Математички факултет у Београду

„НИЗАЊЕ" РАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА
ПО СТЕРН-БРОКОТУ, КАЛКИН-ВИЛФУ И ФЕРИЈУ

Студент : Јелена Вилотијевић Павловић

Ментор : Зоран Петровић

Година : 2015

Садржај :

1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Најпре ћемо дефинисати пребројиве скупове.

Дефиниција 1: За скуп X кажемо да је коначан, ако за неки природан број n, постоји бијекција $f : X \to n$.

Природан број који је у бијекцији са скупом X (ако постоји такав природан број) је јединствен и пишемо $|X| = n$. Кажемо да скуп X има n елемената.

Дефиниција 2: За скуп кажемо да је бесконачан ако није коначан.

(Алтернативна дефиниција : Скуп је бесконачан ако постоји бијекција између тог скупа и неког његовог правог подскупа)

Став 11: Нека је X коначан скуп и A прави подскуп од X. Тада не постоји бијекција између X и A.

Последица 1 : Скуп природних бројева $(\mathbb{N})$ је бесконачан, следи из става 1_1 јер је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, дефинисана са $f(n) = n+1$ успоставља бијекцију између скупа $\mathbb{N}$ и његовог правог подскупа $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

Дефиниција 3: За скуп X кажемо да је пребројив, уколико постоји бијекција $f : X \to \mathbb{N}$

То значи да је пребројив скуп онај чија је кардиналност (тј. број елемената) једнака кардиналности неког подскупа скупа $\mathbb{N}$.
Овај термин је увео *Georg Kantor* , потиче из чињенице да за бројање користимо природне бројеве.

Пребројиве скупове можемо замислити као неки скуп чије елементе можемо поређати у низ. Дакле пребројиве скупове можемо преуредити тако да имамо тачно један први елемент, тачно један други, тачно један трећи елемент итд. као код природних бројева $\{1, 2, 3, ...\}$.

Када знамо да је скуп коначан или пребројив, кажемо да је највише пребројив скуп.

Примери пребројивих скупова:

- Скуп природних бројева $(\mathbb{N})$ - да би био пребројив мора бити еквипотентан самом себи а из рефлексивности еквипотенције следи $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$
- Скуп свих парних бројева
- Скуп целих бројева
- Скуп рационалних бројева

За рационалне бројеве, треба да нађемо бијекцију која ће рационалне бројеве ,, слагати у низ'' , односно додељивати им слике или места из скупа $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ како би показали да су и они пребројиви.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5}
\end{array}
$$

Покушаћемо да ,,нанижемо'' све рационалне бројеве (позитивне)

$$\left.\begin{array}{l}
1 \mapsto \frac{1}{1} \\[2ex]
2 \mapsto \frac{1}{2} \\[2ex]
3 \mapsto \frac{2}{1} \\[2ex]
4 \mapsto \frac{1}{3} \\[2ex]
5 \mapsto \frac{2}{2} = 1 \\[2ex]
6 \mapsto \frac{3}{1} \\[2ex]
7 \mapsto \frac{1}{4} \\[2ex]
8 \mapsto \frac{2}{3} \\[2ex]
9 \mapsto \frac{3}{2} \\[2ex]
10 \mapsto \frac{4}{1} \\[2ex]
11 \mapsto \frac{1}{5} \\[2ex]
12 \mapsto \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\[2ex]
13 \mapsto \frac{3}{3} = 1 \\[2ex]
14 \mapsto \frac{4}{2} = \frac{2}{1}
\end{array}\right\} \longmapsto$$

Видимо да $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{+}$ није ,, $1-1$ '', отуда није бијекција.

Ако бисмо изостављали елементе који се понављају, нарушили би елеганцију решења.

У потрази за бијекцијом између $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}^+$ доказаћемо став :

Став 1_2 ; Скуп $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ је пребројив скуп.

Представимо скуп $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ овако:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(0,0) & & (0,1) & & (0,2) & & (0,3) & \ldots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,2) & & (1,3) & \ldots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & (2,2) & & (2,3) & \ldots & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(3,0) & & (3,1) & & (3,2) & & (3,3) & \ldots & \\
. & \swarrow & . & \swarrow & . & \swarrow & . & . & \\
. & & . & & . & & . & & .
\end{array}
$$

Покушаћемо да успоставимо бијекцију између скупа $\mathbb{N}$ и скупа $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на следећи начин :

$$
\begin{array}{c}
0 \leftrightarrow (0,0) \\
1 \leftrightarrow (0,1) \\
2 \leftrightarrow (1,0) \\
3 \leftrightarrow (0,2) \\
4 \leftrightarrow (1,1) \\
5 \leftrightarrow (2,0) \\
. \\
. \\
.
\end{array}
$$

Стрелице указују на поступак како „ пребројавамо” елементе : када завршимо са једном дијагоналом, прелазимо на прву суседну са десне стране. Питамо се како сада пронаћи формулу која успоставља ову бијекцију.

Конструисаћемо тражену бијекцију $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Прва дијагонала има само један елемент: $(0,0)$, друга дијагонала има 2 елемента: $(0,1)$ и $(1,0)$, трећа дијагонала има 3 елемента , итд.

Где се слика елемент (i,j) ?

Пошто се почиње од нуле, редни број дијагонале на којој се наш елемент налази јесте $i+j$. Сви елементи са дијагонала нижег реда $0,1,2,...,$ до $i+j-1$ долазе пре (i,j) елемента као и следећи елементи:

$(0,i+j)$, $(1,i+j-1)$, ... , $(i-1,j+1)$

Да закључимо - Број елемената испред елемента (i,j) је :

$$1+2+3+....+(i+j)+i \ =\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+i$$

Како пребројавање почиње од 0, то је редни број елемената (i,j) баш горе наведени број.

Конструисали смо функцију $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, можемо је дефинисати са формулом:

$$g(i,j):=\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+i$$

Доказаћемо да је овако дефинисана функција g (задата горњом формулом) заиста бијекција између $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$.

- Доказ да је функција g „на”

Нека је $m\in\mathbb{N}$ произвољан елемент. Ако посматрамо вредности функције $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, дефинисане са

$$h(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

видимо да је $h(n)>m$, за довољно велико n (довољно је узети $n=m+1$) .

Нека је n_0 најмањи природан број за који важи $h(n_0)>m$.

Тада је $h(n_o-1)\le m$ (приметимо да је $n_0\ne 0$, јер је за све m , $h(0)=0\le m$).

Нека је $i=m-h(n_0-1)$, а $j=n_0-1-i$. Поставља се питање да ли је j добро дефинисан тј. да ли је $n_0-1\ge i$.

Уколико би било $i > n_0 - 1$, то бисмо имали $m - h\left(n_0 - 1\right) > n_0 - 1$ из чега следи

$$\begin{aligned} m > h\left(n_0 - 1\right) + n_0 - 1 &= \frac{\left(n_0 - 1\right)n_0}{2} + n_0 - 1 \\ &= \frac{\left(n_0 - 1\right)\left(n_0 + 2\right)}{2} \end{aligned}$$

Међутим,

$$\frac{\left(n_0 - 1\right)\left(n_0 + 2\right)}{2} = \frac{n_0^{\ 2} + n_0 - 2}{2} = \frac{n_0\left(n_0 + 1\right)}{2} - 1$$

па бисмо добили $m + 1 > h\left(n_0\right)$, тј $m \geq h\left(n_0\right)$, што је у супротности са полазном претпоставком око избора броја n_0 . Дакле , заиста је $i \leq n_0 - 1$ и j добро дефинисано.

Израчунајмо сада $g\left(i, j\right)$

$$\begin{aligned} g\left(i, j\right) &= g\left(i, n_0 - 1 - i\right) \\ &= \frac{\left(i + \left(n_0 - 1 - i\right)\right) \cdot \left(i + \left(n_0 - 1 - i\right) + 1\right)}{2} + i \\ &= h\left(n_0 - 1\right) + m - h\left(n_0 - 1\right) \\ &= m \end{aligned}$$

Дакле, одавде следи да функција g је „на”

- Доказ да је функција g „1-1”

Нека је $g\left(i, j\right) = g\left(i_1, j_1\right)$. Увешћемо ознаке $n = i + j$ и $n_1 = i_1 + j_1$.

Ако је $n \neq n_1$, тада је $n > n_1$ или $n < n_1$. Посматрамо случај када је нпр. $n > n_1$. Тада

$$\begin{aligned} g\left(i_1, j_1\right) &= g\left(i, j\right) \\ &= h\left(n\right) + i \\ &\geq h\left(n_1 + 1\right) + i \\ &= \frac{\left(n_1 + 1\right)\left(n_1 + 2\right)}{2} + i \\ &= \frac{n_1\left(n_1 + 1\right)}{2} + n_1 + 1 + i \end{aligned}$$

$$= h(n_1) + n_1 + 1 + i$$

$$= h(n_1) + i_1 + j_1 + 1 + i$$

$$> h(n_1) + i_1$$

$$= g(i_1, j_1)$$

Према томе, не може бити $n > n_1$. Наравно да не може бити ни $n_1 > n$, те закључујемо да је $n = n_1$. Тада заменом у формули добијамо:

$$h(n) + i = g(i, j) = g(i_1, j_1) = h(n_1) + i_1$$

односно да је $i = i_1$, из чега следи да је $j = j_1$, те је функција g и „1-1"

Дефиниција 4: За скуп кажемо да је непребројив, ако није највише пребројив.

Односно, за скуп који није ни коначан ни пребројив кажемо да је непребројив.

Пример скуп реалних бројева $\mathbb{R}$.

2. ПРИНЦИПИ „НИЗАЊА” РАЗЛОМАКА

Постоје 3 добро позната низа који се користе за пребројавање рационалних бројева :

- $Stern-Brocot$ низ $\left(SB_n\right)$
- $Calkin-Wilf$ низ $\left(CW_n\right)$
- $Farey$ низ $\left(F_n\right)$

Показаћемо, да се сва три низа могу образовати слева на десно, користећи скоро идентичне рекурентне релације.

