $a_\nu=2b/3$, онда је $Q_\nu=3$ па последња једнакост добија облик

$$P_\nu+P_{\nu+1}=2b,$$

тј.

$$P_\nu=P_{\nu+1}=b,$$

јер је $P_\nu<b,\ P_{\nu+1}<b$. Према леми 10.3, последња једнакост може бити задовољена само за $\nu=r$, ако је $m=2r$, што значи да ни једнакост $a_\nu=2b/3$ не може бити задовољена ни за једно $\nu=1, 2, \ldots, r-1$. Тако можемо исказати

Став 10.5. *У верижном развитку квадратног корена природног броја, чланови симетричног дела периоде задовољавају неједнакости*

$$a_\nu < \frac{2b}{3} \text{ за } \nu = 1, 2, \ldots, r-1$$

и

$$a_r < b \text{ за } m = 2r,$$

где је b *највећи цео број који није већи од* $\sqrt{D}$.

(2) Показаћемо да се проблем изражавања квадратног корена природног броја верижним разломком може поставити и обрнуто.

Наиме, уместо да дати $\sqrt{D}$ развијамо у верижни разломак, можемо поћи од датог симетричног дела S периоде $\sqrt{D}$ и одредити тако цео број b — што је под одређеним условима могуће на бесконачно много начина — да разломак $(b, \overline{S, 2b})$ представља квадратни корен природног броја.

Сваки дати симетрични комплекс $S = a_1 a_2 \ldots a_2 a_1$, чији су сви чланови природни бројеви, према ставу 10.1, је симетрични део периоде верижног развитка квадратног корена рационалних бројева

$$D = \frac{[b\,S\,b]}{[S]},$$

где је b произвољан природан број. Ако ову једначину напишемо у облику

$$[S](D-b^2) - [S'] \cdot 2b = ['S'], \tag{10.10}$$

видимо да је можемо сматрати као линеарну Диофантову једначину са две непознате $D-b^2$ и $2b$. Према (4.22), њена су решења

$$\begin{cases} 2b = t[S] + (-1)^s ['S'][S'], \\ D = b^2 + t[S'] + (-1)^s ['S']^2, \end{cases} \tag{10.11}$$

где је s број чланова комплекса S, а t произвољни природни број.

Да бисмо и за b добили целобројна решења, потребно је и довољно да се цео број t, на десној страни првог од образаца (10.11) може тако одредити да десна страна буде паран број. То зависи од целих бројева $['S']$, $[S']$ и $[S]$.

Тако можемо исказати

Став 10.6. *Кад је у верижном развитку*

$$\sqrt{D} = (b, \overline{S, 2b})$$

дат симетричан део периоде S, *тада је потребно и довољно аа* D *буде природни број, ако је*

$$b = \frac{t[S] + (-1)^s [S']['S']}{2}$$

где је t цео број, йод условом да је

$$[S] \equiv 1 \pmod 2,$$

или, ако је

$$[S] \equiv 0 \pmod 2,$$

да је и

$$['S'] \equiv 0 \pmod 2$$

и да t буде шако бирано да b буде цео број.

Пример. Симетрични комплекс $S = 1, 3, 1$ имају верижни разломци

$$\sqrt{25\,m^2 - 52\,m + 27} = (5\,m - 6,\ \overline{1, 3, 1, 10\,m - 12}),\quad m = 2, 3, \ldots .$$

На пример

$$\sqrt{23} = (4,\ \overline{1, 3, 1, 8}).$$

(3) Примена става 10.6 може се и систематизовати према броју чланова комплекса S.

1°. $S = V$

$$\sqrt{b^2 + 1} = (b,\ \overline{2\,b}).$$

2°. $S = a_1$

$$\sqrt{b^2 + t} = \left(b,\ \overline{\frac{2\,b}{t},\ 2\,b}\right).$$

Из ове формуле, на пример следује

$$\sqrt{b^2 + 2} = (b,\ \overline{b,\ 2\,b}),$$

$$\sqrt{9\,m^2 + 3} = (3\,m,\ \overline{2\,m,\ 6\,m}),$$

$$\sqrt{4\,m^2 + 4} = (2\,m,\ \overline{m,\ 4\,m}).$$

3°. $S = a_1\,a_1$

Према ставу 10.6 је:

$$2\,b = t\,(a_1{}^2 + 1) + a_1,$$

што значи да a_1 и t морају бити парни, па се добија

$$b = m\,(4\,n^2 + 1) + n,$$

где су m и n цели бројеви тј.

$$\sqrt{\{m\,(4\,n^2 + n) + n\}^2 + 4\,mn + 1} = (m\,(4\,n^2 + n) + n,\ \overline{2\,n,\ 2\,n,\ 2\,m\,(4\,n^2 + n) + 2\,n}).$$

На пример за $n = 1$:

$$\sqrt{25\,m^2 + 14\,m + 2} = (5\,m + 1,\ \overline{2,\ 2,\ 10\,m + 2}).$$

10.3. ОБЛИЦИ СИМЕТРИЧНОГ ДЕЛА ПЕРИОДЕ ВЕРИЖНОГ РАЗВИТКА КВАДРАТНОГ КОРЕНА ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА

(1) Према облику симетричног дела периоде S верижног развитка

$$\sqrt{D}=(b, \overline{S, 2b})$$

могу се одредити неке особине природног броја D. При томе се могу разликовати три случаја

1°. Периода има непаран број чланова

$$S=R\underline{R};$$

2°. Периода има паран број чланова са парним средњим чланом симетричног дела

$$S=R,\ 2a,\ \underline{R}$$

3°. Периода има паран број чланова са непарним средњим чланом симетричног дела

$$S=R,\ 2a-1,\ \underline{R}$$

где је $R=a_1 a_2 \ldots a_{r-1}$ уређени комплекс чији су сви чланови природни бројеви, а a и b природни бројеви.

(2) У првом случају кад периода има непаран број чланова, симетрични комплекси

$$S=R\underline{R} \quad \text{и} \quad bSb=bR\underline{R}b$$

имају паран број чланова, па на основу обрасца (10.3) и ставова 4.6 и 4.9 можемо исказати

С т а в 10.7. *Ако периода верижног развитка квадратног корена природног броја има непаран број чланова, број има облик* $4k+1$ *или* $2(4k+1)$ *и може се представити у облику збира квадрата два узајамно проста броја.*

Обрнут став не важи, јер је на пример

$$\sqrt{34}=(5, \overline{1, 4, 1, 10}),\quad 34=5^2+3^2.$$

(3) У другом случају када је средњи члан симетричног дела периоде паран број, добија се на основу обрасца (2.6):

$$[S]=[R,\ 2a,\ \underline{R}]=2\,[R]\,[Ra],$$

$$[bSb]=[bR,\ 2a,\ \underline{R}b]=2\,[bR]\,[bRa],$$

па, према (10.3), D има облик

$$D=\frac{[bR]\,[bRa]}{[R]\,[Ra]}. \tag{10.12}$$

Како је

$$([b\,R];\,[R])=1,\ \ ([b\,R\,a];\,[Ra])=1,$$

а D је цео број, $[b\,R]$ је дељиво са $[R\,a]$, а $[b\,R\,a]$ са $[R]$, па су

(10.13) $$\lambda=\frac{[b\,R]}{[R\,a]},\ \ \mu=\frac{[b\,R\,a]}{[R]}$$

природни бројеви. При томе је

(10.14) $$D=\lambda\mu \ \text{и}\ (\lambda;\,\mu)=1,$$

јер је $([b\,R]\colon[b\,R\,a])=1$.

Чинилац λ је увек већи од 1, јер се за $\lambda=1$ добија

$$b-a=(0\,\underline{R})-(0\,R)$$

одакле је

$$b=a,\ \ R=\underline{R}$$

што значи да периода $S, 2\,b$ није више примитивна. Осим тога је увек $\lambda<\mu$, јер је

$$[b\,R]\,[R]<[b\,R\,a]\,[R\,a]$$

за $a\geqslant 1$.

Из идентичности

$$[b\,R\,a]\,[R]-[b\,R]\,[R\,a]=(-1)^{r-1},$$

према (10.13), следује

(10.15) $$\lambda\,[R\,a]^2-\mu\,[R]^2=(-1)^r,$$

а одатле

(10.16) $$D=\frac{\lambda^2\,[R\,a]^2-(-1)^r\lambda}{[R]^2}.$$

Из овог израза закључујемо да D може имати све облик $8\,k+l$, где је $l=0,\ 1,\ 2,\dots 7$.

Тако можемо исказати

Став 10.8. *Када је* $\sqrt{D}$ *представљен верижним развитком облика*

$$\sqrt{D}=(b,\ \overline{R,\ 2\,a,\ \underline{R},\ 2\,b}),\ \text{где је}\ R=a_1\,a_2\dots a_{r-1},$$

онда је природни број D увек сложен број, који може имати ма који од облика

$$D=8\,k+l,\ \ (l=0,\ 1,\ 2,\dots,\ 7).$$

Број D је тада производ два цела узајамно проста чиниоца

$$\lambda=\frac{[b\,R]}{[R\,a]},\ \ \mu=\frac{[b\,R\,a]}{[R]},$$

који задовољавају неједнакост

$$2 \leqslant \lambda < \mu \leqslant \frac{D}{2}. \qquad [7]$$

(4) У трећем случају, када је средњи члан симетричног дела периоде, непаран број, добија се на основу обрасца (2.6).

$$[S] = [R,\ 2a-1,\ \underline{R}] = [R]\,[R,\ a-1,\ 2],$$

$$[b\,S\,b] = [b\,R]\,[b,\ R,\ a-1,\ 2],$$

па из (10.3) следује:

(10.17) $$D = \frac{[b\,R]\,[b,\ R,\ a-1,\ 2]}{[R]\,[R,\ a-1,\ 2]}.$$

Истоветним резоновањем, као под (3), долази се до закључка да су

(10.18) $$\lambda = \frac{[b\,R]}{[R,\ a-1,\ 2]},\quad \mu = \frac{[b,\ R,\ a-1,\ 2]}{[R]}$$

природни бројеви. Тако је

$$D = \lambda\mu.$$

Из једнакости

$$[b,\ R,\ a-1,\ 2] = (2\,a-1)\,[b\,R] + 2\,[b\,R'],$$

на основу (10.18), закључујемо да су λ и μ или узајамно прости (и тада су оба непарни), или да имају заједнички чинилац 2. При томе је увек $\lambda < \mu$, јер је

$$[b\,R]\,[R] < [b,\ R,\ a-1,\ 2]\,[R,\ a-1,\ 2]$$

за $a \geqslant 1$. Доцније ћемо показати да у овом случају чинилац λ може имати и вредност 1.

