U n i v e r z i t e t u B e o g r a d u

Matematički fakultet

ITOOV STOHASTIČKI INTEGRAL I PRIMENE

M a s t e r r a d

Mentor: dr Jelena Jocković

Student: Jelena R. Suzić

B e o g r a d, 2015

S a d r ž a j

Predgovor

Profesor Kijoši Ito (Kiyoshi Itô), rođen 1915. godine u Japanu, danas je poznat kao osnivač moderne stohastičke teorije. On je još za vreme studija bio zainteresovan za pojam slučajne promenljive, diferencijalni i integralni račun u oblasti verovatnoće. U to vreme, bilo je nekoliko uticajnih istraživača u oblasti verovatnoće; možemo izdvojiti Kolmogorova[1] u Rusiji i Levija[2] u Francuskoj.

Nakon završetka studija, Ito se zapošljava u Zavodu za statistiku u Tokiju, gde mu se pruža mogućnost da ozbiljnije i temeljnije uči Kolmogorovljev koncept teorije verovatnoća, kao i Levijevu teoriju. U to vreme, verovalo se da je Levijev rad izuzetno težak, s obzirom da je Levi, koji je začetnik nove oblasti u matematici, teoriju verovatnoća bazirao na sopstvenoj intuiciji. Ito je želeo da opiše Levijeve ideje, koristeći logiku za koju je pretpostavljao da se Kolmogorov njome služio.

Vodeći se Levijevim radom, Kolmogorovljevom logikom i teorijom američkog matematičara Duba[3], Ito je objavio svoj prvi rad koji se bavio stohastičkim diferencijalnim jednačinama. Danas nije redak slučaj da se Itoovom metodom objašnjava Levijeva teorija.

Ito je razvio teoriju stohastičkih diferencijalnih jednačina, koje opisuju kretanje usled slučajnih događaja. Nakon objavljenog prvog rada, došli su i drugi radovi, koji nisu naišli na dobru kritiku matematičara. U to vreme Ito još uvek nije bio doktor nauka, i bilo je potrebno da prođe nekoliko godina kako bi njegov rad dobio na značaju i kako bi matematičari postali zainteresovani za tu temu. Nakon toga su se u proučavanje ove oblasti uključili i drugi matematičari, i doprineli njenom razvoju. Kako je tih godina Drugi svetski rat bio u toku, Itoov rad je u tom smislu još značajniji.

Nakon završetka Drugog svetskog rata, Ito je doktorirao i nastavio da razvija svoje ideje u stohastičkoj teoriji. Bio je profesor na više univerziteta, kao i počasni predavač na raznim konferencijama i seminarima.

Ito je dobio mnoge nagrade za veliki doprinos u matematici. Spomenućemo Volfovu[4] nagradu koju je dobio 1987. godine, i Gausovu[5] nagradu koju je dobio 2006. godine. Takođe, izabran je za člana Nacionalne akademije nauka SAD, i Francuske akademije nauka. Umro je 2008. godine u Japanu.

Cilj ovog rada jeste da čitaocu približi Itoovu teoriju, kako u teorijskom smislu tako i u smislu primene. Itoova teorija je širok pojam, te će u ovom radu biti predstavljen jedan njen deo: Itoov stohastički integral.

---

[1] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), ruski matematičar koji je dao značajan doprinos teoriji verovatnoće, topologiji i drugim oblastima

[2] Paul Pierre Lévy (1886-1971), francuski matematičar koji je posebno bio aktivan u teoriji verovatnoće, procesima, martingalima itd.

[3] Joseph L. Doob (1910-2004), američki matematičar koji je razvio teoriju martingala

[4] Wolf Prize- nagrada koja se dodeljuje u Izraelu za izvanredna dostignuća u poljoprivredi, hemiji, matematici, medicini, fizici i umetnosti

[5] Carl Friedrich Gauss Prize- nagrada za izvanredne matematičke doprinose koji su pronašli značajne primene izvan matematike

Prvo poglavlje je posvećeno definisanju pojmova Rimanov integral, Njutn-Lajbnicova formula, Riman-Stiltjesov integral, kao i kvadratna varijacija. Ovo poglavlje predstavlja uvod u priču o stohastičkim integralima i daje osnovu za dalji rad u polju integrala.

Drugo poglavlje govori o slučajnom lutanju: prikazana je njegova teorijska osnova, njegov primer i prikazuje kod u `R`-u kojim se može simulirati slučajno lutanje.

Treće poglavlje je posvećeno definisanju Braunovog kretanja i njegovim osobinama, primeru Braunovog kretanja u `R`-u, pojmu Vinerovog integrala i martingala. Bez uvođenja pojmova koje ovo poglavlje pokriva, ne bi se mogao definisati Itoov stohastički integral.

Četvrto poglavlje je u isto vreme i glavno poglavlje ovog rada jer govori o Itoovom stohastičkom integralu. Sadrži uvodnu priču u stohastičke integrale, teorijsku osnovu za Itoov stohastički integral, kao i vezu Itoovog stohastičkog integrala sa Rimanovim sumama.

Peto poglavlje je posvećeno primerima Itoovog stohastičkog integrala.

Šesto poglavlje prikazuje primenu Itoovog stohastičkog integrala. Primena je širok pojam, te ćemo se koncentrisati na tri bitne stavke: Itoova formula u svom najjednostavnijem obliku i njena primena, stohastički procesi koji su zasnovani na Itoovom stohastičkom integralu i linearne stohastičke diferencijalne jednačine. Pored toga, biće prikazana primena Itoovog integrala u `R`-u i u Volframu.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Jeleni Jocković na literaturi koju mi je omogućila i na ukazanom poverenju.

1 Integralni račun

Praksa je pokazala da priča o stohastičkom računu ume da bude problematična onima koji nemaju neko veće matematičko znanje. Kako je ovaj rad fokusiran na stohastički integral, potrebno je najpre ispričati priču o "običnom"integralnom računu, što podrazumeva uvođenje definicija i osobina Rimanovog, Riman - Stiltjesovog integrala, Njutn-Lajbnicovu formulu, ali i pojam kvadratne varijacije.

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je knjiga [5].

1.1 Rimanov integral

Definicija 1.1. *Ograničena funkcija f koja je definisana na zatvorenom intervalu $[a,b]$ integrabilna je u Rimanovom*[6] *smislu ako sledeći limes postoji:*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\|\Delta_n\| \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}), \tag{1.1.1}$$

gde je $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ podela segmenta $[a,b]$ takva da je $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$, $||\Delta_n|| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1})$, i τ_i izabrana tačka segmenta $[t_{i-1}, t_i]$.

Pri tome se a i b nazivaju **donjom i gornjom granicom integrala**, respektivno; funkcija f naziva se **podintegralnom funkcijom** ili **integrandom**, izraz $f(t)dt$ je **podintegralni izraz**, a promenljiva t **integraciona promenljiva**. Suma koja figuriše u jednačini 1.1.1 naziva se **Rimanova suma**.

Važi:
a) Ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$, onda je ona Riman integrabilna.
b) Monotona funkcija na segmentu je Riman integrabilna.

Svojstva Rimanovog integrala:

(a) Neka su f i g Riman integrabilne funkcije na segmentu $[a,b]$ i neka je $\alpha \in R$. Tada su funkcije $f \pm g$ i αf Riman integrabilne na $[a,b]$. Pri tome važe jednakosti

$$\int_a^b [f(t) \pm g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt,$$

$$\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt.$$

(b) Neka su f i g Riman integrabilne funkcije na segmentu $[a,b]$ i α, β realni brojevi, onda je $\alpha f + \beta g$ Riman integrabilna na $[a,b]$. Pri tome važi jednakost

$$\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

[6] Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar koji je dao značajan doprinos matematičkoj analizi

(c) Ako je f Riman integrabilna funkcija na segmentu $[a, c]$ i $a<b<c$, onda je f Riman integrabilna funkcija na $[a, b]$ i na $[b, c]$, i pri tome važi jednakost

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

(d) Ako je funkcija f definisana u tački a, onda je $\int_a^a f(t)dt = 0$.
(e) Ako je $a<b$ i $\int_a^b f(t)dt$ postoji, onda je

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

1.2 Njutn-Lajbnicova formula

Neka je funkcija $f(t)$ definisana na intervalu (a, b). Primitivnom funkcijom funkcije $f(t)$ nazovimo funkciju $\varphi(t)$, $t \in (a, b)$, ako je ova diferencijabilna i zadovoljava jednakost $\varphi^{'}(t) = f(t)$, $t \in (a, b)$.

Teorema 1.1. *Ako je $f : [a, b] \longrightarrow R$ neprekidna funkcija, onda je*

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b],$$

njena primitivna funkcija.

Neka je $f : [a, b] \longrightarrow R$ neprekidna funkcija i φ njena proizvoljna primitivna funkcija. Tada važi jednakost

$$\int_a^b f(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Gornja jednakost se naziva **Njutn[7]-Lajbnicova[8] formula** i često se piše u obliku

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(x)|_a^b.$$

1.3 Riman-Stiltjesov integral

Jedno uopštenje Rimanovog integrala dato je Stiltjesovim[9] integralom, te će se ovaj integral u daljem tekstu nazivati **Riman-Stiltjesov integral**.

[7]Sir Isaac Newton (1643-1727), engleski matematičar i fizičar koji je danas za većinu ljudi jedan od najznačajnih ljudi u istoriji nauke

[8]Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646 -1716), nemački matematičar, fizičar i pronalazač koji je dao značajan doprinos u optici i mehanici

[9]Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), holandski matematičar

Definicija 1.2. *Neka je g monotono rastuća funkcija na konačnom zatvorenom intervalu $[a, b]$. Ograničena funkcija f definisana na segmentu $[a, b]$ integrabilna je po funkciji g u **Riman-Stiltjesovom smislu** ako sledeći limes postoji:*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \tag{1.3.1}$$

gde su podela Δ_n i izabrane tačke τ_i definisane na isti način kao kod Rimanovog integrala (sekcija 1.1).

Funkcija f se naziva **integrand**, a funkcija g **integrator**.
Važi i da su neprekidne funkcije na $[a, b]$ integrabilne po monotono rastućoj funkciji na $[a, b]$ u Riman-Stiltjesovom smislu.

Svojstva Riman-Stiltjesovog integrala:

(a) Neka su f_1, f_2, g ograničene realne funkcije definisane na segmentu $[a, b]$ i c_1, c_2 proizvoljne konstante. Ako su f_1, f_2 integrabilne po funkciji g na $[a, b]$, onda je $c_1 f_1 + c_2 f_2$ integrabilno po funkciji g na $[a, b]$ i pritom važi

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg.$$

(b) Neka su f, g_1, g_2 ograničene realne funkcije na $[a, b]$ i c_1, c_2 proizvoljne konstante. Ako je f integrabilna po funkciji g_1 i integrabilna po funkciji g_2 na $[a, b]$, onda je f integrabilna po funkciji $c_1 g_1 + c_2 g_2$ na $[a, b]$ i pritom važi

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

(c) Ako je f integrabilna funkcija po funkciji g na $[a, c]$ i važi $a<b<c$, onda je f integrabilna po funkciji g na $[a, b]$ i na $[b, c]$, i pri tome važi jednakost

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg.$$

1.4 Kvadratna varijacija funkcije

Razmatrajmo specijalan slučaj Riman-Stiltjesovog integrala kada je $f = g$, tada integral definisan jednačinom 1.3.1 ima oblik

$$\int_a^b f(t) df(t).$$

Neka je $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ podela segmenta $[a, b]$. Dalje, neka su L_n i R_n Rimanove sume sa izabranim tačkama $\tau_i = t_{i-1}$ i $\tau_i = t_i$ respektivno,

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(f(t_i) - f(t_{i-1})), \tag{1.4.1}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})). \tag{1.4.2}$$

Posle sabiranja i oduzimanja levih i desnih strana jednakosti 1.4.1 i 1.4.2, dobija se:

$$R_n + L_n = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i)^2 - f(t_{i-1})^2) = f(b)^2 - f(a)^2, \tag{1.4.3}$$

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2. \tag{1.4.4}$$

Posle sabiranja levih i desnih strana jednakosti 1.4.3 i 1.4.4 dolazimo do jednakosti za R_n

$$R_n = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2 + \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right),$$

a dok oduzimanjem dolazimo do jednakosti za L_n

$$L_n = \frac{1}{2}\left(f(b)^2 - f(a)^2 - \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2\right).$$

Definicija 1.3. *Limes desne strane jednakosti* 1.4.4 *kada* $||\Delta_n||$ *teži nuli, ako postoji, naziva se* ***kvadratna varijacija*** *funkcije* f *na segmentu* $[a, b]$.

Možemo primetiti da $\lim\limits_{\|\Delta_n\| \longrightarrow 0} R_n \neq \lim\limits_{\|\Delta_n\| \longrightarrow 0} L_n$ ako i samo ako je kvadratna varijacija funkcije f različita od nule.

2 Slučajno lutanje

Kao uvodnu i motivacionu priču o slučajnom lutanju, predstavićemo primer bacanja fer novčića (glava i pismo padaju sa jednakom verovatnoćom) u kojem se gubi ili dobija 1 dinar zavisno od ishoda bacanja.

Bacanje novčića je način da se neka odluka donese slučajnim putem. Opšte je poznato da glava i pismo padaju sa istom verovatnoćom. Posmatraćemo bacanje novčića u igri osvajanja/gubljenja novca. Naime, ako padne glava, osvaja se 1 dinar, a ako padne pismo, gubi 1 dinar. Obeležimo sa R_i i-ti ishod bacanja novčića. Dakle, R_i uzima vrednosti 1, ako je u i-tom bacanju pala glava, i -1, ako je i-tom bacanju palo pismo.

$$P\{R_i = 1\} = P\{R_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

Očigledno je da je $ER_i = 0$ i $DR_i = 1$, kao i da su R_i i R_j nezavisne slučajne veličine, jer ishod u i-tom bacanju ne zavisi od ishoda u j-tom bacanju.

Neka je sa S_i označena ukupna količina novca koju neko poseduje nakon i-tog bacanja (uključujući i i-to bacanje).

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} R_j$$

Posmatrajmo očekivanje i disperziju za S_i:

$$E[S_i] = E\left(\sum_{j=1}^{i} R_j\right) = \sum_{j=1}^{i} ER_j = 0,$$
$$E\left[S_i^2\right] = E\left(R_1^2 + 2R_1R_2 + \ldots\right) = i,$$

gde smo koristili da je $E(R_iR_j) = 0$ i da je $E(R_i^2) = 1$.
Ovim smo pokazali da igra ima svojstvo "**odsustva pamćenja**"(baš kao i rulet), što znači da slučajno lutanje ne pamti gde je bilo pre trenutka u kojem se lutanje trenutno nalazi.
Posmatrajmo kvadratno odstupanje

$$\sum_{j=1}^{i} \left(S_j - S_{j-1}\right)^2.$$

Nakon svakog bacanja ponavlja se događaj: osvaja se ili gubi 1 dinar, tako da važi $|S_j - S_{j-1}| = 1$. Stoga je kvadratno odstupanje uvek i.