$Stern-Brocot$ (SB) и $Calkin-Wilf$ (CW) низови формирају комплетно бинарно дрво као на слици :

$$\frac{a}{b} \qquad\qquad\qquad \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+c}{b+d}$$

$Stern\text{-}Brocot$ $(S-B)$ правило

и :

$$\frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{p+q} \qquad\qquad\qquad \frac{p+q}{q}$$

$Calkin-Wilf$ $(C-W)$правило

На оба начина, добијено дрво има пуно занимљивих алгебарских, комбинаторних, рачунских и геометријских особина. Ми ћемо се фокусирати на низове и како то формирано дрво приказати као низ.

- Stern-Brocot **низ** (SB_n)

Да бисмо објаснили образовање *Stern-Brocot* низа (SB), прво морамо дефинисати неке појмове:

<u>Дефиниција 5:</u>

Два разломка $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ се зову „**суседни**" ако важи $b \cdot c - a \cdot d = 1$.

Суседни разломци су обавезно скраћени односно највећи заједнички делилац $nzd(a,b) = nzd(c,d) = 1$. (Именилац и бројилац сваког разломка су узајамно прости , нескративи)

Нови разломак за ове разломке $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ јесте $\frac{a+c}{b+d}$ и назива се „**медијанта**".

Кратак рачун показује да, ако су $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ суседни, тада $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ јесте пар упарених суседних разломака који је такође скраћен.

<u>Доказ :</u> Показаћемо да је $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &\Leftrightarrow a \cdot (b+d) < b \cdot (a+c) \\ &\Leftrightarrow a \cdot b + a \cdot d < a \cdot b + b \cdot c \\ &\Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}\end{aligned}$$

На исти начин, може се показати да је: $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Како је : $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$,

тада је : $b \cdot (a+c) - a \cdot (b+d)$

$$= b \cdot a + b \cdot c - a \cdot b - a \cdot d$$

$$= \underbrace{b \cdot a - a \cdot b}_{0} + \underbrace{(b \cdot c - a \cdot d)}_{1} = 1$$

- Крај доказа

$Stern - Brocot$ низови (SB_n) су дефинисани рекурзивно.

$$SB_0 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right] ,$$

при чему су 0 и ∞ представљени као скраћени разломци, док се низ SB_n добија из SB_{n-1} убацивањем медијанте између узастопних разломака.

Следи :

$$SB_1 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0} \right] ,$$

$$SB_2 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0} \right] ,$$

$$SB_3 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0} \right] ,$$

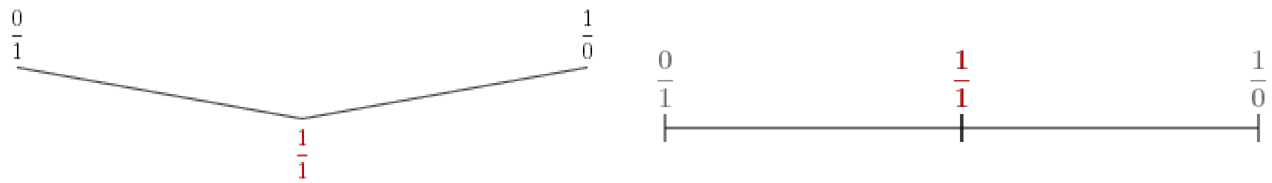
$$SB_4 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0} \right] ,$$

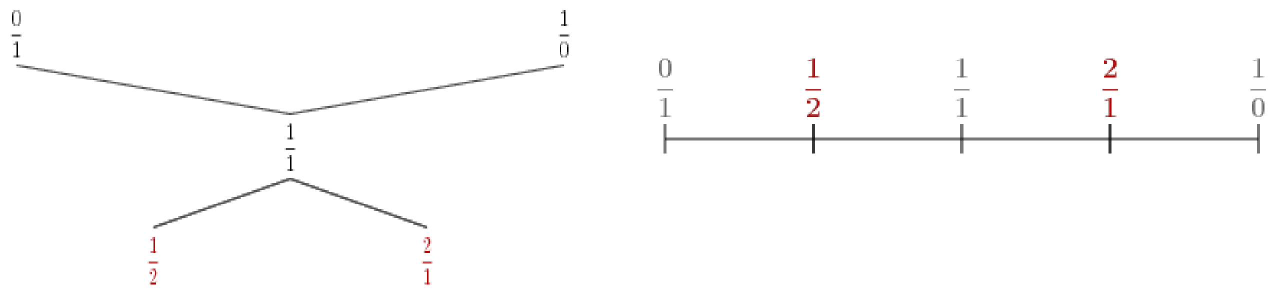
$$SB_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{0} \right]$$

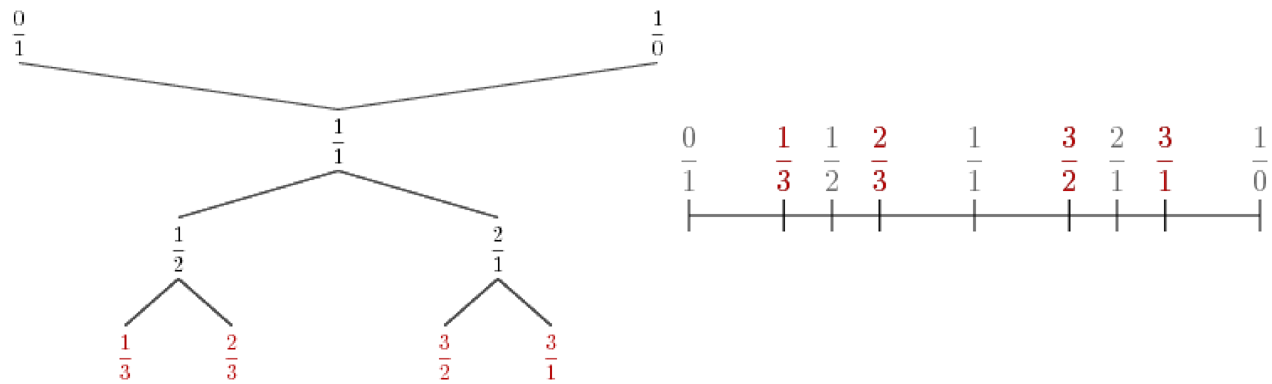
Број чланова SB_n низа јесте $|SBn| = 2^n + 1$. То следи из чињенице да је 2^{n-1} медијанти уметнуто у претходни низ SB_{n-1} до форме SB_n .

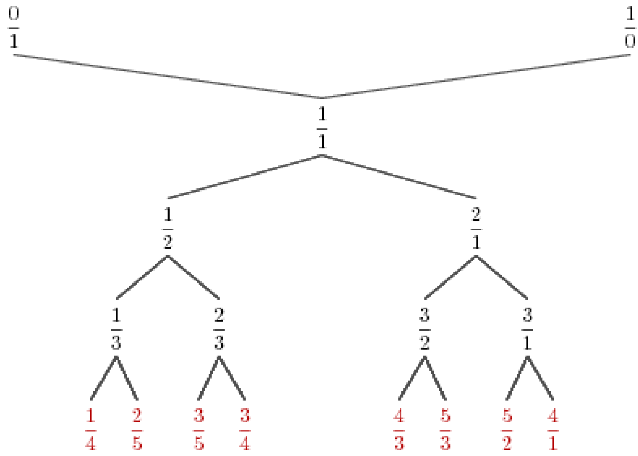
Показаћемо како се конструише *Stern – Brocot* дрво корак по корак почев од $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$ (који нису рационални али су згодни да представимо бесконачност)

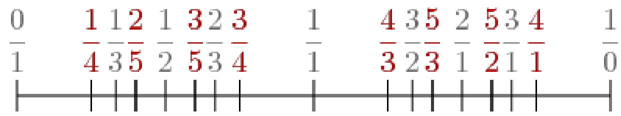
Наставићемо да конструишемо дрво формирајући следећи ниво убацивањем медијанте између свака два узастопна рационална броја који су већ у дрвету

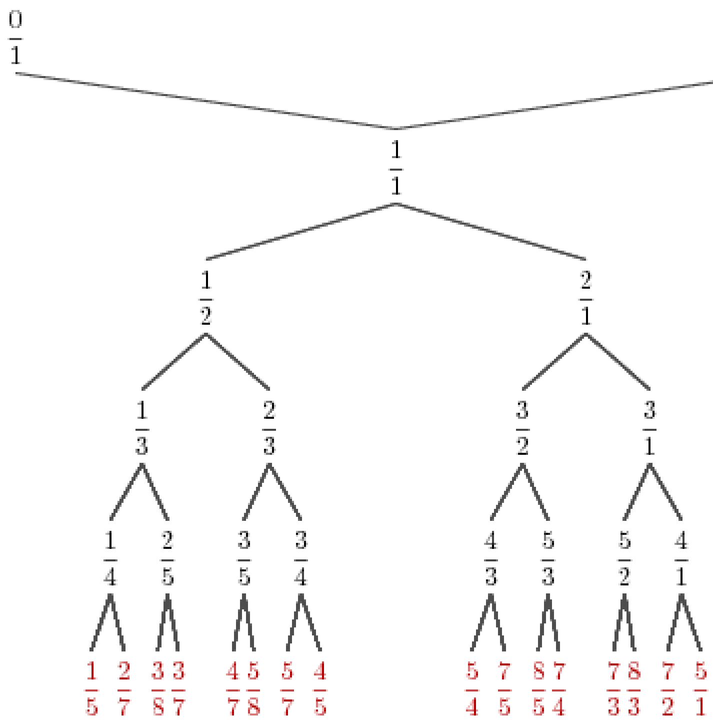












Изградили смо бинарно дрво: када се појави рационалан број q , он је медијанта два рационална броја од којих је један његов непосредни претходник, а други непосредни следбеник. Медијанта од q и његовог претходника јесте лево дете разломка q, а медијанта од q и његовог следбеника је десно дете разломка q.

