Matematički fakultet

Univerzitet u Beogradu

- Master rad -

Merenje površina u hiperboličkoj geometriji

Student:

Dragana Tojagić

Mentor:

dr Zoran Lučić

Beograd,

Januar, 2016.

Predgovor

U ovom radu bavićemo se merenjem površina u hiperboličkoj geometriji, a pritom će biti objašnjeni svi osnovni pojmovi hiperboličke geometrije. Prikazano je i merenje površina u euklidskoj geometriji, kako bi se napravilo poređenje između euklidske i hiperboličke geometrije. Rad je tematski podeljen na sledeće celine:

U prvom poglavlju bavićemo se nastankom i razvojem hiperboličke geometrije kroz razlike u odnosu na euklidsku geometriju. Prvenstveno definišemo aksiomu Lobačevskog, paralelne i hiperparalelne prave u hiperboličkoj ravni, gde i dokazujemo bitne osobine vezane za paralelne prave. Takođe definišemo i pojam ugla paralelnosti, funkcije Lobačevskog i kako konstruisati ugao paralelnosti i dužine koja mu odgovara.

Drugo poglavlje se odnosi na uglove hiperboličkih mnogouglova, gde posebno obraćamo pažnju na Ležandrove teoreme, kao i na unutrašnje i spoljašnje uglove n-tougla. Zatim relacija podudarnosti u hiperboličkoj geometriji, kao i teorema koja govori da svaka sličnost u hiperboličkoj geometriji je podudarnost. Potom definišemo neke specifične četvorouglove u hiperboličkoj ravni, hiperbolički paralelogram i romb, Lambertov i Sakerijev četvorougao, kao i asimptotske poligone i asimptotske trouglove, gde se dokazuju neke bitne osobine tih cetvorouglova i trouglova.

U trećem poglavlju radi poređenja euklidske i hiperboličke geometrije ukratko opisujemo merenje površina u euklidskoj geometriji, uz osvrt na razloživu jednakost monogouglova u euklidskoj ravni. Prvo definišemo razloživu i dopunsku jednakost poligona i dokazujemo koje figure su razloživo jednake. Pored definisanja kvadratne mreže, dokazujemo kako je unutrašnjost svakog poligona merljiva, kao i kako izračunati površinu pravougaonika.

Četvrto poglavlje govori o merenju površina u hiperboličkoj geometriji. Uvodimo pojam defekta, kao i razloživa jednakost figura u hiperboličkoj geometriji. Dokazujemo da su trouglovi sa jednakim defektima međusobno razloživo jednaki likovi i ovu osobinu kasnije koristimo. Zatim govorimo o mernju površina u hiperboličkoj geometriji i kako je odnos površina konstantan broj. Diskutujemo i o nerešivim problemima euklidske geometrije, kao i o mogućim rešenjima istih. Da li je moguće konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini datog kruga, ili konstruisati krug čija je površina jednaka površini datog kvadrata? Nadam se da će vam ovo poglavlje dati bar delimičan odgovor.

Posebno bih se zahvalila svom mentoru prof dr Zoranu Lučiću na saradnji i podršci u realizaciji master rada.

Sadržaj

Uvod

Sa dugom i bogatom istorijom, geometrija je jedna od najstarijih disciplina, začeta radi potreba premeravanja tla, vekovima se razvijala kao induktivna nauka da bi danas zauzela veoma bitno mesto među naukama u okviru matematike.

U razvoju geometrije kao deduktivne nauke veliki doprinos dali su starogrčki filozofi Tales[1], Pitagora[2], Platon[3] kao i njegov učenik Aristotel[4]. Oni su uticali na prelazak sa induktivnog na deduktivni pristup, kao i na uvođenje načela dokazivanja matematičkih tvrđenja što je uslovilo uvođenje sistematizacije tvrđenja, a samim tim dovelo i do aksiomatizacije. Osnovne principe Aristotel je razvrstao na aksiome i postulate. Međutim, najsistematičnije delo geometrije iz antičkih vremena jesu Euklidovi[5] *Elementi*. U svom grandioznom delu *Elementi* Euklid je pokušao da dosledno sprovede deduktivni metod u izlaganju geometrije i upravo ta doslednost učinila je da *Elementi* vekovima predstavljaju savršenstvo i uzor logičkog rasuđivanja ne samo u oblasti geometrije, već i u nauci uopšte. Prilog tome su i reči Bertranda Rasela[6]:

> *"Ako bi naučna otkrića ikada bila u sukobu sa geometrijom Euklida, treba odbaciti otkrića, a ne geometriju - toliko je ona iznad svega drugog."*

Za razvoj geometrije, a preko nje i drugih matematičkih oblasti, ogroman značaj imao je Euklidov **V** postulat. Velika prekretnica je **XIX** vek i otkriće neeuklidske geometrije, u čemu prioritetne zasluge ima Lobačevski[7], po kome je i dobila naziv geometrija Lobačevskog, ili samo hiperbolička geometrija. Pored njega, velike zasluge pripadaju i Boljaju[8] koji je zajedno sa Lobačevskim smelo narušio harmoniju euklidske geometrije. Međutim, sa matematičke tačke gledišta, ove dve geometrije su ravnopravne.

Razvojem euklidske geometrije dolazilo se do rešenja jednostavnih geometrijskih problema, kao što su pronalaženje površine paralelograma, površina kruga... Kasnije se došlo do rešenja problema određivanja dužine na osnovu

[1] *Tales iz Mileta*, grčki matematičar, filozof i državnik, jedan od Sedam mudraca.
[2] *Pitagora sa Samosa*, grčki matematičar i filozof.
[3] *Platon*, Atinjanin, filozof, besednik.
[4] *Aristotel*, grčki filozof i besednik.
[5] *Euklid Aleksandrijski*, grčki matematičar.
[6] *Bertrand Rasel*, britanski matematičar i filozof, nobelovac.
[7] *Nikolaj Ivanovič Lobačevski*, ruski matematičar.
[8] *Janoš Boljaj*, mađarski matematičar.

odnosa stranica trougla, zapremine parelopipeda, lopte, valjka...

Rešavanjem ovih problema nastali su i nerešivi problemi euklidkse geometrije, kao što su trisekcija ugla, cirkulatura kvadrata, kvadratura kruga, udvostručenje kocke... Pokušaji da se rešenja ovih problema pronađu prerasli su u pokušaje da se dokaže da nisu rešivi, a time i da su konstrukcijski nemogući.

Malim izmenama aksioma u euklidskoj geometriji nastaje hipebolička geometrija koja pored novog pogleda na svet tačaka, pravih i ravni nudi i rešenja nekih od navedenih problema. U hiperboličkoj geometriji moguće je konstruisati kvadrat čija je površina jednaka površini zadatog kruga, kao i poluprečnik kruga, a samim tim i krug, čija je površina jednaka površini unapred zadatog kvadrata.

Janoš Boljaj je na osnovu rešenja koja je pronašao za ove probleme zaključio da ili je Euklidov V postulat istinit, ili je rešenje ovih problema moguće. Iako je tvrdio da će jednog dana pokazati postojanje tačno jednog od ova dva sistema aksioma, a time i da li su problemi cirkulature kvadrata i kvadrature kruga rešivi, to nije uradio. On je svojim zalaganjem i trudom uspeo da zagolica našu maštu i pokrene nas na jedno ovakvo putovanje.

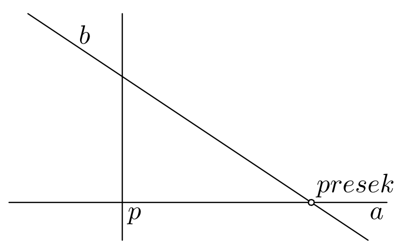
1 Elementi hiperboličke geometrije

1.1 Euklidova geometrija i nastanak hiperboličke geometrije

U svom delu *Elementi*, napisanom u **IV** veku p.n.e. Euklid temelji geometriju. Elementi se sastoje od trinaest knjiga i njegova geometrija zasnovana je na devet aksioma i pet postulata, u kojima bez dokaza iznosi neka geometrijska tvrđenja. Euklid u svojim postulatima i aksiomama pokušava da obuhvati ona geometrijska tvrđenja koja su, po njegovom mišljenju, presudna za razumevanje geometrijskog prostora i njima karakteriše prostor. Ono što je mnoge matematičare bunilo jeste to što Euklid dokazuje jednostavna tvrđenja, dok **V** postulat, koji je vrlo kompleksno tvrđenje, ne dokazuje i koristi ga kao osnovno.

V Euklidov postulat

Ako jedna prava u preseku sa drugim dvema obrazuje sa iste strane dva unutrašnja ugla čiji je zbir manji od dva prava ugla, te dve prave, beskrajno produžene, će se seći, i to sa iste strane sa koje su ovi uglovi čiji je zbir manji od dva prava ugla.



Slika 1.1.

Preko 2000 godina mnogi matematičari trudili su se da dokažu da se V postulat može izvesti iz ostalih aksioma geometrije. Mnogi su pokušavali da razreše to pitanje i dokažu V postulat, ali tek polovinom XIX veka u radovima Lobačevskog, Boljaja i Gausa[9] dat je konačan odgovor. Rezultat do koga su došli je da je V postulat nezavisno tvrđenje koje se ne može izvesti iz ostalih aksioma geometrije. Umesto Euklidovog V postulata uzima se drugačije tvrđenje.

Time se kreira nova geometrija koju nazivamo hiperboličkom geometrijom, koju još nazivamo i geometrijom Lobačevskog, geometrijom Boljaj-Gaus-Lobačevskog po imenima njenih tvoraca.

[9] *Karl Fridrih Gaus*, nemački matematičar, fizičar, astronom. Dao veliki doprinos razvoju matematike.

Euklidska i hiperbolička geometrija se jasno razlikuju, a jedna od ključnih razlika je definisanje paralelnosti. U geometriji se najčešće koristi pristup zasnivanja pomoću apsolutne geometrije[10]. Apsolutna geometrija važi i u euklidskoj i u hiperboličkoj geometriji. U zavisnosti koju aksiomu paralelnosti dodamu skupu aksioma apsolutne geometrije, razlikuju se euklidska ili hiperbolička geometrija.

Ako u skup aksioma apsolutne geometrije dodamo Plejferovu[11] aksiomu, dobijamo Euklidovu ili paraboličku geometriju. To znači, ako postoje tačka i prava koje imaju Plejferovo svojstvo, onda svaka tačka i prava imaju isto svojstvo. Prostor koji te aksiome zadovoljava naziva se Euklidskim prostorom, a svaka njegova ravan Euklidskom ravni. Plejferova aksioma paralelnosti glasi:

Postoje tačka B i prava a, $B \notin a$, takve da u njima određenoj ravni ne postoji više od jedne prave koja sadrži tačku B, i sa pravom a nema zajedničkih tačaka.

Za tačku B i pravu a kažemo da imaju Plejferovo svojstvo. Na osnovu četvrte Ležandrove teoreme (o kojoj će biti reči kasnije) i Plejferove aksiome važi sledeća teorema:

Teorema 1.1. Za svaku tačku B i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b koja sadrži B, a sa pravom a nema zajedničkih tačaka. ■

Veoma je bitno pitanje da li je sistem aksioma kojim se uvodi hiperbolička geometrija neprotivrečan. To je prvi naslutio Lobačevski koji je povezao hiperboličku geometriju sa sferom, a time i euklidskom geometrijom, pa time dokazuje da ako je hiperbolička geometrija nekonzistentna, onda je takva i euklidska geometrija, kreirajući odgovarajući model hiperboličke geometrije u euklidskoj geometriji. Kasnije je pronađen i model euklidske geometrije u hiperboličkoj geometriji, čime je ekvikonzistentnost tih geometrija u potpunosti dokazana.

Najznačajniji modeli hiperboličke geometrije u euklidskoj geometriji su Poenkareovi[12] disk i poluravanski model, i Klajnov[13] disk model. Oni se mogu proširiti na treću dimenziju, pa tako dobijamo Poenkareov sferni model i poluprostorni model, i Klajnov sferni model.

[10] Apsolutna geometrija je geometrija čiji sistem aksioma ne sadrži aksiomu paralelnosti.

[11] *Džon Plejfer*, škotski matematičar i filozof.

[12] *Žil Anri Poenkare*, francuski matematičar i teorijski fizičar.

[13] *Feliks Kristijan Klajn*, nemački matematičar.

1.2 Aksioma Lobačevskog

Geometrija koja se zasniva na apsolutnoj geometriji i aksiomi Lobačevskog naziva se hiperbolička geometrija ili geometrija Lobačevskog. Ravan i prostor u kojima se realizuje aksioma Lobačevskog jesu ravan i prostor Lobačevskog.

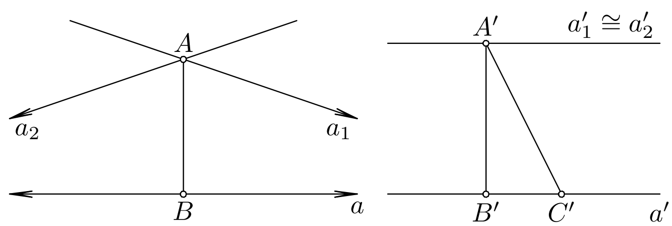
Postoje tačka B i prava a koja je ne sadrži, takve da u njima određenoj ravni postoji više od jedne prave koja sadrži B, a sa a nema zajedničkih tačaka.

Za tačku B i pravu a reći ćemo da imaju svojstvo Lobačevskog. Ako bi u hiperboličkom prostoru postojale tačka i prava koje zadovoljavaju Plejferovu aksiomu, onda bi, na osnovu teoreme 1.1., svaka tačka i prava koja je ne sadrži zadovoljavale istu aksiomu, što protivreči aksiomi Lobačevskog. Zbog toga važi i sledeća teorema:

Teorema 1.2. Za svaku tačku B hiperboličkog prostora i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoje bar dve prave koje sadrže tačku B, a sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.

Da bismo u ravni Lobačevskog definisali parelelne prave izdvojimo najpre neke osobine koje predstavljaju posledicu aksiome Lobačevskog.

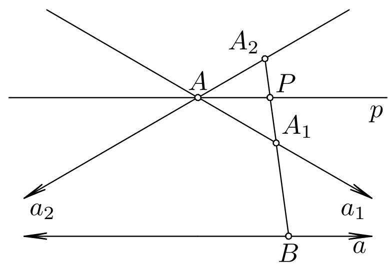
Teorema 1.3. Ako u nekoj ravni kroz tačku A izvan prave a postoje dve prave koje s pravom a nemaju zajedničkih tačaka, tada u toj ili nekoj drugoj ravni π kroz tačku A' izvan prave a' postoje dve prave koje s pravom a' nemaju zajedničkih tačaka.



Slika 1.5.

Dokaz: Pretpostavimo da u ravni π kroz tačku A' postoji samo jedna prava a'_1 koja s pravom a' nema zajedničkih tačaka. Neka je B' upravna projekcija tačke A' na pravoj a' i $C' \in a'$. Ako je $a'_2 \in \pi$ takva da sečica $A'C'$ zahvata sa pravama a' i a'_2 jednake naizmenične uglove, prava a'_2 nema s pravom a' zajedničkih tačaka. Zaista, ako bi prava a'_2 sekla pravu a' u nekoj tački S' kod $\triangle A'C'S'$ bio bi jedan spoljašnji ugao jednak unutrašnjem nesusednom uglu, što je prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije nemoguće. Zato prava a'_2 nema s pravom a' zajedničkih tačaka. S obzirom da je po pretpostavci a'_1 jedina prava ravni π koja sadrži tačku A' i sa pravom a' nema zajedničkih tačaka, biće $a'_2 \equiv a'_1$. Pri tome je prava a'_1 normalna na duž $A'B'$ i u pravouglom trouglu $A'B'C'$ zbir unutrašnjih uglova jednak je zbiru dva prava ugla. Odatle sledi Euklidov peti postulat i Plejferova aksioma. Na taj način dobija se protivrečnost sa aksiomom Lobačevskog. ■

Teorema 1.4. Ako je u ravni Lobačevskog data prava a i izvan nje tačka A, tada u toj ravni postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i seku pravu a.



Slika 1.6.

Dokaz: Prava a i tačka A koja se nalazi izvan te prave pripadaju ravni Lobačevskog, u toj ravni postoje prave a_1 i a_2 koje sadrže tačku A i sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Neka je $A_2 \in a_2$ i tačka $B \in a$ tako da važi $A_2, B \div a_1$. Neka je $A_2B \cap a_1 = \{A_1\}$. Neka je P proizvoljna tačka koja se nalazi između tačaka A_1 i A_2, a p prava određena tačkama A i P.

Treba da dokažemo da p ne seče pravu a. Pretpostavimo suprotno, da prava p seče pravu a, $p \cap a = \{C\}$, i tada važi redosled na pravoj p da se tačka C nalazi sa one strane tačke na kojoj je i tačka P, ili iza tačke A u odnosu na tačku P. U prvom slučaju prava a_1 u ravni $\triangle PBC$ ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče njegovu stranicu PC, a onda prema Pašovom[14] stavu[15] seče stranicu BC, dakle i pravu a, što je nemoguće, jer je $a_1 \cap a = \emptyset$. U drugom slučaju prava a_2 u ravni PBC ne sadrži ni jedno njegovo teme, seče stranicu PC, ali ne seče stranicu PB. Prema Pašovom stavu a_2 seče BC i pravu a, što je takođe nemoguće jer a i a_2 nemaju zajedničkih tačaka. ■

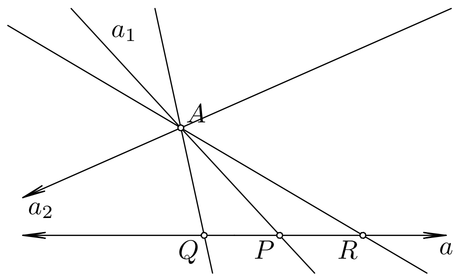
1.3 Paralelne prave u hiperboličkoj ravni

Pokazano je da u ravni Lobačevskog kroz svaku tačku A izvan neke prave a postoji beskonačno mnogo pravih koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Takođe, u toj ravni postoji i beskonačno mnogo pravih koje sadrže

[14] *Moric Paš* , nemački matematičar.

[15] *Ako prava a koja leži u ravni trougaone linije ABC i ne prolazi ni kroz jedan njen vrh seče jednu njenu stranicu, onda ona seče još jednu njenu stranicu.*

tačku A i seku pravu a. Zato skup svih pravih koje sadrže tačku A i seku pravu a delimo na dva skupa, i to na skup pravih koje seku pravu a i skup pravih koje ne seku pravu a. Sada ćemo pokazati da prave a_1 i a_2 koje razdvajaju ta dva skupa pravih pripadaju skupu pravih koje ne seku pravu a. Na primer, neka prava a_1 seče pravu a u tački P i neka postoje tačke Q i R koje se nalaze sa raznih strana tačke P. To je nemoguće jer prava a_1 razdvaja skup pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a. Odavde zaključujemo da prave a_1 i a_2 pripadaju skupu pravih koje ne seku pravu a.



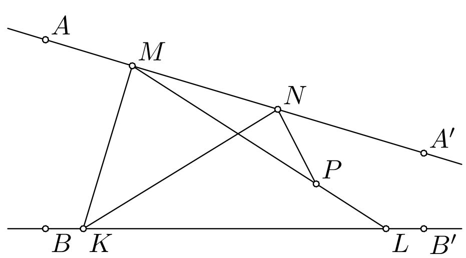
Slika 1.7.