Ako promenimo pravila bacanja: dozvoljeno je n bacanja u vremenskom periodu dužine t. Sada, veličina uloga više neće biti 1 dinar, već $\sqrt{\frac{t}{n}}$.
Zadržavamo svojstvo "odsustva pamćenja"; računamo kvadratno odstupanje

$$\sum_{j=1}^{n} \left(S_j - S_{j-1}\right)^2 = n\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right)^2 = t.$$

Kako se dužina vremenskog perioda t približava nuli, **slučajno lutanje** teži **Braunovom kretanju**.

Za pisanje ovog poglavlja korišćene su knjige [1] i [3].

2.1 Slučajno lutanje

Posmatrajmo slučajno lutanje koje počinje u 0 sa jednako verovatnim skokovima h i $-h$ u vremenskim trenucima $\delta, 2\delta, ...$, gde su h i δ pozitivni brojevi. Neka je $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina, takvih da važi

$$P\{X_j = h\} = P\{X_j = -h\} = \frac{1}{2}.$$

Sa $Y_{\delta,h}(t)$ označavamo **slučajno lutanje** i znamo da je $Y_{\delta,h}(0) = 0$ (slučajno lutanje počinje u 0, te je njegova vrednost u početnom trenutku 0) i $Y_{\delta,h}(n\delta) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (slučajno lutanje u trenutku $n\delta$ jednako je zbiru slučajnih veličina koje određuju slučajno lutanje do tog trenutka).

Za $t > 0$ i $n\delta < t < (n+1)\delta$, **slučajno lutanje** u trenutku t, $Y_{\delta,h}(t)$ definiše se kao

$$Y_{\delta,h}(t) = \frac{(n+1)\delta - t}{\delta} Y_{\delta,h}(n\delta) + \frac{t - n\delta}{\delta} Y_{\delta,h}((n+1)\delta).$$

Zanima nas kako se ponaša slučajno lutanje kada δ i h teže nuli. Prvo, potrebno je pozabaviti se ponašanjem **karakteristične funkcije**[10] slučajnog lutanja kada δ i h teže nuli, tj. izračunati:

$$\lim_{\delta,h \longrightarrow 0} Ee^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)}, \tag{2.1.1}$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$ fiksirano.

Neka je $t = n\delta$, tj. $n = \frac{t}{\delta}$. Tada je karakteristična funkcija slučajnog lutanja

$$\begin{aligned} Ee^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} &= \prod_{j=1}^{n} Ee^{i\lambda X_j} \\ &= \left(Ee^{i\lambda X_j}\right)^n \\ &= \left(e^{i\lambda h}\frac{1}{2} + e^{-i\lambda h}\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (\cos(\lambda h))^n \\ &= (\cos(\lambda h))^{\frac{t}{\delta}} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

gde smo iskoristili činjenicu da su slučajne veličine X_j nezavisne, te je karakteristična funkcija zbira nezavisnih slučajnih veličina jednaka proizvodu karakterističnih funkcija tih slučajnih veličina.

[10] Karakteristična funkcija slučajne promenljive X, u oznaci $\varphi_X(t)$, definiše se kao $\varphi_X(t) = Ee^{itX}$

Za fiksirane vrednosti λ i t, limes 2.1.1 ne postoji kada δ i h nezavisno teže nuli. Stoga, da bi ovaj limes postojao potrebno je nametnuti nekakvu vezu između δ i h.

Neka je $u = (\cos(\lambda h))^{\frac{1}{\delta}}$, tj. $\ln u = \frac{1}{\delta} \ln \cos(\lambda h)$. Za malu vrednost h važiće

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2.$$

Imajući u vidu da je $\ln(1+x) \approx x$, za malo x, dobija se procena

$$\ln \cos(\lambda h) \approx \ln\left(1 - \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\right) \approx -\frac{1}{2}\lambda^2 h^2.$$

Stoga, za male vrednosti δ i h važi $\ln u \approx -\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2$, odakle sledi

$$u \approx e^{-\frac{1}{2\delta}\lambda^2 h^2}.$$

Na osnovu jednakosti 2.1.2,

$$Ee^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} \approx e^{\left[-\frac{1}{2\delta}t\lambda^2 h^2\right]}. \tag{2.1.3}$$

Posebno, ako važi $h^2 = \delta$, onda važi

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} Ee^{i\lambda Y_{\delta,h}(t)} = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ovim smo dokazali teoremu koja sledi i koja govori o **graničnom procesu slučajnog lutanja** $Y_{\delta,h}$ kada $\delta, h \longrightarrow 0$, u slučaju kada je $h^2 = \delta$.

Teorema 2.1. *Neka je $Y_{\delta,h}(t)$ slučajno lutanje koje počinje u 0 sa jednako verovatnim skokovima h i $-h$ u trenucima $\delta, 2\delta, \ldots$. Pod pretpostavkom da je $h^2 = \delta$, za svako $t \geq 0$, limes*

$$B(t) = \lim_{\delta \longrightarrow 0} Y_{\delta,h}(t)$$

postoji u raspodeli. Sa $B(t)$ je označen stohastički proces i važi da je

$$Ee^{i\lambda B(t)} = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Na osnovu Teoreme 2.1, može se očekivati da **stohastički proces** označen sa $B(t)$ ima sledeća svojstva:
1) Apsolutna vrednost nagiba slučajnog lutanja $Y_{\delta,h}$ u svakom koraku je $\frac{h}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ i teži ka beskonačnosti kada $\delta \longrightarrow 0$. Ovim se pokazuje da nijedna putanja kretanja $B(t)$ nije diferencijabilna nigde. Ako je $\delta = \mid t - s \mid$, onda važi

$$\mid B(t) - B(s) \mid \approx \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mid t - s \mid = \mid t - s \mid^{\frac{1}{2}}.$$

2) Skoro sve putanje kretanja $B(t)$ su neprekidne.
3) Za svako t, $B(t)$ je Gausova slučajna veličina sa očekivanjem 0 i disperzijom 1. Ovo svojstvo se dobija kao posledica Teoreme 2.1.
4) Stohastički proces $B(t)$ ima nezavisne priraštaje. Naime, za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ slučajne promenljive

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

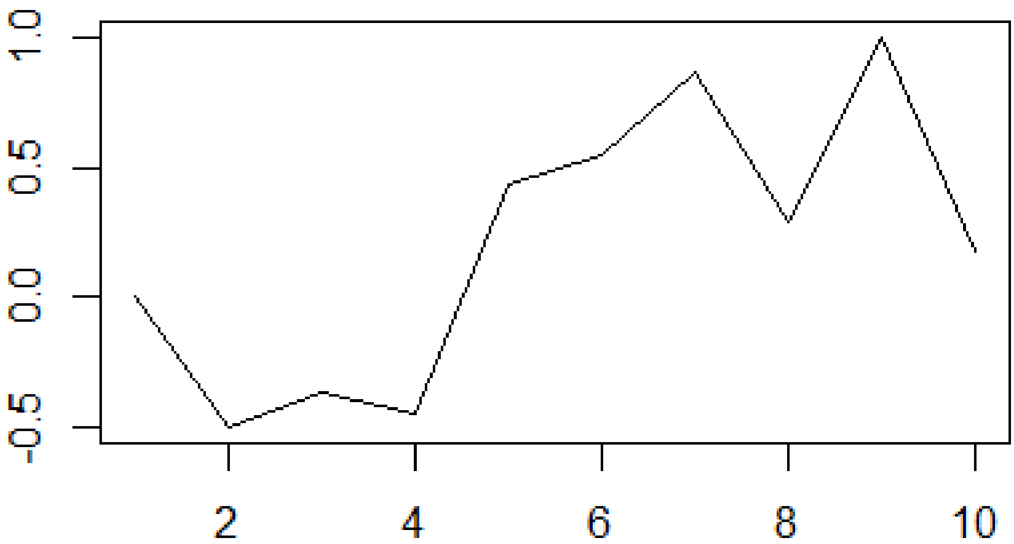
su nezavisne.

Svojstva 2), 3), 4) određuju osnovni stohastički proces koji se zove **Braunovo kretanje**.

2.2 Primer slučajnog lutanja

Slučajno lutanje može da se simulira u programu R. Prikazaćemo kod za simulaciju kao i grafički prikaz slučajnog lutanja.

```
>x0=0
>T=10
>set.seed(100)
>x=c(x0,rnorm(T-1))
>y=cumsum(x)
>x
[1] 0.00000000 -0.50219235
[3] 0.88678481 0.11697127
[5] 0.13153117 -0.07891709
[7] 0.31863009 -0.58179068
[9] 0.71453271 -0.82525943
>y
[1] 0.0000000 -0.5021924 -0.3706612
[4] -0.4495783 0.4372065 0.5541778
[7] 0.8728079 0.2910172 1.0055499
[10] 0.1802905
>par(mar=rep(2,4))
>plot(y,type="l")
```



Slika 1. Slučajno lutanje

3 Braunovo kretanje

Braunovo[11] kretanje ili Vinerov[12] proces zauzima najznačajnije mesto u teoriji slučajnih procesa.

Botaničar Robert Braun prvi je 1828. godine opisao proces koji danas nosi njegovo ime. On je napravio model za kretanje malih čestica potopljenih u tečnost ili gas. Primetio je da se one kreću haotično po cik-cak putanjama. Albert Ajnštajn je ovaj fenomen objasnio kao rezultat sudaranja tih čestica sa molekulima sredine koja ih okružuje. Devedeset godina kasnije, 1918. godine američki matematičar Norbert Viner je dao matematičku definiciju i osobine procesa Braunovog kretanja, te se iz tog razloga ovaj proces naziva i Vinerovim procesom.

Za pisanje ovog poglavlja, korišćene su knjiga [1] i skripta [4].

3.1 Definicija i osobine Braunovog kretanja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. **Stohastički proces** je merljiva funkcija $X(t, \omega)$ definisana na prostoru $[0, \infty) \times \Omega$. Važi:
a) za svako t, $X(t, \cdot)$ je slučajna promenljiva,
b) za svako ω, $X(\cdot, \omega)$ je merljiva funkcija (naziva se putanja).

Definicija 3.1. *Stohastički proces $B(t, \omega)$ naziva se Braunovo kretanje, ako zadovoljava sledeće uslove:*
1) $P\{\omega; B(0, \omega) = 0\} = 1$.
2) Za svako s, takvo da je $0 < s < t$, slučajna promenljiva $B(t) - B(s)$ je normalno raspodeljena sa očekivanjem 0 i disperzijom $t-s$. Drugim rečima, za bilo koje $a < b$,

$$P\{a \leq B(t) - B(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx.$$

3) $B(t, \omega)$ ima nezavisne priraštaje. Za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, slučajne promeljive

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}),$$

su nezavisne.
4) Skoro sve putanje Braunovog kretanja $B(t, \omega)$ su neprekidne funkcije, ili $P\{\omega; B(\cdot, \omega)$ je neprekidno$\} = 1$.

Braunovo kretanje se ponekad definiše kao stohastički proces $B(t, \omega)$ koji zadovoljava uslove 1), 2) i 3) u Definiciji 3.1. Za takav stohastički proces važi da je $B(t, \omega)$ neprekidna funkcija po t, tj. postoji Ω_0 takav da je $P(\Omega_0) = 1$ i za svako $\omega \in \Omega$, $B(t, \omega)$ je neprekidna funkcija po t.

Braunovo kretanje $B(t)$ u Definiciji 3.1 počinje u 0. Ukoliko Braunovo kretanje ne počinje u 0, to se posebno napomene.

[11] Robert Brown (1773–1858), škotski botaničar
[12] Norbert Wiener (1894–1964), američki matematičar

Teorema 3.1. *Za svako $t > 0$, $B(t)$ je normalno raspodeljeno sa očekivanjem* 0 *i disperzijom t. Za svako $s, t \geq 0$, važi $E[B(s)B(t)] = \min\{s, t\}$.*

Dokaz. Na osnovu uslova 1) iz Definicije 3.1, $B(t) = B(t) - B(0)$, te prvo tvrđenje teoreme sledi iz uslova 2).
Kako bismo pokazali drugo tvrđenje teoreme, pretpostavićemo da je $s < t$. Na osnovu uslova 2) i 3) iz definicije Braunovog kretanja važi,

$$E[B(s)B(t)] = E[B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2] = 0 + s = s.$$

Isti postupak ponavljamo za $t < s$. Time dolazimo do zaključka da je traženo očekivanje jednako $\min\{s, t\}$. □

Teorema 3.2. *Za fiksirano $t_0 \geq 0$, stohastički proces $\tilde{B}(t) = B(t + t_0) - B(t_0)$ je takođe Braunovo kretanje.*

Dokaz. Stohastički proces $\tilde{B}(t)$ zadovoljava uslove 1) i 4) iz Definicije 3.1.
Za svako $s < t$,

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = B(t+t_0) - B(t_0) - (B(s + t_0) - B(t_0)) = B(t+t_0) - B(s+t_0). \quad (3.1.1)$$

Na osnovu uslova 2) iz Definicije 3.1, zaključujemo da je slučajna veličina $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)$ normalno raspodeljena sa očekivanjem 0 i disperzijom $(t+t_0) - (s+t_0) = t - s$. Stoga, $\tilde{B}(t)$ zadovoljava uslov 2).

Kako bi se proverio uslov 3) za $\tilde{B}(t)$, potrebno je pretpostaviti da je $t_0 > 0$. Tada za $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, važi $0 < t_0 \leq t_1 + t_0 < t_2 + t_0 < \cdots < t_n + t_0$. Na osnovu uslova 3) za $B(t)$, slučajne veličine $B(t_k + t_0) - B(t_{k+1} + t_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, nezavisne su. Na osnovu jednakosti 3.1.1, slučajne promenljive $\tilde{B}(t_k) - \tilde{B}(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, su nezavisne i time smo pokazali da $\tilde{B}(t)$ zadovoljava i uslov 3) iz definicije Braunovog kretanja.

□

Drugim rečima, Teorema 3.2 govori o tome da Braunovo kretanje u svakom trenutku počinje kao novo Braunovo kretanje.

