UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

KLAJNOV MODEL HIPERBOLIČKE GEOMETRIJE RAVNI

MASTER RAD

Autor
Nataša Đurđević

Mentor
dr Miroslava Antić

Beograd, 2014.

Sadržaj

Uvod

Matematičari su dugo verovali da je jedina geometrija koja postoji zapravo geometrija koju je utemeljio Euklid u svojim ,,Elementima", oko 300. godine p.n.e. Po njemu je ova geometrija dobila ime euklidska. U ,,Elementima" Euklid je osnovne stavove geometrije podelio na aksiome i postulate. Od postulata najpoznatiji je peti.

Peti Euklidov postulat. Ako jedna prava u preseku sa dvema drugim obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave će se seći i to sa one strane sa koje su ovi uglovi manji od dva prava.

Danas se geometrija izgrađena na aksiomama i postulatima bez petog Euklidovog naziva apsolutnom geometrijom. Može se pokazati da je u apsolutnoj geometriji tvrđenje petog Euklidovog postulata ekvivalentno sledećem tvrđenju.

Kroz tačku van prave postoji tačno jedna prava koja nema zajedničkih tačaka sa datom pravom.

Brojni matematičari su pokušavali da dokažu da se peti postulat može izvesti iz ostalih i da se geometrija može zasnovati bez njega. Međutim, svi pokušaji su bili bezuspešni. Do preokreta dolazi tek 1829. godine kada je Lobačevski[1] u *Kazanjskom glasniku* objavio svoj rad o neeuklidskoj geometriji. On je zasnovao apsolutnu geometriju i izveo sve posledice njenih aksioma u radu pod nazivom ,,Geometrija" iz 1823. godine. Nakon toga, razmatrao je peti postulat i ustanovio da se može razviti geometrija u kojoj on važi (euklidska geometrija), ali i ona u kojoj on ne važi, nju zovemo geometrijom Lobačevskog ili neeuklidskom geometrijom. U geometriji Lobačevskog pored aksioma apsolutne geometrije važi i nova aksioma:

Kroz tačku van prave postoje bar dve prave koje nemaju zajedničkih tačaka sa datom pravom.

Treba napomenuti da je i Boljaj[2], istvremeno, ali nezavisno od Lobačevskog, otkrio neeuklidsku geometriju, ali njegovom radu nije pridat značaj u tom trenutku. Zato što su njih dvojica nezavisno došli do istog otkrića, ima smisla tu geometriju zvati geometrijom Boljaja-Lobačevskog ili hiperboličkom geometrijom. Međutim, ovo je tek bio početak stvaranja nove geometrije, mnogi istaknuti matematičari tog vremena nisu prihvatali činjenicu da postoji još neka geometrija različita od one koju je Euklid zasnovao. Teško je zamisliti da postoji više od jedne prave koja sadrži datu tačku i nema zajedničkih tačaka sa datom pravom. Za razliku od euklidske, koja je da kažemo ,,očigledna", neeuklidski prostor je teže zamisliti. Zato su za razumevanje ove, na prvi pogled nama ne tako bliske geometrije, jako bitni modeli. Najpoznatiji modeli hiperboličke planimetrije su Klajnov model, Poenkareov disk model i Poeakareov poluravanski model.

U ovom radu je opisan Klajnov model hiperboličke ravni. Ovakav model pr-

[1]Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792-1856), ruski matematičar
[2]Bolyái Janos (1802 1860), mađarski matematičar

vi je osmislio Beltrami[3], a zatim je kasnije taj isti model razradio, posmatrajući ga iz drugog ugla Klajn[4], koji je poznat i po svom Erlangenskom programu. Naime, Beltrami je 1868. godine objavio model hiperboličke ravni unutar trodimenzionog euklidskog prostora. Na ovaj način je pokazao da postoji model u kome uz aksiome apsolutne geometrije važi i aksioma Lobačevskog, a što je još bitnije, ovako konstruisan model je predstavljao dokaz da ako je neprotivrečna euklidska geometrija, tada je neprotivrečna i geometrija Lobačevskog. Klajn je dokazao suprotno, tj. on je napravio model euklidske geometrije unutar hiperboličkog prostora. Ovim je dokazano da su *euklidska geometrija i geometrija Lobačevskog ekvikonzistentne.* Dakle, Klajn je vizuelizacijom hiperboličke geometrije, završio ono što su započeli Lobačevski i Boljaj, dokazavši da je njihova geometrija potpuno ravnopravna sa Euklidovom.

Rad je organizovan na sledeći način. Na početku rada dat je podsetnik na aksiome hiperboličke i projektivne ravni, kao i neke osnovne definicije i teoreme koje će biti korišćene u ostatku teksta.
Zatim je, u drugom poglavlju, nakon uvođenja osnovnih elemenata ravni Klajnovog modela, uvedena i metrika na njemu. Potom je pokazano da ovaj model zaista zadovoljava sve aksiome hiperboličke planimetrije.
U trećem poglavlju izvedeno je euklidsko svojstvo koje zadovoljavaju prave upravne u smislu modela, i opisani su pramenovi pravih Klajnove ravni, na koje se ponovo vraćamo u šestom poglavlju prilikom konstrukcije epicikala.
U četvrtom poglavlju je utvrđeno kojim preslikavanjima možemo opisati refleksiju u odnosu na pravu, a potom su opisane izometrije Klajnove hiperboličke ravni.
Velika pažnja u radu je posvećena konstrukcijama. U petom poglavlju su pokazane konstrukcije središta duži, medijatrise i bisektrise, dok u šestom poglavlju detaljno obrađene konstrukcije epicikala. Pokazano je čime su u Klajnovom modelu hiperboličke ravni predstavljeni krug, oricikl i ekvidistanta koji sadže centar apsolute, a potom su konstruisani i proizvoljni epicikli.
Slike u radu su izrađene pomoću GCLC programa.

---

[3]Eusenio Beltrami (1835-1900), italijanski matematičar
[4]Felix Christian Klein (1849-1925), nemački matematičar

1 Euklidska, hiperbolička i projektivna geometrija

1.1 Euklidska i hiperbolička geometrija

Na samom početku, podsetimo se aksioma na kojima se zasniva apsolutna geometrija, aksioma Lobačevskog i Plejfera, odnosno aksioma euklidske i hiperboličke geometrije, a zatim i nekih bitnih definicija i teorema koje se odnose na izometrije apsolutne ravni kao i pramenove pravih i epicikle ove dve geometrije, videti [6].

Osnovni pojmovi apsolutne, a i euklidske i hiperboličke geometrije su tačke, prostor koji je skup tačaka i prave i ravni, klase podskupova prostora. Pored toga, među osnovne pojmove spadaju i relacije među tačkama dužina tri i četiri koje, redom, zovemo, između i podudarnost parova. Navedimo, prvo, prve tri grupe aksioma.

Aksiome pripadanja ili aksiome incidencije:
Aksioma I1. Svaka prava sadrži najmanje dve razne tačke.
Aksioma I2. Postoji najmanje jedna prava koja sadrži dve tačke.
Aksioma I3 Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke.
Aksioma I4. Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke.
Aksioma I5. Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke.
Aksioma I6. Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke.
Aksioma I7. Ako dve razne tačke neke prave pripadaju jednoj ravni, onda svaka tačka te prave pripada istoj ravni.
Aksioma I8. Ako dve razne ravni imaju jednu zajedničku tačku, onda one imaju najmanje još jednu zajedničku tačku.
Aksioma I9. Postoje četiri nekoplanarne tačke.
Prve četiri aksiome se odnose na geometriju ravni, pa ih nazinamo planimetrijskim, dok se ostale odnose na geometriju prostora, pa ih nazivamo stereometrijskim.

Aksiome rasporeda se odnose na relaciju između.
Aksioma II1. Ako je $B(A, B, C)$, tada su A, B i C tri razne kolinearne tačke.
Aksioma II2. Ako je $B(A, B, C)$, onda je i $B(C, B, A)$.
Aksioma II3. Ako je $B(A, B, C)$, onda nije $B(A, C, B)$.
Aksioma II4. Ako su A i B dve razne tačke, onda postoji tačka C takva da je $B(A, B, C)$.
Aksioma II5. Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke, tada je $B(A, B, C)$, $B(B, C, A)$, $B(C, A, B)$.
Aksioma II6. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i p prava koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $B(B, P, C)$, tada prava p seče pravu CA u tački Q takvoj da je $B(C, Q, A)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $B(A, R, B)$.
Aksioma II6. naziva se još Pašovom aksiomom i odnosi se na geometriju ravni, dok se prvih pet aksioma odnosi na geometriju prave.

Aksiome treće grupe nazivamo aksiomama podudarnosti i one se odnose na relaciju podudarnosti parova tačaka, koju označavamo sa $(A, B) \cong (C, D)$ i čitamo par tačaka (A, B) je podudaran paru tačaka (C, D).

Aksioma III1. Ako su A, B, C, D tačke takve da je $(A, B) \cong (C, D)$ i A = B, tada je i $C = D$.

Aksioma III2. Ako su A i B bilo koje dve tačke, tada je $(A, B) \cong (B, A)$.

Aksioma III3. Ako su A, B, C, D, E, F tačke takve da je $(A, B) \cong (C, D)$ i $(A, B) \cong (E, F)$, tada je $(C, D) \cong (E, F)$.

Aksioma III4. Ako su C i C' tačke dveju otvorenih duži AB i $A'B'$, takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$, tada je i $(A, B) \cong (A', B')$.

Aksioma III5. Ako su A i B dve razne tačke i tačka C teme neke poluprave, tada na toj polupravoj postoji tačka D takva je da $(A, B) \cong (C, D)$.

Aksioma III6. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A', B' tačke ruba neke poluravni takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da važi da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$.

Aksioma III7. Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i $B'C'$, takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ i $(B, D) \cong (B', D')$, tada važi i $(A, D) \cong (A', D')$.

Nakon uvedenog pojma podudarnosti možemo uvesti i pojam izometrije.

Definicija 1. *Svaku bijekciju J prave, ravni ili prostora na sebe, koja slika proizvoljan par tačaka (A, B) na njemu podudaran par tačaka $(J(A), J(B))$, nazivamo izometrijom.*

Na osnovu definicije izometrije sledi da je identičko preslikavanje, odnosno, identiteta vrsta izometrijskog preslikavanja. Pored toga, može se pokazati da postoji jedinstvena neindentička izometrija ravni koje ostavlja invarijantnim dve njene tačke, tj. fiksira sve tačke prave p kojoj pripadaju ove dve tačke.

Definicija 2. *Osna refleksija, odnosno, refleksija u odnosu na pravu p, u oznaci S_p, je neidentička izometrijska transformacija koje svaku tačku prave p ostavlja fiksiranom.*

Dakle, postoje dve izometrije ravni koje fiksiraju sve tačke neke prave p, jedna je identitet, a druga je refleksija u odnosu na pravu p. Važi i sledeća teorema.

Teorema 1. *Svaka izometrija ravni se može predstaviti kao kompozicija najviše tri osne refleksije.*

Na osnovu izometrija ravni možemo definisati podudarnost ravnih geometrijskih likova.

Definicija 3. *Ako postoji izometrija ravni kojom se ravani geometrijski likovi Φ i Φ' slikaju jedan na drugi, reći ćemo da su oni međusobno podudarni i pisaćemo $\Phi \cong \Phi'$.*

Definicija 4. *Ugao je prav ako je podudaran njemu naporednom uglu. Dve prave śu međusobno ortogonalne (normalne), ako sadrže krake pravog ugla.*

Može se pokazati da ako se osnom refleksijom ravni S_p tačka X slika na tačku Y, tada je prava p medijatrisa duži XY. Na osnovu ovog tvrđenja lako se može dokazati da važi sledeća teorema.

Teorema 2. *Refleksija u odnosu na pravu p slika pravu q na sebe ako i samo ako je $p = q$ ili je p normalna na q.*

Navedimo i četvrtu grupu aksioma (aksiome neprekidnosti).

Aksioma IV1. (Arhimedova) Ako su AB i CD dve proizvoljne duži, tada na polupravoj AB postoji konačan niz tačaka $A_1, A_2, ...A_n$ takvih da je $B(A, A_1, A_2, ...A_n)$, pri čemu je svaka od duži AA_1, A_1A_2,... ... $A_{n-1}A_n$ podudarna duži CD i važi $B(A, B, A_n)$.

Aksioma IV2. (Kantorova) Ako je $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ...$ niz zatvorenih duži neke prave, tako da svaka od tih duži sadrži sledeću, tada postoji tačka X koja pripada svakoj duži tog niza.

Posledica prethodne dve aksiome je Dedekindova teorema.

Teorema 3 (Dedekindova teorema za prave)**.** *Ako su sve tačke neke prave p podeljene u dva skupa M i N takva da :*

1) svaka tačka prave p pripada samo jednom od skupova M i N,

2) skupovi M i N su neprazni,

3) između bilo kojih dveju tačaka jednog skupa nema tačaka koje pripadaju drugom,

tada postoji jedinstvena tačka X na pravoj p takva da su sve ostale tačke skupa M sa jedne strane te tačke, a sve ostale tačke skupa N sa druge strane.

Postoje i Dedekindove teoreme za duž i polupravu, koje se definišu na sličan način kao ova za pravu. Osim toga, na osnovu Dedekindove teoreme za duži i prve tri grupe aksioma može se dokazati da važe aksiome neprekidnosti. Jedna od bitnih posledica aksioma neprekidnosti je mogućnost uvodjenja pojma mere duži.

Definicija 5. *Merom duži nazivamo svaku funkciju L koja svakoj duži a dodeljuje realan, pozitivan broj $L(a)$ i pri tome zadovoljava sledeće uslove:*

1) postoji duž mere 1,

2) mere podudarnih duži su medjusobno jednake,

3) ako su a, b i c tri duži za koje važi da je $a + b = c$, onda važi i

$$L(a) + L(b) = L(c).$$

Navedimo neke bitnije osobine mere L.

1) Duž a je manja od duži b ako i samo ako je $L(a) < L(b)$.

2) Duži su podudarne ako i samo ako su im mere međusobno jednake.

3) Ako su a, b i c tri duži takve da je $a - b = c$, onda je $L(a) - L(b) = L(c)$.

4) Ako je k prirodan broj, onda je $L(ka) = kL(a)$ i $L(\frac{1}{2^k}a) = \frac{1}{2^k}L(a)$.

5) Funkcija L' je takođe mera duži ako i samo postoji pozitivan realan broj λ, takav da za proizvoljnu duž a važi $L'(a) = \lambda L(a)$.

6) Ako je a proizvoljna duž, tada postoji jedinstvena mera L za koju je $L(a) = 1$.

7) Za svaki pozitivan realan broj r postoji duž a čija je mera upravo r, tj. $L(a) = r$.

Mera apsolutnu ravan čini metričkim prostorom, pa je još nazivamo i metrikom.

Prethodno navedene četiri grupe aksioma su aksiome apsolutne geometrije. U zavisnosti od toga koja od naredne dve aksiome paralelnosti važi, pored prethodnih aksioma, razlikujemo euklidsku i hiperboličku geometriju.

Aksioma Ve. (Plejferova aksioma paralelnosti) Postoje tačka A i prava a, koja je ne sadrži, takve da u ravni kojoj pripadaju ne postoji više od jedne prave koja sadrži tačku A i sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

Aksioma Vh. (aksioma Lobačevskog) Postoje tačka A i prava a, koja je ne sadrži, takve da u ravni kojoj pripadaju postoji više od jedne prave koja sadrži tačku A i sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

Ukoliko važi Plejferova aksioma paralelnosti, reč je o euklidskoj, a ako važi aksioma Lobačevskog, reč je o hiperboličkoj geometriji. U apsolutnoj geometriji se može pokazati da ako jedna od prethodne dve aksiome važi za bar jednu tačku i pravu, onda će važiti za svaku tačku i svaku pravu tog prostora. Dakle, ako u nekom modelu apsolutne ravni utvrdimo da za jednu tačku i pravu koja je ne sadrži postoji jedinstvena, ili postoje bar dve prave koje nemaju zajedničkih tačaka sa uočenom pravom, a sadrže datu tačku, onda je ta ravan euklidska, odnosno hiperbolička. U samoj apsolutnoj ravni važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Za tačku A i pravu a, koja je ne sadrzi, u apsolutnoj ravni postoje tačno dve poluprave p' i q' sa temenom u A disjunktne sa a, takve da svaka poluprava sa temenom A, koja pripada uglu kojem pripada i a, sače a, a sve koje ne pripadaju je ne seku.*

Definicija 6. *Za poluprave p' i q' reći ćemo da su paralelne datoj pravoj a. Prave p i q, koje redom sadrže poluprave p' i q', su paralelne pravoj a, u oznaci $p||a$ i $q||a$.*

Na osnovu Plejferove aksiome zaključujemo da u euklidskoj ravni poluprave p' i q' pripadaju istoj pravoj, dakle $p = q$.