Definicija 1.1. Neka je u ravni Lobačevskog data prava a i tačka $A \notin a$. Granične prave a_1 i a_2 koje sadrže tačku A i razdvajaju prave koje sadrže tačku A i seku pravu a od pravih te ravni koje sadrže tačku A i ne seku pravu a nazivamo pravama koje su u tački A *paralelne* s pravom a. Jednu od tih dveju pravih smatrajmo paralelnom s pravom a u jednom smeru, a drugu u drugom smeru. Sve ostale prave u toj ravni koje sadrže tačku A i s pravom a nemaju zajedničkih tačaka nazivamo pravama *hiperparalelnim* s pravom a.

Kroz sledeće teoreme ćemo istaći neke od osobina paralelnih pravih u ravni Lobačevskog.

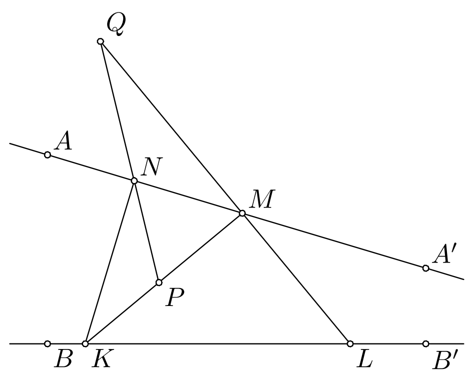
Teorema 1.5. Ako je prava AA' paralelna s pravom BB' u nekoj tački M, tada je prava AA' paralelna s pravom BB' u svakoj drugoj svojoj tački N.

Dokaz: Razlikujemo dva slučaja, slučaj kada se tačka N nalazi na pravoj AA' u smeru paralelnosti od tačke M i slučaj kada se tačka N nalazi na pravoj AA' u suprotnom smeru.



Slika 1.8.

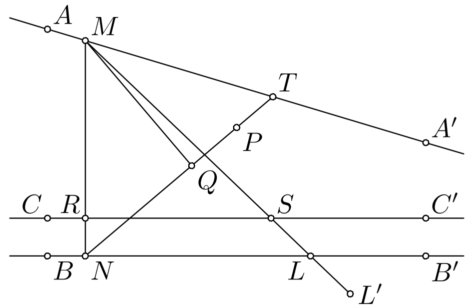
U prvom slučaju neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bismo dokazali da je prava AA' uporedna s pravom BB' u nekoj tački N, dovoljno je dokazati da svaka prava određena tačkom N i nekom tačkom P koja se nalazi u uglu $\measuredangle KNA'$ seče pravu BB'. Ako je tačka P na pravoj BB' ili je s one strane od prave BB' s koje nije tačka N, polupravа NP seče pravu BB', pa je teorema dokazana. Ako je tačka P sa one strane od prave BB' sa koje je i tačka N, tačka P je u uglu $\measuredangle KMA'$. Stoga je poluprava MP u uglu $\measuredangle KMA'$ kojem jedan krak seče pravu BB' a drugi je uporedan s tom pravom, pa poluprava MP seče pravu BB' u nekoj tački L koja se nalazi iza tačke P u odnosu na tačku M. Pri tome prava NP ne sadrži ni jedno teme $\triangle MKL$, seče njegovu stranicu ML u tački P, pa prema Pašovom stavu seče još jednu stranicu tog trougla. S obzirom da se poluprava NP nalazi u uglu $\measuredangle KNA'$, u uglu $\measuredangle KNM$ koji je naporedan s uglom $\measuredangle KNA'$ prava NP nema tačaka. Stoga prava NP ne seče stranicu KM već stranicu LM trougla $\triangle KLM$. Na taj način mi smo dokazali da prava NP seče pravu BB', pa je prava AA' uporedna s pravom BB' u tački N.



Slika 1.9.

U drugom slučaju tačka N nalazi se na pravoj AA' koja je od tačke M u smeru koji je suprotan sa smerom paralelnosti pravih AA' i BB'. Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bismo dokazali da je prava AA' seče pravu BB' u tački N, dovoljno je dokazati da svaka prava određena tačkom N i nekom tačkom P' koja se nalazi u uglu $\measuredangle KNM$ seče pravu BB'. Pri tome je poluprava NP' u konveksnom uglu KNM te ona seče duž KM u nekoj tački P. Ako je Q proizvoljna tačka koja se nalazi iza tačke N u odnosu na tačku P, tačka Q je u uglu koji je unakrsan s uglom KMA', prema tome prava QM seče pravu BB' u nekoj tački L koja se nalazi iza tačke M u odnosu na tačku Q. Pri tome prava NP ne sadrži ni jedno teme trougla $\triangle KLM$, seče njegovu stranicu KM u tački P i produženje stranice LM u tački Q. Prema Pašovom stavu seče i stranicu tog trougla, dakle i pravu BB'. Zato je prava AA' uporedna s pravom BB' u tački N. ■

Teorema 1.6. Ako je prava AA' paralelna s pravom BB', tada je i prava BB' paralelna s pravom AA'.

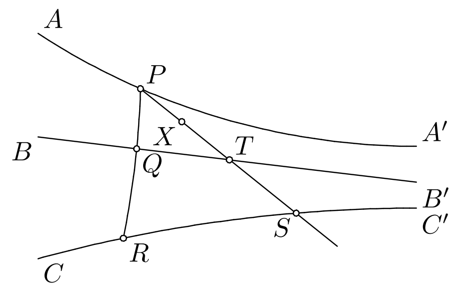


Slika 1.10.

Dokaz: Neka je $M \in AA'$, a N podnožje normale iz tačke M na pravu BB'. S obzirom da se prava AA' seče sa pravom BB', svaka prava određena tačkom M i proizvoljnom unutrašnjom tačkom ugla $\measuredangle NMA'$ seče pravu BB'. Da bismo dokazali da se prava BB' seče sa pravom AA', saglasno definiciji treba da dokažemo da svaka prava određena tačkom N i proizvoljnom unutrašnjom tačkom P ugla $\measuredangle MNB'$ seče pravu AA'. S obzirom da je ugao $\measuredangle MNB'$ prav, a tačka P u njemu, ugao $\measuredangle MNP$ je oštar pa se podnožje Q normale iz tačke M na pravu NP nalazi na polupravoj NP, dakle u uglu $\measuredangle MNB'$. Pri tome je tačka Q u uglu $\measuredangle NMA'$, na polupravoj AA' ili s one strane prave AA' s koje nije tačka N. U poslednja dva slučaja neposredno sledi da prava NQ dakle i prava NP seče pravu AA', pa je u tim slučajevima stav dokazan. Ako je tačka Q u uglu $\measuredangle NMA'$, postojaće u tom uglu poluprava ML' takva da je $\measuredangle NMQ = \measuredangle L'MA'$. Kako se prave AA' i BB' seku, poluprava ML' koja se nalazi u uglu $\measuredangle NMA'$ seče pravu BB' u nekoj tački L. Kod pravouglog trougla $\triangle MNQ$ stranica MN je hipotenuza a stranica MQ kateta, pa je $MN > MQ$. Zato između tačaka M i N postoji tačka R takva da je $MQ = MR$. Neka je CC' prava upravna u tački R na pravoj MN. S obzirom da su prave BB' i CC' upravne u dvema raznim tačkama N i R na pravoj MN, one prema poznatom stavu nemaju zajedničkih tačaka. Pri tome prava CC' ne sadrži ni jedno teme trougla $\triangle LMN$, seče njegovu stranicu MN u tački R, a ne seče stranicu NL, te prema Pašovom stavu seče stranicu LM u nekoj tački S. Ako je T tačka poluprave MA' takva da je $MS = MT$, biće trouglovi $\triangle MRS$ i $\triangle MQT$ podudarni, pa je $\measuredangle MRS = \measuredangle MQT$. Ipak, ugao $\measuredangle MRS$ je prav, pa je i njemu jednak ugao $\measuredangle MQT$ prav. Kako su prave QP i QT upravne u istoj tački Q na pravoj MQ, one su istovetne. Stoga prava QP, tj. prava NP seče pravu AA' u tački T, pa se prave BB' i AA' seku. ■

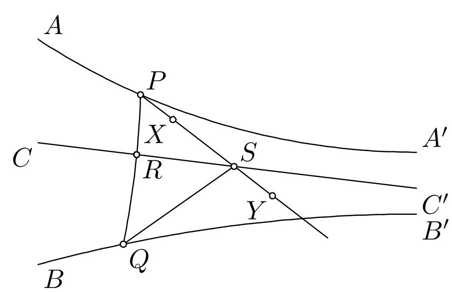
Teorema 1.7. Ako su dve prave AA' i BB' paralelne s trećom pravom CC' u istom smeru, tada su prave AA' i BB' i među sobom paralelne u tom smeru.

Dokaz: Prave AA' i BB' su sa iste ili sa raznih strana u odnosu na pravu CC'. Analizirajmo najpre prvi slučaj.



Slika 1.11a.

Prave AA' i BB' se ne seku, jer bi u protivnom kroz njihovu presečnu tačku postojale dve prave uporedne sa pravom CC' u istom smeru, što je nemoguće. Zato je jedna od pravih AA' i BB' između druge od tih dveju pravih i prave CC'. Neka je npr. prava BB' između pravih AA' i CC'. Ako su P i R dve proizvoljne tačke pravih AA' i CC', tačke P i R su sa raznih strana od prave BB', pa duž PR seče pravu BB' u nekoj tački Q. S obzirom da se prave AA' i BB' ne seku, one će biti uporedne među sobom ako dokažemo da svaka prava kroz tačku P i proizvoljnu unutrašnju tačku X ugla $\measuredangle QPA'$ seče pravu BB'. Po pretpostavci prava AA' seče se sa pravom CC' pa prava kroz tačku P i unutrašnju tačku X ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC' u nekoj tački S. Pri tome su tačke P i S s raznih strana prave BB', pa duž PS, dakle i prava PX, seče pravu BB' u nekoj tački T. Zato se prava AA' seče sa pravom BB'.

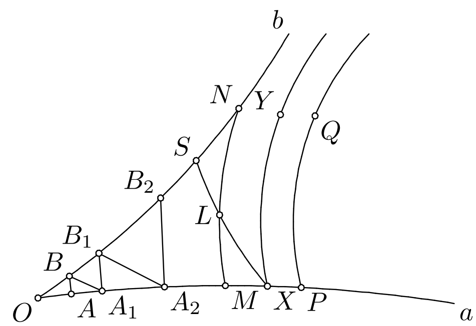


Slika 1.11b.

Ako su prave AA' i BB' s raznih strana od prave CC', one nemaju zajedničkih tačaka. Neka su P i Q dve proizvoljne tačke pravih AA' i BB'. S obzirom da se prave AA' i BB' ne seku, one će biti uporedne ako dokažemo da prava kroz tačku P i proizvoljnu unutrašnju tačku X ugla $\measuredangle QPA'$ seče pravu BB'.

Tačke P i Q su sa raznih strana prave CC', pa duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački R. Iz uporednosti pravih AA' i CC' sledi da prava kroz tačku P i unutrašnju tačku X ugla $\measuredangle RPA'$ seče pravu CC' u nekoj tački S. Proizvoljna tačka Y koja se nalazi iza tačke S u odnosu na tačku P je u uglu $\measuredangle QSC'$, pa iz uporednosti pravih BB' i CC' sledi da prava SY tj. prava PX seče pravu BB'. Stoga je prava AA' uporedna s pravom BB'. ■

Teorema 1.8. Ako je α oštar ugao, tada postoji jedna i samo jedna prava upravna na jednom kraku ugla α, a paralelna s drugim krakom tog ugla.



Slika 1.12.

Dokaz: Neka su a i b kraci, i O teme oštrog ugla α, i dokažimo da postoji prava koja je normalna na kraku, npr. a, i seče se sa krakom b tog ugla. Prvo dokažimo da postoji prava koja je normalna na krak a i ne seče krak b tog ugla.

Pretpostavimo da takva prava ne postoji, tj. da svaka prava normalna na krak a seče krak b. Ako sa A obeležimo proizvoljnu tačku polupravе a, sa $A_1, ..., A_n$ tačke poluprave a takve da važi poredak

$$\mathcal{B}(A, A_1, ..., A_n)$$

i

$$OA \cong AA_1,\ AA_1 \cong A_1A_2, ...,\ A_{n-2}A_{n-1} \cong A_{n-1}A_n$$

i sa $B, B_1..., B_n$ tačke u kojima upravne u tačkama $A, A_1, ..., A_n$ na polupravu a seku polupravu b, biće, s obzirom na aditivnost defekta

$$\begin{aligned}
\delta(OA_1B_1) &= \delta(OAB) + \delta(AA_1B) + \delta(A_1B_1B) \\
&= 2\delta(OAB) + \delta(A_1B_1B) \\
&> 2\delta(OAB) \\
\delta(OA_2B_2) &= \delta(OA_1B_1) + \delta(A_1A_2B_1) + \delta(A_2B_2B_1) \\
&= 2\delta(OA_1B_1) + \delta(A_2B_2B_1) \\
&> 2^2\delta(OA_1B_1) \\
&\vdots \\
\delta(OA_nB_n) &= \delta(OA_{n-1}B_{n-1}) + \delta(A_{n-1}A_nB_{n-1}) + \delta(A_nB_nB_{n-1}) \\
&= 2\delta(OA_{n-1}B_{n-1}) + \delta(A_nB_nB_{n-1}) \\
&> 2^n\delta(OA_{n-1}B_{n-1})
\end{aligned}$$

Pri tome se broj n može izabrati dovoljno veliki da ugao $2^n\delta(OAB)$ bude veći od bilo kojeg unapred datog ugla, dakle veći i od zbira dva prava ugla. U tom slučaju bio bi defekt trougla $\triangle OA_nB_n$ takođe veći od zbira dva prava ugla, te bi zbir unutrašnjih uglova tog trougla bio negativan, što je nemoguće. Stoga normale na polupravoj a u svim njenim tačkama ne seku polupravu b.

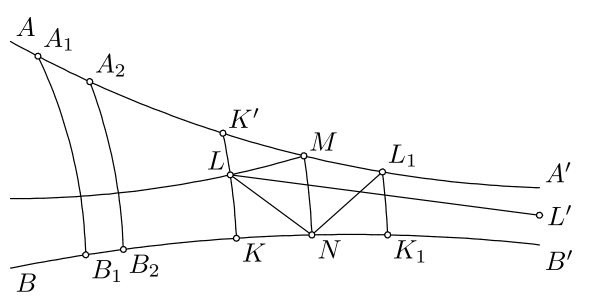
Na taj način skup svih tačaka poluprave a možemo podeliti u dve klase i to prvu klasu tačaka u kojima normale na polupravoj a seku polupravu b i drugu klasu tačaka u kojima normale na polupravu a ne seku polupravu b. Pri tome, ako neka tačka M pripada prvoj klasi tada svaka tačka M' koja se nalazi između tačaka O i M pripada prvoj klasi. Ako neka tačka P pripada drugoj klasi tada svaka tačka P' koja se nalazi iza tačke P u odnosu na tačku O pripada drugoj klasi. Da bismo dokazali prvu od tih osobina obeležimo sa N tačku u kojoj prava upravna u tački M na polupravu a seče polupravu b. Prava upravna u tački M' na polupravu a ne sadrži ni jedno teme trougla $\triangle OMN$, seče njegovu stranicu OM, a ne seče stranicu MN, te prema Pašovom stavu seče stranicu ON, dakle i polupravu b u nekoj tački N'. Stoga tačka M' pripada prvoj klasi. Drugu od pomenutih osobina dokazujemo indirektno. Ako bi tačka P' pripadala prvoj klasi prema dokazanoj osobini i tačka P koja se nalazi između tačaka O i P' pripadali bi prvoj klasi, što je nemoguće. Stoga tačka P' pripada drugoj klasi. Time smo dokazali da su zadovoljeni uslovi Dedekindovog stava[16] te na polupravoj a postoji jedna i samo jedna tačka X koja razlaže te dve klase. Pri tome svaka tačka između tačaka O i X pripada prvoj klasi, a svaka tačka iza tačke X u odnosu na tačku O pripada drugoj klasi. Indirektnim postupkom dokažimo da i tačka X pripada drugoj klasi. Ako bi tačka X pripadala prvoj klasi,

[16] *Julijus Vilhelm Ričard Dedekind* , nemački matematičar.

normala XY u tački X na polupravu a sekla bi polupravu b u nekoj tački Z. Neka je Z' bilo koja tačka iza tačke Z u odnosu na tačku O. Podnožje X' uprave iz tačke Z' na polupravoj a pripada prvoj klasi, a nalazi se iza tačke X u odnosu na tačku O, što je nemoguće. Dakle X je tačka druge klase. Dokažimo najzad da je prava XY paralelna sa polupravom OB, gde je tačka Y s one strane prave OX s koje je tačka B. S obzirom da prava XY nema sa pravom OB zajedničkih tačaka, biće uporedna s pravom OB ako dokažemo da svaka prava kroz tačku X i proizvoljnu tačku L koja se nalazi u uglu $\measuredangle OXY$ seče pravu OB. Ako se pri tome tačka L nalazi sa one strane prave OB sa koje nije tačka X ili se pak nalazi na pravoj OB, dokaz je direktan. Ako se tačka L nalazi s one strane od prave OB s koje je tačka X, biće uglovi $\measuredangle LOX$ i $\measuredangle LXO$ oštri, pa se podnožje M normale iz tačke L na pravoj OX nalazi između tačaka O i X. Stoga tačka M pripada prvoj klasi te normala ML u tački M na polupravoj a seče polupravu b u nekoj tački N koja se nalazi iza tačke L u odnosu na tačku M. Pri tome prava XL ne sadrži ni jedno teme trougla $\triangle OMN$, seče njegovu stranicu MN, a ne seče stranicu OM, te prema Pašovom stavu seče stranicu ON, dakle i pravu OB u nekoj tački S. Odatle sledi da je prava XY paralelna s pravom OB. ■

Teorema 1.9. Odstojanje tačke koja se nalazi na jednoj od dve međusobno paralelne prave od druge prave neograničeno opada kada se tačka udaljava u smeru paralelnosti, a neograničeno raste kada se ta tačka udaljava u suprotnom smeru.

Dokaz: Neka su AA' i BB' dve paralelne prave, A_1 i A_2 tačke prave AA' takve da je $\mathcal{B}(A, A_1, A_2)$, B_1 i B_2 podnožja upravnih iz tačaka A_1 i A_2 na pravoj BB'. Prema poznatom stavu uglovi $\measuredangle B_1A_1A'$ i B_2A_2A' kao uglovi paralelnosti, ovaj pojam ćemo kasnije definisati, prave AA' s pravom BB' su oštri.



Slika 1.13.