Teorema 3.3. *Za svaki realan broj $\lambda > 0$, stohastički proces $\tilde{B}(t) = B(\lambda t)/\sqrt{\lambda}$ je takođe Braunovo kretanje.*

Dokaz. Stohastički proces $\tilde{B}(t)$ zadovoljava uslove 1), 3) i 4) iz definicije Braunovog kretanja.
Da bismo proverili uslov 2), najpre primetimo da za svako $s < t$

$$\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(B(\lambda t) - B(\lambda s)),$$

što pokazuje da je $\tilde{B}(t) - \tilde{B}(s)$ normalno raspodeljeno sa očekivanjem 0 i disperzijom $\frac{1}{\lambda}(\lambda t - \lambda s) = t - s$. Stoga, $\tilde{B}(t)$ zadovoljava i uslov 2) iz Definicije 3.1. □

Na osnovu Teoreme 3.3, za svako $\lambda > 0$ i $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ slučajni vektori

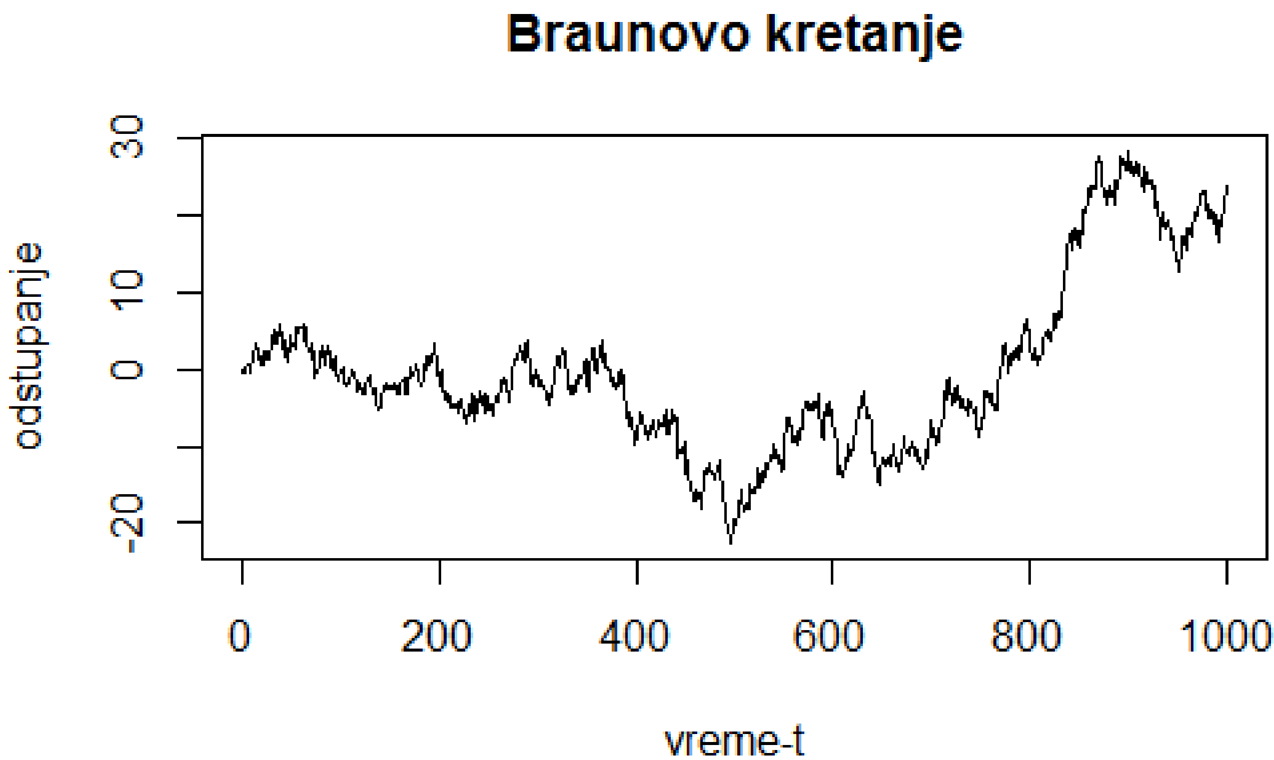
$$(B(\lambda t_1), B(\lambda t_2), \ldots, B(\lambda t_n)), \left(\sqrt{\lambda}B(t_1), \sqrt{\lambda}B(t_2), \ldots, \sqrt{\lambda}B(t_n)\right)$$

imaju iste raspodele.

3.2 Primer Braunovog kretanja

Kako bismo približili pojam Braunovog kretanja, pokazaćemo kako se ono simulira u `R`-u i kako izgleda njegov grafik.

```
N=1000
od = rnorm(N, 0, 1)
od = cumsum(od)
plot(od, type= "l",main= "Braunovo kretanje", xlab="vreme-t", ylab="odstupanje"
)
```



Slika 2. Braunovo kretanje

3.3 Vinerov integral

U prvom poglavlju odgovorili smo na pitanje kako se definiše integral $\int_a^b f(t)dg(t)$ ako funkcije f i g zadovoljavaju određene uslove. Ako ti uslovi nisu ispunjeni, taj integral ne možemo posmatrati kao Riman-Stiltjesov integral.

Sada razmatramo integral

$$\int_a^b f(t)dB(t,\omega), \tag{3.3.1}$$

gde je f **deterministička funkcija** (funkcija koja ne zavisi od ω) i $B(t,\omega)$ **Braunovo kretanje**.

Ako je f monotono rastuća i neprekidna, a g neprekidna funkcija, važi

$$\int_a^b f(t)dg(t) \equiv f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b g(t)df(t) \tag{3.3.2}$$

gde je integral sa desne strane definisan kao u jednakosti 1.3.1 samo što su f i g zamenili mesta.

Pretpostavimo da za svako $\omega \in \Omega$ želimo da iskoristimo jednakost 3.3.2, kako bismo definisali integral 3.3.1 u Riman-Stiltjesovom smislu

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega) = f(t)B(t,\omega)|_a^b - (RS)\int_a^b B(t,\omega)df(t). \tag{3.3.3}$$

U tom slučaju, klasa funkcija $f(t)$ za koje je definisan integral $(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$ za svako $\omega \in \Omega$ je ograničena, odnosno $f(t)$ mora biti neprekidna funkcija ograničene varijacije. Stoga, za neprekidnu funkciju neograničene varijacije kao što je $f(t) = t\sin\frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$ i $f(0) = 0$, ne može se koristiti jednačina 3.3.3 za definisanje integrala $\int_0^1 f(t)dB(t,\omega)$ za svako $\omega \in \Omega$.

Dakle, potrebna nam je drugačija ideja kako bismo definisali integral $\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$ za širu klasu funkcija $f(t)$. Ovaj novi integral, koji se naziva **Vinerov integral** funkcije f, definisan je za sve funkcije $f \in L^2[a,b]$. Ovde se sa $L^2[a,b]$ označava **Hilbertov prostor** realno vrednosnih funkcija, čiji je kvadrat modula integrabilna funkcija na $[a,b]$. Na primer, integral $\int_0^1 t\sin\frac{1}{t}dB(t)$ je Vinerov integral.

Definisanje Vinerovog integrala izvešćemo u dva koraka:

Korak 1.

Pretpostavimo da je f prosta funkcija data u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[t_{i-1},t_i)},$$

gde su a_i konstante, i $t_0 = a$, $t_n = b$. U ovom slučaju, definišemo

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(B(t_i) - B(t_{i-1})). \tag{3.3.4}$$

Očigledno, $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i proste funkcije f i g.

Lema 3.1. *Za prostu funkciju f, slučajna promenljiva $I(f)$ je Gausova promenljiva sa očekivanjem 0 i disperzijom*

$$E(I(f)^2) = \int_a^b f(t)^2 dt. \tag{3.3.5}$$

Dokaz. Poznato je da je linearna kombinacija Gausovih slučajnih promenljivih takođe Gausova slučajna promenljiva. Stoga, na osnovu uslova 2) i 3) iz definicije Braunovog kretanja (Definicija 3.1), slučajna promenljiva $I(f)$ koja je definisana jednakošću 3.3.4 je Gausova promenljiva sa očekivanjem 0.

Posmatrajmo sad očekivanje kvadrata slučajne promenljive $I(f)$

$$E(I(f)^2) = E\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)\left(B(t_j) - B(t_{j-1})\right).$$

Na osnovu uslova 2) i 3) iz definicije Braunovog kretanja,

$$E(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 = t_i - t_{i-1},$$

i za $i \neq j$

$$E(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1})) = 0.$$

Na osnovu ovih jednakosti sledi,

$$E(I(f)^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

$\square$

Korak 2.

Sa $L^2(\Omega)$ označavamo **Hilbertov prostor** koji obuhvata sve realno vrednosne slučajne promenljive iz Ω čiji je kvadrat integrabilan, i u kojem je definisan unutrašnji proizvod $\langle X, Y\rangle = E(XY)$.

Neka je $f \in L^2[a,b]$. Biramo niz prostih funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ takav da važi $f_n \longrightarrow f$ u $L^2[a,b]$. Na osnovu Leme 3.1, niz $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je Košijev niz u $L^2[a,b]$, te stoga on konvergira u $L^2[a,b]$. Definišemo $I(f)$ kao limes niza $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$I(f) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(f_n), \qquad f \in L^2(\Omega). \tag{3.3.6}$$

Da bi $I(f)$ bio dobro definisan, mora se pokazati da je limes niza $\{I(f_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nezavisan od izbora niza $\{f_n\}$. Pretpostavimo da je $\{g_m\}$ niz funkcija sa istim osobinama kao niz $\{f_n\}$. Tada na osnovu linearnosti slučajne promenljive $I(f)$ i jednakosti 3.3.5, važi

$$\begin{aligned}
E(|I(f_n) - I(g_m)|^2) &= E(|I(f_n - g_m)|^2) \\
&= \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2\, dt \\
&\leq 2\int_a^b \left([f_n(t) - f(t)]^2 + [g_m(t) - f(t)]^2\right) dt \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kada $m, n \longrightarrow \infty$.
Za ovu procenu je korišćeno da je $f_n - g_m = [f_n(t) - f(t)] - [g_m(t) - f(t)]$, kao i nejednakost $(x-y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. Na osnovu prethodnog, dobijamo da je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{m \longrightarrow \infty} I(g_m)$$

u $L^2(\Omega)$. Ovim smo pokazali da je $I(f)$ dobro definisano.

Definicija 3.2. *Neka je $f \in L^2[a,b]$. $I(f)$ koji je definisan kao*

$$I(f) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I(f_n)$$

naziva se Vinerov integral funkcije f.

Vinerov integral $I(f)$ funkcije f možemo označiti sa

$$I(f)(\omega) = \left(\int_a^b f(t) dB(t) \right)(\omega), \omega \in \Omega, \text{ skoro sigurno.}$$

Radi lakšeg zapisa, **Vinerov integral** ćemo zapisivati kao $\int_a^b f(t) dB(t)$.

Teorema 3.4. *Za svako $f \in L^2[a,b]$, Vinerov integral $\int_a^b f(t) dB(t)$ je Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem 0 i disperzijom $\|f\|^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.1, tvrđenje teoreme je tačno ako je f prosta funkcija. Generalno, ako je $f \in L^2[a,b]$, tvrđenje važi na osnovu sledeće činjenice:

Ako je X_n Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem μ_n i disperzijom σ_n^2 i X_n konvergira ka X u $L^2(\Omega)$, onda je X Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem $\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu_n$ i disperzijom $\sigma^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma_n^2$.

□

Posledica 3.1. *Ako $f, g \in L^2[a,b]$, tada*

$$E(I(f)I(g)) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

Posebno, ako su f i g ortogonalne, onda su Gausove slučajne promenljive $I(f)$ i $I(g)$ nezavisne.

Dokaz. Na osnovu linearnosti promeljive I i Teoreme 3.4, imamo

$$\begin{aligned} E\left[(I(f) + I(g))^2\right] &= E\left[(I(f+g))^2\right] \\ &= \int_a^b (f(t) + g(t))^2 \, dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2\int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g(t)^2 dt. \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

Sa druge strane, Teorema 3.4 takođe obezbeđuje

$$\begin{aligned} E[(I(f)+I(g))^2] &= E\left[I(f)^2+2I(f)I(g)+I(g)^2\right] \\ &= \int_a^b f(t)^2dt+2E[I(f)I(g)]+\int_a^b g(t)^2dt. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Polazno tvrđenje sledi iz jednakosti 3.3.7 i 3.3.8. □

Primer 3.1. *Vinerov integral $\int_0^1 sdB(s)$ je Gausova slučajna promenljiva sa očekivanjem 0 i disperzijom $\int_0^1 s^2ds = \frac{1}{3}$.*

Teorema 3.5. *Neka je f neprekidna funkcija ograničene varijacije. Tada, za skoro svako $\omega \in \Omega$,*

$$\left(\int_a^b f(t)dB(t)\right)(\omega) = (RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega),$$

gde je leva strana jednakosti Vinerov integral funkcije f, a desna strana jednakosti je Riman-Stiltjesov integral funkcije f koji je definisan jednakošću 3.3.3.

Dokaz. Za svaku podelu $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ segmenta $[a,b]$, definišemo prostu funkciju f_n kao

$$f_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})1_{[t_{i-1},t_i)}.$$

Primetimo da f_n konvergira ka f u $L^2[a,b]$ kada $n \longrightarrow \infty$, tj. kada $\|\Delta_n\| \longrightarrow 0$. Stoga, na osnovu definicije Vinerovog integrala koje je predstavljena jednakošću 3.3.6 važi

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1})), \tag{3.3.9}$$

u $L^2[a,b]$.

Sa druge strane, na osnovu jednačine 3.3.3, sledeći limes važi za sve $\omega \in \Omega_O$ za neko Ω_O za koje važi $P(\Omega_O) = 1$,

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t,\omega) = f(b)B(b,\omega)-f(a)B(a,\omega)-\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^n B(t_i,\omega)(f(t_i)-f(t_{i-1}))$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(f(b)B(b,\omega)-f(a)B(a,\omega)-\sum_{i=1}^n B(t_i,\omega)(f(t_i)-f(t_{i-1}))\right).$$

Nakon grupisanja sabiraka, dobija se jednakost za svako ω iz Ω_O:

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1})). \tag{3.3.10}$$

Kako $L^2(\Omega)$ konvergencija povlači konvergenciju podniza skoro sigurno, možemo izabrati takav podniz f_n za koji se dobija tvrđenje teoreme na osnovu jednakosti 3.3.9 i 3.3.10. □

3.4 Martingali

Neka je $f \in L^2[a, b]$. Posmatrajmo **stohastički proces**

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), a \leq t \leq b. \tag{3.4.1}$$

U ovoj sekciji pokazaćemo da je stohastički proces M_t **martingal**. Kako bi se uvela definicija martingala, potrebno je definisati pojam **filtera**.

Definicija 3.3. *Neka je T interval u $\mathbb{R}$ ili skup pozitivnih brojeva. Filter na T je rastuća familija σ-polja $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$. Kaže se da je stohastički proces X_t, $t \in T$ prilagođen filteru $\{\mathcal{F}_t | t \in T\}$ za svako $t \in T$, ako je slučajna promenljiva X_t $\mathcal{F}_t$-merljiva.*

σ-polje $\mathcal{F}$ je **kompletno** ako $A \in \mathcal{F}$ i $P(A) = 0$, što povlači to da $B \in \mathcal{F}$ za svako B podskup skupa A. U ovom radu, pretpostavljaćemo da su sva σ-polja $\mathcal{F}_t$ kompletna.