Сваки позитиван рационалан број SB низа, можемо представити као верижни разломак. Верижни разломак је израз у облику:

$$[q] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdot + \cfrac{1}{\cdot + \cfrac{1}{a_k}}}}}}$$

Али је прихватљивија нотација:

$$q = [a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$$

Користимо знак $[;]$ („тачка зарез'') да одвојимо целобројни део верижног разломка, у случају ако је $q > 1$. Ако је $q < 1$, тада је целобројни део нула, па се обично изоставља.

Да би нам била јаснија нотација и терминологија применићемо Еуклидов алгоритам за тражење највећег заједничког делиоца (НЗД).

На примеру бројева 1387 и 3796 , приказаћемо како се применом Еуклидовог алгоритма формира верижни разломак.

- Делимо већи број мањим и тражимо остатак:

  $3796 = 1387 \cdot 2 + 1022$

  Или можемо то исто записати :

$$\frac{3796}{1387} = 2 + \frac{1022}{1387}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1387}{1022}}$$

  Кључни корак алгоритма је управо ово: „ наставити дељење већег броја мањим, тј пронаћи колико пута мањи број стаје у већи”

$$\frac{1387}{1022} = 1 + \frac{365}{1022}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1022}{365}}$$

Другим речима :

$$\frac{3796}{1387}=2+\frac{1022}{1387}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1022}{365}}}$$

Даље:

$1022=365\cdot 2+292$

$365=292\cdot 1+73$

$292=73\cdot 4$

(НЗД (1387, 3796) = 73)

- Или :

$$\frac{3796}{1387}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}}$$

Коначно можемо приказати разломак у следећем облику:

$$\frac{3796}{1387}=[2;1,2,1,4]$$

Све ово указује на то, зашто се чланови a_i обично зову количници. Takoђе показује да се сваком рационалном броју може придружити коначан верижни разломак.

С друге стране, ако нам је дат коначан верижни разломак $[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_k]$, можемо да изведемо аритметичке операције супротним редоследом односно добити број q (обрнуто).

Међутим, очигледно је да презентација није јединствена за сваки низ $a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1}$

$$[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1},1]=[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1}+1]$$

где су: k,a_0 - ненегативни цели бројеви (Z) ,

a_i - позитивни (Z)

Пример:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$$

користећи овај идентитет, $[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1},1]=[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1}+1]$, да претходну форму, где је $a_k=1$, убацимо у каснију форму, можемо постићи услов да последњи коефицијент задовољава $a_k\geq 2$ (тј. искључимо коначне верижне разломке са задњим количником једнаким 1).

Овим додатним захтевом, презентација постаје јединствена, тј кореспонденција између Q и верижних разломака постаје 1-1 (једнозначно пресликавање).

Тада сваки разломак у SB дрвету (осим ако није $q=1$), има двоје родитеља датих следећим верижним разломцима:

- први родитељ: $[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_k-1]$;
  - у случају за $a_k=2$, можемо записати као родитељ од q у форми $[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1}+1]$
- други родитељ: $[a_0;a_1,a_2,a_3,...,a_{k-1}]$

То су разломци чија је медијанта једнака датом разломку. Један је у реду изнад, други је више удаљен. Једног родитеља налазимо једноставно одузимањем јединице, од последњег коефицијента верижног разломка. Други (удаљени) родитељ се добије једноставно изостављањем последњег коефицијента.

Пример 1:

1. $\frac{7}{12}=[1,1,2,2]$ - је медијанта два разломка тј родитељи су му :

   $[1,1,2,1]=[1,1,3]=\frac{4}{7}$, први родитељ и

   $[1,1,2]=\frac{3}{5}$, други

2. $\frac{5}{9}=[1,1,4]$ - је медијанта два разломка тј родитељи су му:

$[1,1,3]=\frac{4}{7}$, први родитељ и

$[1,1]=\frac{1}{2}$, други

Пример 2:

За број $\frac{23}{16}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=[1;2,3,2]$, за $k\geq 2$, где је $a_k=2$

Његов први родитељ у SB дрвету је :

$$[1;2,3,1]=[1;2,4]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=\frac{13}{9}$$

а други родитељ је:

$$[1;2,3]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}=\frac{10}{7}$$

Важи и обрнуто, сваки број q у SB дрвету, има тачно двоје деце.

Ако је $q=[a_0;a_1,a_2,...,a_k]=[a_0;a_1,a_2,...,a_k-1,1]$, тада је једно дете:

- Једно дете : $[a_0;a_1,a_2,...,a_k+1]$, и
- Друго дете : $[a_0;a_1,a_2,...,a_k-1,2]$

Пример 3:

За број $\frac{4}{7}=[1,1,3]=[1,1,2,1]$, двоје деце су;

$[1,1,4]=\frac{5}{9}$, и

$[1,1,2,2]=\frac{7}{12}$

Једно од ове деце је мање од q и то је лево дете, друго је веће и то је десно дете .

Пример 4:

Верижни разломак од $\frac{13}{9}$ је $[1;2,4]$ и његово двоје деце су ;

$[1;2,5]=\frac{16}{11}$ десно дете и,

$[1;2,3,2]=\frac{23}{16}$ лево дете.

Јасно је да се за сваки коначан верижни разломак, израз може стално померати на свог родитеља, док се не добије корен $[1;]=\frac{1}{1}$ дрвета у коначно много корака .

Одатле се сваки позитиван рационалан број појављује тачно једном у овом дрвету. Штавише, сви потомци левог детета било ког q су мањи од q и сви потомци десног детета од q су већи од q.

Бројеви на дубини d у дрвету су бројеви за које је сума коефицијената верижних разломака једака $d+1$.

Пример:

$SB_5=\left[........\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},.........\right]$, при чему је $\frac{4}{7}=[1,1,3]$, односно сума 5

$SB_6=\left[........\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{7}{12},\frac{3}{5},\frac{5}{8},.........\right]$, при чему је $\frac{5}{9}=[1,1,4]$, односно сума 6, или $\frac{7}{12}=[1,1,2,2]$

- Calkin- Wilf **низ** (CW_n)

$Calkin-Wilf$ низ (CW_n) је дефинисан користећи правило дрвета као на следећој слици и то:

$$\frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{p+q} \qquad\qquad \frac{p+q}{q}$$

$Calkin-Wilf$ $(C-W)$ правило

$$CW_1=\left[\frac{1}{1}\right],$$

$$CW_2=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right],$$

$$CW_3=\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1}\right],$$

$$CW_4=\left[\frac{1}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{2},\frac{2}{5},\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{1}\right],$$

$$CW_5=\left[\frac{1}{5},\frac{5}{4},\frac{4}{7},\frac{7}{3},\frac{3}{8},\frac{8}{5},\frac{5}{7},\frac{7}{2},\frac{2}{7},\frac{7}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{3},\frac{3}{7},\frac{7}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{1}\right]$$

$$CW_6=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{6},\frac{6}{5},\frac{5}{9},\frac{9}{4},\frac{4}{11},\frac{11}{7},\frac{7}{10},\frac{10}{3},\frac{3}{11},\frac{11}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{5},\frac{5}{12},\frac{12}{7},\frac{7}{9},\frac{9}{2},\frac{2}{9},\frac{9}{7},\frac{7}{12},\frac{12}{5},\frac{5}{13},\frac{13}{8},\frac{8}{11},\\ \frac{11}{3},\frac{3}{10},\frac{10}{7},\frac{7}{11},\frac{11}{4},\frac{4}{9},\frac{9}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{1}\end{array}\right]$$

Број чланова CW_n низа јесте $|CW_n| = 2^{n-1}$.

$Calkin-Wilf$ низ (CW_n) има форму:

$CW_n = \left[\frac{b_{-1}}{b_0}, \frac{b_0}{b_1}, ..., \frac{b_{N-2}}{b_{N-1}}\right]$, где је $N = 2^{n-1}$ при чему је именилац једног члана бројилац

наредног члана у низу.

$Calkin-Wilf$ низ (CW_n) описује низ $b(n)$ са особином да се сваки позитиван

рационални број појављује тачно једном у облику :

$$\frac{b(n)}{b(n+1)}$$

Штавише $b(n)$је природно решење проблема пребројавања.

Наша листа позитивних рационалних бројева почиње овако:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{7}, \frac{7}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{2}, \frac{2}{7}, \frac{7}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{1}, ...$$

Неке од интересантних појава у овој листи, што ћемо касније и доказати , су :

а) Именилац сваког разломка је бројилац његовог следбеника. То значи да n-ти рационални број у листи има облик $\frac{b(n)}{b(n+1)}$, $(n = 0,1,2,3,...)$, где је b одређена функција ненегативних целих бројева чије су вредности $\{b(n)\}_{n\geq 0} = \{1,1,2,1,3,2,3,1,4,3,5,2,5,3,4,1,5,4,7,....\}$,

б) Вредности функције $b(n)$ заправо броје нешто веома занимљиво: $b(n)$ је број начина писања целог броја n као сума степена двојке при чему сваки степен може бити коришћен највише два пута.