Kako je ugao $\measuredangle A_1A_2B_2$ naporedan sa oštrim uglom $\measuredangle B_2A_2A'$, on je tup, pa je u četvorouglu $B_1B_2A_2A_1$ s pravim uglovima B_1 i B_2,

$$\measuredangle B_1A_1A_2 < \measuredangle A_1A_2B_2.$$

Zato je i

$$A_2B_2 < A_1B_1.$$

Ovim smo dokazali da se udaljavanjem tačke po pravoj AA' u smeru paralelnosti njeno odstojanje od prave BB' smanjuje. Dokažimo sad da se to odstojanje smanjuje neograničeno, tj. da na pravoj AA' postoji tačka P kojoj je odstojanje PQ od prave BB' manje od bilo koje unapred date duži l. Neka je K' proizvoljna tačka prave AA', K podnožje normale iz tačke K' na pravoj BB', a L tačka poluprave KK' takva da je $KL \cong l$. Pri tome je

$$K' = L \text{ ili } \mathcal{B}(K, K', L) \text{ ili } \mathcal{B}(K, L, K').$$

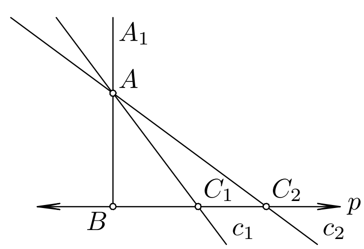
U prva dva slučaja dokaz sledi neposredno. Ako je $\mathcal{B}(K, L, K')$, obeležimo sa LL' i LL'' prave paralelne sa pravama BB' i $B'B$. Iz $AA' \| BB'$ i $LL' \| BB'$ sledi da je $AA' \| LL'$. Prava LL'' sadrži neku tačku koja se nalazi uglu $\measuredangle K'LL'$, prema tome, ona seče pravu AA' u nekoj tački M. Neka je L_1 tačka prave AA' iza tačke M u odnosu na tačku K' takva da je $ML \cong ML_1$ i neka su N i K_1 podnožja normala iz tačaka M i L_1 na pravu BB'. Iz podudarnosti trouglova $\triangle LMN$ i L_1MN sledi da je $LN \cong L_1N$ i $\measuredangle LNM \cong \measuredangle L_1NM$. Sada je $\measuredangle LNK \cong \measuredangle L_1NK_1$ i $LN \cong L_1N$, pa su trouglovi $\triangle KLN$ i $\triangle K_1L_1N$ s pravim uglovima K i K_1 podudarni. Otuda je $K_1L_1 \cong KL$, tj.

$$K_1L_1 \cong l$$

pa je odstojanje PQ svake tačke P koja se nalazi iza tačke L_1 u odnosu na tačku M od prave BB' manje od duži l. Ovim je dokazan prvi deo teoreme. Dokaz drugog dela teoreme izvodi se analognim postupkom. ■

1.4 Ugao paralelnosti. Funkcija Lobačevskog

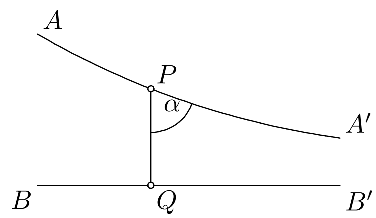
Neka je data prava p i tačka A koja joj ne pripada, tj. $A \notin p$. Iz A spustimo normalu AB napravu p. Kroz tačku A povlačimo prave c_1 i c_2 koje seku pravu p u tačkama C_1 i C_2. Ako prava AC_1 sa normalom AB gradi manji ugao nego prava AC_2, tada će tačka C_1 biti na manjem rastojanju od tačke B u odnosu na tačku C_2. Što je veći ugao između pravih c_1 i AB, to će se na većem rastojanju naći presek ravih c_1 i p.



Slika 1.14.

Ako tačku A izaberemo tako da bude što je moguće više udaljena od prave p, recimo u položaju A_1, prava A_1C_1 gradiće sa normalom A_1B manji ugao nego prava AC_1. Što smo dalji od objekta, pod manjim uglom ga vidimo. Odavde možemo zaključiti da što je tačka A dalja od prave p taj ugao će težiti 0, dok se njenim približavanjem ka objektu, u ovom slučaju pravoj p, taj ugao teži $\frac{\pi}{2}$.

Definicija 1.2. Neka je tačka P izvan prave BB' i Q podnožje normale iz P na tu pravu. Ako je AA' prava koja sadrži tačku P i paralelna je sa BB', tada oštar ugao $\measuredangle QPA'$ nazivamo *uglom paralelnosti* prave AA' u tački P sa pravom BB', tj. ugao koji odgovara duži PQ. Duž PQ je duž paralelnosti.



Slika 1.15.

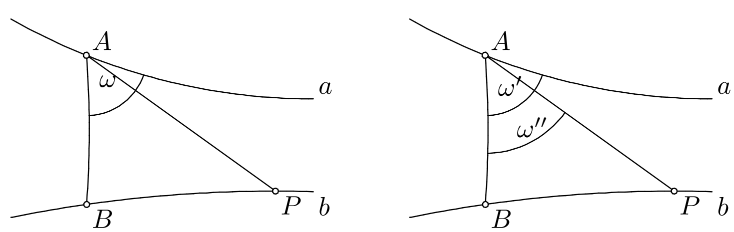
Ugao paralelnosti $\measuredangle QPA'$ označavamo sa $\Pi(PQ)$ gde je Π funkcija Lobačevskog, i važi

$$0 < \Pi(x) < \frac{\pi}{2}.$$

Na osnovu prethodno iznesenih osobina, važe sledeće teoreme.

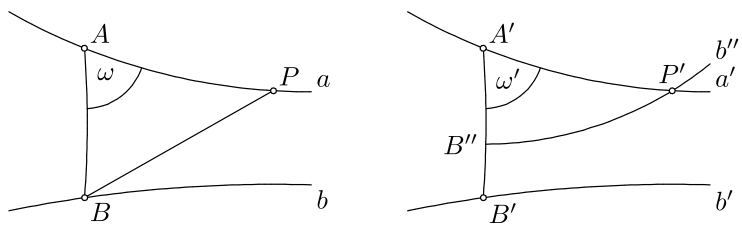
Teorema 1.10. Jednakim dužima odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti, i obratno, jednakim uglovima paralelnosti odgovaraju jednake duži.

Dokaz: Obeležimo sa b i b' dve proizvoljne prave, a sa A i A' tačke izvan njih, sa B i B' podnožja upravnih iz tačaka A i A' na pravama b i b', a sa a i a' prave koje redom sadrže tačke A i A', a paralelne su sa pravama b i b'. Oštri uglovi ω i ω' koje zahvataju poluprave AB i $A'B'$ sa pravama a i a' su po definiciji uglovi paralelnosti koji odgovaraju dužima AB i $A'B'$.



Slika 1.16.

Da bismo dokazali prvi deo teoreme pretpostavimo da su duži AB i $A'B'$ jednake. Ako bi uglovi paralelnosti ω i ω' koji odgovaraju tim dužima bili nejednaki, jedan od njih bio bi veći od drugog, npr. $\omega' > \omega$. U tom slučaju u uglu ω' postoji polupravа $A'P'$ koja s polupravom $A'B'$ zahvata ugao ω'' jednak s uglom ω. S obzirom da je prava a' paralelna s pravom b, a poluprava $A'P'$ u uglu paralelnosti, poluprava $A'B'$ seče pravu b' u nekoj tački P'. Neka je P tačka prave b s one strane prave $A'B'$ sa koje je ugao ω takva da je $BP \cong B'P$'. Pri tome su trouglovi $\triangle ABP$ i $\triangle A'B'P'$ podudarni, pa su uglovi $\measuredangle BAP$ i $\measuredangle B'A'P'$ jednaki. Stoga je ugao $\measuredangle BAP$ jednak sa uglom ω'', dakle i sa uglom ω, te su prave AP i a istovetne. Ipak, to je nemoguće, jer prava AP seče pravu b, dok je prava a paralelna s njom. Otuda sledi da su uglovi ω i ω' jednaki, pa je prvi deo teoreme dokazan.



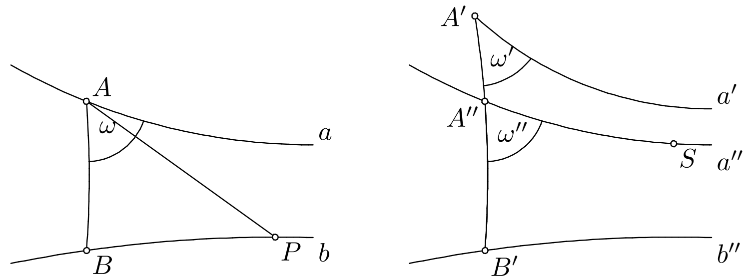
Slika 1.17.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme pretpostavimo da su uglovi paralelnosti ω i ω' koji odgovaraju dužima AB i $A'B'$ među sobom jednaki. Ako pri tome duži AB i $A'B'$ nisu jednake, biće npr. $A'B' > AB$. U tom slučaju između tačaka A' i B' postoji tačka B'' takva da je $AB = A'B''$. S obzirom da je normala b' u tački B' na kraku $A'B'$ oštrog ugla ω' paralelna s drugim krakom tog ugla, prava B'' normalna na kraku $A'B'$ u tački B'' koja se nalazi između tačaka A' i B' seče drugi krak ugla ω', dakle i pravu a' u nekoj tački P'.

Neka je P tačka prave a, s one strane prave AB s koje je ugao ω takav da je $A'P' \cong AP$. Pri tome su trouglovi $\triangle ABP$ i $\triangle A'B''P'$ podudarni, te je $\measuredangle ABP \cong \measuredangle A'B''P'$. No $\measuredangle A'B''P'$ je prav pa je i $\measuredangle ABP$ prav. S obzirom da su prave BP i b upravne na duži AB u istoj tački, one su istovetne. No to je nemoguće, jer prava BP seče pravu a, dok je prava b paralelna s njom. Stoga su duži AB i $A'B'$ jednake, pa je i drugi deo teoreme dokazan. ■

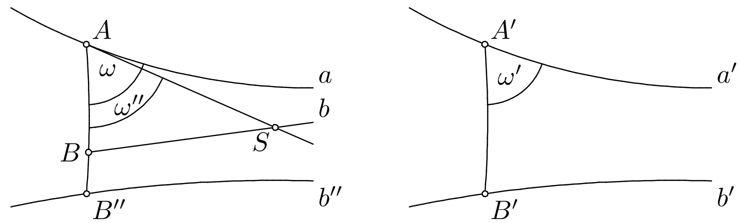
Teorema 1.11. Većoj duži odgovara manji ugao paralelnosti, i obratno, manjem uglu paralelnosti odgovara veća duž.

Dokaz: Obeležimo sa b i b' dve proizvoljne prave, sa A i A' tačke izvan njih, sa B i B' podnožja upravnih iz tačaka A i A' na pravama b i b', a sa a i a' prave kroz tačke A i A' paralelne s pravama b i b'.



Slika 1.18.

Oštri uglovi ω i ω' koje zahvataju poluprave AB i $A'B'$ sa pravama a i a' su po definiciji uglovi paralelnosti koji odgovaraju dužima AB i $A'B'$. Da bismo dokazali prvi deo teoreme pretpostavimo da je duž $A'B'$ veća od duži AB. U tom slučaju između tačaka A' i B' postoji tačka A'' takva da je duž AB jednaka duži $A''B'$. Neka je a'' prava koja sadrži tačku A'', a paralelna je pravoj b' u onom smeru u kojem je i prava a' paralelna sa pravom b', a ω'' ugao paralelnosti koji odgovara duži $A''B'$. S obzirom da su duži AB i $A''B'$ među sobom jednake, prema prethodnoj teoremi jednaki su i uglovi paralelnosti ω i ω'' koji odgovaraju tim dužima. Dokažimo da je ugao ω' manji od ugla ω''. Pre svega saglasni uglovi ω' i ω'' koje određuje sečica $A'A''$ sa pravama a' i a'' ne mogu biti jednake, jer bi tada prave a' i a'' bile hiperparalelne, što je nemoguće jer su obe paralelne s pravom b' u istom smeru, dakle i među sobom. Ako bi ugao ω'' bio manji od ugla ω' postojala bi u uglu ω' poluprava $A'S'$ koja zahvata sa polupravom $A'B'$ ugao jednak s uglom ω''. Ta poluprava sekla bi pravu a'' u nekoj tački S', pa bi kod trougla $\triangle A'A''S'$ spoljašnji ugao A'' bio jednak unutrašnjem nesusednom uglu A', što je prema poznatom stavu iz apsolutne gemetrije nemoguće. Stoga je $\omega' < \omega''$, i prema tome $\omega' < \omega$. Ovim smo dokazali prvi deo teoreme.



Slika 1.19.

Da bismo dokazali drugi deo teoreme, pretpostavimo da je ugao ω' manji od ugla ω. U tom slučaju, u uglu ω postoji poluprava AS koja sa polupravom AB zahvata ugao jednak sa uglom ω'. Ta poluprava seče pravu b u nekoj tački S. S obzirom da je ugao ω oštar i ugao $\measuredangle BAS$ sadržan u njemu takođe je oštar. Stoga postoji jedinstvena prava B'' upravna na kraku AB u nekoj tački B'', a paralelna sa drugim krakom AS ugla $\measuredangle BAS$. S obzirom da uglovi paralelnosti ω i ω' nisu jednaki, prema prethodnoj teoremi nisu ni duži AB i $A'B'$ jednake, pa je tačka B'' različita od tačke B. Tačka B'' ne može biti ni između tačaka A i B, jer bi tada prava B'' sekla stranicu AB trougla $\triangle ASB$ pa bi prema Pašovoj teoremi sekla još jednu njegovu stranicu. Međutim, to je nemoguće jer je prava b'' paralelna sa pravom AS, a hiperparalelna sa pravom BS. Otud sledi da se tačka B'' nalazi iza tačke B u odnosu na tačku A, pa je duž AB'' veća od duži AB. Iz jednakosti uglova ω' i ω'' sledi da su duži AB'' i $A'B'$ jednake, pa je i duž $A'B'$ veća od duži AB. Ovim je teorema dokazana. ■

Teorema 1.12. Funkcija Lobačevskog $\omega_x = \Pi(x)$ kojom se svakoj duži x dodeljuje ugao paralelnosti ω_x , je definisana za svako x iz intervala $0 < x < \infty$, ona je neprekidna i strogo opadajuća funkcija uzimajući sve vrednosti iz intervala $0 < \omega < R$, gde je R prav ugao. Pri tome je

$$\lim_{x\to 0} \Pi(x) = R \text{ i } \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0.$$

Dokaz: Prvi deo teoreme sledi neposredno, jer kroz tačku A koja se nalazi na odstojanju $AB = x$ od prave a postoje dve prave a_1 i a_2 koje su u raznim smerovima paralelne s pravom a. Pri tome su oštri uglovi koje određuju prave a_1 i a_2 s polupravom AB uglovi paralelnosti tih pravih u tački A prema pravoj a. Ti uglovi su jednaki, oni prema definiciji predstavljaju vrednost funkcije $\Pi(x)$ za odsečak x. Stoga je funkcija $\Pi(x)$ definisana za svaki odsečak iz intervala $0 < x < \infty$.

Drugi deo stava sledi iz ranije dokazanog stava prema kojem za svaki oštar ugao $\omega \equiv \angle AOB$ postoji prava n koja je u nekoj tački A upravna na kraku OA i paralelna s krakom OB tog ugla. U tom slučaju imamo da je $\omega = \Pi(OA)$, te za svaki oštar ugao c postoji odsečak x takav da je $\omega = \Pi(x)$.

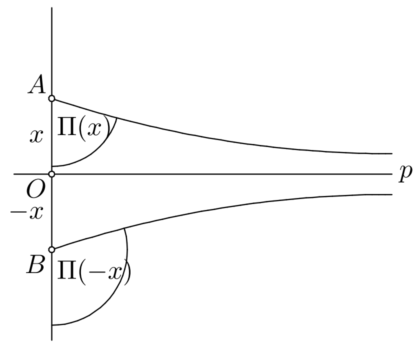
Treći deo stava sledi iz ranije dokazane teoreme, jer pri $x_1 < x_2$ imamo da je $\omega_1 > \omega_2$, tj. da je $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$. Iz dokazanih osobina neposredno sledi da je

$$\lim_{x\to 0} \Pi(x) = R \text{ i } \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0. \blacksquare$$

Ova teorema govori da se u malim delovima prostora geometrija Lobačevskog malo razlikuje od euklidske geometrije, kao i da se ta razlika smanjuje smanjivanjem posmatranog dela prostora. Već smo videli da slučaj $x = \frac{\pi}{2}$ odgovara euklidskoj geometriji. Euklidkska geometrija je granični slučaj hiperboličke geometrije kada rastojanja neograničeno opadaju.

Definicija 1.3. Za ugao paralelnosti $\Pi(-x)$ važi:

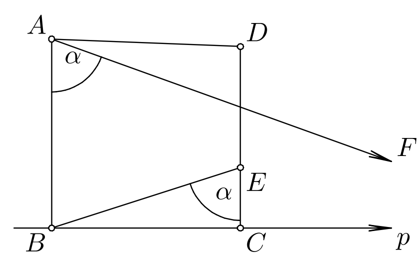
$$\Pi(x) + \Pi(-x) = \pi.$$



Slika 1.21.

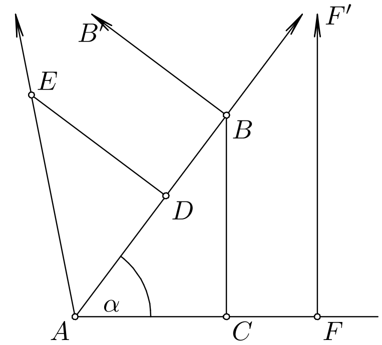
1.4.1 Konstrukcija ugla paralelnosti i dužine koja mu odgovara

Konstrukciju paralelne prave iz tačke A prema pravoj p, pokazao je Janoš Boljaj u svom *Appendix*-u.



Slika 1.22.

Ako iz tačke A spustimo normalu $AB = a$ na pravu p i iz proizvoljne tačke C sa prave p uzdignemo normalu CD i $AD \perp CD$, tada iz tačke B opišemo krug poluprečnika AD koji će preseći CD u tački E pod uglom α. Prenesemo ugao α iz tačke A na AB i time dobijamo traženu paralelu AF. Dužina koja odgovara uglu α označavamo sa $D(\alpha)$, i određujemo tako što nacrtamo neki pravougli trougao ABC, u kome je α oštar ugao kod temena A. U tački B konstruišemo BB' za koju važi $BB' \perp AB$. Na duž AB nanesemo dužinu AD za koju važi $AD = CD$ i iz tačke D konstruišemo normalu DE na pravu AB. Tada je AE dužina koja odgovara uglu paralelnosti α. Ako se nanese da je $AF = AE$, onda je $FF' \| AB$.



Slika 1.23.

2 Geometrija poligona u ravni Lobačevskog

2.1 Uglovi trougla i n-tougla u ravni Lobačevskog

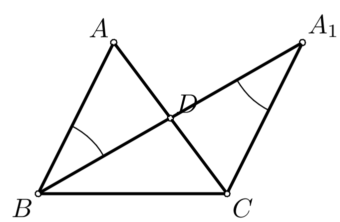
2.1.1 Ležandrove teoreme

Ležandr[17] je u proučavanju veze između aksioma apsolutne geometrije i Euklidovog V postulata došao do važnih zaključaka koji se odnose na zbir unutrašnjih uglova u trouglu. Da bi dokazao Euklidov V postulat kao posledicu sistema apsolutne geometrije, obogatio je poznavanje apsolutne geometrije. U to vreme bilo je poznato da je u euklidskoj geometriji zbir unutrašnjih uglova u trouglu jednak zbiru dva prava ugla.

Teorema 2.1. Zbir unutrašnjih ugova trougla ne može biti veći od zbira dvaju pravih uglova.

Dokaz: Kako bismo dokazali ovu teoremu, potrebno je da dokažemo sledeći stav:

Za svaki trougao Δ postoji trougao Δ_1 kojem je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru unutrašnjih uglova trougla Δ, a jedan njegov unutrašnji ugao bar dva puta manji od unapred naznačenog ugla trougla Δ.



Slika 2.1.