Definicija 3.4. *Neka je X_t stohastički proces koji je prilagođen filteru $\mathcal{F}_t$ i $E|X_t| < \infty$ za svako $t \in T$. Tada se kaže da je X_t martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t\}$, ako za svako $s \leq t$ u skupu T skoro sigurno važi*

$$E\{X_t | \mathcal{F}_s\} = X_s.$$

Kada se ne naglasi drugačije, filter $\{\mathcal{F}_t\}$ se posmatra kao $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; s \leq t\}$.

Koncept martingala je uopštenje niza parcijalnih suma koje proizilaze iz niza nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih veličina $\{X_n\}$ sa očekivanjem 0. Neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Tada je niz $\{S_n\}$ **martingal**.

Neka je $B(t)$ Braunovo kretanje, i

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s; s \leq t\}.$$

Tada, za svako $s \leq t$ važi

$$E\{B(t) | \mathcal{F}_s\} = E\{B(t) - B(s) | \mathcal{F}_s\} + E\{B(s) | \mathcal{F}_s\}.$$

Kako je $B(t) - B(s)$ nezavisno od $\mathcal{F}_s$, na osnovu osobine matematičkog očekivanja važi jednakost

$$E\{B(t) - B(s) | \mathcal{F}_s\} = E\{B(t) - B(s)\}.$$

U sekciji **Definicija i osobine Braunovog kretanja** je utvrđeno da je očekivanje Braunovog kretanja $B(t)$ jednako 0, tj. $EB(t) = 0$. Stoga,

$$E\{B(t) - B(s) | \mathcal{F}_s\} = 0.$$

Sa druge strane, $B(s)$ je $\mathcal{F}_s$-merljivo, te je

$$E\{B(s) | \mathcal{F}_s\} = B(s).$$

Kako je na osnovu ovih dobijenih jednakosti polazno očekivanje jednako $B(s)$, tj.

$$E\{B(t)|\mathcal{F}_s\} = B(s)$$

za svako $s \leq t$. Ovim je pokazano da je **Braunovo kretanje** $B(t)$ **martingal**.

Teorema 3.6. *Neka je $f \in L^2[a,b]$. Tada je stohastički proces*

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b,$$

martingal u odnosu na filter $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; s \leq t\}$.

Dokaz. Prvo, potrebno je da dokažemo da je $E|M_t| < \infty$ za svako $t \in [a,b]$ kako bismo izračunali uslovno očekivanje za M_t. Primenom Teoreme 3.4 dobija se

$$E(|M_t|^2) = \int_a^t |f(s)|^2 ds \leq \int_a^b |f(s)|^2 ds.$$

Stoga, $E|M_t| \leq \{E(|M_t|^2)\}^{\frac{1}{2}} < \infty$. Sledeće što je na redu da dokažemo jeste da važi $E\{M_t|\mathcal{F}_s\} = M_s$ za svako $s \leq t$. Važi

$$M_t = M_s + \int_s^t f(u)dB(u)$$

i M_s je $\mathcal{F}_s$-merljivo. Stoga,

$$E\{M_t|\mathcal{F}_s\} = M_s + E\left\{\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right\}.$$

Dovoljno je da se pokaže da za svako $s \leq t$,

$$E\left\{\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right\} = 0. \tag{3.4.2}$$

Za početak, pretpostavimo da je f prosta funkcija

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[t_{i-1},t_i)},$$

gde je $t_0 = s$ i $t_n = t$. U ovom slučaju, imamo

$$\int_s^t f(u)dB(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Znamo da su $B(t_i)-B(t_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$ nezavisne od σ-polja $\mathcal{F}_s$. Stoga, $E\{B(t_i)-B(t_{i-1})|F_s\} = 0$ za svako i.
Sada, pretpostavimo da je $f \in L^2[a,b]$. Izabraćemo niz prostih funkcija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ koji konvergira ka f u $L^2[a,b]$.

Koristićemo Jensenovu nejednakost koja glasi: Neka je $X \in L^1(\Omega)$. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija na $\mathbb{R}$ i $f(X) \in L^1(\Omega)$. Tada važi

$$f\left(E[X|\mathcal{F}]\right) \leq E[f\left(X\right)|\mathcal{F}].$$

Nejednakost

$$|E\{X|\mathcal{F}\}|^2 \leq E\{X^2|\mathcal{F}\}$$

proizilazi na osnovu Jensenove nejednakosti za $f(x) = x^2$.
Dalje sledi

$$\left|E\left\{\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)|\mathcal{F}_s\right\}\right|^2$$
$$\leq E\left\{\left(\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)\right)^2 |\mathcal{F}_s\right\}.$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $E(E\{X|\mathcal{F}\}) = E(X)$ (ova jednakost sledi iz činjenica da je uslovno očekivanje $E\{X|\mathcal{F}\}$ jednako očekivanju od X) i Teoremu 3.4 dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} E\left|E\left\{\int_s^t (f_n(u) - f(u))dB(u)|\mathcal{F}_s\right\}\right|^2 &\leq \int_s^t (f_n(u) - f(u))^2 du \\ &\leq \int_a^b (f_n(u) - f(u))^2 du \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kada $n \longrightarrow \infty$. Stoga, niz slučajnih veličina $E\{\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\}$ konvergira ka $E\{\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\}$ u $L^2(\Omega)$. Primetimo da konvergencija u $L^2(\Omega)$ povlači konvergenciju u verovatnoći, što dalje povlači egzistenciju podniza koji konvergira skoro sigurno. Stoga, biranjem podniza ako je potrebno, možemo da zaključimo sa verovatnoćom 1,

$$\lim_{n \longleftrightarrow \infty} E\left\{\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right\} = E\left\{\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right\}. \tag{3.4.3}$$

Pokazali smo da jednačina 3.4.2 važi za proste funkcije, te sledi da je

$$E\{\int_s^t f_n(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\} = 0.$$

Stoga, na osnovu jednakosti 3.4.3, važi

$$E\left\{\int_s^t f(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right\} = 0,$$

što znači da jednakost 3.4.2 važi za svaku funkciju $f \in L^2[a,b]$. □

4 Itoov stohastički integral

Neka je $B(t, \omega)$ Braunovo kretanje. U ovom poglavlju bavićemo se **prvim stohastičkim integralom** $\int_a^b f(t,\omega)dB(t,\omega)$ koji je definisao Ito u svom radu 1944.godine. **Integrand** $f(t,\omega)$ je **stohastički proces** u odnosu na **filter** $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s); s \leq t\}$ i $\int_a^b E\left(|f(t)|^2\right) < \infty$.
Kada je integrand deterministička funkcija $f(t)$, **Itoov integral** $\int_a^b f(t)dB(t,\omega)$ svodi se na **Vinerov integral** koji smo definisali u poglavlju 3.

Za pisanje ovog poglavlja korišćene su knjige [1], [2], [3] i [6].

4.1 Uvod u stohastičke integrale

Neka je $B(t)$ Braunovo kretanje, i pretpostavimo da je $f(t)$ deterministička funkcija koja pripada prostoru $L^2[a,b]$. U sekciji **Martingali**, pokazano je da je stohastički proces

$$M_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b$$

martingal.

Kada se u istoj rečenici nađu pojam **martingala** i pojam **stohastičkog integrala**, prirodno se nameće pitanje kako se može definisati **stohastički integral**

$$\int_a^b f(t,\omega)dB(t,\omega)$$

za stohastički proces $f(t,\omega)$ tako da stohastički proces

$$M_t = \int_a^t f(s,\omega)dB(s,\omega), \qquad a \leq t \leq b$$

jeste martingal.

Odgovor na ovo pitanje ne nameće se sam po sebi, te stoga je potrebno vratiti se na početke priče o integralima. Posmatra se primer gde je $f(t) = B(t)$, tako da integral, koji se razmatra, sada ima oblik $\int_a^b B(t)dB(t)$. Primenom **Rimanovih suma** 1.4.1 i 1.4.2 na ovaj integral za interval $[t_{i-1}, t_i]$, dobijaju se

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})), \tag{4.1.1}$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} B(t_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})). \tag{4.1.2}$$

gde su izabrane tačke za L_n i R_n krajnja leva tačka t_{i-1} i krajnja desna tačka t_i segmenta $[t_{i-1}, t_i]$. Kao u jednakosti 1.4.4, važi

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^{n} (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2. \tag{4.1.3}$$

Ako limes $\lim_{n\longrightarrow\infty}(R_n - L_n)$ postoji, onda je on **kvadratna varijacija Braunovog kretanja** $B(t)$.

Teorema 4.1. *Neka je* $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ *podela konačnog intervala* $[a, b]$. *Tada važi*

$$\sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 \longrightarrow b - a \tag{4.1.4}$$

u prostoru $L^2(\Omega)$ *kada* $||\Delta_n|| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \longrightarrow 0$.

Dokaz. Primetimo da je $b - a = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})$, i neka je

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{n}\left[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{4.1.5}$$

gde je $X_i = (B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1})$. Dalje važi,

$$\Phi_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j. \tag{4.1.6}$$

Za $i \neq j$, očekivanje proizvoda slučajnih veličina X_i i X_j je jednako nuli zbog toga što Braunovo kretanje $B(t)$ ima nezavisne priraštaje i još važi $E(B(t) - B(s))^2 = |t - s|$. Sa druge strane, $E\left[(B(t) - B(s))^4\right] = 3(t - s)^2$ i za $i = j$ u jednakosti 4.1.6 dobija se

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= E\{(B(t_i) - B(t_{i-1}))^4 - 2(t_i - t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2\} \\ &= 3(t_i - t_{i-1})^2 - 2(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 2(t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Dalje iz jednakosti 4.1.6,

$$\begin{aligned} E\Phi_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} 2(t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2||\Delta_n|| \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \\ &= 2(b - a)||\Delta_n|| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kada $||\Delta_n|| \longrightarrow 0$.

Ovim smo pokazali da Φ_n konvergira ka 0 u $L^2(\Omega)$. Stoga iz jednakosti 4.1.5 sledi da važi jednakost 4.1.4. □

Sada primenjujemo Teoremu 4.1 na jednakost 4.1.3 da bismo zaključili da važi

$$\lim_{||\Delta_n||\longrightarrow 0}(R_n - L_n) = b - a$$

u $L^2(\Omega)$.
Na osnovu toga možemo zaključiti da $\lim\limits_{\|\Delta_n\|\longrightarrow 0} R_n \neq \lim\limits_{\|\Delta_n\|\longrightarrow 0} L_n$.
Primetimo da važi

$$\begin{aligned} R_n + L_n &= \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) + B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(B(t_i)^2 - B(t_{i-1})^2\right) \\ &= B(t_n)^2 - B(t_0)^2 \\ &= B(b)^2 - B(a)^2. \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Očigledno, sledi iz jednačina 4.1.3 i 4.1.8 da

$$R_n = \frac{1}{2}\left(B(b)^2 - B(a)^2 + \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\right),$$

$$L_n = \frac{1}{2}\left(B(b)^2 - B(a)^2 - \sum_{i=1}^{n}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2\right).$$

Na osnovu Teoreme 4.1 može se izračunati:

$$\lim_{\|\Delta_n\|\longrightarrow 0} R_n = \frac{1}{2}\left(B(b)^2 - B(a)^2 + (b-a)\right), \tag{4.1.9}$$

$$\lim_{\|\Delta_n\|\longrightarrow 0} L_n = \frac{1}{2}\left(B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)\right). \tag{4.1.10}$$

Pitanje je koje od ove dve jednakosti (4.1.10 i 4.1.9) treba uzeti kao jednakost koja odgovara integralu $\int_a^b B(t)dB(t)$. Zapravo, koju kranju tačku, levu ili desnu, treba uzeti za procenu integranda.

U jednakostima 4.1.9 i 4.1.10 uvrstimo da je $a = 0$ i $b = t$, kako bismo definisali **stohastičke procese** $R(t)$ i $L(t)$:

$$R(t) = \frac{1}{2}(B(t)^2 + t), \qquad L(t) = \frac{1}{2}(B(t)^2 - t).$$

Primetimo da je očekivanje procesa $R(t)$ jednako t. Možemo zaključiti da $R(t)$ **nije martingal**, jer očekivanje od martingala mora biti konstanta. Sa druge strane, $L(t)$ **jeste martingal**.
Neka je $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s); s \leq t\}$. Tada, za svako $s \leq t$,

$$E(L(t)|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{2}E(B(t)^2|\mathcal{F}_s) - \frac{1}{2}t. \tag{4.1.11}$$

Uslovno očekivanje ima sledeće osobine:
1) Ako su X i $\mathcal{F}$ nezavisne, tada je $E(X|\mathcal{F}) = EX$.
2) Ako je X $\mathcal{F}$-merljivo, tada je $E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$, tj. $E(X|\mathcal{F}) = X$.

Kako su $B(t) - B(s)$ i $B(u)$ nezavisne za svako $u \le s$, sledi da su $B(t) - B(s)$ i $\mathcal{F}_s$ nezavisne. Odatle,

$$\begin{aligned} E(B(t)^2|\mathcal{F}_s) &= E\left((B(t) - B(s) + B(s))^2|\mathcal{F}_s\right) \\ &= E\left((B(t) - B(s))^2 + 2B(s)(B(t) - B(s)) + B(s)^2|\mathcal{F}_s\right) \\ &= E(B(t) - B(s))^2 + 2B(s)E(B(t) - B(s)) + B(s)^2 \\ &= t - s + B(s)^2 \end{aligned}$$

Primenom jednakosti $E(B(t)^2|\mathcal{F}_s) = t - s + B(s)^2$ u jednakost 4.1.11 dobijamo

$$E(L(t)|\mathcal{F}_s) = L(s), \quad \forall s \le t.$$

Ovim smo pokazali da je $L(t)$ martingal. Možemo zaključiti da ako želimo da sačuvamo **osobinu martingala** pri definisanju **stohastičkog integrala** $\int_a^t f(s)dB(s)$, potrebno je da uzmemo **krajnju levu tačku** svakog podintervala kao tačke procene.

Posmatrajmo sada primer

$$X(t) = \int_0^t B(1)dB(s), \quad 0 \le t \le 1.$$

Intuitivno, očekujemo da je $X(t) = B(1)B(t)$. Ali, stohastički proces $X(t)$ nije martingal jer $E[B(1)B(t)] = \min\{1, t\} = t$ nije konstanta. Stoga integral $\int_0^t B(1)dB(s)$ nije ono što smo očekivali. Razlog iz kog je ovaj integral nedefinisan, ako želimo da sačuvamo svojstvo martingala, jeste taj što integrand $B(1)$ nije prilagođen filteru $\sigma\{B(s); s \le t\}, 0 \le t \le 1$.

Bitna napomena po pitanju integranda jeste da da bi **stohastički integral** $\int_a^t f(s)dB(s)$ imao **svojstvo martingala**, potrebno je da **integrand** bude **prilagođen filteru** $\{\mathcal{F}_t\}$.