U hiperboličkoj ravni ove poluprave će pripadati dvema različitim pravama, p i q. Ugao između poluprave p' (ili q') i poluprave, koja za teme ima tačku A i ortogonalna je na a, nazivamo uglom paralelnosti tačke A i prave a. Pored pravih p i q postoji još beskonačno mnogo pravih koje sadrže tačku A, a nemaju zajedničkih tačaka sa pravom a, to su sve one prave koje sadrže tačke ugla koji formiraju prave p i q, a kojem ne pripada prava a. Prave koje sadrže tačku A, a ne seku pravu a i nisu paralelne sa njom, zvaćemo hiperparalelnim. Može se pokazati da postoji jedinstvena prava normalna na dve hiperparalelne prave.

Definicija 7. *Podskup χ skupa svih pravih neke ravni takvih da je za svake tri prave a, b, c iz tog skupa kompozicija $S_c S_b S_a$ osnih refleksija, takođe osna refleksija, zvaćemo pramenom pravih ako van χ ne postoji prava d takva da je za svake dve prave $a, b \in \chi$ kompozicija $S_d S_b S_a$ opet osna refleksija.*

U euklidskoj ravni postoje dva tipa pramenova:
1) konkurentni pramen čine sve prave koje se seku u datoj tački,
2) pramen paralelnih pravih čine sve prave paralelne datoj pravoj uključujući i nju.

U hiperboličkoj ravni postoje tri vrste pramenova:
1) konkurentni (eliptički) pramen,
2) paralelni (parabolički) pramen,
prethodna dva pramena se definišu analogno kao i u euklidskoj ravni i
3) hiperparalelni (hiperbolički) pramen koji čine hiperparalelne prave, tj. sve prave ravni koje imaju zajedničku normalu.

Definicija 8. *Neka je χ pramen pravih i X bilo koja tačka tog pramena, koja nije incidentna sa svim pravama tog skupa. Skup svih tačaka osnosimetričnih tački X u odnosu na prave pramena χ nazivamo epiciklom i označavamo sa $\varepsilon(\chi, X)$.*

Ako je χ pramen pravih (apsolutne ravni) konkurentnih u tački O, epicikl će činiti skup tačaka koje su udaljene od tačke O kao i tačka X. Ovaj epicikl zvaćemo krugom. Tačku O zovemo centrom kruga, a duž OX poluprečnikom kruga.

U euklidskoj ravni, pored kruga, postoji još jedna vrsta epicikla, to je epicikl koji odgovara pramenu paralelnih pravih. On je predstavljen euklidskom pravom.

U hiperboličkoj ravni postoje, pored kruga, još dve vrste epicikala. Epicikl koji odgovara pramenu paralelnih pravih nazivamo oriciklom, a epicikl koji odgovara hiperparalelnom pramenu nazivamo ekvidistantom. Ekvidistanta će predstavljati skup tačaka koje su jednako udaljene od zajedničke normale pramena χ. Tu normalu nazivamo osnovicom ekvidistante. Ukoliko preslikavamo tačku koja pripada osnovici ekvidistante, ta ekvidistanta je prava. Ukoliko je udaljenost tačke od osnove veća od nule, ekvidistanta nije prava.

1.2 Euklidska ravan kao model projektivne ravni

Pored prethodno navedenih teorema i tvrđenja koja važe u euklidskoj i hiperboličkoj geometriji, za upoznavanje sa Klajnovim modelom hiperboličke planimetrije biće nam potrebno i poznavanje projektivne geometrije. Ona nam je važna jer su izometrije ovog modela, kako će se kasnije pokazati, predstavljene projektivnim preslikavanjima. Na početku, podsetimo se aksioma projektivnog prostora, videti [1] i [11].

U projektivnom prostoru su, kao i u euklidskom i hiperboličkom, osnovni pojmovi tačke, prostor, prave i ravni, kao i relacija dužine četiri koju nazivamo razdvojenošću parova tačaka. Navedimo aksiome projektivnog prostora.

Aksiome incidencije.

I1. Za svake dve tačke A i B postoji prava incidentna i sa tačkom A i sa tačkom B.

I2. Za svake dve tačke A i B postoji najviše jedna prava incidentna sa tačkama A i B.

I3. Za svaku pravu postoje bar tri tačke koje su sa njom incidentne. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom.

I4. Za svake tri tačke A, B, C koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji ravan koja je incidentna sa svakom od njih. Sa svakom ravni incidentna je bar jedna tačka.

I5. Za svake tri tačke koje nisu incidentne sa istom pravom, postoji najviše jedna ravan koja je incidentna sa svakom od njih.

I6. Ako su dve tačke incidentne sa pravom a i sa ravni α, onda je svaka tačka, koja je incidentna sa pravom a, incidentna i sa ravni α.

I7. Ako postoji jedna tačka koja je incidentna i sa ravni α i sa ravni β, onda postoji bar još jedna tačka incidentna sa svakom od ove dve ravni.

I8. Postoje bar četiri tačke koje nisu incidentne sa istom ravni.

I9. Ako su dve prave incidentne sa istom ravni, incidentne su i sa istom tačkom.

Aksiome razdvojenosti. Njima je opisana relacija razdvojenosti parova tačaka. Ako želimo da označimo da par tačaka (A, B) razdvaja par tačaka (C, D) pišemo $A, B \div C, D$.

II1. Za svake tri tačke A, B, C prave p, postoji tačka D, koja pripada p, takva da je $A, B \div C, D$.

II2. Ako $A, B \div C, D$ tada su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke.

Razdvojenost parova tačaka je uzajamna i ne zavisi od rasporeda tačaka u svakom paru, tj. ako je zadovoljena relacija $A, B \div C, D$, zadovoljena je i svaka od sledećih relacija: $C, D \div A, B$; $B, A \div C, D$; $A, B \div D, C$; $B, A \div D, C$.

II3. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke, zadovoljena je jedna i samo jedna od relacija: $A, B \div C, D$; $A, C \div B, D$; $A, D \div B, C$.

II4. Ako su A, B, C, D, E razne kolinearne tačke, takve da $A, B \div C, D$ i $A, B \div C, E$ onda $\neg(A, B \div D, E)$.

II5. Ako su A, B, C, D, E razne kolinearne tačke, takve da $\neg(A, B \div C, D)$ i $\neg(A, B \div C, E)$ onda $\neg(A, B \div D, E)$.

II6. Neka su p i p' dve komplanarne prave. Ako su tačke A, B, C, D incidentne sa pravom p, a tačke A', B', C', D' incidentne sa pravom p', tako da su prave AA', BB', CC', DD' konkurentne, tada $A, B \div C, D \Longrightarrow A', B' \div C', D'$.

Na osnovu ovih aksioma, važiće sledeća teorema.

Teorema 5. *Neka su na pravoj p date dve tačke A i B. Sve ostale tačke prave p možemo podeliti u dva povezana skupa, tako da ma koje dve tačke istog skupa obrazuju par koji ne razdvaja tačke A i B, a ma koje dve tačke iz različitih skupova obrazuju par koji razdvaja tačke A i B.*

Definicija 9. *Neka su A, B, C, D četiri različite kolinearne tačke. Par tačaka A, B razdvaja par C, D ako tačke C i D nisu u istom povezanom skupu.*

Definicija 10. *Svaki od ova dva skupa nazivamo odsečkom.*

Preostala je još jedna aksioma kojom je opisan projektivni prostor, to je aksioma neprekidnosti.

III Neka je AB otvoren odsečak projektivne prave i neka su M i N dva skupa tačaka koja zadovoljavaju sledeće uslove:

1) svakom od skupova M i N pripada najmanje jedna tačka,

2) svaka tačka, bilo skupa M, bilo skupa N, pripada odsečku AB,

3) Svaka tačka odsečka AB pripada tačno jednom od skupova M i N,

4) Ako je X' tačka skupa M, a X" tačka skupa N, tada važi $A, X" \div B, X'$,

tada na odsečku AB postoji jedinstvena tačka X takva da svaka tačka onog otvorenog odsečka AX, koja ne sadrži B, pripada skupu M, a svaka tačka onog otvorenog odsečka XB, koja ne sadrži A, pripada skupu N.

Pokušajmo da nađemo model projektivne ravni. U euklidskoj ravni važe sve aksiome projektivne geometrije ravni, sem aksiome I9. Dakle, potrebno je još da važi da se svake dve prave euklidske ravni seku, pa da ona bude projektivna ravan. Ako posmatramo proizvoljnu pravu p i tačku A, koja joj ne pripada, u euklidskoj ravni koju one određuju postoji jedinstvena prava p' koja sadrži tačku A, a nema presečnih tačaka sa pravom p, to je prava paralelna pravoj p. Ako smatramo da se prave p i p' seku u beskonačno dalekoj tački i tu tačku smatramo novim elementom dodatom euklidskoj ravni, tada će prave p i p' imati zajedničku tačku. Pokazuje se da će sve prave paralelne pravoj p sadržati istu beskonačno daleku tačku. Dakle, svaki pramen paralelnih pravih ove ravni određivaće jednu beskonačnu tačku, a sve te beskonačne tačke možemo smatrati da pripadaju jednoj beskonačno dalekoj pravoj, koja je podskup ove proširene euklidske ravni. Beskonačno daleke tačke ove projektivne ravni zovemo idealnim tačkama, a beskonačno daleku pravu idealnom pravom. Kako na ovaj način svaka prava ima jednu beskonačno daleku tačku, ona postaje zatvorena, pa relacija između gubi smisao i važiće aksiome razdvojenosti parova tačaka. Može se dokazati da euklidska ravan proširena idealnom pravom zapravo model projektivne ravni.

Pokazuje se da tačke projektivne ravni možemo koordinatizovati. Ako posmatramo samo tačke prave p u projektivnoj ravni, možemo im pridruziti uredjene parove $(a : b)$, gde je bar jedna koordinata različita od nule, tako da $(a : b)$ i $(\lambda a : \lambda b)$, pri čemu je skalar $\lambda \neq 0$, predstavljaju istu tačku. Takve koordinate nazivaju se homogene projektivne koordinate. Homogene koordinate konačnih tačaka prave će biti oblika $(\alpha : \beta)$, $\beta \neq 0$, tj. $\left(\frac{\alpha}{\beta} : 1\right)$, dok je beskonačno daleka tačka predstavljena sa $(1 : 0)$. Na ovaj način mi svakoj tački A ove realne projektivne prave p možemo dodeliti jedan realan broj $\frac{\alpha}{\beta}$, dok beskonačnoj tački dodeljujemo vrednost ∞. Broj koji dodeljujemo tački A nazivamo njenom projektivnom koordinatom. Jedan sistem projektivnih koordinata na pravoj odredjen je na jedinstven način sa tri tačke kojima dodeljujemo koordinate beskonačno, nula i jedan.

Definicija 11. *Neka su A, B, C, D četiri kolinearne tačke sa projektivnim koordinatama a, b, c, d, redom. Broj*

$$(A, B, C, D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

se naziva dvorazmera tačaka A, B, C i D.

Jedna od bitnih osobina dvorazmere jeste da ona ne zavisi od sistema u odnosu na koji smo tačkama dodelili projektivne koordinate. Osim toga važiće:

$$(A, B, C, D) = (C, D, A, B);$$

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = \frac{1}{(A, B, C, D)};$$

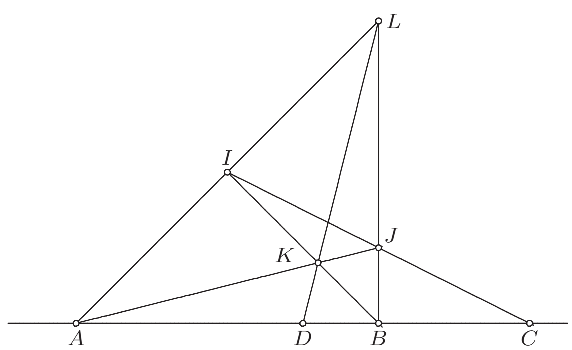
$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D).$$

Pokazuje se da par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D, ako i samo ako je $(A, B, C, D) < 0$.

Definicija 12. *Ako su A, B, C i D četiri različite kolinearne tačke takve da je $(A, B, C, D) = -1$, što označavamo sa $H(A, B, C, D)$, tada kažemo da su tačke C i D harmonijski konjugovane u odnosu na A i B.*

Ako su date tri razne kolinearne tačke A, B, C, tada postoji jedinstvena četvrta tačka D takva da je dvorazmera ove četiri tačke jednaka unapred zadatom broju. To naravno važi i u specijalnom slučaju kada želimo da nađemo tačku koja je harmonijski spregnuta trima unapred datim tačkama.

Neka su date kolinearne tačke A, B i C. Pokaže se da tačku D harmonijski



Slika 1: Konstrukcija harmonijski konjugovanih tačaka

konjugovanu sa C u odnosu na A i B možemo odrediti na sledeći način. Neka su I i J proizvoljne tačke kolinearne sa C. Označimo sa L presek pravih AI i BJ, a sa K presek pravih AJ i BI. Tačka D će biti tačka preseka pravih AB i KL, videti sliku 1.

Važe i sledeće teoreme.

Teorema 6. *Neka su A, B, C, D četiri kolinearne tačke takve da se parovi A, B i C, D ne razdvajaju. Tada postoji jedinstven par tačaka E, F takav da je $H(A, B, E, F)$ i $H(C, D, E, F)$.*

Teorema 7. *Neka su A, B, C, D i A, E, F, G dva skupa kolinearnih projektivnih tačaka na različitim pravama u realnoj projektivnoj ravni za koje važi $(A, B, C, D) = (A, E, F, G)$. Tada su prave BE, CF i DG konkurentne.*

Kao što se na projektivnoj pravoj tačkama mogu dodeliti koordinate, slično se i tačkama projektivne ravni pridruzuju homogene koordinate oblika $(a : b : c)$, pri čemu su za svaki skalar $\lambda \neq 0$ i $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ koordinate ove iste tačke i važi da je $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Sistem ovakvih koordinata određen je sa četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne, a koje dobijaju redom koordinate $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ i $(1 : 1 : 1)$. Pokazuje se da je opšta jednačina projektivne prave $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, pa njoj pridružujemo homogene koordinate $[u_1 : u_2 : u_3]$.

Definicija 13. *Projektivna kriva drugog reda je skup projektivnih tačaka čije homogene koordinate zadovoljavaju jednačinu*

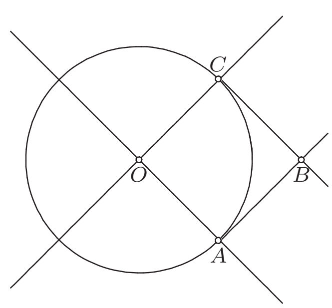
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Fxz + 2Gyz + Hz^2 = 0. \tag{1}$$

Primetimo da jednačinu projektivne krive drugog reda možemo predstaviti i u matričnom obliku na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & F \\ B & C & G \\ F & G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

U projektivnoj ravni, kao i u euklidskoj, postoje dve vrste krivih drugog reda: nedegenerisane i degenerisane. U proširenom euklidskom modelu nedegenerisane krive mogu biti, u zavisnosti od položaja prema idealnoj pravoj elipsa, hiperbola i parabola. Degenerisane krive drugog reda svode se na dve projektivne prave, jednu projektivnu pravu, projektivnu tačku ili prazan skup.

