Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Тема: Геометријски процес и његове примене

Ментор:
Проф. др Слободанка Јанковић

Кандидат:
Бојана Вучковић, дипл. математичар

Београд, 2015.

Садржај

Увод

Геометријски процес је уведен због својих многобројних практичних примена у различитим научним областима. Код већине система је проблем одржавати их у добром стању, а како се стање најчешће погоршава, време успешног функционисања система се смањује због поправки, док се сам број поправки повећава. У епидемиолошким студијама број заражених показује растући тренд у раној фази, стабилан је у средњој фази, док у завршној фази број заражених опада. Слично, у економским истраживањима, примећено је да економски развој државе има периодични циклус, па бруто домаћи производ расте у раној фази циклуса, стабилан је у средњој и опада у завршној фази. Многи модели, као што су минимални модел поправке, модел нелинеарне регресије и модел нелинеарних временских серија, развијени су да моделирају поменуте проблеме са трендом. Директнији приступ оваквим проблемима је модел монотоног процеса. Као једноставни монотони процес Лам [1] је увео геометријски процес 1988. године.

Дефиниција 0.0.1 *Случајни процес* $\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *је геометријски процес уколико постоји реалан број* $a > 0$ *такав да је* $\{a^{i-1}X_i, i = 1, 2, ..., n\}$ *процес обнављања. Реалан број* a *се зове коефицијент геометријског процеса.*

Јасно је да је геометријски процес опадајући уколико је $a \geq 1$, а растући уколико је $0 < a \leq 1$. Ако важи $a = 1$, тада се геометријски процес своди на процес обнављања. Дакле, можемо закључити да је геометријски процес уопштење процеса обнављања.

У даљем раду ћемо навести неке од теоријских и практичних резултата везаних за геометријски процес.

Прво поглавље садржи кратак осврт на Пуасонов процес и процес обнављања, као специјалан случај геометријског процеса.

У другом поглављу је дефинисан сам геометријски процес и наведена су његова основна својства.

[1] Yeh Lam, математичар из Хонг Конга

Треће поглавље нас упознаје са појмом геометријске функције која задовољава геометријску једначину чија ће решења бити изложена.

У четвртој глави ћемо видети шта мора бити испуњено да бисмо неке податке моделирали геометријским процесом. Навешћемо оцене параметара геометријског процеса и испитаћемо поузданост добијених оцена.

У последњем, петом, поглављу је наведена примена геометријског процеса на анализу података са трендом.

Већина доказа који су изостављени у овом раду, могу се наћи у Лам [8].

1 Пуасонов процес и процес обнављања

1.1 Пуасонов процес

Основни појам теорије вероватноће је случајан догађај који представља исход експеримента чији резултат није унапред одређен. Све могуће исходе експеримента називамо узорачким простором експеримента, у ознаци Ω, док је догађај A подскуп скупа Ω. Случајна променљива X је реална функција дефинисана на скупу Ω.

Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је фамилија случајних величина таквих да је за свако $t \in T, X(t)$ случајна величина. Скуп T се зове скуп индекса. Уколико t интерпретирамо као време, тада $X(t)$ називамо стањем случајног процеса у тренутку t. Ако је скуп индекса T пребројив скуп, тада се процес $\{X(t), t \in T\}$ назива дискретни случајни процес, а ако је $T = (-\infty, +\infty)$, $T = [0, +\infty)$ или $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, тада за $\{X(t), t \in T\}$ кажемо да је случајни процес са непрекидним временом.

Дефиниција 1.1.1 *За случајни процес* $\{X(t), t \in T\}$ *кажемо да има независне прираштаје ако су за свако* $t_0 < t_1 < ... < t_n$, $t_i \in T, i = 1, 2, ..., n$, *случајне величине* $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ *независне.*

Према дефиницији 1.1.1, случајни процес има независне прираштаје ако су његове промене на дисјунктним интервалима независне.

Дефиниција 1.1.2 *За случајни процес* $\{X(t), t \in T\}$ *кажемо да има стационарне прираштаје ако је за све* $t, t+s \in T$, *расподела случајне величине* $X(t + s) - X(t)$ *иста за свако* t.

Дефиниција 1.1.3 *Случајан процес* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се зове процес пребројавања уколико је* $N(t)$ *укупан број догађаја који су се десили до тренутка* t.

Особине процеса пребројавања су:

- $N(t) \geq 0$
- $N(t)$ је природан број
- ако је $s < t$, онда је $N(s) \leq N(t)$

- за $s < t$, $N(t) - N(s)$ је број догађаја који су се десили на интервалу $(s, t]$.

Из дефиниције 1.1.1 следи да процес пребројавања има независне прираштаје ако су бројеви догађаја на дисјунктним временским интервалима независни, док према дефиницији 1.1.2 процес пребројавања има стационарне прираштаје ако је расподела броја догађаја који су се десили на неком временском интервалу зависи само од дужине тог интервала.

Сада можемо да дефинишемо Пуасонов процес.

Дефиниција 1.1.4 *Процес пребројавања* $\{N(t), t \geq 0\}$ *се зове Пуасонов процес са параметром* λ *ако важи:*

- $N(0) = 0$,
- *процес пребројавања има независне прираштаје,*
- *за све* $s, t \geq 0$ *важи*

$$P\left\{N(t+s) - N(s) = n\right\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, ... \qquad (1)$$

Приметимо да једначина (1) значи да је број догађаја који су се десили на временском интервалу дужине t случајна величина која има Пуасонову расподелу и очекивање λt. Пуасонов процес има алтернативну дефиницију која је еквивалентна претходно наведеној дефиницији.

Дефиниција 1.1.5 *Процес пребројавања се назива Пуасонов процес са интензитетом* λ *ако важи:*

(1) $N(0) = 0$,

(2) *процес пребројавања има независне и стационарне прираштаје,*

(3) $P\left\{N(h) = 1\right\} = \lambda h + o(h)$,

(4) $P\left\{N(h) \geq 2\right\} = o(h)$.

Дефиниција 1.1.6 *Непрекидна случајна величина* X *има експоненцијалну расподелу* $\mathcal{E}(\lambda)$ *ако је њена густина расподеле:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (2)$$

Битна особина експоненцијалне расподеле је својство одсуства меморије:

$$\begin{aligned} P\{X > s + t | X > s\} &= \tfrac{P\{X>s+t, X>s\}}{P\{X>s\}} \\ &= \tfrac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}} = \tfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = P\{X > t\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Из претходног извођења можемо да закључимо да је условна вероватноћа да је систем радио најмање $s + t$ сати, ако је претходно радио s сати, једнака вероватноћи да је систем радио најмање t сати. Дакле, систем не памти колико дуго је радио.

Дефиниција 1.1.7 *Дискретна случајна величина X има геометријску расподелу $\mathcal{G}(p)$ са параметром p ако је њена расподела вероватноће дата са*

$$p(n) = P\{X = n\} = pq^{n-1}, n = 1, 2, ..., q = 1 - p. \tag{4}$$

Дискретна случајна величина има својство одсуства меморије ако и само ако важи:

$$P\{X > m + n | X > m\} = P\{X > n\}, m, n = 1, 2, ... \tag{5}$$

Може се показати да дискретна случајна величина има својство одсуства меморије ако и само ако има геометријску расподелу.

Нека је дат Пуасонов процес са параметром λ, где је X_1 време када се десио први догађај, а $X_n, n \geq 1$ времена која протекну између n-тог и $(n-1)$-вог догађаја. Тада важи следећа теорема.

Теорема 1.1.1 *Нека је дат Пуасонов процес са параметром λ. Тада су времена која протекну између догађаја $X_n, n \geq 1$ независне и једнако расподељене случајне величине са експоненцијалном расподелом $\mathcal{E}(\lambda)$.*

Доказ.

Како важи

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t},$$

јасно је да случајна величина X_1 има $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Посматрајмо сада случајне величине X_1 и X_2.

$P\left\{X_1 > s, X_2 > t\right\} = \int_0^\infty P\left\{X_1 > s, X_2 > t | X_1 = x\right\} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \int_s^\infty P\left\{\text{нема догађаја у интервалу}\, (x, x+t] \, | X_1 = x\right\} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= \int_s^\infty P\left\{\text{нема догађаја у интервалу}\, (x, x+t]\right\} \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= e^{-\lambda t} \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$

$= e^{-\lambda t} e^{-\lambda s}$

$= P\left\{X_1 > s\right\} P\left\{X_2 > t\right\}$

Дакле, због независних прираштаја Пуасоновог процеса, добијамо да су случајне величине X_1 и X_2 независне и да обе имају $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу. Тврђење теореме добијамо применом математичке индукције. ■

Дефинишимо сада

$$S_0 = 0 \text{ и } S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{6}$$

где је S_n време које протекне до остваривања n-тог догађаја. Јасно је да важи:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t. \tag{7}$$

Како су $X_i, i = 1, 2, ...$ независне и једнако расподељене случајне величине са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, важи и следеће:

$$P\left\{S_n \leq t\right\} = P\left\{N(t) \geq n\right\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \tag{8}$$

Пошто смо S_n дефинисали као збир n случајних величина са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, онда S_n има $\Gamma(n, \lambda)$ расподелу, па је њена густина задата функцијом:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{9}$$

Претпоставимо да је N случајна величина са Пуасоновом расподелом са параметром λ и да су $X_i, i = 1, 2, ...$ независне и једнако расподељене случајне величине са функцијом расподеле F. Претпоставимо још да су $X_i, i = 1, 2, ...$ независне од N. Тада се случајна величина $X = X_1 + X_2 + ... + X_N$ назива сложена Пуасонова случајна величина са параметром λ и компонентом F.

Дефиниција 1.1.8 *Претпоставимо да је* $\{N(t), t \geq 0\}$ *Пуасонов процес и да су* $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ *независне и једнако расподељене случајне величине које су независне од* $\{N(t), t \geq 0\}$. *Нека је*

$$X(t) = X_1 + X_2 + ... + X_{N(t)}.$$

Тада је случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ *сложени Пуасонов процес.*

Очигледно, ако је $\{X(t), t \geq 0\}$ сложени Пуасонов процес, тада је $X(t)$ сложена Пуасонова случајна величина са параметром λt.

У дефиницијама 1.1.4 и 1.1.5 параметар λ Пуасоновог процеса је константа, па овакав Пуасонов процес називамо хомогеним. Размотримо сада случај када је параметар Пуасоновог процеса функција од времена t. Овакав Пуасонов процес називамо нехомогеним.

Дефиниција 1.1.9 *Процес пребројавања* $\{N(t), t \geq 0\}$ *је нехомоген Пуасонов процес са функцијом интензитета* $\lambda(t)$ *ако је:*

- $N(0) = 0$,
- *процес пребројавања има независне прираштаје,*
- $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$,
- $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

Важи следећа теорема коју наводимо без доказа, а он се може наћи у Рос [9].

Теорема 1.1.2 *Нека је дат нехомоген Пуасонов процес* $\{N(t), t \geq 0\}$ *са функцијом интензитета* $\lambda(t), t \geq 0$, *тада је*

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{\left(\int_s^{t+s} \lambda(x)dx\right)^n}{n!} e^{-\int_s^{t+s} \lambda(x)dx}, n = 0, 1, ... \tag{10}$$

Посматрајмо сада систем у ком X представља време до првог квара. Тада из једначине (10) добијамо да важи:

$$\bar{F}(t) = P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}, \tag{11}$$

где функцију $\bar{F}(t)$ зовемо *функција преживљавања.* Одатле су функција расподеле и функција интензитета промењиве X редом дате са:

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(u)du} \tag{12}$$

и

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}. \tag{13}$$

Другим речима, функција интензитета $\lambda(t)$ и функција расподеле F јединствено одређују једна другу.

Следећа два нехомогена Пуасонова процеса се доста користе у прекси:

(1) Кокс-Луисов модел, чија је функција интензитета
$\lambda(t) = e^{\alpha_0+\alpha_1 t}, -\infty < \alpha_0, \alpha_1 < +\infty, t > 0.$

(2) Вејбулов модел, чија је функција интензитета
$\lambda(t) = \alpha\theta t^{\theta-1}, \alpha, \theta > 0, t > 0.$

1.2 Процес обнављања

Нека је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ низ ненегативних, независних и једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле F за коју важи $F(0) = P\{X_n = 0\} < 1$. Уведимо ознаку

$$\mu = E(X_n) = \int_0^\infty x dF(x), 0 < \mu \leq \infty. \tag{14}$$

Уколико X_n интерпретирамо као време које протекне између $(n-1)-$вог и $n-$тог догађаја, тада као и код Пуасоновог процеса, можемо да дефинишемо време наступања $n-$тог догађаја на следећи начин:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_0 = 0. \tag{15}$$

Број догађаја који су се десили до тренутка t је

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\}, \tag{16}$$

па је $\{N(t), t \geq 0\}$ процес пребројавања.