На основу (2.13) и (2.14) је

$$[b\,R,\ a-1,\ 2]\,[R] - [b\,R]\,[R,\ a-1,\ 2] = [\underline{R}\,b \mid b\,R,\ a-1,\ 2] = (-1)^{r-1}\,2,$$

па се према (10.18), добија

(10.19) $$\lambda\,[R,\ a-1,\ 2]^2 - \mu\,[R]^2 = (-1)^r\,2.$$

Најзад, из последње једначине је:

(10.20) $$D = \frac{\lambda^2\,[R,\ a-1,\ 2]^2 - (-1)^r\,2\,\lambda}{[R]^2}.$$

Први од образаца (10.18) може се написати у облику:

$$['R] = 2\,\lambda\,[R'] - \{b - (2\,a-1)\,\lambda\}\,[R],$$

па закључујемо да је $[R]$ увек *нейаран број*. Затим, из једнакости

$$[R, a-1, 2]=(2a-1)[R]+2[R']$$

закључујемо да је и $[R, a-1, 2]$ исто тако увек *нейарно*. На основу тога, из обрасца (10.20) можемо закључити да D има облик

$$D=8k+[\lambda-(-1)^r]^2-1, \tag{10.21}$$

а одатле — за разне облике броја λ — да D може имати само три облика: $8k$, $8k+3$ и $8k+7$.

Тако можемо исказати

Став 10.9. *Кад је $\sqrt{D}$ йредсѿављен верижним развиѿком облика*

$$\sqrt{D}=(b, \overline{R, 2a-1, \underline{R}, 2b}), \text{ iде је } R=a_1 a_2 \ldots a_{r-1},$$

онда йриродни број D може имаѿи само један од облика

$$8k, \quad 8k+3 \quad \text{и} \quad 8k+7.$$

Број D је ѿада йроизвод два цела чиниоца

$$\lambda=\frac{[b\,R]}{[R, a-1, 2]}, \quad \mu=\frac{[b, R, a-1, 2]}{[R]},$$

који су узајамно йросѿи кад је D нейарно, а имају заједнички чинилац 2 кад је D йарно. Чиниоци λ и μ задовољавају неједнакосѿ:

$$1<\lambda<\mu<D.$$

(5) Из ставова 10.7, 10.8 и 10.9 следује

Став 10.10. *Кад йриродни број D има облик $8k+4$ или $8k+6$ верижни развиѿак $\sqrt{D}$ има йериоду са йарним бројем чланова и йарним средњим чланом симеѿричноі дела.*

(6) У одељку 10.2 (1) показали смо да средњи члан симетричног дела периоде верижног развитка $\sqrt{D}$ може највише имати вредност b или $b-1$, и то кад именилац одговарајућег потпуног количника ξ_r има вредност $Q_r=2$. У ова два случаја природни број D може имати неке посебне особине, па су зато таквим периодама, да бисмо их издвојили, дата посебна имена. Наиме, ако је $a_r=b$, периода се зове *кулминирајућа*, а ако је $a_r=b-1$ *скоро кулминирајућа*.

Посматрајмо посебно ове случајеве.

(а) Ако је средњи члан периоде паран број, онда је

$$\xi_r=(\overline{2a, \underline{R}, 2b, R}),$$

па је

$$Q_r = \frac{[\underline{R}, 2\,b, R]}{[R, 2\,a, \underline{R}]} = \frac{[b\,R]}{[R\,a]} = \lambda,$$

па се за $Q_r = 2$ добија једнакост

$$[b\,R] = 2\,[R\,a],$$

која се може написати у облику

(10.22) $$(b-2\,a)\,[R] = 2\,[R'] - [{}'R],$$

тј.

$$b - 2\,a = 2\,(0\,\underline{R}) - (0\,R).$$

Из ове једнакости закључујемо да разлика $b-2\,a$ може имати само две вредности 0 и 1, тј.

$$2\,a = b \quad \text{или} \quad 2\,a = b-1.$$

У првом случају периода је кулминирајућа, а једнакост (10.22) добија облик

(10.23) $$[{}'R] = 2\,[R'],$$

а у другом случају периода је скоро кулминирајућа, а једначина (10.21) добија облик

(10.24) $$[R] = 2\,[R'] - [{}'R].$$

Из последњих двеју једнакости следује да је у оба случаја $[R]$ непаран број, па из једнакости (10.16), за $\lambda = 2$, закључујемо да сада D може имати само три облика: $2\,(8\,k+1)$, $2\,(8\,k+3)$ и $2\,(8\,k+7)$.

Следује:

С т а в 10.11: *Кад верижни развитак* $\sqrt{D}$ *има кулминирајућу или скоро кулминирајућу периоду са парним средњим чланом симетричног дела, онда* D *има један од три облика:* $2\,(8\,k+1)$ (*за* r *парно или непарно*), $2\,(8\,k+3)$ (*за* r *непарно*) *и* $2\,(8\,k+7)$ (*за* r *парно*). [7]

(б) Ако је средњи члан периоде непаран број, онда је

$$\xi_r = (2\,a+1,\ \underline{R},\ 2\,b,\ R),$$

па је

$$Q_r = \frac{[\underline{R}, 2\,b, R]}{[R, 2a+1, \underline{R}]} = \frac{2\,[b\,R]}{[R, a-1, 2]} = 2\,\lambda,$$

па се за $Q_r = 2$, добија једнакост

$$[b\,R] = [R,\ a-1,\ 2],$$

тј.

(10.25) $$(b-2\,a+1)\,[R] = 2\,[R'] - [{}'R],$$

одакле се деобом са $[R]$ добија

$$b-2a+1=2(0\underline{R})-(0R).$$

Опет су могуће само две вредности за $2a-1$:

$$2a-1=b \text{ и } 2a-1=b-1,$$

а једнакост (10.25) добија облике (10.23) и (10.24).

Тако на основу једнакости (10.21) можемо исказати

Став 10.12: *Кад верижни развитак $\sqrt{D}$ има кулминирајућу или скоро кулминирајућу периоду са непарним средњим чланом, симетричног дела, природни број D има један од два облика*

$$8k+3 \text{ (за } r \text{ непарно)}, \quad 8k+7 \text{ (за } r \text{ парно)}.$$

(в) На основу ставова 10.8, 10.9, 10.11 и 10,12 можемо извести следеће ставове:

Став 10.13. *Када је D двоструки прост број облика $8k+3$ или $8k+7$ или двоструки степен таквог броја, онда верижни развитак $\sqrt{D}$ има кулминирајућу (ако је b паран број) или скоро кулминирајућу (ако је b непаран број) периоду са парним средњим чланом симетричнг дела.*

Став 10.14. *Када је D прост број облика $8k+3$ или $8k+7$ или непаран степен таквог броја, онда верижни развитак $\sqrt{D}$ има лулминирајућу (ако је b непаран број) или скоро кулминирајућу (ако је b паран број) периоду са непарним средњим чланом симетричнг дела.*

Доказ: Према ставу 10.7 не долази у обзир периода са непарним бројем чланова. Затим, у првом случају могуће је само $\lambda=2$, а у другом само $\lambda=1$.

10.4. ПЕЛОВА ЈЕДНАЧИНА

Диофантова једначина

$$x^2-Dy^2=1, \tag{10.26}$$

где је $D \geqslant 2$ природан број који није потпун квадрат, назива се Пеловом[1] једначином. Ми ћемо ову једначину посматрати заједно са једначином

$$x^2-Dy^2=-1, \tag{10.27}$$

те обе једначине можемо писати заједно:

$$x^2-Dy^2=\varepsilon, \quad \varepsilon=+1 \text{ или } \varepsilon=-1. \tag{10.28}$$

[1] John Pell, математичар — аматер, Euler-ов пријатељ, бавио се решавањем ове једначине.

(1) Предпоставимо да једначина (10.28) има једно решење $x=p$, $y=q$, $(p>0,\ q>0)$, па је идентички

$$p^2-D\,q^2=\varepsilon.$$

Ако је b највећи цео број који није већи од $\sqrt{D}$, онда из последње једнакости следује:

$$\frac{p^2}{q^2}=D+\frac{\varepsilon}{q^2}\geqslant b^2+1+\frac{\varepsilon}{q^2}\geqslant b^2,$$

тј.

$$\frac{p}{q}\geqslant b.$$

Из исте једнакости, осим тога следује

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{D}\right|=\frac{1}{\left(\frac{p}{q}+\sqrt{D}\right)q^2},$$

а одатле

$$\left|\frac{p}{q}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{2\,b\,q^2}, \tag{10.29}$$

јер је $p/q\geqslant b$, $\sqrt{D}>b$. То значи, према ставу 6.2, да је p/q приближни разломак $\sqrt{D}$.

Према томе, решења једначине (10.28) можемо тражити само помоћу приближних разломака p_ν/q_ν $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ квадратног корена $\sqrt{D}$, с тим да узмемо $x=p_\nu$, $y=q_\nu$.

Неједнакост (10.29) казује који приближни разломци долазе у обзир. Заиста, једначинама (6.5) и (6.7) дејинисан је коефицијент

$$c_\nu=\xi_{\nu+1}+\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu},$$

а из неједнакости (10.29) је $c_\nu>2\,b$, па се добија

$$\xi_{\nu+1}+\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}>2\,b$$

тј.

$$\xi_{\nu+1}>2\,b-\frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}>2\,b-1.$$

Из ове неједнакости, према облику верижног развитка $\sqrt{D}$ и става 10.5, закључујемо да долазе у обзир само приближни разломци p_ν/q_ν за $\nu=m$, $2\,m$, $3\,m, \ldots$, где је m број чланова периоде верижног развитка

$$\sqrt{D}=(b, \overline{S, 2\,b}).$$

Према томе, једина могућа решења једначине (10.28) су

(10.30) $\quad x_\nu = [b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}],\quad y_\nu = [S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}]$ за $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Применимо ли идентичност (2.17) на симетрични комплекс $bS\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}\,b$, за $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, добијамо једнакост

$$[b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}\,b]\,[S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}] - [b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}]^2 = (-1)^{\nu m+1},$$

где је m број чланова примитивне периоде $\sqrt{D}$. Према (10.3′) и (10.30) последња једнакост добија облик

$$x_\nu^2 - D y_\nu^2 = (-1)^{\nu m},\ \text{за}\ \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Поређењем добијене једнакости са једначином (10.28), сазнајемо да једначина (10.26) има увек решења, а једначина (10.27) само када је m непарно. Тако можемо исказати

Став 10.15. *Пелова једначина $x^2 - Dy^2 = 1$ има увек безбројно много решења, и то, ако је верижни развитак $\sqrt{D}$*

$$\sqrt{D} = (b,\ \overline{S,\ 2\,b}),$$

а m број чланова периоде, решења

(10.30) $$x_\nu = [b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}],\quad y_\nu = [S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}]$$

за $$\begin{cases} \nu = 1, 2, 3, \ldots & \textit{када је } m \textit{ парно,} \\ \nu = 2, 4, 6, \ldots & \textit{када је } m \textit{ непарно.} \end{cases}$$

Једначина $x^2 - Dy^2 = 1$ има решења онда и само онда када је m непарно и тада су њена решења дата низом (10.30) за $\nu = 1, 3, 5, \ldots$ [19, 16, 17].

