Универзитет у Београду

Математички факултет

ДИОФАНТОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ И
ДРУГИ ЗАНИМЉИВИ ЗАДАЦИ
У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ

Мастер рад

Студент: Валерија Секулић

Ментор: др. Зоран Петровић

Београд, 2015.

Садржај

1. Увод:

Овај рад је осмишљен као извесна врста помоћи у раду са даровитим ученицима, као и у припреми ученика за математичка такмичења. На готово свим такмичењима из математике, у области алгебре, јављају се задаци или проблеми који се своде на решавање Диофантових једначина. У програмима редовне наставе математике, како у основној тако и у средњој школи, Диофантове једначине се експлицитно не помињу. Упознавање са овим једначинама и њихово решавање јесу теме и садржаји додатне наставе математике.

На почетку рада су укратко изложене психолошке, педагошке и програмске основе рада са талентованим (за математику) ученицима.

Затим, следи упознавање са Диофантом и његовим радом. Диофантов допринос развоју математике, пре свега аритметике, је толики да је назван ,,оцем“ аритметике. Стога сматрам да је просто наша обавеза да о њему пишемо и више и боље се упознајемо са његовим радом и да ту обавезу остављамо младим нараштајима у наслеђе.

Наведене су и најчешће коришћене методе за решавање Диофантових једначина и приказане кроз примере. Слично су представљени и најчешћи типови Диофантових једначина, који су такође праћени примерима.

Последње поглавље садржи занимљиве задатке, тј. решења разних проблема из свакодневног живота. У прилог чињеници да математика није ,,баук“ и да заиста јесте занимљива, у овом поглављу се могу наћи и математички трикови и загонетке а све у циљу популаризације математике као науке.

2. Психолошке основе рада са даровитим ученицима

Да би се извела методичка трансформација садржаја рада, неопходно је познавање интелектуалних карактеристика ученика посматраног узраста, коме је методичка трансфрмација намењена.

2.1. Опште интелектуалне карактеристике адолесцената

Узраст од 14-18 година, односно доба адолесценције, је доба наглог интелектуалног развоја сваког појединца и представља веома важан период.

Као резултат разних истраживања, изведен је закључак, да се мишљење адолесцената знатно разликује од мишљења детета. Адолесцент је у стању да гради системе и теорије, у најширем значењу речи ,,систем“ и ,,теорија“. Адолесцент је у стању да формира своје мишљење и теорије, у већини случајева невеште и неоригиналне. Међутим, ово је веома битно јер то је показатељ да се адолесцент уклапа у свет одраслих. То је за њега веома значајно јер повећава његову мотивисаност за стицање нових знања и за конструисање нових теорија. Често се дешава да су те ,,теорије и открића“, познате човечанству вековима уназад што никако не умањује њихов значај. Напротив, она су од изузетне важности и овај процес истраживања и ,,откривања“ треба на све могуће начине подстицати, утичући да се хаотичност која је карактеристична за овај узраст, усмери ка систематичности.

Веома је важно сазнање да је код адолесцената изражена тежња да се удружују са себи сличнима, стварајући тако акционе и дискусионе групе, што омогућава тимски рад.

У доба адолесценције, па и раније, ученик је способан да мисли апстрактно, да поставља хипотезе, да логички исправно закључује. После петнаесте године млади су интелектуално способни да са дедукције локалног карактера пређу на строго дедуктивно и аксиоматско мишљење.

2.2. *Интелектуалне карактеристике даровитих ученика*

Батлер и Врен у својој књизи ,,Настава математике у средњој школи" наводе опште и посебне особине које поседују ученици обдарени за математику.

Опште особине:

-брзо прави асоцијације и неограничено их задржава;

-брзо уочава сличности и разлике;

-има изврсно памћење, богат речник, широк распон пажње;

-има високу способност учења;

-има релативно зрео осећај за вредности;

-своја интересовања следи са огромном енергијом и покретачком снагом;

-своје слободно време користи продуктивно.

Специфичне особине:

-брзо уочава алгоритме и ужива у размишљању и уопштавању;

-радије размишља на вишим нивоима апстракције;

-релативно лако класификује посебне случајеве као специфичне случајеве општих ситуација;

-може да прати дуге низове резоновања, често предвиђајући и дајући свој допринос;

-често поставља суштинска питања;

-може да чита математичку литературу која је далеко испред градива за његов разред;

-често је нестрпљив са увежбавањем и детаљима за које сматра да су неважни.

У дидактичко-методичком упутству за реализацију додатне наставе у средњим школама у Србији као специфичне одлике средњошколаца даровитих за математику наводе се:

-способност проналажења оригиналних поступака за решавање проблема;

-способност да се један задатак реши на два па и више различитих начина;

-досетљивост и сналажљивост у решавању математичких проблема;

-способност самосталног решавања задатака нове врсте;

-брзо и лако извођење операција и алгоритама;

-упорност, стрпљивост и истрајност у раду када решење није на видику;

-способност анализе и синтезе, специјализације и генерализације,класификације и апстракције.

Из претходних разматрања може се закључити да би свако даровито дете било и успешно, неопходно је да поседује интелектуалне способности карактеристичне за даровиту децу када је у питању математика. Подједнако је битно и поседовање вољно-радних особина. Приликом рада са оваквом децом обавезно је да се у једнакој мери развијају интелектуалне, математичке, вољне и радне способности како би се дошло до максималних резултата.

3. Педагошке основе рада са даровитим ученицима

3.1. Основне компоненте доброг рада са даровитом децом

Разматрајући истраживања више аутора Шефкет Арслановић наводи 16 незаобилазноих компоненти које чине основу доброг рада са даровитим ученицима:

1) Квалитетан математички садржај

Неопходно је веома прецизно планирање тема рада као и да оне међусобно буду како логички тако и математички повезане. Овакав начин планирања рада обезбеђује да тај рад даје очекиване резултате.

2) Исправан педагошки приступ

Приликом рада са даровитим ученицима, облици и методе рада морају бити веома пажљиво одабрани и што разноврснији, у складу са математичким садржајем на који се примењују. У раду са даровитим ученицима не сме се занемарити чињеница да и ученици утичу на наставнике, што чини да рад са даровитим ученицима буде један интерактиван процес.

3) Способност наставника

Ово је један од основних услова у раду са младим математичарима. Наставник пре свега мора одлично да познаје математичке садржаје, такође мора да буде одличан методичар, добар познавалац психолошких и педагошких основа како наставе тако и додатног рада са талентованим ученицима.

4) Усмереност на решавање проблема и примене

Како се цео живот своди на решавање проблема, изузетно је важно да се ученици за то оспособе, као и да стекну значајно методолошко искуство за решавање нових проблема и примену наученог.

5) Усмереност ка вишим нивоима мишљења

Ово је такође значајна карика у раду са даровитим ученицима.Резултати овога рада не могу бити само решавање проблема и примене. Као циљ треба поставити и уопштавање, нове резултате и открића.

6) Добра комуникацијска вештина

Ова вештина је један од битних услова за учење математике. Да би даровити ученици били способни да читају и пишу, говоре и мисле као математичари остварује се једино добром комуникацијом на релацијама ученик-наставник и ученик-ученик. Савремена средства комуникације, у првом реду интернет, добра су помоћ при оспособљавању даровитих ученика за математичко комуницирање али и за комуницирање уопште.

7) Вештина учења и радне навике

Подразумева се да даровити ученици поседују виши ниво способности учења, што треба развијати, подстицати и усавршавати. Резултати у раду са даровитим ученицима могу се очекивати само ако ученици поседују одговарајуће радне способности. Посебну пажњу треба посветити доброј организацији учења и слободног времена и развијању одговорности према сопственим обавезама.

8) Индивидуалне разлике

Талентованим младим математичарима треба пружити подршку и помоћ да пронађу себе како у математичком свету тако и у стварном животу. Веома је важно водити рачуна о правилном социјалном статусу даровитих ученика, што има за циљ да млади талентовани математичари не постану ,,чуда“ већ успешни људи интересовања сличних интересовањима њихових вршњака.

9) Подстицање креативности

Ова компонента такође чини основу доброг рада са даровитом децом. Ове ученике треба константно инспирисати да налазе нове идеје, нова решења, да исказују своје утиске, да истражују, експериментишу...

10) Помоћна средства

Помоћна средства за учење су неизоставна код добро планираног рада са талентованим ученицима. Она подразумевају математичку литературу и часописе, компјутере, радио, телевизију, штампу и остала средства комуникације.