Generalno, dozvolićemo da $\{\mathcal{F}_t\}$ bude veći filter od onog koji je dat Braunovim kretanjem, $\{\mathcal{F}_t\} \supset \sigma\{B(s); s \le t\}$ sa svako t.

4.2 Itoov stohastički integral

U ovoj sekciji, posmatramo $B(t)$ kao **Braunovo kretanje** i **filter** $\{\mathcal{F}_t; a \le t \le b\}$, takve da zadovoljavaju sledeće uslove:

1) Za svako t, $B(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo;
2) Za svako $s \le t$, slučajna promenljiva $B(t) - B(s)$ je nezavisna od σ-polja $\mathcal{F}_s$.

Sa $L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ označava se **prostor svih stohastičkih procesa** $f(t, \omega)$, $a \le t \le b$, $\omega \in \Omega$ za koje važe uslovi:

1) $f(t, \omega)$ je prilagođeno filteru $\{\mathcal{F}_t\}$;
2) $\int_a^b E(|f(t)|^2)dt < \infty$.

U definisanju stohastičkog integrala

$$\int_a^b f(t)dB(t), \qquad f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega) \tag{4.2.1}$$

korišćena je originalna Itoova ideja. Kako bi se ova ideja lakše sprovela u delo, priča je podeljena na 3 koraka. **U koraku 1** definiše se stohastički integral za proste stohastičke procese u $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Zatim, **u koraku 2**, biće prikazan dokaz glavne leme o aproksimaciji. I najzad, **u koraku 3** se definiše stohastički integral za uopštene procese u $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

4.2.1 Korak 1

Neka je f prost stohastički proces u $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$, koji je definisan na sledeći način:

$$f(t,\omega) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(\omega) 1_{[t_{i-1},t_i)}(t),$$

gde je ξ_{i-1} $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-merljivo i još $E(\xi_{i-1}^2) < \infty$.

Lema 4.1. *Neka je*

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})). \tag{4.2.2}$$

Onda je $E(I(f)) = 0$ *i*

$$E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt. \tag{4.2.3}$$

Dokaz. Prvo dokazujemo da je očekivanje od $I(f)$ jednako nuli. Za svako $1 \leq i \leq n$ u jednakosti 4.2.2 važi:

$$\begin{aligned}
E\{\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))\} &= E\{E[\xi_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\
&= E\{\xi_{i-1} E[(B(t_i) - B(t_{i-1}))|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\
&= E\{\xi_{i-1} E(B(t_i) - B(t_{i-1}))\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

U dokazu je korišćeno svojstvo

$$E[B(t_i) - B(t_{i-1})|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = E(B(t_i) - B(t_{i-1})) = 0.$$

Kako bi se dokazalo drugo tvrđenje leme, potrebno je najpre videti čemu je jednako $|I(f)|^2$.

$$|I(f)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{i-1}\xi_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))$$

Za $i \neq j$ i za $i < j$

$$
\begin{aligned}
&E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))\} \\
&\qquad = E\{E[\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))(B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} \\
&\qquad = E\{\xi_{i-1}\xi_{j-1}(B(t_i) - B(t_{i-1}))E[(B(t_j) - B(t_{j-1}))|\mathcal{F}_{t_{j-1}}]\} = 0 \qquad (4.2.4)
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, za $i = j$

$$
\begin{aligned}
E\{\xi_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))\} &= E\{E[\xi_{i-1}^2(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]\} \\
&= E\{\xi_{i-1}^2 E[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2]\} \\
&= E\{\xi_{i-1}^2(t_i - t_{i-1})\} \\
&= (t_i - t_{i-1})E(\xi_{i-1}^2). \qquad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

Sa ova dva slučaja je pokriven dokaz drugog tvrđenja leme, tj. jednakost 4.2.3 sledi iz jednakosti 4.2.4 i 4.2.5. □

4.2.2 Korak 2

Lema 4.2. *Pretpostavimo da je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Tada postoji niz prostih stohastičkih procesa $\{f_n(t); n \geq 1\}$ u $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ takav da važi*

$$
\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0.
$$

Dokaz. Kako bi bio pregledniji, dokaz je podeljen na specijalne slučajeve i na opšti slučaj.

Slučaj 1: $E(f(t)f(s))$ je neprekidna funkcija po $(t,s) \in [a,b]^2$.

U ovom slučaju, neka je $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ podela segmenta $[a,b]$ i definišimo stohastički proces $f_n(t,\omega)$ kao

$$
f_n(t,\omega) = f(t_{i-1},\omega), \qquad t_{i-1} < t \leq t_i. \tag{4.2.6}
$$

Tada je $\{f_n(t,\omega)\}$ niz prilagođenih prostih stohastičkih procesa. Na osnovu neprekidnosti $E(f(t)f(s))$ na $[a,b]^2$

$$
\lim_{s \longrightarrow t} E\{|f(t) - f(s)|^2\} = 0, \tag{4.2.7}
$$

što dalje povlači da za svako $t \in [a,b]$ važi

$$
\lim_{n \longrightarrow \infty} E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} = 0. \tag{4.2.8}
$$

Radi dalje bolje procene, koristićemo nejednakost

$$
|\alpha - \beta|^2 \leq 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)
$$

i dolazimo do

$$|f(t) - f_n(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |f_n(t)|^2).$$

Stoga za svako $a \leq t \leq b$ važi,

$$\begin{aligned} E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} &\leq 2(E\{|f(t)|^2\} + E\{|f_n(t)|^2\}) \\ &\leq 4 \sup_{a \leq s \leq b} E\{|f(s)|^2\}, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Teorema 4.2. *(Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji)*
Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa merom, i neka je $f_n : X \longrightarrow C$, niz funkcija koji za svako $x \in X$ konvergira ka funkciji f. Ako postoji integrabilna (na X) funkcija g, takva da za sve $n \in N$ i sve $x \in X$ važi $|f_n(x)| \leq g(x)$, tada važi

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Dokaz ove teoreme se može naći u knjizi [6].

Na osnovu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji može se zaključiti

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\} dt = 0.$$

Slučaj 2: f je ograničen stohastički proces.

U ovom slučaju, definišemo stohastički proces g_n kao

$$g_n(t, \omega) = \int_0^{n(t-a)} e^{-\tau} f(t - n^{-1}\tau, \omega) d\tau.$$

Primetimo da je stohastički proces g_n prilagođen filteru $\{\mathcal{F}_t\}$ i $\int_a^b E(|g_n(t)|^2) dt < \infty$.

Tvrđenje (a): Za svako n, $E(g_n(t) g_n(s))$ je neprekidna funkcija od (t, s).

Kako bi se dokazalo ovo tvrđenje, uvodimo smenu $u = t - n^{-1}\tau$ u stohastički proces $g_n(t, \omega)$

$$g_n(t, \omega) = \int_a^t n e^{-n(t-u)} f(u, \omega) du,$$

što može poslužiti kako bi se došlo do jednakosti

$$\lim_{t \longrightarrow s} E\{|g_n(t) - g_n(s)|^2\} = 0.$$

Tvrđenje (b): $\int_a^b E(|f(t) - g_n(t)|^2) dt \longrightarrow 0$ kada $n \longrightarrow \infty$.

Primetimo da važi

$$f(t) - g_n(t) = \int_0^\infty e^{-\tau}(f(t) - f(t - n^{-1}\tau)) d\tau,$$

gde $f(t)$ ima vrednost nula za $t < a$. Kako je $e^{-\tau}d\tau$ verovatnoća mere na $[0,\infty)$, može se primeniti Švarcova nejednakost kako bi se došlo do

$$|f(t) - g_n(t)|^2 \leq \int_0^\infty |f(t) - f(t - n^{-1}\tau)|^2 e^{-\tau} d\tau.$$

Tada,

$$\int_a^b E(|f(t) - g_n(t)|^2)dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b \int_0^\infty e^{-\tau} E(|f(t) - f(t - n^{-1}\tau)|^2) d\tau dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\int_a^b E(|f(t) - f(t - n^{-1}\tau)|^2) dt \right) d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\tau} E \left(\int_a^b (|f(t) - f(t - n^{-1}\tau)|^2) dt \right) d\tau. \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci da je f ograničen stohastički proces, važi

$$\int_a^b |f(t,\cdot) - f(t - n^{-1}\tau, \cdot)|^2 dt \longrightarrow 0 \qquad (4.2.11)$$

skoro sigurno kada $n \longrightarrow \infty$.

Ovim je dokazano Tvrđenje (b).

Sada, na osnovu Tvrđenja (a) može se primeniti **Slučaj 1** na g_n za svako n za prilagođeni prosti stohastički proces $f_n(t,\omega)$ takav da važi

$$\int_a^b E(|g_n(t) - f_n(t)|^2)dt \leq \frac{1}{n}. \qquad (4.2.12)$$

Na osnovu Tvrđenja (b) i nejednakosti 4.2.12, važi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b E(|f(t) - f_n(t)|^2)dt = 0. \qquad (4.2.13)$$

Ovim je kompletiran dokaz **Slučaja 2**.

Slučaj 3: Opšti slučaj za $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.

Neka je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Za svako n, definišemo $g_n(t,\omega)$ tako da je $g_n(t,\omega) = f(t,\omega)$, ako je $|f(t,\omega)| \leq n$, i $g_n(t,\omega) = 0$, ako je $|f(t,\omega)| > n$.

Na osnovu Teoreme 4.2,

$$\int_a^b E(|f(t) - g_n(t)|^2)dt \longrightarrow 0 \qquad (4.2.14)$$

kada $n \longrightarrow \infty$.
Sada, za svako n možemo da primenimo **Slučaj 2** na g_n za prilagođeni prosti stohastički proces $f_n(t, \omega)$ tako da važi

$$\int_a^b E(|g_n(t) - f_n(t)|^2)dt \leq \frac{1}{n}. \tag{4.2.15}$$

Kako tvrđenje u lemi proizilazi iz 4.2.14 i 4.2.15, ovim smo upotpunili dokaz leme.
□

4.2.3 Korak 3

U ovom poslednjem, trećem koraku, možemo da koristimo sve što smo dokazali u **Koraku 1** i **Koraku 2**, kako bismo definisali stohastički integral

$$\int_a^b f(t)dB(t), \qquad f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega).$$

Primenjujemo lemu iz **Koraka 2** kako bismo dobili niz prilagođenih stohastičkih procesa $\{f_n(t, \omega); n \geq 1\}$ za koji važi tvrđenje iz Leme 4.2. Za svako n, $I(f_n)$ je definisano u **Koraku 1**. Na osnovu Leme 4.1, važi

$$E(|I(f_n) - I(f_m)|^2) = \int_a^b E(|f_n(t)) - f_m(t)|^2)dt \longrightarrow 0$$

kada $n, m \longrightarrow \infty$.
Stoga, niz $\{I(f_n)\}$ je Košijev niz u $L^2(\Omega)$, i važi

$$I(f) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I(f_n),$$

u $L^2(\Omega)$.

Definicija 4.1. *Limes*

$$I(f) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I(f_n) \tag{4.2.16}$$

u $L^2(\Omega)$, naziva se Itoov integral stohastičkog procesa f i označava se sa $\int_a^b f(t)dB(t)$.

Može se primetiti da za svake $a, b \in R$ i za $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ važi

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g).$$

Teorema 4.3. *Neka je $f \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Tada je Itoov integral $I(f) = \int_a^b f(t)dB(t)$ slučajna promenljiva sa očekivanjem 0 i još važi*

$$E(|I(f)|^2) = \int_a^b E(|f(t)|^2)dt.$$

Kako je I linearan, za svako $f, g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, važi sledeća jednakost

$$E\left(\int_a^b f(t)dB(t) \int_a^b g(t)dB(t)\right) = \int_a^b E(f(t)g(t))dt.$$

4.3 Rimanove sume i stohastički integrali

Neka je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Za podelu $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ intervala $[a,b]$ definišemo **Rimanovu sumu** funkcije f u odnosu na Braunovo kretanje $B(t)$ kao

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right). \tag{4.3.1}$$

Zanima nas da li suma 4.3.1 teži Itoovom integralu $\int_a^b f(t)dB(t)$.

Pretpostavimo da je $E\left(f(t)f(s)\right)$ neprekidna funkcija po t i s. Definišemo **stohastički proces** f_n kao u jednakosti 4.2.6

$$f_n(t,\omega) = f(t_{i-1},\omega), \qquad t_{i-1} < t \le t_i.$$

Kako je pokazano u **Slučaju 1** u dokazu Leme 4.2, imamo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b E\{|f(t) - f_n(t)|^2\}dt = 0.$$

Na osnovu jednakosti 4.2.16,

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} I(f_n)$$

u $L^2(\Omega)$.

Na osnovu jednakosti 4.2.2

$$\begin{aligned} I(f_n) &= \sum_{i=1}^{n} f_n(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \end{aligned}$$

dolazimo do Rimanove sume 4.3.1. Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 4.4. *Neka je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$ i pretpostavimo da je $E\left(f(t)f(s)\right)$ neprekidna funkcija po t i s. Tada*

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \longrightarrow 0} f(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)$$

u $L^2(\Omega)$, gde je $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ i $\|\Delta_n\| = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$.

5 Primeri stohastičkih integrala

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je knjiga [1].

Primer 5.1. $\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}\{B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)\}$.

U sekciji **Uvod u stohastičke integrale** pokušali smo da definišemo integral $\int_a^b B(t)dB(t)$. Kada koristimo krajnje leve tačke svakog podintervala u podeli intervala $[a,b]$ kako bi se ocenio integrand, dobija se suma L_n (jednakost 4.1.1). Ako se limes sume L_n kada $n \longrightarrow \infty$ posmatra kao integral, onda iz jednakosti 4.1.10 imamo

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}\{B(b)^2 - B(a)^2 - (b-a)\}. \tag{5.0.2}$$

Postavlja se pitanje da li je ova vrednost jednaka integralu $\int_a^b B(t)dB(t)$ koji je definisan u sekciji **Itoov stohastički integral**?
Jedna od osobina Braunovog kretanja jeste da je $E(B(t)B(s)) = \min\{t,s\}$ neprekidna funkcija po t i s. Stoga, može se primeniti **Slučaj 1** iz dokaza Leme 4.2, za integrand $f(t) = B(t)$ i podelu $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ intervala $[a,b]$, za definisanje stohastičkog procesa $f_n(t,\omega)$:

$$f_n(t,\omega) = B(t_{i-1},\omega), \qquad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Dalje, na osnovu **Koraka 2** u definisanju stohastičkog integrala u prethodnom poglavlju, možemo videti da je stohastički integral $\int_a^b B(t)dB(t)$ definisan kao

$$\int_a^b B(t)dB(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} I(f_n),$$

u $L^2(\Omega)$.
Sada, na osnovu jednakosti 4.2.2 u **Koraku 1**, kada smo definisali stohastički integral, $I(f_n)$ zadato je kao

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

i time dobijamo L_n u jednakosti 4.1.1. Na ovaj način smo pokazali da važi početna jednakost.