На пример :

- можемо писати број 5 на следећа 2 начина

$5 = 4 + 1$

$= 2 + 2 + 1$, одакле се види да је $b(5) = 2$

- број 10 на следећих 5 начина

$$\begin{aligned}10 &= 8+2\\ &= 8+1+1\\ &= 4+4+2\\ &= 4+4+1+1\\ &= 4+2+2+1+1,\end{aligned}$$ одакле се види да је $b(10)=5$

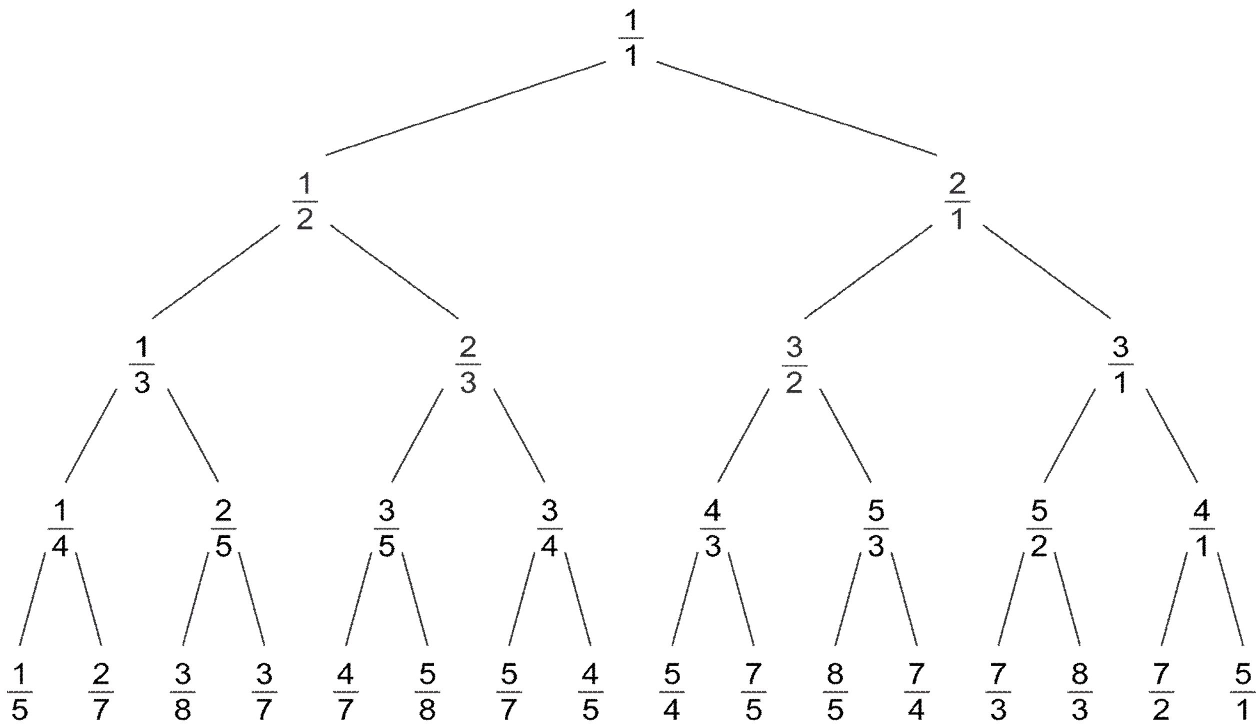
Можемо рећи да је $b(n)$ број хипербинарних презентација целог броја n.

ц) Узастопне вредности функције b су увек узајамно прости бројеви, тако да се сваки разломак појављује у скраћеној форми када се појави

д) Сваки позитиван разломак се појављује једном и само једном у овој листи

<u>Дрво разломака</u>

На тренутак можемо да заборавимо набрајање и само да замислимо да разломци расту на дрвету као што је потпуно представљено на следећем цртежу и формирано на бази 2 правила :



- $\frac{1}{1}$ је на врху дрвета
- Сваки чвор $\frac{i}{j}$ има 2 „детета„ : његово „лево дете„ је $\frac{i}{i+j}$, а „десно дете„ $\frac{i+j}{j}$

Показаћемо следеће особине дрвета:

1. *Бројилац и именилац сваке највише тачке су узајамно прости*

   Ово је сигурно тачно за највиши чвор. У супротном , претпоставимо да је $\frac{r}{s}$ чвор на највишем могућем нивоу на дрвету за који ово није истинито.

   Ако је $\frac{r}{s}$ „лево дете„ тада је његов родитељ $\frac{r}{s-r}$ који такође јасно је, не може бити скраћен разломак и требао би бити на вишем нивоу, што је контрадикција.

   Ако је $\frac{r}{s}$ „десно дете„ тада је његов родитељ $\frac{r-s}{s}$ што такође води у контрадикцију.

2. *Сваки скраћени позитиван рационалан број се појављује на месту неког чвора.*

   Рационални број 1 се сигурно појављује. Иначе, претпоставимо да је $\frac{r}{s}$ међу свим разломцима који се не појављују онај са најмањим имениоцем и онај са најмањим бројиоцем.

   Ако је $r > s$, тада $\frac{r-s}{s}$ се или не појављује или ће једно од његове деце бити $\frac{r}{s}$ чији је бројилац мањи а именилац исти , што је опет контрадикторно.

   Ако је $r < s$, тада $\frac{r}{s-r}$ се или не појављује или ће једно од његове деце бити $\frac{r}{s}$ и има мањи именилац што је контрадикција.

3. *Ниједан скраћени позитиван рационалан број се не појављује више него једном у дрвету као чвор.*

Прво, рационалан број 1 се појављује као чвор само на врху дрвета, па ако није само ту 1 , онда би био дете неког чвора $\frac{r}{s}$. Међутим, деца чвора $\frac{r}{s}$ су $\frac{r}{r+s}$ и $\frac{r+s}{s}$ при чему ниједан од њих не може бити 1 .

Између свих скраћених рационалних бројева који се појављују више него једном, нека $\frac{r}{s}$ има најмањи именилац и најмањи бројилац. Ако је $r < s$, тада је $\frac{r}{s}$,,лево дете,, од два различита чвора, и код оба постоји $\frac{r}{s-r}$, што је контрадикторно за минималност имениоца. Слично важи и за $r > s$.

Закључујемо, да се може саставити листа свих позитивних рационалних бројева од којих се сваки појављује једном и само једном, уписујући $\frac{1}{1}$ на почетку, затим разломке на нивоу одмах испод врха дрвета читајући слева на десно, затим разломке на следећем нижем нивоу читајући слева на десно, итд.

Тврдимо да, ако тако запишемо низ, именилац сваког разломка биће једнак бројиоцу његовог следбеника (следећег разломка у низу). Ово је очигледно, уколико је разломак лево дете и његов следбеник десно дете истог родитеља. Ако је разломак десно дете, тада је његов именилац исти као именилац његовог родитеља а бројилац његовог следбеника исти као бројилац родитеља његовог следбеника.
Коначно, крајњи десни чвор сваког реда има именилац 1, као и крајњи леви чвор следећег реда који има бројилац 1, што доказује тврдњу.
Након што направимо један низ рационалних бројева читајући узастопне редове дрвета као што смо горе описали, листа ће имати форму $\{\frac{f(n)}{f(n+1)}\}_{n\geq 0}$ за неко f .

Сада, с обзиром на положај разломака у дрвету, двоје деце од $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ су :

$\frac{f(2n+1)}{f(2n+2)}$ и $\frac{f(2n+2)}{f(2n+3)}$.

Одатле и користећи правило формирања деце на основу родитеља мора бити :
$f(2n+1)=f(n)$ и $f(2n+2)=f(n)+f(n+1)$, где је $n=0,1,2,...$

Ове рекурентне везе, заједно са условом да је $f(0)=1$, евидентно детерминишу нашу функцију f на свим ненегативним целим бројевима.

Тврдимо да $f(n)=\mathrm{b}(n)$, где је $\mathrm{b}(n)$ број хипербинарних презентација броја n за $n\geq 0$.
За $n=0$ истинито је тврђење и претпоставимо да је тачно за све целе ненегативне бројеве $0,1,2,....2n$.

Сада је $b(2n+1)=b(n)$ јер нам је дата хипербинарна експанзија $2n+1$, где број 1 мора да се појави, отуда одузимајући јединицу од обе стране и дељењем са 2, добијамо хипербинарну презентацију броја n . Обрнуто, ако нам је дете експанзија броја n , дуплирамо сваки део и додамо 1 , добићемо презентацију од $2n+1$.

Штавише, $b(2n+2)=b(n)+b(n+1)$ за хипербинарну експанзију од $2n+2$, може имати или две јединице или ниједну јединицу у развоју.
Ако има две јединице, тада бришући их и дељењем са 2, ми постижемо експанзију броја n .

Пример:

$$b(8)=2+2+4$$
$$=4+4$$
$$=1+1+2+4$$
$$n=8$$
$$b(2n+1)=b(n)$$
$$b(2\cdot 8+1)=b(17)$$
$$b(17)=1+4+4+8$$
$$=1+8+8$$
$$=1+2+2+4+8$$

Ако нема ниједну јединицу, тада само делимо са 2 да добијемо експанзију $n+1$.

Ова пресликавања су једна другом инверзна , што доказује тврђење.

Следи да $b(n)$ и $f(n)$ задовољавају дате рекурентне формуле и узимају исте почетне иницијалне вредности, отуда се слажу- важе за све ненегативне целе бројеве.

<u>ТЕОРЕМА 1</u> :

N - ти рационални број у скраћеној форми може бити узет као облик $\frac{b(n)}{b(n+1)}$, где је $b(n)$ број хипербинарних презентација целог броја n . ($n = 0,1,2,...$)

Ту су $b(n)$ и $b(n+1)$ узајамно прости и сваки позитиван скраћен рационалан број појављује се једном и само једном у листи $\frac{b(0)}{b(1)}$, $\frac{b(1)}{b(2)}$, ...

Заправо особина да је именилац датог разломка једнак бројиоцу његовог следбеника, остаје чак и када низове повежемо у форму CW_1, CW_2, CW_3 , ...

$$CW_\infty = \left[\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},...,\frac{4}{1},...\right],$$

$$CW_\infty = \left[\frac{C_0}{C_1},\frac{C_1}{C_2},\frac{C_2}{C_3},...\right]$$

Да бисмо показали како можемо формулом генерисати низ CW_n , прво морамо дефинисати појам $floor(x) = \lfloor x \rfloor$ који заокружује аргумент на ниже - функција највећег целог броја (не већи од x)

$floor(1,81) = 1$

$\lfloor 2,4 \rfloor = 2$

$\lfloor 2,7 \rfloor = 2$

$\lfloor -2,7 \rfloor = -3$

$\lfloor -2 \rfloor = -2$

Важи : $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

Функција $ceil(x) = \lceil x \rceil$ представља најмањи цео број не мањи од x односно заокружује аргумент на више.