11) Интеграција садржаја

Овде се мисли не само на повезаност математичких садржаја већ и на повезаност са другим наставним предметима.

12) Планирање и развој

Програм рада мора бити развојни и усмерен ка откривању нових потенцијала обдарених ученика. Поред дефинисања наставних садржаја, планирањем треба обухватити селекцију и идентификацију и оставити простора за измене и допуне уколико се за то укаже потреба.

13) Процена реализације плана

Процена реализације плана у смислу динамике и квалитета је један континуирани задатак у раду са младим математичарима. Овај процес обезбеђује ефикаснији напредак, те је због тога веома важно да методи праћења буду разноврсни.

14) Брига за ученике

Ова компонента је неизоставна. Наставници који раде са даровитом децом морају имати разумевања за њихове индивидуалне потребе и проблеме. Један од циљева у раду са талентованим математичарима јесте управо њихова заштита од друштвене изолације. Веома је лоше ако програм рада подразумева њихово искључиво усмеравање само на метематику.

15) Мобилност и флексибилност програма

Подразумева потпуну слободу учешћа сваког даровитог ученика у оквиру планираних активности и процедура и изван њих.

16) Статус програма за рад са даровитим учаницима

Ученицима и наставницима је веома важно да овај програм буде успешан. Зато им треба пружити шансу да то и остваре учешћем на такмичењима, смотрама, конкурсима и слично.

3.2. Традиционална и активна школа

Активна школа је специфична педагошка творевина утемељена на теоријским основама и практичним покушајима преображаја традиционалне школе у активну, односно школу у којој и ученик и наставник активно учествују у процесу наставе.

На основу теоријских разматрања за активно учење битна су следећа три сегмента:

1) Прецизира се једна важна компонента концепта активности као унутрашње (менталне) активности, та активност (или бар један њен, за школско учење важан, облик) јесте пролажење кроз оне интелектуалне процесе кроз које је прошла наука када се долазило до открића и проналазака. Дакле, ученик на скраћени начин реконструише те мисаоне процесе;
2) Објекат мисаоних активности није само сопствено мисаоно искуство већ и интелектуални садржаји из појединих научних дисциплина;
3) Основни циљеви школског учења помоћу активних метода јесу: ,,Добро разумевање онога што у науци постоји, али и усвајање интелектуалних умења за продуктивне и стваралачке активности“.

Традиционална школа

функционише на следећи начин: Планови и програми су унапред дефинисани а наставне активности имају за циљ усвајање тих програма. Метод рада који се већином примењује у настави јесте предавање, односно вербално преношење знања. Наставна средства се примењују повремено. Ученик је пасиван слушалац од кога се очекује да разуме, запамти и репродукује обавезно градиво. Било да је провера знања усмена или писмена, она представља утврђивање мере у којој је ученик усвојио обавезно градиво. При оваквом извођењу наставе, мотиви за учење су оцена, похвала, казна... У традиционалној школи дете је ученик који би са разумевањем и што верније требало да понови испредавано градиво.

Активна школа

ученика посматра као целовиту личност, чије интелектуалне способности у наставном процесу треба максимално да буду ангажоване. Полазна основа активне школе јесу обавезни образовни стандарди, на чијим темељима се праве оријентациони планови и програми рада. Овакав приступ оставља простора за варирање наставе у зависности од интересовања ученика. Мотивација за учење је код оваквог приступа настави лична. У настави се примењују активне методе учења засноване на интелектуалним, радним и истраживачким активностима ученика. Поред усвајања наставног програма, циљ активне школе је и свестрани развој личности и индивидуалности ученика. Приликом оцењивања не узима се у обзир само ниво овладавања знањима дефинисаних образовним стандардима, већ и напредак ученика у односу на почетни ниво, као и заинтересованост ученика за рад и његова активност.

На основу наведених карактеристика традиционалне и активне школе, можемо закључити да је за рад са ученицима талентованим за математику погоднија активна школа. Пожељно је да рад са математичким талентима буде усмерен ка: уважавању личности, узимању у обзир интелектуалних особина, коришћењу што више разноврсних метода рада, мотивацији, подстицају интелектуалног развоја.

4. Програмске основе рада са даровитим ученицима

За квалитетан рад са даровитим ученицима који ће давати и задовољавајуће резултате, веома је важан одабир садржаја рада. Диофантове једначине су сигурно једна од тема која се не може изоставити.

4.1.Заступљеност Диофантових једначина у редовној настави

У оквиру наставног садржаја редовне наставе математике у основној школи, Диофантових једначина нема. Међутим, оне су у интегрисаном облику присутне у готово свим разредима. Користе се приликом увежбавања пређених наставних садржаја а да није назначено да је дати задатак Диофантова једначина.

У нижим разредима основне школе, оне се користе приликом провере савладавања рачунских операција, као и код провере комбинаторних способности. У вишим разредима основне школе Диофантове једначине се јављају као математички ребуси, затим приликом решавања проблема везаних за дељивост бројева, растављања полинома на чиниоце итд.

У садржајима рада редовне наставе математике како у средњим стручним школама тако и у гимназији нису присутне Диофантове једначине. Међутим, као и у основној школи, тако и у средњим школама оне се користе у проблемским задацима. У првом разреду садржаји рада код којих се јављају Диофантове једначине јесу: примене растављања полинома на чиниоце, рационални алгебарски изрази и линеарне једначине. У другом разреду то су садржаји везани за квадратну једначину и једначине које се на њу своде. У наставним садржајима трећег и четвртог разреда Диофантових једначина нема.

Једино у наставном програму математичке гимназије, Диофантове једначине су једна од тема која се обрађује у оквиру теорије бројева.

Заступљена је линеарна Диофантова једначина, Питагорине тројке, велика Фермаова теорема и елементарни Диофантски проблеми.

4.2. Заступљеност Диофантових једначина у додатној настави

У оквиру додатне наставе математике у основној школи Диофантове једначине се јављају од самог почетка, тј. од четвртог разреда и то кроз тему ,,Бројевни ребуси-дешифровање операција". Диофантове једначине се у петом разреду јављају у наставним садржајима ,,Дељивост и прости бројеви". У шестом разреду приликом решавања проблема везаних за разломке и целе бројеве, решавају се Диофантове једначине. У седмом разреду, у оквиру примене проблема у вези степеновања, затим растављања полинома, као и код теме ,,Дељивост" јављају се Диофантове једначине. Као наставна тема додатне наставе математике за осми разред први пут се експлицитно помињу Диофантове једначине. Даровити ученици се упознају са линеарном Диофантовом једначином, са једноставнијим системима линеарних Диофантових једначина као и њиховом применом. Затим и са решавањем Диофантових једначина коришћењем метода количника, збира, неједнакости, дељивости бројева. Могу се још упознати и са Питагорином једначином и бројем решења неких једноставнијих једначина.

У средњим школама (гимназије и средње стручне школе) у оквиру програма додатне наставе математике у првом и другом разреду су Диофантове једначине заступљене. У осталим разредима јављају се код припреме ученика за такмичења из математике.

У првом разреду обрађују се сложеније Диофантове једначине. Како су у првом разреду ученици вештији у вршењу алгебарских трансформација, то се детаљно обрађује њихова примена на решавање сложенијих нелинеарних Диофантових једначина.

У другом разреду решавају се неелементарне квадратне Диофантове једначине, затим једначине које се на њих своде, као и ирационалне и експоненцијалне Диофантове једначине јер се ученици у оквиру редовне наставе упознају са квадратним ирационалним и експоненцијалним једначинама.

Садржајима додатне наставе математике за трећи и четврти разред средње школе нису предвиђене Диофантове једначине. Међутим, у трећем разреду тема,,Рекурентне формуле“ може се искористити за упознавање са Пеловом једначином и њеним решавањем. Док у четвртом разреду тема ,,Кратак преглед историје математике“ може послужити за упознавање са Фермаовим проблемом.

4.3. Математичка предзнања даровитих стечена у основној школи

У петом и шестом разреду основне школе ученици добијају знања из елементарне теорије бројева (о дељивости бројева, о простим и сложеним бројевима, о делиоцима бројева...). Веома је важно и познавање скупова природних, целих и рационалних бројева, као и познавање њихових особина, затим операција које су у тим скуповима издвојене и најзад једначина које су у тим скуповима решиве.

У седмом разреду стичу се знања о квадрирању и кореновању, о скупу реалних бројева, о степену бројева чији су изложиоци природни бројеви и операцијама са њима.