Дефиниција 1.2.1 *Процес пребројавања* $\{N(t), t \geq 0\}$ *називамо процесом обнављања.*

Уколико је заједничка функција расподеле F експоненцијална, тада је процес обнављања Пуасонов процес. Дакле, процес обнављања је уопштење Пуасоновог процеса. Нека је

$$M(t) = E[N(t)]. \tag{17}$$

Овако дефинисану функцију $M(t)$ називамо функцијом обнављања и она представља очекивани број догађаја до тренутка t. Као и код Пуасоновог процеса важи:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t. \tag{18}$$

Тада је

$$P\{N(t) = n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} =$$

$$= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} = F_n(t) - F_{n+1}(t),$$

где је F_n функција расподеле за S_n.

Теорема 1.2.1 *Важи*

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{19}$$

Доказ.

$$\begin{aligned} M(t) = E[N(t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} n(F_n(t) - F_{n+1}(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Овим је доказ завршен. ■

Теорема 1.2.2 $M(t) < \infty$ *за све* $0 \leq t < \infty$.

Доказ.

Како је $P\{X_n = 0\} < 1$, постоји $\alpha > 0$ такво да је
$p = P\{X_n \geq \alpha\} > 0$. Дефинишимо сада

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} 0, & X_n < \alpha \\ \alpha, & X_n \geq \alpha. \end{cases} \tag{21}$$

Нека је $\tilde{S}_n = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_n$ и $\tilde{N}(t) = \sup\left\{n : \tilde{S}_n \leq t\right\}$. Јасно је да је $\left\{\tilde{N}(t), t \geq 0\right\}$ процес обнављања чији догађаји наступају само у тренуцима $t = k\alpha, k = 0, 1, ...$ Број догађаја у овим тренуцима су независне и једнако расподељене случајне величине са геометријском расподелом $\mathcal{G}(p)$. Одатле је

$$\begin{aligned} E[\tilde{N}(t)] = & \sum_{k=0}^{[\frac{t}{\alpha}]} E[\textit{број догађаја у тренуцима } k\alpha] = \\ \frac{\frac{t}{\alpha}+1}{P\{X_n \geq \alpha\}} & < \infty, \end{aligned} \tag{22}$$

где је $[x]$ цео део броја x. Како је $\tilde{X}_n \leq X_n$, одатле је и $\tilde{N}(t) \leq N(t)$, одакле следи тврђење теореме. ∎

За функцију обнављања важи

$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^\infty E[N(t)|X_1 = x]dF(x), \tag{23}$$

где је

$$(N(t)|X_1 = x) = \begin{cases} 0, & x > t \\ 1 + N_1(t-x), & x \leq t \end{cases} \tag{24}$$

и

$$N_1(t) = \sup\left\{n : \sum_{i=2}^{n+1} X_i \leq t\right\}. \tag{25}$$

Уколико заменимо (24) у (23) добијамо да важи:

$$M(t) = \int_0^t \left(1 + E[N(t-x)]\right) dF(x), \tag{26}$$

пошто $N(t)$ и $N_1(t)$ имају исту функцију расподеле. Дакле,

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x). \tag{27}$$

Последњу једначину називамо једначином обнављања и то је интегрална једначина коју задовољава функција обнављања.

Дефиниција 1.2.2 *Случајна променљива X је решеткаста уколико постоји $d \geq 0$ такво да је*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P\left\{X = nd\right\} = 1. \tag{28}$$

Дакле, случајна променљива X је решеткаста ако узима само целобројне умношке броја $d \geq 0$. Највеће d које има наведено својство се зове период случајне променљиве X. Ако је случајна променљива X која има функцију расподеле F решеткаста, тада и за функцију F кажемо да је решеткаста. За функцију F која није решеткаста важи следећа теорема, чији се доказ може наћи у Лам [8].

Теорема 1.2.3 *Ако функција расподеле F случајне величине X није решеткаста, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = Var(X)$, тада је*

$$M(t) = \tfrac{t}{\mu} + \tfrac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + o(1),$$

када $t \to \infty$.

Нека је $N(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} N(t)$. Важи следећа лема.

Лема 1.2.1 $P\{N(\infty) = \infty\} = 1$.

Доказ. Из теореме (1.2.2) добијамо да важи

$$\begin{aligned} P\{N(\infty) < \infty\} &= P\{X_n = \infty, \text{за неко } n\} = \\ P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n = \infty)\right\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = \infty\} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лема 1.2.1 значи да са вероватноћом 1 $N(t)$ тежи ка бесконачности када t тежи ка бесконачности.

Дефиниција 1.2.3 *Нека је дат низ случајних величина $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Целобројна случајна величина N се зове време заустављања за $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ ако је за свако $n = 1, 2, ...$ догађај $\{N = n\}$ независан од случајних величина $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$.*

Претпоставимо да је N време заустављања за случајни процес $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Ако је $N = n$, тада би требало да се зауставимо након посматрања случајних величина $X_1, ..., X_n$, а пре посматрања случајних величина $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$. Јасно је да ако је N време заустављања за случајни процес $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$, тада су за свако $n = 1, 2, ...$ догађаји $\{N \leq n\}$ и $\{N > n\}$ одређени само случајним величинама $X_1, ..., X_n$.

Теорема 1.2.4 (Валдова једначина) *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са заједничким очекивањем $E[X] < \infty$ и ако је N време заустављања за $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ са очекивањем $E[N] < \infty$, тада је*

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = E[N]E[X]. \tag{29}$$

Доказ.

Нека је

$$I_n = \begin{cases} 1, & N \geq n \\ 0, & N < n \end{cases} \tag{30}$$

индикатор догађаја $\{N \geq n\}$. Тада важи:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n] &= E[X]\sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] \qquad (31) \\ = E[X]\sum_{n=1}^{\infty} P\{N \geq n\} &= E[N]E[X]. \qquad (32) \end{aligned}$$

Једначину (31) добијамо јер је N време заустављања, па је догађај $\{N \geq n\}$ одређен случајним величинама $X_1, ..., X_{n-1}$ и стога је N независно од X_n, чиме је доказ завршен. ■

Претпоставимо сада да је $N(t), t \geq 0$ процес обнављања чија су времена између узастопних догађаја $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Важи да је

$$\begin{aligned} N(t) + 1 = n \Leftrightarrow N(t) = n - 1 \\ \Leftrightarrow X_1 + ... + X_{n-1} \leq t, X_1 + ... + X_n > t. \end{aligned}$$

Дакле, $N(t)+1$ је време заустављања за $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ и догађај $\{N(t) + 1 = n\}$ је одређен случајним величинама $X_1, ..., X_n$.

Следеће теореме су важне за процесе обнављања.

Теорема 1.2.5 (Елементарна теорема обнављања)

$$\frac{M(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}, t \to \infty. \qquad (33)$$

Теорема 1.2.6 *Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ процес обнављања чија времена између узастопних догађаја имају заједничку расподелу са очекивањем μ и дисперзијом σ^2. Тада важи:*

$$P\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, t \to \infty. \qquad (34)$$

Теорема 1.2.7 (Кључна теорема обнављања) *Нека је F заједничка функција расподеле времена између узастопних догађаја процеса обнављања. Ако F није решеткаста и ако је h Риман интеграбилна функција, тада је*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t - x)dM(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t)dt, \qquad (35)$$

где је

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \quad \text{и} \quad \mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t)dt. \tag{36}$$

Нека је дат процес обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$ са временима између узастопних догађаја $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Можемо да дефинишемо следеће функције од t:

- узраст као $A(t) = t - S_{N(t)}$,
- остатак живота као $B(t) = S_{N(t)+1} - t$,
- целокупан живот као $X_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + B(t)$.

Теорема 1.2.8 *Нека је F заједничка функција расподеле времена између узастопних догађаја процеса обнављања. Ако F има очекивање $\mu < \infty$ и није решеткаста, тада:*

(1) $\lim\limits_{t\to\infty} P\{A(t) \leq x\} = \lim\limits_{t\to\infty} P\{B(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy,$

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} P\left\{X_{N(t)+1} \leq x\right\} = \frac{1}{\mu}\int_0^x ydF(y).$

Посматрајмо процес обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$ чија времена између узастопних догађаја $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ имају заједничку расподелу F. Претпоставимо да сваки пут када дође до обнављања процеса добијемо награду. Нека је R_n награда коју смо добили у тренутку $n-$тог обнављања. Обично R_n зависи од X_n, али ћемо претпоставити да су парови $\{(X_n, R_n), n = 1, 2, ...\}$ независни и једнако расподељени случајни вектори. Тада $\{(X_n, R_n), n = 1, 2, ...\}$ називамо процесом обнављања са добитком. Укупан добитак који добијемо до тренутка t је

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n. \tag{37}$$

Нека је

$$E[R] = E[R_n] \text{ и } E[X] = E[X_n].$$

Важи следећа теорема чији је резултат важан и има доста примене у пракси.

Теорема 1.2.9 *Претпоставимо да је* $E[R] < \infty$ *и* $E[X] < \infty$. *Тада са вероватноћом* 1 *важи:*

$$\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]} \quad \textit{када} \quad t \to \infty \tag{38}$$

$$\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]} \quad \textit{када} \quad t \to \infty \tag{39}$$

Ако кажемо да се циклус завршио сваки пут када је дошло до обнављања, тада (39) показује да је, гледано у дужем временском периоду, просечан добитак у јединици времена управо очекивана награда добијена током циклуса подељена очекиваним трајањем циклуса. Награда може бити и негативна. У овом случају R_n можемо дефинисати као трошкове који су настали у тренутку n-тог обнављања. Тада (39) показује да је, гледано у дужем временском периоду, просечан трошак у јединици времена дат са

$$\textit{просечан трошак} = \frac{\textit{очекивани трошак настао током циклуса}}{\textit{очекивано трајање циклуса}}. \tag{40}$$

Иако смо претпоставили да је награда добијена одједном на крају циклуса, теорема 1.2.9 важи и када се награда добија равномерно током циклуса.

2 Геометријски процес

У претходном одељку смо поменули да се за моделирање система чије се стање поправља или погоршава користи монотони процес. Са друге стране, у анализи података чији догађаји имају тренд, природан приступ је такође примена монотоних процеса. У овом поглављу ћемо као једноставан пример монотоног процеса навести геометријски процес, а затим ћемо изучити његова вероватносна својства.

2.1 Дефиниција геометријског процеса и његове особине

Дефиниција 2.1.1 *За низ ненегативних случајних величина* $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ *кажемо да је геометријски процес ако су оне независне и ако је функција расподеле за* X_n *дата са* $F(a^{n-1}x)$ *за* $n = 1, 2, ...$, *где* $a > 0$ *називамо коефицијентом геометријског процеса.*

Да би наведена дефиниција имала смисла, у пракси се претпоставља да је $F(0) = P\{X_1 = 0\} < 1$. Ако је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес и ако је f густина случајне променљиве X_1, тада из дефиниције 2.1.1 следи да је густина случајне величине X_n дата са $a^{n-1}f(a^{n-1}x)$.

Дефиниција 2.1.2 *Случајни процес* $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ *називамо геометријским процесом уколико постоји реалан број* $a > 0$ *такав да је* $\{a^{n-1}X_n, n = 1, 2, ...\}$ *процес обнављања. Број* $a > 0$ *називамо коефицијентом геометријског процеса.*

Дефиниције 2.1.1 и 2.1.2 су еквивалентне. Геометријски процес је растући ако за његов коефицијент важи $0 < a \leq 1$, а опадајући је ако је $a \geq 1$. Уколико је $a = 1$, тада је геометријски процес процес обнављања. Дакле, геометријски процес је монотони процес који је уопштење процеса обнављања.

Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом a. Нека су функција расподеле и густина случајне величине X_1 редом F и f и нека је $E[X_1] = \lambda$ и $Var(X_1) = \sigma^2$. Тада је

$$E[X_n] = \frac{\lambda}{a^{n-1}} \tag{41}$$

и

$$Var(X_n) = \frac{\sigma^2}{a^{2(n-1)}}. \tag{42}$$

Видимо да су a, λ и σ^2 три важна параметра геометријског процеса.