(2) Ма које решење једначине (10.28) може се добити једноставним поступком, ако је познато најмање решење $x_1 = [b\,S]$, $y_1 = [S]$. У том циљу посматрајмо производ

(10.31) $$(x_\nu + y_\nu\sqrt{D})\,(x_1 + y_1\sqrt{D}) = (x_1 x_\nu + D y_1 y_\nu) + (x_1 y_\nu + x_\nu y_1)\sqrt{D}.$$

Из обрасца (10.3) и (10.30) добија се: $D y_1 = [b\,S\,b]$, па је

$$x_1 x_\nu + D y_1 y_\nu = [b\,S]\,[b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}] + [b\,S\,b]\,[S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}],$$

и затим, према (2.18):

$$x_1 x_\nu + D y_1 y_\nu = [b\,S\,b,\ 0,\ b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu-1}] = [b\,S\{2\,b,\ S\}^{\nu}] = x_{\nu+1}.$$

Исто тако је

$$x_1 y_\nu + x_\nu y_1 = [S\{2\,b,\ S\}^{\nu}] = y_{\nu+1},$$

па једнакост (10.31) добија облик

$$(x_\nu + y_\nu\sqrt{D})\,(x_1 + y_1\sqrt{D}) = x_{\nu+1} + y_{\nu+1}\sqrt{D},\quad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

одакле се, итерацијом добија

$$x_\nu + y_\nu \sqrt{D} = (x_1 + y_1 \sqrt{D})^\nu, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots. \tag{10.32}$$

(3) Постоји још један начин једноставног израчунавања решења једначине (10.28), али редом, једнога за другим. Ако се у обрасцу (2.27) ν смени са $\nu-1$ и стави $B=bS$, (или $B=S$), $A=2b$, S, водећи рачуна да је $x_1=[bS]$, $y_1=[S]$, добијају се рекурентни обрасци

$$\begin{cases} x_{\nu+1} = 2x_1 x_\nu - (-1)^m x_{\nu-1}, \\ y_{\nu+1} = 2x_1 y_\nu - (-1)^m y_{\nu-1}. \end{cases} \tag{10.33}$$

Полазећи од тривијалног решења $x_0=1$, $y_0=0$ и најмањег решења x_1, y_1, добијају се редом сва решења.

Пример. Једначина $x^2-5y^2=\pm 1$ има најмање решење $x_1=2$, $y_1=1$ (које одговара негативној десној страни једначине), па образац (10.32) има облик:

$$x_\nu + y_\nu \sqrt{5} = (2+\sqrt{5})^\nu,$$

те се добија $x_2=9$, $y_2=4$; $x_3=38$, $y_3=17, \ldots.$ Рекурентни обрасци (10.33) имају облик

$$x_{\nu+1} = 4x_\nu + x_{\nu-1},$$

$$y_{\nu+1} = 4y_\nu + y_{\nu-1},$$

па се редом добијају иста решења. (Решења са парним индексима одговарају позитивној десној страни, а са непарнм негативној).

11. ВЕРИЖНЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ КВАДРАТНИХ ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

У овом одељку показаћемо да се периодични верижни разломци могу доделити и неким комплексним бројевима облика $(\sqrt{D}+P)/Q$ чија је дискриминанта $D=-1$ или $D=-3$. Именом квадратрног ирационалног броја називаћемо у будуће сваки број облика $(\sqrt{D}+P)/Q$ где су D, P и Q цели бројеви ($D\neq 0$ и није потпуни квадрат рационалног броја)

11.1 ЈЕЗГРО КВАДРАТНОГ ИРАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

(1) Дефиниција 11.1. *Уређени комплекс природних бројева $E=e_1 e_2 \ldots e_s$, $(s \geqslant 2)$, називамо језгром квадратног ирационалног броја ξ, чији је нормални облик*

$$\xi = \frac{\varepsilon\sqrt{D}+P}{Q}, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{11.1}$$

ако је ξ *решење једначине*

$$['E']\,t^2-\{[E']+['E]\}\,t+[E]=0 \tag{11.2}$$

и ако је

$$\varepsilon=\operatorname{sgn}\{[E']-['E]\} \tag{11.3}$$

Дефиниција непосредно омогућава да се одреди број ξ који одговара датом језгру E, формирањем и решавањем једначине (11.2). Обрнут поступак, тј. поступак одређивања језгра Е датог броја ξ нешто је сложенији.

Из дефиниције 11.1 непосредно следује да је инверзни комплекс $\overline{E}$ језгро броја $\bar{\xi}$ коњукоганог са ξ, што значи да је једначина (11.2) еквивалентна са једначином

$$Qt^2-2\,Pt-Q'=0$$

где је

$$Q'=\frac{D-P^2}{Q} \tag{11.5}$$

Поређењем једначина (11.2) и (11.4) добија се

$$\begin{cases} ['E']=Qv \\ [E']+['E]=2\,Pv, \\ [E]=-Q'v \end{cases} \tag{11.6}$$

где је v фактор пропорционалности. Из ових једначина следује

$$\{[E']+['E]\}^2-4\,[E]['E']=4\,v^2\,(P^2+Q\,Q')$$

тј.

$$\{[E']-['E]\}^2-4\,(-1)^s=4\,v^2\,D$$

где је s број чланова комплекса E. Ако се још стави

$$u=\frac{[E']-['E]}{2}, \tag{11.7}$$

претходна једначина добија облик

$$u^2-D\,v^2=(-1)^s. \tag{11.8}$$

Предпоставимо да једначина (11.8) има једно решење $u, v\,(v>0)$ Тада из једначина (11.6) и (11.7) следују вредности

$$\begin{cases} [E]=-Q'v, \quad ['E]=-u+Pv, \\ [E']=u+Pv, \quad ['E']=Qv \end{cases} \tag{11.9}$$

Према ставу (7.3), *комплекс E постоји тада и само тада, ако су ове вредности за $[E]$, $[E']$, $['E]$ и $['E']$ цели бројеви и $Q\,v>0$.* Ако је тако, из једначина (11.9) следује

$$(E')=\frac{u+Pv}{Qv}, \qquad e_s=\left[\frac{-u+Pv}{Qv}\right] \tag{11.10}$$

при чему је, према (11.3) и (11.7); знак решења u тако изабран да је $\varepsilon u > 0$.

(2) Вредности дате једнакостима (11.9) биће цели бројеви, ако су $Q'v$, Qv, $2u$ и $2Pv$ цели бројеви, при чему је $2u \equiv 2Pv \pmod 2$. На основу друге од једнакости (11.6) и једнакости (11.7), водећи рачуна о услову $(Q;\ P;\ Q') = 1$, то ће се десити само у два случаја:

1°. Када је решење u, v целобројно решење

2°. Када је решење u, v облика

$$u = \frac{2\alpha+1}{2}, \quad v = \frac{2\beta+1}{2}, \tag{11.11}$$

где су α и β цели бројеви, ако су уз то Q и Q' парни, а P непаран број.

У случају 2°. разлика $[E']-['E]$ је непаран број, што значи да је један од броја $[E']$ и $['E]$ паран, па су $[E]$ и $['E']$ непарни. Према томе, на основу једнакости (11.7) и (11.9), цели бројеви P, Q, Q' и D тада имају облике:

$$\begin{cases} P \equiv 1 \pmod 2, & Q \equiv 2 \pmod 4, \\ Q' \equiv 2 \pmod 4, & D \equiv 5 \pmod 8. \end{cases} \tag{11.12}$$

(3) С обзиром на претходне резултате, анализирајући случајеве кад једначина (11.8) има целобројних решења или решења облика (11.11) доказујемо

Став 11.1. *Квадратни ирационални број, дат својим нормалним обликом* $\xi = (\varepsilon\sqrt{D} + P)/Q$ *где је* $\varepsilon = \pm 1$, *има језгро* E *онда и само онда када је*:

1°. D *природан број који није потпун квадрат целог броја*;

2°. $D = -1$;

3°. $D = -3$, *ако дати број задовољава услове* (11.12)

Доказ: У случају 1°, једначина (11.8) има безбројно много целобројних решења, а ако D има облик $D = 8k + 5$, онда и решења облика (11.11). У случају 2° једначина (11.8) има само решење $u = 0$, $v = 1$ и то за парно s. У сличају 3° једначина (11.8) има само решење $u = \pm\frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$ за парно s. У осталим случајевима, једначина (11.8) нема ни целобројних решења, ни решења облика (11.11) $(D \neq 0,\ D \neq 1)$.

11.2. ВЕРИЖНЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ КВАДРАТНОГ ИРАЦИОНАЛНОГ БРОЈА

(1) Поделимо језгро E квадратног ирационалног броја ξ произвољно на делове B и $\underline{C}$, тако да је

$$E \sim B\underline{C} \tag{11.13}$$

и уведимо нов комплекс A еквиваленцијом

$$A \sim \underline{C} \mid B. \tag{11.14}$$

Тада је

$$\underline{E} \sim C\underline{B}, \quad \underline{A} \sim \underline{B} \mid C.$$

На овај начин се у свим случајевима наведених у ставу 11.1 квадратрим ирационалним бројевима ξ и $\bar{\xi}$ могу доделити по два уређена комплекса природних бројева, и то броју ξ комплекси B и A, а коњугованом броју $\bar{\xi}$ комплекси C и $\underline{A}$.

Ако је дескриминанта D бројева ξ и $\bar{\xi}$ природан број, који није потпун квадрат, онда је језгро E увек може тако поделити на комплексе B и $\underline{C}$, да комплекс A буде састављен само од природних бројева (одељак 9.3 и ставови 9.7 и 9.10), па су ξ и $\bar{\xi}$ представљени периодичним верижним разломцима:

$$\xi = (B\bar{A}), \quad \bar{\xi} = (C\bar{\underline{A}}), \tag{11.15}$$

где су B и C предпериоде, а A и $\underline{A}$ периоде. По аналогији са овим случајем, уводимо појам *верижне репрезентације* квадратног ирационалног броја.

Дефиниција 11.2. *Ако су E и $\underline{E}$ језгра коњугованих квадратних ирационалних бројева ξ и $\bar{\xi}$ и ако су комплекси B, C и A дефинисани еквиваленциама.*

$$E \sim B\underline{C}, \quad A \sim \underline{C} \mid B,$$

онда су верижне репрезентације бројева ξ и $\bar{\xi}$ парови комплекса

$$\xi = \{B; \bar{A}\}, \quad \bar{\xi} = \{C; \bar{\underline{A}}\}. \tag{11.16}$$

Комплексе B и C називамо предпериодама, а комплексе A и $\underline{A}$ периодама верижних репрезентација (11.16).

(2) Једном датом пару ξ и $\bar{\xi}$, који има језгра E и $\underline{E}$ *може се на овај начин доделити неограничено много верижних репрезентација.* Заиста, ако је R који било уређени комплекс целих бројева, па се стави

$$B_r = BR^{-1}, \quad C_r = C\underline{R}$$

где је $B\underline{C}$ која било подела језгра E на предпериоде, онда је

$$B_r \underline{C_r} \sim BR^{-1} RC \sim B\underline{C} \sim E,$$

$$\underline{C_r} \mid B_r \sim R\underline{C} \mid BR^{-1} \sim RAR^{-1} \sim A_r,$$

па тражене верижне репрезентације имају облик

$$\xi = \{BR^{-1}; \quad RAR^{-1}\}$$

(11.17)

$$\bar{\xi} = \{C\underline{R}; \quad R^{-1}\underline{AR}\}.$$

Ако се стави $R=B$, онда је ξ представљен чисто периодичном верижном репрезентацијом

$$\xi=\{V;\, E\,|\,V\}, \tag{11.18}$$

где је $E\,|\,V$ периода.