Обрађују се полиноми, рационални алгебарски изрази и њихове идентичке трансформације.

У осмом разреду се комплетира садржај и тада се детаљно изучавају линеарне једначине, неједначине и функције, системи линеарних једначина и неједначина и проблеми који се на њих своде. Све ово као и програм додатне наставе је добра основа за проучавање Диофантових једначина у основној школи. Наставне теме у седмом разреду: Полиноми, Дељивост бројева, Низови, Питагорина теорема и Елементи комбинаторике представљају значајну потпору да се садржаји везани за Диофантове једначине квалитетно и на најбољи могући начин реализују.

4.4. Математичка предзнања која даровити стичу у средњој школи

Наставни садржаји у првом разреду средње школе, на часовима редовне наставе, који су од значаја за наставак приче о Диофантовим једначинама јесу: Упознавање са математичком логиком и упознавање са основама математичког доказа (дефиниција, аксиома, теорема, доказ), надоградња већ стечених знања о полиномима и растављању полинома на чиниоце, боље упознавање са рационалним алгебарским изразима и операцијама са њима, детаљније, а такође на основном нивоу, проучавање линеарних функција, једначина и система.

Садржаји који су од значаја за проучавање Диофантових једначина а ученици се са њима срећу у другом разреду јесу: Степени, Корени, Квадратна функција, квадратна једначина и једначине које се на њу своде, Ирационалне, Експоненцијалне и Логаритамске једначине.

У трећем разреду нема садржаја који су директно везани за Диофантове једначине. Међутим на поменуту материју се надовезују Аналитичка геометрија и криве другог реда као и Математичка индукција, а то су наставне теме које се изучавају у трећем разреду.

Како се у четвртом разреду изучавају наставни садржаји у вези са диференцијалним и интегралним рачуном, може се узети само комбинаторика и њена повезаност са бројем решења појединих Диофантових једначина, као тема која има неку везу са Диофантовим једначинама.

Када се посматрају програми додатне наставе математике и садржаји који се директно односе на Диофантове једначине, могу се издвојити следеће теме по разредима:

Први разред – Доказ у математици, Елементарна теорија бројева, Полиноми, Једначине и неједначине

Други разред – Квадратна функција и једначина, Ирационалне и Експоненцијалне једначине.

У трећем и четвртом разреду нема садржаја који су у непосредној вези са Диофантовим једначинама. Могли би се издвојити садржаји о системима једначина и неједначина другог и вишег реда у трећем разреду.

4.5. Предлог садржаја рада

Све претходно изложено представља полазну основу приликом дефинисања садржаја рада са даровитим ученицима у области коју чине Диофантове једначине. Када говоримо о садржајима рада са даровитим ученицима ту не подразумевано само математичке садржаје, већ и методолошке, истраживачке и др. Наставна материја која је претходно анализирана, може се поделити у неколико тематски повезаних области.

Прва област произилази из чињенице да су после реализације наставних тема о полиномима и рационалним алгебарским изразима стечене основе за реализацију садржаја и о Диофантовим једначинама које се решавају коришћењем разних алгебарских трансформација. Ова област је погодна за самостални рад ученика али и за евентуалне експерименте у области истраживачког рада ученика.

Друга област, као последица корелације са редовном наставом, обухватала би најједноставније Диофантове једначине, једначине са само једном непознатом и њихове примене.

Трећа област би садржала теме чија реализација подразумева детаљније проучавање линеарних Диофантових једначина са две, три и више непознатих, као и системе линеарних Диофантових једначина и њихове примене.

Четврту област чине теме у вези са квадратном Диофантовом једначином са две, три и више непознатих разних облика, као и истраживања која се поводом тога могу спровести варирањем параметара и од конкретних ка општијим једначинама. Ова област подразумева и садржаје као што су Питагорина једначина и њене примене на Херонове троуглове и друге квадратне Диофантове једначине, као и примене већ научене широке лепезе метода за решавање Диофантових једначина.

Пета област подразумева оне Диофантове једначине које као и квадратне за полазну основу имају наставне садржаје редовне наставе. То су: Диофантове једначине чији је степен већи од два, затим Ирационалне и Експоненцијалне Диофантове једначине.

Шеста област је највиши ступањ и превазилази ниво који је дефинисан програмом додатне наставе за средњу школу али не и интелектуални ниво ученика даровитих за математику. За ову групу занимљиве теме биле би: Пелова једначина, Примена метода координата у решавању Диофантових једначина, Фермаов проблем...

Седма и последња област садржи теме које нису у директној вези са Диофантовим једначинама, али јесу повезане са нечим веома важним а то је истраживачки рад даровитих ученика. То би била конкретна питања и упутства за напредовање талентованих ученика ка научном раду.

3. Кратак осврт на Диофанта и његову ,,АРИТМЕТИКУ“

Диофантова ,,Аритметика“ садржи 6 сачуваних књига а било је написано 13. У књигама су систематично изложене основе елементарне алгебре. Дат је велики број проблема који се своде на неодређене једначине различитих степена, изложене су и методе за решавање таквих једначина у скупу позитивних рационалних бројева.

У историји математике Диофант је први помињао вишедимензионе геометрије. Диофантово излагање је аналитичко, он за означавање непознатих и њихових степена, супротних и реципрочних бројева, минуса и једнакости користи скраћени запис речи или симболе.

Диофантова ,,Аритметика“ представља збирку задатака која садржи 189 проблема. Међутим, њеним пажљивим проучавањем јасно се види да то није обична збирка задатака, због тога што у њој постоји и више решења појединих проблема, као и решења која су добијена применом различитих метода и потребна објашњења.

Пажљивим проучавањем ,,Аритметике“ долази се до закључка да конкретни проблеми у ствари служе као илустрација општих метода, па се може рећи да она ипак представља теоријски рад. У античко доба је било уобичајено да се методе не излажу одвојено од задатака, оне се разоткривају током решавања проблема.

Импресивна је Диофантова систематичност, методичност и поступност у излагању датих проблема.

5.1. *Диофант*

Није познато када је Диофант живео. Верује се да је живео у тећем веку нове ере. Поуздано се зна да је био грчки математичар који је радио на Александријском универзитету у Египту. О његовом животу није остало писаних трагова, осим необичног натписа на његовој надгробној плочи, који гласи:

,,Путниче! Овде је сахрањен Диофант. Бројеви говоре колико је био дуг његов живот. Шестину његовог живота чини прекрасно детињство. Дванаестину чини његова младост. Седмину свог живота Диофант је провео у браку без деце. Прошло је још пет година док му Химен Бог брака и свадбе, није подарио сина. Судбина је хтела да син поживи два пута мање од свог оца. Још четири године поживео је старац у дубоком болу за изгубљеним сином. Колико је живео Диофант? “

Ако би овај текст превели на језик алгебре он би изгедао овако:

Бројеви говоре колико је био дуг његов живот: x;

Шестину његовог живота чини прекрасно детињство: $\frac{x}{6}$;

Дванаестину чини његова младост: $\frac{x}{12}$;

Седмину свог живота Диофант је провео у браку без деце: $\frac{x}{7}$;

Прошло је још пет година док му Химен није подарио сина: 5;

Судбина је хтела да син поживи два пута мање од оца: $\frac{x}{2}$;

Још четири године поживео је старац у дубоком болу за изгубљеним сином: 4.

Или као алгебарска једначина : $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

Дакле, решавањем једначине првог степена са једном непознатом (а то су египатски писари знали да ураде 200 година пне.) откривамо да је Диофант живео 84 године.

Диофантове једначине су и важна и занимљива тема којом су се математичари бавили на дугом и богатом путу историје развоја математике. Колики је значај Диофантовог доприноса развоју математике довољно говори то да је назван ,,оцем" аритметике. Значај Диофантових једначина је у томе што оне обједињују готово све садржаје теорије бројева, као што су: дељивост бројева,прости бројеви, конгруенције и др. Затим, теорије једначина, полинома, неједнакости, математичке логике...

Првој књизи ,,Аритметике" претходе Диофантова објашњења, чије кратко излагање следи.

5.2. Диофантови бројеви и симболи

Сва достигнућа античке математике била су сакупљена у Еуклидовим ,,Елементима". Бројеви ($\alpha\rho\iota\tau\mu o\varsigma$, од ове речи је аритметика добила име као наука о бројевима) су били представљани као скупине јединица и то су били цели бројеви. Разломљене и ирационалне величине нису представљале бројеве. Јединица је посматрана као недељива а ирационалне величине су представљале однос несамерљивих величина. Нпр. број који данас означавамо као $\sqrt{2}$ представљан је као дијагонала квадрата чија је дужина странице један. Такође нису постојали негативни бројеви нити њихови еквиваленти.