Даље, нека је $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$ $\sigma-$ алгебра генерисана случајним величинама $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Случајни процес $\{M_n, n = 1, 2, ...\}$ је *мартингал* у односу на $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, ...\}$ ако су за свако n испуњени услови:

(1) M_n је $\mathcal{F}_n-$ мерљиво,

(2) $E[|M_n|] < \infty$,

(3) $E[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$, за свако n.

Низ случајних величина за који важе услови $(1), (2)$ и

$$E[M_n|\mathcal{F}_n - 1] \geq M_{n-1}, \tag{43}$$

зовемо *субмартингал*.
Дефинишимо сада

$$S_0 = 0 \quad u \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{44}$$

Приметимо да је $\{S_n, n = 1, 2, ...\}$ растући низ ненегативних случајних величина за који важи

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + E[X_{n+1}] \geq S_n. \tag{45}$$

Ако је $a \leq 1$, тада је јасно да важи

$$S_n \overset{\text{c.c.}}{\to} \infty, \quad \textit{када} \quad n \to \infty. \tag{46}$$

Са друге стране, ако је $a > 1$, тада важи

$$\sup_{n \geq 0} E[|S_n|] = \lim_{n \to \infty} E[S_n] = \lambda \lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{-n}}{1 - a^{-1}} = \frac{a\lambda}{a - 1} < \infty. \tag{47}$$

Дакле, $\{S_n, n = 1, 2, ...\}$ је ненегативни субмартингал у односу на $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, ...\}$.

Теорема 2.1.1 (Теорема о конвергенцији мартингала) *Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ субмартингал за који важи*

$$\sup_{1 \leq n < \infty} E[|X_n|] < \infty. \tag{48}$$

Тада са вероватноћом 1 случајна величина

$$X = \lim_{n \to \infty} X_n \tag{49}$$

постоји и важи $E[|X|] < \infty$.

Теорема 2.1.2 *Ако је $a > 1$, тада постоји случајна величина S таква да је*

$$S_n \overset{\text{c.c.}}{\to} S \quad \textit{када} \quad n \to \infty, \tag{50}$$

$$S_n \overset{\text{c.k.}}{\to} S \quad \textit{када} \quad n \to \infty, \tag{51}$$

и

$$E[S] = \frac{a\lambda}{a-1}, \tag{52}$$

$$Var[S] = \frac{a^2\sigma^2}{a^2-1}. \tag{53}$$

Доказ.

Како је $\{S_n, n = 1, 2, ...\}$ ненегативни субмартингал у односу на $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, ...\}$, тада према теореми о конвергенцији мартингала, постоји ненегативна случајна величина S таква да

$$S_n \overset{\text{c.c.}}{\to} S \quad \textit{када} \quad n \to \infty, \tag{54}$$

па важи (50). Стога, можемо записати

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i. \tag{55}$$

Из 2.1.2 следи да је

$$\begin{aligned} E[(S_n - S)^2] &= E\left[\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} X_i\right)^2\right] \\ = Var\left[\sum_{i=n+1}^{\infty} X_i\right] &+ \left[E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} X_i\right)\right]^2 \\ = \frac{1}{a^{2(n-1)}}\left[\frac{\sigma^2}{a^2-1} + \frac{\lambda^2}{(a-1)^2}\right] &\to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{56}$$

Дакле, важи и (51). Показали смо да важи (50) одакле следи

$$E[S_n] \to E[S], n \to \infty, \tag{57}$$

па важи и (52). Покажимо још да важи (53):

$$E[S_n^2] = Var[S_n] + (E[S_n])^2 = \frac{a^2\sigma^2(1-a^{-2n})}{a^2-1} + \frac{a^2\lambda^2(1-a^{-n})^2}{(a-1)^2}, \tag{58}$$

па је

$$E[S_n^2] = \frac{a^2\sigma^2}{a^2-1} + \frac{a^2\lambda^2}{(a-1)^2}. \tag{59}$$

Из претходно изведеног и чињенице да је
$Var[S] = E[S^2] - (E[S])^2$, добијамо да важи и (53), чиме је доказ теореме завршен. ■

Дефиниција 2.1.3 *За случајни процес $\{Z_n, n = 1, 2, ...\}$ кажемо да је геометријски процес са прагом ако постоје реални бројеви $\{a_i > 0, i = 1, 2, ..., k\}$ и природни бројеви $\{1 = M_1 < M_2 < \cdots < M_k < M_{k+1} = \infty\}$ такви да за свако $i = 1, 2, ..., k$ важи да је*

$$\left\{a_i^{n-M_i} Z_n, M_i \leq n < M_{i+1}\right\}$$

процес обнављања. Реални бројеви $\{a_i, i = 1, 2, ..., k\}$ се називају коефицијенти, природни бројеви $\{M_1, M_2, ..., M_k\}$ се зову прагови, док број k представља број граничника геометријског процеса са прагом. Осим тога, $\{Z_n, M_i \leq n < M_{i+1}\}$ називамо i-тим делом геометријског процеса са прагом.

Нека су λ и σ^2 заједничко очекивање и дисперзија случајне промењиве $\left\{a_i^{n-M_i} Z_n, M_i \leq n < M_{i+1}\right\}$. Тада важи:

$$E[Z_n] = \frac{\lambda_i}{a_i^{n-M_i}} \tag{60}$$

и

$$Var[Z_n] = \frac{\sigma_i^2}{a_i^{2(n-M_i)}}, M_i \leq n < M_{i+1}, i = 1, 2, ..., k. \tag{61}$$

Приметимо да ако је $k = 1$, геометријски процес са прагом се своди на обичан геометријски процес.

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$. Слично као и за процес обнављања, у функцији од времена t можемо да дефинишемо:

- узраст као $A(t) = t - S_{N(t)}$,
- остатак живота као $B(t) = S_{N(t)+1} - t$,
- целокупан живот као $X_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + B(t)$.

Уколико је F_n функција расподеле за S_n, тада важи следећа теорема.

Теорема 2.1.3

$$[1]P\left\{A(t) > x\right\} = \begin{cases} \bar{F}(t)+ \\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{t-x}\bar{F}(a^n(t-u))dF_n(u), & 0 < x < t \\ 0, & x \geq t. \end{cases} \tag{62}$$

$$[2]P\left\{B(t) > x\right\} = \begin{cases} \bar{F}(t+x)+ \\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{t}\bar{F}(a^n(x+t-y))dF_n(y), & x > 0 \\ 1, & x \leq 0. \end{cases} \tag{63}$$

$$[3]P\left\{X_{N(t)+1} > x\right\} = \begin{cases} \bar{F}(t \vee x)+ \\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{t}\bar{F}(a^n(x \vee (t-y)))dF_n(y), & x > 0 \\ 1, & x \leq 0. \end{cases} \tag{64}$$

$$[4]P\left\{S_{N(t)} \leq x\right\} = \begin{cases} \bar{F}(t)+ \\ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}\bar{F}(a^n(t-y))dF_n(y), & 0 < x \leq t \\ 1, & x > t, \end{cases} \tag{65}$$

где је F функција расподеле за X_1, а $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, док је F_n функција расподеле за S_n и $\bar{F_n}(x) = 1 - F_n(x)$.

Теорема 2.1.4

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{F}(a^n x)F_n(t)P\left\{N(t) = n\right\} \tag{66}$$

$$\leq P\left\{X_{N(t)+1} > x\right\} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\bar{F}(a^n x)F_n(t),$$

при чему је $t > 0, x > 0$. Још је F функција расподеле за X_1, а $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, док је F_n функција расподеле за S_n и $\bar{F_n}(x) = 1 - F_n(x)$.

Познато је да Валдова једначина има важну улогу у проучавању процеса обнављања. Следећа теорема је уопштење Валдове једначине на геометријски процес.

Теорема 2.1.5 (Валдова једначина за геометријски процес) *Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом a, где је $E[X_1] = \lambda < \infty$. Тада за $t > 0$ важи:*

$$E[S_{N(t)+1}] = \lambda E\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} a^{-n+1}\right]. \tag{67}$$

Ако је $a \neq 1$, тада је

$$E[S_{N(t)+1}] = \frac{\lambda}{1-a}\left(E[a^{-N(t)}] - a\right). \tag{68}$$

Следеће последице Валдове једначине за геометријски процес наводимо без доказа, који се могу наћи у Лам [8].

Последица 2.1.1

$$E[a^{-N(t)}] \begin{cases} > a + \frac{(1-a)t}{\lambda}, & 0 < a < 1 \\ = 1, & a = 1 \\ < a + \frac{(1-a)t}{\lambda}, & a > 1, t \leq \frac{a\lambda}{a-1}. \end{cases} \tag{69}$$

Последица 2.1.2

$$E[S_{N(t)+1}] \begin{cases} > \lambda(E[N(t)] + 1), & 0 < a < 1 \\ = \lambda(E[N(t)] + 1), & a = 1 \\ < \lambda(E[N(t)] + 1), & a > 1. \end{cases} \tag{70}$$

Приметимо да за $a = 1$, геометријски процес се своди на процес обнављања, па из последице 2.1.2 добијамо да важи $E[S_{N(t)+1}] = \lambda(E[N(t)] + 1)$, што је Валдова једначина за процес обнављања.

Теорема 2.1.6 *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом $a > 1$, тада важи:*

$$\begin{aligned} &(1) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E[a^{-N(t)}] = 0, \\ &(2) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E\left[\textstyle\sum_{n=1}^{N(t)} a^{-n+1}\right] = 0, \\ &(3) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E[S_{N(t)+1}] = 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Теорема 2.1.7 *Нека је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом $a = 1$, тада важи:*

$$\begin{aligned} &(1) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E[a^{-N(t)}] = 0, \\ &(2) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E\left[\textstyle\sum_{n=1}^{N(t)} a^{-n+1}\right] = \tfrac{1}{\lambda}, \\ &(3) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E[S_{N(t)+1}] = 1, \\ &(4) \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{t} E[B(t)] = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

2.2 Геометријски процес са експоненцијалном расподелом

Сада ћемо проучити својства геометријског процеса код кога случајна величина X_1 има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$. Њена густина је дата са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & ,x > 0, \\ 0 & ,x \leq 0. \end{cases} \tag{73}$$

Тада важи следећа теорема.
Теорема 2.2.1 *Нека је* $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ *геометријски процес са коефицијентом* a. *Претпоставимо да случајна величина* X_1 *има експоненцијалну расподелу* $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$. *Тада је*

$$\begin{array}{ll} (1) E[a^{-N(t)}] = 1 + \frac{(1-a)t}{a\lambda} & ,0 < a \leq 1, \\ (2) E[S_{N(t)+n+1}] = \frac{a\lambda}{a-1} + \frac{1}{a^{n+1}}\left(t - \frac{a\lambda}{a-1}\right) & ,a > 1, t < \frac{a\lambda}{a-1}. \end{array} \tag{74}$$

Последица 2.2.1

$$\begin{array}{l} 1. E[S_{N(t)}] = t, \\ 2. E[S_{N(t)+1}] = \lambda + \frac{t}{a}. \end{array} \tag{75}$$

Ако су у тренутку t $A(t)$ узраст, $B(t)$ остатак живота и $X_{N(t)+1}$ целокупан живот, дефинисани у претходном одељку, тада важи и следећа последица.

Последица 2.2.2

$$\begin{array}{l} 1. E[A(t)] = 0, \\ 2. E[B(t)] = \lambda + \left(\frac{1}{a} - 1\right)t, \\ 3. E[X_{N(t)+1}] = \lambda + \left(\frac{1}{a} - 1\right)t. \end{array} \tag{76}$$

Теорема 2.2.2 *Претпоставимо да је* $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ *геометријски процес са коефицијентом* $0 < a \leq 1$ *и да* X_1 *има експоненцијалну расподелу* $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$. *Тада важи:*

$$\begin{array}{l} (1) \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}E[a^{-N(t)}] = \frac{1-a}{a\lambda}, \\ (2) \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}E\left[\sum_{n=1}^{N(t)} a^{-n+1}\right] = \frac{1}{\lambda}, \\ (3) \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}E[S_{N(t)+1}] = \frac{1}{a}, \\ (4) \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}E[B(t)] = \frac{1-a}{a}. \end{array} \tag{77}$$

У овом одељку смо увели геометријски процес, као уопштење процеса обнављања. Одатле је већина резултата који важе за геометријски процес генерализација одговарајућих резултата који важе за процес обнављања. У наредном одељку ће бити речи о геометријској функцији.