CW низ се може генерисати формулом:

$$q_{i+1} = \frac{1}{2 \cdot \lfloor q_i \rfloor - q_i + 1}$$

где је q_i - i -ти број у низу (члан низа),

Почиње од $q_1 = 1$ и $\lfloor q_i \rfloor$ представља цели део броја.

$q_1 = 1$

$$q_2 = \frac{1}{2 - 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$q_3 = \frac{1}{2 \cdot \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} + 1} = 2$$

$$q_4 = \frac{1}{2 \cdot \lfloor 2 \rfloor - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

...

Такође је могуће израчунати $i -$ ти члан низа q_i директно.

Ако бројимо узастопне исте цифре бинарног записа (кода) за број i , добијамо верижни разломак q_i. Бројимо цифре од краја бинарног кода (одназад).

Пример:

$i = 1081$, тражимо $q_i = ?$

$1081 : 2 = 540$ и остатак 1

$540 : 2 = 270$ и остатак 0

$270 : 2 = 135$ и остатак 0

$135 : 2 = 67$ и остатак 1

$67 : 2 = 33$ и остатак 1

$33 : 2 = 16$ и остатак 1

$16 : 2 = 8$ и остатак 0

$8 : 2 = 4$ и остатак 0

$4 : 2 = 2$ и остатак 0

$2 : 2 = 1$ и остатак 0

$1 : 2 = 0$ и остатак 1

Бројимо уназад нуле и јединице и тако добијамо приказ :

10000111001

Бинарни запис за број $1081 = 10000111001_2$

$[1;2,3,4,1]-$ верижни разломак q_i

Из бинарног добијамо декадни број на следећи начин:

$$10000111001_2 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^0$$

$$= 1024 + 32 + 16 + 8 + 1 = 1081$$

$$q_{1081} = \frac{53}{37} = [1;2,3,4,1]$$

$$[1;2,3,4,1] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{16}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{16}} = 1 + \frac{16}{37} = \frac{53}{37}$$

Други пример представља обрнут процес :

Ако имамо q_i , одредићемо i

Нека је $q_i = \frac{3}{4}$, верижни приказ је $[0;1,3]$

$$3:4 = 0 + \frac{3}{4} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} \quad , \qquad \left(4:3 = 1 + \frac{1}{3}\right)$$

За $[0;1,3]$, $i = 1110_2 = 14$

$$1110_2 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 0 = 14$$

Нека је $q_i = \frac{4}{3}$, његов верижни приказ је $[1;3] = [1;2,1]$. Имамо $i = 1001_2 = 9$

$$1001_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9$$

- Farey **низ** (F_n)

Farey низ (F_n) реда n садржи све скраћене разломке $\frac{p}{q}$ са особином да је $0 \le p \le q \le n$ у свом природном редоследу.

Стандардни начин израчунавања (F_n) из (F_{n-1}) је да се убаце медијанте између узастопних разломака (F_{n-1}) низа само ако то даје именилац величине n (све разломке $\frac{a}{n}$ облика)

$$F_1 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_2 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_3 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_4 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_6 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_7 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right]$$

$$F_8 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\right]$$

Број скраћених разломака облика $\frac{a}{n}$ са особином $1 \le a < n$ обележавамо са $\varphi(n)$.

Отуда је (F_n) подниз од SB_n (именилац медијанте мора бити величине n).

Скраћени разломци реда n

Пример :

за $n=8$; из низа $\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{4}{8},\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8}$ додајемо само узајамно просте бројеве

$$\frac{1}{8},\ldots\frac{3}{8},\ldots\frac{5}{8},\ldots\frac{7}{8}. \quad \varphi(8)=4$$

за $n=9$; из низа $\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{3}{9},\frac{4}{9},\frac{5}{9},\frac{6}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9}$ додајемо само узајамно просте бројеве

$$\frac{1}{9},\frac{2}{9},\ldots\frac{4}{9},\frac{5}{9},\ldots\frac{7}{9},\frac{8}{9}. \quad \varphi(9)=6$$

(Важи да су суседни $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, $b\cdot c-a\cdot d=1$)

$\varphi(2)=1$

$\varphi(3)=2$

$\varphi(4)=2$ Број разломака са имениоцем n које додајемо је $\varphi(n)$

$\varphi(5)=4$

$\varphi(6)=2$

$\varphi(7)=6$

$\varphi(8)=4$

$\varphi(9)=6$

Ако пребројимо ненула скраћене разломке са имениоцем j заједно са нулом добијамо:

$$|F_n|=1+\sum_{j=1}^{n}\varphi(j)$$

За $n=3$, $|F_3|=1+\sum_{j=1}^{3}\varphi(j)=1+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)=1+1+1+2=5$, закључак $|F_3|=5$

$$F_3=\left[\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right]$$

За $n=4$, $|F_4|=1+\sum_{j=1}^{4}\varphi(j)=1+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)=5+2=7$, закључак $|F_4|=7$

Правило медијанте повлачи да су узастопни разломци у SB_n и F_n суседни. (Важи да су суседни $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, $b\cdot c-a\cdot d=1$)

3. РЕКУРЗИВНИ РЕЗУЛТАТИ

Показаћемо да разломци у Стерн-Брокот, Калкин-Вилф и Феријевим низовима могу бити изведени не само „одозго на доле” већ их можемо извести „лево-десно” користећи веома сличне, скоро идентичне рекурентне релације (формуле). То нам омогућава да рачунамо претходне низове SB_i, CW_i и F_i за $i < n$.

$v_2(i)$ је највећи степен двојке који дели наш број i
$i = 2^{v_2(i)} \cdot j$, где је j- непарни цео број

ТЕОРЕМА 1

Напишимо SB низ реда n на следећи начин:

$$SB_n = \left[\frac{a_{-1}}{b_{-1}}, \frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, ... \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right] \text{, где је } N = 2^n ,$$

Тада се a_i и b_i могу израчунати преко рекурентних веза:

$$a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1 \, , \quad a_i = k_i \cdot \mathrm{a}_{i-1} - \mathrm{a}_{i-2}, \quad \text{за } 1 \le i < N$$
$$b_{-1} = 1, \; b_0 = n, \quad b_i = k_i \cdot b_{i-1} - b_{i-2},$$

где је: $k_i = 2v_2(i) + 1$

ТЕОРЕМА 2

Напишимо CW низ као :

$$CW_\infty = \left[\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, ... \frac{a_{i-1}}{a_i}, ... \right] ,$$

$$CW_n = \left[\frac{b_{-1}}{b_0}, \frac{b_0}{b_1}, \frac{b_1}{b_2}, ... \frac{b_{N-2}}{b_{N-1}} \right] \text{, где је } N = 2^{n-1}$$

Тада се a_i и b_i могу израчунати преко рекурентних веза

$$a_{-1} = 0, \; a_0 = 1 , \; a_i = k_i \cdot \mathrm{a}_{i-1} - \mathrm{a}_{i-2}, \quad \text{за } 1 \le i < \infty$$

$$b_{-1} = 1 , \; b_0 = n, \; b_i = k_i \cdot b_{i-1} - b_{i-2}, \quad \text{за } 1 \le i < N$$

где је : $k_i = 2v_2(i) + 1$

ТЕОРЕМА 3

Напишимо Феријев низ F_n реда n као :

$$F_n = \left[\frac{A_{-1}}{B_{-1}}, \frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, ... \frac{A_{N-1}}{B_{N-1}} \right]$$

Тада се бројиоци A_i и имениоци B_i могу израчунати преко рекурентних релација.

$A_{-1} = 0,\ A_0 = 1,\ A_i = K_i \cdot A_{i-1} - A_{i-2}$, за $1 \le i < N$
$B_{-1} = 1,\ B_0 = n,\ B_i = K_i \cdot B_{i-1} - B_{i-2}$, за $1 \le i < N$

где је

$$K_i = \left\lfloor \frac{B_{i-2} + n}{B_{i-1}} \right\rfloor \quad \text{и} \quad N = \sum_{j=1}^{n} \varphi(j)$$

ТЕОРЕМА 1 - Илустрација

Користећи табелу можемо илустровати теорему 1 на примеру SB_4 . Овај низ се конструише с лева на десно, рачунањем преко рекурентних веза a_i, b_i (број колона $N = 2^4 = 16$), што изгледа овако:

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_i	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
b_i	1	4	3	5	2	5	3	4	1	3	2	3	1	2	1	1	0
k_i			1	3	1	5	1	3	1	7	1	3	1	5	1	3	1

$\nu_2(i)$ је највећи степен двојке који дели наш број i

$k_1 = 2\nu_2(1) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad \nu_2(1) = 0$

$k_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad \nu_2(2) = 1$

$k_3 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad \nu_2(3) = 0$

$k_4 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $\qquad \nu_2(4) = 2$

$k_5 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad \nu_2(5) = 0$

$k_6 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad \nu_2(6) = 1$

$k_7 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\qquad \nu_2(7) = 0$

$k_8 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ $\nu_2(8) = 3$

$k_9 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $\nu_2(9) = 0$

$k_{10} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\nu_2(10) = 1$

Израчунавамо бројиоце и имениоце b_i разломака преко рекурентних веза.