Neka su A, B, C temena trougla Δ, i neka je D središte stranice AC i A_1 tačka simetrična tački B u odnosu na tačku D. Pri tom je $\triangle ABD \cong \triangle CA_1D$ pa je i

$$\measuredangle ABD = \measuredangle CA_1D \text{ i } \measuredangle BAD = \measuredangle A_1CD,$$

a tako je i

$$\measuredangle ABA_1 = \measuredangle CA_1B \text{ i } \measuredangle BAC = \measuredangle A_1CA.$$

Na osnovu ovih jednakosti dolazimo do sledećeg:

$$\begin{aligned}\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA &= \measuredangle BAC + \measuredangle ABA_1 + \measuredangle A_1BC + \measuredangle BCA \\ &= \measuredangle ACA_1 + \measuredangle CA_1B + \measuredangle A_1BC + \measuredangle BCA \\ &= \measuredangle CA_1B + \measuredangle A_1BC + \measuredangle BCA_1\end{aligned}$$

[17] *Adrijen-Mari Ležandr* , francuski matematičar.

a to upravo znači da su zbirovi unutrašnjih uglova trouglova ABC i A_1BC jednaki, a samim tim i da je jedan od uglova A_1 ili B trougla A_1BC bar dva puta manji od ugla B trougla ABC. Zato su A_1, B i C temena trougla Δ koji ima navedene osobine. Ovim je dokazan pomoćni stav.

Nastavimo sada sa dokazom teoreme. Pretpostavimo suprotno, da postoji neki trougao Δ kod koga je zbir σ unutrašnjih uglova veći od π, tj. da je $\sigma = 2R + \varepsilon$, gde je R prav ugao i ε proizvoljan ugao. Prema prethodno dokazanom stavu postoji trougao Δ_1 takav da su zbirovi σ i σ_1 njihovih unutrašnjih uglova jednaki, a jedan njegov unutrašnji ugao α_1 bar dva puta manji od unutrašnjeg ugla α trougla Δ. Zatim, postoji trougao Δ_2, takav da je zbir njegovih unutrašnjih uglova σ_2 jednak σ_1, a jedan njegov unutrašnji ugao α_2 bar dva puta manji od unutrašnjeg ugla α_1 trougla Δ_1. Ponavljanjem datog postupka dobijamo trougao Δ_n kojem je zbir σ_n unutrašnjih uglova jednak zbiru σ_{n-1} unutrašnjih uglova trougla Δ_{n-1}, a jedan njegov ugao α_n bar dva puta manji od ugla α_{n-1} trougla Δ_{n-1}. Zato je i

$$\sigma_n = 2R + \varepsilon, \text{ a } \alpha_n \leqslant \frac{1}{2^n}\alpha.$$

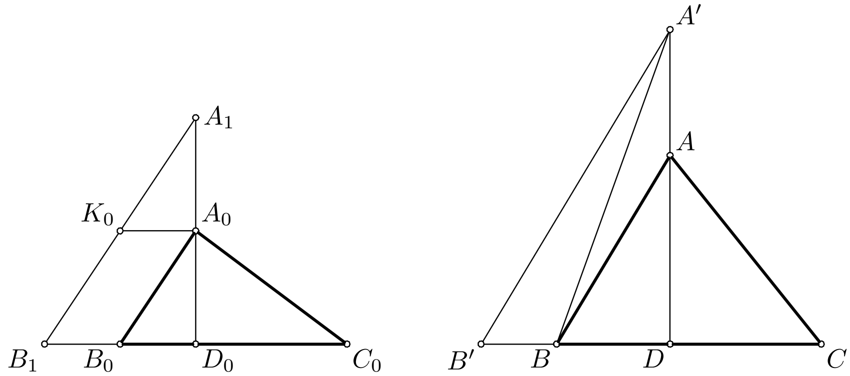
Broj n možemo izabrati dovoljno velik da je

$$\frac{1}{2^n}\alpha < \varepsilon,$$

pa će stoga biti i $\alpha_n < \varepsilon$. U tom slučaju zbir ostala dva unutrašnja uglova trougla Δ_n biće veći od π, što je prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije nemoguće. Zato zbir unutrašnjih uglova trougla ne može biti veći od zbira dva prava ugla, tj. π. ■

Neka je σ zbir unutrašnjih uglova nekog trougla ABC. Na osnovu prethodnog, $\sigma(ABC) \leqslant \pi$, pa je i $\pi - \sigma(ABC) \geqslant 0$. Datu razliku nazivamo defektom trougla ABC i označavamo je sa $\delta(ABC)$.

Teorema 2.2. Ako postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, onda zbir unutrašnjih uglova svakog trougla takođe π.



Slika 2.2.

Dokaz: Neka je $A_0B_0C_0$ trougao takav da mu je zbir unutrašnjih uglova jednak π, a ABC bilo kakav drugi trougao. Kako su unutrašnji uglovi kod bar dva temena nekog trougla oštri, podnožje normale iz trećeg temena na pravu koja sadrži naspramnu ivicu, pripada toj ivici. Pretpostavimo da su uglovi kod temena B_0, C_0 i B, C trouglova $A_0B_0C_0$ i ABC oštri, i da su D_0 i D podnožja normala iz A_0 i A na duži B_0C_0 i BC. Kako je

$$\sigma(A_0B_0D_0) + \sigma(A_0C_0D_0) = \sigma(A_0B_0C_0) + \pi,$$

biće i

$$\sigma(A_0B_0C_0) = \pi.$$

Uz to je i

$$\sigma(ABD) + \sigma(ACD) = \sigma(ABC) + \pi,$$

pa ako je $\sigma(ABD) = \sigma(ADC)$, biće i $\sigma(ABC) = \pi$.

Da bismo dokazali da je $\sigma(ABD) = \pi$, sa A_n i B_n, $n = 1, 2, ...$ obeležimo tačke polupravih (D_0A_0) i (D_0B_0) takve da je

$$A_nD_0 = 2^nA_0D_0 \text{ i } B_nD_0 = 2^nB_0D_0.$$

Dokažimo da je $\sigma(A_nB_nD_0) = \sigma(A_0B_0D_0)\pi$. Neka tačka K_0 pripada pravoj n koja je normalna na pravu A_0D_0, sa one strane te prave sa koje je i tačka B_0, takvu da je $A_0K_0 \cong D_0B_0$. Tada je

$$\triangle A_0B_0D_0 \cong \triangle B_0A_0K_0 \cong \triangle A_1K_0A_0 \cong \triangle K_0B_1B_0,$$

i važi raspored $\mathcal{B}(A_1, K_0, B_1)$ pa je zato i $\sigma(A_1B_1D_0) = \pi$. Ponavljanjem ovog postupka konačno mnogo puta dokazuje se da je $\sigma(A_nB_nD_0) = \pi$. Za dovoljno veliko n, na osnovu Arhimedove aksiome, biće $BD < B_nD_0$ i $AD < A_nD_0$. Zbog toga, na polupravama (DA) i (DB) postoje tačke A' i B' takve da je $\mathcal{B}(D, A, A')$, $\mathcal{B}(D, B, B')$, $B'D \cong B_nD_0$ i $A'D \cong A_nD_0$, pri čemu je

$$\sigma(A'B'D) = \sigma(A_nB_nD_0) = \pi.$$

Kako je i

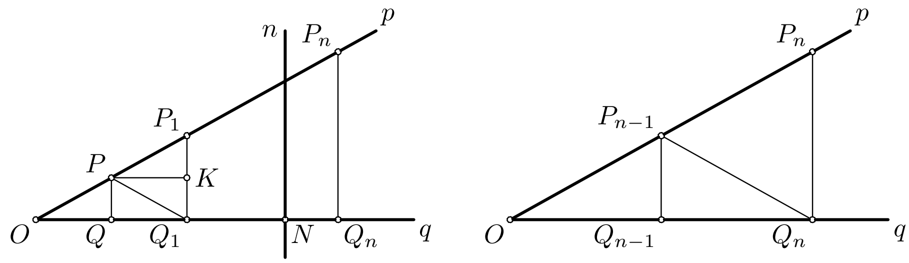
$$\sigma(A'B'B) + \sigma(A'BD) = \sigma(A'B'D) + \pi,$$

na osnovu prethodne teoreme dolazimo do zaključka da je i $\sigma(A'BD) = \pi$. Slično,

$$\sigma(A'BA) + \sigma(ABD) = \sigma(A'BD) + \pi,$$

pa je i $\sigma(ABD) = \pi$. Na isti način dokazuje se i da je $\sigma(ACD) = \pi$, pa je odatle i $\sigma(ABC) = \pi$. ■

Teorema 2.3. Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak π, ako i samo ako svaka prava upravna na jednom kraku bilo kojeg oštrog ugla seče drugi krak tog ugla.



Slika 2.3.

Dokaz: Neka je pq oštar ugao sa temenom O, neka je P proizvoljna tačka poluprave p, Q podnožje normale iz tačke P na polupravu q i N tačka u kojoj je neka prava n normalna na q. Ako je $\mathcal{B}(O,N,Q)$, jednostavno se, na osnovu Pašove aksiome dokazuje da n seče p. Zato pretpostavimo da je $\mathcal{B}(O,Q,N)$ i obeležimo sa P_n i Q_n, $n = 1, 2, ...$ tačke polupravih p i q takvih da je $\mathcal{B}(O,P,P_1,...,P_n)$ i $\mathcal{B}(O,Q,Q_1,...,Q_n)$, $OP_n = 2^n OP$ i $OQ_n = 2^n OQ$.

Ako postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova π, onda, kao i u dokazu prethodne teoreme, možemo dokazati da je trougao OP_nQ_n pravougli trougao, sa pravim uglom kod temena Q_n, i da mu je zbir unutrašnjih uglovajednak π. Zaista, ako sa K obeležimo tačku prave k koja je u tački P normalna na pravu PQ , sa one strane sa koje je i tačka P_1, takvu da je $PK \cong OQ$, tada je

$$\triangle OPQ \cong \triangle PP_1K \cong \triangle Q_1PQ \cong \triangle PQ_1K,$$

i $\mathcal{B}(P_1,K,Q_1)$, pa je odatle i $\sigma(OP_1Q_1) = \pi$. Ponavljanjem ovog postupka konačno mnogo puta, dokazuje se da je $\sigma(OP_nQ_n) = \pi$. Za dovoljno veliko n, na osnovu Arhimedove aksiome, biće $ON < OQ_n$, pa, pošto prava n seče duž OQ_n, a ne seče P_nQ_n, jer su prave n i P_nQ_n normalne na pravu q, onda će, na osnovu Pašove aksiome, seći duž OP_n.

Obratno, neka za svako n prava q_n koja je u tački Q_n normalna na kraku q, seče krak p ugla pq u tački P_n. Jednostavno se pokazuje da je tada

$$\begin{aligned}\delta(OP_nQ_n) &= \delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(Q_nP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(P_{n-1}Q_nP_n)\\ &= 2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) + \delta(P_{n-1}Q_nP_n).\end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da postoji trougao kome je defekt pozitivan, onda je, na osnovu prethodne teoreme, defekt svakog trougla pozitivan, pa je zato

$$\delta(OP_nQ_n) > 2\delta(OP_{n-1}Q_{n-1}) > ... > 2^n\delta(OPQ).$$

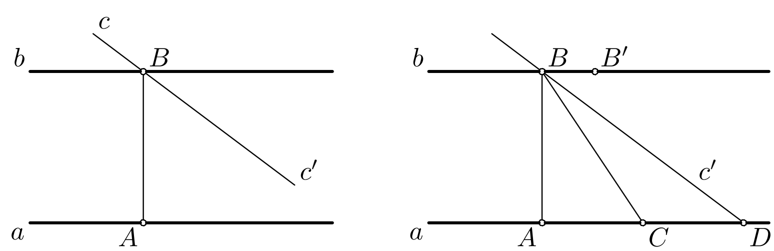
Broj n možemo izabrati dovoljno velik tako da broj $2^n\delta(OPQ)$ bude veći od bilo kog unapred zadatog broja, pa dakle i od π. Tada je

$$\delta(OP_nQ_n) > \pi,$$

što je nemoguće. Dakle, ne postoji trougao kome je defekt pozitivan, pa je zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg trougla jednak π. ■

Teorema 2.4. Postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak π ako i samo ako za svaku tačku B i pravu a koja je ne sadrži, u njima određenoj ravni postoji jedinstvena prava b, koja sadrži B i sa a nema zajedničkih tačaka.

Dokaz: Ako je A podnožje normale iz B na a, prava b koja sadrži tačku B i normalna je na pravu AB nema sa pravom a zajedničkih tačaka, jer bi, u protivnom, iz njihove presečne tačke postojale dve normalne prave na pravu AB. Pretpostavimo da postoji trougao kome je zbir unutrašnjih uglova jednak π i dokažimo da je tada prava b jedinstvena. U tom pravcu, neka je c prava koja sadrži B i neka je c' poluprava sa temenom B koja joj pripada, a sa polupravom (BA) zahvata oštar ugao. Prava a je upravna na (BA), pa na osnovu prethodne teoreme ona seče c', dakle i c.



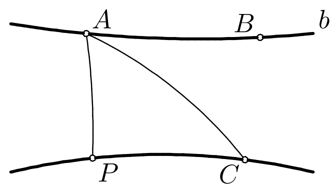
Slika 2.4.

Obratno, ako sa C obeležimo proizvoljnu tačku prave a različitu od A i sa B' proizvoljnu tačku prave b sa one strane prave AB sa koje je i C, biće $\sigma(ABC) = \pi$. Kako je, na osnovu teoreme 2.1., $\sigma(ABC) \leqslant \pi$, biće i $\measuredangle BCA \leqslant \measuredangle CBB'$. Da je $\measuredangle BCA < \measuredangle CBB'$, postojala bi u uglu CBB' poluprava c' koja sa (BC) zaklapa ugao γ podudaran uglu BCA. Kako je ugao BCA oštar, i γ bi bio oštar ugao, pa bi poluprava c' sekla pravu a u nekoj tački D. Tada bi u trouglu BCD spoljašnji ugao kod temena C bio jednak unutrašnjem uglu kod temena B, što je nemoguće. Dakle, $\measuredangle BCA \cong \measuredangle CBB'$, pa je i $\sigma(ABC) = \pi$. ■

2.1.2 Unutrašnji uglovi trougla i n-tougla

Teorema 2.5. Zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni Lobačevskog manji je od zbira dva prava ugla.

Dokaz: Neka je A proizvoljna tačka izvan neke prave a i π ravan određena tačkom A i pravom a. Neka je zatim P podnožje uprave iz tačke A na pravoj a, a b prava koja pripada ravni π i koja je u tački A upravna na duži AP.



Slika 2.5.

Prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije prava b nema sa pravom a zajedničkih tačaka. Ako obeležimo sa Q bilo koju tačku prave a različitu od tačke P i sa B bilo koju tačku prave b koja se nalazi sa one strane prave AP sa koje je tačka Q, biće

$$\measuredangle PAQ + \measuredangle QAB = \measuredangle PAB = R,$$

gde je R prav ugao. Indirektnim postupkom dokažimo da je

$$\measuredangle PQA < \measuredangle QAB.$$

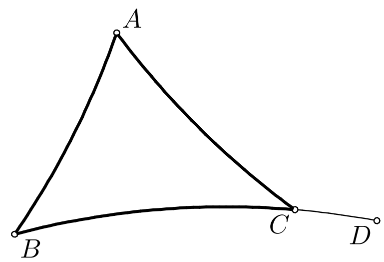
Ako bi bilo $\measuredangle PQA > \measuredangle QAB$, tada bi zbir unutrašnjih uglova trougla APQ bio veći od zbira dva prava ugla, što je prema poznatoj teoremi nemoguće. Ako bi bilo $\measuredangle PQA = \measuredangle QAB$, tada bi zbir unutrašnjih uglova trougla APQ bio jednak zbiru dva prava ugla, te bi prema poznatoj teoremi važila Plejferova aksioma paralelnosti, a ne aksioma paralelnosti Lobačevskog. Stoga je $\measuredangle PQA < \measuredangle QAB$, pa je zbir unutrašnjih uglova trougla APQ, prema tome i svakog drugog trougla u ravni Lobačevskog manji od zbira dva prava ugla. ■

Teorema 2.6. Zbir svih unutrašnjih uglova n-tougla u ravni Lobačevskog manji je od zbira $2n - 1$ pravih uglova.

Dokaz: Prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije svaka n-tougaona površ ω može se svojim unutrašnjim dijagonalama razložiti na $n - 2$ trougaonih površi $\omega_1, ..., \omega_{n-2}$. Pri tome je zbir svih unutrašnjih uglova površi ω, dakle i n-tougla koji predstavlja rub te površi, jednak zbiru unutrašnjih uglova trougaonih površi $\omega_1, ..., \omega_{n-1}$. No, zbir unutrašnjih uglova svake od trougaonih površi $\omega 1, ..., \omega_{n-1}$ manji je od zbira dva prava ugla, te je i zbir svih unutrašnjih uglova n-tougla u ravni Lobačevskog manji od zbira $2n - 4$ pravih uglova. ■

2.1.3 Spoljašnji uglovi trougla i n-tougla

Teorema 2.7. Svaki spoljašnji ugao trougla u ravni Lobačevskog veći je od zbira dvaju unutrašnjih nesusednih uglova tog trougla.



Slika 2.6.

Dokaz: Ako je ABC proizvoljan trougao, njegov spoljašnji ugao ACD biće suplementan sa odgovarajućim uglom trougla BCA, pa je

$$\measuredangle BCA + \measuredangle ACD = R,$$

gde je R prav ugao. Prema poznatoj teoremi imamo da je

$$\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA < 2R,$$

pa je i

$$\measuredangle ACD > \measuredangle CAB + \measuredangle ABC.$$

Ovim je teorema dokazana. ■

Teorema 2.8. Zbir svih spoljašnjih uglova konveksnog n-tougla u ravni Lobačevskog veći je od zbira četiri prava ugla.

Dokaz: Neka je σ_n zbir svih unutrašnjih uglova konveksnog n-tougla $A_1, ..., A_n$, sa σ'_n zbir svih spoljašnjih uglova tog n-tougla, i sa R prav ugao. S obzirom da je svaki spoljašnji ugao suplementan sa odgovarajućim unutrašnjim uglom tog n-tougla, biće

$$\sigma_n + \sigma'_n = 2nR.$$

Prema poznatoj teoremi imamo da je $\sigma_n < (n-2)2R$, pa je

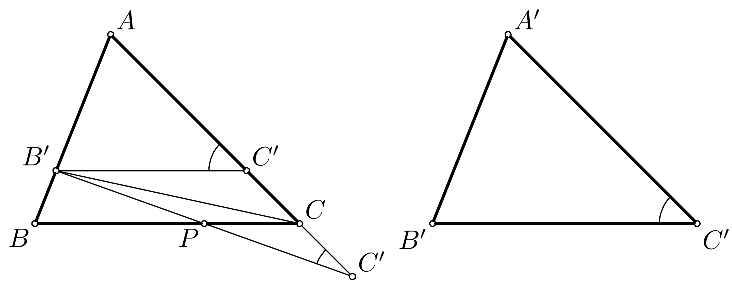
$$2nR - \sigma'_n < (n-2)2R,$$

i, prema tome, i $\sigma'_n > 4R$. ■

2.2 Podudarnost u geometriji Lobačevskog

U geometriji Lobačevskog, osim pet stavova vezanih za podudarnost trouglova iz apsolutne geometrije, važi i šesti stav podudarnosti trouglova.

Teorema 2.9. Ako su odgovarajući unutrašnji uglovi dvaju trouglova ravni Lobačevskog među sobom jednaki, ti trouglovi su podudarni.



Slika 2.7.