3 Геометријска функција и геометријска једначина

3.1 Геометријска функција

Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом a и нека је

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{78}$$

Процес пребројавања дефинишемо са

$$N(t) = \sup \{n | S_n \leq t\}, t \geq 0. \tag{79}$$

Нека је

$$M(t, a) = E[N(t)]. \tag{80}$$

Овако дефинисану функцију $M(t, a)$ називамо геометријском функцијом геометријског процеса $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$.

У пракси, ако је X_n време које протекне између $(n-1)$ −вог и n−тог догађаја, тада је $M(t, a)$ очекивани број догађаја који су се десили до тренутка t. Ако је X_n време функционисања система након $(n-1)$ −ве поправке, тада је $M(t, a)$ очекивани број кварова до тренутка t. Јасно је да уколико је $a = 1$, тада се геометријски процес своди на процес обнављања, па се геометријска функција $M(t, 1)$ своди на функцију обнављања $M(t)$ процеса обнављања. Дакле, геометријска функција $M(t, a)$ је уопштење функције обнављања. Како је функција обнављања битна за процес обнављања, тако је и геометријска функција битна за геометријски процес.

3.2 Геометријска једначина

У овом одељку ћемо да изведемо интегралну једначину за геометријску функцију $M(t, a)$.
Најпре, за процес обнављања $N(t)$ важи

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t. \tag{81}$$

Нека је $F_n(x)$ функција расподеле за S_n, где је

$$F_0(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , \textit{иначе.} \end{cases} \tag{82}$$

Следећа теорема је уопштење теореме 1.2.1, а доказ је исти.

Теорема 3.2.1

$$M(t, a) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{83}$$

Даље, нека је F функција расподеле за X_1. Аналогно једначини (27), имамо следећу интегралну једначину за $M(t, a)$:

$$M(t, a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u), a) dF(u). \tag{84}$$

Да бисмо доказали наведену једначину, користићемо математичку индукцију.

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(a(t-u)) dF(u). \tag{85}$$

Уколико је у једначини (85) $n = 1$, онда тврђење важи тривијално. Претпоставимо да једначина (85) важи за произвољан природан број n. За $n+1$, како је S_{n+1} збир две независне случајне величине S_n и X_{n+1}, важи:

$$\begin{aligned} &F_{n+1}(t) = \textstyle\int_0^t F_n(t-u) dF(a^n u) \\ &= \textstyle\int_0^t \left\{ \int_0^{t-u} F_{n-1}(a(t-u-v)) dF(v) \right\} dF(a^n u) \\ &= \textstyle\int_0^t \left\{ \int_0^{t-v} F_{n-1}(a(t-u-v)) dF(a^n u) \right\} dF(v) \\ &= \textstyle\int_0^t \left\{ \int_0^{a(t-v)} F_{n-1}(a(t-v)-y) dF(a^{n-1} y) \right\} dF(v) \\ &= \textstyle\int_0^t F_n(a(t-v)) dF(v), \end{aligned} \tag{86}$$

где смо други ред претходне једначине добили на основу индукцијске претпоставке. Са друге стране, последњи ред важи јер је S_n збир независних променљивих S_{n-1} и X_n. Дакле, добили смо да важи једначина (85). Заменом једначине (85) у једначину (83), добијамо да важи (84).

Једначина (84) је интегрална једначина коју задовољава геометријска функција $M(t, a)$, па је зато називамо геометријском једначином. Ако је f густина случајне величине X_1, тада (84) постаје

$$M(t, a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u), a) f(u) du. \tag{87}$$

У вези са постојањем геометријске функције важе следеће две теореме.

Теорема 3.2.2 *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са коефицијентом $0 < a \leq 1$, тада је за свако $t \geq 0$, $N(t)$ коначно са вероватноћом 1, а геометријска функција $M(t, a)$ је ограничена.*

Теорема 3.2.3 *Нека је* $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ *геометријски процес са коефицијентом* $a > 1$ *и нека је* F *функција расподеле случајне величине* X_1. *Ако претпоставимо да важи*

$$\theta = \inf \{x | F(x) > F(0)\}, \tag{88}$$

тада је

$$M(t, a) = \infty \quad \text{за} \quad t > \frac{a\theta}{a-1}. \tag{89}$$

Ако функција расподеле F расте у нули, тада из (88) следи да је $\theta = 0$, па је на основу теореме 3.2.3, $M(t, a) = \infty$ за свако $t > 0$. Због тога ћемо надаље да се бавимо геометријском функцијом само за $0 < a \leq 1$.

3.3 Опште решење геометријске једначине

Да бисмо решили геометријску једначину (84) по $M(t, a)$, можемо да почнемо од $M_0(t, a) = F(t)$. Одатле итерацијом добијамо

$$M_n(t, a) = F(t) + \int_0^t M_{n-1}(a(t-u), a) dF(u). \tag{90}$$

Индукцијом се може показати да је низ $M_n(t, a)$ неопадајући по n за свако $t > 0$, одакле следи да постоји лимес

$$M(t, a) = \lim_{n \to \infty} M_n(t, a). \tag{91}$$

Даље, применом теореме о монотоној конвергенцији, гранична функција $M(t, a)$ ће бити решење геометријске једначине (84). Штавише, ако је $F(x)$ непрекидна, тада је решење $M(t, a)$ јединствено на сваком интервалу $[0, d]$, где је $F(d) < 1$. Да бисмо ово доказали, претпоставимо да је $0 < a \leq 1$. Нека је $C[0, d]$ Банахов простор свих непрекидних функција на $[0, d]$. Дефинишимо линеарни оператор L на $C[0, d]$, такав да је за свако $G \in C[0, d]$, $H = L(G)$, са

$$L : H(t) = F(t) + \int_0^t G(a(t-u)) dF(u), \quad \text{за} \quad 0 \leq t \leq d. \tag{92}$$

За $G_1, G_2 \in C[0, d]$, нека је $H_1 = L(G_1)$ $H_2 = L(G_2)$. Тада важи

$$||H_1 - H_2|| \leq F(d) ||G_1 - G_2||, \tag{93}$$

па је L контракција, с обзиром да је $F(d) < 1$. Према теореми о фиксној тачки, постоји јединствена фиксна тачка у $C[0, d]$.

Како је d било који позитиван број за који је $F(d) < 1$, решење једначине (84) је такође јединствено.

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ са коефицијентом a и нека је $f(x)$ густина случајне величине X_1. Означимо Лапласову трансформацију функције $f(x)$ са

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \tag{94}$$

а Лапласову трансформацију геометријске функције $M(t, a)$ са

$$M^*(s, a) = \int_0^\infty e^{-st} M(t, a) dt. \tag{95}$$

Ако уврстимо уведене Лапласове трансформације у обе стране једначине (84), добијамо:

$$M^*(s, a) = \frac{f^*(s)}{s} + \frac{1}{a} M^* \left(\frac{s}{a}, a \right) f^*(s). \tag{96}$$

За $0 < a \leq 1$, према теореми 3.2.2, имамо да је $M(t, a)$ ограничена, па једначину (96) можемо да решимо итерацијом по $M^*(s, a)$. Почећемо са

$$M_0^*(s, a) = \tfrac{f^*(s)}{s},$$

а затим итеративно добијамо

$$M_n^*(s, a) = \tfrac{f^*(s)}{s} + \tfrac{1}{a} M_{n-1}^* \left(\tfrac{s}{a}, a \right) f^*(s).$$

Можемо доказати индукцијом да важи

$$M_n^*(s, a) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^\infty \left\{ \prod_{j=0}^i f^* \left(\frac{s}{a^j} \right) \right\}. \tag{97}$$

Како је $0 < a \leq 1$, ред са десне стране претходно наведене једнакости конвергира, па је решење једначине (96) дато са:

$$M^*(s, a) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^\infty \left\{ \prod_{j=0}^i f^* \left(\frac{s}{a^j} \right) \right\}. \tag{98}$$

Геометријску функцију $M(t, a)$ можемо одредити инверзијом функције $M^*(s, a)$.

Међутим, ако је $a > 1$, ред из једначине (98) дивергира. $M^*(s,a)$ можемо да напишемо у облику

$$M^*(s,a) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s), \tag{99}$$

где је

$$a_i(s) = \frac{1}{s} \prod_{j=0}^{i} f^* \left(\frac{s}{a^j} \right). \tag{100}$$

Према Рабовом[2] тесту, имамо да важи:

$$\lim_{i\to\infty} i \left\{ \frac{a_i(s)}{a_{i+1}(s)} - 1 \right\} = \lim_{i\to\infty} \frac{i \left\{ 1 - f^* \left(\frac{s}{a^{i+1}} \right) \right\}}{f^* \left(\frac{s}{a^{i+1}} \right)} = 0, \tag{101}$$

па је ред у једначини (98) дивергентан. Одатле добијамо да једначина (96) нема решење.

3.4 Нумеричко решење геометријске једначине

У овом одељку ћемо проучавати нумеричко решење једначине (87) за $0 < a \leq 1$, при чему ћемо за интеграцију користити правило трапеза. Најпре, наведимо лему која је у вези са проценом грешке овог нумеричког метода.

Лема 3.4.1 *Нека је дат ненегативан низ* $\{y_n, n = 0, 1, ..., N\}$. *Претпоставимо да је:*

(1) $y_0 = 0$,

(2) $y_n \leq A + Bh \sum_{j=0}^{n-1} y_j$, $1 \leq n \leq N$,

при чему је $h = \frac{1}{N}$, *а* A *и* B *су позитивне константе независне од* h. *Тада важи*

$$\max_{0\leq n\leq N} y_i \leq Ae^B. \tag{102}$$

Доказ.
Најпре докажимо индукцијом да важи

$$y_n \leq A(1 + Bh)^{n-1}. \tag{103}$$

Због претпоставке леме, ако је $n = 1$, једначина (103) важи тривијално. Претпоставимо да (103) важи за $j = 1, 2, ..., n - 1$.

[2] Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), швајцарски математичар

Тада

$$y_n \le A + Bh \sum_{j=1}^{n-1} y_j$$

$$\le A + Bh \sum_{j=1}^{n-1} A(1+Bh)^{j-1} \qquad (104)$$

$$= A(1+Bh)^{n-1}.$$

Дакле, једначина (103) важи за сваки природан број n. Како је $h = \frac{1}{N}$, важи:

$$\begin{aligned} y_n &\le A\left(1+\tfrac{B}{N}\right)^{n-1} \\ &\le A\left(1+\tfrac{B}{N}\right)^{N} \\ &\le Ae^B, \end{aligned} \qquad (105)$$

чиме је доказ завршен. ■

Означимо $M(t,a)$ са $\Lambda(t)$ због лакшег писања. Даље, увођењем смене

$$s = a(t-y)$$

једначина (87) постаје

$$\Lambda(t) = F(t) + \frac{1}{a}\int_0^{at} \Lambda(s) f\left(t - \frac{s}{a}\right) ds. \qquad (106)$$

Без губљења општости, претпоставимо да $t \in [0,T]$ и да је $f(0) = 0$ због једноставности. Поделимо интервал $[0,T]$ подеоним тачкама $T_i = ih$, $i = 0,1,...,N$ са кораком ширине $h = \frac{T}{N}$. Нека је

$$\Lambda(T_i) = F(T_i) + \tfrac{1}{a}\int_0^{aT_i} \Lambda(s) f\left(T_i - \tfrac{s}{a}\right) ds$$

$$= F(T_i) + \tfrac{1}{a}\int_0^{T_{[ai]}} \Lambda(s) f\left(T_i - \tfrac{s}{a}\right) ds + \tfrac{1}{a}\int_{T_{[ai]}}^{aT_i} \Lambda(s) f\left(T_i - \tfrac{s}{a}\right) ds$$

$$= F(T_i) + I_1 + I_2, \qquad (107)$$

где је $[x]$ цео део реалног броја x, а

$$I_1 = \frac{1}{a}\int_0^{T_{[ai]}} \Lambda(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds \qquad (108)$$

и

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_{T_{[ai]}}^{aT_i} \Lambda(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds. \qquad (109)$$

Означимо

$$g(s) = \tfrac{1}{a}\Lambda(s) f\left(T_i - \tfrac{s}{a}\right).$$

Тада се интеграција правилом трапеза са подеоним тачкама $\{T_i, i = 0, 1, ..., [ai]\}$ на интервалу $(T_0, T_{[ai]}) = (0, T_{[ai]})$ може применити на I_1. Стога је

$$T_1(g) = \frac{h}{2} g(T_0) + h \sum_{k=1}^{[ai]-1} g(T_k) + \frac{h}{2} g(T_{[ai]}). \tag{110}$$