Primer 5.2. $\int_a^b B(t)^2 dB(t) = \frac{1}{3}\left(B(b)^3 - B(a)^3\right) - \int_a^b B(t)dt$

Služimo se istom idejom kao u primeru 5.1. Pretpostavljamo da je integral $\int_a^b B(t)dt$ Rimanov integral od $B(t,\omega)$ za skoro svako $\omega \in \Omega$. Razmotrimo sledeće:

$$\begin{aligned}
E\left[B(t)^2B(s)^2\right] &= E\left[\left((B(t)-B(s))+B(s)\right)^2 B(s)^2\right] \\
&= E\left[\{(B(t)-B(s))^2 + 2B(s)\left(B(t)-B(s)\right) + B(s)^2\}B(s)^2\right] \\
&= (t-s)s + 3s^2 \\
&= ts + 2s^2
\end{aligned}$$

Primetimo da je $E\left[B(t)^2 B(s)^2\right]$ neprekidna funkcija po t i s. Stoga možemo da primenimo **Slučaj 1** iz dokaza Leme 4.2 ako za integrand uzmemo $f(t) = B(t)^2$. Za podelu $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ segmenta $[a, b]$, definišemo stohastički proces $f_n(t, \omega)$ kao

$$f_n(t,\omega) = B(t_{i-1}, \omega), \qquad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

Stohastički integral $\int_a^b B(t)^2 dB(t)$ je zadat kao

$$\int_a^b B(t)^2 dB(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})^2 \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \tag{5.0.3}$$

gde važi konvergencija u $L^2(\Omega)$. Važi i

$$\begin{aligned} & 3\sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})^2 \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right) \\ &= B(b)^3 - B(a)^3 - \sum_{i=1}^{n} \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^3 \\ & -3\sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^2 \end{aligned} \tag{5.0.4}$$

Kako bi pokazali čemu je jednaka suma koja figuriše na desnoj strani prethodne jednakosti, koristi se činjenica da je $E|B(t) - B(s)|^6 = 15|t - s|^3$ i dobijamo

$$\begin{aligned} E\left|\sum_{i=1}^{n} \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^3\right|^2 &= 15\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^3 \\ &\leq 15\|\Delta_n\|^2 (b-a) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.0.5}$$

Sa druge strane, za drugu sumu u jednakosti 5.0.5, možemo modifikovati argumente u dokazu Teoreme 4.1 koristeći uslovno očekivanje kao u dokazu Leme 4.1 kako bi se dobila nejednakost

$$\begin{aligned} & E\left|\sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1})\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} B(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2t_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2b(b-a)\|\Delta_n\| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.0.6}$$

Nejednakost 5.0.5 znači da prva suma sa desne strane jednakosti 5.0.4 konvergira ka 0 u $L^2(\Omega)$, dok nejednakost 5.0.6 znači da druga suma sa desne strane jednakosti 5.0.4 konvergira ka $\int_a^b B(t)dt$. Stoga, zaključujemo iz jednakosti 5.0.3 i 5.0.4 da proizilazi ono što je bilo potrebno dokazati u primeru.

6 Primena Itoovog stohastičkog integrala

Primena Itoovog stohastičkog integrala je širok pojam te ćemo se u ovom poglavlju koncentrisati na Itoovu formulu u njenom najjednostavnijem obliku i njenu primenu, na stohastičke procese koji se oslanjaju na Itoov stohastički integral, i na linearne stohastičke diferencijalne jednačine.

6.1 Itoova formula

Za pisanje ove sekcije korišćena je knjiga [1].

U **Njutn-Lajbnicovom računu**, jedna od najbitnijih "matematičkih alata" bez sumnje je formula

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$$

za diferencijabilne funkcije f i g. Ona se može zapisati i u obliku integrala kao

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))g'(s)ds.$$

Sa druge strane, jedno od najbitnijih pravila u **Itoovom računu** jeste

$$f(B(t)) = f(B(a)) + \int_a^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_a^t f''(B(s))ds$$

za Braunovo kretanje $B(t)$ i dva puta diferencijabilnu funkciju f. Ova formula se često piše u diferencijalnom obliku

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt.$$

Pojava sabirka $\frac{1}{2}f''(B(t))dt$ je posledica nenula kvadratne varijacije Braunovog kretanja $B(t)$.

U ovoj sekciji predstavićemo proslavljenu Itoovu formulu u svom najjednostavnijem obliku.

6.1.1 Itoova formula u svom najjednostavnijem obliku

Njutn-Lajbnicova formula radi sa **determinističkim funkcijama**. Ako su funkcije f i g diferencijabilne, onda je $f(g(t))$ takođe diferencijabilna i važi

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'\left(g(t)\right)g'(t).$$

Dalje će važiti jednakost

$$f(g(t)) - f(g(a)) = \int_a^t f'(g(s))\, g'(s) ds. \qquad (6.1.1)$$

Itoov račun se bavi **slučajnim funkcijama**, tj. slučajnim procesima. Neka je $B(t)$ Braunovo kretanje i f diferencijabilna funkcija. Posmatrajmo kompoziciju funkcija $f(B(t))$. Kako su skoro sve putanje Braunovog kretanja $B(t)$ nigde diferencijabilne, jednakost

$$\frac{d}{dt} f(B(t)) = f'(B(t))\, B'(t)$$

očigledno nema nikakvo značenje. Postavlja se pitanje da li jednakost

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s)) dB(s) \qquad (6.1.2)$$

važi za svaku diferencijabilnu funkciju f.

Integral $\int_a^t f'(B(s))dB(s)$ je **Itoov stohastički integral** koji je definisan u poglavlju **4** tako da $f'(B(t))$ pripada $L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$.
Za funkciju $f(x) = x^2$, jednakost 6.1.2 se svodi na

$$B(t)^2 - B(a)^2 = 2 \int_a^t B(s) dB(s),$$

što je u kontradikciji sa Primerom 5.1 iz poglavlja **5** sa smenom $b = t$,

$$B(t)^2 - B(a)^2 - (t - a) = 2 \int_a^t B(s) dB(s).$$

Dolazimo do zaključka da jednakost 6.1.2 ne važi za svaku diferencijabilnu funkciju f.

Sada se postavlja pitanje da li postoji formula za kompoziciju funkcija $f(B(t))$ koja će da posluži kao pravilo u integralnoj formi za Itoov račun. Kako bismo odgovorili na ovo pitanje, posmatraćemo podelu $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ intervala $[a, t]$. Tada imamo

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})) \right). \qquad (6.1.3)$$

Neka je f C^2-funkcija (dva puta diferencijabilna i drugi izvod f'' neprekidan). Tada imamo Tejlorov razvoj

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \lambda(x - x_0))(x - x_0)^2,$$

gde je $0 < \lambda < 1$. Dalje na osnovu jednakosti 6.1.3 važi

$$\begin{aligned} f(B(t)) - f(B(a)) &= \sum_{i=1}^{n} f'\left(B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \end{aligned} \qquad (6.1.4)$$

gde je $0 < \lambda_i < 1$, a sa B_t je označeno Braunovo kretanje $B(t)$ radi lakšeg zapisa.

Kako bismo došli do teoreme koja obezbeđuje jednakost koja se naziva Itoova formula, moramo najpre da uvedemo **uopštenje za stohastičke integrale**.

Stohastički integral $\int_a^b f(t)dB(t)$ za **stohastički proces** $f(t,\omega)$ zadovoljava uslove:
1) $f(t)$ je prilagođen filteru $\{\mathcal{F}_t\}$;
2) $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ skoro sigurno.

Uslov 2) znači da su **skoro sve putanje** funkcije u **Hilbertovom prostoru** $L^2[a,b]$.

Sa $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ označićemo **prostor stohastičkih procesa** $f(t,\omega)$ koji zadovoljava uslove 1) i 2).

Teorema 6.1. *Pretpostavimo da je f neprekidni $\{\mathcal{F}_t\}$-prilagođen stohastički proces. Tada $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ i*

$$\int_a^b f(t)dB(t) = \lim_{||\Delta_n|| \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}) \left(B(t_i) - B(t_{i-1}) \right),$$

u verovatnoći, gde je $\Delta_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ podela konačnog intervala $[a,b]$ i $||\Delta_n|| = \max_{1 \le i \le n}(t_i - t_{i-1})$.

Više o uopštenju stohastičkih integrala, kao i dokaz ove teoreme, nalazi se u knjizi [1].

Na prvu sumu u jednakosti 6.1.4 može se primeniti Teorema 6.1:

$$\lim_{||\Delta_n|| \longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} f'\left(B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = \int_a^t f'\left(B(s)\right) dB(s)$$

u verovatnoći.
Posmatrajmo sada drugu sumu u jednakosti 6.1.4. Na osnovu Teoreme 4.1, možemo zaključiti koji je limes te sume u smislu kvadratne varijacije Braunovog kretanja $B(t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} f''\left(B_{t_{i-1}} + \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \longrightarrow \int_a^t f''\left(B(s)\right) ds \qquad (6.1.5)$$

kada $||\Delta_n|| \longrightarrow 0$.

Uzimajući u obzir prethodnu priču, dolazimo do teoreme koju je Ito dokazao 1944. godine.

Teorema 6.2. *Neka je $f(x)$ C^2-funkcija. Tada*

$$f(B(t)) - f(B(a)) = \int_a^t f'(B(s))\, dB(s) + \frac{1}{2} \int_a^t f''(B(s))\, ds \tag{6.1.6}$$

gde je prvi integral Itoov integral, dok je drugi integral Rimanov integral za svaku putanju od $B(s)$.

Primetimo da je poslednji sabirak u jednakosti 6.1.6 posledica nenula kvadratne varijacije Braunovog kretanja $B(t)$. Ovaj dodatni podatak razlikuje Itoov račun od Njutn-Lajbnicovog računa.
Dokaz Teoreme 6.2 može se naći u knjizi [1].

6.1.2 Primena Itoove formule

Primer 6.1. $f(x) = x^2$.

Zamenom u jednakost 6.1.6, dobijamo

$$B(t)^2 - B(a)^2 = 2 \int_a^t B(s) dB(s) + (t - a).$$

Kada je $t = b$ gornja jednakost prelazi u jednakost 5.0.2 iz Primera 5.1:

$$\int_a^b B(t) dB(t) = \frac{1}{2} \left(B(b)^2 - B(a)^2 - (b - a) \right).$$

Primer 6.2. $f(x) = x^4$.

Jednakost 6.1.6 postaje

$$B(t)^4 = \left(B(a)^4 + 4 \int_a^t B(s)^3 dB(s) \right) + 6 \int_a^t B(s)^2 ds.$$

Gornja jednakost daje vrednost Itoovog integrala

$$\int_a^t B(s)^3 dB(s) = \frac{1}{4} \left(B(t)^4 - B(a)^4 \right) - \frac{3}{2} \int_a^t B(s)^2 ds.$$

Primer 6.3. $f(x) = e^x$.

Jednakost 6.1.6 postaje

$$e^{B(t)} = \left(e^{B(a)} + \int_a^t e^{B(s)} dB(s) \right) + \frac{1}{2} \int_a^t e^{B(s)} ds.$$

Možemo napisati gornju jednakost kao vrednost Itoovog integrala

$$\int_a^t e^{B(s)} dB(s) = e^{B(t)} - e^{B(a)} - \frac{1}{2} \int_a^t e^{B(s)} ds.$$

6.1.3 Izražavanje stohastičkih integrala uz pomoć Rimanovog integrala

Fundamentalna teorema Njutn-Lajbnicovog računa počiva na tome da ako je F **primitivna funkcija** neprekidne funkcije f na $[a, b]$, tada

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

U sekciji **Itoova formula u svom najjednostavnijem obliku** pokazali smo da generalno ne postoji formula koja bi mogla da se iskoristi za izračunavanje stohastičkog integrala $\int_a^b g(t)dB(t)$. Ali, kada je $g(t)$ u obliku $g(t) = f(B(t))$ za neprekidnu funkciju f sa neprekidnim izvodom, tada je Itoova formula prava formula za to. Teorema koja sledi daje samo drugačiji način da se zapiše Itoova formula.

Teorema 6.3. *Neka je $F(t, x)$ primitivna funkcija funkcije $f(t, x)$ u x. Pretpostavimo da su $\frac{\partial F}{\partial t}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}$ neprekidne. Tada*

$$\int_a^b f(t, B(t))\, dB(t) = F(t, B(t))\, |_a^b - \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, B(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t)) \right) dt.$$

Primetimo da je integral sa desne strane jednakosti iz prethodne teoreme Rimanov integral za svaku putanju Braunovog kretanja $B(t)$. Sa druge strane, kako bismo primenili prethodnu teoremu, potrebno je naći primitivnu funkciju $F(t, x)$ funkcije $f(t, x)$ po promenljivoj x. U ovom slučaju, Itoova formula koja je data u Teoremi 6.3 je fundamentalna teorema za Itoov račun. Kada integrand f ne zavisi od t, gornja jednakost postaje

$$\int_a^b f(B(t))\, dB(t) = F(B(t))\, |_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f'(B(t))\, dt \tag{6.1.7}$$

Prikazaćemo izražavanje stohastičkih integrala uz pomoć Rimanovog integrala na nekoliko konkretnih primera.

Primer 6.4.

Kako bismo procenili stohastički integral

$$\int_0^t B(s)e^{B(s)}dB(s),$$

primetimo da je integrand dat kao $f(B(s))$ gde je $f(x) = xe^x$. Stoga

$$\begin{aligned} F(x) &= \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C, \\ f'(x) &= xe^x + e^x. \end{aligned}$$

Na osnovu jednakosti 6.1.7,

$$\int_0^t B(s)e^{B(s)}dB(s) = (B(t) - 1)\, e^{B(t)} + 1 - \frac{1}{2}\int_0^t (B(s) + 1)\, e^{B(s)}ds.$$

Primer 6.5.

Integrand stohastičkog integrala

$$\int_0^t \frac{1}{1+B(s)^2} dB(s)$$

dat je kao $f(B(s))$ gde je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Stoga $F(x)$ i $f'(x)$ su

$$F(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, \qquad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Na osnovu jednakosti 6.1.7,

$$\int_0^t \frac{1}{1+B(s)^2} dB(s) = \arctan B(t) + \int_0^t \frac{B(s)}{(1+B(s)^2)^2} ds.$$

Primer 6.6.

Posmatrajmo stohastički integral

$$\int_0^t \frac{B(s)}{(1+B(s)^2)^2} dB(s).$$

Integrand je jednak $f(B(s))$ gde je $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, i važi

$$F(x) = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C, \qquad f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Primenimo jednakost 6.1.7 kako bismo našli procenu za stohastički integral

$$\int_0^t \frac{B(s)}{1+B(s)^2} dB(s) = \frac{1}{2} \log(1+B(t)^2) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1-B(s)^2}{(1+B(s)^2)^2} ds.$$

Primer 6.7.