Диофант бројеве посматра као скупине јединица али је увео и негативне бројеве за које користи израз - $\lambda\varepsilon\tau\varphi\iota\varsigma$. Овај израз је изведен од речи - $\lambda\varepsilon\tau\pi\omega$, што значи недостаје, тако да $\lambda\varepsilon\tau\varphi\iota\varsigma$ може бити преведено као ,,недостатак". За позитивне бројеве Диофант је користио израз - $\vartheta\pi\alpha\rho\xi\iota\varsigma$, што значи постојање. Диофантови термини које је користио за позитивне и негативне бројеве, слични су терминима који су коришћени у средњем веку на Истоку и у Европи. Врло је вероватно да су ови Диофантови термини са грчког преведени на арапски, латински и друге европске језике.

Диофант говори о производу позитивних и негативних бројева, па је формулисао правило да негативан број помножен негативним даје позитиван, а да негативан број помножен позитивним даје негативан број. Такође уводи ознаку за данашњи минус а то је обрнуто и скраћено Ψ, тј. ⫛.

Иако је Диофант посматрао само позитивна рационална решења, он је у помоћним израчунавањима користио и негативне бројеве. Са сигурношћу можемо рећи да је Диофант проширио домен бројева на поље рационалних, где се једноставно могу спроводити све четири алгебарске операције.

У Диофантовој ,,Аритметици" први пут се јављају математички симболи. Он уводи симболе за бројеве и степене:

први степен – ς

други степен - $\Delta^{\bar{\upsilon}}$, од $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, снага

трећи степен - $K^{\bar{\upsilon}}$, од $K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$, куб

четврти степен - $\Delta^{\bar{\upsilon}}\Delta$, од $\Delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$, квадрат квадрата

пети степен - $\Delta K^{\bar{\upsilon}}$, од Δύναμοχύβος, квадрат куб

шести степен - $K^{\bar{\upsilon}} K'$, од Κύβοχβος куб куб.

Константу X^0 Диофант означава симболом M^0. За негативне експоненте је увео симбол χ .

Уводи и симбол једнакости ισ прва два слова речи ισος - што значи једнако, али не уводи никакве посебне симболе за сабирање и множење. Такође није увео симбол за другу променљиву што додатно компликује проблем. Тако можемо рећи да је ово почетак словне конструкције алгебре.

5.3. Кратак преглед прве књиге Диофантове „Аритметике"

Прва књига Диофантове ,,Аритметике" садржи 39 проблема и сви су они одређени, јер представљају једначине са једном непознатом или системе једначина код којих број једначина одговара броју непознатих. Проблеми су изложени од лакших ка тежим. Чак и проблеми који су по својој формулацији неодређени, постају решиви додавањем нових услова током самог процеса решавања(I_{14}, I_{22},I_{23},I_{24},I_{25}).

Можемо као пример узети проблем I_{14}: Одредити два броја, тако да њихов производ и њихов збир имају задати однос, који се своди на једначину: $xy=k(x+y)$

Диофант најпре за коефицијент пропорционалности узима број 3 ($k=3$) а затим примећује да се један од бројева x и y може задати произвољно. Ако се узме да је $y=12$ добија се за $x=4$. Интересантно је да исти проблем Диофант решава у другој књизи као проблем II_3 а који решава као неодређену једначину у којој бира само коефицијент пропорционалности $k=6$, а вредности за x и y добија тако што узима да су они управо пропорционални $x=t$, $y=\beta t$.

Проблеми I_{27}, I_{28}, I_{29}, I_{30} у првој књизи Диофантове ,,Аритметике" дати су у облику система од две једначине са две непознате а који је еквивалентан квадратној једначини. Занимљиво је напоменути да Диофант код ових проблема поставља услов да дискриминанта буде потпун квадрат и на тај начин обезбеђује да решења добијене једначине буду рационална.

5.4. Кратак преглед друге књиге Диофантове „Аритметике"

Проблеми које Диофант излаже у другој књизи се конкретно односе на Диофантове једначине. Првих десет проблема своде се на једначине облика: $F_2(x,y)=0$, где $F_2(x,y)$ представља полином другог степена с рационалним коефицијентима.При решавању ових проблема Диофант примењује свој метод који се може илустровати на примеру проблема II_8. Превод овог проблема гласио би: ,,Дати квадрат разложити на два квадрата". Овај проблем у ствари представља Питагорину једначину $x^2+y^2=z^2$. Конкретно, Диофант је желео 16 да разложи на два квадрата, x^2 и $y^2=16-x^2$. Решење је овако образложио: Пошто $16-x^2$ мора бити потпун квадрат, нека то буде квадрат броја $y=2x-4$. Тако се добија једначина $16-x^2=(2x-4)^2$ тј. после квадрирања $16-x^2=4x^2-16x+16$ после сређивања имамо $5x^2=16x$ односно $x=0$ или $x=\frac{16}{5}$ па добијамо $\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=4^2=16$.

Међутим, поставља се питање зашто Диофант бира баш $2x-4$? Одговор је једноставан, зато што се после квадрирања израза $y=2x-4$ добија елементарна квадратна једначина, јер се 16 са једне и са друге стране једначине поништавају.

До сличног резултата долази се и када се узме $y=5x-4$. Тада је $16-x^2=(5x-4)^2$, односно после квадрирања $16-x^2=25x^2-40x+16$ одакле се добија $26x^2=40x$, односно $x=0$

или $x=\frac{20}{13}$, па је у овом случају тражено разлагање $\left(\frac{20}{13}\right)^2+\left(\frac{48}{13}\right)^2=4^2=16$. Овај пример показује две ствари: дати пример се може уопштити као и да дата једначина у скупу рационалних бројева има бесконачно много решења.

У општем случају ако посматрамо једначину $x^2+y^2=z^2$ а по узору на Диофантов метод нека је $y=px-z$; (x,y,z су природни бројеви, p је рационалан број). Тада је: $z^2-x^2=p^2x^2-2pxz+z^2$ решавањем по x добија се $(p^2+1)x^2=2pxz$ односно $x=\frac{2pz}{p^2+1}$ па следи да је $y=\frac{p^2-1}{p^2+1}z$ а онда је $\frac{x}{z}=\frac{2p}{p^2+1}$; $\frac{y}{z}=\frac{p^2-1}{p^2+1}$. Очигледно је да формуле $x=2p$; $y=p^2-1$; $z=p^2+1$ дефинишу бесконачно много рационалних решења дате једначине. Ако се узме да је p рационалан број $p=\frac{m}{n}$, где су m и n међусобно прости природни бројеви, тада добијамо: $\frac{x}{z}=\frac{2mn}{m^2+n^2}$ и $\frac{y}{z}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$. Очигледно је да формуле $x=2mn$; $y=m^2-n^2$; $z=m^2+n^2$ дефинишу једну целобројну Питагорину тројку. Диофант о броју решења ништа експлицитно не пише, међутим, јасно је да је за сваки број p у првом, тј. за сваки пар бројева (m,n) у другом случају, дефинисана једна Питагорина тројка, односно да Питагорина једначина има бесконачно много решења.

Овај Диофантов параметарски метод је применљив на знатан број квадратних Диофантових једначина код којих је познато бар једно, основно целобројно (или рационално) решење.

5.5. Остале књиге Диофантове „Аритметике“

Као логичан наставак претходних излагања, у трећој књизи Диофант се углавном бави системима неодређених једначина, где је степен променљивих мањи или једнак два а број једначина је увек већи или једнак три.

Четврта књига садржи неодређене једначине трећег и четвртог степена, па чак у проблему IV_{18} и једначину шестог степена. Диофант у овој књизи свој метод за одређивање рационалних решења неодређених једначина облика $F_2(x,y)=0$ примењује на једначине облика $F_3(x,y)=0$. Речено језиком аналитичке геометрије, Диофант у првом случају одређује тачке у којима права y=kx (k је неки рационалан број) сече криву $F_2(x,y)=0$

а у другом је додирује. У овој књизи Диофант за добијање рационалних тачака криве $F_3(x,y)=0$ користи две сличне методе : ,, метод сечице " и „ метод тенгенте ".

На проблему IV_{24} Диофант користи метод тангенте. Проблем гласи: Поделити дати број на два броја таква да њихов производ представља куб минус његов корен.