Како је $\Lambda(T_0) = \Lambda(0) = 0$, следи да је

$$\begin{aligned} I_1 &= \textstyle\int_0^{T_{[ai]}} g(s)ds = T_1(g) + E_1(g) \\ &= \tfrac{h}{2a}\Lambda(T_0) f\left(T_i - \tfrac{T_0}{a}\right) + \tfrac{h}{a}\textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1} \Lambda(T_k) f\left(T_i - \tfrac{T_k}{a}\right) \\ &\quad + \tfrac{h}{2a}\Lambda(T_{[ai]}) f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_1(g) \\ &= \tfrac{h}{a}\textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1} \Lambda(T_k) f\left(T_i - \tfrac{T_k}{a}\right) + \tfrac{h}{2a}\Lambda(T_{[ai]}) f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_1(g), \end{aligned} \tag{111}$$

где је $E_1(g) = I_1 - T_1(g)$ грешка за $T_1(g)$. Познато је да ако је $g \in C^2[0, T]$ простор функција са непрекидним другим изводом на $[0, T]$, тада је грешка при коришћењу правила трапеза за интеграцију реда величине

$$E_1(g) = O(h^2). \tag{112}$$

Слично, правило трапеза са подеоним тачкама $T_{[ai]}$ и aT_i на интервалу $\left[T_{[ai]}, aT_i\right]$ може се применити и за интеграцију I_2. Тада добијамо

$$\begin{aligned} T_2(g) &= \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\left\{\Lambda(T_{[ai]}) f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right) + \Lambda(aT_i) f\left(T_i - \tfrac{aT_i}{a}\right)\right\} \\ &= \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\Lambda(T_{[ai]}) f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right), \end{aligned} \tag{113}$$

пошто је $f(0) = 0$. Одатле I_2 постаје

$$\begin{aligned} I_2 &= \textstyle\int_{T_{[ai]}}^{aT_i} g(s)ds = T_2(g) + E_2(g) \\ &= \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\Lambda(T_{[ai]}) f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_2(g), \end{aligned} \tag{114}$$

где је $E_2(g) = I_2 - T_2(g)$ грешка за $T_2(g)$. Као и у претходном случају, имамо

$$E_2(g) = O((aT_i - T_{[ai]})^2) = O((aih - [ai]h)^2) = O(h^2), \tag{115}$$

пошто је $|ai - [ai]| \leq 1$. Коришћењем (110), (114) і (107) добијамо

$$\Lambda(0) = 0 \tag{116}$$

и

$$\begin{aligned}\Lambda(T_i) &= F(T_i) + \tfrac{h}{a}\textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1}\Lambda(T_k)f\left(T_i - \tfrac{T_k}{a}\right)\\ &+ \tfrac{h}{2a}\Lambda(T_{[ai]})f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right) + \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\Lambda(T_{[ai]})f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right)\\ &+ (E_1(g) + E_2(g)), \quad i = 1, 2, ..., N.\end{aligned} \tag{117}$$

Да бисмо добили нумеричко решење, с обзиром да је $\Lambda(0) = 0$, можемо почети са

$$\Lambda_0 = 0. \tag{118}$$

Уопште, приближно решење Λ_i можемо добити из претходног $\Lambda(T_i)$ занемаривањем грешке $(E_1(g) + E_2(g))$ у једначини (117). Други речима, приближно решење Λ_i можемо одредити рекурзивно из једначине која следи:

$$\begin{aligned}\Lambda_i &= F(T_i) + \tfrac{h}{a}\textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1}\Lambda_k f\left(T_i - \tfrac{T_k}{a}\right) + \tfrac{h}{2a}\Lambda_{[ai]}f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right)\\ &+ \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\Lambda_{[ai]}f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right), \quad i = 1, 2, ..., N.\end{aligned} \tag{119}$$

Означимо грешку за решење Λ_i са $e_i = \Lambda(T_i) - \Lambda_i$. Тада је

$$e_0 = 0 \tag{120}$$

и

$$\begin{aligned}e_i &= \tfrac{h}{a}\textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1} e_k f\left(T_i - \tfrac{T_k}{a}\right) + \left\{\tfrac{h}{2a} + \tfrac{aT_i - T_{[ai]}}{2a}\right\} e_{[ai]} f\left(T_i - \tfrac{T_{[ai]}}{a}\right)\\ &+ (E_1(g) + E_2(g)), \quad i = 1, 2, ..., N.\end{aligned} \tag{121}$$

Уведимо ознаке

$$A = \max_{1 \leq i \leq N} |(E_1(g) + E_2(g))|$$

и

$$B_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{a} f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) & , 1 \leq k \leq [ai] - 1, \\ \left(\frac{1}{2a} + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2ah}\right) f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) & , k = [ai], \\ 0 & , [ai] < k \leq i. \end{cases} \tag{122}$$

Даље, нека је

$$B = \max_{1\leq k\leq i\leq N} \{B_{ik}\} < \infty.$$

Горња граница грешке e_i може да се добије из једначине (121), одакле имамо

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq h \textstyle\sum_{k=1}^{[ai]-1} |e_k| \frac{1}{a} f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) \\ &\quad + h \left\{\frac{1}{2a} + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2ah}\right\} |e_{[ai]}| f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + A \qquad (123) \\ &\leq A + Bh \textstyle\sum_{k=1}^{i-1} |e_k|, \qquad i = 1, 2, ..., N, \end{aligned}$$

при чему је

$$|e_0| = 0.$$

Из леме 3.4.1 добијамо да важи

$$\max_{1\leq i\leq N} |e_i| \leq Ae^B. \qquad (124)$$

Приметимо да из (112) и (115) следи да је $A = O(h^2)$. Као резултат, из (124) имамо

$$\max_{1\leq i\leq N} |e_i| \leq ch^2 \qquad (125)$$

за неку константу c која је независна од h. Дакле, грешка решења Λ_i је реда величине h^2.

3.5 Приближно решење геометријске једначине

Дат је геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ са коефицијентом a. Нека је $f(x)$ функција густине случајне величине X_1, при чему је $EX_1 = \lambda$, $VarX_1 = \sigma^2$ и $E(X_1^k) = \mu_k$, $k = 1, 2, ...$ Још један приступ одређивању геомтријске функције $M(t, a)$ је да се одреди њена Лапласова трансформација $M^*(s, a)$, одакле $M(t, a)$ добијамо инверзијом. Ако је $a = 1$, геометријски процес се своди на процес обнављања. Тада геометријска функција $M(t, 1)$ постаје функција обнављања за процес обнављања за коју важи:

$$M^*(s, 1) = \frac{f^*(s)}{s(1 - f^*(s))}, \qquad (126)$$

где је $M^*(s, 1)$ Лапласова трансформација за $M(t, 1)$, а $f^*(s)$ Лапласова трансформација за $f(x)$. У општем случају, није лако инвертовати једначину (126), осим у неким посебним случајевима. Наравно, за $a \neq 1$, проблем постаје компликованији.

Из једначина (96) и (98) може се видети да чак и не постоји једноставан израз за $M^*(s,a)$. Алтернативно решење је пронаћи приближан израз за $M(t,a)$, што је у пракси довољно добро решење. На пример, за $a = 1$, према теореми 1.2.3, функција обнављања $M(t,1)$ је дата са

$$M(t,1) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2} + o(1). \tag{127}$$

Да бисмо добили приближан израз за $M(t,a)$, можемо да $M^*(s,a)$ развијемо помоћу Тејлоровог реда у тачки $a = 1$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} M^*(s,a) = M^*(s,1) &+ \tfrac{\partial M^*(s,a)}{\partial a}|_{a=1}(a-1) \\ &+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 M^*(s,a)}{\partial^2 a}|_{a=1}(a-1)^2 + o((a-1)^2). \end{aligned} \tag{128}$$

С обзиром на (126), имамо да је

$$\frac{\partial M^*(s,1)}{\partial s} = \frac{sf^{*'}(s) - f^*(s)(1-f^*(s))}{s^2(1-f^*(s))^2}, \tag{129}$$

и

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 M^*(s,1)}{\partial^2 s} = \tfrac{1}{s^3(1-f^*(s))^3} \\ &\times \{2f^*(s)(1-f^*(s))^2 + [s^2 f^{*\prime\prime}(s) - 2f^{*\prime}(s)] \\ &[1-f^*(s)] + 2s^2[f^{*\prime}(s)]^2\}. \end{aligned} \tag{130}$$

Увођењем смене $u = \frac{s}{a}$ и диференцирањем по a обе стране једначине (96), добијамо

$$\frac{\partial M^*(s,a)}{\partial a} = f^*(s)\left\{-\frac{1}{a^2}M^*(u,a) - \frac{s}{a^3}\frac{\partial M^*(u,a)}{\partial u} + \frac{1}{a}\frac{\partial M^*(u,a)}{\partial a}\right\}. \tag{131}$$

Када уврстимо $a = 1$, једначина (131) помоћу (126) и (129) постаје

$$\tfrac{\partial M^*(s,a)}{\partial a}|_{a=1} = -\tfrac{f^*(s)}{1-f^*(s)}\left\{M^*(s,1) + s\tfrac{\partial M^*(s,1)}{\partial s}\right\} = \tfrac{f^*(s)f^{*\prime}(s)}{(1-f^*(s))^3}. \tag{132}$$

Даље, из (132) имамо да је

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 M^*(s,a)}{\partial a \partial s}|_{a=1} = -\tfrac{1}{(1-f^*(s))^4} \\ &\quad\times\{f^*(s)f^{*\prime\prime}(s)(1-f^*(s)) + [f^{*\prime}(s)]^2 + 2f^*(s)[f^{*\prime}(s)]^2\}. \end{aligned} \tag{133}$$

Поново, диференцирањем по a обе стране једначине (131), добијамо

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2 M^*(s,a)}{\partial a^2} = \\
&f^*(s)\left\{\tfrac{2}{a^3}M^*(u,a) + \tfrac{4s}{a^4}\tfrac{\partial M^*(u,a)}{\partial u} - \tfrac{2}{a^2}\tfrac{\partial M^*(u,a)}{\partial a}\right. \\
&\left. + \tfrac{s^2}{a^5}\tfrac{\partial^2 M^*(u,a)}{\partial u^2} - \tfrac{2s}{a^3}\tfrac{\partial^2 M^*(u,a)}{\partial a \partial u} + \tfrac{1}{a}\tfrac{\partial^2 M^*(u,a)}{\partial a^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{134}$$

Сада, заменом $a = 1$ у (134) имамо да је

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2 M^*(u,a)}{\partial a^2}|_{a=1} = \\
&\tfrac{f^*(s)}{1-f^*(s)}\left\{2M^*(s,1) - 2\tfrac{\partial M^*(s,a)}{\partial a}|_{a=1} + 4s\tfrac{\partial^2 M^*(s,1)}{\partial s}\right. \\
&\left. -2s\tfrac{\partial^2 M^*(s,a)}{\partial a \partial s}|_{a=1} + s^2\tfrac{\partial^2 M^*(s,1)}{\partial s^2}\right\} = \\
&\tfrac{f^*(s)}{[1-f^*(s)]^5}\left\{[sf^{*\prime\prime}(s) + 2f^{*\prime}(s)][1 - f^*(s)]^2 + \right. \\
&2[s[f^*(s)f^{*\prime\prime}(s) + (f^{*\prime}(s))^2] + f^*(s)f^{*\prime}(s)][1 - f^*(s)] + \\
&\left. 2s(f^{*\prime}(s))^2(1 + 2f^*(s))\right\}.
\end{aligned} \tag{135}$$

С друге стране, имамо следеће приближне развоје:

$$(1) f^*(s) = 1 - \lambda s + \tfrac{1}{2}(\lambda^2 + \sigma^2)s^2 - \tfrac{1}{6}\mu_3 s^3 + \tfrac{1}{24}\mu_4 s^4 + o(s^4), \tag{136}$$

$$(2) f^{*\prime}(s) = -\lambda + (\lambda^2 + \sigma^2)s - \tfrac{1}{2}\mu_3 s^2 + \tfrac{1}{6}\mu_4 s^3 + o(s^3), \tag{137}$$

$$(3) f^{*\prime\prime}(s) = (\lambda^2 + \sigma^2) - \mu_3 s + \tfrac{1}{2}\mu_4 s2 + o(s^2). \tag{138}$$