Primer 1. *Skup projektivnih tačaka opisan jednačinom $x^2 + y^2 = z^2$ je nedegenerisana kriva drugog reda.*



Slika 2: Krug je projektivna nedegenerisana kriva

U projektivnoj ravni tangenta na nedegenerisanu krivu drugog reda je prava koja ima samo jednu zajedničku tačku sa njom. Svaka nedegenerisana kriva

drugog reda je na jedinstven način određena sa pet elemenata, pri čemu pod elementima smatramo tačke koje joj pripadaju ili tangente na nju.
Ako posmatramo euklidski model ravni kome smo dodali beskonačno daleke tačke možemo uočiti sledeći koordinatni sistem. Uočimo dve ortogonalne prave i jedinični krug sa centrom O u preseku pravih. Neka krug sece date prave u tačkama A i C, a prave koje sadrže, redom, tačke A i C i paralelne su sa pravama OC i OA seku se u tački B, kao na slici 2 . Dodelimo idealnim tačkama pravih OA i OC homogene koordinate $(1:0:0)$ i $(0:1:0)$, redom, a neka tačkama O i B koordinate $(0:0:1)$ i $(1:1:1)$, redom. U tom slučaju je dati krug opisan jednačinom $x^2+y^2-z^2=0$, pa jeste kriva drugog reda.

Definicija 14. *Projektivna transformacija jedne projektivne prave na drugu je bijektivno preslikavanje oblika $\sigma : X \longrightarrow A \cdot X$, pri čemu je A regularna matrica dimenzije 2×2, a X je matrica dimenzija 2×1 čiji su elementi homogene koordinate projektivne tačke sa prave koju preslikavamo.*

Teorema 8. *Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke različitih tačaka projektivne prave p. Tada postoji jedinstveno projektivno preslikavanje projektivne prave p koje tačke A, B, C slika redom na tačke A', B', C'.*

Na sličan način definišemo projektivne transformacije ravni.

Definicija 15. *Projektivna transformacija projektivne ravni je bijektivno preslikavanje koje slika projektivnu ravan na samu sebe i oblika je $\sigma : X \longrightarrow A \cdot X$, pri čemu je A regularna matrica dimenzije 3×3, a X je matrica dimenzija 3×1 čiji su elementi homogene koordinate projektivne tačke koju preslikavamo. Matrica A je matrica koja je pridružena toj transformaciji.*

Teorema 9 (Osnovna teorema projektivne geometrije)**.** *Neka su A, B, C, D i A', B', C', D' dve četvorke različitih tačaka jedne projektivne ravni, u kojima nikoje tri tačke nisu kolinearne. Postoji jedinstvena projektivna transformacija ravni, σ, koja tačke A, B, C, D slika redom na tačke A', B', C', D'.*

Jedna od najbitnijih osobina projektivnih transformacija prave i ravni jeste da one čuvaju dvorazmeru. Pored toga, može se pokazati da projektivne transformacije ravni čuvaju kolinearnost i incidenciju. Posledica toga je to da se projektivne krive drugog reda slikaju opet na krive drugog reda i to degenerisane na degerisane, a nedegerisane opet na nedegerisane. Bitno je naglasiti da se projektivnom transformacijom proširene euklidske ravni elipsa ne mora uvek preslikati na elipsu, njena slika može biti npr. parabola. Isto važi za ostale projektivne nedegenerisane krive drugog reda. Kako projektivna preslikavanja čuvaju kolinearnost i incidentnost, a nedegenerisanu krivu drugog reda slikaju opet na nedegenerisanu krivu drugog reda, slika tangente na tu koniku mora imati jednu zajedničku tačku sa slikom konike, tj. tangente će se projektivnim transformacijama slikati na tangente.

Definicija 16. *Ako pri projektivnom preslikavanju postoji prava čije su sve tačke fiksne, ona se zove osa.*

Definicija 17. *Ako pri projektivnom preslikavanju postoji tačka takva da je svaka prava kroz nju fiksna, ona se zove centar.*

Važi sledeća teorema.

Teorema 10. *Projektivna transformacija ravni ima osu ako i samo ako ima centar.*

Definicija 18. *Projektivno preslikavanje koje ima osu zovemo homologija. Ako centar ne pripada osi, onda je homologija hiperbolička, a ako pripada homologija je parabolička.*

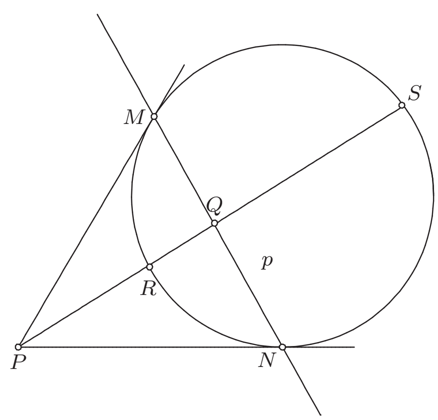
Svaka homologija je jedinstveno određena osom, centrom i parom tačaka A i $A' \neq A$ takvim da se A slika u A'.
Pretpostavimo da hiperbolička homologija ima osu s i centar S. Neka je M proizvoljna tačka projektivne ravni i M' njena slika pri ovoj homologiji. Označimo sa M_s tačku preseka ose s i prave SM. Ako pri tome važi $H(S, M_s, M, M')$, onda će ovu vrednost dvorazmere imati svaka tačka projektivne ravni sa njoj odgovarajućim tačkama, pa takvu homologiju zovemo *harmonijskom*.

Definicija 19. *Neka je nedegenerisana kriva drugog reda predstavljena jednom od jednačina 1 ili 2 i označimo sa A simetričnu matricu kojom je kriva određena. Tačku i pravu čije kolona matrice homogenih koordinata, označenih redom sa P i p, zadovoljavaju jednačinu*

$$\lambda p^T = AP$$

nazivamo polom i polarom. λ je skalar različit od nule.

Može se pokazati da ako su pol i polara incidentni, tada polara predstavlja tangentu na krivu u polu. Ako je prava tangenta, njen pol je dodirna tačka, a ako tačka, koju uzimamo za pol, pripada krivoj, njoj odgovarajuća polara je tangenta na krivu baš u toj tački. Takođe, može se pokazati da ako polara p sadrži tačku S, koja je pol prave s, tada će i s sadržati tačku P, pol prave p. Ako polara p seče krivu drugog reda u tačkama M i N, tada će tangente na krivu u ovim tačkama (koje predstavljaju polare tačaka M i N) sadržati pol P prave p, tj. tačka P će biti presek tangenti na krivu u tačkama M i N. Važi i sledeća teorema.



Slika 3: Tačke koje pripadaju nedegenerisanoj krivi drugog reda su harmonijski spregnute u odnosu na nju

Teorema 11. *Neka su tačka P i prava p odgovarajući pol i polara nedegenerisane krive drugog reda, pri čemu polara p seče datu krivu u dvema tačkama. Ako neka prava, koja sadrži pol P, seče krivu u tačkama R i S, a polaru u tački Q tada važi $H(P,Q,R,S)$, tj. tačke P i Q su harmonijski spregnute u odnosu na datu krivu, slika 3.*

Primer 1.1 Neka prava p seče krug, za koji smo pokazali da je nedegenerisana kriva drugog reda, u dvema tačkama M i N. Odgovarajući pol prave p, u odnosu na ovaj krug, biće tačka P, koja se nalazi u preseku tangenti u tačkama M i N, dakle, tačka P će sa naláziti van kruga. Neka proizvoljna prava, koja sadrži pol P, seče kružnicu u tačkama R i R', a polaru u tački A tada na osnovu teoreme 11 važi $H(P,A,R,R')$. Uočimo homologiju f određenu centrom P, osom p i parom tačaka R i R'. Ova homologija će biti harmonijska i ako je B proizvoljna tačka ravni, B' njena slika, a tačka A' presek prave PB sa osom, tada mora važiti $H(P,A',B,B')$. Dakle, ovom homologijom će se svaka tačka sa kružnice slikati opet na tačku sa kružnice, tj. homologijom f dati krug se slika na samog sebe. Šta se dešava sa tačkama unutar kružnice? Zbog ove vrednosti dvorazmere, one će se slikati, takođe, na tačke u unutrašnjosti kružnice. Osim toga, zbog negativne vrednosti dvorazmere, tačke sa prave p i tačka P razdvajaju odgovarajuće parove tačaka i njihovih slika pri homologiji f, pa se deo unutrašnjosti kruga sa jedne strane prave p slika u deo unutrašnjosti sa druge strane i obrnuto.

Definicija 20. *Neka je PQ prečnik euklidskog kruga sa centrom O, a A i B tačke kolinearne sa P i Q. Kažemo da su tačke A i B inverzne u odnosu na krug ako važi $H(A,B,P,Q)$.*

Na ovaj način definišemo involutivno preslikavanje ravni bez tačke O. Pokaže se da se prava koja sadrži centar kruga O, pri inverziji se slika na samu sebe bez tačke O, a prava koja ne sadrži O, se slika kružnicu koja sadrži O, opet bez tačke O. Kako je inverzija involutivna, slika kružnice koja sadrži tačku O, biće prava koja ne sadrži O. Slika kružnice koja ne sadrži tačku O, biće ponovo neka kružnica koja ne sadrži centar kruga O.

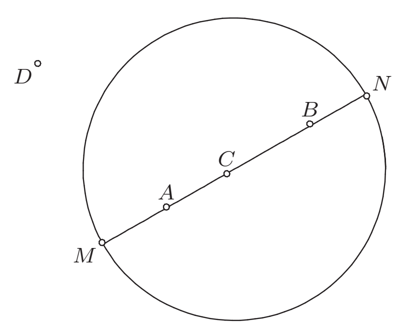
2 Opis Klajnovog modela hiperboličke ravni

2.1 Osnovne definicije

U ovom odeljku predstavićemo konstrukciju Klajnovog modela hiperboličke geometrije ravni ([3], [4], [5]). Klajn je hiperboličku ravan predstavio diskom proizvoljnog poluprečnika koji pripada proizvoljnoj euklidskoj ravni. Prvo ćemo opisati pojmove vezane za Klajnov disk, a zatim, u sledeća dva odeljka, ćemo uvesti metriku u ovom skupu i pokazati da Klajnov disk zadovoljava aksiome hiperboličke ravni.

Smatramo da disk ima poluprečnik 1. Jediničnu kružnicu, koja je granica diska, zovemo apsolutom. Neeuklidske tačke su predstavljene tačkama unutar apsolute, njih ćemo zvati h-tačkama. Tačke koje pripadaju apsoluti nazivamo nesvojstvenim, a one koje su van apsolute idealnim tačkama. Nesvojstvene i idealne tačke ne smatramo objektima Klajnove hiperboličke ravni. Tačke koje u radu nazivamo idealnim, nisu istovetne idealnim tačkama koje dodajemo euklidskoj ravni, usled čega ona postane projektivna, jer u ovom slučaju idealnim tačkama nazivamo sve tačke euklidske ravni van jediničnog diska.

Neeuklidska prava, koju zovemo h-prava, je predstavljena otvorenom euklidskom duži koja predstavlja tetivu apsolute. Dva neeuklidska objekta pripadaju jedan drugom ako oni u euklidskom smislu pripadaju jedan drugom. Kažemo da se neeuklidska tačka C nalazi između neeuklidskih tačaka A i B, što označavamo sa $B_h(A, C, B)$, ako se u euklidskom smislu tačka C nalazi između tačaka A i B. Na slici 4 je prikazana h-prava sa nesvojstvenim tačkama M i N i kojoj pripadaju h-tačke A, C i B, za koje važi $B_h(A, C, B)$.



Slika 4: Elementi Klajnove hiperboličke ravni

Svaku euklidsku duž AB čiji krajevi A i B su tačke unutar apsolute smatramo neeuklidskom duži, odnosno h-duži, a deo duži koji pripada unutrašnjosti apsolute, čije jedno teme pripada apsoluti, a drugo je h-tačka predstavlja neeuklidsku polupravu, odnosno h-polupravu. Možemo uočiti da neeuklidska prava razlaže neeuklidsku ravan na dve oblasti koje nazivamo neeuklidskim poluravnima, a tu h-pravu nazivamo rubom poluravni. Dve h-poluprave, koje imaju zajedničko teme, razlažu neeuklidsku ravan na dve oblasti koje se nazivaju neeuklidski uglovi, odnosno h-uglovi, a te dve h-poluprave nazivamo kracima tih uglova. Ako su A, B i C tri različite neeuklidske tačke koje nisu kolinearne, tada skup koji se sastoji iz tačaka duži AB, AC i BC nazivamo neeuklidskim trouglom, tj. h-trouglom. Skup koji se sastoji od neeuklidskih tačaka $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ i tačaka n otvorenih duži $A_1A_2, A_2A_3, ...A_nA_{n+1}$ nazivamo neeuklidskom poligonskom linijom i obeležavamo je sa $A_1A_2...A_{n+1}$. Ako su h-tačke A_1 i A_{n+1} istovetne, poligonsku liniju $A_1A_2...A_{n+1}$ kod koje nikoja tri uzastopna temena nisu kolinearne h-tačke, nazivamo neeuklidskim poligonom $A_1A_2...A_n$. Pojam neeuklidske triangulacije neeuklidskog poligona, zatim, pojam ugla neeuklidskog trougla i poligona, kao i ostali objekti neeuklidske ravni, uvode se analogno kao i u apsolutnoj geometriji.

Projektivna preslikavanja euklidske ravni koja sadrži apsolutu na samu sebe, koja Klajnov disk, a samim tim i apsolutu ostavljaju invarijantnim zovemo h-izometrijama. Dve h-figure su podudarne u Klajnovom modelu, odnosno h-podudarne, ako postoji h-izometrija koje preslikava jednu figuru na drugu.

Primer 2.1 Posmatrajmo proizvoljnu h-pravu p' u Klajnovom disku. Označimo sa p euklidsku pravu koja je sadrži i sa P pol prave p u odnosu na apsolutu. Neka, prvo p ne sadrži dijametar apsolute. Tada harmonijska homologija sa osom p centrom P slika apsolutu u sebe, unutrašnjost apsolute u unutrašnjost apsolute pa predstavlja h-izometriju. Pritom, tačke h-prave p' su invarijantne, a oblast sa jedne strane h-prave p' slika u oblast sa druge strane p'. Ako p sadrži dijametar apsolute, onda je njen pol projektivno idealna tačka, a prave koje je sadrže su ortogonalne na p. Tada je harmonijska homologija sa osom p i centrom P euklidska refleksija u odnosu na p i ona zadovoljava iste osobine kao i harmonijska homologija čiji centar nije idealna tačka.

2.2 Metrika u Klajnovom modelu

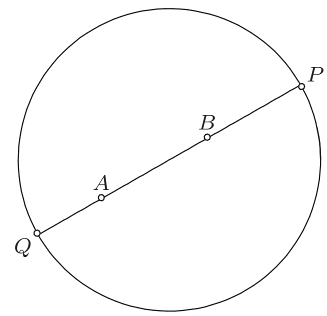
Postavlja se pitanje kako meriti dužinu h-duži AB u Klajnovom disku, tako da, kada se uverimo da jeste reč o modelu hiperboličke ravni, imamo meru u toj geometriji. Konstruisaćemo odgovarajuću meru ([4], [9]).

Kada bismo dužinu merili kao što je inače merimo u euklidskoj geometriji, odnosno, ako bismo koristili meru indukovanu iz euklidske ravni, h-prava, koja je predstavljena tetivom, bi imala konačnu meru. Pored toga, h-duži se h-izometrijama, projektivnim preslikavanjima, slikaju na njima h-podudarne h-duži, a mera treba da bude invarijantna za ova presikavanja. Projektivna preslikavanja nisu euklidske izometrije, pa zaključujemo da h-podudarne duži neće imati istu dužinu u euklidskom smislu, te moramo naći neku novu funkciju mere koja neće imati prethodno navedene mane.

Kako projektivna preslikavanja čuvaju dvorazmeru, očekivano je da funkcija dužine bude definisana baš pomoću ovog pojma.

Definicija 21. *Neka su P i Q nesvojstvene tačke apsolute koje odgovaraju h-pravoj određenoj h-tačkama A i B, slika 5. Rastojanje između tačaka A i B definišemo na sledeći način:*

$$d(A,B) = \frac{c}{2}\left|\ln(A,B,P,Q)\right|.$$



Slika 5: Neeuklidska duž AB

Konstantu c biramo tako da duži koju smo izabrali za jediničnu odgovara dužina 1. Mi ćemo u ostatku teksta smatrati da je $c = 2$.