Обрнуто, *из ма које верижне репрезентације броја* ξ *једнозначно следује језгро* E *и број* ξ. Заиста, на основу еквиваленције (11.14), из прве од верижних репрезентација (11.16), следује

$$\underline{C}\sim A\,|\,\underline{B}, \tag{11.19}$$

па је, према (11.13)

$$E\sim BA\,|\,\underline{B}. \tag{11.20}$$

На исти начин из прве од верижних репрезентација (11.17) следује

$$E\sim BR^{-1}\,RAR^{-1}\,|\,\underline{R}^{-1}\,\underline{B}\sim BA\,|\,\underline{B}.$$

Периоду A, дату еквиваленцијом (11.14), која се *не може* написати у облику $A_0{}^k$, где је A_0 уређени комплекс целих бројева, а $k\geqslant 2$ природан број назваћемо *примитивном периодом*, а језгро из кога је таква периода добијена, *примитивним језгром*.

(3) У одељку 9.3 (1) показали смо да сваки реалан квадратни ирационални број има безбројно много језгри. Ако је његово примитивно језгро $E\sim B\underline{C}$ и ако је $A\sim\underline{C}\,|\,B$ онда су сва његова језгра дата низом (9.20):

$$E_\nu\sim BA^{\nu-1}\,\underline{C},\quad \nu=1,2,3,\dots,$$

а језгро коњугованог броја низом

$$E_{-\nu}\sim\underline{C}A^{\nu-1}\,\underline{B}\sim\underline{E}_\nu,\quad \nu=1,2,3,\dots,$$

На основу дефиниције 11.1 све изложено важи не само за реалне него и за све квадратне ирационалне бројеве који имају језгро.

Потребно је само додати да се низови (9.20) и (9.21) могу писати у облику

$$\left\{\begin{array}{l} E_\nu\sim\{E\,|\,V\}^{\nu-1}\,E, \\ E_{-\nu}\sim\{\underline{E}\,|\,V\}^{\nu-1}\,\underline{E}, \end{array}\right.\quad \nu=1,2,3,\dots, \tag{11.21}$$

што значи да су језгра E_ν и $E_{-\nu}$ за $\nu=2,3,\dots$, независна од избора верижне репрезентације, него да зависе само од примитивног језгра, односно од броја коме припадају.

Језгра (11.21) одговарају низу целобројних решења и решења облика (11.11) једначине (11.8). Примитивно језгро следује из најмањег решења једначине (11.8).

11.3 ЕКВИВАЛЕНЦИЈА КВАДРАТНИХ ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА

(1) Према ставу 8.1, за еквиваленцију квадратних ирационалних бројева може се исказати следећа дефиниција:

Дефиниција 11.2. *Два квадратна ирационална броја су еквивалентни међу собом, ако су примитивне периоде њихових верижних репрезентација једнаке.*

Ако су E и F примитивна језгра бројева ξ и ω, онда се, на основу дефиниције 11.2 и образаца (11.13) и (11.14), могу тако поделити на предпериоде

$$E \sim B\underline{C}, \quad F \sim M\underline{N},$$

да буде

$$\underline{C}\,|\,B \sim \underline{N}\,|\,M.$$

Из ове еквиваленције следује

$$M\,|\,\underline{B} \sim N\,|\,\underline{C} \sim K\,|\,V \tag{11.22}$$

где је K комплекс пропорционалности, па се добија

$$M \sim KB, \quad N \sim KC,$$

те следује

$$F \sim KE\underline{K}. \tag{11.23}$$

Обрнуто, ако језгро F има облик $F \sim KE\underline{K}$, онда увек можемо извршити поделе

$$E \sim B\underline{C}, \quad F \sim KB\underline{C}\underline{K},$$

па узимајући да је $M \sim KB$, $N \sim KC$, добијамо

$$\underline{N}\,|\,M \sim \underline{C}\underline{K}\,|\,KB \sim \underline{C}\,|\,B,$$

што значи да E и F припадају еквивалентним квадратним ирационалним бројевима.

Према томе верижне репрезентације бројева ξ и ω гласе

$$\xi = \{B;\ \overline{A}\}, \quad \omega = \{KB;\ \overline{A}\}, \tag{11.24}$$

где је A заједничка периода

$$A \sim \underline{C}\,|\,B.$$

Како су језгра бројева ξ и ω комплекси E и $F \sim KE\underline{K}$, ξ и ω су решења квадратних једначина

$$\begin{cases} ['E']\,\xi^2 - \{[E'] + ['E]\}\,\xi + [E] = 0 \\ ['F']\,\omega^2 - \{[F'] + ['F]\}\,\omega + [F] = 0 \end{cases} \tag{11.25}$$

Осим тога, ако су ξ и ω реални квадратни ирационални бројери, онда се верижне репрезентације (11.24) претварају у верижне разломке, па су—према обрасцу (5.7)—ξ и ω везани релацијом

$$\omega=\frac{[K]\xi+[K']}{['K]\xi+['K']}, \tag{11.26}$$

Ако у другој од једначина (11.25) извршимо смену дату обрасцем (11.26), добија се једначина

$$\alpha\xi^2-2\beta\xi+\gamma=0 \tag{11.27}$$

где је:

$$\alpha=-[\underline{K}\,|\,\underline{F}\,|\,K],$$
$$2\beta=['\underline{K}\,|\,\underline{F}\,|\,K]+[\underline{K}\,|\,\underline{F}\,|\,K'],$$
$$\gamma=-['\underline{K}\,|\,\underline{F}\,|K'].$$

Али како је $F\sim KE\underline{K}$, то је

$$\underline{K}\,|\,\underline{F}\,|\,K\sim\underline{K}\,|\,K\underline{E}\underline{K}\,|\,K\sim V\,|\,\underline{E}\,|\,V,$$

па је

$$\alpha=['E'],\quad 2\beta=[E']+['E],\quad \gamma=[E],$$

што значи да је једначина (11.27) еквиваrентна првој од једначина (11.25). Према томе бројеви ξ и ω, дати верижним репрезентацијама (11.24) су везани релацијом (11.26).

Тако је доказан

Став 11.2 *Два квадрашна ирационална броја су еквиваленшна међу собом онда и само онда ако језīро једноī од њих има облик $KE\underline{K}$, īде је E језīро друīоī, а K комūлекс ūриродних дројева независан од E. Дискриминанше нормалних облика ових бројева су једнаке, а они су везани релацијом*

$$\omega=\frac{[K]\xi+[K']}{['K]\xi+['K']},\quad \text{или}\quad \omega=\{K,\ \xi\}. \tag{11.28}$$

(2) Потребно је на крају посматрати случај када је квадратни ирационални број ξ еквивалентан своме коњугованом броју ξ. Тада се одговарајућа језгра E и $F=\underline{E}$ могу написати у облику

$$E\sim B\underline{C},\quad \underline{E}\sim KB\underline{C}\underline{K},$$

где су B и C предпериоде верижних репрезентација бројева ξ и $\bar{\xi}$. Из ових еквиваленција следује

$$KC\underline{B}\underline{K}\sim B\underline{C}.$$

Како је $C\sim B\,|\,\underline{A}$, где је A периода броја ξ, добија се даље

$$\underline{B}\,|\,KB\,|\,\underline{A}\underline{B}\underline{K}\,|B\sim V\,|\,A,$$

па ако се ради краткоће стави

$$R \sim \underline{B} \mid KB,$$

добија се

$$R \mid \underline{AR} \sim V \mid A,$$

и најзад

$$\underline{A}R \sim RA.$$

Уведимо још комплекс H, тако да је

$$A = HR,$$

па претходна еквиваленција добија облик

$$RH \sim \underline{RH}.$$

Пошто су R и H уређени комплекси природних бројева из ове еквиваленције следују једнакости

$$R = \underline{R}, \quad H = \underline{H},$$

што значи да су комплекси R и H симетрични

$$H = S, \quad R = T$$

па се добија $A = ST$.

Како се верижна репрезентација броја $\bar{\xi}$, ако је $A = ST$ може написати у облику

$$\bar{\xi} = \{C;\ \overline{TS}\} = \{CT;\ \overline{ST}\},$$

следује

С т а в 11.3. *Квадратни ирационални број је еквивалентан своме коњугованом броју онда и само онда, ако периода његове верижне репрезентације има облик*

$$A = ST$$

где су S и T симетрични комплекси.

11.4. НЕКОЛИКО ПРИМЕРА ВЕРИЖНИХ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА

(1) Квадратни корен рационалног броја

$$\xi = \sqrt{\frac{r}{s}}$$

где су r и s цели узајамно прости бројеви ($s > 0$), је решење једначине

$$st^2 - r = 0 \tag{11.29}$$

Ако дискриминанта $D=rs$ нормалног облика броја ξ припада једном од случајева става 11.1, онд број ξ има језгро. Поређењем једначине (11.29) са једначином (11.2), добија се

$$[{}'E']=sv,\ [E']+[{}'E]=0,\ [E]=-rv, \tag{11.30}$$

где је v фактор пропорционалности.

Из друге од једнакости (11.30) следују четири једнакости:

$$[E\,|\,0]=-[0\,|\,\underline{E}],\quad [E\,|\,V]=-[0\,|\,\underline{E}'],$$
$$[{}'E\,|\,0]=-[V\,|\,\underline{E}],\quad [{}'E\,|\,V]=-[V\,|\,\underline{E}'],$$

одакле следује еквиваленција

$$E\,|\,0\sim 0\,|\,\underline{E} \qquad (-1),$$

што значи да је уређени комплекс природних бројева еквивалентан комплексу $E\,|\,0$ симетричан, па можемо ставити:

$$E\,|\,0\sim b, s, b$$

где је b произвољан цео број, а S произвољан симетрични комплекс целих бројева. Из последње еквиваленције следује

$$E\sim b, S^*, -b-1. \tag{11.31}$$

Ако се стави $B\sim b$, $\underline{C}\sim S^*, -b-1$, добија се периода

$$A\sim S^*,\ -b-1\,|\,b\sim S,\ 2\,b.$$

па следује верижна репрезентација:

$$\sqrt{\frac{r}{s}}=\{b;\ \overline{S,\ 2\,b}\}. \tag{11.32}$$

Истовремено, из прве и треће једнакости (11.30) добија се

$$\frac{r}{s}=\frac{[bSb]}{[S]}, \tag{11.33}$$

На пример, ако се стави $b=1$, $S=1$:

$$\sqrt{3}=\{1;\ \overline{1,\ 2}\},$$

а за $b=-1$, $S=1$:

$$\pm\sqrt{-1}=\{-1;\ \overline{1,\ -2}\},\quad E\sim 0{,}0. \tag{11.34}$$

(Знак пред $\sqrt{-1}$ остаје неодређен, јер се услов (11.3) не може применити, пошто је $[E']-[{}'E]=0$).