Заменом (136) − (138) редом у једначине (126), (132) и (135) добијамо

$$M^*(s,1) = \frac{1}{\lambda s^2} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2 s} + O(1), \tag{139}$$

$$\frac{\partial M^*(s,a)}{\partial a}|_{a=1} = \frac{1}{\lambda^2 s^3} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^3 s^2} + O(1), \tag{140}$$

и

$$\frac{\partial^2 M^*(s,a)}{\partial a^2}|_{a=1} =$$

$$\frac{4}{\lambda^3 s^4} + \frac{3(\sigma^2-\lambda^2)}{\lambda^4 s^3} + \frac{1}{6\lambda^5 s^2}[9(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 12\lambda^2\sigma^2 - 4\lambda\mu_3]$$

$$+\frac{1}{12\lambda^6 s}[(9\lambda^2+15\sigma^2)(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 4\lambda\mu_3(3\lambda^2+4\sigma^2) + 3\lambda^2\mu_4]$$

$$+O(1). \tag{141}$$

Даље, из једначине (128) следи да је:

$$M^*(s,a) = \frac{1}{\lambda s^2} + \frac{\sigma^2-\lambda^2}{2\lambda^2 s} + \left\{\frac{1}{\lambda^2 s^3} + \frac{\sigma^2-\lambda^2}{2\lambda^3 s^2}\right\}(a-1)$$

$$+(a-1)^2\left\{\frac{2}{\lambda^3 s^4} + \frac{3(\sigma^2-\lambda^2)}{2\lambda^4 s^3} + \frac{1}{12\lambda^5 s^2}[9(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 12\lambda^2\sigma^2 - 4\lambda\mu_3]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{24\lambda^6 s}[(9\lambda^2+15\sigma^2)(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 4\lambda\mu_3(3\lambda^2+4\sigma^2) + 3\lambda^2\mu_4]\right\}$$

$$+O(1) \tag{142}$$

Инверзијом једначине (142) можемо да добијемо приближан израз за $M(t,a)$, користећи Тауберовску[3] теорему која гласи:

$$\lim_{t\to+\infty} M(t,a) = \lim_{s\to 0} sM^*(s,a).$$

Теорема 3.5.1 *Ако је* $0 < a \leq 1$, *тада важи*

$$M(t,a) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\sigma^2-\lambda^2}{2\lambda^2} + \left\{\frac{t^2}{2\lambda^2} + \frac{(\sigma^2-\lambda^2)t}{2\lambda^3}\right\}(a-1)$$

$$+(a-1)^2\left\{\frac{t^3}{3\lambda^3} + \frac{3(\sigma^2-\lambda^2)t^2}{4\lambda^4} + \frac{t}{12\lambda^5}[9(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 12\lambda^2\sigma^2 - 4\lambda\mu_3]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{24\lambda^6}[(9\lambda^2+15\sigma^2)(\sigma^2+\lambda^2)^2 - 4\lambda\mu_3(3\lambda^2+4\sigma^2) + 3\lambda^2\mu_4]\right\}$$

$$+o(1). \tag{143}$$

Јасно је да се за $a = 1$ једначина (143) своди на (127).
Сада ћемо размотрити неке расподеле које се често срећу код тестирања дужине живота и у теорији поузданости.

(1) **Експоненцијална расподела**

[3] Alfred Tauber (1866-1942), Аустријски математичар

Претпоставимо да X_1 има експоненцијалну расподелу $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ са густином расподеле

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & , x > 0, \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Тада је:
$E[X_1] = \lambda$, $Var[X_1] = \lambda^2$, $\mu_k = E[X_1^k] = \lambda^k \Gamma(k+1)$, $k = 1, 2, ...$
Као последицу теореме 3.5.1 наводимо следећу последицу.

Последица 3.5.1 *Ако је* $0 < a \leq 1$ *и* X_1 *има експоненцијалну расподелу* $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, *тада*

$$M(t,a) = \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2}(a-1) + \frac{t^3}{3\lambda^3}(a-1)^2 + o(1). \tag{144}$$

(2) **Гама расподела**

Претпоставимо да X_1 има гама расподелу $\Gamma(\alpha, \beta)$ са густином расподеле

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & , x > 0, \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Тада је:
$E[X_1] = \frac{\alpha}{\beta}$, $Var[X_1] = \frac{\alpha}{\beta^2}$, $\mu_k = E[X_1^k] = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\beta^k \Gamma(\alpha)}$, $k = 1, 2, ...$ На основу теореме 3.5.1 добијамо следећу последицу.

Последица 3.5.2 *Ако је* $0 < a \leq 1$ *и* X_1 *има гама расподелу* $\Gamma(\alpha, \beta)$, *тада*

$$\begin{aligned} M(t,a) &= \tfrac{\beta t}{\alpha} + \tfrac{1-\alpha}{2\alpha} + \tfrac{\beta}{2\alpha^2}[\beta t^2 + (1-\alpha)t](a-1) \\ &+ \tfrac{1}{24\alpha^3}[8\beta^3 t^3 + 18(1-\alpha)\beta^2 t^2 + 2(1-\alpha)(1-5\alpha)\beta t \\ &+ (1-\alpha^2)](a-1)^2 + o(1). \end{aligned} \tag{145}$$

(3) **Вејбулова расподела**

Претпоставимо да X_1 има Вејбулову расподелу $W(\alpha, \beta)$ са густином расподеле

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} & , x > 0, \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Тада је:
$E[X_1] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$, $Var[X_1] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}$,
$\mu_k = E[X_1^k] = \frac{\Gamma\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{k}{\alpha}}}$, $k = 1, 2, ...$ На основу теореме 3.5.1 важи следећа последица.

Последица 3.5.3 *Ако је* $0 < a \leq 1$ *и* X_1 *има Вејбулову расподелу* $W(\alpha, \beta)$, *тада*

$$M(t,a) = \frac{\beta^{\frac{1}{\alpha}} t}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} + \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2} - 1$$

$$+\frac{1}{2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}\left\{\beta^{\frac{2}{\alpha}} t^2 + \frac{\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2 \beta^{\frac{1}{\alpha}} t\right\}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right\}(a-1)$$

$$+\frac{1}{24\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^3}\left\{8\beta^{\frac{3}{\alpha}} t^3 + \frac{18\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-2\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}\beta^{\frac{2}{\alpha}} t^2}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right.$$

$$+\frac{2\beta^{\frac{1}{\alpha}} t}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2}\left\{9\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\right]^2 - 12\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right] - 4\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)\right\}+$$

$$+\frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^3}\left\{\left[15\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - 6\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\right]^2\right]\right.$$

$$-4\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)\left[4\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\right]^2\right]$$

$$\left.\left.+3\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\right]^2\Gamma\left(1+\frac{4}{\alpha}\right)\right\}\right\}(a-1)^2 + o(1). \tag{146}$$

(4) **Логнормална расподела**

Нека X_1 има Логнормалну расподелу $LN(\mu, \tau^2)$ са густином расподеле

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau x}\exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\ln x - \mu)^2\right\} & , x > 0, \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

Тада је:
$\lambda = E[X_1] = e^{\mu + \frac{1}{2}\tau^2}$, $\sigma^2 = Var[X_1] = \lambda^2\left[e^{\tau^2} - 1\right]$,
$\mu_k = E[X_1^k] = \lambda^k e^{\frac{1}{2}k(k-1)\tau^2}$, $k = 1, 2, \ldots.$
На основу теореме 3.5.1 важи следећа последица.

Последица 3.5.4 *Нека је* $0 < a \leq 1$ *и нека* X_1 *има Логнорма-*

лну расподелу $LN(\mu, \tau^2)$, *при чему је* $\delta = e^{\tau^2}$. *Тада важи*

$$M(t,a) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\delta-2}{2} + \left\{ \frac{t^2}{2\lambda^2} + \frac{(\delta-2)t}{2\lambda} \right\} (a-1)$$

$$+ \left\{ \frac{t^3}{3\lambda^3} + \frac{3(\delta-2)t^2}{4\lambda^2} - \frac{t}{12\lambda}(4\delta^3 - 9\delta^2 + 12\delta - 12) \right. \tag{147}$$

$$\left. \frac{1}{24}(3\delta^6 - 16\delta^4 + 19\delta^3 - 6\delta^2) \right\} (a-1)^2 + o(1).$$

4 Статистички закључци о геометријском процесу

Уколико желимо да неки модел применимо на податке, намећу нам се три питања. Најпре, како проверавамо да су подаци у складу са моделом. Друго, ако подаци одговарају моделу, како да оценимо параметре тог модела. Треће питање је колико је добро модел усклађен са подацима. При коришћењу модела геометријског процеса за анализирање скупа података $\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}$, такође морамо да одговоримо на ова три питања. У овом поглављу ћемо дати одговоре на сва три питања.

4.1 Тестирање хипотеза за геометријски процес

Нека је дат случајни процес $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ који треба да тестирамо да ли је геометријски процес. У ту сврху формираћемо два низа случајних величина:

$$U_i = \frac{X_{2i}}{X_{2i-1}}, i = 1, 2, ..., \tag{148}$$

и

$$U_i' = \frac{X_{2i+1}}{X_{2i}}, i = 1, 2, ... \tag{149}$$

За фиксиран природан број m, формираћемо и следећа два низа случајних величина:

$$V_i = X_i X_{2m+1-i}, i = 1, 2, ..., m, \tag{150}$$

и

$$V_i' = X_{i+1} X_{2m+2-i} i = 1, 2, ..., m. \tag{151}$$

Следеће две теореме су кључне за тестирање да ли је неки случајни процес геометријски.

Теорема 4.1.1 *Ако је $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ геометријски процес, тада је сваки од низова $\{U_i, i = 1, 2, ...\}$ и $\{U_i', i = 1, 2, ...\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина.*

Теорема 4.1.2 *Ако је $\{X_i, i = 1, 2, ...\}$ геометријски процес, тада су за сваки фиксирани природан број m, $\{V_i, i = 1, 2, ..., m\}$ и $\{V_i', i = 1, 2, ..., m\}$ низови независних и једнако расподељених случајних величина.*

Да бисмо тестирали да ли је скуп података $\{X_i, i = 1, 2, ...,\}$ геометријски процес, уводимо следеће низове случајних величина.
(1) Ако је $n = 2m$ паран, тестираћемо:

$$\{U_i, i = 1, 2, ..., m\} \quad u \quad \{V_i, i = 1, 2, ..., m\} \tag{152}$$

(2) Ако је $n = 2m + 1$ непаран, тестираћемо:

$$\{U_i', i = 1, 2, ..., m\} \quad u \quad \{V_i, i = 1, 2, ..., m\} \tag{153}$$

или

$$\{U_i, i = 1, 2, ..., m\} \quad u \quad \{V_i', i = 1, 2, ..., m\} \tag{154}$$

У зависности од парности броја n, можемо да тестирамо да ли је скуп података $\{X_i, i = 1, 2, ...,\}$ геометријски процес, тестирањем да ли су низови случајних величина (152), (153) и (154) заиста низови независних и једнако расподељених случајних величина.

Нека је I_A индикатор догађаја A. Да бисмо тестирали да ли су случајне величине $\{W_i, i = 1, 2, ..., n\}$ независне и једнако расподељене, можемо да користимо следеће тестове.