Neka su na pravoj PQ uvedene homogene koordinate. Iako nije neophodno, zbog jednostavnijeg razmatranja, pretpostavimo da je tačka sa koordinatom ∞ jedna od idealnih tačaka prave AB, odnosno da se nalazi van apsolute. Tada su tačkama A, B, P, Q redom dodeljene vrednosti $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, a funkciju rastojanja možemo zapisati kao:

$$d(a,b) = |\ln(a,b,p,q)| = \left|\ln\left(\frac{p-a}{p-b} : \frac{q-a}{q-b}\right)\right|.$$

Proverimo da li je funkcija dobro definisana. Kako je segment AB unutar segmenta PQ, važiće da su redom izrazi $p-a$ i $p-b$, odnosno $q-a$ i $q-b$ istog znaka, tj. $\frac{p-a}{p-b} : \frac{q-a}{q-b} > 0$, pa izraz možemo logaritmovati. Zapazimo i da ako je tačka A fiksna, a B menja položaj po h-pravoj PQ, $d(a,b) \to 0$ kad $b \to a$ i da $d(a,b) \to +\infty$ kada $b \to p$ ili $b \to q$, pa funkcija d svakoj duži dodeljuje pozitivan, realan broj. Važi i da je $d(a,b) = d(b,a)$, jer je $(b,a,p,q) = (a,b,p,q)^{-1}$, pa je $|\ln(b,a,p,q)| = |-\ln(a,b,p,q)|$.

Proverimo da li ova finkcija zadovoljava osobine mere.

1) Već smo utvrdili da vrednost funkcije može težiti nuli, ali i pozitivno beskonačnoj vrednosti. Međutim kako je funkcija definisana za sve tačake koje pripadaju hiperboličkoj ravni i pri tome, kao kompozicija neprekidnih funkcija, d je i sama neprekidna, pa zaključujemo da za bilo koji realni, pozitivan broj postoji duž čija je on mera. Tako će postojati i duž mere jedan.

2) Ako su AB i $A'B'$ podudarne duži sa odgovarajućim nesvojstvenim tačkama P, Q i P', Q', redom, tada postoji projektivno preslikavanje koje slika apsolutu u sebe, a pravu AB u pravu $A'B'$, pa se par nesvojstvenih tačaka P, Q slika u par P', Q', a par A, B u par A', B'. Kako projektivno preslikavanje čuva dvorazmeru, uz eventualnu permutaciju tačaka u zasebnim parovima, važiće da je $(A,B,P,Q) = (A',B',P',Q')$, ili $(A,B,P,Q) = (A',B',P',Q')^{-1}$, pa će podudarne duži imati istu meru, $d(A,B) = d(A',B')$.

3) Iz jednakosti

$$\left(\frac{p-a}{p-b}\cdot\frac{q-b}{q-a}\right)\cdot\left(\frac{p-b}{p-c}\cdot\frac{q-c}{q-b}\right)\cdot\left(\frac{p-c}{p-a}\cdot\frac{q-a}{q-c}\right)=1$$

dobijamo

$$\ln(a,b,p,q)+\ln(b,c,p,q)+\ln(c,a,p,q)=0,$$

tj. $\pm d(a,b)\mp d(c,b)\mp d(a,c)=0$, pa ako je c „između"a i b važiće da je $d(a,b)-d(a,c)-d(c,b)=0$, tj. $d(a,c)+d(c,b)=d(a,b)$. Možemo zaključiti da ako važi da je $AC+CB=AB$, tada važi i $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$.

Na osnovu prethodnih zaključaka možemo reći da funkcija d zadovoljava sve uslove da bude mera duži u Klajnovom modelu hiperboličke planimetrije.

2.3 Klajnov disk je model hiperboličke ravni

Pokažimo sada da prethodno izvedene konstrukcije zadovoljavaju aksiome hiperboličke ravni. Neki od dokaza mogu se naći u [10] i [9], što je i naglašeno. Ostala tvrđenja je autor sam dokazao.

Teorema 12. *Klajnov disk jeste model hiperboličke planimetrije.*

Dokaz. Proverimo da li su zadovoljene aksiome pripadanja koje se odnose na planimetriju.
Aksioma $I1$. Svaka euklidska duž sadrži najmanje dve razne tačke, pa odatle zaključujemo da i svaka tetiva koja predstavlja hiperboličku pravu sadrži najmanje dve razne tačke.

Aksioma $I2$. Kako postoji najmanje jedna euklidska prava koja sadrži dve tačke, one će postojati i u specijalnom slučaju kada su te tačke unutar apsolute, a njihovi odsečci unutar apsolute predstavljaće hiperboličke prave koje sadrže dve date tačke.

Aksioma $I3$. Za dve razne tačke unutar apsolute postoji jedinstvena euklidska prava koja ih sadrži, pa će tačke te prave unutar apsolute predstavljati jedinstvenu hiperboličku pravu koja sadrži te dve razne tačke.

Aksioma $I4$. Tri različite hiperboličke tačke koje ne pripadaju istoj hiperboličkoj pravoj nazivamo hiperbolički nekolinearnim. Znamo da u unutrašnjoj oblasti koju određuje kružnica postoje tri razne euklidske tačke koje nisu kolinearne u euklidskom smislu. One će biti nekolinearne i u hiperboličkom smislu, pa svaka hiperbolička ravan sadrži najmanje tri nekolinearne hiperboličke tačke.

Proverimo da li su zadovoljene aksiome rasporeda.
Aksioma $II1$. Ako važi $B_h(A,B,C)$, tada važi i $B(A,B,C)$ jer ove relacije imaju isto značenje i hiperboličke tačke su podudarne euklidskim tačkama. Iz $B(A,B,C)$ zaključujemo da su A,B i C tri razne kolinearne tačke, pa su one i tri razne hiperbolički kolinearne tačke.

*Aksioma II*2. Ako je $B_h(A,B,C)$, onda je i $B(A,B,C)$, pa važi $B(C,B,A)$, tj. važi $B_h(C,B,A)$.

*Aksioma II*3. Ako je $B_h(A,B,C)$, onda je i $B(A,B,C)$, pa ne važi $B(A,C,B)$, tj. ne važi $B_h(A,C,B)$.

*Aksioma II*4. Ako su A i B dve razne tačke, euklidska prava AB seče apsolutu u tačkama P i Q i euklidska duž AB pripada euklidskoj duži PQ. Neka je, na primer, $B(A,B,P)$. Tada postoji tačka C takva da je $B(B,C,P)$, pa je C h-tačka, a tada važi i $B(A,B,C)$, tj. $B_h(A,B,C)$.

*Aksioma II*5. Ako su A,B i C tri razne hiperboličke tačke koje su kolinearne u hiperboličkom smislu, tada su one kolinearne i u euklidskom smislu, pa važi $B(A,B,C)$, tj. $B_h(A,B,C)$ ili $B(B,C,A)$, tj. $B_h(B,C,A)$ ili $B(C,A,B)$, tj. $B_h(C,A,B)$.

*Aksioma II*6. Ako su A,B i C tri razne, hiperbolički nekolinearne h-tačke i neka h-prava p koja ne sadrži h-tačku A seče h-pravu BC u h-tački P takvoj da je $B_h(B,P,C)$, tada su A,B i C tri razne tačke euklidske ravni unutar apsolute i euklidska prava koja sadrži tetivu p po Pašovoj aksiomi seče euklidsku pravu CA u tački Q, takvoj da je $B(C,Q,A)$ ili euklidsku pravu AB u h-tački R takvoj da je $B(A,R,B)$. Ako važi $B(C,Q,A)$ tada je Q tačka na euklidskoj duži CA, pa je unutar apsolute, tj. ona je h-tačka i važi $B_h(C,Q,A)$, a ako je $B(A,R,B)$ tada na isti način dolazimo do zaključka da je $B_h(A,R,B)$.

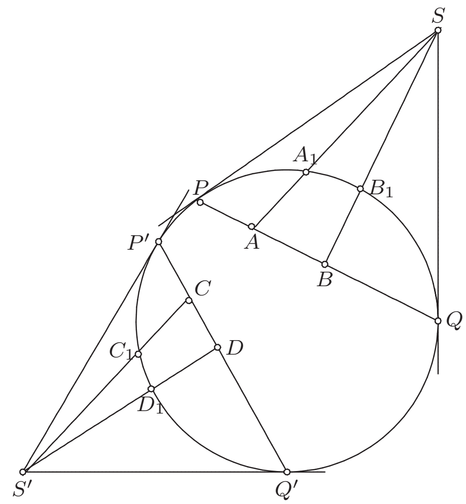
Pokazali smo da važi druga grupa aksioma, proverimo da li važe aksiome podudarnosti.
*Aksioma III*1. Ako su A,B,C i D h-tačke takve da je $(A,B)\cong_h(C,D)$, tada po definiciji podudarnosti postoji projektivno preslikavanje kojim se h-tačke A i B slikaju na C i D, redom. Međutim, kako je $A=B$, tada su i njihove slike podudarne, pa je $C=D$.

*Aksioma III*2. Neka euklidska prava AB seče apsolutu u tačkama P i Q. Postoji jedinstveni par tačaka M i N prave AB takvih da važi $H(A,B,M,N)$ i $H(P,Q,M,N)$. Pri tom jedna od ovih tačaka, recimo N pripada dužima AB i PQ, dok je M idealna. Neka je m polara tačke M u odnosu na apsolutu. Tada se harmonijskom homologijom sa osom m i centrom M prava AB koja je incidentna sa centrom, slika u sebe, a tačke A i B, redom u B i A, pa je $(A,B)\cong_h(B,A)$.

*Aksioma III*3. Ako su A,B,C,D,E i F h-tačke takve da je $(A,B)\cong_h(C,D)$ i $(A,B)\cong_h(E,F)$. Kako je $(A,B)\cong_h(C,D)$, tada je i $(C,D)\cong_h(A,B)$, pa postoji projektivno preslikavanje koje će duž CD slikati na AB. Na osnovu pretpostavke da je $(A,B)\cong_h(E,F)$, zaključujemo da postoji projektivno preslikavanje koje duž AB slika na EF. Kompozicija ove dve projekcije biće ponovo projekcija koja apsolutu slika na samu sebe, a h-duž CD slika na EF, pa će važiti da je $(C,D)\cong_h(E,F)$.

Pokažimo sada da važi i aksioma III5, a na aksiomu III4 ćemo se vratiti kasnije.

*Aksioma III*5. ([10]) Ako su A i B dve razne neeuklidske tačke i C teme neke neeuklidske poluprave, ispitajmo da li tada na toj polupravoj postoji neeuklidska tačka D takva da je $(A,B)\cong_h(C,D)$?



Slika 6: Projektivno preslikavanje koje h-duž AB slika na h-duž CD

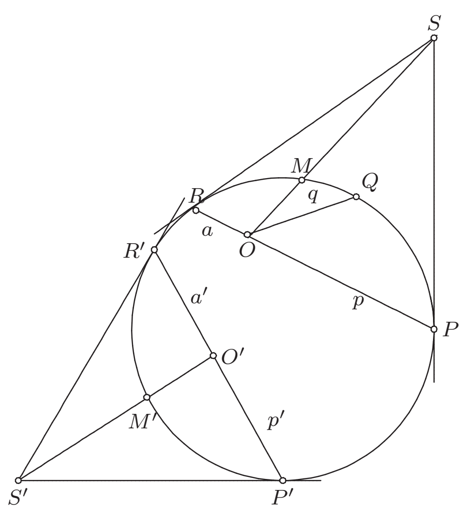
Označimo sa P i Q nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj određenoj tačkama A i B, tako da je $B(P,A,B)$, a sa P' i Q' nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj koja sadrži datu h-polupravu sa temenom C, sa tim što nesvojstvena tačka Q' odgovara baš datoj h-polupravoj. Neka su S i S' preseci tangenti na apsolutu u tačkama P i Q i P' i Q', redom. Označimo sa A_1, B_1 i C_1 presečne tačke pravih SA, SB i SC sa apsolutom, slika 6.
Izvršimo projektivno preslikavanje ravni na samu sebe tako što tačke P, A_1, Q i S preslikamo redom na tačke P', C_1, Q' i S'. Ovo preslikavanje će biti jednoznačno određeno jer su P,A_1,Q,S i P',C_1,Q',S' dve četvorke različitih tačaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Znamo da projektivno preslikavanje ravni slika krivu drugog reda opet na krivu drugog reda, pa će i apsolutu (kružnicu) preslikati na neku krivu drugog reda. Međutim, kako je svaka kriva drugog reda jednoznačno određena sa pet elemenata, npr. sa tri tačke koje joj pripadaju i dve tangente, zaključujemo da će se apsoluta preslikati na samu sebe jer je tačke A_1, Q, P, i tangente SP i SQ, kao i njihove slike, jednoznačno određuju. Projektivna preslikavanja čuvaju i kolinearnost i incidentnost. Kako se h-tačka A, presek pravih SA_1 i PQ, slika u presek njihovih slika, pravih $S'C_1$ i $P'Q'$, odnosno u tačku C koja pripada unutrašnjosti apsolute, sledi da se unutrašnjost apsolute slika u unutrašnjost apsolute. Ovim smo pokazali da projektivno preslikavanje koje posmatramo zadovoljava sve uslove da definiše h-izometriju Klajnovog modela.
Neka je slika tačke B u ovom preslikavanju D. Tada je D unutrašnja tačka diska koja pripada pravoj $P'Q'$ i važi $(A,B)\cong_h(C,D)$. Ostaje da proverimo u koju

se h-polupravu sa temenom C slika h-poluprava AB. Uočimo sledeće. Neka je X proizvoljna tačka h-prave AB Euklidska prava A_1Q seče SX u tački koja je unutrašnja za Klajnov disk ako i samo ako je $B(A, X, Q)$. Kako važi $B(A, B, Q)$ sledi da je odgovarajući presek h-tačka, pa se mora slikati u h-tačku ovim projektivnim preslikavanjem, a to je moguće, koristeći prethodni kriterijum, samo ako važi $B(C, D, Q')$. Dakle, D pripada traženoj polupravoj.

Osim toga, ova h-tačka D je jedinstvena h-tačka na datoj h-polupravoj koja zadovoljava početne uslove. Pretpostavimo da na h-polupravoj sa temenom C postoji h-tačka D' takva da važi $(A, B)\cong_h(C, D')$, tada je i $(C, D)\cong_h(C, D')$ na osnovu aksiome III3. Odavde, po definiciji mere, možemo zaključiti da je $d(C, D) = d(C, D')$. Pretpostavimo da je $B_h(C, D, D')$, tada važi da je $d(C, D) + d(D, D') = d(C, D')$. Kako su tačke D i D' različite $d(D, D') > 0$, pa je $d(C, D) < d(C, D')$, što je kontradikcija, pa možemo zaključiti da je h-tačka D jedinstvena.

Dokažimo sada da važi i aksioma III4.
Aksioma III4. Ako su C i C' h-tačke dveju otvorenih h-duži AB i $A'B'$ takve da je $(A, C)\cong_h(A', C')$ i $(B, C)\cong_h(B', C')$, dokažimo da je tada $(A, B)\cong_h(A', B')$. Kako je $(A, C)\cong_h(A', C')$, po definiciji postoji projektivno preslikavanje koje h-tačke A i C slika u A' i C', redom. To preslikavanje će h-tačku B, koja pripada h-polupravoj sa temenom A koja sadrži h-tačku C, preslikati na neku h-tačku B" h-poluprave sa temenom A' koja sadrži h-tačku C', pri čemu važi da je $(C, B)\cong_h(C', B")$. Kako na ovoj h-polupravoj postoji jedinstvena h-tačka za koju ovo važi i h-tačka B' to zadovoljava, zaključujemo da je $B" = B'$, pa ovo isto preslikavanje h-tačku B slika na B', tj. $(A, B)\cong_h(A', B')$.

Pre nego što proverimo da li važi šesta aksioma, navedimo i dokažimo teoremu koju ćemo koristiti.