$k_1 = 1$	$k_2 = 3$	$k_2 = k_1 + 2 = 3$
$k_3 = 1$	$k_4 = 5$	$k_4 = k_2 + 2 = 3 + 2 = 5$
$k_5 = 1$	$k_6 = 3$	$k_6 = k_3 + 2 = 1 + 2 = 3$
$k_7 = 1$	$k_8 = 7$	$k_8 = k_4 + 2 = 5 + 2 = 7$
$k_9 = 1$	$k_{10} = 3$	$k_{10} = k_5 + 2 = 1 + 2 = 3$

Бројеви k_i су исти као k_i' генерисани преко рекурентних веза

$k_1' = 1$ $k_i = 2\nu_2(i+1)$, $k_1 = 1$

$k_{2j+1}' = 1$, $j \geq 0$ $\leftrightarrow$ $k_{2j+1} = 1$, непарни коефицијент k

$k_{2j}' = k_j' + 2$ $k_{2j} = k_j + 2$, парни коефицијент k

- Доказ индукцијом

$k_1 = k_1'$, $k_{2j+1} = 1$ и $k_{2j} = k_j + 2$ важи за , $j \geq 1$

Како је $\nu_2(2j+1) = 0$ и $\nu_2(2j) = \nu_2(j) + 1$, отуда

$k_i = k_i'$, за све , $i \geq 1$

  - Непарни коефицијенти

$k_1 = 2\nu_2(1) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $k_1' = 1$

$k_3 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $k_3' = 1$

……. ……..

……. …….

$k_9 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ $k_9' = 1$

- Парни коефицијенти

$$k_2 = 2\nu_2(2)+1 = 2\cdot 1+1 = 3 \qquad k_2' = k_1 + 2 = 3$$

$$k_4 = 2\cdot 2+1 = 5 \qquad k_4' = k_2 + 2 = 3+2 = 5$$

$$k_6 = 2\cdot 1+1 = 3 \qquad k_6' = k_3 + 2 = 1+2 = 3$$

$a_{-1} = 0,\quad a_0 = 1$, $a_i = k_i \cdot \mathrm{a}_{i-1} - \mathrm{a}_{i-2},$

$$a_1 = k_1 \cdot a_0 - a_{-1} = 1\cdot 1 - 0 = 1 - 0 = 1$$
$$a_2 = 3\cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_3 = 1\cdot 2 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_4 = 5\cdot 1 - 2 = 5 - 2 = 3$$
$$a_5 = 1\cdot 3 - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_6 = 3\cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3$$
$$a_7 = 1$$

Пример $SB_3 = \left[\frac{0}{b_{-1}}, \frac{1}{b_0}, \frac{1}{b_1}, \frac{2}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \frac{3}{b_4}, \frac{2}{b_5}, \frac{3}{b_6}, \frac{1}{b_7}\right]$

$$CW_\infty = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, ...\right]$$

$$CW_\infty = \left[\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_4}{a_5}, \frac{a_5}{a_6}, \frac{a_7}{a_8}, ...\right]$$

ТЕОРЕМА 1 - Доказ

Индукцијом по n .

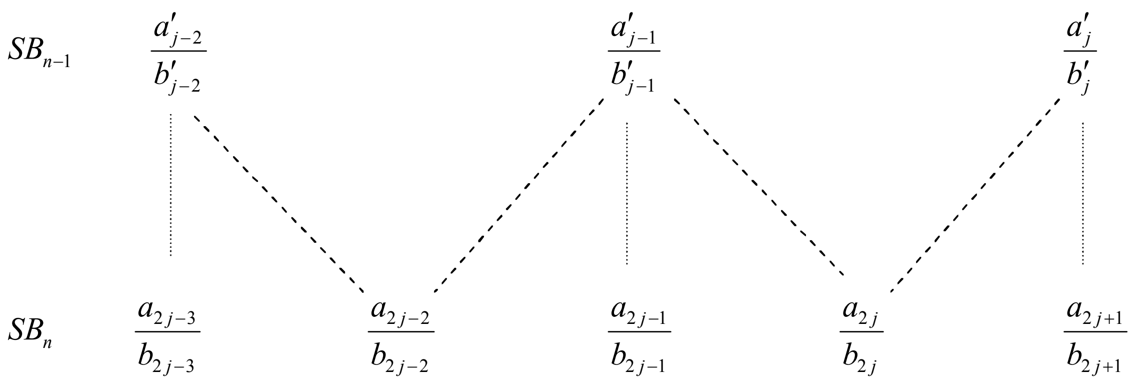
Доказ за b_i је исти као за a_i (a_s у b_s променимо).

Јасно је да је : $a_i = k_i a_{i-1} - a_{i-2}$ тачно за $n = 0$, како је $SB_0 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right]$.

Претпоставимо да је : $n > 0$, и $a_i = k_i a_{i-1} - a_{i-2}$ истина за SB_{n-1},

Нека су $\frac{a'_{-1}}{b'_{-1}}, \frac{a'_0}{b'_0}, \frac{a'_1}{b'_1}, ... \frac{a'_{N/2-1}}{b'_{N/2-1}}$, разломци у SB_{n-1}.

Начин на који убацујемо медијанте да би добили низ SB_n , приказан је на следећој слици :



.... Тачкасте линије обележавају понављање разломака , а

---- Испрекидане линије обележавају формирање медијанте

Понављање разломака значи да је

$$a_{2j-1} = a'_{j-1} \quad \text{и} \quad b_{2j-1} = b'_{j-1} \qquad \text{за } 0 \le j < \frac{N}{2},$$

А формирање медијанте значи

$$a_{2j} = a'_{j-1} + a'_j \quad \text{и} \quad b_{2j} = b'_{j-1} + b'_j \qquad \text{за } 0 \le j < \frac{N}{2},$$

Наравно, формуле за a_{-1} и a_0 у једначини $a_i = k_i \cdot a_{i-1} - a_{i-2}$ су тачне ,

јер SB_n почиње са $\frac{0}{1}, \frac{1}{n}$.

Претпоставимо да је $1 \le i < N$ и разматрамо случајеве када је i парно и када је непарно.

<u>Случај 1</u>. $i = 2j$ је паран и $j \ge 1$

$$k_{2j} \cdot a_{2j-1} - a_{2j-2} = \left(k_j + 2\right) \cdot a_{2j-1} - a_{2j-2} \qquad \text{, из } k_{2j} = k_j + 2$$

$$= \left(k_j + 2\right) \cdot a'_{j-1} - \left(a'_{j-2} + a'_{j-1}\right) \quad \text{, из } a_{2j-1} = a'_{j-1} \text{ и } a_{2j} = a'_{j-1} + a'_j$$

$$= k_j \cdot a'_{j-1} - a'_{j-2} + a'_{j-1} \qquad ,$$

$$= a'_j + a'_{j-1} \qquad , \text{ из } a'_j = k_j \cdot a'_{j-1} - a'_{j-2} \text{ индукцијом}$$

$$= a_{2j} \qquad ,$$

<u>Случај 2</u>. $i = 2j+1$ је непаран и $j \geq 1$

Из $k_{2j+1} = 1$, као и $a_{2j-1} = a'_{j-1}$, $a_{2j} = a'_{j-1} + a'_j$

Следи да је

$$k_{2j+1} \cdot a_{2j} - a_{2j-1} = a_{2j} - a_{2j-1} \quad , \text{ за } k_{2j} = 1$$

$$= \left(a'_{j-1} + a'_j\right) - a'_{j-1} ,$$

$$= a'_j$$

$$= a_{2j+1}$$

што смо хтели и да докажемо, чиме завршавамо индукцију по n .

Показаћемо да се пола именилаца b_i из низа SB_n , појављује и у низу CW_n (задивљујуће), док се бројиоци a_i из низа SB_n такође појављују у низу CW_∞ .

Пример SB_3

$$a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1 \; , \quad a_i = k_i \cdot \mathrm{a}_{i-1} - \mathrm{a}_{i-2},$$

$$a_1 = k_1 \cdot a_0 - a_{-1} = 1 \cdot 1 - 0 = 1 - 0 = 1$$
$$a_2 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_3 = 1 \cdot 2 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_4 = 5 \cdot 1 - 2 = 5 - 2 = 3$$
$$a_5 = 1 \cdot 3 - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$a_6 = 3 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3$$
$$a_7 = 1$$

$$SB_3 = \left[\frac{0}{b_{-1}}, \frac{1}{b_0}, \frac{1}{b_1}, \frac{2}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \frac{3}{b_4}, \frac{2}{b_5}, \frac{3}{b_6}, \frac{1}{b_7}\right]$$

$$CW_\infty = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \ldots\right]$$

$$CW_\infty = \left[\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_4}{a_5}, \frac{a_5}{a_6}, \frac{a_7}{a_8}, \ldots\right]$$

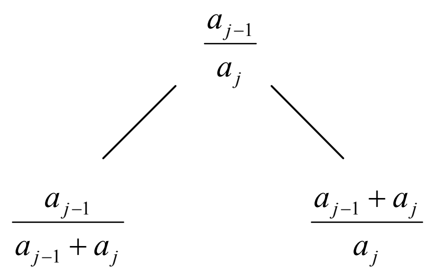
$$SB_4 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0}\right]$$

$$CW_4 = \left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}\right]$$

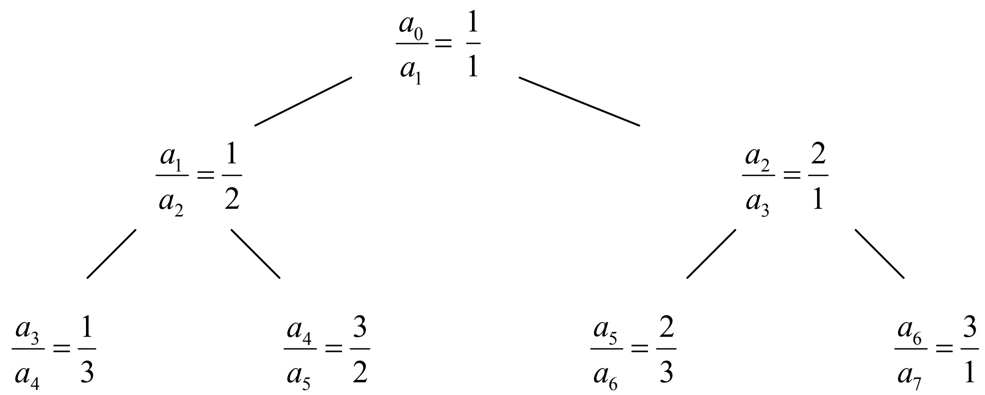
Сходно томе, искористили смо исту нотацију за a_i и b_i у Теореми 2 (као у Теореми 1)

<u>ТЕОРЕМА 2 - Доказ</u>

Користећи $C-W$ правило:



Можемо направити $C-W$ дрво као на слици:



Цртеж показује да бројеви a_i морају задовољавати следеће релације:

$a_0 = 1$, $a_{2j-1} = a_{j-1}$ и $a_{2j} = a_{j-1} + a_j$, за $j \geq 0$

Дефинишимо $a_{-1} = 0$, при томе наведене релације важе када је $j = 0$.