(1) **Тест тачака заокрета.**
Дефинишимо:

$$T_W = \sum_{i=2}^{m-1} I_{[(W_i - W_{i-1})(W_{i+1} - W_i) < 0]} \tag{155}$$

Ако су $\{W_i, i = 1, 2, ..., n\}$ независне и једнако расподељене случајне величине, тада је приближно:

$$T(W) = \left[T_W - \frac{2(m-2)}{3}\right] / \left[\frac{16m - 29}{90}\right]^{\frac{1}{2}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \tag{156}$$

(2) **Тест знака разлике.**
Нека је

$$D_W = \sum_{i=2}^{m} I_{[W_i > W_{i-1}]}. \tag{157}$$

Ако су $\{W_i, i = 1, 2, ..., n\}$ независне и једнако расподељене случајне величине, тада је приближно:

$$D(W) = \left[D_W - \frac{m-1}{2}\right] / \left[\frac{m+1}{12}\right]^{\frac{1}{2}} \sim \mathcal{N}(0, 1). \tag{158}$$

4.2 Оцена параметара геометријског процеса

Да бисмо одговорили на друго питање, претпоставимо да скуп података $\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}$ јесте геометријски процес. Нека је

$$Y_i = a^{i-1} X_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{159}$$

Тада је $\{Y_i, i = 1, 2, ..., n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина, па је такав и низ $\{\ln Y_i, i = 1, 2, ..., n\}$. Заједничко очекивање и дисперзију ових случајних величина можемо редом да означимо са $\mu = E[\ln Y_i]$ и $\tau^2 = Var[\ln Y_i]$. Логаритмовањем обе стране једначине (159), добијамо

$$\ln Y_i = (i-1) \ln a + \ln X_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{160}$$

Са друге стране, можемо да напишемо

$$\ln Y_i = \mu + e_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{161}$$

где су e_i независне и једнако расподељене случајне величине са очекивањем 0 и дисперзијом τ^2. Тада (160) постаје

$$\ln X_i = \mu - (i-1) \ln a + e_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{162}$$

Добили смо регресиону једначину, коју је Лам решио методом најмањих квадрата и добио следеће оцене за μ, $\beta = \ln a$ и τ^2.

$$\hat{\mu} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (2n - 3i + 2) \ln X_i, \tag{163}$$

$$\hat{\beta} = \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (n - 2i + 1) \ln X_i \tag{164}$$

и

$$\hat{\tau^2} = \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \right)^2 - \frac{\hat{\beta}}{2} \sum_{i=1}^{n} (n - 2i + 1) \ln X_i \right\}. \tag{165}$$

Оцену параметра a добијамо из

$$\hat{a} = e^{\hat{\beta}}. \tag{166}$$

Означимо $\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1} - i$, $\bar{\hat{Y}} = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i / n$ и $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$. Тада су оцене добијене методом момената за λ и σ^2 редом

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \bar{\hat{Y}} & , a \neq 1, \\ \bar{X} & , a = 1, \end{cases} \tag{167}$$

и

$$\hat{\sigma^2} = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}}\right)^2 & ,a \neq 1, \\ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 & ,a = 1. \end{cases} \tag{168}$$

Очигледно је да су оцене $\hat{a}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma^2}$ непараметарске оцене. Оцена $\hat{a}$ за a може се добити минимизирањем суме квадрата грешака:

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln X_i - \mu + (i-1)\ln a\right]^2. \tag{169}$$

Друге непараметарске оцене за a и λ могу се добити директно минимизирањем суме квадрата грешака:

$$Q_D = \sum_{i=1}^{n}\left[X_i - a^{-(i-1)}\lambda\right]^2. \tag{170}$$

4.3 Асимптотске расподеле оцена

У овом одељку ћемо одговорити на треће питање одређивањем граничних расподела оцена $\hat{a}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma^2}$. Следеће четири теореме су објављене у раду Лам [6].

Теорема 4.3.1 *Ако је* $E\left[(\ln Y)^2\right] < \infty$*, тада важи*

$$n^{3/2}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathcal{N}(0, 12\tau^2). \tag{171}$$

Теорема 4.3.2 *Ако је* $E\left[(\ln Y)^2\right] < \infty$*, тада важи*

$$n^{3/2}(\hat{a} - a) \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathcal{N}(0, 12a^2\tau^2). \tag{172}$$

Као резултат, а на основу теорема 4.3.1 и 4.3.2, може да се тестира да ли је $a = 1$ или не. То је еквивалентно са тестом:

$$H_0 : \beta = 0 \text{ против } H_1 : \beta \neq 0.$$

На основу једначине (171) можемо да користимо следећу тест статистику:

$$R = n^{3/2}\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{12}\hat{\tau}}, \tag{173}$$

где је $\hat{\tau}$ добијено из (165). При нултој хипотези, тест статистика R има приближно $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу. Приметимо да је тестирање да ли је $a = 1$ еквивалентно тестирању да ли скуп података одговара процесу обнављања или хомогеном Пуасоновом процесу.

Други начин је да применимо Лапласов тест заснован на тест статистици

$$L = \frac{[12(n-1)]^{1/2}}{T_n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} T_i}{n-1} - \frac{T_n}{2}\right), \tag{174}$$

где је $T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$, $T_0 = 0$, а T_i је време када се десио $i-$ти догађај. При нултој хипотези $L \sim \mathcal{N}(0,1)$. Детаљније погледати Кокс и Луис [1].

Следеће две теореме описују граничне расподеле оцена $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma^2}$ редом.

Теорема 4.3.3

(1) *Ако је* $a \neq 1$, $E[Y^2] < \infty$ *и* $E[(\ln Y)^2] < \infty$, *тада*

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \to^L \mathcal{N}(0, \sigma^2 + 3\lambda^2\tau^2). \tag{175}$$

(2) *Ако је* $a = 1$ *и* $E[X^2] < \infty$, *тада*

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \to^L \mathcal{N}(0, \sigma^2). \tag{176}$$

Теорема 4.3.4

(1) *Ако је* $a \neq 1$, $E[Y^4] < \infty$ *и* $E[(\ln Y)^2] < \infty$, *тада*

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma^2} - \sigma^2) \to^L \mathcal{N}(0, \omega^2 + 12\sigma^4\tau^2), \tag{177}$$

где је $\omega^2 = Var(Y-\lambda)^2$.
(2) *Ако је* $a = 1$ *и* $E[X^4] < \infty$, *тада*

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma^2} - \sigma^2) \to^L \mathcal{N}(0, \omega^2), \tag{178}$$

где је $\omega^2 = Var(X-\lambda)^2$.

Коришћењем теорема 4.3.1-4.3.4 могу се одредити $p-$вредности за оцене или приближне интервале поверења параметара a, λ и σ^2. У пракси, вредност непознатог параметра може да се замени његовом оценом. На пример, из једначине (172) приближан 95% интервал поверења за a је:

$$(\hat{a} - 1.96\sqrt{12}\hat{a}\hat{\tau}n^{-3/2}, \hat{a} + 1.96\sqrt{12}\hat{a}\hat{\tau}n^{-3/2}). \tag{179}$$

5 Примена модела геометријских процеса

Лам је први увео модел геометријског процеса код проблема одржавања сложених система чије се стање погоршава. У овом поглављу ћемо описати неке моделе геометријских процеса за одржавање система са једном компонентом.

5.1 Модел геометријских процеса у одржавању система

Нека је, на пример, систем који посматрамо машина у фабрици. У том случају, догађаји који нас занимају су кварови посматране машине. Када до квара дође, потребно је време да се он отклони. Време потребно за поправку се временом може повећавати због дотрајалости делова. Са друге стране, време поправке се може и смањивати уколико старе делове замењујемо новим, савременијим деловима или због искуства радника који раде на поправци.

Модел је заснован на следећим претпоставкама:
Претпоставка 1. На почетку је систем нов. Сваки пут када дође до квара система, биће поправљен. Стратегија замене N се примењује тако што се систем замењује новим тек након $N-$тог квара.
Претпоставка 2. Нека је X_1 време рада система након поправке. Уопште, нека је за $n > 1$ X_n време рада система након $(n-1)-$ве поправке. Тада је $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са $E(X_1) = \lambda > 0$ и коефицијентом a. Даље, нека је Y_n дужина поправке система након $n-$тог квара. Тада је $\{Y_n, n = 1, 2, ...\}$ геометријски процес са $E(Y_1) = \mu \geq 0$ и коефицијентом b. Нека је Z време замене за које је $E(Z) = \tau$.
Претпоставка 3. Нека је r оперативни добитак, а цена поправке c. Трошкови замене се састоје од два дела: први део је основна цена замене R, а други део је пропорционалан времену замене Z и изноци c_p.

Додатна претпоставка је једна од следеће две.

Претпоставка 4. $a \geq 1$ и $0 < b \leq 1$.
Претпоставка 4′. $0 < a \leq 1$ и $b \geq 1$, осим када је $a = b = 1$.

Под претпоставкама $1-4$ добијамо модел геометријских процеса за одржавање система чије се стање погоршава, док под претпоставкама $1-3$ и $4'$ добијамо модел геометријских процеса за одржавање система чије се стање побољшава.

Најпре објаснимо мотивацију увођења модела геометријских процеса. У пракси, стање многих система се погоршава због старења и оштећења, па се узастопне дужине времена рада система смањују, док се узастопна трајања поправке након квара повећавају. Одатле се, код система чије се стање погоршава, узастопно време рада може моделирати опадајућим геометријским процесом, док се узастопна времена поправки могу моделирати растућим геометријским прцесом. У овом случају, полазимо од претпоставки $1-4$ и имамо модел геометријских процеса за систем чији се рад погоршава.

Са друге стране, у стварном животу постоје системи чији се рад временом побољшава. На пример, узастопно време рада система након поправке се може продужити, јер радник стиче радно искуство, или се приликом поправке покварени делови замењују савременијим. Дужина трајања поправке може да се смањи, јер је радник који ради на поправци све боље упознаје систем, па се у многим случајевима поправка своди на замену неких делова. Код система чије се стање побољшава, узастопно време рада система се може моделирати растућим геометријским процесом, док се узастопна времена поправки могу моделирати опадајућим геометријским процесом. У овом случају, полазимо од претпоставки $1-3$ и $4'$, и тако добијамо модел геометријских процеса за систем чије се стање побољшава.

Даље, објаснићемо разлоге коришћења стратегије замене N. У литератури постоје две врсте стратегије замене система. Једна од њих је стратегија T према којој се систем ремонтује након истека времена T. Друга је стратегија N према којој се систем ремонтује након $N-$тог квара. Интересантно је упоредити ове две стратегије. Испитивањем дугорочне просечне цене по јединици времена, Стађ[4] и Закерман[5] 1990. године и Лам 1991. године, су показали да је оптимална стратегија замене N^* добра колико и оптимална стратегија замене T^*. Такође, Лам је 1992. године доказао да за укупне очекиване трошкове важи исти закључак. Примена стратегије N је погоднија од стратегије T,

[4]Wolfgang Stadje, немачки математичар

[5]Dror Zuckerman, израелски математичар

па ћемо у нашем моделу користити стратегију N.

Као један део трошкова замене, основна цена замене R укључује цену производње новог дела, административне трошкове и трошкове транспорта. Они су очигледно независни од времена замене Z.Осим цене R, други део трошкова замене, као што су плате и потрошња енергије, биће пропорционални времену замене Z.

Кажемо да је циклус завршен ако је обављена замена. Циклус је заправо временски интервал између инсталирања система и његове прве замене или време између две узастопне замене. Узастопни циклуси заједно са трошковима насталим током сваког циклуса представљају процес обнављања добитка. Применом теореме 1.2.9, дугорочна просечна цена по јединици времена је дата са:

$$\frac{\textit{очекивани трошкови током циклуса}}{\textit{очекивана дужина циклуса}}.$$

Под претпоставкама $1-3$ и користећи стратегију замене N, просечан трошак је:

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{E\Big(c\sum_{k=1}^{N-1} Y_k - r\sum_{k=1}^{N} X_k + R + c_p Z\Big)}{E\Big(\sum_{k=1}^{N} X_k + \sum_{k=1}^{N-1} Y_k + Z\Big)} \\ &= \frac{c\mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} - r\lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a^k-1} + R + c_p\tau}{\lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a^k-1} + \mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} + \tau} \qquad (180) \\ &= A(N) - r, \end{aligned}$$

где је

$$A(N) = \frac{(c+r)\mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} + R + c_p\tau + r\tau}{\lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a^k-1} + \mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} + \tau}. \qquad (181)$$

Сада нам је циљ да одредимо оптималну стратегију замене која минимизира $C(N)$ или $A(N)$. Да бисмо то урадили, најпре ћемо да израчунамо разлику $A(N+1)$ и $A(N)$.

$$A(N+1) - A(N) =$$

$$= \frac{(c+r)\mu\Big\{\lambda\Big(\sum_{k=1}^{N} a^k - \sum_{k=1}^{N-1} b^k\Big) + \tau a^N\Big\} - (R + c_p\tau + r\tau)(\lambda b^{N-1} + \mu a^N)}{a^N b^{N-1}\Big[\lambda\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a^k-1} + \mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} + \tau\Big]\Big[\lambda\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{a^k-1} + \mu\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{b^k-1} + \tau\Big]} \qquad (182)$$

Пошто је именилац разломка $A(N+1) - A(N)$ увек позитиван, јасно је да је његов знак једнак знаку бројиоца.
Дефинишимо помоћну функцију

$$\begin{aligned} g(N) &= g(N, a, b, \lambda, \mu, \tau, r, c, R, c_p) \\ &= \tfrac{(c+r)\mu\left\{\lambda\left(\sum_{k=1}^{N} a^k - \sum_{k=1}^{N-1} b^k\right) + \tau a^N\right\}}{(R + c_p\tau + r\tau)(\lambda b^{N-1} + \mu a^N)}. \end{aligned} \tag{183}$$

Као резултат имамо следећу лему.