Slika 7: Postoji h-poluprava q' takva da je h-ugao $\angle pq$ podudaran h-uglu $\angle p'q'$

Teorema 13. *([10]) Neka su dati neopruženi h-ugao $\angle pq$, h-prava a' i h-poluprava p', koja pripada h-pravoj a' i za teme ima h-tačku O'. Tada kroz h-tačku O', sa date strane h-prave a', prolazi tačno jedna h-poluprava q', takva da je h-ugao $\angle pq$ h-podudaran h-uglu $\angle p'q'$, u oznaci $\angle pq \cong_h \angle p'q'$.*

Dokaz. Označimo sa O teme h-polupravih p i q, a sa a h-pravu kojoj pripada h-poluprava p. Neka su P i R nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj a, a S presečna tačka tangenti na apsolutu u ovim tačkama. Takođe, označimo sa P' i R' nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj a', a sa S' presečnu tačku tangenti na apsolutu u ovim tačkama. Neka je Q nesvojsvena tačka koja odgovara kraku q i M presečna tačka apsolute i prave SO, a M' presek apsolute i prave $S'O'$, svi ovi elementi su prikazani na slici 7. Uočimo da traženo projektivno preslikavanje, s obzirom da slika euklidsku pravu PR u euklidsku pravu P', R', mora da slika par tačaka P, R u par P', R', dok je za uslove da se apsoluta slika u sebe i tačka O u O' neophodno da se S i M, redom slikaju u S' i M'. Ovi uslovi su i dovoljni da dato preslikavanje odredjuje h-izometriju koja slika jednu h-pravu u drugu, tako da se O slika u O' iz istih razloga koji su navedeni prilikom utvrđivanja da važi prethodna aksioma. Označavajući nesvojstvene tačke ovih pravih tako da tačke P i P' pripadaju datim polupravama, zaključujemo da može postojati najviše jedno traženo preslikavanje jer je projektivno preslikavanje ravni na samu sebe koje tačke R, M, P, S slika u R', M', P', S' je jednoznačno određeno. Ono će preslikati i tačku Q u neku nesvojsvenu tačku Q' koja odgovara h-polupravoj q', koja je slika h-poluprave q. Na ovaj način smo h-ugao $\angle pq$ projektivnim preslikavanjem preslikali na $\angle p'q'$, pa su ovi uglovi podudarni. Kako je tačka Q' je jedinstvena ovakva tačka na apsoluti, tako da je i h-poluprava q' jedinstvena. □

*Aksioma III*6. ([10]) Dokažimo da važi šesta aksioma podudarnosti. Ako su A, B i C tri nekolinearne h-tačke, dokažimo da u h-poluravni čiji je rub određen h-tačkama A' i B', takvim da je $(A, B) \cong_h (A', B')$, postoji jedinstvena h-tačka C' za koju važi da je $(B, C) \cong_h (B', C')$ i $(A, C) \cong_h (A', C')$. Postoji projektivno preslikavanje kojim se par h-tačaka (A, B) preslikava na par (A', B'). Pretpostavimo da se ovim preslikavanjem h-poluravan koja sadrži tačku C ne slika u traženu h-poluravan. Neka je S' presek tangenti na apsolutu u tačkama preseka euklidske prave $A'B'$ sa apsolutom, odnosno euklidski, neka je S' pol prave $A'B'$ u odnosu na apsolutu. Tada je i harmonijska homologija sa osom $A'B'$ i centrom S' jedna h-izometrija koja fiksira tačke A' i B' dok preslikava jednu h-poluravan sa rubom $A'B'$ u drugu, pa njena kompozicija sa prethodnim preslikavanjem slika h-poluravan sa rubom AB koja sadrži C u traženu h-poluravan. Tim preslikavanjen se i h-tačka C slika u h-tačku C' takvu da je $(A, C) \cong_h (A', C')$, i $(B, C) \cong_h (B', C')$. Dokažimo da je ova tačka jedinstvena. Neka tačka C'' ispunjava tražene uslove. Tada postoji h-izometrija koja slika A, B, C u A', B', C''. Ovim preslikavanjem se i h-uglovi $\angle ABC$ i $\angle BAC$ h-trougla BAC preslikavaju na njima h-podudarane h-uglove, takve da su po jedan njihov krak $A'B'$, odnosno $B'A'$ dok su preostali kraci $A'C''$ i $B'C''$ u datoj poluravni. Na osnovu prethodne teoreme, te poluprave su određene na jedinstven način, pa se poklapaju, redom, sa polupravama $A'C'$ i $B'C'$. Kako tačka C'' mora biti u njihovom preseku, ona se poklapa sa tačkom C'.

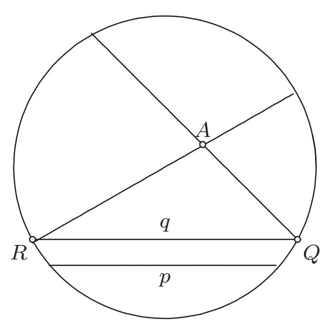
*Aksioma III*7. Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih h-tačaka i neka su D i D' h-tačke h-polupravih BC i $B'C'$, takve da su $(A,B) \cong_h (A',B')$, $(B,C) \cong_h (B',C')$, $(A,C) \cong_h (A',C')$ i $(B,D) \cong_h (B',D')$, dokažimo da je tada i $(A,D) \cong_h (A',D')$. Postoji projektivno preslikavanje koje h-tačke A, B, C i D slika na A', B', C' i D' (ovo preslikavanje neće biti jedinstveno jer h-tačke D i D' pripadaju h-pravama BC i $B'C'$, redom). Ovo preslikavanje će duž AD preslikati na $A'D'$, pa je $(A,D) \cong_h (A',D')$.

Ovim smo pokazali da u Klajnovom modelu važe aksiome podudarnosti.

Proverimo da li ovaj model zadovoljava aksiome neprekidnosti. Kako su Arhimedova i Kantorova aksioma neprekidnosti posledice Dedekindove teoreme, dovoljno je da pokažemo da u ovom modelu važi Dedekindova teorema. Kako je h-prava predstavljena tetivom apsolute bez njenih krajnjih tačaka, a za otvorenu euklidsku duž važi Dedekindova teorema za duži, ona će važiti i ako je primenimo na h-pravu, jer kako su skupovi M i N neprazni, tačka X se ne može poklopiti sa rubom duži, tj. ona mora biti predstavljena nekom h-tačkom.

Na ovaj način smo utvrdili da Klajnov model zadovoljava sve aksiome apsolutne planimetrije, pa ostaje još da se proveri da li važi aksioma Lobačevskog ili Plejferova aksioma.

Postavlja se pitanje da li postoje h-tačka A i h-prava p takve da za njih postoje bar dve h-prave incidentne sa A, a disjunktne sa p, videti [9]. Posmatrajmo proizvoljan takav par A i p. Neka je q euklidska prava u euklidskom smislu paralelna sa p, takva da se tačka A i prava p nalaze sa raznih strana q. Neka q seče apsolutu u tačkama Q i R. Tada su h-prave AQ i AR disjunktne sa p, videti sliku 8.



Slika 8: Klajnova ravan je hiperbolička

Kako smo utvrdili da postoji više od jedne h-prave koja nema zajedničkih tačaka sa h-pravom p i sadrži h-tačku A, zaključujemo da važi aksioma Lobačevskog, pa je prethodno opisani model, zapravo model hiperboličke planimetrije.

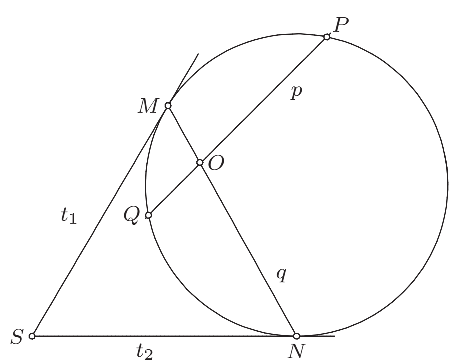
□

3 Prave i pramenovi pravih u Klajnovom modelu

3.1 Ortogonalnost u Klajnovom modelu

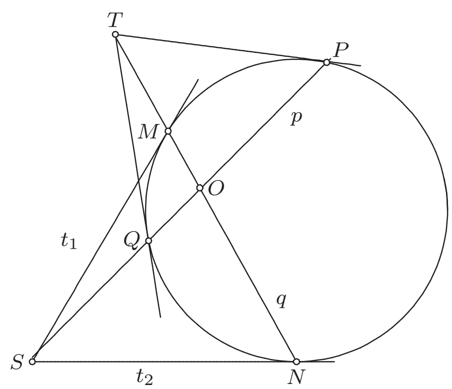
Dve h-prave su ortogonalne ako h-ravan dele na četiri podudarna h-ugla. Pošto se podudarni uglovi slikaju jedni na druge projektivnim transformacijama euklidske ravni kojoj pripada apsoluta, a koje ne čuvaju euklidsku meru ugla, možemo zaključiti da h-podudarni uglovi nisu podudarni i u euklidskom smislu, pa ortogonalne h-prave neće biti predstavljene kao u euklidskoj ravni. Pokušajmo da utvrdimo kako izgledaju međusobno ortogonalne h-prave.

Pretpostavimo da su dve h-prave p i q, prikazane na slici 9, h-ortogonalne i njihovu presečnu h-tačku označimo sa O. Nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj p označimo sa P i Q, a one koje odgovaraju h-pravoj q označimo sa M i N. Pošto su ove h-prave ortogonalne, h-uglovi $\angle MOQ$ i $\angle MOP$ su h-podudarni, pa postoji projektivno preslikavanje ravni na samu sebe, koje i apsolutu slika na samu sebe, a $\angle MOQ$ slika na $\angle MOP$. Dakle, ovo preslikavanje tačke M i O ostavlja fiksnim, pa će i čitava projektivna prava MO takođe ostati invarijantna, a sa njom i tačka N. Tačkama P i Q su samo razmenjena mesta, pa se i prava PQ slika na samu sebe.



Slika 9: Ortogonalne prave u Klajnovom modelu

Označimo sa t_1 i t_2 tangente na apsolutu u tačkama M i N, a sa S njihovu presečnu tačku. Projektivno preslikavanje čuva incidentnost, pa ako tangente posmatramo kao prave koje imaju jednu zajedničku tačku sa apsolutom, one će se ponovo slikati na tangente apsolute. Pošto su tačke M i N fiksne, tangente t_1 i t_2, a sa njima i njihova presečna tačka S ostaju invarijantne. Dakle, treba da nađemo projektivno preslikavanje koje tačke M, N, P i S slika u M, N, Q i S, redom. Ovo preslikavanje je jednoznačno određeno jer su ovo dve četvorke tačaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Pored toga, ono slika projektivnu ravan, apsolutu i unutrašnjost apsolute (hiperboličku ravan) na samu sebe iz istih razloga koji su navedeni pri proveri važenja aksiome III5. Potrebno je još samo da utvrdimo koje projektivno preslikavanje zadovoljava ove uslove. Kako su tačka S i prava MN fiksne, uočimo homologiju koja je određena centrom S, osom MN i parom tačaka P i Q. Kako je projektivno preslikavanje, ovako određena homologija imaće sve gore navedene osobine. Sve prave koje se pri homologiji slikaju na same sebe moraju sadržati centar homologije. Dakle, prava PQ mora sadržati centar homologije, koji je zapravo pol prave MN u odnosu na apsolutu. Isto tako, pošto je i prava MN h-ortogonalna na PQ, MN mora sadržati pol prave PQ u odnosu na apsolutu, koji je na slici 10 predstavljen idealnom tačkom T. Zaključujemo da ako su h-prave p i q h-ortogonalne, tada su one međusobno konjugovane u odnosu na apsolutu.

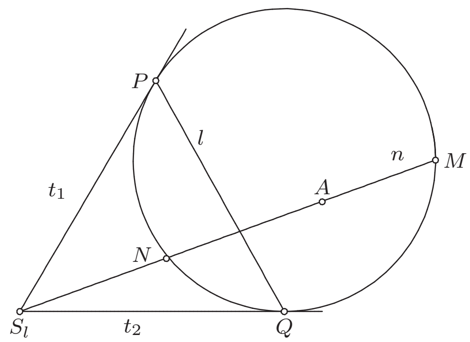


Slika 10: Neeuklidske prave međusobno konjugovane u odnosu na apsolutu

Postavlja se pitanje hoće li sve h-prave koje su međusobno konjugovane u odnosu na apsolutu biti h-ortogonalne. Neka je S pol h-prave MN. Označimo sa P i Q presečne tačke apsolute i proizvoljne h-prave koja je konjugovana sa pravom MN u odnosu na apsolutu. Homologijom čiji je osa prava MN, centar tačka S i koja je određena parom tačaka P, Q apsoluta(kružnica) preslikaće se na samu sebe, jer su tačke M i N fiksne pošto pripadaju osi, tangente u ovim tačkama se slikaju same na sebe jer sadrže centar, a i tačka P koja pripada apsoluti se ponovo slika na tačku sa apsolute Q. H-prava PQ će se slikati na sebe jer sadrži centar homologije S, ali neće biti invarijantna jer kod homologija jedina invarijantna prava je osa. Dakle, tačke P i Q, će se slikati jedna na drugu, a tačka O, presek pravih MN i PQ, je fiksna jer pripada osi. Zaključujemo da se ovom homologijom uglovi $\angle MOP$ i $\angle MOQ$ slikaju jedan na drugi, tj. oni su h-podudarni, a kako su i naporedni sledi da su h-prave PQ i MN h-ortogonalne. Na osnovu svega prethodno navedenog možemo da damo karakterizaciju ortogonalnosti u Klajnovom modelu.

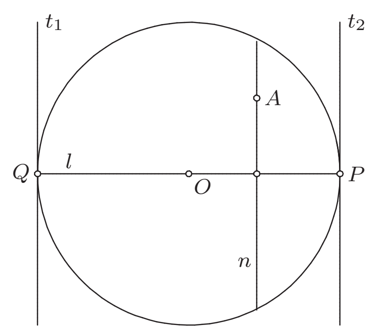
Teorema 14. *([10]) Dve neeuklidske prave u Klajnovom modelu hiperboličke ravni su hiperbolički ortogonalne ako i samo ako su euklidske prave koje ih sadrže konjugovane u odnosu na apsolutu.*

Konstruišimo normalu n na h-pravu l koja sadrži h-tačku A. Razmotrimo dva slučaja.
1° H-prava l nije prečnik apsolute. Pol S_l h-prave l će biti presečna tačka tangenti na apsolutu u nesvojstvenim tačkama koje odgovaraju h-pravoj l. Tražena normala će biti deo projektivne prave S_lA koji se nalazi unutar apsolute prikazane na slici 11.



Slika 11: Normala iz h-tačke A na proizvoljnu h-pravu

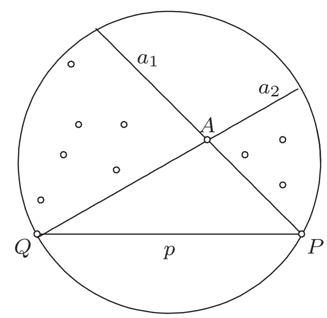
2° H-prava l je prečnik apsolute. U ovom slučaju tangente na apsolutu u nesvojstvenim tačkama koje odgovaraju h-pravoj l će biti međusobno paralelne i neće se seći, tj. presečna tačka (centar homologije) će biti beskonačno daleka tačka. H-prava će u ovom slučaju biti ortogonalna na l ako euklidska prava, čiji je ona deo, takođe sadrži ovu beskonačno daleku tačku, tj. ako je ona paralelna sa ovim tangentama. Dakle, n je h-prava koja sadrži h-tačku A i ortogonalna je na l u euklidskom smislu, slika 12.