Доказаћемо индукцијом по i да су формуле за a_i у релацијама $a_i = k_i \cdot a_{i-1} - a_{i-2}$ за $1 \leq i < \infty$ тачне.

Ово је очигледно тачно за $i = -1, 0$.

Претпоставимо сада да је $i > 0$ и заменом у релацијама важи и за $i' < i$

<u>Случај 1</u>. $i = 2j$ и $j \geq 1$, Тада

$$k_{2j} \cdot a_{2j-1} - a_{2j-2} = \left(k_j + 2\right) \cdot a_{2j-1} - a_{2j-2} \qquad \text{, из } k_{2j} = k_j + 2$$

$$= \left(k_j + 2\right) \cdot a_{j-1} - \left(a_{j-2} + a_{j-1}\right) \quad \text{, из } a_{2j-1} = a_{j-1} \text{ и } a_{2j} = a_{j-1} + a_j$$

$$= k_j \cdot a_{j-1} - a_{j-2} + a_{j-1} \qquad ,$$

$$= a_j + a_{j-1} \qquad \text{, индукцијом по } i$$

$$= a_{2j}$$

<u>Случај 2</u>. $i = 2j - 1$ и $j \geq 1$

Тада $k_{2j+1} = 1$. Из $a_0 = 1,$ $a_{2j-1} = a_{j-1}$ и $a_{2j} = a_{j-1} + a_j$, за $j > 0$

Следи

$$k_{2j+1} \cdot a_{2j} - a_{2j-1} = a_{2j} - a_{2j-1} \qquad ,$$

$$= \left(a_{j-1} + a_j\right) - a_{j-1} ,$$

$$= a_j$$

$$= a_{2j+1}$$

крај доказа индукцијом по i .

Доказ за $b_i = k_i \cdot b_{i-1} - b_{i-2}$ је сада једноставан.

Први члан $\frac{b_{-1}}{b_0} = \frac{1}{n}$ низа CW_n једнак је $\frac{a_{N-1}}{a_N}$ где је $N = 2^{n-1}$.

Како је CW_n узастопни подниз од CW_∞, следи да је: $a_{N+i} = b_i$ за $-1 \le i < N$.

Сада $a_{N-1} = 1$, $a_N = N$ и $a_i = k_i \cdot a_{i-1} - a_{i-2}$

повлачи да $a_{N+i} = k_{N+i} \cdot a_{N+i-1} - a_{N+i-2}$, за $1 \le i < N$.

Знамо да је $v_2(N+i) = v_2(i)$ и $k_{N+i} = k_i$, за $1 \le i < N$.

Ако заменимо a_{N+i} са b_i и k_{N+i} са k_i , за $1 \le i < N$

Следи: $b_i = k_i \cdot b_{i-1} - b_{i-2}$, за $1 \le i < N$.

Крај доказа.

ТЕОРЕМА 3 - Илустрација

$A_{-1} = 0,\ A_0 = 1,\ A_i = K_i \cdot A_{i-1} - A_{i-2}$, за $1 \le i < N$

$B_{-1} = 1,\ B_0 = n,\ B_i = K_i \cdot B_{i-1} - B_{i-2}$, за $1 \le i < N$

Направићемо табелу коефицијената Феријевог низа за $n = 5$.

$F_1 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right],$

$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right]$

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_i	0	1	1	1	2	1	3	2	3	4	1
B_i	1	5	4	3	5	2	5	3	4	5	1
K_i			1	2	3	1	5	1	3	2	1

$$K_1 = \left\lfloor \frac{B_{-1}+n}{B_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1+5}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor = 1, \quad A_1 = K_1 \cdot A_0 - A_{-1} = 1\cdot 1 - 0 = 1, \quad B_1 = K_1 \cdot B_0 - B_{-1} = 1\cdot 5 - 1 = 4$$

$$K_2 = \left\lfloor \frac{B_0+n}{B_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5+5}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor = 2, \quad A_2 = K_2 \cdot A_1 - A_0 = 2\cdot 1 - 1 = 1, \quad B_2 = K_2 \cdot B_1 - B_0 = 2\cdot 4 - 5 = 3$$

$$K_3 = \left\lfloor \frac{B_1+n}{B_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+5}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 3, \quad A_3 = K_3 \cdot A_2 - A_1 = 3\cdot 1 - 1 = 2, \quad B_3 = K_3 \cdot B_2 - B_1 = 3\cdot 3 - 4 = 5$$

$$K_4 = \left\lfloor \frac{B_2+n}{B_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3+5}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor = 1, \quad A_4 = K_4 \cdot A_3 - A_2 = 1\cdot 2 - 1 = 1, \quad B_4 = K_4 \cdot B_3 - B_2 = 1\cdot 5 - 3 = 2$$

$$K_5 = \left\lfloor \frac{B_3+n}{B_4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5+5}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5, \quad A_5 = K_5 \cdot A_4 - A_3 = 5\cdot 1 - 2 = 3, \quad B_5 = K_5 \cdot B_4 - B_3 = 5\cdot 2 - 5 = 5$$

$$K_6 = \left\lfloor \frac{B_4+n}{B_5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2+5}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7}{5} \right\rfloor = 1, \quad A_6 = K_6 \cdot A_5 - A_4 = 1\cdot 3 - 1 = 2, \quad B_6 = K_6 \cdot B_5 - B_4 = 1\cdot 5 - 2 = 3$$

$$K_7 = \left\lfloor \frac{B_5+n}{B_6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5+5}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3, \quad A_7 = K_7 \cdot A_6 - A_5 = 3\cdot 2 - 3 = 3, \quad B_7 = K_7 \cdot B_6 - B_5 = 3\cdot 3 - 5 = 4$$

$$K_8 = \left\lfloor \frac{B_6+n}{B_7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3+5}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor = 2, \quad A_8 = K_8 \cdot A_7 - A_6 = 2\cdot 3 - 2 = 4, \quad B_8 = K_8 \cdot B_7 - B_6 = 2\cdot 4 - 3 = 5$$

$$K_9 = \left\lfloor \frac{B_7+n}{B_8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4+5}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{5} \right\rfloor = 1, \quad A_9 = K_9 \cdot A_8 - A_7 = 1\cdot 5 - 4 = 1, \quad B_9 = K_9 \cdot B_8 - B_7 = 1\cdot 5 - 4 = 1$$

<u>ТЕОРЕМА 3 - Доказ</u>

Како су прва 2 члана низа F_n : $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{n}$ релације :

$$A_i = K_i A_{i-1} - A_{i-2}$$

$$B_i = K_i B_{i-1} - B_{i-2}$$

су тачне , за $i = -1, 0$

Претпоставимо да је $1 \le i < N$.

По дефиницији , чланови $\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}}$, $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$, и $\frac{A_i}{B_i}$ су узастопни чланови у низу F_n .

Доказаћемо да је $A_i = a$ и $B_i = b$,

$a = K_i A_{i-1} - A_{i-2}$

$b = K_i B_{i-1} - B_{i-2}$

Познато је да важи формула: $A_{i-1}B_{i-2} - B_{i-1}A_{i-2} = 1$ јер су узастопни разомци у Фарејевом низу и суседни.

Следи:

$$a \cdot B_{i-1} - b \cdot A_{i-1} = \left(K_i A_{i-1} - A_{i-2}\right) B_{i-1} - \left(K_i B_{i-1} - B_{i-2}\right) A_{i-1}$$

$$= A_{i-1}B_{i-2} - B_{i-1}A_{i-2} = 1$$

Посматрамо неједначине

$$\frac{B_{i-2}+n}{B_{i-1}} - 1 < \mathrm{K}_i \le \frac{B_{i-2}+n}{B_{i-1}} \quad , \qquad \text{све помножимо са } B_{i-1}$$

$$B_{i-2} + n - B_{i-1} < \mathrm{K}_i B_{i-1} \le B_{i-2} + n \quad , \qquad \text{одузмемо } B_{i-2}$$

$$n - B_{i-1} < b \le n \quad ,$$

Из $B_{i-1} < b \le n$ следи да је $0 < b \le n$

и из $(A_{i-1}B_{i-2} - B_{i-1}A_{i-2} = 1)$ да је

$$\frac{A_{i-2}}{B_{i-2}} < \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \le \frac{a}{b}$$

Докле год је $\frac{A_i}{B_i}$ по дефиницији следећи разломак у Фарејевом низу F_n , можемо закључити да је : $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} < \frac{A_i}{B_i} \le \frac{a}{b}$

Пошто је следећи разломак после $\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}}$ у F_n низу разломак $\frac{A_i}{B_i}$, следи да је :

$\frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} < \frac{A_i}{B_i} \le \frac{a}{b}$ упоредни из ($A_{i-1}B_{i-2} - B_{i-1}A_{i-2} = 1$).