Kako bismo procenili stohastički integral

$$\int_0^t e^{B(s)-\frac{1}{2}s} dB(s)$$

posmatraćemo integrand koji je u ovom primeru zadat kao $f(s, B(s))$ gde je $f(t,x) = e^{x-\frac{1}{2}t}$. Stoga

$$F(t,x) = e^{x-\frac{1}{2}t}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{1}{2} e^{x-\frac{1}{2}t}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-\frac{1}{2}t}.$$

Na osnovu Teoreme 6.3, imamo

$$\int_0^t e^{B(s)-\frac{1}{2}s} dB(s) = e^{B(t)-\frac{1}{2}t} - 1.$$

6.2 Stohastički procesi

Za pisanje ove sekcije korišćena je knjiga [1].

U poglavlju **Itoov stohastički integral** fiksirali smo Braunovo kretanje $B(t)$ i filter $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$ koji zadovoljava određene uslove. Neka je f stohastički proces, takav da $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Tada, za svako $t \in [a,b]$ važi

$$\int_a^t E\left(|f(s)|^2\right) ds \leq \int_a^b E\left(|f(s)|^2\right) ds < \infty$$

Stoga, $f \in L^2_{ad}([a,t] \times \Omega)$. Odavde sledi da je stohastički integral $\int_a^t f(s)dB(s)$ definisan za svako $t \in [a,b]$. Posmatrajmo stohastički proces

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b.$$

Na osnovu Teoreme 4.3 imamo

$$E\left(|X_t|^2\right) = \int_a^t E\left(|f(s)|^2\right) ds < \infty$$

i zato $E|X_t| \leq \left[E\left(|X_t|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$. Stoga, za svako t, slučajna promenljiva X_t je integrabilna i možemo posmatrati uslovno očekivanje od X_t u odnosu na σ-polje, konkretnije filter $\mathcal{F}_s$.

U poglavlju **Itoov stohastički integral** pomenuli smo da je **Itoov integral** $\int_a^b f(t)dB(t)$ definisan tako da je **stohastički proces** $X_t = \int_a^t f(s)dB(s), a \leq t \leq b$ **martingal**. Na primer, u istom poglavlju pokazali smo da su stohastički procesi $L(t) = \int_0^t B(s)dB(s), t \geq 0$ i $X_t = \int_0^t B(s)^2 dB(s), t \geq 0$ martingali. Teorema koja sledi potvrđuje ovo svojstvo.

Teorema 6.4. *(Svojstvo martingala) Neka je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Tada stohastički proces*

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b, \tag{6.2.1}$$

je martingal u odnosu na filter $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$.

Može se primetiti da stohastički integral nije definisan za svako fiksirano ω kao što je Rimanov ili Riman-Stiltjesov integral. Neprekidnost stohastičkog procesa, koji je definisan kao u jednakosti 6.2.1, nije trivijalna činjenica kao u elementarnoj realnoj analizi.

Teorema 6.5. *(Svojstvo neprekidnosti) Neka je $f \in L^2_{ad}([a,b] \times \Omega)$. Tada stohastički proces*

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \qquad a \leq t \leq b, \tag{6.2.2}$$

je neprekidan. Zapravo, skoro sve njegove putanje su neprekidne funkcije na intervalu $[a,b]$.

Dokazi prethodnih teorema se mogu naći u knjizi [1].

Sada ćemo uvesti definiciju **Itoovog stohastičkog procesa**. Najpre par napomena:
1) Fiksiramo Braunovo kretanje $B(t)$ i filter $\{\mathcal{F}_t; a \leq t \leq b\}$ takav da važi

a) Za svako t, $B(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljiva;
b) Za svako $s \leq t$, slučajna promenljiva $B(t) - B(s)$ je nezavisna od σ-polja $\mathcal{F}_t$.

2) Skup stohastičkih procesa $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$ smo definisali u sekciji **Itoova formula u svom najjednostavnijem obliku**;
3) Sa $\mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$ označićemo polje svih $\{\mathcal{F}_t\}$-prilagođenih stohastičkih procesa $f(t)$ takvih da važi $\int_a^b |f(t)|dt < \infty$ skoro sigurno.

Definicija 6.1. *Itoov proces je stohastički proces*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \qquad a \leq t \leq b, \tag{6.2.3}$$

gde je X_a $\mathcal{F}_a$-merljivo, $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[a,b])$, i $g \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^1[a,b])$.

Koristan kraći zapis jednakosti koja figuriše u gornjoj teoremi jeste "stohastički diferencijal"

$$dX_t = f(t)dB(t) + g(t)dt. \tag{6.2.4}$$

Potrebno je naglasiti da stohastički diferencijal nema smisla sam po sebi jer su putanje Braunovog kretanja nigde diferencijabilne. Iz tog razloga potrebno je jednakost koju smo nazvali "stohastički diferencijal"posmatrati samo kao drugačiji način da se zapiše jednakost 6.2.3.

Teorema 6.6. *Neka je X_t Itoov proces definisan kao*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB(s) + \int_a^t g(s)ds, \qquad a \leq t \leq b.$$

Pretpostavimo da je $\theta(t,x)$ neprekidna funkcija sa neprekidnim parcijalnim izvodima $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$. Tada $\theta(t, X_t)$ je takođe Itoov proces i

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) &= \theta(a, X_a) + \int_a^t \frac{\partial\theta}{\partial x}(s, X_s)f(s)dB(s) \\ &+ \int_a^t \left[\frac{\partial\theta}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial\theta}{\partial x}(s, X_s)g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s, X_s)f(s)^2\right] ds. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Jednačinu 6.2.5 možemo zapisati u drugačijem obliku baš kao što smo to učinili i sa jednačinom 6.2.3. Prvo ćemo primeniti Tejlorov razvoj do prvog izvoda za dt kako bismo dobili

$$d\theta(t, X_t) = \frac{\partial\theta}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2. \tag{6.2.6}$$

$\times$	$dB(t)$	dt
$dB(t)$	dt	0
dt	0	0

Tabela 1. Itoova tabela

Sada, iskoristimo **Itoovu tabelu** kako bismo dobili $(dX_t)^2 = f(t)^2 dt$. Stoga

$$\begin{aligned} d\theta(t, X_t) &= \frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial x}\left(f(t)dB(t) + g(t)dt\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} f(t)^2 dt \\ &= \frac{\partial \theta}{\partial x} f(t) dB(t) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x} g(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} f(t)^2\right) dt. \qquad (6.2.7) \end{aligned}$$

Na kraju, mi možemo da pretvorimo gornju jednakost u jednakost 6.2.5. Za izračunavanje možemo uvek da koristimo ovakvu vrstu oznaka u stohastičkom diferencijalu kako bi se došlo do rešenja.

Primer 6.8.

Neka je $f \in \mathcal{L}_{ad}(\Omega, L^2[0,1])$. Posmatrajmo Itoov proces

$$X_t = \int_0^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds, \qquad 0 \le t \le 1,$$

i funkciju $\theta(x) = e^x$. Tada, $dX_t = f(t)dB(t) - \frac{1}{2} f(t)^2 dt$. Primenimo Tejlorov razvoj i Itoovu tabelu da dobijemo

$$\begin{aligned} d\theta(X_t) &= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2 \\ &= e^{X_t}\left(f(t)dB(t) - \frac{1}{2} f(t)^2 dt\right) + \frac{1}{2} e^{X_t} f(t)^2 dt \\ &= f(t) e^{X_t} dB(t). \end{aligned}$$

Odavde dalje sledi,

$$e^{\int_0^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds} = 1 + \int_0^t f(s) e^{\int_0^s f(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^s f(u)^2 du} dB(s).$$

Na osnovu Teoreme 6.4, $Y_t = e^{\int_0^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds}$ je martingal, ako je funkcija $f(t)$ deterministička funkcija na $L^2[0,1]$.

Posmatrajmo sada funkciju h kao **determinističku funkciju** u $L^2[0,T]$. Tada za svako $t \in [0,T]$, **Vinerov integral** $\int_0^t h(s)dB(s)$ je normalno raspodeljen sa očekivanjem 0 i disperzijom $\sigma^2 = \int_0^t h(s)^2 ds$. Dakle važi,

$$E e^{\int_0^t h(s)dB(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds}.$$

Definisaćemo Y_t kao

$$Y_t = \frac{e^{\int_0^t h(s)dB(s)}}{Ee^{\int_0^t h(s)dB(s)}} = e^{\int_0^t h(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds}.$$

Na osnovu Primera 6.8, Y_t ima prezentaciju

$$Y_t = 1 + \int_0^t h(s) e^{\int_0^s h(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^s h(u)^2 du} dB(s). \tag{6.2.8}$$

Primetimo da integrand Itoovog integrala u jednakosti 6.2.8 pripada polju $L^2_{ad}([0,1]\times \Omega)$. Na osnovu Teoreme 6.4 **stohastički proces** $Y_t, 0 \le t \le T$, je **martingal**.

6.3 Linearne stohastičke diferencijalne jednačine

Za pisanje ove sekcije korišćene su knjige [1] i [7].
Posmatrajmo **linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda**

$$\frac{dx_t}{dt} = f(t)x_t + g(t), \qquad a \le t \le b, \qquad x_a = x, \tag{6.3.1}$$

gde je $f(t)$ neprekidna funkcija. Kako bismo rešili ovu diferencijalnu jednačinu, prebacićemo $f(t)x_t$ na levu stranu jednakosti i pomnožićemo obe strane jednačine integracionim faktorom

$$h(t) = e^{-\int_a^t f(s)ds}. \tag{6.3.2}$$

Dobijamo

$$h(t)\left(\frac{dx_t}{dt} - f(t)x_t\right) = h(t)g(t). \tag{6.3.3}$$

Primetimo da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h(t)x_t) &= \frac{dh(t)}{dt}x_t + \frac{dx_t}{dt}h(t) \\ &= -f(t)e^{-\int_a^t f(s)ds}x_t + \frac{dx_t}{dt}h(t) \\ &= -f(t)h(t)x_t + \frac{dx_t}{dt}h(t) \\ &= h(t)\left(\frac{dx_t}{dt} - f(t)x_t\right). \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Iz jednačina 6.3.3 i 6.3.4 sledi

$$\frac{d}{dt}(h(t)x_t) = h(t)g(t),$$

čije je rešenje

$$h(t)x_t = x + \int_a^t h(s)g(s)ds.$$

Odavde sledi da je rešenje x_t jednačine 6.3.1

$$\begin{aligned} x_t &= xh(t)^{-1} + \int_a^t h(t)^{-1}h(s)g(s)ds \\ &= xe^{\int_a^t f(s)ds} + \int_a^t g(s)e^{\int_s^t f(u)du}ds. \end{aligned}$$

Pod **linearnom stohastičkom diferencijalnom jednačinom** podrazumevamo diferencijalnu jednačinu u obliku

$$dX_t = \{\phi(t)X_t + \theta(t)\}\, dB(t) + \{f(t)X_t + g(t)\}\, dt, \qquad X_a = x. \tag{6.3.5}$$

Linearna stohastička diferencijalna jednačina 6.3.5 može se napisati kao linearna stohastička integralna jednačina

$$X_t = x + \int_a^t \{\phi(s)X_s + \theta(s)\}dB(s) + \int_a^t \{f(s)X_s + g(s)\}ds$$

za $a \leq t \leq b$.

Uzimajući u obzir integracioni faktor (jednakost 6.3.2) i proces oblika 6.2.8 u prethodnoj sekciji, možemo pretpostaviti da je integracioni faktor za jednakost 6.3.5 jednak H_t i važi

$$H_t = e^{-Y_t}, \qquad Y_t = \int_a^t f(s)ds + \int_a^t \phi(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_a^t \phi(s)^2 ds. \tag{6.3.6}$$

Potrebno je da nađemo $d(H_tX_t)$ baš kao što je to slučaj sa običnom diferencijalnom jednačinom. Važi

$$d(H_tX_t) = H_t dX_t + X_t dH_t + (dH_t)(dX_t). \tag{6.3.7}$$

Primenjujemo Itoovu formulu kako bismo našli jednakost za dH_t

$$\begin{aligned} dH_t &= -H_t dY_t + \frac{1}{2}H_t(dY_t)^2 \\ &= H_t\left(-f(t)dt - \phi(t)dB(t) + \frac{1}{2}\phi(t)^2 dt\right) + \frac{1}{2}H_t\phi(t)^2 dt \\ &= H_t\{-f(t)dt - \phi(t)dB(t) + \phi(t)^2 dt\}. \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Iz jednakosti 6.3.5 i 6.3.8 sledi

$$(dH_t)(dX_t) = -H_t\phi(t)\{\phi(t)X_t + \theta(t)\}dt. \tag{6.3.9}$$

Ako jednakosti 6.3.8 i 6.3.9 primenimo na jednakost 6.3.7 dobijamo

$$d(H_tX_t) = H_t\left\{dX_t - f(t)X_t dt - \phi(t)X_t dB(t) - \theta(t)\phi(t)dt\right\}. \tag{6.3.10}$$

Primetimo da kada bismo sve sabirke koji sadrže X_t prebacili na levu stranu jednakosti 6.3.5, ostaje nam sabirak $-\theta(t)\phi(t)dt$. Ali možemo da se postaramo i za njega. Iz jednačina 6.3.5 i 6.3.10 sledi

$$d(H_tX_t) = H_t\left\{\theta(t)dB(t) + g(t)dt - \theta(t)\phi(t)dt\right\},$$

što vodi ka

$$H_tX_t = x + \int_a^t H_s\theta(s)dB(s) + \int_a^t H_s\{g(s) - \theta(s)\phi(s)\}ds.$$

Ako obe strane jednakosti podelimo sa H_t dolazimo do rešenja X_t jednačine 6.3.5. Zaključak do koga smo došli podržan je sledećom teoremom.

Teorema 6.7. *Rešenje linearne stohastičke diferencijalne jednačine*

$$dX_t = \{\phi(t)X_t + \theta(t)\}dB(t) + \{f(t)X_t + g(t)\}dt, \qquad X_a = x, \tag{6.3.11}$$

jednako je

$$X_t = xe^{Y_t} + \int_a^t e^{Y_t - Y_s}\theta(s)dB(s) + \int_a^t e^{Y_t - Y_s}\{g(s) - \theta(s)\phi(s)\}ds, \tag{6.3.12}$$

gde je $Y_t = \int_a^t \phi(s)dB(s) + \int_a^t\{f(s) - \frac{1}{2}\phi(s)^2\}ds$.

6.4 Primena u R-u

Za pisanje ove sekcije korišćen je rad [8].

R je programski jezik i softversko okruženje za statističko izračunavanje i grafikone. Koristi se većinski za analiziranje podataka.

Sve funkcije koje se mogu koristiti u **R**-u smeštene su u odgovarajuće pakete. Da biste mogli da koristite određene funkcije, neophodno je da u svoj program implementirate paket koji te funkcije sadrži.