(2) Квадратни ирационални број облика

$$\xi=\frac{\sqrt{\frac{r}{s}}+1}{2},$$

где су r и s цели узајамно прости бројеви ($s>0$), је решење једначине

$$4st^2-4st+(s-r)=0. \tag{11.35}$$

Предпоставимо да ξ има језгро E, па се поређењем једначине (11.35) са једначином (11.2) добија

$$['E']=4sv, \quad [E']+['E]=4sv, \quad [E]=(s-r)v, \tag{11.36}$$

где је v фактор пропорционалности. Из прве и друге од једначина (11.36), добија се

$$[E']+['E]=['E']$$

што се може написати у облику

$$['E\,|\,1]=-[V\,|\,\underline{E}],$$

одакле следује еквиваленција

$$E\,|\,1\sim 1\,|\,\underline{E} \qquad (-1).$$

То значи да је уређени комплекс природних бројева који је еквивалентан комплексу $E\,|\,1$ симетричан

$$E\,|\,1\sim b,\ S,\ b,$$

па се добија језгро

$$E\sim b,\ S^*,\ -b$$

и верижна репрезентација

$$\frac{\sqrt{\frac{r}{s}}+1}{2}=\{b;\ \overline{S,\ 2b-1}\}.$$

Из прве и треће једнакости (11.36) следује

$$\frac{r}{s}=\frac{[2,\ b-1,\ S,\ b-1,\ 2]}{[S]}.$$

На пример, за $b=1$, $S=1$ добија се

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\{1;\ \overline{1,\ 1}\}=\{V;\ \overline{1}\};$$

за $b=0$, $S=1$:

$$\frac{\sqrt{-3}+1}{2}=\{0;\ \overline{1,\ -1}\},\quad E\sim 1{,}0;$$

и најзад за $b=1$, $S=-2$:

$$\frac{\pm\sqrt{-1}+1}{2}=\{1;\ \overline{-2,\ 1}\}=\{V;\ \overline{1,\ -2}\}. \tag{11.37}$$

(иста напомена као за једнакост (11.34)).

(3) Комплексан број

$$\xi = \frac{\varepsilon\sqrt{-1}+P}{Q}, \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{11.38}$$

налази се у нормалном облику ако је задовољен услов

$$P^2 + 1 \equiv 0 \pmod{Q}.$$

Одговарајућа Пелова једначина гласи

$$u^2 + v^2 = 1 \qquad (s \text{ парно}),$$

и има једно једино задовољавајуће решење ($v > 0$): $u = 0$, $v = 1$. Према (11.7), тада је

$$[E'] = ['E],$$

па следује еквиваленција

$$E \sim \underline{E} \qquad (+1),$$

што значи да је E симетричан уређени комплекс природних бројева са парним бројем чланова (јер је s парно):

$$E \sim H\underline{H},$$

где је H произвољни комплекс природних бројева. Осим тога, према обрасцу (11.10) је:

$$(E') = \frac{P}{Q}, \qquad e_s = e_1.$$

Ако језгро напишемо у облику

$$E \sim H,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ \underline{H},$$

можемо ставити $B = H,\ 0,\ -1$, $C \sim H,\ 1,\ 0$, па се добија периода

$$A \sim 0,\ 1\ \underline{H} \mid H,\ 0,\ -1 \sim 1,\ -2.$$

Тако се добија по једна верижна репрезентација бројева ξ и $\bar{\xi}$:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \{H,\ 0,\ -1;\ \overline{1,\ -2}\}, \\ \bar{\xi} &= \{H,\ -1;\ \overline{1,\ -2}\}. \end{aligned}\right. \tag{11.39}$$

У овом случају услов (11.3) не може се приметити, јер је $[E'] - ['E] = 0$, па ε у изразу (11.38) остаје неодређено. Мада примене на бинарне квадратне форме то не захтевају, може се поставити нов критеријум на следећи начин. Према (11.34), узмимо да је

$$\sqrt{-1} = \{-1;\ \overline{1,\ -2}\}, \tag{11.40}$$

па из (11.39), на основу (11.28), следује

$$\xi=\{H, 0, -1; \overline{1, -2}\}=\{H, 0, i\}$$

$$\bar{\xi}=\{H, -1; \overline{1, -2}\}=\{H, i\},$$

тј.

$$\xi=\frac{(-1)^{h-1}\, i+[E']}{['E']}, \quad \bar{\xi}=\frac{(-1)^{h}\, i+[E']}{['E']}, \tag{11.41}$$

где је h број чланова комплекса H. Тако се добија образац

$$\varepsilon=(-1)^{h-1}$$

где је h број чланова комплексан H.

На пример, ако је

$$\xi=\frac{\sqrt{-1}+34}{13}$$

добија се $H=2, 1, 1, 1,\ h=4$, па је:

$$\frac{\sqrt{-1}+34}{13}=\{2, 1, 1, 1, -1; \overline{1, -2}\}, \quad \frac{-\sqrt{-1}+34}{13}=\{2, 1, 1, 0; \overline{1, -2}\}.$$

У једнакости (11.37) десној страни одговара знак ‚—' пред $\sqrt{-1}$

$$\frac{-\sqrt{-1}+1}{2}=\{V; \overline{1, -2}\},$$

јер је $h=2,\ H=0, 1$.

Потребно је нагласити да је у овом случају

$$A^2\sim\{1, -2\}^2\sim V,$$

што значи да број ξ има само примитивно језгро $E\sim H\underline{H}$,

(4) Према ставу 11.1, комплесан број

$$\xi=\frac{\varepsilon\sqrt{-3}+P}{Q}, \qquad \varepsilon=\pm 1, \tag{11.42}$$

има језгро, ако су задовољени услови

$$\begin{cases} P\equiv 1 \pmod 2, & Q\equiv 2 \pmod 4, \\ P^2+3\equiv 0 \pmod Q). \end{cases} \tag{11.43}$$

Одговарајућа Пелова једначина гласи

$$u^2+3\,v^2=1, \qquad (s \text{ парно}),$$

и има решења

$$u=\pm\frac{1}{2}, \quad v=\frac{1}{2}.$$

Тако је, према (11.7):

$$[E'] - ['E] = \varepsilon, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{11.44}$$

Из ове једнакости следују четири једнакости

$$[E|E] = \varepsilon[\underline{E}], \ ['E|E] = \varepsilon['\underline{E}],$$

$$[E|E'] = \varepsilon[\underline{E}'], \ ['E|E'] = \varepsilon['\underline{E}'],$$

из којих следује еквиваленција

$$E|E \sim \underline{E}. \tag{11.45}$$

Из облика ове еквиваленције видимо, да ако она има једно решење $E = X$, онда њу задовољава и сваки комплекс $E = HX\underline{H}$, где је H произвољан комплекс. Зато извршимо смену непознате

$$E \sim HX\underline{H} \tag{11.46}$$

где је H произвољан уређени комплекс природних бројева, а X нова непозната. При томе смемо предпоставити да су *први и последњи члан комплекса X различити*. После смене (11.46), еквиваленција (11.45) добија облик

$$X|X \sim \underline{X}. \tag{11.47}$$

Пошто лева страна има паран број чланова, следује да и комплекс X има паран број чланова, па пробањем решења $X = V$, $X = a, b$, $X = a, b, c, d, \ldots$ и упоређивањем чланова леве и десне стране, добијамо једина решења

$$X = a, a+1; \quad X = a+1, a,$$

где је a произвољан цео број. Због присуства произвољног комплекса H у изразу (11.46) можемо ставити $a = 0$, па су решења еквиваленције (11.45)

$$E \sim H, 0, 1, \underline{H}, \qquad \varepsilon = (-1)^{h-1}, \tag{11.48}$$

$$E \sim H, 1, 0, \underline{H}, \qquad \varepsilon = (-1)^{h}, \tag{11.49}$$

где је h број чланова комплекса H. Знак ε је одређен из једнакости (11.44), према обрасцу (2.26). У сваком појединачном случају E добијамо из обрасца (11.10), који, за број ξ дат једнакошћу (11.42), добија облик

$$(E') = \frac{P+\varepsilon}{Q}, \quad e_s = \left[\frac{P-\varepsilon}{Q}\right], \tag{11.50}$$

где је s паран број.

Ако предпоставимо да датом броју ξ, облика (11.42), одговара језгро (11.48) можемо ставити $B \sim H$, $C \sim H, 1, 0$, па се добија периода

$$A \sim 1, -1,$$

те следују верижне репрезентације

$$\xi=\{H;\ \overline{1,-1}\},$$
$$\bar{\xi}=\{H,0;\ \overline{1,-1}\}.$$

Ако језгро има облик $E\sim H, 1, 0, \underline{H}$ верижне репрезентације бројева ξ и $\underline{\xi}$ мењају улоге.

На пример, ако је

$$\xi=\frac{\sqrt{-3}+15}{38}$$

добија се $E\sim 0, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0$ тј. $H=0, 2, 1$, $h=3$, па су верижне репрезентације

$$\xi=\{0, 2, 1;\ \overline{1,-1}\},\quad \bar{\xi}=\{0, 2, 2;\ \overline{-1, 1}\}.$$

Ако је

$$\xi=\frac{\sqrt{3}+21}{6}$$

добија се $E=3, 1, 1, 0, 1, 3$, тј. $H=3, 1$, $h=2$, па су верижне репрезентације

$$\xi=\{3, 1, 0;\ \overline{1,-1}\},\quad \bar{\xi}=\{3, 1;\ \overline{1,-1}\}.$$

Потребно је нагласити да је у овом случају

$$A^3\sim\{1,-1\}^3\sim V,$$

што значи да број ξ има само примитивно језгро.

12. БИНАРНЕ КВАДРАТНЕ ФОРМЕ

12.1. БИНАРНА КВАДРАТНА ФОРМА И ЊЕНИ ОБЛИЦИ

(1) Квадратна функција двеју променљивих x и y

$$f(x,y)\equiv\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2, \tag{12.1}$$

где су α, β и γ цели бројеви, назива се *бинарном квадратном формом*. Израз

$$D=\beta^2-\alpha\gamma \tag{12.2}$$

је њена дискриминанта.

Дефиниција 10.1. *Бинарна квадратна форма*

$$f(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$$

налази се у нормалном облику, ако је

$$\alpha > 0, \quad (\alpha;\ \beta;\ \gamma) = 1.$$

Према дефиницији 9.2, ако се форма $f(x, y)$ налази у нормалном облику, онда се и решења једначине

$$f(t, 1) \equiv \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0 \tag{12.3}$$

и то

$$\xi = \frac{\sqrt{D} - \beta}{\alpha}, \quad \bar{\xi} = \frac{-\sqrt{D} - \beta}{\alpha}, \tag{12.4}$$

исто тако налазе у нормалном облику.