Slika 12: Normala iz h-tačke A na h-pravu koja je dijametar apsolute

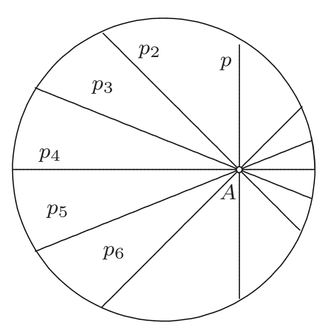
3.2 Pramenovi pravih u Klajnovom modelu

Dokazali smo da je opisani model zapravo model hiperboličke planimetrije, pa postoji više h-pravih koje nemaju zajedničkih h-tačaka sa datom h-pravom p i sadrže datu h-tačku A, koja ne pripada p, videti [9]. Utvrdimo kako su u Klajnovom modelu predstavljene paralelne prave. Neka su P i Q nesvojstvene tačke koje odgovaraju datoj h-pravoj p. H-prave a_1 i a_2 koje su delovi euklidskih pravih AP i AQ unutar apsolute, nemaju zajedničkih h-tačaka sa h-pravom p jer tačke sa apsolute, P i Q, ne pripadaju hiperboličkoj ravni, slika 13. Pri tom, sve poluprave Klajnovog modela sa temenom A koje pripadaju uglu sa kracima a_1 i a_2 kojem pripada i p seku p dok ostale poluprave sa temenom A ne seku p, bez obzira na to što se euklidske prave kojima pripadaju možda seku pravu koja sadrži p van apsolute, videti sliku 13.



Slika 13: Paralelne prave

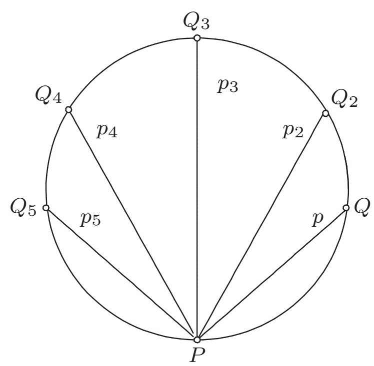
Zato su h-prave a_1 i a_2 paralelne h-pravoj p, pri čemu su joj one paralelne u suprotnim smerovima i nisu međusobno paralelne. Ostale h-prave, incidentne sa A, koje nemaju zajedničkih h-tačaka sa p su hiperparalelne sa p.
Reći ćemo da se h-prave ,,sreću" u redom, h-tački, nesvojstvenoj ili idealnoj tački u zavisnosti od toga da li su one konkurentne, paralelne ili hiperparalelne.



Slika 14: Eliptički pramen neeuklidskih pravih

Eliptički pramen h-pravih čini skup svih h-pravih koje se seku, odnosno, sadrže neku h-tačku. On će biti predstavljen tetivama koje se seku u nekoj tački koja pripada unutrašnjosti apsolute. Na slici 14 je prikazan eliptički pramen ili pramen konkurentnih h-pravih koje se seku u h-tački A.

Možemo zaključiti da će sve prave paralelne h-pravoj p, u smeru njene nesvojstvene tačke P, biti zapravo tetive čiji je jedan kraj P, a drugi kraj može biti bilo koja tačka koja pripada apsoluti, pa se paralelne prave susreću u nesvojstvenoj tački. Sve h-prave paralelne datoj h-pravoj p u istom smeru čini pramen paraboličkih ili paralelnih h-pravih. Na slici 15 je prikazan jedan takav pramen.

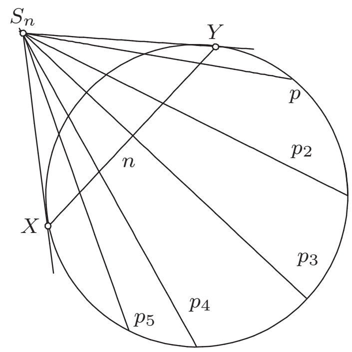


Slika 15: Parabolički pramen neeuklidskih pravih

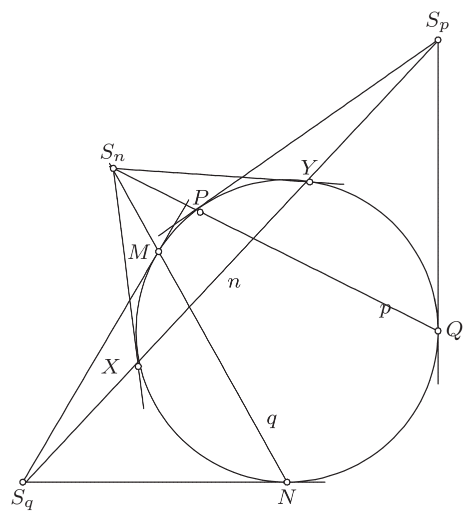
Hiperparalelne h-prave su one koje nisu ni paralelne ni konkurentne. Zato su to tetive koje nemaju zajedničkih tačaka ni unutar, a ni na apsoluti. Prave kojima ove tetive pripadaju mogu se seći u euklidskoj ravni kojoj apsoluta pripada, van apsolute, u nekoj od tačaka koje smo nazvali idealnim, ili mogu pripadati euklidski paralelnim pravama koje se onda u projektivnom smislu seku u (projektivno) idealnoj tački.

Za svaki pramen hiperparalelnih pravih postoji prava normalna na prave sve prave tog pramena. Predstavimo pramen hiperparalelnih h-pravih u Klajnovom modelu ortogonalnih na h-pravu n. Dakle, sve projektivne prave koje sadrže h-prave ovog pramena će sadržati pol h-prave n u odnosu na apsolutu. Na slici 16 je prikazan jedan pramen hiperparalelnih h-pravih sa zajedničkom normalom n.

Konstruišimo zajedničku normalu n dve hiperparalelne h-prave p i q. Da bi n bila ortogonalna na p neophodno je da euklidska prava na kojoj se nalazi sadrži tačku S_p, pol h-prave p u odnosu na apsolutu. Isto tako da bi bila ortogonalna na q mora sadržati i njen pol S_q. Dakle, n će biti deo prave S_pS_q, slika 17. Označimo sa X i Y nesvojstvene tačke kojima je h-prava n određena i neka je S_n njen pol u odnosu na apsolutu. Kako su i h-prave p i q ortogonalne na n, one moraju sadržati njen pol, po definiciji ortogonalnosti u Klajnovon modelu. Dakle, dve hiperparalelne prave se seku van apsolute u tački koja predstavlja pol njihove zajedničke normale.



Slika 16: Pramen hiperparalelnih pravih



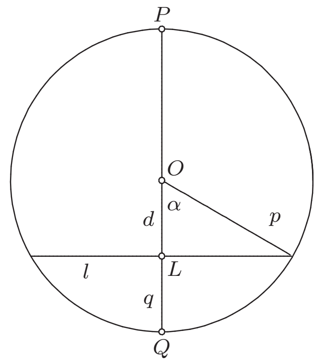
Slika 17: Zajednička normala dve hiperparalelne prave

Neka je data h-prava l i h-tačka O van nje. Izračunajmo ugao paralelnosti koji odgovara tački O i pravoj l. Poznato je da h-ugao paralelnosti α između h-poluprave koja sadrži O i ortogonalna je na l i h-poluprave koja takođe sadrži O, ali je paralelna sa l, zavisi isključivo od rastojanja d h-tačke O od l. Nađimo vezu između a i $\alpha = \Pi(a)$ u slučaju kada je h-tačka O centar apsolute, slika 18.

Označimo sa P i Q nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj OL, gde je L podnožije normale iz O na l. Po definiciji rastojanja biće:

$$a = \frac{c}{2}\left|\ln(P,Q,L,O)\right| = \frac{c}{2}\left|\ln\left(\frac{1+\cos\alpha}{1} : \frac{1-\cos\alpha}{1}\right)\right| = c\left|\ln\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right|.$$

Kako je $\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, biće i $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} > 1$, pa je $\ln\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$. Odavde sledi da je



Slika 18: Ugao paralelnosti

$a = -c \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$, tj. $\alpha = 2\operatorname{arctg}\left(e^{-\dfrac{a}{c}}\right)$.

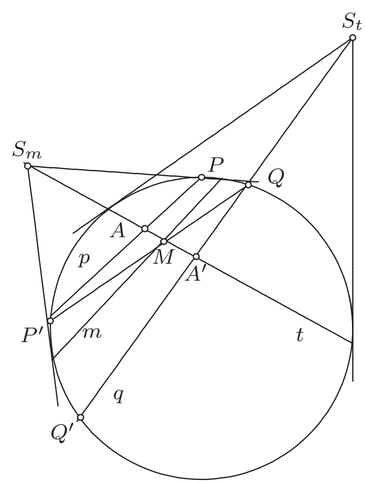
Kada $\dfrac{a}{c} \to 0$, $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$, pa euklidsku geometriju možemo smatrati graničnim slučajem geometrije Lobačevskog.

4 Izometrije hiperboličke ravni

H-izometrijske transformacije Klajnovog modela hiperboličke ravni smo definisali kao projektivna preslikavanja ravni kojoj pripada apsoluta, koja unutrašnjost apsolute i apsolutu ostavljaju invarijantnim. Utvrdimo kako izgleda h-refleksija u odnosu na h-pravu, videti [4].

U apsolutnoj, a samim tim i hiperboličkoj ravni postoje samo dve izometrije koje fiksiraju sve tačke jedne prave, jedna je identitet a druga refleksija u odnosu na tu pravu. Uočimo da preslikavanje iz Primera 1 fiksira sve tačke odgovarajuće prave, a nije identičko preslikavanje. Zato ono predstavlja refleksiju Klajnovog modela, ili nadalje, h-refleksiju.

Neka su u Klajnovom modelu dati h-prava m koja ne pripada dijametru apsolute i h-tačka A koja ne pripada m konstruišimo A', sliku h-tačke A pri h-refleksiji u odnosu na m. Neka je S_m pol h-prave m i M podnožije normale t iz h-tačke A na m. Označimo sa p h-pravu ortogonalnu na t koja sadrži A, a njene nesvojstvene tačke sa P i P'. Drugu tačku u kojoj prava $P'M$ seče apsolutu označimo sa Q, tako da su P i Q sa iste strane, u euklidskom smislu, prave t. S obzirom da ova harmonijska homologija slika pravu p u q, nesvojstvene tačke u odgovarajuće nesvojstvene tačke, sledi da su tačke S_m, P i Q, odnosno S_m, P' i Q' kolinearne. Takođe, p, q i m pripadaju jednom pramenu hiperparalelnih pravih pa se euklidski seku u centru tog pramena, tački S_t.



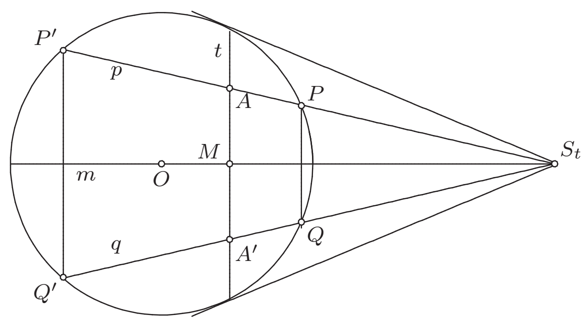
Slika 19: Refleksija u odnosu na proizvoljnu neeuklidsku pravu m

Označimo h-pravu koja pripada pravoj S_tQ sa q, a sa Q' njenu drugu nesvojstvenu tačku. Neka je h-tačka A' slika h-tačke A pri h-reflesiji u odnosu na h-pravu m. Tada je i h-prava q slika h-prave p pri ovoj refleksiji.

Kompozicija refleksija u odnosu na dve h-prave koje se seku će biti rotacija hiperboličke ravni oko njihove presečne tačke. Dakle, kompozicija refleksija u odnosu na h-prave m i t biće neeuklidska rotacija oko h-tačke M za vrednost opruženog ugla. Ako opruženim uglom smatramo ugao koji određuju dve h-poluprave sa zajedničkim temenom koje pripadaju istoj h-pravoj, onda će hiperbolički opružen ugao u Klajnovom modelu biti jednak euklidskom opruženom uglu, jer je u ovom modelu neeuklidska prava zapravo euklidska duž. Možemo reći da će ova kompozicija biti neeuklidska centralna simetrija sa centrom M.

Pri ovoj rotaciji h-tačka M ostaje fiksna. H-prava p refleksijom u odnosu na t se slika na samu sebe jer su međusobno ortogonalne, a refleksijom u odnosu na m, slika se na q, pa će njihovom kompozicijom, rotacijom oko h-tačke M, njena slika biti h-prava q. Primetimo da će i h-prave određene nesvojstvenim tačkama PQ i $P'Q'$ biti h-ortogonalne na h-pravu m, jer se refleksijom u odnosu na m nesvojstvene tačke P i Q, kao i P' i Q', slikaju jedna na drugu, pa prave koje ih sadrže, moraju sadržati i tačku S_m.

Razmotrimo sada drugi slučaj kada je m dijametar apsolute, slika 20.



Slika 20: Refleksija u odnosu na dijametar apsolute

U ovom slučaju pol h-prave m u odnosu na apsolutu je beskonačna tačka, pa će normala t na h-pravu m koja sadrži h-tačku A biti paralelna tangentama na apsolutu u nesvojstvenim tačkama koje odgovaraju h-pravoj m, tj. t će biti ortogonalna na m u euklidskom smislu. Označimo sa M presek h-pravih t i m. Neka je p h-prava koja sadrži A i ortogonalna je na t, a P i P' njoj odgovarajuće nesvojstvene tačke. Neka je nesvojstvena tačka Q, kao i u prethodnom primeru, slika nesvojstvene tačke P pri neeuklidskoj refleksiji u odnosu na m, tada je PQ takođe ortogonalna na m u euklidskom smislu, pa je Q slika nesvojstvene tačke P pri euklidskoj refleksiji u odnosu na m. Prava S_tQ koja sadrži h-pravu q, sliku h-prave p pri neeuklidskoj refleksiji u odnosu na h-pravu m, će biti zapravo slika prave S_tP pri euklidskoj refleksiji u odnosu na S_tM, pa je h-tačka A' slika h-tačke A pri euklidskoj refleksiji u odnosu na h-pravu m.

Vratimo se sada na sliku 19. Tačke P, P', Q i Q' su temena jednog četvorotemenika. Kako su tačke S_m, A i M presečne tačke pravih PQ i $P'Q'$, $P'Q$ i PQ', PP' i MS_m, na osnovu prethodnog zaključujemo da će tačka A' kao presek pravih MS_m i QQ' biti tačka harmonijski konjugovana sa tačkom A u odnosu na tačke S_m i M.

Teorema 15. *Refleksija u odnosu na h-pravu m, pri čemu m nije dijametar apsolute, u Klajnovom modelu je restrikcija, na unutrašnjost apsolute, harmonijske homologije koja za osu ima h-pravu m, a centar je tačka S_m, pol ose u odnosu na apsolutu. Ako je m dijametar apsolute, tada je h-refleksija u odnosu na m restrikcija euklidske refleksije, na unutrašnjost apsolute, u odnosu na m.*

Svaka refleksija je involucija. Ovde se ta osobina jednostavno dobija i iz sledeće činjenice. Važi $H(A, A', S_m, M)$, a samim tim za bilo koje projektivno preslikavanje f važiće i $H(f(A), f(A'), f(S_m), f(M))$, pa i za datu harmonijsku homologiju. Zato je i $H(A', f(A'), S_m, M)$, a kako je tačka koja sa prethodne tri kolinarne harmonijski spregnuta određena na jedinstven način, sledi da je slika tačke A' baš tačka A.

Takođe, jedina fiksne tačke refleksije (apsolutne) ravni su tačke njene ose, a jedine fiksne tačke homologije su njen centar i tačke ose. U slučaju harmonijske homologije gde su osa i centar spregnuti u odnosu na apsolutu, a osa seče apsolutu, centar ne pripada unutrašnjosti apsolute i nije h-tačka, već su jedine fiksne h-tačke one koje pripadaju osi.

Sada, na drugačiji način možemo videti i ortogonalnost pravih u Klajnovom modelu. Neka je p' h-prava. Prave ortogonalne na p' možemo onda karakterisati kao one različite od p' koje se h-refleksijom u odnosu na p' slikaju u sebe. Drugim rečima, tražimo fiksne prave harmonijske homologije sa osom p koja sadrži p' i centrom P, polom prave p u odnosu na apsolutu, različite od ose, a one su incidentne sa centrom. Zato, neka h-prava q je ortogonalna na p' ako i samo ako euklidski pripada pravoj incidentnoj sa P.

Kako se svaka izometrija može predstaviti kao kompozicija najviše tri osne refleksije, hajde da vidimo kako su predstavljene rotacija, paralelno pomeranje, translacija i klizajuća refleksija.

Rotaciju oko h-tačke S možemo predstaviti kao kompoziciju h-refleksija u odnosu na h-prave p i q koje se seku u S.