Дат је број 6. Ако ставимо да је први број x, онда је други број $6-x$ а услов који треба да буде задовољен је $x_1 \cdot x_2 = y^3 - y$. Добија се да је $x_1 \cdot x_2 = 6x - x^2$. Овај израз треба да буде једнак $y^3 - y$. Једно од рационалних решења је (0,-1) па ако ставимо да је $y = ax - 1$, где је a произвољан број нпр. $a = 2$, онда добијамо $(2x-1)^3 - (2x-1) = 8x^3 - 12x^2 + 4x$, дакле сада овај израз треба да буде једнак са $6x - x^2$. Ако су коефицијенти уз x у оба израза једнаки, x ће бити рационалан. Број 4 настаје као $3 \cdot 2$-2, али 6 долази из података. Мора се детерминисати a тако да је $3a - a = 6$. Када ставимо $y = 3x - 1$, добијамо $y^3 - y = 27x^3 - 27x^2 + 6x$ овај израз мора бити једнак са $6x - x^2$. Одатле следи да је $x = \frac{26}{27}; x_1 = \frac{26}{27}; x_2 = \frac{136}{27}$. (На почетку смо рекли ако је први број x, онда је други број $6 - x$).

Како је изгледао Диофантов метод у општем случају: Нека је са a означен дати број а са x и a - x потребни бројеви. Знамо да је $x(a - x) = y^3 - y$ (1)

Једно рационално решење је (0,-1), Диофант кроз ову тачку пролази правом $y = kx - 1$ (2), ставља $k = 2$ и тражи њен пресек са кривом (1): $ax - x^2 = k^3x^3 - 3k^2x^2 + 2kx$ Да би x било рационално, довољно је ставити $2k = a$ (3), што је Диофант и чинио. Тада се добија $x = \frac{3k^2 - 1}{k^3} = 2\frac{3a^2 - 4}{a^3}$. Да бисмо објаснили значај услова (3) за праву (2) примењујемо Диофантов метод на произвољну кубну једначину са две непознате $F_3(x,y)=0$ са рационалним решењем (a,b): $F_3(a,b)=0$. Кроз тачку $P(a,b)$ цртамо праву $y - b = k(x - a)$ (4) или $x = a + t, \quad y = b + kt$.

Тада $F_3(a+t, b+kt) = F_3(a,b) + tA(a,b) + ktB(a,b) + t^2c(a,b,k) + t^3D(a,b,k) = 0$. Како је **$F_3$** (a,b)=0 и ако ставимо $A(a,b) + kB(a,b) = 0$ добијамо $k = -\frac{A(a,b)}{B(a,b)} = -\frac{\frac{\partial F_3}{\partial x}}{\frac{\partial F_3}{\partial y}}(p)$, тј. нагиб криве (4) мора бити изабран тако да је она тангента криве $F_3(x,y)=0$ у тачки $P(a,b)$. Дакле Диофант овде користи метод тангенте.

У проблему IV_{26} Диофант користи метод сечице, а проблем гласи овако: Наћи два броја чији производ увећан за један од њих даје куб. Ако узмемо да је $x_1 = a^3 x$, где је $a = 2$, онда је $x_1 = 8x$. Затим ставимо $x_2 = x^2 - 1$ па је један услов задовољен, $x_1 x_2 + x_1$ је куб. Остаје да се испуни да и $x_1 x_2 + x_2$ буде куб. Како је $x_1 x_2 + x_2 = 8x^3 + x^2 - 8x - 1$ и ако узмемо да је овај израз једнак са $(2x-1)^3$однoсно $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ тада је $x = \frac{14}{13}; x_1 = \frac{112}{13}; x_2 = \frac{27}{169}$.

Ако пратимо Диофантов поступак, прва непозната је означена са $a^3 x$ а друга са $x^2 - 1$, онда је први услов проблема задовољен а за други добијамо $a^3 x^3 + x^2 - a^3 x - 1 = y^3 \quad (I)$. Диофант уводи замену $y = ax - 1$ и добија $x = \frac{a^3 + 3a}{1 + 3a^2}$. Обратимо пажњу на неке детаље методе коју је Диофант користио у овом проблему. Једно од рационалних решења (I) је (0,-1). Повлачимо праву $y = kx - 1$ кроз ову тачку и одредимо тачку пресека са (I) $(a^3 - k^3)x^3 + (1 + 3k^2)x^2 - (a^3 + 3k)x = 0$. Диофант је ставио да је коефицијент уз x^3 нула и добио $a^3 - k^3 = 0$ односно $k = a$.

Шта представља геометријско значење овог корака? Да бисмо добили одговор на ово питање напишимо (I) у хомогеним координатама. Ако ставимо $x = \frac{u}{z}; \; y = \frac{v}{z}$ добићемо $a^3 u^3 + u^3 z - a^3 u z^2 - z^3 = v^3 \; (I')$, видимо да ова крива има рационалне тачке $P_1(0,-1,1); \quad P_2(1, a, 0)$ које детерминишу праву $v = au - z$. Пресек (I') и ове праве даје трећу рационалну тачку. Диофант, дакле користи метод сечице када је једно рационално решење коначно, а друго је тачка у бесконачности.

Пета књига је састављена од најсложенијих проблема. У Диофантовој интерпретацији проблем V_9 гласи овако: ,,Поделити јединицу на два дела тако да ако се исти број дода сваком делу, резултат ће бити квадрат“. Проблем прате речи. ,, Дати број не сме бити непаран и његова двострука вредност увећана за јединицу, не сме бити број дељив простим бројем, који је после додавања јединице дељив са 4“.

Преведено на језик алгебре, ако су тражени разломци x и y а дати број a, онда је $x + y = 1; \quad x + a = m^2; \quad y + a = n^2$, када последње две једначине саберемо, добијамо $x + y + 2a = m^2 + n^2$а како је $x + y = 1$добијамо $2a + 1 = m^2 + n^2$. У ствари треба непаран број представити као збир квадрата два природна броја. Овде нема спора око Диофантове формулације проблема, већ око формулације услова задатка. Диофант каже. ,,Дати број не сме бити непаран и његова двострука вредност увећана за јединицу, не сме бити број дељив простим бројем, који је после додавања јединице дељив са 4“.

Данас знамо да једначина $x^2 + y^2 = m$ нема решења ако m има облик $2^k(2n+1)^2(4p+3)$, где су k, n, p ненегативни цели бројеви, што значи да број $2a+1$ не сме бити број који је после издвајања квадрата дељив бар једним простим бројем облика $4k+3$. У историји математике било је много расправа око формулације тог услова, чак су у помоћ позвани и филозофи.

Пета књига значајна је и по томе што се Диофант у њој бави у проблемима V_9-V_{14} представљањем природног броја у облику збира два, три, четири квадрата, који задовољавају неке услове тј. неједнакости. Код решавања ових проблема користи метод који назива ,, метод приближавања ", где се бави квадратним неједначинама и решавањем једначина облика $ax^2 + 1 = y^2$.

Диофант се у шестој књизи ,,Аритметике" бавио углавном правоуглим троугловима, чији су мерни бројеви страница рационални бројеви, односно, рационалним бројевима x, y, z који задовољавају једначину: $x^2 + y^2 = z^2$. Поред овог услова који је општи за све проблеме он додаје још услова који се односе на обим, површину... Шеста књига је значајна по томе што Диофант у њој у проблемима VI_{12} и VI_{15} презентује три леме везане за једначину облика $ax^2 + 1 = y^2$ у којима се доказује да ако дата једначина има једно решење има и бесконачно много решења.

Пажљивим проучавањем Диофантове ,,Аритметике" можемо закључити да нису била фасцинантна само његова достигнућа на пољу алгебре као утемељитеља Диофантове анализе, већ је он био и изванредан познавалац теорије бројева.

6. Најчешће коришћене методе решавања Диофантових једначина

Алгебарска једначина или систем алгебарских једначина, са рационалним коефицијентима, чија се решења траже у скупу целих или рационалних бројева (или неком од његових подскупова) зове се алгебарска Диофантова једначина.

Приликом рашавања Диофантових једначина, захтеви могу бити веома разноврсни. Одговори на задата питања често веома тешки, што захтева препознавање одговарајуће методе за решавање датог проблема. Општи поступак се може дефинасати само за поједине класе једначина. У овом поглављу биће изложене најчешће методе за решавање Диофантових једначина.