(2) Показаћемо да се форма $f(x, y)$ може изразити у облику Euler-ove функције $[K]$, ако је задовољен један од услова:

$$(12.5)\quad \begin{cases} 1^\circ.\ \text{Дискриминанта } D \text{ је природан број који није потпун квадрат} \\ \quad\ \text{целог броја} \\ 2^\circ.\ D = -1, \\ 3^\circ.\ D = -3, \quad \alpha \equiv 2 \pmod 4, \quad \beta \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Заиста, према ставу 11.1, ако је задовољен један од услова (12.5) решења једначина (12.3) имају језгра. Ради тога предпостављамо да је уређени комплекс $E = e_1 e_2 \ldots e_s$ језгро једнога од решења једначине (12.3), на пример броја ξ. Ако је, затим, u, v најмање решење одговарајуће Пелове једначине

$$u^2 - D v^2 = (-1)^s, \tag{12.6}$$

где је s број чланова језгра E, онда је, према (11.6):

$$\alpha = \frac{1}{v}[{}'E'],$$

$$2\beta = -\frac{1}{v}\{[E'] + [{}'E]\},$$

$$\gamma = \frac{1}{v}[E].$$

Кад ове изразе за α, β и γ сменимо у квадратној форми $f(x, y)$ и осим тога извршимо смену променљивих

$$\frac{x}{y} = (Z), \text{ тј } x = [Z], \ y = [{}'Z], \tag{12.7}$$

где је Z произвољан уређени комплекс природних бројева, онда—према обрасцу (2.28)—форма $f(x, y)$ добија облик

$$f(x, y) = -\frac{1}{v}[\underline{Z} \mid E \mid Z]. \tag{12.8}$$

12.2. ВРЕДНОСТИ БИНАРНЕ КВАДРАТНЕ ФОРМЕ

(1) Облик (12.8) квадратне форме $f(x, y)$ омогућава да се реши проблем представљања целих бројева у облику те форме за узајамно просте целе вредности променљивих x и y кад њена дискриминанта задовољава један од услова (12.5). Захваљујући изразу (12.8), Диофантова једначина

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \varepsilon\delta \tag{19.9}$$

где је δ дати природан број, $\varepsilon = +1$, или $\varepsilon = -1$ а x и y непознате величине, претвара се у једначину

$$[\underline{Z} \mid E \mid Z] = -\varepsilon v \delta, \tag{12.10}$$

у којој је једина непозната уређени комплекс целих бројева Z. Сваком решењу Z једначине (12.10) одговара једно решење x, y једначине (12.9), при чему је $(x; y) = 1$.

Предпоставимо да једначина (12.10) има једно решење Z_0. То значи да постоји такав комплекс F, чији је облик

$$F \sim \underline{Z}_0 \mid E \mid Z_0, \tag{12.11}$$

а који задовољава једнакост

$$[F] = -\varepsilon v \delta, \tag{12.12}$$

где је ε има једну од вредности $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$. Ако се стави

$$\underline{Z}_0 \mid V \sim K \quad \text{тј.} \quad Z_0 \sim V \mid \underline{K}, \tag{12.13}$$

еквиваленција (12.11) добија облик

$$F \sim K E \underline{K}, \tag{12.14}$$

што, према ставу 11.2, значи да је *F језгро неког квадратног ирационалног броја ω који је еквивалентан једном од корена једначине* $f(t, 1) = 0$.

Обрнуто, ако постоји квадратни ирационални број ω, који је еквивалентан једном од решења једначине $f(t, 1) = 0$, а чије језгро F има облик (12.14), па кад се стави

$$K \sim \underline{Z}_0 \mid V$$

еквиваленција (12.14) се претвара у еквиваленцију (12.11), што значи да је комплекс Z_0 једно решење једначине (12.10).

Према томе једначина (12.10) има решења *онда и само онда ако постоји квадратни ирационални број* ω, *који је еквивалентан једном од решења једначине* $f(t, 1) = 0$, *а чије језгро F задовољава једнакост* (12.12).

(2) Чињеница да језгро F броја ω задовољава једнакост (12.12) може се исказати и на погоднији начин.

Према ставу 11.2. нормални облик броја ω гласи

(12.15) $$\omega=\frac{\pm\sqrt{D}+p}{q}, \quad \text{где је} \quad \begin{cases} p,\ q \ \text{цели бројеви}, \\ \dfrac{|D-p^2|}{q}=q_1 \ \text{цео број}, \end{cases}$$

где је D дискриминанта квадратне форме $f(x, y)=0$. Ако формирамо број

(12.16) $$\omega_1=a+\frac{1}{\omega}$$

где је a произвољан цео број, онда је његово језгро $a\,F\,a$, па именилац q_1 његовог нормалног облика, према првој од једнакости (11.6) и ставу 9.1 има вредност

$$q_1=\left|\frac{1}{\nu}[F]\right|,$$

тј. према (12.12)

(12.17) $$q_1=\delta.$$

Тако се може исказати

Став 12.1. *Цели бројеви* δ *и* $-\delta$, *или само један од њих, моīу се йредсшавиши у облику бинарне квадрашне форме*

$$f(x, y)\equiv\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2, \quad \text{īge je} \quad (\alpha;\ \beta;\ \gamma)=1,$$

чија дискриминанша задовољава један од услова (12.5), *за целе узајамно йросше вредносши* x, y, *онда и само онда, ако је* δ *именилац нормалноī облика некоī квадрашноī ирационалноī броја који је еквиваленшан једном од решења једначине* $f(t, 1)=0$.

(3) Из једнакости (12.15), (12.16) и (12.17) следује

(12.18) $$|p^2-D|=q\,\delta,$$

што значи да је

(12.19) $$p^2\equiv D \pmod{\delta}.$$

Конгруенција (12.19) и једнакост (12.18) омогућавају нам да нађемо квадратни ирационални број ω, разуме се ако конгруенција (12.19) има решења по p.

Сваком пару решења p, $-p$ конгруенције (12.19), према (12.18), одговара један квадратни ирационалан број ω облика (12.15). Његово језгро F казује дали је он еквивалентан једном од решења једначине $f(t, 1)=0$ или не. У потврдном случају језгро F има облик

(12.20) $$F\sim K\,E\,\underline{K}$$

где је E језгро оног решења једначине $f(t, 1)=0$ коме је ω еквивалентан.

(4) Кад је добијен комплекс F, облика (12.20), решење једначине (12.10) биће, према (12.11), (12.12) и (12.14), сваки комплекс Z, који задовољава еквиваленцију

$$\underline{Z}\,|\,E\,|\,Z \sim KE\underline{K}. \tag{12.21}$$

Као што ћемо показати ова еквиваленција има неограничено много решења по Z. Да бисмо их нашли предпоставимо да су E и $\underline{E}$ примитивна језгра решења ξ и $\overline{\xi}$ једначине $f(t,\ 1)=0$, а њихове верижне репрезентације

$$\xi=\{B;\ \overline{A}\},\quad \overline{\xi}=\{C,\ \underline{\overline{A}}\}. \tag{12.22}$$

Предпоставимо осим тога да су верижне репрезентације броја ω и њему коњугованог броја $\overline{\omega}$:

$$\omega=\{M;\ \overline{A}\},\quad \overline{\omega}=\{N;\ \underline{\overline{A}}\}, \tag{12.23}$$

при чему је, према (12.20):

$$M \sim KB,\quad N \sim KC, \tag{12.24}$$

јер је $\xi \sim \omega$, $\overline{\xi} \sim \overline{\omega}$.

Најзад у еквиваленцији (12.21) извршимо смену непознате

$$Z \sim W\underline{K} \tag{12.25}$$

где је W нова непозната, па та еквиваленција добија облик

$$E\,|\,W \sim W\,|\,E. \tag{12.26}$$

Последња еквиваленција има исти облик као еквиваленција (9.14), коју смо већ решили. Према томе, на основу (9.19) и (12.22) скуп свих решења еквиваленције (12.26) дат је низом

$$W_\nu \sim BA^{\nu-1}\underline{C}\quad (\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots),$$

одакле следују решења еквиваленције (12.21):

$$Z_\nu \sim BA^{\nu-1}\underline{C}\,\underline{K},\quad (\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots),$$

тј. према (12.24):

$$Z_\nu \sim BA^{\nu-1}\underline{N}\ (\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots). \tag{12.27}$$

Ако заједничка периода бројева ξ и ω има облик $A=ST$, где су S и T симетрични комплекси, онда је према ставу 11.3, $\xi \sim \overline{\xi}$, $\omega \sim \overline{\omega}$, па је и $\xi \sim \overline{\omega}$. Верижне репрезентације бројава ω и $\overline{\omega}$ могу се сада написати у облику

$$\overline{\omega}=\{N\,|\,S\,|\,V;\ \overline{A}\},\quad \omega=\{N\,|\,AS;\ \underline{\overline{A}}\}, \tag{12.28}$$

па на основу обрасца (12.27) пару решења p, $-p$ конгруенције (12.19) одговара и други систем решења еквиваленције (12.21):

(12.29) $$Z_\nu^{(1)} \sim BA^\nu S \,|\, \underline{N}, \quad (\nu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots).$$

Према свему изложеном можемо исказати

Став 12.2. *Скуп решења x, y, $((x, y) = 1)$, Диофантове једначине*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm \delta,$$

где је $(\alpha; \beta; \gamma) = 1$, а чија дискриминанта $D = \beta^2 - \alpha\gamma$ задовољава један од услова (12.5), одређен је скупом парова решења конгруенције

$$p^2 \equiv D \qquad (\text{mod } \delta)$$

који имају особину да је квадратни ирационални број

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + p}{q}, \quad \text{где је} \quad q = \frac{|D - p^2|}{\delta}$$

еквивалентан једном од решења ξ или $\overline{\xi}$ једначине $f(t, 1) = 0$.