Лема 5.1.1

$$A(N+1) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} A(N) \Leftrightarrow g(N) \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1. \tag{184}$$

Лема 5.1.1 показује да се монотоност функције $A(N)$ може одредити на основу вредности функције $g(N)$.

Како су ови закључци изведени под претпоставкама $1-3$, то они важе и за системе чије се стање погоршава и за системе чије се стање побољшава.

Размотримо сада модел геометријског процеса за одржавање система у ком се примењују две стратегије замене (T, N). Овакав модел први је разматрао Занг 1994. године. У оваквом систему до ремонта долази или после истека времена T или након $N-$тог квара, у зависности од тога шта се прво догоди. Уколико у овом систему важе претпоставке $1-3$ и ако претпоставимо да су $\{X_n, n = 1, 2, ...\}$ и $\{Y_n, n = 1, 2, ...\}$ два независна случајна процеса, можемо да одредимо просечан трошак на сличан начин. У ту сврху уведимо:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad U_0 = 0 \quad u \quad V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad V_0 = 0. \tag{185}$$

Нека је W дужина циклуса. Тада је

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} (T + V_i) I_{\{U_i < T \leq U_{i+1}\}} + (U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} + Z, \tag{186}$$

где је I_A индикатор догађаја A. Претпоставимо да су време рада и време поправке непрекидни. Тада је

$$E(W) = E\left(\sum_{i=1}^{N-1}(T+V_i)I_{\{U_i<T\le U_{i+1}\}} + (U_N+V_{N-1})I_{\{U_N<T\}} + Z\right)$$

$$= E(TI_{\{T\le U_N\}}) + \sum_{i=1}^{N-1} E(V_i)E(I_{\{U_i<T\le U_{i+1}\}})$$

$$+E((U_N+V_{N-1})I_{\{U_N<T\}}) + \tau$$

$$= E(TI_{\{T\le U_N\}}) + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}\right)(F_i(T)-F_{i+1}(T))$$

$$+E\left\{E\left[(U_N+V_{N-1})I_{\{U_N<T\}}|U_N\right]\right\} + \tau$$

$$= T\bar{F}(T) + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}(F_j(T)-F_N(T))$$

$$+\int_0^T E(U_N+V_{N-1}|U_N=u)dF_N(u) + \tau$$

$$= T\bar{F}(T) + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}F_j(T) - T\bar{F}(T) + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}F_N(T)$$

$$+\int_0^T udF_N(u) + E(V_{N-1})\int_0^T dF_N(t) + \tau$$

$$= \int_0^T \bar{F}_N(u)du + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}F_j(T) + \tau, \tag{187}$$

пошто је $E(V_i) = \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}}$ и $\{X_n, n=1,2,...\}$ и $\{Y_n, n=1,2,...\}$ су независни случајни процеси. С друге стране очекивани трошкови унутар циклуса могу се изразити као

$$cE\left[\sum_{i=1}^{N-1}V_iI_{\{T\le U_N\}} + V_{N-1}I_{\{U_N<T\}}\right]$$

$$-rE\left[TI_{\{T\le U_N\}} + U_NI_{\{U_N<T\}}\right] + R + c_pE(Z) \tag{188}$$

$$= c\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu}{\beta^{j-1}} - r\int_0^T \bar{F}_N(u)du + R + c_p\tau.$$

Дакле, просечни трошкови при стратегији замене (T,N) су

$$C(T,N) = \frac{c\mu\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\beta^{j-1}}F_j(T) - r\int_0^T\bar{F}_N(u)du + R + c_p\tau}{\int_0^T\bar{F}_N(u)du + \mu\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\beta^{j-1}}F_j(T)+\tau}. \tag{189}$$

Приметимо да стратегију замене N можемо посматрати као (∞, N), а стратегију замене T као (T,∞), одакле следи да је стратегија (T,N) бар једнако добра колико и оптималне стратегије N^* и T^*.

5.2 Оптимална стратегија замене

У овом одељку ћемо одредити оптималну стратегију замене N^* која минимизира $C(N)$ за систем чије се стање погоршава или $A(N)$ за систем који се побољшава. Дефинишимо најпре функцију

$$h(N) = \lambda b^{N-1} + \mu a^N.$$

Тада на основу (183) имамо да важи

$$g(N+1) - g(N) =$$

$$\frac{(c+r)\mu}{(R+c_p\tau+r\tau)h(N)h(N+1)} \Big\{ \lambda^2 b^{N-1}(1-b) \sum_{k=1}^{N} a^k + \lambda^2 b^{N-1}(a^{N+1}-b)$$

$$\lambda\mu a^N(a-b^N) + \lambda\mu a^N(a-1) \sum_{k=1}^{N-1} b^k + \lambda\tau a^N b^{N-1}(a-b) \Big\}. \tag{190}$$

Размотрићемо два различита модела.

5.2.1 Модел под претпоставкама $1-4$

Ово је модел система чије се стање погоршава. Из једначине (190) и претпоставке 4 имамо следећу лему.

Лема 5.2.1 *Функција $g(N)$ је неопадајућа по N.*

Лема 5.1.1 заједно са лемом 5.2.1 даје аналитички израз за оптималну стратегију замене N^*.

Теорема 5.2.1 *Оптимална стратегија замене N_d^* за систем чије се стање погоршава је дата са*

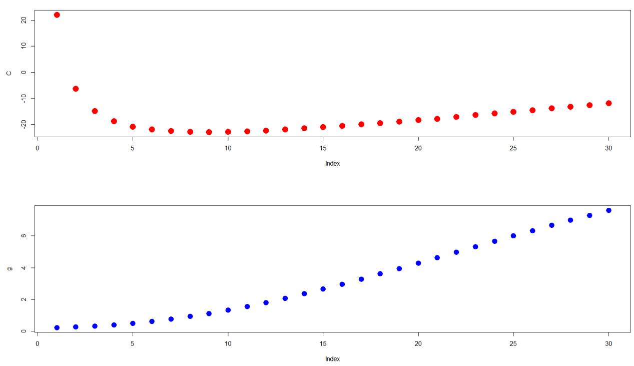
$$N_d^* = min\left\{N | g(N) = g(N, a, b, \lambda, \mu, \tau.r, c, R, c_p) \geq 1\right\}. \tag{191}$$

Оптимална стратегија замене N_d^* је јединствена ако и само ако је $g(N_d^*) > 1$.

Пример. Одредити оптималну стратегију замене за систем који се погоршава ако су његови параметри: $a = 1.05$, $b = 0.95$, $R = 3000$, $\lambda = 40$, $\mu = 15$, $c = 10$, $r = 50$, $c_p = 10$ и $\tau = 10$. Добијени резултати су дати у следећој табели.

N	C(N)	g(N)	N	C(N)	g(N)	N	C(N)	g(N)
1	22.0000	0.2354	11	-22.6116	1.5565	21	-17.8695	4.6345
2	-6.3510	0.2710	12	-22.3166	1.8050	22	-17.0663	4.9794
3	-14.8933	0.3268	13	-21.9524	2.0716	23	-16.4336	5.3236
4	-18.7671	0.4035	14	-21.5328	2.3545	24	-15.7935	5.6655
5	-20.8101	0.5020	15	-21.0682	2.6520	25	-15.1481	6.0037
6	-21.9437	0.6227	16	-20.5666	2.9622	26	-14.4991	6.3368
7	-22.5571	0.7657	17	-20.0344	3.2832	27	-13.8480	6.6638
8	-22.8432	0.9311	19	-19.4766	3.6129	28	-13.1966	6.9838
9	**-22.9089**	**1.1185**	19	-18.8976	3.9494	29	-12.5460	7.2958
10	-22.8181	1.3272	20	-18.3008	4.2905	30	-11.8978	7.5994

Следећа слика представља графички приказ података наведених у табели.



Дакле, систем чије се стање погоршава не треба поправљати док се не поквари.

5.2.2 Модел под претпоставкама $1-3$ и $4'$

Овај модел се користи за моделе чије се стање побољшава. Због претпоставке $4'$, уместо леме 5.2.1 важи следећа лема.

Лема 5.2.2 *Функција $g(N)$ је опадајућа по N.*

Слично као у претходном моделу, на основу лема 5.1.1 и 5.2.2 важи следећа теорема.

Теорема 5.2.2 *Под претпоставкама $1-3$ и $4'$, стратегија замене $N_i^* = \infty$ је јединствена оптимална стратегија замене за систем који се побољшава.*

Доказ.
Како је $g(N)$ опадајућа по N, постоји природан број N_i такав да је

$$N_i = min\left\{N|g(N) \leq 1\right\}. \tag{192}$$

Другим речима, важи:

$$g(N) > 1 \Leftrightarrow N < N_i,$$

и

$$g(N) \leq 1 \Leftrightarrow N \geq N_i.$$

На основу леме 5.1.1 знамо да су $C(N)$ и $A(N)$ унимодалне са N и достижу максимум у N_i. Користећи једначину (180) и претпоставку $4'$, лако се проверава да је минимум од $C(N)$ дат са

$$minC(N) = min\left\{C(1), C(\infty)\right\} = min\left\{\frac{R + c_p\tau - r\lambda}{\lambda + \tau}, -r\right\} = -r. \tag{193}$$

Дакле, $N_i^* = \infty$ је јединствена оптимална стратегија замене за систем који се побољшава. Овим је доказ завршен. ■

Опште је познато да за систем који се побољшава важи да је све бољи што је старији. То значи да ћемо систем поправљати тек када дође до квара, без претходне поправке. Теорема 5.2.2 је у складу са овим.

6 Закључак

У овом раду је приказана посебна класа случајних процеса, такозваних геометријских процеса. Геометријски процес представља уопштење Пуасоновог процеса, као и процеса обнављања. Због њихове велике примене у пракси, теоријски су веома изучавани. У раду је, такође, приказана и статистичка анализа геометријског процеса. Као неке од примена овог процеса, наведена је примена у одржавању система који се погоршавају или побољшавају.

Литература

[1] Cox, D. R. and Lewis, P. A. (1996), *The Statistical Analysis of Series of Events*, Mathuen, London.

[2] Lam, Y. (1988a) *A note on the optimal replacment problem.* Advances in Applied Probability, 20, 479-782.

[3] Lam, Y. (1988b) *Geometric processes and replacment problem.* Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 4, 366-377.

[4] Lam, Y. (1991a) *A replacment model for repairable deteriorating system.* Asia-Pacific Journal of Operational Research, 8, 119-127.

[5] Lam, Y. (1991b) *Optimal policy for a general repair replacement: average reward case.* IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry , 3, 117-129.

[6] Lam, Y. , Zhu, L. X. , Chan, S. K. and Liu, Q. (2004) *Analisys of data from a series of events by a geometric process model.* Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 20, 263-282.

[7] Lam, Y. (2006) *Geometric process.* Encyclopedia of Statistical Sciences, 2nd edition, Balakrishnan, N. , Read. C. B. , Kotz, S. and Vidakovic, B. , ed. John Wiley & Sons, Inc. , New York, to appear.

[8] Lam, Y. (2007) *The geometric process and its applications.* The University of Hong Kong & Northeastern University of Qinhuangdao, China.

[9] Ross, S. M. (1996) *Stochastic Processes*, 2nd edition, Wiley, New York.

[10] Stadje, W. , and Zuckerman, D. (1990) *Optimal strategies for some repair replacements models.* Advances in Applied Probability, 22, 641-656.

[11] Wang, G. J. and Zhang, Y. L. (2006) *Optimal periodic preventive repair and replacement policy assuming geometric process repair.* IEEE Transactions on Reliability, 55, 118-122.

Биографија

Рођена сам у Смедеревској Паланци 8.6.1991. године, где сам завршила ОШ Херој Иван Мукер 2006. године и Паланачку гимназију 2010. године. Основне студије сам завршила на Математичком факултету Универзитета у Београду 2014. године, на смеру статистика, актуарство и финансије. Добитник сам две Вукове дипломе. Тренутно запослена као наставник математике у Паланачкој гимназији.