6.1. Метод разликовања случајева

Ово је један од метода који се највише примењује за решавање математичких проблема уопште. У решавању Диофантових једначина је такође један од највише примењиваних метода, самостално или у комбинацији са другим методама. Могло би се рећи да овај метод садржи одређену дозу произвољности, јер основно је питање: ,, Како раздвојити случајеве?“ ту је од користи математичка интуиција, таленат, осећај за проблем и наравно искуство. Када се овом методом решавају Диофантове једначине са две променљиве, суштина је у томе да се претпостави решење једне променљиве које је могуће, а затим се израчуна вредност друге променљиве. Када су у питању Диофантове једначине са више од две променљиве, раздвајање случајева врши се по једној променљивој која је за то најподеснија, затим се у једном случају разматрају нови и све тако док се не добије низ једначина са једном непознатом.

ПРИМЕР 1: Да ли постоје цели бројеви x и y такви да је xy-3x+2y=7 ?

РЕШЕЊЕ: Ако једначину напишемо у облику $xy-3x+2y-6=1$ и леву страну раставимо на чиниоце, добијамо еквивалентну једначину $(x+2)(y-3)=1$. Производ два цела броја $(x+2)$ и $(y-3)$ биће једнак један само ако су оба 1 или -1; разликују се два случаја:

1) $x+2=1 \wedge y-3=1 \Rightarrow x=-1 \wedge y=4$

2) $x+2=-1 \wedge y-3=-1 \Rightarrow x=-3 \wedge y=2$

Па су решења дате једначине: (-1,4) и (-3,2).

ПРИМЕР 2: Одредити све уређене парове (x,y) природних бројева x и y тако да важи једнакост: xy^2-4=2000y.

РЕШЕЊЕ: Разликују се два случаја:

1) Ако је $y=0 \Rightarrow 4=0$ тако да $y=0$ није решење дате једначине.

2) Ако је $y \neq 0 \Rightarrow xy-\frac{4}{y}=2000 \Rightarrow xy-2000=\frac{4}{y}$. Како $x,y \in N$, то је и $xy-2000$ цео број а онда мора бити и $\frac{4}{y}$ цео број. Због тога разликујемо следеће случајеве.

2.1) Ако је $y = 1 \Rightarrow x = 2004$

2.2) Ако је $y = 2 \Rightarrow x = 1001$

2.3) Ако је $y = 4 \Rightarrow 4x = 2001$ што не може бити, тако да у овом случају једначина нема решења.

Сва решења дате једначине су: $(2004,1);(1001,2)$.

6.2. Метод алгебарских трансформација

Алгебарске трансформације представљају средство којим се дата Диофантова једначина своди на еквивалентну једначину која има облик погодан за дискусију, односно, разликовање случајева.

6.2.1. Метод производа

Приликом решавања нелинеарних Диофантових једначина овај метод се често користи. Чине га трансформације Диофантове једначине у производ два или више чинилаца. Најподеснија ситуација је када се на једној страни знака једнакости, факторизује израз који садржи променљиве, а на другој страни константа. Затим се разликују случајеви.

ПРИМЕР 3: У скупу целих бројева решити једначину: xy+2x=7

РЕШЕЊЕ: Факторизацијом почетне једначине добијамо: $x(y+2)=7$, као је десна страна једначине цео број, то мора и лева страна бити цео број. Тако разликујемо четири случаја:

1) $(x = 1 \wedge y + 2 = 7) \Rightarrow (x, y) = (1,5)$
2) $(x = 7 \wedge y + 2 = 1) \Rightarrow (x, y) = (7,-1)$
3) $(x = -1 \wedge y = -7) \Rightarrow (x, y) = (-1,-9)$
4) $(x = -7 \wedge y = -1) \Rightarrow (x, y) = (-7,-3)$

Решења дате једначине су: $(1,5);(7,-1);(-1,-9);(-7,-3)$.

ПРИМЕР 4: У скупу целих бројева наћи сва решења једначине: $2x^2+3xy+y^2+1=0$.

РЕШЕЊЕ: Трансформацијом полазне једначине добијамо: $2x(x+y)+y(x+y)+1=0$ тј. $(x+y)(2x+y)=-1$. Сада разликујемо случајеве:

1) $(x+y=1 \wedge 2x+y=-1) \Rightarrow (x,y)=(-2,3)$
2) $(x+y=-1 \wedge 2x+y=1) \Rightarrow (x,y)=(2,-3)$

Решења дате једначине су: $(-2,3);(2,-3)$.

6.2.2. *Метод количника*

Када је Диофантова једначина дата тако да је погодним трансформацијама можемо свести на еквивалентан облик, такав, да из ње можемо изразити једну промењљиву у зависности од друге, користимо овај метод.

ПРИМЕР 5: У скупу целих бројева решити једначину: xy+7x-3y=23

РЕШЕЊЕ: Трансформишући полазну једначину добијамо: $x(y+7)=3y+23$, односно $x=\frac{3y+23}{y+7}=\frac{3y+21+2}{y+7}=3+\frac{2}{y+7}$. Разликујемо случајеве:

1) $y=-7 \Rightarrow x=3+\frac{2}{-7+7}$, како именилац разломка не може бити једнак нули, то у овом случају нема решења.

2) $y \neq -7 \Rightarrow x=3+\frac{2}{y+7}$, пошто у услову задатка стоји да x мора бити цео број онда и $3+\frac{2}{y+7}$, односно $\frac{2}{y+7}$ мора бити цео број, па разликујемо случајеве:

2.1) $y+7=1 \Rightarrow x=5 \wedge y=-6$
2.2) $y+7=-1 \Rightarrow x=1 \wedge y=-8$
2.3) $y+7=2 \Rightarrow x=4 \wedge y=-5$
2.4) $y+7=-2 \Rightarrow x=2 \wedge y=-9$

Решења полазне једначине су: $(5,-6);(1,-8);(4,-5);(2,-9)$.

ПРИМЕР 6: Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{xy}=10x+y$ по услову задатка $10x+y=(x+y)^2$ што можемо писати као $9x+(x+y)=(x+y)^2$ како је $x\neq 0$ и када последњу једнакост поделимо са $x+y$ добијамо: $\frac{9x}{x+y}+1=x+y$. Узмимо да је НЗД за x и y једнак d, тада постоје узајамно прости бројеви a и b такви да је $1\leq x=ad\leq 9$; $0\leq y=bd\leq 9$, па тако једначина постаје: $\frac{9ad}{(a+b)d}+1=(a+b)d$ или $\frac{9a}{a+b}+1=(a+b)d$. Количник $\frac{9a}{a+b}$ мора бити паран број, још како су a и b узајамно прости бројеви, разликујемо случајеве:

1) $a+b=1\Rightarrow 9a+1=d$ што је немогуће, јер из $a+b=1\Rightarrow a=1\wedge b=0$ (јер је $x\neq 0$) тада би било $d=10$ што није случај, јер је $d\leq 9$.

2) $a+b=3\Rightarrow 3a+1=3d$ и ово је немогуће јер добијена једначина нема целобројних решења.

3) $a+b=9\Rightarrow a+1=9d$ или $a=9d-1$, како је $1\leq x\leq 9\Rightarrow 1\leq x=ad=(9d-1)\leq 9$ па је $d=9$, значи да је $a=8$ и $b=1$. Тражени број је 81.

6.2.3. Метод збира

Суштина овог метода је да се најпре дата једначина трансформише у облик погодан за разликовање случајева. Један од најпогоднијих облика био би збир квадрата, или општије, збир ненегативних сабирака.

ПРИМЕР 7: У скупу целих бројева решити једначину: $x^2+xy+y^2=1$

РЕШЕЊЕ: Ако полазну једначину помножимо са 2 добија се еквивалентна једначина: $2x^2+2xy+2y^2=2$ или $x^2+(x+y)^2+y^2=2$ тј. збир квадрата три броја једнак је 2. Ако су два од тих бројева једнаки јединици, трећи је нула па тако разликујемо три случаја

1) $x^2=1\wedge(x+y)^2=1\wedge y^2=0\Rightarrow x=1\vee x=-1\wedge y=0$ па су решења (1,0) или (-1,0)

2) $x^2=1\wedge(x+y)^2=0\wedge y^2=1$ како је $x+y=0\Rightarrow$ $|x|=1\wedge|y|=1$, па су решења (1,-1) или (-1,1)

3) $x^2=0\wedge(x+y)^2=1\wedge y^2=1\Rightarrow x=0\wedge y=1\vee y=-1$, тако добијамо решења (0,1 или (0,1)

Сва решења једначине су : $(1,0);(-1,0);(1,-1);(-1,1);(0,1);(1,-1)$.