Ако је $\omega \sim \xi$, онда су верижне репрезентације

$$\xi = \{B; \overline{A}\}, \quad \overline{\xi} = \{C; \underline{\overline{A}}\},$$

$$\omega = \{M; \overline{A}\}, \quad \overline{\omega} = \{N; \underline{\overline{A}}\},$$

па пару p, $-p$, одговара један систем решења

(12.30) $$\frac{x_\nu}{y_\nu} = (Z_\nu), \quad \nu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots,$$

у коме се најмање решење добија из комплекса

(12.31) $$Z_0 \sim C \,|\, \underline{N},$$

а остала решења из комплекса

(12.32 $$\begin{cases} Z_\nu \sim BA^{\nu-1} \underline{N}, \\ Z_{-\nu} \sim C\underline{A}^{\nu-1} \underline{M} \end{cases}$$

Ако је $A = ST$, тј. $\xi \sim \overline{\xi}$, онда пару p, $-p$, одговара и други систем решења

(12.33) $$\frac{x_\nu^{(1)}}{y_\nu^{(1)}} = (Z_\nu^{(1)}), \quad \nu = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots.$$

у коме се најмање решење добија из комплекса

(12.34) $$Z_0^{(1)} \sim BS \,|\, \underline{N}$$

а осшала решења из комилекса

$$
\text{(12.35)} \qquad \begin{cases} Z_{\nu}^{(1)} \sim BA^{\nu} S \mid \underline{N}, \\ Z_{-\nu}^{(1)} \sim C\underline{A}^{\nu-2}\, T\underline{N}. \end{cases}
$$

(4) Системи решења x_{ν}, y_{ν} $(\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots)$ могу се добити и познатим аритметичким обрасцем [Bachman 2], *али йолазећи од йознаӣоī најмањеī решења ӣоīа сисӣема.*

Ради тога посматрајмо разломак

$$
\frac{[BA^{\nu-1}L] - ['BA^{\nu-1}L]\,(BA^{k})}{[BA^{\nu-1}] - ['BA^{\nu-1}]\,(BA^{k})}
$$

где су A, B и L произвољни уређени комплекси природних бројева (сви чланови комплекса A и B су природни бројеви, осим првог члана комплекса B, који је цео број), $\nu \geqslant 0$ и $k > \nu$ цели бројеви. Ако се тај разломак напише у облику

$$
\frac{[BA^{\nu-1}L]\,['BA^{k}] - ['BA^{\nu-1}L]\,[BA^{k}]}{[BA^{\nu-1}]\,['BA^{k}] - ['BA^{\nu-1}]\,[BA^{k}]},
$$

па на бројилац и именилац примене обрасци (2.13) и (2.14), добија се разломак

$$
\frac{[\underline{A}^{k}\,\underline{B} \mid BA^{\nu-1}L]}{[\underline{A}^{k}\,\underline{B} \mid BA^{\nu-1}]} = \frac{[\underline{A}^{k-\nu+1} \mid L]}{[\underline{A}^{k-\nu+1} \mid V]}.
$$

После још једне примене обрасца (2.13), последњи разломак добија облик

$$
[L] - ['L]\,(A^{k-\nu+1}).
$$

Тако је доказана идентичност

$$
\text{(12.36)} \qquad [BA^{\nu-1}L] - ['BA^{\nu-1}L]\,(BA^{k}) = \{[BA^{\nu-1}] - ['BA^{\nu-1}]\,(BA^{k})\}\,\{[L] - ['L]\,(A^{k-\nu+1})\}.
$$

Ако ставимо:

$$
\xi = (B\overline{A}), \quad z_{\nu} = [BA^{\nu-1}L] - ['BA^{\nu-1}L]\,\xi,
$$

$$
u_{\nu} = [BA^{\nu-1}] - ['BA^{\nu-1}]\,\xi, \quad \theta = [A] - ['A]\,(\overline{A}),
$$

и пустимо да k неограничено расте, онда је

$$
\lim_{k \to \infty} (BA^{k}) = (B\overline{A}),
$$

$$
\lim_{k \to \infty} (A^{k-\nu+1}) = (\overline{A}),
$$

па идентичност (12.36) добија облик

$$
\text{(12.37)} \qquad z_{\nu} = u_{\nu}\,\{[L] - ['L]\,(\overline{A})\}, \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots .
$$

За $L=A$, последња једнакост постаје

$$u_{\nu+1}=u_\nu\,\theta, \quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots,$$

па је

(12.38) $$u_\nu=u_0\,\theta^\nu \quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots.$$

Из једнакости (12.37) се добија

$$\frac{z_\nu}{z_0}=\frac{u_\nu}{u_0},$$

па је, према (12.38):

(12.39) $$z_\nu=z_0\,\theta^\nu.$$

Ако је $\xi=(B\bar{A})$ једно решење једначине $f(t,1)=0$ онда су, према (1.27) и (12.7):

$$x_\nu=[BA^{\nu-1}\underline{N}],\quad y_\nu=['BA^{\nu-1}\underline{N}],\quad \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\dots.$$

Према томе, ако у изразу за z_ν ставимо $L=\underline{N}$, образац (12.39) добија облик:

(12.40) $$x_\nu-y_\nu\,\xi=(x_0-y_0\,\xi)\,\theta^\nu,\quad \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\dots,$$

где је

$$\theta=[A]-['A]\,(\bar{A}).$$

Помоћу обрасца (12.40) могу се добити сва решења једног система Диофантове једначине (12.9), ако се зна најмање решење x_0, y_0, а ово решење добија се помоћу обрасца (12.31), односно (12.34).

(5) Величина

(12.41) $$\theta=[A]-['A]\,(\bar{A})=\frac{[A]+['A'[-\sqrt{\{[A]+['A']\}^2-4\,(-1)^m}}{2}$$

је јединица у телу $\sqrt{D}$, јер је

$$\theta\,\bar{\theta}=(-1)^m$$

где је m број чланова периоде A. Потребно је само напоменути да θ, и кад је A примитивна периода верижне репрезентације једног квадратног ирационалног броја, не мора бити основна јединица. На пример, ако је $A=3$, онда је

$$\theta=\frac{3-\sqrt{13}}{2},$$

али ако је $A=1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1$, онда је

$$\theta=18-5\sqrt{13}=\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^3.$$

12.3 СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАЈЕВИ

(1.) Став 12.3 *Диофантова једначина*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 1,$$

где је $\alpha > 0$, $(\alpha; 2\beta; \gamma) = 1$, *а дискриминанта* D *задовољава један од услова* (12.5), *има највише један систем решења, и то онда и само онда, ако су корени једначине* $f(t, 1) = 0$ *еквивалентни са* $\sqrt{D}$.

Ако су

$$\sqrt{D} = \{b, \overline{S, 2b}\}, \quad \xi = \{B, \overline{S, 2b}\},$$

где је B *уређени комплекс природних бројева, верижне репрезентације* $\sqrt{D}$ *и* ξ, *онда је најмање решење*

$$\frac{x_0}{y_0} = (B')$$

и

$$f(x_0, y_0) = (-1)^{n-1} sgn(\xi - \bar{\xi})$$

где је n *број члаова предпериоде* B.

Доказ. Пошто је $\delta = 1$, конгруенција $p^2 \equiv D$ (mod 1) задовољава сваки цео број p, па је $q = D - p^2$ и

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + p}{D - p^2} = \{0, b - p, \overline{S, 2b}\},$$

ако је

$$\sqrt{D} = \{b, \overline{S\ 2b}\}.$$

Тиме је доказан први део става. Даље, из еквиваленција (12.31) и (12.34) добија се

$$Z_0 \sim B'^*, b - p - b_n - 1, 0,$$

$$Z_0^{(1)} \sim', b_n - p - b, 0,$$

где је b_n последњи члан комплекса B. Према (2.11), из оба комплекса добија се једно решење

$$x_0 = [B'], \quad y_0 = ['B'].$$

Последњи образац добија се применом обрасца (12.8), јер је $v = [s]$.

(3) Став 10.15 *је непосредна последица става* 12.3.

(3) Став 12.4 *Диофантова једначина*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = \pm 2,$$

где је $\alpha > 0$, $(\alpha; \beta; \gamma) = 1$, *чија дискриминанта* D *је паран број и задовољава један од услова* (12.5), *има највише један систем решења и то онда и само онда, ако су решења једначине* $f(t, 1) = 0$ *еквивалентна са* $\sqrt{D}/2$.

Ако су

$$\frac{\sqrt{D}}{2}=\{b;\ \overline{S,\ 2b}\},\quad \xi=\{B;\ \overline{S,\ 2b}\}$$

верижне репрезентације бројева $\frac{\sqrt{D}}{2}$ *и* ξ, *тада је најмање решење дате једначине*

$$\frac{x_0}{y_0}=(B')$$

и

$$f(x_0,\ y_0)=(-1)^{n-1}\, sgn\,(\xi-\overline{\xi})\cdot 2.$$

Доказ је исти као за став 12.3.

(2) Став 12.5 *Диофантова једначина*

$$f(x,\ y)\equiv \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=\pm 2,$$

где је $\alpha>0$, $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)=1$, *а чија дискриминанта* D *је непаран број и задовољава један од услова* (12.5), *има највише један систем решења и то само онда, ако су решења једначине* $f(t,\ 1)=0$ *еквивалентна са* $(\sqrt{D}+1)/2$.

Ако су

$$\frac{\sqrt{D}+1}{2}=\{b;\ \overline{S,\ 2b-1}\},\quad \xi=\{B;\ \overline{S,\ 2b-1}\}$$

верижне репрезентације бројева $(\sqrt{D}+1)/2$ *и* ξ, *онда је најмање решење посматране једначине:*

$$\frac{x_0}{y_0}=(B')$$

и

$$f(x_0,\ y_0)=(-1)^{n-1}\, sgn\,(\xi-\overline{\xi})\cdot 2.$$

Доказ. Конгруенција

$$p^2\equiv 2g+1=D \qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

где је $g=-1$, $g=-2$ или природан број има једно решење $p=1$ па је $q=g$ и

$$\omega=\frac{\sqrt{2g+1}+1}{g}=\{0,\ b-1,\ \overline{S,\ 2b-1}\},$$

ако је $(\sqrt{D}+1)/2=\{b;\ \overline{S,\ 2b-1}\}$. Остале тачке доказа су као за став 12.3.

(5) Као непосредна последица става 12.5, следује

Став 12.6. *Диофантова једначина*

$$x^2-xy-gy^2=1$$

где је $g=-1$ *или природан број, има увек један и само један систем решења, и то, ако је*

$$\frac{\sqrt{4g+1}+1}{2}=\{b;\ \overline{S,\ 2b-1}\}$$

онда су решења посматране једначине

$$\begin{cases} x_\nu=[b\,S\,\{2b-1,\ S\}^{\nu-1}], \\ y_\nu=[S\,\{2b-1,\ S\}^{\nu-1}], \end{cases} \tag{12.42}$$

за

$\nu=1,2,3,\ldots$ *ако је* m *парно,*

$\nu=2,4,6,\ldots$ *ако је* m *непарно.*

Напротив, једначина

$$x^2-xy-gy=-1$$

има решења онда и само онда кад је m *непарно. И тада су* x_ν, y_ν *дати изразима* (12.42), *али само за* $\nu=1,3,5,\ldots.$

(6) Став 12.7. *Диофантова једначина*

$$f(x,y)\equiv\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=\delta, \qquad (\delta>0), \tag{12.43}$$

где је $\alpha>0$, $D=\beta^2-\alpha\gamma=-1$ *има решења онда и само онда ако се природни број* δ *може изразити у облику збира квадрата два узајамно проста природна броја.*

Сваком пару решења p, $-p$ *конгруенције*

$$p^2+1\equiv 0 \pmod{\delta} \tag{12.44}$$

одговарају тада четири решења једначине $f(x,y)=\delta$. *Ако је* $E=H\underline{H}$ *језгро броја*

$$\xi=\frac{\sqrt{-1}-\beta}{\alpha},$$

а $F=L\underline{L}$ *језгро броја*

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}+p}{q}, \qquad q=\frac{p^2+1}{\delta},$$

онда су решења одређена комплексима

$$\begin{cases} Z_0\sim H\,|\,\underline{L}, & Z_0^{(1)}\sim H\,|\,0\,\underline{L}, \\ Z_1\sim H\underline{L} & Z_1^{(1)}\sim H,0,\underline{L}. \end{cases} \tag{12.45}$$

Доказ. Једначина (12.43) има решења кад и конгруенција (12.44), па одатле следује облик броја δ. Осим тога, сви бројеви облика $(\pm\sqrt{-1}+P)/Q$, где је $P^2+1\equiv 0 \pmod{Q}$ су еквивалентни међу собом. Тако следује први део става. Број решења се своди на четири, јер је, према 11.4 (3): $A^2 = \{1_1 - 2\}^2 \sim V$. Тако се, према (12.27) и (12.29) сваки систем решења своди само на два решења.