Paralelno pomeranje je kompozicija refleksija u odnosu na dve h-prave p i q koje su h-paralelne, dakle imaju zajedničku tačku na apsoluti, pa će to biti rotacija oko tačke u beskonačnosti, jer se kompozicijom ovih h-refleksija h-prave pramena, kome pripadaju p i q, slikaju opet na h-prave ovog pramena.

Translaciju možemo predstaviti kao kompoziciju refleksija u odnosu na dve hiperparalelne h-prave p i q. Euklidske prave koje ih sadrže onda se seku u idealnoj tački ili u projektivno idealnoj tački. Označimo tu tačku sa P. Tada je P pol prave koja sadrži zajedničku normalu za ove dve hiperparalelne prave.

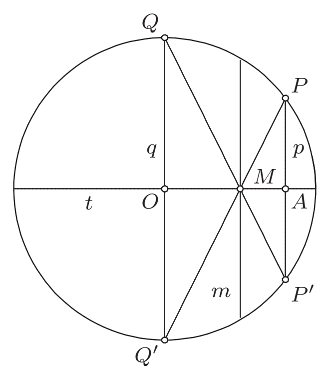
Klizajuća refleksija je kompozicija translacije i h-refleksije u odnosu na njenu osu, pa je ona predstavljena kompozicijom triju h-refleksija, u donosu na dve hiperparalelne prave, koje se seku euklidski u idealnoj tački P i zatim u odnosu na h-pravu koja pripada polari za P.

Uočimo i sledeće ([7], [8]). Neka su P i p tačka i prava proširene euklidske ravni, a ujedno i pol i polara u odnosu na apsolutu Klajnovog modela. Ukoliko p seče apsolutu, h-refleksija u odnosu na h-pravu koja je sadržana u p je restrikcija harmonijske homologije sa osom p i centrom P. Obrnuto, ako je P tačka unutar apsolute, restrikcija harmonijske homologije sa osom p i centrom P slika h-tačku X u h-tačku X_1 tako da je XX_1 u smislu modela normalno na p i da P, u smislu modela, polovi duž XX_1 odnosno restrikcija ovog preslikavanja na model je centralna simetrija.

5 Neke bitnije konstrukcije

U ovom odeljku opisaćemo neke od jednostavnijih konstrukcija u Klajnovom modelu. Te konstrukcije se u literaturi (videti [3], [4]) navode uglavnom bez dokaza, te su ovde data obrazloženja autora.

1° *Odredimo h-simetralu h-duži OA, pri čemu je O centar apsolute.*
Sa t označimo h-pravu OA. H-prave p i q ortogonalne na t u h-tačkama O i A će biti euklidski ortogonalne jer je OA prečnik apsolute. Neka su P i P' nesvojstvene tačke h-prave p, a Q i Q' nesvojstvene tačke h-prave q, takve da se P i Q nalaze sa iste strane euklidske prave OA. Na osnovu konstrukcije slike h-tačke A pri refleksiji u odnosu na h-pravu, presek neeuklidskih pravih $Q'P$ i QP' biće h-tačka M, središte h-duži OA. Sada lako konstruišemo h-pravu m koja je deo prave koja sadrži h-tačku M i ortogonalna je u euklidskom smislu na h-pravu OA, slika 21.

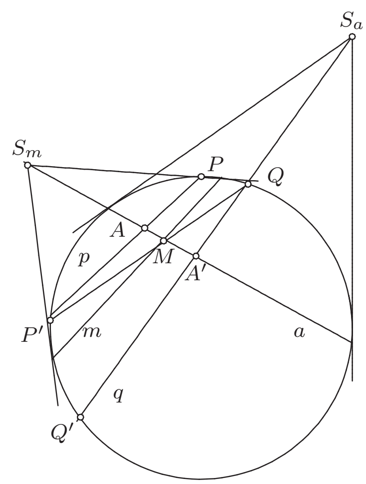


Slika 21: Simetrala h-duži OA

H-prava m konstruisana na ovaj način predstavlja osu u odnosu na koju se h-tačka O slika na h-tačku A. Naravno, ovom refleksijom će se i h-tačka A slikati na O, jer je refleksija u odnosu na h-pravu involucija. Pomoću ova konstrukcije možemo bilo koju h-pravu p, koja sadrži h-tačku A, preslikati na h-pravu q, koja sadrži h-tačku B. Znamo da postoje refleksije koje slikaju h-tačke A i B na O, a h-prave p i q će se tom istom refleksijom preslikati na h-prave p' i q', koje sadrže O. Preslikavanje koje slika p na q će biti kompozicija refleksije koja slika A na O, rotacije oko h-tačke O koja slika p' na q' i refleksije koja slika O na B.

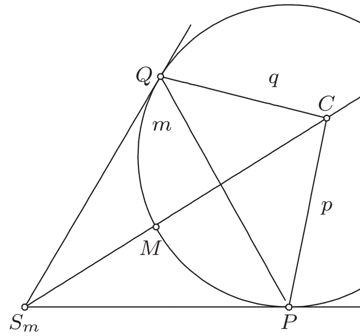
2° *Odredimo središte h-duži AB.*
Neka je a h-prava koja sadrži h-duž AB i neka je S_a njen pol u odnosu na apsolutu. Želimo da konstruišemo h-tačku M koja pripada h-duži AB, tako da je $AM \cong_h BM$, pa će M pripadati h-pravoj m u odnosu na koju se h-refleksijom A slika na B i obrnuto. Po konstrukciji, m je ortogonalno na AB, tj. euklidska prava koja sadrži m sadržaće M i S_a. Neka su p i q h-prave ortogonalne na a u h-tačkama A i B. Nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-pravoj p označimo sa P i P', one koje odgovaraju q označimo sa Q i Q', tako da su P i Q u

euklidskom smislu sa iste strane prave a. Refleksijom u odnosu na m, koja čuva podudarnost uglova u hiperboličkom smislu, h-prava a se slika na samu sebe, jer je ortogonalna na m, tj. sadrži pol ove h-refleksije, a h-prave p i q slikaće se jedna na drugu jer su ortogonalne na a u tačkama A i B. Odavde sledi da će se prave PQ i $P'Q'$ seći u S_m, polu h-prave m u odnosu na apsolutu, jer se i P i Q (P' i Q') kao nesvojstvene tačke koje određuju h-prave p i q moraju slikati jedna na drugu. Može se dokazati da u tom slučaju presek duži PQ' i $P'Q$ pripada polari tačke S_m, tj. h-pravoj m. Osim toga, taj presek će upravo biti tražena h-tačka M, slika 22. Uz to će i h-prava m biti h-medijatrisa h-duži AB.



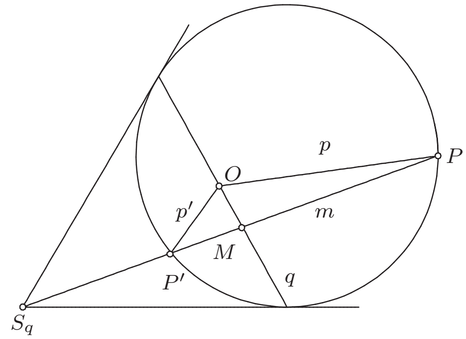
Slika 22: Konstrukcija središta proizvoljne h-duži AB

3° *Odredimo bisektrisu datog ugla.*
Neka su h-poluprave p i q kraci ugla $\angle pq$ sa zajedničkim temenom C, a tačke P i Q nesvojstvene tačke h-polupravih p i q, redom. H-pravu PQ označimo sa m, a njen pol sa S_m, tada će deo euklidske prave CS_m unutar apsolute biti bisektrisa h-ugla $\angle pq$. Na slici 23 je bisektisa s h-prava određena nesvojstvenim tačkama M i N.
Pokažimo da je ova h-prava zaista bisektrisa. Kako euklidska prava MN sadrži pol S_m, h-prave m, one će biti ortogonalne, pa pošto se refleksijom u odnosu na h-pravu čuva veličina ugla u hiperboličkom smislu, h-prava PQ se slika na samu sebe. Dakle, nesvojstvene tačke P i Q se slikaju jedna na drugu, jer se pri izometrijama hiperboličke ravni apsoluta slika na samu sebe. H-tačka C će biti fiksna, jer pripada osi refleksije. Iz istog razloga je i h-poluprava CM fiksna. Zaključujemo da se ovom refleksijom $\angle QCM$ slika na $\angle PCM$, pa su ova dva ugla podudarna. Dakle, h-prava MN je zaista bisektrisa ugla.



Slika 23: Konstrukcija bisektrise ugla

4° *Odredimo h-pravu m, normalnu na krak q oštrog h-ugla $\angle pg$, a paralelnu sa drugim krakom p.*
Konstruišimo h-polupravu p' koja je slika h-poluprave p pri h-refleksiji u odnosu na h-pravu koja sadrži q. Neka su P i P' nesvojstvene tačke koje odgovaraju h-polupravama p i p', tim redom. Tada je m h-prava koja je paralelna i h-polupravi p, a i h-polupravi p', tj. m je zapravo h-prava PP', slika 24.
Pokažimo to. Označimo sa M presek h-pravih q i m. Pri refleksiji u odnosu na q, M je fiksna jer pripada q, a P se slika na P', jer smo P' tako konstruisali. Dakle, pri refleksiji ovako konstruisana h-prava m se slika na samu sebe, pa mora sadržati centar homologije kojim je predstavljena neeuklidska refleksija, pa je ona zapravo ortogonalna na q.



Slika 24: Konstrukcija h-prave ortogonalne na jedan, a paralelne sa drugim krakom oštrog ugla

6 Epicikli u Klajnovom modelu

Predstavićemo epicikle u Klajnovom modelu. Sve konstrukcije u ovom poglavlju je autor samostalno izveo.

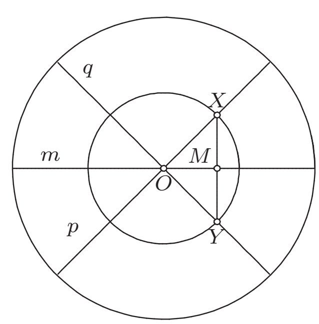
Neka je h-pramen koji određuje epicikl χ. Taj pramen je eliptički, parabolički ili hiperbolički, ali, euklidski gledano, euklidske prave koje sadrže h-prave tog pramena seku se u nekoj tački, h-tački, nesvojstvenoj, idealnoj ili projektivno-idealnoj tački.

Definicija 22. *Prave koje formiraju h-pramen χ nazivamo dijametrima. Njihovu presečnu tačku nazivamo centrom epicikla, a njemu odgovarajuću polaru u odnosu na apsolutu nazivamo osom epicikla.*

Uočavamo da je centar h-kruga tačka unutar apsolute, h-tačka, a osa je predstavljena idealnom pravom, tj. ona nema zajedničkih tačaka sa apsolutom. Oricikl ima za centar i osu nesvojstvenu tačku i pravu, tj. centar će biti tačka sa apsolute, a osa tangenta na apsolutu u toj tački. Ekvidistanta za centar ima idealnu tačku, tačku van apsolute, a njoj odgovarajuća prava biće h-prava koja je, na osnovu konstrukcije, zajednička normala svih h-pravih ovog h-pramena. Utvrdimo kako ovi h-epicikli izgledaju u Klajnovom modelu hiperboličkoj ravni.

6.1 Hiperbolički krug

Na početku utvrdimo čime će biti predstavljen h-krug čiji je centar h-tačka O, centar apsolute. U tom slučaju h-prave koje čine h-pramen χ su prečnici apsolute, pa h-refleksija u odnosu na h-prave ovog h-pramena biće refleksija i u euklidskom smislu. Neka je X proizvoljna h-tačka i $p \in \chi$ h-prava koja je sadrži. Euklidskom refleksijom u odnosu na proizvoljnu h-pravu m ovog pramena X se slika na h-tačku Y koja pripada h-pravoj q, slici h-prave p. Prava q sadrži tačku O, fiksnu u tom preslikavanju, pa $q \in \chi$. Ako je M presek h-duži XY i m, primećujemo da je $\triangle OMX \cong \triangle OMY$ po stavu SUS, u euklidskom smislu, pa je $|OX| = |OY|$ i u euklidskom i u hiperboličkom smislu, slika 25.

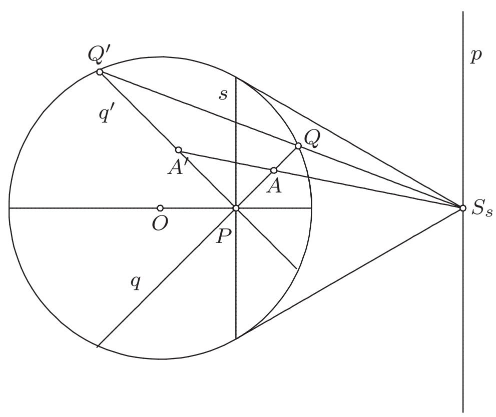


Slika 25: Hiperbolički krug čiji se centar poklapa sa centrom apsolute

Dakle, neeuklidski krug čiji je centar ujedno i centar apsolute biće predstavljen euklidskim krugom sa tim istim centrom.

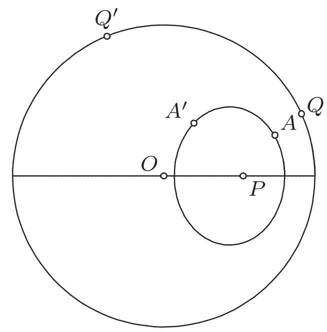
Kako izgleda krug ako je njegov centar h-tačka P različita od centra apsolute O?
Neka p polara h-tačke P i neka je q h-prava pramena koja sadrži proizvolju h-tačku A koja pripada h-krugu. Označimo sa Q jednu nesvojstvenu tačku koja odgovara q. Po definiciji sve ostale tačke h-kruga su slike h-tačke A pri refleksijama u odnosu na h-prave pramena χ.

Neka je s jedna takva h-prava i neka je S_s njen pol u odnosu na apsolutu. Slika h-tačke A i h-prave q pri refleksiji u odnosu na s, biće h-tačka A' i h-prava q', koja takođe sadrži P. Pri tome se Q slika u Q', odgovarajuću nesvojstvenu tačku h-prave q. Prave QQ' i AA' se seku u tački S_s, polu h-prave s, koji pripada polari h-tačke P, jer $P \in s$.



Slika 26: Neeuklidski krug je slika h-tačke A pri refleksijama u odnosu na prave eliptičkog pramena

Posmatrajmo homologiju f određenu centrom P, osom p i parom odgovarajućih tačaka Q i A, slika 26. Odredimo sliku apsolute pri ovoj homologiji. Šta će biti slika tačke Q' sa apsolute? Kako q' sadrži P, koje je centar homologije, slikaće se na samu sebe, znači $f(Q') \in q'$. Idealna tačka S_s je fiksna, pošto se nalazi na osi. H-prava QQ' seče osu upravo u tački S_s i slika prave QQ' će sadržati tačku S_s. Kako je A slika tačke Q, sledi da je prava AS_s slika prave QQ'. Odavde zaključujemo da je slika tačke Q' presek pravih q' i AS_s, a to je upravo tačka A'. Dakle, slika apsolute koju smo predstavili krugom pri homologiji f je hiperbolički krug. Pritom, kako je prava p idealna, tj. nema dodirnih tačaka sa apsolutom, ni njena slika neće imati dodirni tačaka sa apsolutom. Možemo zaključiti da je hiperbolički krug sa centrom različitim od centra apsolute zapravo predstavljen euklidskom elipsom koja nema zajedničkih tačaka sa apsolutom, slika 27.