Dokaz: Neka je kod dva trougla ABC i $A'B'C'$ u ravni Lobačevskog

$$\measuredangle A = \measuredangle A',\ \measuredangle B = \measuredangle B' \text{ i } \measuredangle C = \measuredangle C'.$$

Da bismo dokazali da su ovi trouglovi podudarni dovoljno je dokazati da su im odgovarajuće stranice jednake. Dokaz izvedimo indirektnim postupkom. Stoga pretpostavimo da dve odgovarajuće stranice npr. AB i $A'B'$ nisu jednake, već da je recimo

$$AB > A'B'$$

Iz nejednakosti ovih stranica sledi da između tačaka A i B postoji tačka B_1 takva da je $AB_1 = A'B'$. Ako je C_1 tačka poluprave AC takva da je $AC_1 = A'C'$, biće tačka C_1 između tačaka A i C. Zaista, ako bi tačka C_1 bila iza tačke C u odnosu na tačku A, duži BC i B_1C_1 bi se sekle u nekoj tački P. Iz podudarnosti trouglova AB_1C_1 i $A'B'C'$ imali bismo da je $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle A'C'B'$, pa je i $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle ACB$. No to je nemoguće, jer je $\measuredangle AC_1B_1$ unutrašnji, a $\measuredangle ACB$ spoljašnji ugao trougla PCC_1. Ovim smo dokazali da tačka C_1 nije iza tačke C u odnosu na tačku A. Tačka C_1 ne može biti ni istovetna s tačkom C, jer bi zbog podudarnosti trouglova AB_1C_1 i $A'B'C'$ bili jednaki uglovi ACB_1 i ACB, što je takođe nemoguće jer je poluprava CB_1 u uglu ACB. Stoga je tačka C_1 između tačaka A i C. Iz podudarnosti trouglova AB_1C_1 i $A'B'C'$ sledi da je $\measuredangle B_1 = \measuredangle B'$ i $\measuredangle C_1 = \measuredangle C'$, pa je $\measuredangle B_1 = \measuredangle B$ i $\measuredangle C_1 = \measuredangle C$. U tom slučaju kod prostog četvorougla BCC_1B_1 biće zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru četiri prava ugla, što je prema poznatoj teoremi nemoguće. Stoga je

$$AB = A'B',$$

pa su prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije trougovi ABC i $A'B'C'$ podudarni. ■

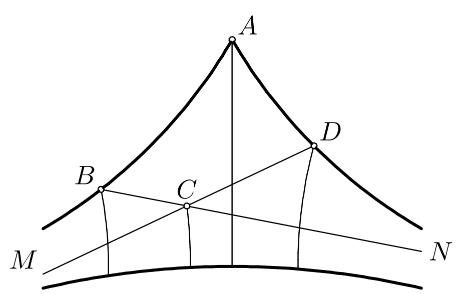
Teorema 2.10. U hiperboličkoj geometriji svaka sličnost je podudarnost.
Dokaz: Ako datu duž AB sličnošću preslikamo na duž A_1B_1 i ako tačku C koja ne pripada duži AB sličnošću preslikamo na tačku C_1 tada će uglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ biti podudarni. Na osnovu prethodne teoreme važi i da je $AB = A_1B_1$, te je zbog toga svaka sličnost i podudarnost. ■

2.3 Paralelogram i romb u ravni Lobačevskog

Definicija 2.1. *Hiperboličkim paralelogramom* nazivamo četvorougao kojem naspramne stranice pripadaju paralelnim pravama. Kraci unutrašnjih uglova takvog četvorougla saglasni su sa smerom paralelnosti naspramnih stranica ili ne. Ako su oba kraka unutranjeg ugla hiperboličkog paralelograma saglasna sa odgovarajućim smerovima, teme nazivamo *prvim osnovnim*; ako oba kraka nisu saglasna sa odgovarajućim smerovima, teme nazivamo *drugim osnovnim*; ostala temena hiperboličkog paralelograma nazivamo *bočnim*.

Definicija 2.2. *Hiperboličkim rombom* nazivamo hiperbolički paralelogram kojem su dve susedne stranice koje se seku u nekom osnovnom temenu međusobno jednake.

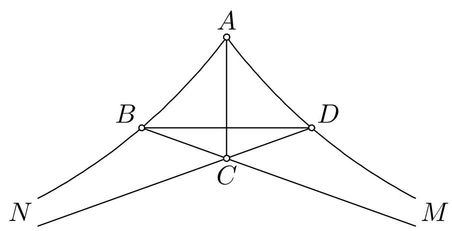
Teorema 2.11. Simetrale unutrašnjih uglova kod osnovnih temena i simetrale spoljašnjih uglova kod bočnih temena hiperboličkog paralelograma su međusobno hiperparalelne.



Slika 2.8.

Dokaz: Neka je A prvo i C drugo osnovno teme hiperboličkog paralelograma $ABCD$. Ako obeležimo sa M zajedničku beskonačno udaljenu tačku paralelnih pravih AB i DC, a sa N zajedničku beskonačno udaljenu tačku paralelnih pravih AD i BC, biće prava NM paralelna s pravama AB i DC, a prava MN paralelna s pravama AD i BC. Stoga su simetrale unutrašnjih uglova kod osnovnih temena A i C i simetrale spoljašnjih uglova kod bočnih temena B i D hiperboličkog paralelograma $ABCD$ upravne na pravoj MN, i prema tome među sobom hiperparalelne.■

Teorema 2.12. Kod hiperboličkog romba svake dve stranice koje se seku u istom osnovnom temenu su među sobom jednake, a dijagonale među sobom normalne.



Slika 2.9.

Dokaz: Neka su A i C osnovna temena hiperboličkog romba $ABCD$. Saglasno definiciji, dve stranice koje se seku u jednom njegovom osnovnom temenu, npr. stranice AB i AD međusobno su jednake; dokažimo da su i stranice koje se seku u drugom osnovnom temenu tog romba jednake među sobom, tj. da je $BC = CD$.

Dijagonala BD koja spaja bočna temena hiperboličkog romba razlaže uglove kod tih temena, pa je

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC \text{ i } \measuredangle ADC = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC.$$

Ako obeležimo sa M zajedničku beskonačno udaljenu tačku paralelnih pravih AD i BC, a sa N zajedničku beskonačno udaljenu tačku paralelnih pravih AB i CD, biće kod nesvojstvenih trouglova ABM i ADN sa beskonačno udaljenim temenima M i N uglovi BAM i DAN jednaki, a stranice AB i AD jednake, te su prema poznatom zadatku ti trouglovi podudarni. Stoga je $\measuredangle ABM = \measuredangle ADN$ i prema tome $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$. Ipak, kod trougla ABD je $AB = AD$, pa je $\measuredangle ABD = \measuredangle ADB$. Otuda je i $\measuredangle DBC = \measuredangle BDC$, pa je kod trougla BCD, $BC = CD$.

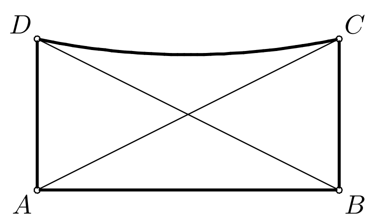
Dokažimo sad da su kod hiperboličkog romba $ABCD$ dijagonale AC i BD međusobno normalne. Ako su A i C osnovna temena tog romba, prema prvom delu ove teoreme imamo da je $AB = AD$ i $BC = CD$, pa su tačke A i C na simetrali duži BD. Otuda je $AC \perp BD$. ■

2.4 Lambertov i Sakerijev četvorougao

Lambertov[18] četvorougao je onaj četvorougao koji ima tri prava ugla. *Osnovne ivice* su one ivice AB i BC Lambertovog četvorougla $ABCD$ kome su uglovi A, B i C pravi. Četvorougao $ABCD$ naziva se *Sakerijevim*[19] četvorouglom ako su mu uglovi kod temena A i B pravi, a ivice BC i AD međusobno hiperparalelne. Ivica AB naziva se *osnovicom*, ivica CD *protivosnovicom*, a ivice BC i AD bočnim ivicama Sakerijevog četvorougla. Svaka četvorougaona površ čiji je rub Lambertov ili Sakerijev četvorougao je konveksana geometrijska figura.

Kako se izometrijom prav ugao slika u prav ugao, tako se i Lambertov i Sakerijev četvorougao izometrijom slikaju redom na Lambertov i Sakerijev četvorougao. Zbog toga su Lambertovi četvorouglovi kod kojih su osnovne ivice podudarne odgovarajućim ivicama drugog međusobno podudarni likovi. Slično važi i za Sakerijeve četvorouglove - ukoliko su osnovica i bočne strane jednog četvorougla podudarne sa odgovarajućim stranicama drugog, ta dva četvorougla su međusobno podudarni likovi.

Teorema 2.13. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su podudarni.

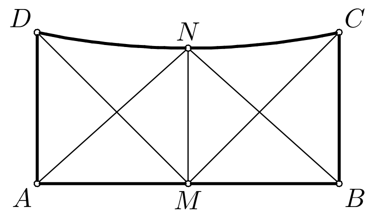


Slika 2.10.

Dokaz: Neka je dat Sakerijev četvorougao $ABCD$ sa osnovicom AB. Tada su, na osnovu prvog stava podudarnosti apsolutne geometrije, trouglovi DAB i CBA međusobno podudarni. Na osnovu trećeg stava apsolutne geometrije o podudarnosti, biće podudarni i trouglovi ACD i BDC , pa će biti i $\measuredangle C \cong \measuredangle D$. ■

Teorema 2.14. Ako su M i N, redom, središte osnovice AB i središte protivosnovice CD Sakerijevog četvorougla $ABCD$, tada su četvorouglovi $AMND$ i $BMNC$ Lambertovi četvorouglovi.

[18] *Johan Hajnrih Lambert*, švajcarski matematičar i fizičar.
[19] *Đirolamo Sakeri*, italijanski matematičar.



Slika 2.11.

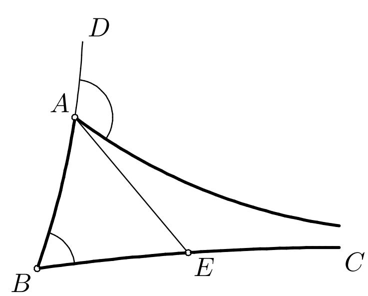
Dokaz: Kako su trouglovi AND i BNC međusobno podudarni, na osnovu prvog stava podudarnosti trouglova biće $AN \cong BN$, pa su trouglovi AMN i BMN podudarni na osnovu trećeg stava podudarnosti apsolutne geometrije. Odatle sledi da su uglovi NMA i NMB podudarni i naporedni, pa su pravi. Slično, iz podudarnosti trouglova DMA i CMB sledi da su i trouglovi DMN i CMN međusobno podudarni, pa su uglovi MND i MNC pravi. Iz svega ovoga sledi da četvorouglovi $AMND$ i $BMNC$ zadovoljavaju uslove da budu Lambertovi četvorouglovi. ■

2.5 Asimptotski poligoni. Asimptotski trouglovi

U ravni Lobačevskog postoje poligoni kojima su sva ili samo neka temena nesvojstvena, tj. beskonačno daleke tačke. Prave koje određuju beskonačno daleku tačku su paralelne. Ako poligon ima bar jedno nesvojstveno teme nazivamo ga asimptotskim ili nesvojstvenim poligonom. Dozvoljeno je da poligon ima i više nesvojstvenih temena, kao i da dva susedna temena budu nesvojstvena. Pretpostavka je da je mera ugla kod nesvojstvenog temena nula. Navedimo osobine asimptotskih trouglova sa nesvojstvenim temenima.

Teorema 2.15. U trouglu s jednim nesvojstvenim temenom spoljašnji ugao kod jednog konačnog temena veći je od unutrašnjeg ugla kod drugog konačnog temena.

Dokaz: Neka je dat trougao ABC sa jednim nesvojstvenim temenom, npr. C. Dokažimo da je spoljašnji ugao DAC kod temena A veći od unutrašnjeg ugla B trougla ABC.



Slika 2.12.

Pretpostavimo da su suplementni uglovi DAC i ABC jednakiTada bi prave AC i BC bile bi hiperparalelne, što je nemoguće jer su one po pretpostavci paralelne. Ako bi ugao DAC bio manji od ugla ABC, u uglu BAC postojala bi poluprava AE takva da je $\measuredangle DAE = \measuredangle ABC$. S obzirom da je prava AC paralelna sa pravom BC, a poluprava AE u uglu BAC, poluprava AE seče polupravu BC u nekoj tački E. Sad bi kod trougla ABE sa konačnim temenima spoljašnji ugao DAE bio jednak unutrašnjem uglu B, što je prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije nemoguće. Zato je

$$\measuredangle DAC > \measuredangle A,$$

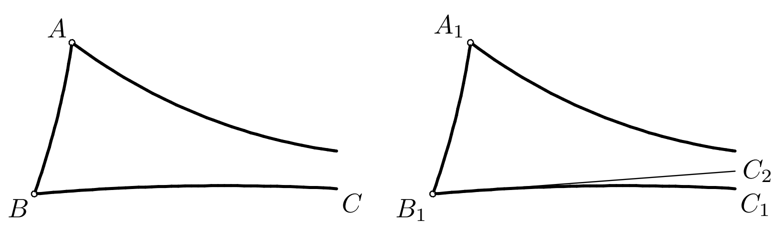
pa je time teorema dokazana. ■

Teorema 2.16. Dva trougla koji imaju po jedno nesvojstveno teme su podudarna

(a) ako su konačna stranica i jedan ugao nalegli na toj stranici jednog trougla jednaki odgovarajućim elementima drugog trougla,

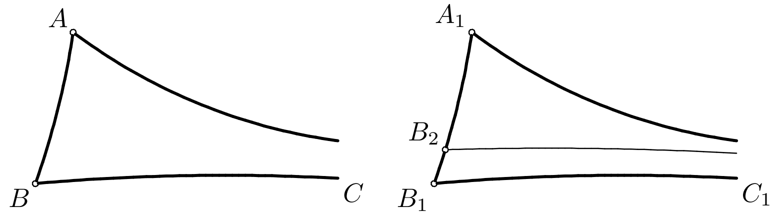
(b) ako su oba nalegla ugla na konačnoj stranici jednog trougla jednaka odgovarajućim uglovima drugog trougla.

Dokaz: Neka su dati asimptotski trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1B_1C_1$, sa nesvojstvenim temenima C i C_1. Iz njihove podudarnosti neposredno sledi da su uslovi ove teoreme ispunjeni. Ostaje da se pokaže ovo važi i u obrnutom smeru.



Slika 2.13.

(a) Treba dokazati da je $AB = A_1B_1$, a da bi se to dokazalo, dovoljno je pokazati da su uglovi B i B_1 jednaki. Ako ti uglovi ne bi bili jednaki, jedan od njih bio bi veći od drugog, pretpostavimo da je $\measuredangle B_1 > \measuredangle B$. U tom slučaju u uglu $A_1B_1C_1$ postoji poluprava B_1C_2 takva da je $\measuredangle A_1B_1C_2 = \measuredangle ABC$. Pri tome je prava B_1C_2 paralelna s pravom A_1C_1 u istom smeru što je nemoguće. Zato su uglovi B i B_1 jednaki, i prema tome trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudarni.



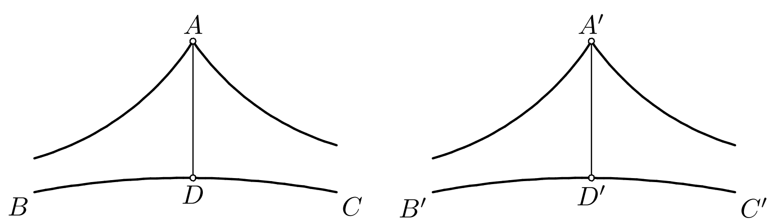
Slika 2.14.

(b) U ovom slučaju potrebno je dokazati da ako važi $\measuredangle A = \measuredangle A_1$ i $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, onda su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ podudarni. Da bismo ovo uradili, potrebno je dokazati da su i stranice AB i A_1B_1 međusobne jednake. Ako te stranice ne bi bile jednake, jedna od njih bila bi veća od druge, npr. $A_1B_1 > AB$. U tom slučaju između tačaka A_1 i B_1 postoji tačka B_2 takva da je $AB = A_1B_2$. Sad su prema prethodnom delu ove teoreme trouglovi ABC i $A_1B_2C_1$ podudarni, pa je $\measuredangle B = \measuredangle A_1B_2C_1$, i prema tome $\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle A_1B_2C_1$. Međutim, to je nemoguće, jer je ugao $A_1B_2C_1$ spoljašnji, a ugao $A_1B_1C_1$ unutrašnji ugao trougla $B_1B_2C_1$ kojem je teme C_1 nesvojstveno. Zato ne važi pretpostavka i stranice AB i A_1B_1 su jednake, i prema tome trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su podudarni. ■

Prethodna teorema važi i u specijalnom slučaju, kada je jedan od asimptotskih trouglova pravougli trougao.

Teorema 2.17. Dva pravougla asimptotska trougla sa jednim odgovarajućim nesvojstvenim temenom su podudarna ako i samo ako su im uglovi jednaki i ako i samo ako su im konačne stranice međusobno jednake. ■

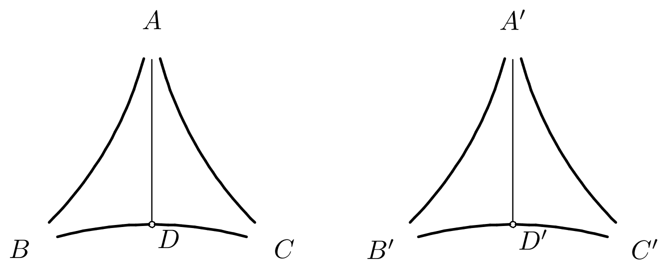
Teorema 2.18. Dva trouga kojima su po dva temena nesvojstvena među sobom su podudarna ako su im jednaki uglovi kod konačnih temena.



Slika 2.15.

Neka su data dva asimptotska trougla ABC i $A_1B_1C_1$, i neka su temena B i C, odnosno B_1 i C_1 nesvojstvena, i neka je $\measuredangle A = \measuredangle A_1$. Ako su AD i A_1D_1 visine tih trouglova, poluprave AD i A_1D_1 polove stranice BC i B_1C_1, jer su susedni uglovi BAD i CAD jednaki kao uglovi paralelnosti za odsečak AD, a susedni uglovi $B_1A_1D_1$ i $C_1A_1D_1$ jednaki kao uglovi paralelnosti za odsečak A_1D_1. Pošto su uglovi $\measuredangle A$ i $\measuredangle A_1$ jednaki, sledi da su uglovi BAD i CAD jednaki s uglovima $B_1A_1D_1$ i $C_1A_1D_1$. Sad su prema prethodnom stavu trouglovi ABD i ACD podudarni s trouglovima $A_1B_1D_1$ i $A_1C_1D_1$, pa su i trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ međusobno podudarni. ■

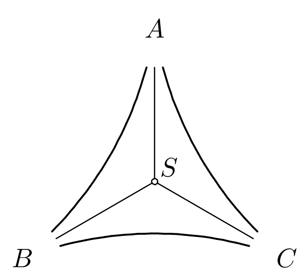
Teorema 2.19. Dva asimptotska trougla koja imaju po tri nesvojstvena temena međusobno su podudarna.



Slika 2.16.