Напомињемо да једначина $f(x, y) = -\delta$ нема решења, јер је увек $f(x, y) > 0$, ако је $\alpha > 0$.

(7) Став 12.8. *Диофантова једначина*

$$f(x, y) \equiv \alpha x^2 + \beta, xy + \gamma y^2 = \delta, \tag{12.46}$$

где су α, β *и* γ *непарни бројеви* ($\alpha > 0$, $(\alpha; \beta; \gamma) = 1$), $D = \beta^2 - 4\alpha\gamma = -3$, *има решења онда и само онда ако се природни број* δ *може изразити у облику* $\delta = m^2 + 3n^2$, *где су* m *и* n *узајамно прости природни бројеви.*

Сваком пару решења p, $-p$ *конгруенције*

$$p^2 + 3 \equiv 0 \pmod{2\delta}, \tag{12.47}$$

одговарају тада шест решења једначине $f(x, y) = \delta$. *Ако је* $E = H, 1, 0, \underline{H}$. (*или* $H, 1, 0, \underline{H}$) *језгро броја*

$$\xi = \frac{\sqrt{-3} - \beta}{2\alpha}$$

а $F = L, 0, 1, \underline{L}$ (*или* $L, 1, 0, \underline{L}$) *језгро броја*

$$\omega = \frac{\sqrt{-3} + p}{q}, \qquad q = \frac{p^2 + 3}{2\delta},$$

онда су решења дата комплексима

$$\begin{cases} Z_0 \sim H/\underline{L}, & Z_0^{(1)} \sim H/0\,\underline{L}, \\ Z_1 \sim H, 0, 1, \underline{L}, & Z_1^{(1)} \sim H, 0, 1, 0, \underline{L}, \\ Z_2 \sim H, 1, 0, \underline{L}, & Z_2^{(1)} \sim H, 1, \underline{L}, \end{cases} \tag{12.48}$$

Доказ. Према наведеним условима, из 11.4 (3) произилази да решења једначине $f(t, 1) = 0$ имају језгра. Да би квадратна форма на левој страни једначине (12.46) била у нормалном облику, множимо обе стране са 2, па одговарајућа конкруенција има облик (12.47). Облик броја δ следује из познатог Lagrange—ovog става [Perron 1]. Тако је доказан први део става. Број решења сваког система своди се на три, јер је према 11.4 (3)

$$A^3 = \{1, -1\}^3 = V.$$

12.4. **Примери:**

(1) Диофантовој једначини

$$12x^2 - 22\,xy + 7\,y^2 = \pm 47$$

одговара конгруенција

$$p^2 \equiv 37 \pmod{47}.$$

чији је једини пар вешења $p = \pm 15$, те је $q = 4$. Тако се добија

$$\xi = \frac{\sqrt{37}+11}{12} = (1, 2, \overline{2, 1, 3}), \quad \bar{\xi} = \frac{-\sqrt{37}+11}{12} = (0, 2, 2, \overline{3, 1, 2}),$$

$$\omega = \frac{-\sqrt{37}+15}{4} = (2, 4, \overline{2, 1, 3}), \quad \bar{\omega} = \frac{\sqrt{37}+15}{4} = (5, \overline{3, 1, 2}),$$

па је $A = 2, 1, 3, \quad B = 1, 2, \quad C = 0, 2, 2, \quad M = 2, 4, \quad N = 5.$

Тако је, према (12.31) најмање решење:

$$Z_0 \sim C/\underline{N} \sim 0, 2, 2/5$$

тј.

$$Z_0 \sim 0, 1, 1, 2$$

па је $x_0 = 3, \quad y_0 = 5$ и то:

$$12 \cdot 3^2 - 22 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 5^2 = -47 \cdot$$

(2) Једначини

$$19\,x^2 - 56\,xy + 40\,y^2 = \pm 43$$

одговара конгруенција

$$p^2 \equiv 24 \quad (\text{mod } 43)$$

која има један пар решења $p = \pm 14$, те је $q = 4$, Тако се добија:

$$\xi = \frac{\sqrt{24}+28}{19} = (1, 1, 2, \overline{1, 2, 1, 1}), \quad \bar{\xi} = \frac{-\sqrt{24}+28}{19} = (1, 4, 1, \overline{1, 1, 2, 1}),$$

$$\omega = \frac{\sqrt{24}+14}{4} = (4, \overline{1, 2, 1, 1}), \quad \bar{\omega} = \frac{-\sqrt{24}+14}{4} = (2, 3, 1, \overline{1, 1, 2, 1}),$$

те је $A = 1, 2, 1, 1, \quad (S = 1, 2, 1, \quad T = 1), \quad B = 1, 1, 2,$
$C = 1, 4, 1, \quad M = 4, \quad N = 2, 3, 1.$

Једначина има два система решења, у којима су најмања:

$$Z_0 = 2, 1 \text{ и } Z_0^{(1)} = 1, 1, 5,$$

тј.

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 1; \quad x_0^{(1)} = 11, \quad y_0^{(1)} = 6.$$

(3) Према ставу 12.5, једначина

$$29\,x^2 - 135\,xy + 157\,y^2 = \pm 1$$

има решења, јер је

$$\xi = \frac{\sqrt{13}+135}{58} = (2, 3, 1, \bar{3}), \quad \frac{\sqrt{13}+1}{2} = (2, \bar{3}).$$

Најмање решење је

$$Z_0 = B' = 2, 3$$

тј

$$x_0 = 7, \quad y_0 = 3.$$

(Решење одговара негативној десној страни)

(4) Лева страна једначине

$$17\,x^2 - 128\,xy + 241\,y^2 = 73$$

има дискриминанту $D = -1$, па према ставу 12.7, једначина има решења, јер је $73 = 8^2 + 3^2$. Конгруенцији

$$p^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 37)$$

има само један пар решења $p = \pm 27$, па је $q = 10$ и

$$\omega = \frac{\sqrt{-1} + 27}{10}, \qquad F = 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,$$

Осим тога је

$$\xi = \frac{\sqrt{-1} + 64}{17}, \qquad E = 3,\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3.$$

Према томе једначина има само четири решења (два система по два), и то:

x	13	132	108	77
y	4	35	29	20

(5) За једначину

$$7\,x^2 - 19\,xy + 13\,y^2 = 37$$

је: $D = -3$, $37 = 5^2 + 3 \cdot 2^2$, што, према ставу 12.8 значи да једначина има решења. Даље је:

$$\xi = \frac{\sqrt{-3} + 19}{14}, \quad E = 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1.$$

Конгруенција

$$p^2 + 3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 74)$$

има само један пар решења $p = \pm 21$, па је

$$\omega = \frac{\sqrt{-3} + 21}{6}, \qquad F = 3,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3$$

Према томе једначина има само шест решења (два система по три), и то:

x	5	19	24	9	16	25
y	2	15	17	5	13	18

(6) Према ставу 12.7, једначина $265\,x^2 - 1226\,xy + 1418\,y^2 = 1$ има решења, јер је $D = -1$, а према ставу 12.3, број решења се своди на два (само један систем). Следује

$$H = 2,\ 3,\ 5, \qquad L = 0$$

и

$$x_0 = 7, \qquad y_0 = 3, \qquad x_1 = 37, \qquad y_1 = 16$$

(7) За једначину

$$313\,x^2 - 1449\,xy + 1677\,y^2 = 1$$

је

$$D = -3, \qquad 1 = 1^2 + 3 \cdot 0^2, \qquad H = 2,\ 3,\ 5, \qquad L = V$$

па су решења

x	7	44	37
y	3	19	16

(8) Према ставу 12.7, једначина $82\,x^2 - 182\,xy + 101\,y^2 = 2$ има решења, јер је $D = -1$, $2 = 1^2 + 1^2$. Следује

$$H = 1,\ 9, \qquad L = 1$$

па су решења

$$x_0 = 9, \qquad y_0 = 8; \qquad x_1 = 11, \qquad y_1 = 10$$

Скуп решења се своди на један систем (два решења), према ставу 12.5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* Stuttgart, 1954 (B. G. Teubner)

[2] Bachmann, P.: *Die Elemente der Zahlentheorie,* Leipzig 1892 (B. G. Teubner)

[3] Djerasimović, B.: *Beitrag zur Theorie der regelmässigen Kettenbrüche.* Math. Z. 62, 1955.

[4] Djerasimović, B.: *Über die Kettenbruchentwicklung quadratiseher Irrationalzahlen.* Math. Z. 66. 1956.

[5] Djerasimović, B.: *Uber die binären quadratischen Formen.* Math. Z. Bd. 66 1957.

[6] Ђерасимовић, Б.: *О периодичним верижним разломцима.* Весник VIII, 1956.

[7] Ђерасимовић, Б:, *О верижном развитку квадратног корена природних бројева,* Весник X, 1958.

[8] Ђерасимовић, Б.: *О верижним репрезентацијама реалних и неких комплексних квадратних ирационалних бројева.* Математички весник 1 (16), св. 4. 1964.

[9] Ђерасимовић, Б.: *Циклуси еквивалентних редукованих квадратних ираццоналних бројева.* Математички весник 1 (16), св. 4. 1964.

[10] Ђерасимовић, Б.: *Проширење теореме Galois о пеоиодичним верижним разломцима.* Математички весник 3 (18), св. 2, 1966.

[11] Ђерасимовић, Б.: *О периодичности верижног развитка квадратинх ирационалних бројева.* Математички весник 3 (18), св. 3. 1966.

[12] Euler, L.: *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.* Op. ser. I, vol 2.

[13] Frobenius, G·: *Über die Markoffschen Zahlen, Sitzber. preuss. Akad. Wiss.* 1913·

[14] Galois, É.: *Demonstration d'un thëorème sur les tractions continues periodiques.* Oevrues de Galois.

[15] Gauss, C. F.: *Disquisitions arithmeticae,* 1801, W. Band I.

[16] Lagrange, J. L.. *Solution d'un problème d'aritmétique.* Oeuvres I.

[17] Lagrange, J. L.: *Sur la solution des probléms indéterminés du second degré.* Oeuvres II.

[18] Lagrange, J. L.: *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler.* Oeuvres VII.

[19] Legendre, A. M.: *Théorie des nombres,* Paris 1900.

[20] Muir, Th.: *The expression of a guadratic surd as a continned fraction.* Glasgow 1874.

[21] Serret, J. A.: *Handbuch der höherem Algebra.* Bd. I, 1878.