Овај метод је веома погодан и за решавање Диофантових проблема, што је илустровано следећим примером.

ПРИМЕР 8: Одредити све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају остатак једнак збиру квадрата својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени троцифрени број $\overline{abc}$.

Како је $\overline{abc}=100a+10b+c=11(9a+b)+a-b+c$, значи да је остатак при дељењу траженог броја са 11 једнак $a-b+c$. По условима задатка је $a-b+c=a^2+b^2+c^2$ тј. $a^2+b^2+c^2-a+b-c=0$ ако ову једнакост помножимо са 2 добијамо

$2a^2+2b^2+2c^2-2a+2b-2c=0$ или $a^2+b^2+c^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=3$

Очигледно је да једначина има решења ако су три од датих сабирака једнаки нули, а преостала три једнака јединици. Пошто је $\overline{abc}$ троцифрен број мора бити $a\geq 1$ па је $a=1$, $b\geq 0$ тако је и $b+1\geq 1$ и због тога је $b=0\wedge b+1=1$. Тако имамо да је :

$a^2+b^2+c^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=1+0+c^2+0+1+(c-1)^2=3$ и разликујемо два случаја:

1) $c=0\wedge(c-1)^2=1$
2) $c=1\wedge(c-1)^2=0$

Тражени бројеви су 100 и 101.

Дати проблем се може и другачије разматрати:

Остатак при дељењу броја $\overline{abc}$ са 11 је $a^2+b^2+c^2$ тако да важи $0\leq a^2+b^2+c^2\leq 10$ што значи да је свака од цифара a,b и c мања или једнака 3, а збир квадрата све три цифре је мањи или једнак 10. Тако да у обзир долазе бројеви 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, 120, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 300, 301 и 310. Провером остатка при дељењу ових бројева са 11 и збира квадрата цифара утврђује се да само бројеви 100 и 101 испуњавају дате услове задатка.

6.2.4. *Метод неједнакости*

Веома често се као један од начина за разликовање случајева користе неједнакости, са циљем да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. У следећем кораку, једначина се решава неким од претходно изложених поступака, у преосталом делу области дефинисаности. Добро је елиминасати бесконачни део области дефинисаности, ако је то могуће, а затим једначину решавати у коначном скупу.

ПРИМЕР 9: Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки збиру куба цифре десетица и квадрата цифре јединица.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$ па је по условима задатка $\overline{ab}=10a+b=a^3+b^2$, такође је $\overline{ab}=10a+b\le 99$, тако да је и $a^3+b^3\le 99$ па је $1\le a\le 4$. Трансформацијом дате једначине добија се $10a-a^3=b^2-b$ или $a(10-a^2)=b(b-1)$. Како $b(b-1)$ представља производ два узастопна природна броја, који је паран, то је и $a(10-a^2)$ паран број па је онда и a паран број. Како је $a(10-a^2)\ge 0$ то је и $10-a^2\ge 0$ тј. $a\le 3$. Једини паран број који је мањи од 3 је 2, дакле $a=2$. Тада је $a(10-a^2)=b(b-1)=12$ што значи да је $b=4$. Тако добијамо да је тражени број 24(=2^3+4^2).

У овом примеру је метод неједнакости показао своју ефикасност, са само две неједнакости је број случајева са 90 сведен на само један.

ПРИМЕР 10: Ако су x, y, z различити природни бројеви, решити једначину: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

РЕШЕЊЕ: Без умањења општости можемо узети да је x<y<z. Јасно је да не може бити $x=1$ јер би онда било $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$. Нека је прво $x=2$ тада имамо једначину $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ и услов $2\le y\le z$. Очигледно не може бити $y=2$. За $y=3\Rightarrow z=6$ а за $y=4\Rightarrow z=4$. За $y>4\Rightarrow z>4$ па је $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{2}$. Сада нека је $x=3$, тада је и $y\ge 3, z\ge 3$, па је $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le 1$ и једнакост важи једино за $y=z=3$. Ако је сада $x>3\Rightarrow y>3\wedge z>3$ и тада је $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}<1$. Скуп решења добијамо када од свих добијених решења направимо све могуће комбинације. Решења (3,3,3) и (2,4,4) отпадају јер се траже различити природни бројеви.

6.2.5. *Метод парности*

Коришћење особина парности тј. непарности може довести до елиминисања великог броја случајева а самим тим и до сужења области вредности промењљивих. Овај метод за решавање Диофантових једначина користи се већ у петом разреду основне школе, што показује следећи пример.

ПРИМЕР 11: Одредити све просте бројеве p,q и r такве да је 2p+3q+4r=2006.

РЕШЕЊЕ: Бројеви $2p,4r$ и 2006 су парни, па је онда паран и број $3q$ тј. и број q је паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q=2$. Сада је $2p+4r=2000$ односно $p+2r=1000$, $2r$ и 1000 су парни бројеви, онда значи и p је паран, тј. $p=2$. Сада је $r=499$ и како је 499 прост број, долазимо до закључка да је јединствено решење задатка $p=q=2$ и $r=499$.

ПРИМЕР 12: Одредити све двоцифрене природне бројеве који су једнаки квадрату збира својих цифара.[1]

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$, па је према условима задатка $\overline{ab}=10a+b=(a+b)^2$.

Како је $10a+b=a+b+9a=(a+b)^2$, то је $9a=(a+b)(a+b-1)$. Како су $(a+b)$ и $(a+b-1)$ узастопни природни бројеви, то је њихов производ паран број, тако је и $9a$ такође паран, што значи да је и a паран број. Разликујемо следеће случајеве:

1) $\overline{ab}=25$, ово није решење, јер $(2+5)^2=49$ а не 25

2) $\overline{ab}=49$, ни ово није решење, јер $(4+9)^2=169$ а не 49

3) $\overline{ab}=64$, такође није решење, зато што је $(6+4)^2=100$ а није 64

4) $\overline{ab}=81$, ово јесте решење, јер је $(8+1)^2=9^2=81$

6.2.6. *Метод дељивости*

На једноставној чињеници, да ако је A=B тада су и својства израза A и B по питању дељивости идентична, заснива се овај метод решавања Диофантових једначина. Основна идеја је да се дата једначина A=B трансформише до еквивалентне једначине $A_к=B_к$, где један од израза $A_к$ или $B_к$ има јасно дефинисану дељивост.

[1] Овај проблем решаван је методом количника.

ПРИМЕР 13: Одредити све двоцифрене бројеве који су једнаки збиру квадрата цифре десетица и куба цифре јединица.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$, тада је $10a+b=a^2+b^3$. Трансформишући ову једнакост, долазимо до еквивалентног облика: $10a-a^2=a(10-a)=b^3-b=(b-1)b(b+1)$ Десну страну једначине чини производ три узастопна природна броја, који је увек дељив са 6, тако да и лева страна мора бити дељива са 6. Пошто су изрази a и $(10-a)$ исте парности и $a(10-a)$ ће бити дељиво са 6 ако је $a=6$ или $10-a=6$

1) Ако је $a=4$, онда је $24=(b-1)b(b+1)$, па је $b=3$, тако да је тражени број $43=4^2+3^3$

2) Ако је $a=6$, онда је $24=(b-1)b(b+1)$, па је $b=3$, тако да је тражени број $63=6^2+3^3$.

ПРИМЕР 14: Одредити све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.

РЕШЕЊЕ: Нека је тражени број $\overline{ab}$, па је по услову задатка $10a+b=9(a+b)$, што значи да је тражени број дељив са 9, тако да је и збир његових цифара дељив са 9. Сада је јасно да $a+b$ може бити једнако 9 или 18.

1) Ако је $a+b=9$, тада је $9\cdot 9=81=9(8+1)$

2) Ако је $a+b=18$, тада је $9\cdot 18=162$, 162 је троцифрен број, па је једино решење 81.

6.2.7. Метод конгруенција

За решавање неких Диофантових једначина применом овог метода , поступак решавања се знатно скраћује.

ПРИМЕР 15: Да ли постоје природни бројеви x,y,z и k такви да је $x^2+y^2+z^2=8k-1$?

РЕШЕЊЕ: Квадрати природних бројева конгруентни су са 0, 1 или 4 при дељењу са 8. Тада је $x^2+y^2+z^2$ конгруентно са 0 (0+0+0), 1(1+0+0), 2(1+1+0), 3(1+1+1), 4(4+0+0), 5(4+1+0), 6(4+1+1). Како је десна страна једначине конгруентна са 7, тј. са -1, а лева није, закључујемо да једначина нема решења ни за једно *k*.