Dokaz: Neka su data dva asimptotska trouglo ABC i $A_1B_1C_1$ kojima su sva temena nesvojstvena. Iz teoreme 1.6. zaključujemo da postoji prava n koja je paralelna sa stranicama AC i AB trougla ABC i normalna na njegovu stranicu BC u nekoj tački D, kao i prava n_1 koja je paralelna sa stranicama A_1C_1 i A_1B_1 trougla $A_1B_1C_1$ i normalna na njegovu stranicu B_1C_1 u nekoj tački D_1. Prema prethodnoj teoremi, $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$ su podudarni sa trouglovima $\triangle A_1B_1D_1$ i $\triangle A_1C_1D_1$, pa su, s obzirom na njihov položaj, trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ takođe podudarni. ■

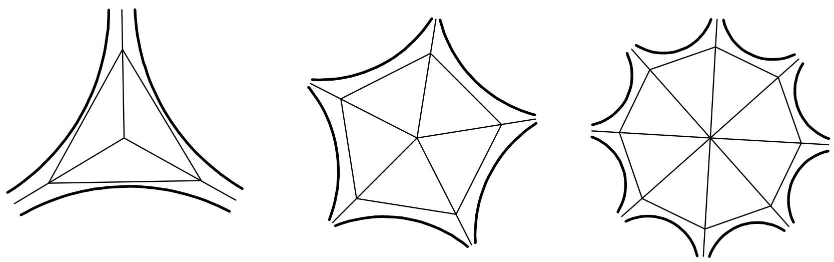
U asimptotskom trouglu koji ima tri nesvojstvena temena postoji tačka S koja se naziva središtem tog trougla, a ona se dobija u preseku pravih koje su normalne na jednu, a paralelne sa druge dve stranice tog asimptotskog trougla. Poluprave sa temenom S koje su paralelne ivicama trougla razlažu ravan na tri međusobno podudarna ugla i važi da je $SA = SB = SC$.



Slika 2.17.

Svaki asimptotski trougao sa tri nesvojstvena temena nazivamo *pravilnim asimptotskim trouglom*, jer se rotacijama za ugao $\frac{2\pi}{3}$ skup njegovih temena A, B i C preslikava na samog sebe.

Uopšteno, imamo da je *pravilan asimptotski n-tougao* asimptotski n-tougao kome su ivice prave paralelne sa susednim polupravama $a_1, a_2, ..., a_n$ koje imaju zajedničko teme S. Takođe, poluprave $a_1, a_2, ..., a_n$ razlažu ravan kojoj pripadaju na n podudarnih uglova, i važi $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$, gde su $A_1, A_2, ..., A_n$ nesvojstvena temena tog poligona. Prilikom rotacije za $\frac{2\pi}{n}$ skup njegovih temena slika se na samoga sebe, jer je sam poligon pravilan.



Slika 2.18.

3 Merenje površina u euklidskoj geometriji

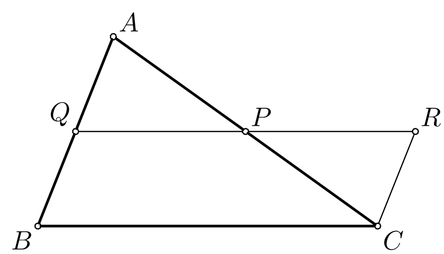
3.1 Razloživa jednakost i dopunska jednakost poligona euklidske ravni

Definicija 3.1. U datom poligonu P ako spojimo dve tačke nekom izlomljenom linijom koja se nalazi u unutrašnjosti tog poligona, na taj način dobijamo dva nova poligona P_1 i P_2 čije sve tačke leže u unutrašnjosti poligona P razložen na poligone P_1 i P_2.

Definicija 3.2. Ako se dva prosta poligona mogu razložiti u konačan broj trouglova takvih da su dva po dva međusobno podudarni tada kazemo da su ti poligoni razloživo jednaki.

Definicija 3.3. Ako su dva prosta poligona sačinjena od konačnog broja dva po dva razloživo jednakih poligona tada te poligone nazivamo dopunski jednake poligone.

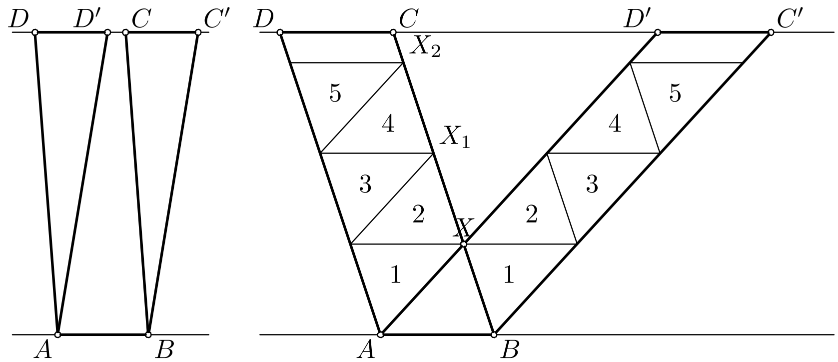
Teorema 3.1. Postoji paralelogram koji je razloživo jednak trouglu.



Slika 3.1.

Dokaz: Neka su u proizvoljnom trouglu ABC date tačke P i Q, središta njegovih stranica CA i AB, a R tačka koja je centralno simetrična tački Q u odnosu na tačku P, tada su trougao ABC i paralelogram $BCRQ$ razloživo jednake figure. Četvorougao $BCPQ$ pripada i trouglu ABC i paralelogramu $BCRQ$, a kako su trouglovi AQP i CRP centralno simetrični, trougao ABC i četvorougao $BCRQ$ će biti razloživo jednake figure. Takođe, paralelogram i njoj razloživo jednak trougao imaće dve međusobno podudarne ivice, a visina trougla biće dva puta veća od visine dobijenog paralelograma. ■

Teorema 3.2. Dva paralelograma sa jednakim osnovicama i jednakim odgovarajućim visinama su razloživo jednake figure.



Slika 3.2.

Dokaz: Ako su data dva paralelograma $ABCD$ i $ABC'D'$ takvi da su im podudarne osnovice i podudarne odgovarajuće visine i ako ivica AD' nema zajedničkih tačaka ni sa jednom od ivica AD i BC, tada će trouglovi ADD' i BCC'' biti medusobno podudarni, pa će paralelogrami $ABCD$ i $ABC'D'$ biti razloživo jednaki.

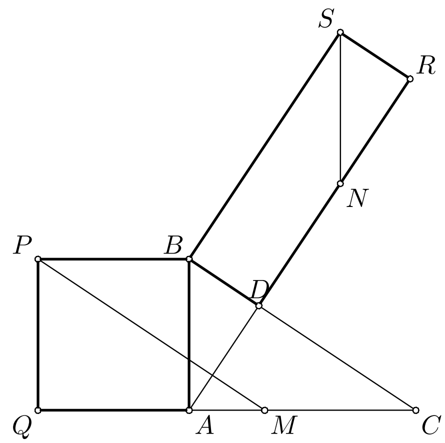
Ako duž AD' seče duž BC u nekoj tački X, obeležimo sa X_1,X_2,...,X_n tačke duži BC takve da je $BX \cong XX_1 \cong ... \cong X_{n-1}X_n$ i $X_nC < BX$. Prave koje sadrže tačke X, X_1,...,X_n i paralelne su pravoj AB razložiće paralelograme $ABCD$ i $ABC'D'$ na $n + 2$ paralelograma. Ove će opet, odgovarajućim dijagonalama paralelnim pravama AD' i BC biti razložene na trouglove podudarne trouglu ABX i ukoliko se tačka X_n razlikuje od C, na dva medusobno podudarna četvorougla i još dva međusobno podudarne trougla. Kako je broj n, na osnovu Arhimedove aksiome neprekidnosti, konačan, ukupan broj međusobno podudarnih figura na koje su razloženi paralelogrami $ABCD$ i $ABC'D'$ biće konačan, pa su, po definiciji, ti paralelogrami razloživo jednake figure. ■

Kao neposrednu posledicu prethodne dve teoreme imamo sledeću teoremu.

Teorema 3.3. Dva trougla sa jednakim osnovicama i jednakim odgovarajućim visinama razloživo su jednake figure. ■

Sledeća teorema naziva se *Euklidova teorema o razloživoj jednakosti.*

Teorema 3.4. Kvadrat čija je stranica kateta AB pravouglog trougla ABC razloživo je jednaka pravougaoniku čija je jedna ivica podudarna hipotenuzi BC tog trougla, a druga ivica je upravna projekcija katete AB na hipotenuzi BC.



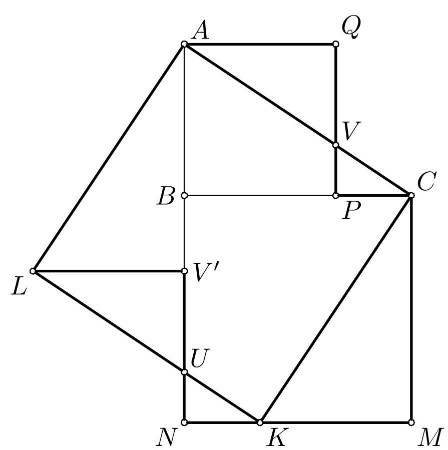
Slika 3.3.

.

Dokaz: Neka je dat kvadrat $ABPQ$ i pravougaonik $DBSR$, a tačka D je podnožje upravne iz temena A na hipotenuzi BC. Ako je M tačka u kojoj prava koja sadrži P i paralelna je pravoj BC seče pravu AC, a N tačka u kojoj prava koja sadrži S i paralelna je pravoj AB seče pravu DR, paralelogrami $ABPQ$ i $CBPM$ će biti razloživo jednake na osnovu teoreme 3.2., paralelogrami $CBPM$ i $SBAN$ će biti međusobno podudarne, a paralelogrami $ABSN$ i $DBSR$ će biti razloživo jednaki, opet na osnovu teoreme 3.2. Zbog toga će kvadrat $ABPQ$ i paralelogram $DBSR$ biti razloživo jednake figure. ■

Iz Euklidove teoreme o razloživoj jednakosti sledi jedna od najznačajnijih teorema geometrije, Pitagorina teorema o razloživoj jednakosti.

Teorema 3.5. Kvadrat kojoj je ivica hipotenuza pravouglog trougla razloživo je jednaka uniji kvadrata čije su ivice katete toga trougla. ■



Slika 3.4.

3.2 Merenje površina u euklidskoj geometriji

Razlaganje ravni π *kvadratnom k-mrežom*, u oznaci M_k, je kada ravan π razložimo sa dva skupa pravih takvih da je svaka prava prvog skupa paralelna sa pravom A_kB_k, a svaka prava drugog skupa paralelna sa pravom A_kD_k, na beskonačno mnogo kvadrata od kojih je svaka podudarna F_k. Pritom su A_k, B_k, C_k i D_k temena kvadrata F_k koji se dobija kada kvadrat F_0 u ravni π čija su temena A_0, B_0, C_0 i D_0 razložimo svaku od njegovih stranica na 10^k podudarnih duži i u dobijenim podeonim tačkama konstruišimo prave paralelne ivicama zadatog kvadrata. Tako smo dobili 10^{2k} međusobno podudarnih kvadrata F_k.

Neka su data dva niza $\left(\frac{m_k}{10^{2k}}\right)_{k=0,1,2,...}$ i $\left(\frac{m'_k}{10^{2k}}\right)_{k=0,1,2,...}$, takvih da je m_k ukupan broj kvadrata mreže M_k koje pripadaju figuri F, a sa m'_k ukupan broj kvadrata te mreže koje sa F nemaju zajedničkih tačaka. Tada važi

$$m_0 \leqslant \frac{m_1}{10^2} \leqslant ... \leqslant \frac{m_k}{10^{2k}} \leqslant ...$$

i

$$m'_0 \geqslant \frac{m'_1}{10^2} \geqslant ... \geqslant \frac{m'_k}{10^{2k}} \geqslant ...$$

pa je, stoga, prvi od nizova neopadajući, a drugi nerastući. Kako je uz to i $m_k \leqslant m'_k$ biće

$$m_0 \leqslant \frac{m_k}{10^{2k}} \leqslant \frac{m'_k}{10^{2k}} \leqslant m'_0.$$

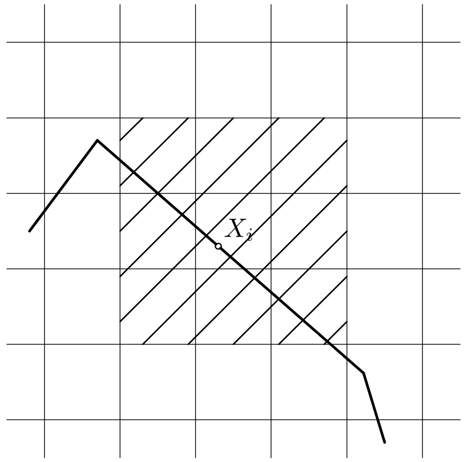
Prvi od nizova je ograničen sa gornje, a drugi sa donje strane. Oba niza su konvergentna, pa postoje granične vrednosti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{10^{2k}} = \underline{S}(F) \text{ i } \lim_{k\to\infty} \frac{m'_k}{10^{2k}} = \overline{S}(F),$$

pri čemu je $\underline{S}(F) \leqslant \overline{S}(F)$. Broj $\underline{S}(F)$ nazivamo *unutrašnjom*, a broj $\overline{S}(F)$ *spoljašnjom* merom figure F. Ako je $\underline{S}(F) = \overline{S}(F)$, figuru F ćemo zvati merljivom, a broj $S(F)$ koji je istovetan unutrašnjoj i spoljašnjoj meri F zvaćemo *merom* ili *površinom* figure F.

Jedinični kvadrat je kvadrat čije su ivice mere 1.

Teorema 3.6. Unutrašnjost svakog poligona je merljiva površ.



Slika 3.5.

Dokaz: Neka je P prost ravan poligon i $L(P)$ zbir mera njegovih stranica ili kratko, njegova dužina. Razložimo poligon P tačkama X_1,X_2, ..., X_n na poligonske linije takve da je dužina svake sem eventualno jedne od njih, jednaka $\frac{1}{10^k}$, gde je k proizvoljan prirodan broj, a dužina te jedne eventualno preostale poligonske linije manja od $\frac{1}{10^k}$. Tada je

$$n \leqslant L(P)10^k + 1.$$

Označimo sa F_i uniju devet kvadratnih površi mreže M_k takvih da tačka X_i pripada jednoj od tih kvadratnih površi, a da su ostalih osam kvadratnih površi njoj susedne. Neposredno se dokazuje da sve tačke poligona P na rastojanju manjem od $\frac{1}{10^k}$ od tačke X_i, pripadaju kvadratnoj površi F_i. Stoga sve kvadratne površi mreže M_k koje sa poligonom P imaju zajedničkih tačaka, pripadaju uniji površi F_1, F_2, ..., F_n koja se sastoji iz najviše $9n$ kvadratnih površi te mreže, pri čemu je

$$9n \leqslant 9(L(P)10^k + 1).$$

Neka je m_k broj kvadratnih površi mreže M_k koje pripadaju unutrašnjosti (P) poligona P, a m'_k broj površi te mreže koja sa (P) nemaju zajedničkih tačaka. Tada je

$$0 \leqslant m'_k - m_k \leqslant 9(L(P)10^k + 1),$$

a odatle sledi da je

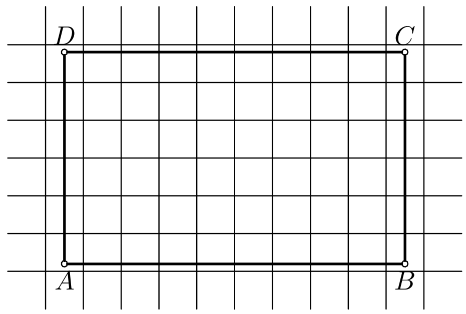
$$0 \leqslant \frac{m'_k}{10^{2k}} - \frac{m_k}{10^{2k}} \leqslant \frac{9L(P)}{10^{2k}} + \frac{9}{10^{2k}},$$

pa ako dopustimo da k neograničeno raste, biće

$$0 \leqslant \overline{S}(F) - \underline{S}(F) \leqslant 0.$$

Dakle, $\overline{S}(F) = \underline{S}(F)$ pa je unutrašnjost poligona P merljiva površ. ■

Teorema 3.7. Površina pravougaonika je proizvod dužina njegovih stranica.



Slika 3.6.

Dokaz: Neka je dat pravougaonik $ABCD$ čija je ivica AB dužine a, a ivica AD dužine b. Neka su ivice tog pravougaonika paralelne ivicama jediničnih kvadrata. Kvadratna mreža M_k ravni π kojoj pripada pravougaonik određuje na svakoj od pravih AB i AD k-tu gradaciju N_k. Ako su a_k i b_k brojevi duži gradacije N_k koje, redom, pripadaju dužima AB i AD, a a'_k i b'_k brojevi duži te gradacije, koje, redom, sa dužima AB i AD imaju zajedničkih tačaka, onda je $a'_k \leqslant a_k + 2$ i $b'_k \leqslant b_k + 2$. Neka je m_k ukupan broj kvadrata mreže M_k koje pripadaju pravougaoniku i neka je m'_k ukupan broj kvadrata koje sa pravougaonikom imaju zajedničkih tačaka, onda je $m_k = a_k b_k$ i $m'_k = a'_k b'_k$. Kako je uz to i

$$\begin{aligned}\frac{m'_k - m_k}{10^{2k}} = \frac{a'_k b'_k - a_k b_k}{10^{2k}} &\leqslant \frac{(a_k+2)(b_k+2) - a_k b_k}{10^{2k}} = \frac{2}{10^k}\frac{a_k + b_k + 2}{10^k} \\ &\leqslant \frac{2}{10^k}\left(a + b + \frac{2}{10^k}\right),\end{aligned}$$

biće

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m'_k - m_k}{10^{2k}} = 0,$$

pa je pravougaonik merljiv. Pritom važi i

$$\frac{a_k}{10^k} \leqslant a \leqslant \frac{a'_k}{10^k} \text{ i } \frac{b_k}{10^k} \leqslant b \leqslant \frac{b'_k}{10^k},$$

odakle zaključujemo da je

$$\frac{m_k}{10^{2k}} = \frac{a_k b_k}{10^{2k}} \leqslant ab \leqslant \frac{a'_k b'_k}{10^{2k}} = \frac{m'_k}{10^{2k}}.$$

Stoga je površina pravougaonika jednaka proizvodu dužina njegovih stranica.■

Pri merenju površina u euklidskoj ravni imamo i sledeće osobine.

Teorema 3.8.

1° Površina jediničnog kvadrata je 1.

2° Svaka merljiva figura ima nenegativnu površinu.

3° Ako je figura sačinjena od više disjunktnih figura, onda je njena površina jednaka zbiru svih površina tih disjunktnih figura.

4° Ako je F_1 merljiva figura, i F_2 njemu podudarna figura, tada je i F_2 merljiva figura i važi da su im površine jednake. ■

Iz ovih osobina sledi tvrđenje koje nazovamo *Pitagorina teorema*:

Teorema 3.9. Površina kvadrata čija je ivica hipotenuza nekog pravouglog trougla jednaka je zbiru površina dva kvadrata kojima su ivice katete tog trougla. ■

4 Merenje površina u hiperboličkoj geometriji

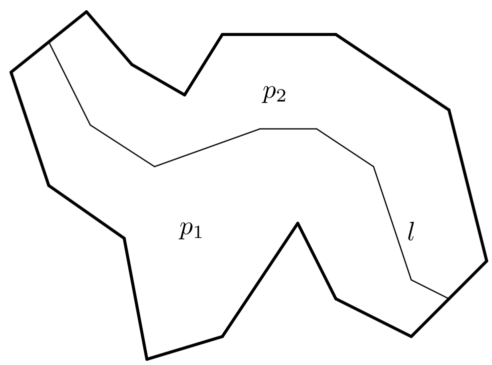
4.1 Defekt

Neka je P unutrašnjost datog poligona $A_1A_2...A_n$. Pod *defektom poligona* P, u oznaci $\delta(P)$, podrazumevamo defekt poligona $A_1A_2...A_n$. Pošto u hiperboličkoj geometriji važi da je zbir unutrašnjih uglova bilo kojeg prostog ravnog n-tougla $A_1A_2...A_n$ manji od $(n-2)\pi$, onda defekt računamo

$$\delta(A_1A_2...A_n) = (n-2)\pi - \sigma(A_1A_2...A_n).$$

Defekt poligona $A_1A_2...A_n$ će biti pozitivan.