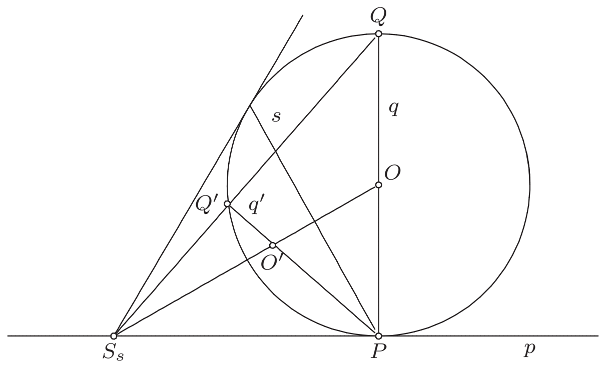
Slika 27: Hiperbolički krug

6.2 Oricikl

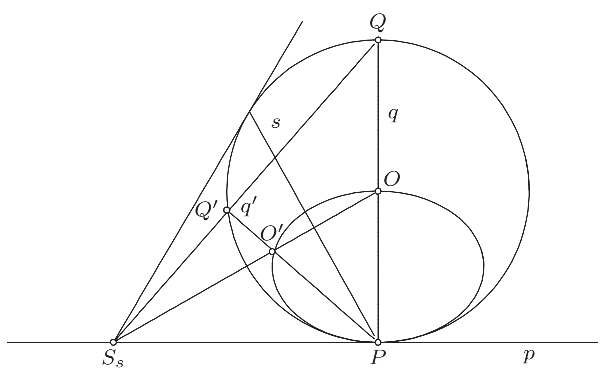
Odredimo kako izgleda oricikl kome pripada centar apsolute O.
Kao što smo već definisali, oricikl je skup slika proizvoljne h-tačke A pri refleksijama u odnosu na h-prave paraboličkog h-pramena χ koji je sadrži. Označimo sa P tačku na apsoluti koja je zajednička tačka pravih h-pramena χ. Sa q označimo h-pravu ovog pramena koja sadrži centar apsolute O, a sa Q njoj drugu odgovarajuću nesvojstvenu tačku. Neka je s proizvoljna prava pramena, a njen pol u odnosu na apsolutu će biti biti idealna tačka S_s koja pripada polari p nesvojstvene tačke P, koja je predstavljena tangentom na apsolutu u tački P. Slike h-prave q, h-tačke O i nesvojstvene tačke Q su redom h-prava q', h-tačka O' i nesvojstvena tačka Q', pri čemu se projektivne prave OO' i QQ' seku u idealnoj tački S_s. Uočimo homologiju f sa centrom P, osom p i parom odgovarajućih tačaka Q i O. Ako se pri ovoj homologiji tačka Q sa apsolute slika u O, šta će biti slika čitave apsolute pri ovom preslikavanju?

Neka je Q' proizvoljna tačka apsolute, utvrdimo šta je njena slika. Presek prave QQ' i ose homologije p je fiksna tačka S_s, što znači da će i slika ove prave pri homologiji sadržati S_s, tj. $f(Q')$ će pripadati pravoj S_sO. Sa druge strane, prava q', koja sadrži Q', sadrži i centar homologije P, pa se slika na samu sebe. Zaključujemo da je $f(Q')$ presečna tačka pravih q' i S_sO, to je upravo h-tačka O'. Tačka P, koja pripada apsoluti, kao centar homologije ostaje fiksna, ali ona neće pripadati oriciklu jer ona i nije objekat hiperboličke ravni. Dakle, slika apsolute, bez tačke P, pri homologiji f će biti traženi oricikl. Kako je apsoluta krug, njena slika će biti elipsa. Zaključujemo da je oricikl, koji sadrži centar apsolute, u Klajnovom modelu pripadati euklidskoj elipsi koja ima jednu zajedničku tačku sa apsolutom, a to je zajednička tačka beskonačnosti h-pravih pramena χ. Zapravo, ovaj oricikl je predstavljen elipsom bez tačke P, slika 29.

Kako su u hiperboličkoj geometriji svi oricikli međusobno podudarni, možemo zaključiti da će svaki biti predstavljen euklidskom elipsom koja dodiruje apsolutu u centru odgovarajućeg paraboličkog pramena, bez jedne tačke, upravo



Slika 28: Oricikl je slika h-tačke O pri refleksijama u odnosu na prave paraboličkog pramena



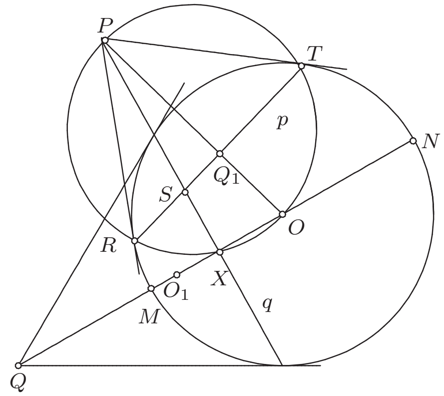
Slika 29: Oricikl koji sadrži centar apsolute

zajedničke tačke sa apsolutom. Tu zajedničku tačku elipse i apsolute i nesvojstvenu tačku h-pravih pramena χ možemo smatrati beskonačno dalekom tačkom hiperboličke ravni i uočiti izvesnu analogiju sa parabolama euklidske ravni.

6.3 Ekvidistanta

Uočili smo da harmonijska homologija sa osom i centrom koji su pol i polara u odnosu na apsolutu indukuje osnu refleksiju ili centralnu simetriju modela, u zavisnosti od toga da li osa seče ili ne apsolutu. To nam omogućava da proširimo definiciju epicikla i u definiciji umesto pramena Klajnovog modela, posmatramo pramen proširene euklidske ravni. U slučaju kada je centar pramena h-tačka ili nesvojstvena tačka ništa novo ne dobijamo ovim putem. U slučaju kada je centar pramena P idealna tačka, međutim, postoji beskonačno mnogo euklidskih pravih incidentnih sa tom tačkom, a koje ne seku apsolutu. Osna refleksija u odnosu na neku takvu pravu r se, u smislu modela, vidi kao centralna simetrija u odnosu na pol R te prave, koji jeste h-tačka. S obzirom da su r i P incidentni, sledi i da tačka R pripada polari od P, odnosno pravoj koja je osa pramena i osnovica ekvidistante. Dakle, sada smatramo da ekvidistantu čine tačke simetrične datoj u odnosu na h-prave hiperboličkog pramena i tačke njima simetrične u odnosu na osnovicu ekvidistante. Ovaj skup se sastoji od dva povezana skupa, od kojih je svaki po prethodnoj definiciji bio ekvidistanta, a koje zovemo, sada granama ekvidistante.

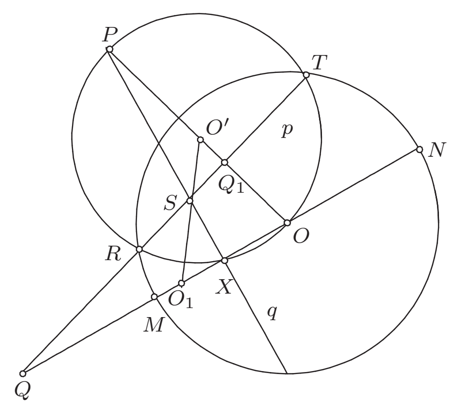
Konstruišimo ekvidistantu sa osom p koja sadrži centar apsolute O.
Neka je P pol h-prave p u odnosu na apsolutu. Nesvojstvene tačke h-prave p označimo sa R i T. Označimo sa q proizvoljnu h-pravu ovog pramena, pri čemu q ne sadrži O. Odredimo O_1, sliku tačke O pri refleksiji u odnosu na q. Označimo sa Q pol h-prave q i sa X presečnu tačku pravih QO i q. Kako je Q pol od q u odnosu na apsolutu (kružnicu), ako su M i N presečne tačke kružnice i prave koja sadrži pol Q i bilo koju tačku X sa h-prave q, važi da je $H(Q, X, N, M)$.



Slika 30: Konstruisanje slika h-tačke O pri refleksijama u odnosu na prave hiperboličkog pramena

Možemo zaključiti da su tačke X i Q inverzne u odnosu na apsolutu, slika 30. Dakle, pol proizvoljne h-prave q, koja pripada pramenu hiperparalelnih h-pravih koje određuju ekvidistantu χ, se inverzijom u odnosu na apsolutu slika u X, h-središte duži OO_1, pri čemu O i O_1 pripadaju ekvidistanti. Kako q određuje pramen hiperparalelnih pravih, pošto su q i p ortogonalne, p mora sadržati Q, pol h-prave q, pri čemu će Q pripadati onom delu prave prave p koji se nalazi van apsolute. Pošto je X slika tačke Q pri inverziji u odnosu na apsolutu, X će pripadati slici prave p pri ovoj inverziji. Prava p ne sadrži centar inverzije O, pa se slika u krug koji ne sadrži tačku O, a h-tačka X će pripadati delu kruga koji se nalazi unutar apsolute. Na osnovu konstrukcije inverzne tačke zaključujemo da je tačka P inverzna tački Q_1, koja predstavlja presek pravih OP i TR. Preostaje nam još da nađemo preslikavanje koje proizvoljnoj tački X, sa dela kruga unutar apsolute, dodeljuje tačku O_1, tako da je X h-središte h-duži OO_1.

Neka je O' tačka takva da važi $H(O, O', Q_1, P)$, odnosno tačka simetrična tački O u odnosu na h-pravu p. Na osnovu definicije h-refleksije Klajnovog modela važi da je i $H(O, O_1, Q, X)$. Uočimo homologiju f koja je određena centrom O, osom p i parom tačaka P i O'. Šta je slika tačke X pri ovoj homologiji? Prava OX sadrži centar homologije, pa se slika na samu sebe, što znači da je tačka $f(X)$ kolinearna tačkama O, X i Q.



Slika 31: Homologija kojom će se kružnica prečnika PO preslikati na ekvidistantu

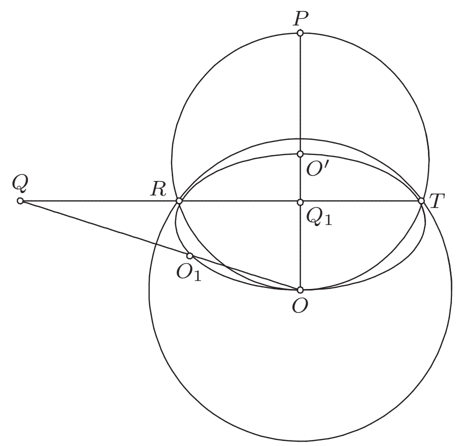
Primenimo Teoremu 7 na tačke O, O_1, Q, X i O, O', Q_1, P. Kako je

$$(O, O_1, Q, X) = (O, O', Q_1, P),$$

važiće da su prave $O'O_1, QQ_1$ i XP konkurentne. Označimo njihovu presečnu tačku sa S, slika 31. Kako ona pripada osi p, tj. pravoj QQ_1, biće fiksna pri homologiji f. Utvrdimo šta je slika tačke X pri ovoj homologiji. Kao što smo već zaključili prava PX seče osu p u tački S, dakle, $f(X)$ će pripadati pravoj $O'S$. Zaključujemo da je tačka $f(X)$ presek pravih $O'S$ i QO, pa je slika tačke X pri homologiji f upravo tačka O_1.

Primetimo da se refleksijom kojom se centar apsolute O preslika na h-tačku O', pri čemu O i O' pripadaju različitim granama ekvidistante, h-tačka O_1 se preslika na h-tačku osnosimetričnu tački O' u odnosu na q, koja pripada, takođe drugoj grani ekvidistante.

Homologijom f se luk kružnice, čiji je prečnik PO, a koji se nalazi unutar apsolute slika u jednu granu ekvidistante, onu koja sadrži tačku O. Slika ove kružnice je elipsa koja sadrži tačke T i R. Neka je P_1 pol prave p u odnosu na kružnicu sa prečnikom PO. Tada se tangente na nju u tačkama T i R, označimo ih sa t_1 i t_2 seku u P_1. Takođe važi i $H(P_1, Q_1, P, O)$, pa je i $H(f(P_1), Q_1, O', O)$, a kako važi i $H(P, Q_1, O', O)$ sledi da je $f(P_1) = P$, pa se tangente t_1 i t_2 slikaju u prave PT i PR. Zato se elipsa koja predstavlja uopštenu ekvidistantu i apsoluta dodiruju u tačkama T i R, slika 32. Dokazali smo da je deo elipse koji sadrži h-tačku O i nalazi se između tačaka R i T, koji predstavlja jednu granu ekvidistante, slika dela kruga koji sadrži iste ove tačke. Da li će suprotan deo elipse predstavljati drugu granu ekvidistante?



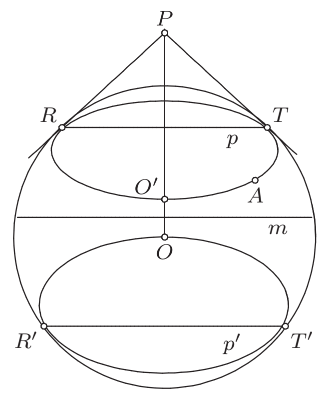
Slika 32: Ekvidistanta koja sadrži centar apsolute

Posmatrajmo h-refleksiju u odnosu na h-pravu p. To će zapravo biti harmonijska homologija određena osom p, centrom P i parom tačaka O i O', jer smo tačku O' birali tako da važi $H(O, O', P, Q_1)$. Tačke O, R, T se slikaju redom na O', R, T, a prave PR i PT, na sebe i ostaju tangentne na elipsu, jer su im R i T jedine presečne tačke. Kako je svaka kriva drugog reda određena jednoznačno sa pet elemenata, npr. tačkama O', R, T i tangentama PR i PT, zaključujemo da se elipsa slika sama na sebe. Kako gornju granu ekvidistante možemo dobiti reflektujući h-tačke donje grane u odnosu na osu, zaključujemo da gornja polovina elipse zaista predstavlja gornju granu ekvidistante.

Kako ekvidistanta ima dve dodirne tačke sa apsolutom, možemo smatrati da ona ima dve beskonačne tačke, pa uočavamo analogiju sa hiperbolama euklidske ravni.

Konstruišimo u ravni ekvidistantu koja je određena osom p i h-tačkom A, koja je različita od centra apsolute O.

Neka je P pol h-prave p, kojoj odgovaraju nesvojstvene tačke R i T. Ako h-tačka A ne pripada pravoj PO, tada h-tačku A preslikamo h-refleksijom na h-tačku O' prave PO, tako da je h-rastojanje h-tačke O' od h-prave p jednako hrastojanju h-tačke A od p. Za ovako konstruisanu h-tačku O' možemo zaključiti da pripada ekvidistanti koju želimo da konstruišemo. Postoji refleksija kojom se h-tačka O slika u h-tačku O' i obrnuto. Označimo osu te refleksije sa m. Ona je ortogonalna na h-pravu OO' u euklidskom smislu. Ovom refleksijom se O' preslika u O, a h-prava p se preslika na h-pravu p' koja je takođe ortogonalna u euklidskom smislu na dijametar apsolute OO'. Po prethodno opisanom postupku konstruišemo ekvidistantu određenu osom p' i h-tačkom O. Nesvojstvene tačke ove ekvidistante biće tačke R' i T' koje su odgovarajuće nesvojstvene tačke h-prave p'. Preslikajno sada elipsu kojom je predstavljena ekvidistanta ponovo refleksijom u odnosu na h-pravu m. Njena slika će biti elipsa koja sadrži tačke O', R i T i ona predstavlja ekvidistantu određenu h-pravom p kao osom i proizvoljnom h-tačkom A, slika 33.



Slika 33: Proizvoljna ekvidistanta Klajnovog modela hiperboličke ravni

Literatura

[1] Bokan N., Vukmirović S., *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd (2004).

[2] Božić M., *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd (2002).

[3] Coxeter H.S.M., *Non-Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, Washington D.C., sixth edition (1998).

[4] Greenberg M., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, W. H. Freeman and Company, New York, third edition (1993).

[5] Lopandić D., *Geometrija Lobačevskog*, Prirodno-matematički fakultet, Beograd (1968).

[6] Lučić Z., *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Total design i Matematički fakultet, Beograd, Drugo izdanje (1997).

[7] Molnár E., *Kreisgeometrie und konforme Interpretation des mehrdimensionalen metrischen Raumes*, Period. Math. Hungar. 10, 237259 (1979).

[8] Molnár E., *Inversion auf der Idealebene der Bachmannschen metrischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. H. 37, 451470 (1981).

[9] Prasolov V. M., Tikhomirov V. M., *Geometry*, American Mathematical Societi, Providence, Rhode Island (2001).

[10] Prvanović M., *Neeuklidske geometrije*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad (1971).

[11] Prvanović M., *Projektivna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, (1968).