Сада треба показати да је : $\frac{A_i}{B_i} = \frac{a}{b}$

Претпоставимо супротно, тј да је $\frac{A_i}{B_i} < \frac{a}{b}$, тада је :

$1 \le aB_i - bA_i$, и

$1 = A_i B_{i-1} - B_i A_{i-1}$

Множећи са B_{i-1} израз $1 \le aB_i - bA_i$ и са b израз $1 = A_iB_{i-1} - B_iA_{i-1}$, а затим њиховим сабирањем, добијамо:

$n < B_{i-1} + b \le \left(aB_i - bA_i\right)B_{i-1} + b\left(A_iB_{i-1} - B_iA_{i-1}\right) = \left(aB_{i-1} - bA_{i-1}\right)B_i = B_i$

$n < B_i$ што је нетачно.

Ово је контрадикција јер $\frac{A_i}{B_i} \in F_n$ и мора бити $B_i \le n$, отуда $\frac{A_i}{B_i} = \frac{a}{b}$.

Како су оба разломка скраћена $\left(A_i, B_i, b > 0\right)$, закључујемо да :

$A_i = a$,

$B_i = b$

што смо и желели доказати.

4. ИСТОРИЈАТ

Абрахам Стерн (Moritz Abraham Stern)

Рођен у Франкфурту (Немачка) 29.јуна 1807 год, а умро у Цириху (Швајцарска) 30.јануара 1894 год. у 86-тој години . Потекао из добростојеће јеврејске породице. У почетку га је учени отац школовао а касније приватни наставници. Започео студије 1826 год. у Хајделбергу, највише математичка предавања (иако је добро познавао језике , преводио текстове и хемију). Сели се у Гетинген где постаје ученик Карл Фридриха Гауса при чему теорија бројева постаје његова главна преокупација. Већ 1829.год пише докторат са својом тезом у теорији верижних разломака коју брани код професора Гауса. Коначно 1859.год уз доста муке (прво без плате а затим 8 година са симболичном платом) , постиже свој циљ односно постаје први редовни професор јевреј на немачком Универзитету. Истовремено, на његову препоруку, Бернард Риман , његов бивши ученик наследник Дирихлета, постаје професор на том факултету. Током 55 год. , колико је провео на универзитету Гетинген, више се прославио својим предавачким даром него истраживачким за разлику од Гауса. Предавао је неколико предмета: алгебарску анализу, аналитичку геометрију, диференцијални и интегрални рачун, механику, астрономију и наравно теорију бројева.
У Цириху, постаје почасни члан друштва научника природних наука. Објавио радове о теорији бројева, теорији верижних разломака, теорији Бернулијевих и Ојлерових бројева. Превео Поасонову књигу : *Lex Lebruch der Mechanik* (1835-1836). Објавио Гаусову биографију и више књига о алгебарској анализи. За свој рад, добио признање од данске и белгијске академије наука. Од 1862, члан је и Баварске академије наука, члан краљевске академије наука у Гетингену.
У свом раду : „*Uber eine zahlentheoretishe Funktion,, (Crelle, 1858)* описује математику на којој је засновано Стерн-Брокотово дрво.

Ахил Брокот (Achille Brocot)

Рођен 1817 год, био је француски часовничар и аматерски математичар. Познат је по свом открићу (истовремено али независно од немачког теоретичара бројева Moritz Abraham Sterna) Stern-Brocot дрвета, математичке структуре корисне у апроксимирању реалних бројева рационалним бројевима. Ова врста апроксимације је важан део дизајна преносних односа зупчаника за сатове. Направио је многе практичне иновације, укључујући побољшање механизма његовог оца Луја Габријела Брокота, и развој сатова са стално присутним календарским механизмима.
Своје оригиналне дизајне почиње и комерцијално да експлоатише тако што оснива компанију за производњу сатова заједно са Жан Баптист Делетрезеом под називом „Brocot & Delettrez ’’ у Паризу 20.октобра 1851 год. Умро је 1878 године.

Нил Калкин (Neil Calkin)

Рођен у Конектикету (УСА) а одрастао у Енглеској. Студирао је математику на Тринити колеџу у Кембриџу (1980 - 1984) , а докторат је стекао на универзитету у Ватерлоу (1984-1988) на тему комбинаторика и оптимизација.
Од 2007 год. на Клемсону (Јужна Каролина, УСА) ради као професор на катедри за математику где предаје вероватноћу и члан је саветодавног одбора.
Он је фасциниран начином коришћења уметничке форме (посебно оригамијем и музиком) да се помогне визуализација и разумевање математике и науке. Написао је низ научно-истраживачких радова највише на тему методе вероватноће и комбинаторике, при чему га је посебно теорија бројева занимала.
Издао је :

- Шта би *Moser* могао да пита.
- Бројећи Хамилтонове кругове у олуји (*Neil, Hayato Ushijima Mwesigwa i Bet Novick)*

Објавио бројне чланке :

- *O Herbertu Wilfu (1931-2012)*
- *Neil Calkin, Fan Chung, Joan Hutchinson, Donald Knuth, Doron Zeilberger (Wilfov učenik), Marko Petkovšek : ,,Stochastic flow diagrams,,*
- *Konačna polja elemenata visokog reda*
- *Gde kraljevi dominiraju*
- *Matrice reda i kolone sume 2*
- *Kraljevi brojanja: Eksplicitne formule, rekurentne relacije I funkcije generisanja*
- *Dobijanje cele particije funkcije.*

Основао је са Хербертом Вилфом часопис „Електронски журнал комбинаторике,, 1994 год.

Херберт Вилф (Herbert S.Wilf)

Рођен 13.јуна 1931 год, у Филаделфији (УСА) а умро 7.јануара 2012 год. у 80 години живота у Вајнвуду, држава Пенсилванија (УСА). Био је професор математике из комбинаторне анализе и рачунарства - специјалиста за комбинаторику и теорију графова на Универзитету у Пенсилванији. Написао је бројне књиге и научно истраживачке радове заједно са својим сарадницима (Doron Zeilberger i Donald Knuth). Један од његових бивших студената Richard Garfild, креатор је карташке игре Магија: Састанак (Magic: The Gathering). Такође, био је и саветник за тезе америчком математичару и економисти E.Roy Weintraub, крајем 60-тих година прошлог века.
Са Neil Calkin –ом, основао Електронски журнал комбинаторике 1994 год. и био његов главни уредник до 2001 год.Неки од његових познатијих чланака су:

- Број независних сетова у Гридовом графу (Calkin, HS Wilf - SIAM Journal on Discrete Matematics, 1998)
- Неједнакост за хроматски број графа (G.Szekeres, HS Wilf - Journal of Combinatorial Theory, 1968)
- Perron-Frobenius теорија и нуле полинома (1962)
- Аргумент целе функције (Bull.Amer.Math , 1961)

Написао је и бројне књиге:

- „А=Б„ (са Doron Zeilberger и Marko Petkovšek)
- Алгоритам и комплексност
- Математика за физичке науке
- „Generatingfunctionology„

Добитник је Leroy P.Steele награде 1998 год. , заједно са Zeilberger – ом за тему „Рационалне функције потврђују комбинаторне идентитете„ објављене у Журналу америчког математичког друштва 1990 године. Наводимо цитат из говора при додели награде:

> „ Нове математичке идеје могу имати утицај на стручњаке у тој области, као и на људе других струка, у смислу развоја тих области, након што је идеја већ изнета. Невероватно једноставне идеје које износе у свом раду Wilf и Zeilberger већ су промениле схватање математике код људи који се баве научним радом као и код високо квалификованих људи других струка. „

У 2002 години, Wilf је добио Ојлерову медаљу од Института за комбинаторику и њених примена.

Џон Фери (John Farey)

Енглески геолог и писац, рођен 1766 године у Вобурну (Bedfordshire), остао је упамћен по математичкој конструкцији низа који је по њему добио и име - Farey низ. Школовао се у Халифаксу у Јоркширу где је остао запажен његов изванредан таленат за математику, цртање, геологију и геодезију. Након завршетка школе, сели се у Лондон где је живео и радио дуги низ година. Живео је добро и зарађивао доста новца, захваљујући ангажовању од стране војвода и других земљопоседника на пословима геолошких испитивања земљишта и проналажења нових ресурса угља и минерала. Писао је о свакојаким темама, почев од хортикултуре, геологије, метеорологије, музике и математике. Дао је значајан допринос у Rees's Cyclopaedia својим чланцима о каналима за наводњавање, минерологији, геодезији и математичким основама звука. Најпознатији Феријев рад је „ Генерални поглед на пољопривреду и минерале у Derbyshire'' (3 тома у периоду 1811-1817.год) за Одбор пољопривреде.
Иако ће историчарима остати познат као геолог, његово име се много више везује за математику где је захваљујући истраживањима на математичким основама звука дошао до конструкције Феријевог низа (Ferey sequence) која су објављена у Филозофском магазину 1816 године. Десет година након тога, умро је 6. јануара 1826 године у Лондону.

Литература:

1. Зоран Петровић, Жарко Мијајловић - „Математичка логика - елементи теорије скупова”
2. N.Calkin and H.S.Wilf – Recounting the rationals, Amer.Math.Monthly 107 (2000) 360-363 str.
3. S.P.Glasby – Enumerating the rationals from Left to Right, Amer.Math.Monthly 118 (2011) 830-835 str
4. Austin David – Trees, Teeth and Time: The matematics of clock making, Feature Column from American Mathematical Society (http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-stern-brocot-original)
5. Alexander Bogomolny- Euclid's Algorithm (http://www.cut-the-knot.org/blue/Euclid.shtml)
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Moritz_Abraham_Stern
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Achille_Brocot
8. https://en.wikipedia.org/wiki/Herbert_Wilf
9. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Farey,_Sr.
10. http://www.zoominfo.com/p/Neil-Calkin/24959051