Teorema 4.1. Neka je dat poligon P koji je razložena nekom poligonskom linijom l na dva poligona P_1 i P_2, tada defekt poligona P računamo kao zbiru defekata poligona P_1 i P_2.



Slika 4.1.

Dokaz: Neka su m, m_1 i m_2, redom, brojevi temena poligona P, P_1 i P_2, a n broj temena poligonske linije l koja poligon P razlaže na poligone P_1 i P_2, ne uključujući krajeve linije l, onda je

$$m_1 + m_2 = m + 2n + 2 + r \text{ i } \sigma(P_1) + \sigma(P_2) = \sigma(P) + 2n\pi + r\pi,$$

gde je $r = 0, 1, 2$ u zavisnosti od toga da li su oba kraja poligonske linije l istovetna sa temenima poligona P ili je samo jedan od tih krajeva teme poligona P, ili ni jedan od tih krajeva nije teme poligona P. Tada je

$$\begin{aligned}
\delta(P) &= (m-2)\pi - \sigma(P) \\
&= (m_1 + m_2 - 2n - r - 4)\pi - \sigma(P_1) - \sigma(P_2) + 2n\pi + r\pi \\
&= [(m_1 - 2)\pi - \sigma(P_1)] + [(m_2 - 2)\pi - \sigma(P_2)] \\
&= \delta(P_1) + \delta(P_2).
\end{aligned}$$

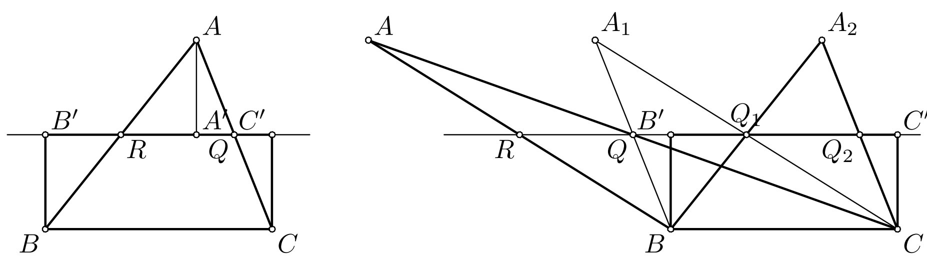
Zaključujemo da je defekt poligona P jednak zbiru defekata poligona P_1 i P_2.■

Ako koristimo prethodnu teoremu i metode potpune indukcije možemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 4.2. Neka je dat poligon P koji je razložen poligonskim linijma na konačno mnogo poligona P_1, P_2, ..., P_n, tada je defekt poligona P jednak zbiru defekata poligona P_1, P_2, ..., P_n. ■

4.2 Razloživa jednakost figura u hiperboličkoj geometriji

Teorema 4.3. Neka je dat trougao ABC i neka su B' i C' podnožja upravnih iz temena B i C i neka se tačke R i Q nalaze na pravoj kao središta ivica AB i AC, tada je trougao ABC razloživo jednak četvorouglu $BCC'B'$.



Slika 4.2.

Dokaz: Neka je data tačka A' kao podnožje upravne iz tačke A na pravoj RQ. Onda zaključujemo da su trouglovi $AA'R$ i $BB'R$ međusobno podudarni. Takođe su podudarni i trouglovi $AA'Q$ i $CC'Q$, pa važi da je $AA' \cong BB' \cong CC'$, gde zaključujemo da je četvorougao $BCC'B'$ Sakerijev. Važi i $RQ \cong \frac{1}{2}B'C'$, jer je R središte duži $A'B'$, a Q središte duži $A'C'$.

Sada razlikujemo dva slučaja kao na slici. Prvi je da pretpostavimo da duž RQ pripada duži $B'C'$, tada je dužima RQ i AA' trougla ABC razložena na četvorougao $BCQR$ i trouglovi $AA'R$ i $AA'Q$, dok je dužima BR i CQ četvorougao $BCC'B'$ razložena na četvorougao $BCQR$ i trouglove $BB'R$ i $CC'Q$. POšto znamo da vazi da je $\triangle AA'R \cong \triangle BB'R$ i $\triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q$, tada je trougao ABC razloživo jednaka četvorouglu $BCC'B'$.

U drugom slučaju pretpostavimo da duž RQ ne pripada duži $B'C'$, već da ima tačaka sa one strane tačke B' sa koje nije tačka C'. Ako je $\mathcal{S}_Q(B) = A_1$, tačke A_1 i C su sa raznih strana prave RQ, pa duž A_1C seče pravu RQ u nekoj tački Q_1. Pošto su trouglovi ABQ i CA_1Q centralnosimetrični u odnosu na tačku Q tada važi $\mathcal{S}_Q(R) = Q_1$, a kako je R središte duži AB, i

Q_1 biti središte duži A_1C. Uz to su i trougaone površi ABQ i CA_1Q međusobno podudarne, pa su trouglovi ABC i A_1BC razloživo jednaki. Na isti način možemo konstruisati međusobno razloživo jednake trouglove A_2BC, A_3BC,... Tada su na pravoj RQ određene tačke Q_1, Q_2, ..., Q_k, ... takve da je $\mathcal{B}(R, Q, Q_1, Q_2, ..., Q_k, ...)$ i $RQ \cong QQ_1 \cong Q_1Q_2 \cong ... \cong Q_{k-1}Q_k \cong ....$ Iz Arhimedove aksiome sledi da postoji prirodan broj n takav da su tačke Q_n i C' istovetne ili je $\mathcal{B}(Q_n, C', Q_{n+1})$. Zbog toga je trougao A_nBC razloživo jednak četvorouglu $BCC'B'$, a kako su trouglovi niza ABC, A_1BC,..., A_nBC međusobno razloživo jednaki, biće i trougao ABC je razloživo jednak četvorouglu $BCC'B'$. ■

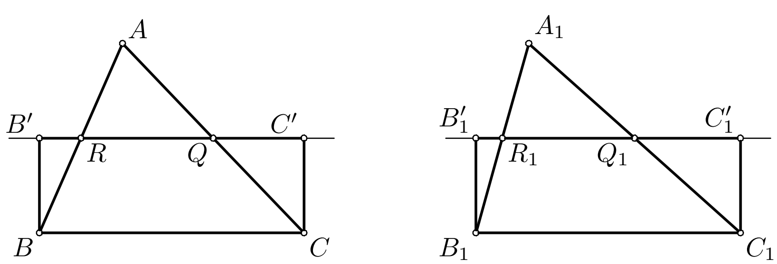
Pošto razloživo jednake površi imaju jednake defekte biće

$$\delta(ABC) = \delta(BCC'B')$$

Četvorougao $BCC'B'$ je Sakerijev četvorougao i njemu su uglovi kod temena B' i C' pravi, uglovi kod temena B i C tog četvorougla su međusobno podudarni i oštri i svaki od njih je jednak poluzbiru unutrašnjih uglova trougla ABC.

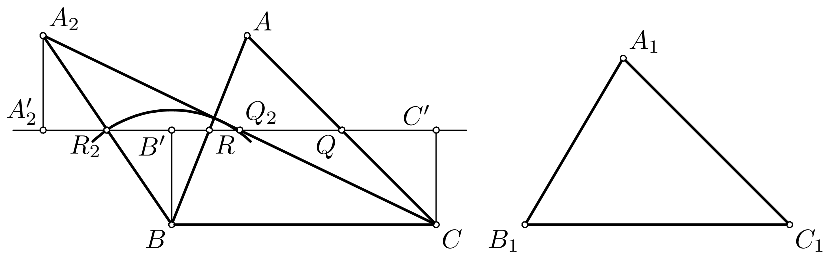
Teorema 4.4. Trouglovi sa jednakim defektima su međusobno razloživo jednake figure.

Dokaz: Neka su dati trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ takvi da su tačke R i Q središta ivica AB i AC, a tačke R_1 i Q_1 središta ivica A_1B_1 i A_1C_1. Neka i trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ imaju jednake defekte. Ako sa B', C', odnosno B_1',C_1', obeležimo podnožja upravnih iz tačaka B i C, odnosno B_1 i C_1 , redom, na pravama RQ i R_1Q_1, oštri uglovi kod temena B i C, odnosno B_1 i C_1 Sakerijevih četvorouglova $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$ biće jednaki poluzbiru unutrašnjih uglova trougla ABC, odnosno $A_1B_1C_1$, a četvorouglovi $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$ biće razloživo jednaki, redom, trouglovima ABC i $A_1B_1C_1$.



Slika 4.3.

Ako važi da su duži BC i B_1C_1 međusobno podudarne, iz podudarnosti uglova kod temena B, C i B_1, C_1 Sakerijevih četvorouglova $BCC'B'$ i $B_1C_1C_1'B_1'$, sledi da su i ti četvorouglovi medusobno podudarni, pa su, trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ razloživo jednake figure.



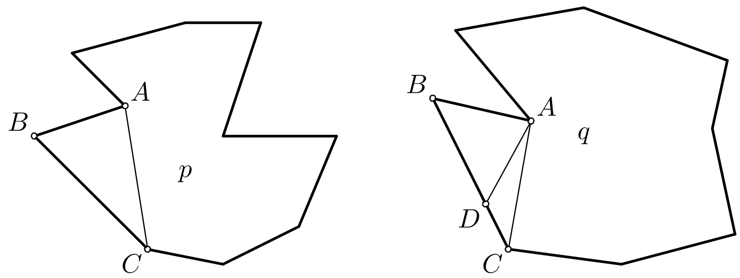
Slika 4.4.

Ako pretpostavimo da je $AB < A_1B_1$ i da jedna ivica trougla ABC nije podudarna nekoj od ivica trougla $A_1B_1C_1$ tada je $BR < \frac{1}{2}A_1B_1$, pa krug $k(B, \frac{1}{2}A_1B_1)$ seče pravu RQ jer je tačka R unutar kruga k. Neka je R_2 bilo koja od presečnih tačaka kruga k i prave RQ, neka je A_2 tačka centralno-simetrična tački B u odnosu na R_2, neka je Q_2 presečna tačka duži A_2C i prave RQ, a A_2' podnožje upravne iz A_2 na pravoj RQ, tada su trouglovi $A_2A_2'R_2$ i $BB'R_2$ međusobno podudarni, pa je $A_2A_2' \cong BB'$. Pošto važi da je $BB' \cong CC'$, onda važi i $A_2A_2' \cong CC'$, pa su i trouglovi $A_2A_2'Q_2$ i $CC'Q_2$ međusobno podudarni. Zato je $BCC'B'$ Sakerijev četvorougao kome je svaki od uglova kod temena B i C jednak poluzbiru unutrašnjih uglova trougla A_2BC a četvorougao $BCC'B'$ je razloživo jednak trouglu A_2BC. Trouglovi ABC i A_2BC imaju jednake defekte i razloživo su jednaki. Kako trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ imaju, po pretpostavci, jednake defekte, površi A_2BC i $A_1B_1C_1$ će takode imati jednake defekte, a stranice A_2B i A_1B_1 će biti medusobno podudarne, pa će, na osnovu prethodnog slučaja, biti i razloživo jednake. Zato su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ razloživo jednaki. ■

Teorema 4.5. Poligoni jednakih defekata razloživo su jednake figure.

Dokaz: Neka su data dva poligona P i Q od kojih prvi ima a, a drugi ima b ivica. Teorema je već dokazana ako imamo slučaju kada je $a = b = 3$, tj. kada je $k = a + b = 6$. Metodom potpune indukcije dokazaćemo da su poligoni P i Q razloživo jednake za svaki prirodan broj $k > 6$, odnosno pretpostavićemo da je tvrdenje tačno za svako $k = 7, 8, ..., n$ i dokazaćemo da je tačno i za $k = n + 1$.

Neka su u poligonu P data njegova tri uzastopna temena A, B, C takva da dijagonala AC pripada toj površi, a neka su u poligonu Q data njegova tri uzastopna temena A', B', C' takva da dijagonala $A'C'$ pripada površi Q. Tada će dijagonala AC razlagati poligon P na trougao ABC i poligon P' koji ima $a - 1$ ivica, a dijagonala $A'C'$ će razlagati poligon Q na trougao $A'B'C'$ i poligon Q' sa $b - 1$ ivicom.



Slika 4.5.

U slučaju da trouglovi ABC i $A'B'C'$ imaju jednake defekte, imaće ih i poligoni P' i Q', jer poligoni P i Q imaju jednake defekte. Prema indukcijskoj pretpostavci, P' i Q' će biti razloživo jednake površi pa, kako su ABC i $A'B'C'$ razloživo jednake površi, takve će da budu i P i Q.

U slučaj da trouglovi ABC i $A'B'C'$ nemaju jednake defekte i ako na primer važi da je $\delta(ABC) < \delta(A'B'C')$, tada na ivici $B'C'$ postoji takva tačka D' da je $\delta(ABC) = \delta(A'B'D')$. Neka je Q'' poligon koji dobijamo ako ivicom $A'D'$ razložimo poligon Q. Tada će poligoni P' i Q'' imati jednake defekte jer poligoni P i Q imaju jednake defekte a i trouglovi ABC i $A'B'D'$ takođe imaju jednake defekte. Dakle, prema indukcijskoj pretpostavci, poligoni P' i Q'' su razloživo jednaki, a kako su i trouglovi ABC i $A'B'D'$ razloživo jednaki, takvi će biti i poligoni P i Q. ∎

4.3 Merenje površina

Površina poligona P je broj $\delta(P)$ takav da funkcija $\delta : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ koja svakom poligonu P dodeljuje njen defekt $\delta(P)$ nenegativna i aditivna, gde je $\mathcal{P}$ skup svih poligona P hiperboličke ravni. Tu funkciju definisanu na skupu $\mathcal{P}$ možemo smatrati merom.

Prosto povezana figura F u hiperboličkoj ravni je *merljiva* ako postoji niz $(P_n)_{n=1,2,...}$ poligona koje pripadaju figuri F i niz $(Q_n)_{n=1,2,...}$ poligona koje sadrže tu figuru i pritom važi

$$P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n \subset ... \text{ i } Q_1 \supset Q_2 \supset ... \supset Q_n \supset ...,$$

takvih da je

$$\delta(F) = \lim_{n\to\infty} \delta(P_n) = \lim_{n\to\infty} \delta(Q_n).$$

Mera ili *površina* figure F je zajedničku graničnu vrednost $\delta(F)$.

Neka je skup $\mathcal{M}$ skup merljivih figura takvih da mu pripada proizvoljna figura F koja se može predstaviti kao unija konačno mnogo disjunktnih, prosto povezanih, merljivih figura F_1, F_2, ..., F_n. Zbog toga je mera figure F zbir mera figura F_1, F_2, ..., F_n. Funkcija kojom svakom merljivom figurom F dodeljujemo njegovu meru $\delta(F)$, $\delta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, ima sledeće osobine:

1° Za svaku merljivu figuru F je $\delta(F) \geqslant 0$.

2° Ako je figura F unija disjunktnih merljivih figura F_1, F_2, ..., F_n, tada važi

$$\delta(F) = \delta(F_1) + \delta(F_2) + ... + \delta(F_n).$$

3° Podudarne figure imaju iste mere.

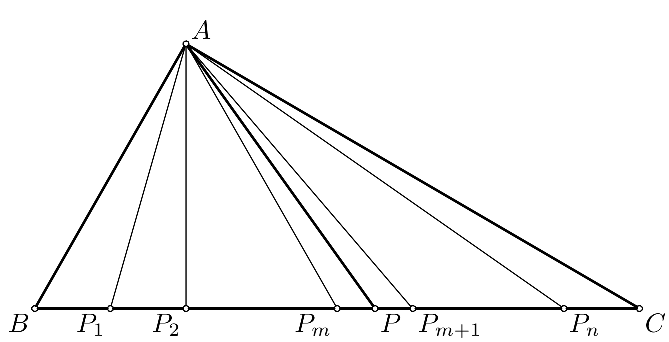
Neka je $\mathcal{P}$ skup poligonskih površi, takav da je na tom skupu definisana mera defekt δ i ako je $\delta' = k\delta$, $k > 0$, tada i δ' zadovoljava uslove 1°, 2°, 3°, pa važi da je i δ' je mera definisana na skupu poligonskih površi. Važi i obratno i to dokazujemo sledećom teoremom.

Teorema 4.7. Ako funkcija $\delta' : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ zadovoljava uslove 1°, 2°, 3°, tada postoji broj $k > 0$ takav da je $\delta' = k\delta$.

Dokaz: U ovom dokazu ćemo pokazati da teorema važi ako je funkcija δ' definisana na skupu trouglova, a to je moguće pošto važi uslov 1° i pošto se može izvršiti triangulacija bilo kog poligona. Pokazujemo da važi

$$\frac{\delta'(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta(A'B'C')} = k$$

za bilo koja dva trougla ABC i $A'B'C'$.



Slika 4.7.

Prvenstveno imamo slučaj da važi trouglovi ABC i $A'B'C'$ imaju jednake defekte $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$, tada će na osnovu teoreme koju smo ranije dokazali biti razloživo jednaki, a iz uslova 2° i 3° važi i $\delta'(ABC) = \delta'(A'B'C')$.

U drugom slučaju ako trouglovi ABC i $A'B'C'$ nemaju jednake defekte, nego je, na primer, $\delta(ABC) > \delta(A'B'C')$, onda na duži BC postoji takva tačka P da je $\delta(ABP) = \delta(A'B'C')$, i tačke P_1, P_2, ..., P_n takve da je $\delta(ABP_1) = \delta(AP_1P_2) = ... = \delta(AP_nC) = \frac{1}{n}\delta(ABC)$. Neka je tačka P između P_m i P_{m+1} ili da je istovetna sa tačkom P_{m+1}, tada važi

$$\frac{m}{n} < \frac{\delta(ABP)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)} \leqslant \frac{m+1}{n}.$$

Iz uslova 2° i 3°, imamo da je

$$\frac{m}{n} < \frac{\delta'(ABP)}{\delta'(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(ABC)} \leqslant \frac{m+1}{n}.$$

Što zaključujemo da je svaki racionalan broj $\frac{m}{n} < \dfrac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)}$. Potom važi da je

$$\frac{\delta(A'B'C')}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(ABC)}.$$

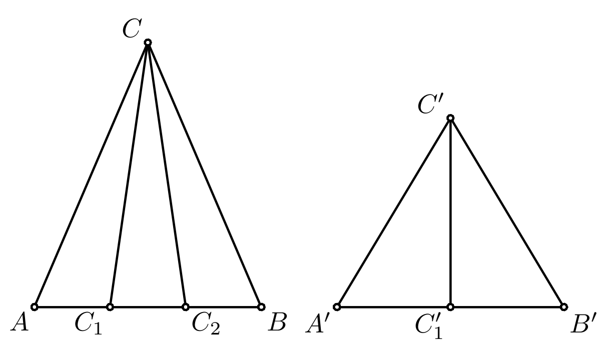
Time dokazujemo,

$$\frac{\delta'(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{\delta'(A'B'C')}{\delta'(A'B'C')} = k. \blacksquare$$

4.4 Odnos između površine trougla i defekta

Razliku između brojeva 2π i zbira uglova u trouglu nazivamo *defektom*. Površine dva trougla su u istom odnosu kao i njihovi defekti. Neka su kod trouglova ABC i $A'B'C'$, redom, defekti $\delta_1 = \delta(ABC)$ i $\delta_2 = \delta(A'B'C')$. Tada je

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \delta_1 : \delta_2.$$



Slika 4.8.