R paket `Sim.DiffProc` napravljen je 2014. godine i sadrži funkcije za rešavanje stohastičkih integrala tipa Ito i Stratanovič, funkcije za simulaciju i modeliranje stohastičkih diferencijalnih jednačina istih tipova, ali i druge funkcije koje služe za procene, simulacije i izračunavanje u oblasti stohastičkog računa. Kako je tema ovog rada Itoov stohastički integral, koncentrisaćemo se na funkciju koja se odnosi na njegovo rešavanje.
Posmatramo primer za simulaciju Itoovog integrala:

$$\int_{t_0}^t B(s)^n dB(s) = \frac{1}{n+1}\left[B(t)^{n+1} - B(t_0)^{n+1}\right] - \frac{n}{2}\int_{t_0}^t B(s)^{n-1}ds.$$

Ugrađena funkcija **st.int** služi za izračunavanje stohastičkog integrala Itoovog tipa. Funkcija ima oblik:

st.int(expr, lower = 0, upper = 1, M = 1, subdivisions = 1000L, type = c(”ito”, ”str”), ...)

Argumenti funkcije su:

expr - izraz u funkciji dve promenljive **t** (vreme) i **w** (Braunovo kretanje);
lower, upper - donje ili gornje krajnje tačke intervala na kojem se integrali;

M - broj trajektorija;
subdivisions - maksimalan broj podintervala;
type - Ito ili Stratanovič integracija;
x, object - objekat nasleđen od klase “st.int”;
order - red momenta;
level - neophodan nivo poverenja;
... - dalji argumenti za nestandardne metode.

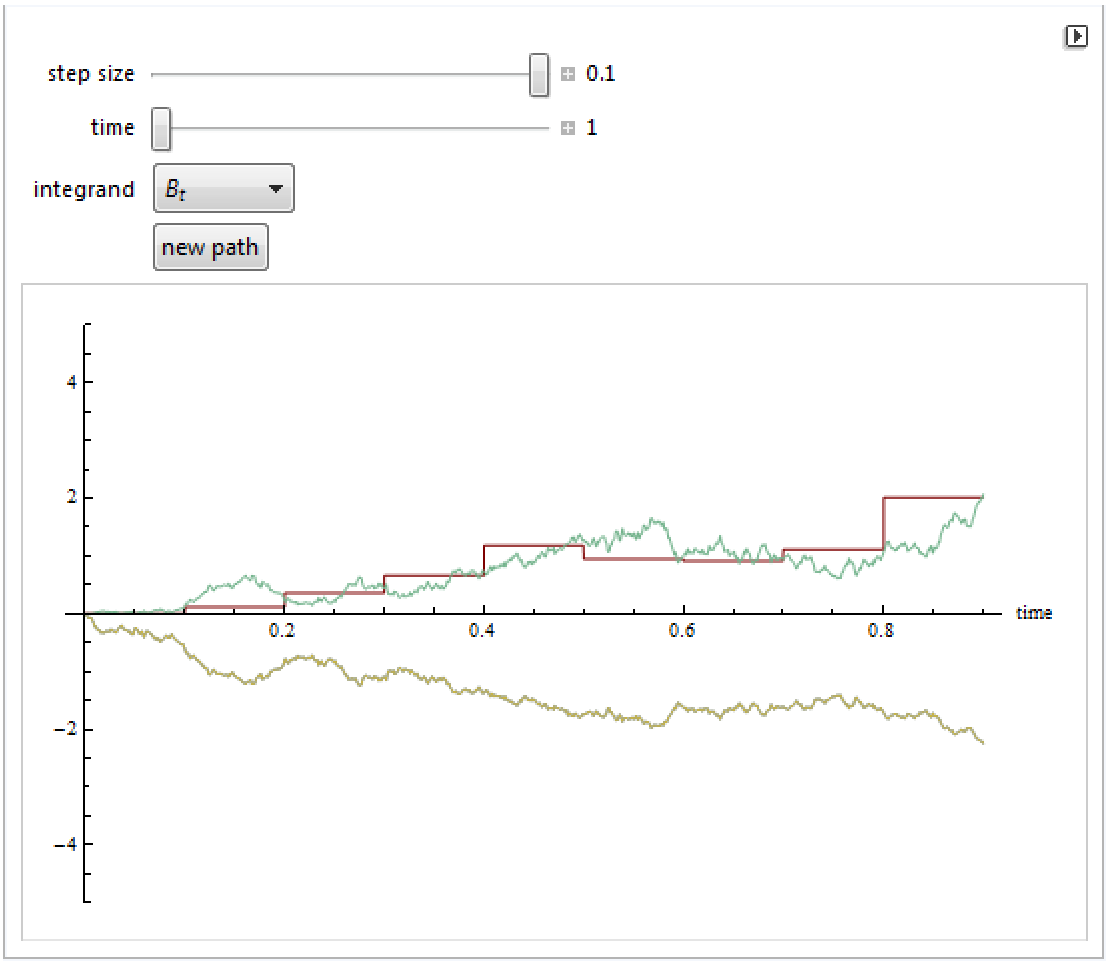
Vrednosti:

1) Funkcija st.int vraća objekat nasleđen iz klase “st.int”.
2) **X** je konačna simulacija integrala.
3) **fun** je funkcija koja je bila integraljena.
4) **type** je tip stohastičkog integrala
5) **subdivisions** je broj podintervala koji su nastali u procesu podele.

```
R> fexpr <- expression( w^2 )
R> ito <- st.int(fexpr,type="ito",M=1,lower=0,upper=1)
R> ito <- st.int(fexpr,type="ito",M=1,lower=0,upper=1)
R> ito
Ito integral:
| X(t) = integral (f(s,w) * dw(s))
| f(t,w) = w^2
Summary:
| Number of subintervals = 1000.
| Number of simulations = 1.
| Limits of integration = [0,1].
| Discretization = 0.001.
```

6.5 Itoov integral u Volframu

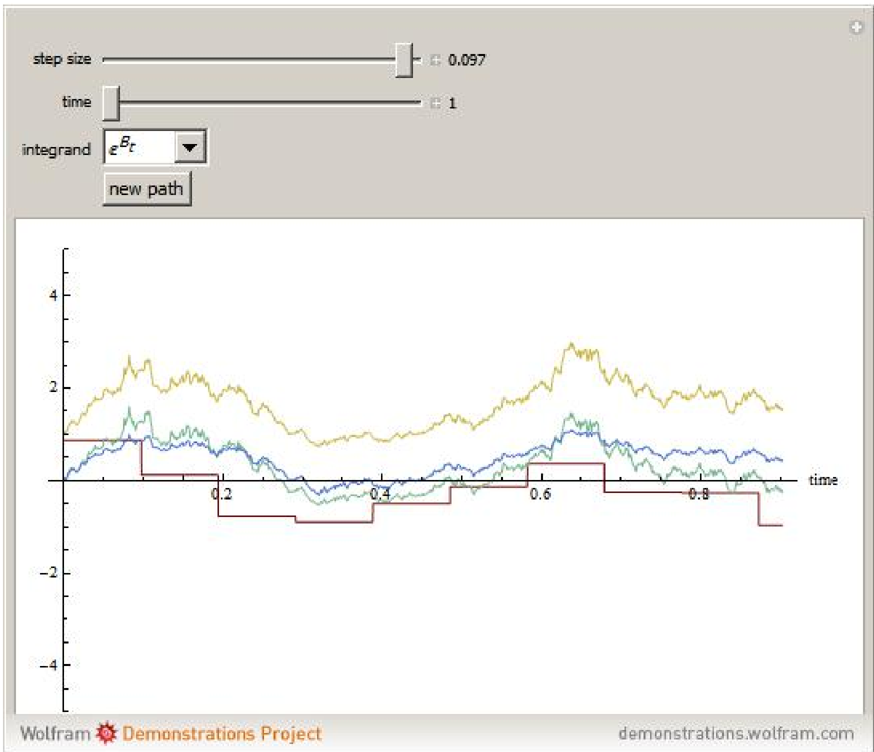
Volfram projekat za prikazivanje (*Wolfram Demonstrations Project*) pruža mogućnost demonstracije raznih matematičkih pojmova, među kojima je i Itoov integral.
Na internet adresi *http://demonstrations.wolfram.com/TheItoIntegralAndItosLemma/* može se naći manji program za demonstraciju Itoovog integrala. Program pruža mogućnost izbora integranda; ponuđeni integrandi su:
1)B_t,
2)e^{B_t}
3)$cos(B_t)$
gde je sa B_t označeno Braunovo kretanje.



Slika 3. Prikaz programa u Volframu

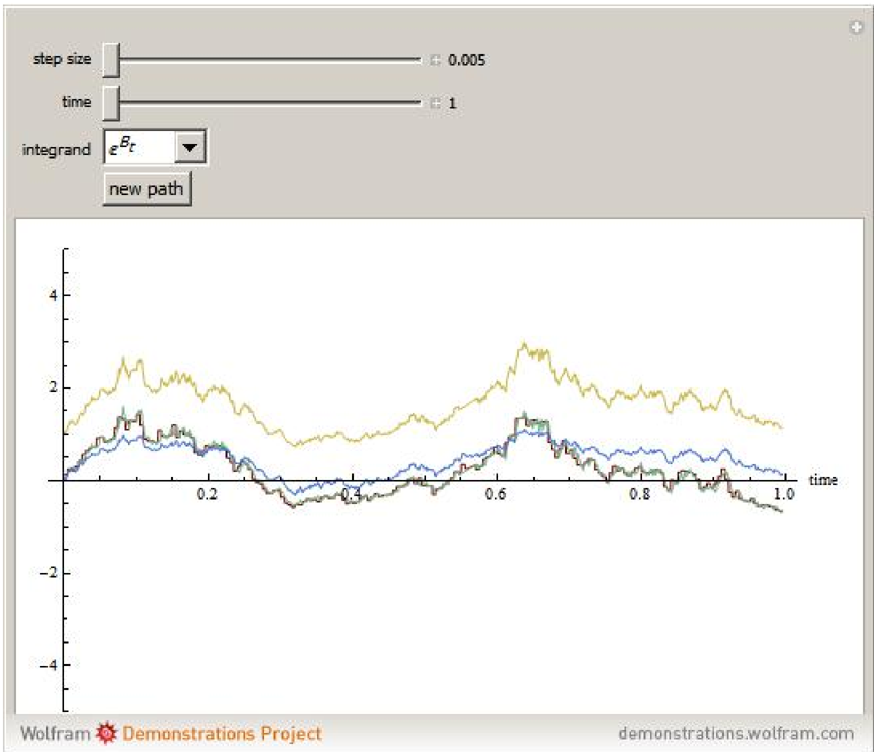
Grafik na gornjoj slici prikazuje četiri krive (od kojih se dve poklapaju u slučaju izbora prvog integranda) koje pokazuju aproksimacije putanje Braunovog kretanja (integrator), izabranog integranda, i levu i desnu stranu Itoove formule. Kako se povećava veličina vremenskog intervala tako se dve krive približavaju jedna drugoj, i pokazuju da se poklapaju prilikom puštanja limesa (Braunovo kretanje). Ako se strelicom na računaru prelazi preko krive, može se videti stohastički koncept za koji kriva predstavlja aproksimaciju.
Klikom na dugme *New path* dobija se nova putanja na grafiku.
Klikom na dugme u gornjem desnom uglu, program počinje simulaciju Itoovog integrala u odnosu na promenu vremena (skala *time*) i veličine koraka (*step size*).

U naredne tri slike, prikazaćemo promenu Itoovog integrala ako se za integrand izabere e^{B_t}.



Slika 4. Simulacija Itoovog integrala- korak 1

Slika 5. Simulacija Itoovog integrala- korak 2



Slika 6. Simulacija Itoovog integrala- korak 3

Zaključak

Davne 1944. godine japanski matematičar Kijoši Ito je objavio rad "Stohastički integral"u kome je uveo pojam stohastičkog integrala i formulu koja je danas poznata kao Itoova formula. Od tada interesovanje za Itoovu teoriju stohastičkog integralnog računa raste i primenjuje se u raznim oblastima (biologija, fizika, finansije i druge). Primera radi, jedan od najvažnijih matematičkih rezultata u vezi sa finansijskim tržištom jeste formula Black-Scholes, koja je zasnovana na Itoovoj teoriji.

Ito je na dodeli Kjoto nagrade u nauci 1998.godine, održao govor koji je mnoge oduševio. Izdvojićemo jedan deo:

„U precizno napravljenim matematičkim strukturama, matematičari nalaze istu vrstu lepote kao što neki nalaze u očaravajućim delovima muzike, ili u nestvarnoj arhitekturi. Ali, ipak postoji velika razlika između lepote u matematičkim strukturama i onim u velikoj umetnosti. Mocartova muzika, na primer, oduševljava i one koji ne poznaju teoriju muzike; katedrala u Kelnu obuzima posmatrače iako oni ne znaju ništa o hrišćanstvu. Lepota matematičkih struktura se ipak ne može poštovati bez razumevanja numeričkih formula koje prikazuju zakone logike. Samo matematičari mogu da čitaju "muzičke partiture"koje sadrže mnoge numeričke formule i da sviraju "muziku"u svojim srcima. Stoga, ja sam nekada verovao da bez numeričkih formula, ja nikada neću moći da prenesem slatku melodiju koja svira u mom srcu. Stohastičke diferencijalne jednačine, koje se nazivaju "Itoova formula", trenutno se koriste za opisivanje pojave slučajnih fluktuacija tokom vremena. Kada sam prvi put predstavio stohastičke diferencijalne jednačine, moj rad nije privukao pažnju. Prošlo je skoro deset godina od objavljivanja mog rada, kada su drugi matematičari počeli da čitaju moje "muzičke partiture"i da sviraju moju "muziku"sa njihovim "instrumentima". Razvijanjem mojih "originalnih muzičkih partitura"u sve razrađeniju "muziku", ovi istraživači su doprineli velikom razvoju "Itoove formule"."

Ovim govorom Ito je dao veliki podsticaj svim mladim matematičarima, i jako važnu poruku: Vaš rad će biti primećen kad-tad, jer dobre stvari ne ostaju neprimećene.

Literatura

[1] Hui-Hsiung Kuo: *Introduction to Stochastic Integration,* Springer Science+Business Media, Inc., United States of America 2006.

[2] Fima C. Klebaner: *Introduction to Stochastic Calculus With Applications,* Imperial College Press, London 2005.

[3] Pavle Mladenović: *Verovatnoća i statistika,* četvrto izdanje, Matematički fakultet, Beograd 2008.

[4] Slobodanka Janković: *Elementi finansijske matematike,* skripta, Beograd 2015.

[5] Zoran Kadelburg, Dušan Adnađević: *Matematička analiza I,* Matematički fakultet, Beograd 2008.

[6] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić, Danko Jocić:*Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, Matematički fakultet*, Beograd 1998.

[7] Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić: *Diferencijalne jednačine, Matematički fakultet,* Beograd 2005.

[8] Arsalane Chouaib Guidoum, Kamal Boukhetala: *Itô and Stratonovich Stochastic Calculus with Sim.DiffProc Package Version 2.9*, 10. septembar 2014.