Neka je odnos ovih površina 3 : 2, tj. $m = 3$ i $n = 2$. Podelimo prvi trougao pravama CC_i, $i = 1, 2$ a drugi pravom $C'C_1'$. Po pretpostavci, na ovaj način dobijeni trouglovi imaju istu površinu, npr. p. Odatle je

$$\triangle ABC = mp \text{ i } \triangle A'B'C' = np.$$

Neka je u zbir unutrašnjih uglova u bilo kom od novodobijenih trouglova (koje smo dobili razlaganjem trougla ABC). Činjenica da svi ovi trouglovi imaju isti zbir unutrašnjih uglova proizilazi iz toga da svi imaju istu površinu, i svaki susedni par ima jednu zajedničku stranicu. U trouglu ABC zbir uglova je zbir svih uglova u novodobijenim trouglovima umanjen za uglove u tačkama C_i, $i = 1, 2$. Odatle je

$$2\pi - \delta_1 = mu - (m-1)2\pi \text{ ili } \delta_1 = m(2\pi - u).$$

Isto tako je i

$$\delta_2 = n(2\pi - u).$$

Zbog toga je

$$\delta_1 : \delta_2 = m : n,$$

a kako je odnos površina trouglova ABC i $A'B'C'$ $m : n$, taj odnos možemo napisati u obliku

$$\frac{ABC}{\delta_1} = \frac{A'B'C'}{\delta_2} = k.$$

Kako je već pokazano da je površina trougaone površi srazmerna defektu te trougaone površi, sledeće tvrđenje proizilazi iz prethodnog.

Teorema 4.8. U geometriji Lobačevskog odnos površine i defekta svake trougaone površi je konstantan. ■

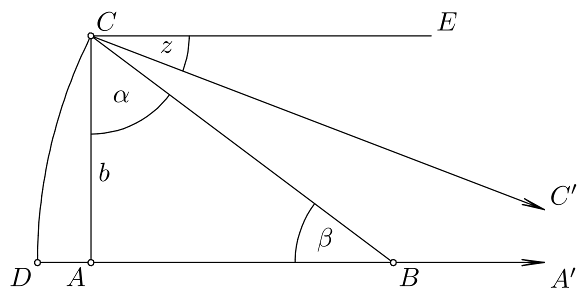
4.5 Površina između paralelnih pravih

Neka su u pravouglom trouglu ABC oštri uglovi α i β. Tada je njegov defekt $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, i

$$\frac{P_{ABC}}{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta} = k.$$

Ukoliko pustimo stranicu AB da teži beskonačnosti, ugao β konvergiraće ka nuli, a ugao α ka $\Pi(AC)$. Trougao ABC postaće traka ograničena dvema paralelnim pravama AA' i CC' i normalom AC. Ovako dobijenu traku možemo posmatrati i kao trougao kome je jedan vrh u beskonačnosti, sa defektom $\delta_1 = \frac{\pi}{2} - \Pi(AC)$. Na osnovu teoreme 4.8 i kod ovog trougla biće

$$\frac{P_{A'ACC'}}{\frac{\pi}{2}-\Pi(AC)}=k.$$



Slika 4.9.

Konstantu k odredićemo na sledeći način. Neka je kroz tačku C provučen proizvoljni luk, i neka taj luk sa pravom AA' ima zajedničku tačku D takvu da važi raspored $\mathcal{B}(DAA')$. Površina ovog trougla p je u srazmeri sa dužinom luka CD. Tada je mera granične površi $A'DCC'$ jednaka dužini luka CD, tj.

$$|CD|=\mathrm{ctg}\Pi(b)=\mathrm{tg}\delta_1.$$

Tada je odnos površina trake i ovog trougla

$$\frac{A'ACC'}{A'DCC'}=\frac{1}{k}\cdot\frac{\mathrm{tg}z}{z}.$$

Kada normala AB opada, odnos leve strane ove jednačine sve više prilazi jedinici, takođe važi i za $\frac{\mathrm{tg}z}{z}$, pa iz toga sledi da i k mora biti jedan. Odatle dobijamo da je površina trake između dve paralelne prave

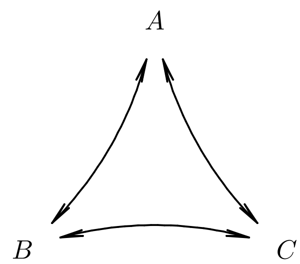
$$P_{A'ACC'}=\frac{\pi}{2}-\Pi(AC).$$

4.6 Površina trougla

Prema jednačini o odnosu površine i defekta trougla $\triangle ABC$ biće

$$\delta=\pi-(\alpha+\beta+\gamma),$$

odakle sledi da što su veći uglovi unutar trougla, to mu je površina manja. Najveća površina bila bi kada bi mu svi unutrašnji uglovi bili jednaki nuli, a u tom slučaju bi njegove stranice među sobom bile hiperparalelne.

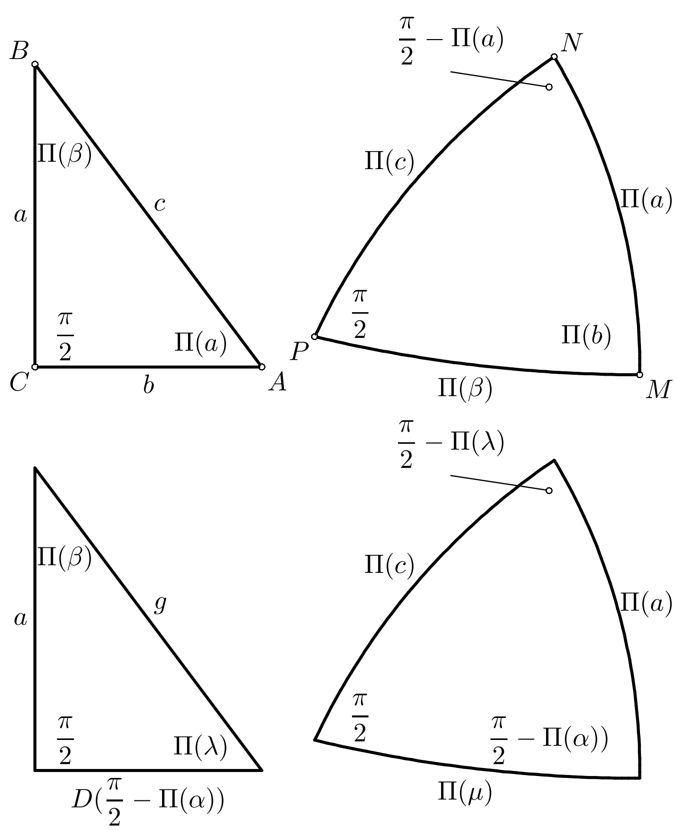


Slika 4.10.

Gornja granica za površinu trougla je π. Prepostavka da površina trougla može biti proizvoljno velika ekvivalentna je sa petim postulatom. Površina pravouglog trougla ABC sa uglovima $\Pi(\alpha)$ i $\Pi(\beta)$ je

$$P_{ABC} = \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta).$$

Izrazimo ovo pomoću kateta. Trouglu a, b, c, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{\pi}{2}$ možemo pridružiti trouglove



Slika 4.11.

$$a,\ D(\tfrac{\pi}{2}-\Pi(\alpha)),\ \beta,\ \tfrac{\pi}{2}-\Pi(b),\ \Pi(c),\ \tfrac{\pi}{2},$$
$$D(\tfrac{\pi}{2}-\Pi(\beta)),\ b,\ \alpha,\ \Pi(c),\ \tfrac{\pi}{2}-\Pi(a),\ \tfrac{\pi}{2}.$$

Odatle je, u drugom od ova dva trougla

$$\pi - 2\Pi(\alpha) = \Pi(\beta + c) + \Pi(c - \beta),$$

ili, kada iskoristimo osobine ugla paralelnosti,

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta).$$

Isto tako je i

$$2\Pi(\beta) = \Pi(c - \alpha) - \Pi(c + \alpha).$$

Kada u ove jednačine zamenimo pridružene trouglove, dobijamo

$$2\Pi(c) = \Pi\left(\beta - D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right)\right) - \Pi\left(\beta + D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right)\right).$$

Na istovetan način došli bi do zaključka da je i

$$2\Pi(c) = \Pi\left(\alpha - D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right)\right) - \Pi\left(\alpha - D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right)\right).$$

Dalje,

$$2\Pi(\alpha) = \Pi\left(D(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)) - D(\frac{\pi}{2} - \Pi(b))\right) - \Pi\left(D(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)) + D(\frac{\pi}{2} - \Pi(b))\right)$$

i

$$2\Pi(\beta) = \Pi\left(D(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)) - D(\frac{\pi}{2} - \Pi(a))\right) - \Pi\left(D(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)) + D(\frac{\pi}{2} - \Pi(a))\right)$$

odakle proizilazi, kada saberemo poslednje dve jednačine,

$$2\Pi(\alpha) + 2\Pi(\beta) = \pi - 2\Pi\left(D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right) + D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right)\right),$$

pa jednačinu pravouglog trougla ABC možemo napisati kao

$$P_{\triangle ABC} = \Pi\left(D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right) + D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right)\right).$$

4.7 Pretvaranje maksimalnog trougla u kvadrat

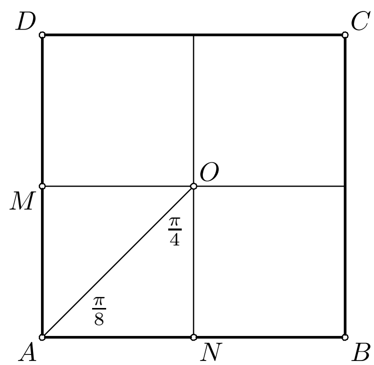
Bilo koji ravanski četvorougao možemo nekom njegovom dijagonalom podeliti na dva trougla. Zato će njegova površina biti jednaka zbiru površina ta dva trougla, tj.

$$P_{\square} = 2\pi - (\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D).$$

Kod kvadrata su sve stranice jednake, kao i uglovi, samo što ne mogu biti pravi. Na osnovu toga, površina kvadrata je

$$P_{\square} = 2\pi - 4\measuredangle A.$$

A ako ta površina mora biti jednaka površini maksimalnog trougla, ugao A kvadrata mora biti $\frac{\pi}{4}$.



Slika 4.12.

Pitanje koje se postavlja glasi: *Kako konstruisati ovaj kvadrat?*

Pogledajmo pravougli trougao OAM, koji je jedna osmina traženog kvadrata. Neka je $OM = a$. Tada je

$$\mathrm{ch}a = \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}},$$

ili

$$\mathrm{ch}a = \frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Konstruišimo dva segmenta b' i c' koji pripadaju uglovima paralelnosti $\frac{3\pi}{8}$ i $\frac{\pi}{8}$. Ako je

$$\Pi(b') = \tfrac{3\pi}{8} \text{ i } \Pi(c') = \tfrac{\pi}{4},$$

biće i

$$\sin\tfrac{3\pi}{8} = \frac{1}{\mathrm{ch}b'} \text{ i } \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\mathrm{ch}c'},$$

što, kada se uvrsti u prethodno, daje

$$\mathrm{ch}a\mathrm{ch}b' = \mathrm{ch}c'.$$

Dakle, a se može odrediti kao kateta u pravouglom trouglu u kome je c' hipotenuza, a b' druga kateta. Ako je a poznato, trougao OAM možemo odmah konstruisati. Ako datom trouglu dodamo trougao njemu simetričan u odnosu na pravu OA, dobijamo četvorougao $OMAN$ sa tri prava ugla, dok četvrti ugao iznosi $\frac{\pi}{4}$. Od ovakva četiri četvorougla možemo dobiti kvadrat kome je površina jednaka π, tj. maksimalnoj površini trougla. Maksimalni trougao se na potpuno analogan način može transformisati i u neki drugi pravilan poligon, čiji broj strana mora biti takav da se može konstruisati u euklidskoj geometriji.

Prilikom konstrukcije poligona u hiperboličkoj geometriji postoji jedna osobina na koju moramo obratiti pažnju. Razdelimo kružnicu na n jednakih delova, i na središtima tih lukova konstruišimo tangente. U euklidskoj geometriji ove tangente će se seći, i njihovi odsečci činiće poligon. U hiperboličkoj geometriji to će se dogoditi samo onda kada je poluprečnik kruga manji od dužine koja odgovara uglu paralelnosti $\frac{\pi}{n}$. Kada je poluprečnik kruga jednak toj dužini, tangente su paralelne, a kada je veći, one se odmiču.

4.8 Cirkulatura kvadrata

U hiperboličkoj geometriji postoji kvadrat koji se može transformisati u krug. Površina takvog kruga je

$$p = 4\pi \mathrm{sh}^2\frac{r}{2} \text{ ili } p = \frac{4\pi}{\mathrm{tg}^2\Pi(\frac{r}{2})}.$$

Svakom krugu može se pridružiti izvestan ugao, i to na sledeći način. Neka je $AB = r$ i M središnja tačka duži AB. Neka je prava MN normalna na pravu AB, i neka su prave AA' i BB' paralelne pravoj MN. Tada je ugao $A'AB$ jednak uglu $B'BA$ i važi

$$\measuredangle A'AB = \measuredangle B'BA = \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Neka je C tačka prave BB' takva da je $AC \perp BB'$, i tačka D takva da je $AD \perp AC$. Neka su uglovi $CAB = \alpha$ i $A'AD = \beta$. Tada je

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right),$$

Pa je zato i

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{ctg}\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right) = \frac{\mathrm{ctg}\Pi(\frac{r}{2})\mathrm{ctg}\alpha + 1}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\Pi(\frac{r}{2})}.$$

Hajde da iz ove relacije na neki način izuzmemo α. U trouglu ABC je

$$\mathrm{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ch}r,$$

a kako je

$$\mathrm{ch}r = 2\mathrm{sh}^2\tfrac{r}{2} + 1 = 2\mathrm{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2} + 1\right),$$

sledi da je i

$$\mathrm{ctg}\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right)\mathrm{ctg}\alpha = 2\mathrm{ctg}^2\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right) + 1.$$

Prethodna jednačina može se zapisati i kao

$$\mathrm{ctg}\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right)\left(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right)\right) = \mathrm{ctg}^2\Pi\tfrac{r}{2} + 1,$$

ili

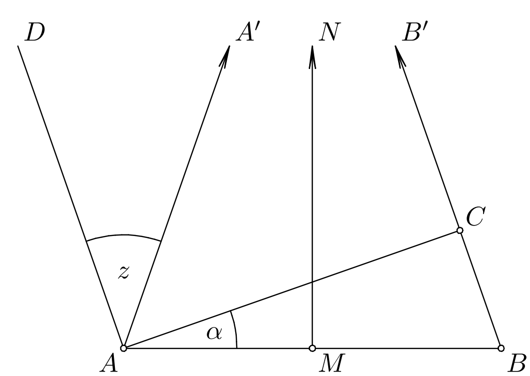
$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right) = \mathrm{tg}\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right)\left(\mathrm{ctg}^2\Pi\left(\tfrac{r}{2}\right) + 1\right).$$

Odatle je i

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2}{\mathrm{tg}\Pi(\frac{r}{2})},$$

a sama površina kruga postaje

$$p = \pi\mathrm{tg}^2\beta.$$



Slika 4.13.

Kada je $\beta = \frac{\pi}{4}$, krug ima istu površinu kao i maksimalni trougao ili kvadrat u kome su svi uglovi $\frac{\pi}{4}$. Ukoliko uzmemo $\beta = \frac{\pi}{4}$ i obrnemo konstrukciju slike, naćićemo poluprečnik ovakvog kruga. Ugao $A'AC$ biće takođe $\frac{\pi}{4}$, a dužina AC koja mu ogovara, biće jednaka jedinici dužine. Na AC treba odrediti normalu BB', i na toj pravoj odrediti tačku B takvu da su uglovi $A'AB$ i $B'BA$ jednaki. Takvu konstrukciju je davno izveo J. Boljaj. AB je traženi poluprečnik. Tačku B takođe možemo odrediti i pomoću simetrala uglova u trouglu. Kao i u Euklidovoj ravni, one se seku u jednoj tački. Ovo važi i onda kada je jedan ugao jednak nuli, tj. kada su dve stranice trougla hiperparalelne, kao što su u ovom trouglu AA' i BB'. Simetrale uglova $A'AB$ i $B'BA$ seku se u nekoj tački P. Spojimo tačku A sa nekom drugom tačkom prave BB', npr. E, i konstruišimo simetrale uglova $A'AE$ i $B'EA$. Kako se ove simetrale seku u tački R, onda je prava PR tražena simetrala kod ugla A', koji je jednak nuli. Konstruišimo sada normalu iz tačke A na pravu PR. Njen presek sa pravom BB' je tačka B, a poluprečnik kruga je jednak dužini AB.

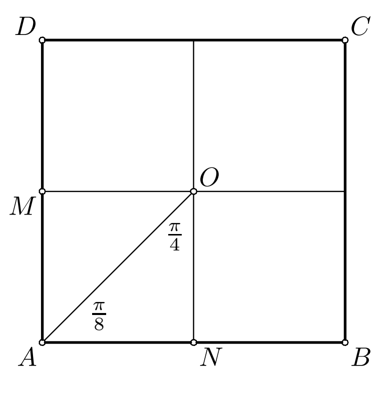
4.9 Kvadratura kruga

Ukoliko u jednačinu kruga uvrstimo $\mathrm{tg}^2 z = \frac{m}{n}$, dobijamo da je

$$p = \frac{m}{n}\pi.$$

Ako je n prost broj oblika $2^{2^k} + 1$, taj krug možemo pretvoriti u kvadrat. Ako je $\measuredangle A$ ugao kvadrata, tada je površina tog kvadrata $2\pi + 4\measuredangle A$. Kako bio to bila i površina nekog kruga, moralo bi biti

$$\measuredangle A = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{4} \cdot \frac{\pi}{n}.$$



Slika 4.13.

U svojim radovima Gaus je pokazao da se ugao π može podeliti na n jednakih delova ukoliko je n prost broj oblika $2^{2^k}+1$. Na osnovu svega prethodno pretpostavljenog, možemo odrediti ugao A, a samim tim, lako se može konstruisati kvadrat kome su svi uglovi jednaki A. Neka je trougao OAM osmina traženog kvadrata. Tada je

$$\measuredangle AOM = \frac{\pi}{4}, \measuredangle OAM = \frac{\pi}{4} - \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n}, \measuredangle OMA = \frac{\pi}{2},$$

a trougao može biti konstruisan na osnovu svoja tri ugla, što je dokazao Libman[20]. Traženi kvadrat sastoji se od 8 takvih trouglova.

Sve ovo moguće je uraditi i na drugi način. Ako je $OM = a$, biće

$$\mathrm{ch}a = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n})}{\sin\frac{\pi}{4}}.$$

Sa tako dobijenim uglovima možemo nastaviti dalji rad kao u slučaju kada trougao pretvaramo u maksimalni kvadrat.

[20] *Hajnrih Libman* , nemački matematičar.

5 Literatura

[1] Z. Lučić, Euklidska i hiperbolička geometrija, *Total Design* i Matematički fakultet, Beograd, 1997.

[2] Z. Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009.

[3] M. Prvanović, Osnove geometrije, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[4] I. Pucelj, Neevklidične geometrije, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1968.

[5] V. Varićak, Prvi osnivači neeuklidske geometrije, Jugoslovenska akademija znanosti i umjetnosti, 1907.

[6] D. Lopandić, Geometrija Lobačevskoga, Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1968.

[7] N.I. Lobačevski, Geometrijska ispitivanja iz teorije paralelnih linija, prevod B. Petronijevića, Naučna knjiga, Beograd, 1951.

[8] J. Boljaj, Apendiks, prevod B. Petronijevića, Beograd, 1928.

[9] Slobodna enciklopedija, *Wikipedia*, *http://sr.wikipedia.org/*