ПРИМЕР 16: Да ли једначина $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{14}^4=1599$ има решења у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Ако је x природан број, тада су могући остаци при дељењу броја x са 16 елементи скупа {0,1,2,3,...,15}. Тада је $x^2 \equiv k$ (mod16) , $k \in \{0,1,4,9\}$. Одавде следи да је

$x^4 \equiv 0$ (mod16) или $x^4 \equiv 1$(mod16). Тако да збир $x_1^4+x_2^4+\dots+x_{14}^4$ приликом дељења са 16 може дати било који остатак из скупа {0,1,2,...,14} али не и 15. Како је 1599 $\equiv$ 15(mod16), то значи да дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

6.2.8. Метод дискриминанте

Овај метод се користи за решавање неких Диофантових једначина, чије би решавање на неки други начин било немогуће или нерационално. Углавном се дата једначина посматра као квадратна по једној од променљивих, а онда се дискусијом дискриминанте разликују могући случајеви. Да би решења квадратне једначине били цели бројеви и сама дискриминанта мора бити цео број.

ПРИМЕР 17: Одредити све целе бројеве x и y такве да је $2x^2+5x+y^2=19$

РЕШЕЊЕ:Ако дату једначину посматрамо као квадратну по x, тј. $2x^2+5x+(y^2-19)=0$

Њена решења су: $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-8(y^2-19)}}{4}$. Ако је дискриминанта ове квадратне једначине потпун квадрат, x може бити (али не мора) цео број. Односно мора бити $25-8(y^2-19)=k^2$, где је k неки цео број који треба одредити. Претходну једначину можемо написати као $25-8y^2+152=k^2$, одакле је $k^2+8y^2=177$. Како је $8y^2 \le 177$, то је $y \le 4$ па $|y| \in \{0,1,2,3,4\}$. Број k ће бити цео број ако је $|y| \in \{1,4\}$, тада је $|k| \in \{13,7\}$. Сада се лако добијају решења која испуњавају почетне услове задатка $(2,1);(-3,4)$, када одбацимо решења која нису целобројна.

ПРИМЕР 18: Колико природних бројева n има особину да је $n^2+3n+24$ потпун квадрат неког целог броја?

РЕШЕЊЕ: Можемо поставити једначину: $n^2+3n+24=m^2$ или $n^2+3n+24-m^2=0$ и ако је посматрамо као квадратну једначину по n њена решења су: $n_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4(24-m^2)}}{2}$.

Да би n био цео број, мора и дискриминанта да буде потпун квадрат, па је : $9\cdot 96+4m^2=k^2$, односно, $4m^2-k^2=87$. Тако имамо $4m^2-k^2=(2m-k)(2m+k)=87$. Сада разликујемо случајеве:

$(2m-k)\in\{1,3,29,87,-1,-3,-29,-87\}$ и

$(2m+k)\in\{87,29,3,1,-87,-29,-3,-1\}$, сабирањем добијамо

$4m \in \{88,32,-88,-32\}$, па је $m \in \{22,8,-22,-8\}$. Сада је $n \in \{5,-8,20,-23\}$, услове задатка задовољава $n \in \{5,20\}$.

6.2.9. *Ојлеров метод*

За решавање линеарне Диофантове једначине, тј. једначине облика: $ax + by = c$, где су бројеви a и b узајамно прости примењује се Ојлеров метод. Овај метод често није функционалан, међутим, сама методологија је доста јасна и он се примењује најчешће у основној школи. Најлакше га је објаснити кроз примере.

ПРИМЕР 19: Одредити сва решења једначине 40y-63x=521, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 60 и 43 узајамно прости бројеви, то једначина има решење. Дату једначину можемо писати $40y = 521 + 63x$, односно,

$y = \frac{80x + 520 + 1 - 17x}{40} = 2x + 13 - \frac{17x - 1}{40}$. Пошто $y \in \mathbb{Z}$, онда мора и десна страна једнакости да буде цео број, тј. $\frac{17x-1}{40} = m;\ m \in \mathbb{Z}$. Тако добијамо $17x - 1 = 40m$, односно, $x = \frac{40m+1}{17} = \frac{34m + 6m + 1}{17} = 2m + \frac{6m+1}{17}$. Опет из услова задатка је $\frac{6m+1}{17} = n$, тј. $6m + 1 = 17n$, коначно, $m = \frac{17n-1}{6} = \frac{18n - n + 1}{6} = 3n - \frac{n+1}{6}$. Како су m и n цели бројеви,то мора и $\frac{n+1}{6}$ да буде цео број. Одавде је $\frac{n+1}{6} = p \Rightarrow n + 1 = 6p \Rightarrow n = 6p - 1$. Затим

$$m = 3(6p-1) - p = 17p - 3$$

добијамо $x = 2(17p - 3) + 6p - 1 = 40p - 7$

$$y = 2(40p - 7) + 13 - 17p + 3 = 63p + 2$$

Коначно, опште решење полазне једначине је: $x = 40p - 7,\ y = 63p + 2$, где је $p \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 20: Решити Диофантову једначину: 39x-22y=10.

РЕШЕЊЕ: Како 39 и 22 узајамно прости бројеви, једначина ће имати решење. Једначину можемо писати као $22y = 39x - 10$, односно $y = \frac{39x-10}{22} = \frac{22x + 17x - 10}{22} = x + \frac{17x-10}{22}$

$z = \frac{17x-10}{22},\quad z \in \mathbb{Z}$.Поступајући као и претходно $x = \frac{22z+10}{17} = z + \frac{5z+10}{17} = z + m$.

Аналогно $z=\frac{17m-10}{5}=3m-2+\frac{2m}{5}$, коначно $m=5n$, где је n цео број. Сада је

$$z=3m-2+\frac{2m}{5}=15n-2+2m=17n-2$$
$$x=z+m=22n-2+17n-2=22n-2$$
$$y=x+z=22n-2+17n-2=39n-4$$

Па су сва целобројна решења дате једначине $(x,y)\in(22n-2;\,39n-4)$ где је n цео број.

6.2.10. Диофантов метод

У другој књизи ,,Аритметике" Диофант излаже општи метод за одређивање рационалних решења алгебарске квадратне једначине са две непознате. Посматра се једначина $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0;\quad (A,B,C,D,E,F$ су цели бројеви). Ова једначина у равни xOy представља неку криву другог реда (или једну, односно две праве).Ако је (x_0,y_0) једно целобројно решење дате једначине, онда се кроз тачку (x_0,y_0) поставља прамен правих $y-y_0=k(x-x_0)$, где је k рационалан број различит од нуле. За различите вредности параметра k, добија се бесконачно много тачака пресека правих и криве, а те тачке су рационалне.

ПРИМЕР 21: Решити једначину x^2-$2y^2$+3xy-4x-5y+3=0 у скупу рационалних бројева.

РЕШЕЊЕ: Једно решење дате једначине било би $(x_0,y_0)=(1{,}0)$, тако имамо $x=1+t$ и $y-0=k[(1+t)-1]$, тј. $y=kt.$ Заменом у почетну једначину добијамо:

$(1+t)^2-2(kt)^2+3(1+t)kt-4(1+t)+5kt+3=0$. Трансформацијом ове једначине добијамо $t[t(1-2k^2+3k)+8k-2]=0$ одакле је $t=0$ или $t=\frac{8k-2}{2k^2-3k-1}$, ако је $t=0$ решења почетне једначине су $(x_0,y_0)=(1{,}0)$. Ако је $t=\frac{8k-2}{2k^2-3k-1}$, решења почетне једначине су $x=\frac{2k^2+5k-3}{2k^2-3k-1};\ y=\frac{8k^2-2k}{2k^2-3k-1}$ и за $k\neq0$ добија се бесконачно много рационалних решења.

7. Типови Диофантових једначина

Методе представљене у претходном поглављу су предуслов за успешно упознавање са типовима Диофантових једначина. У овом поглављу биће изложене најинтересантније Диофантове једначине за рад у додатној настави основне и средње школе.

7.1. Математички ребуси

Математичке ребусе чине најједноставније Диофантове једначине и јављају се већ у четвртом разреду основне школе. Наравно, тада није познато да се ради о Диофантовим једначинама.

Многе идеје и методе које се користе при решавању Диофантових једначина, темеље се на једној једноставној чињеници, да све што важи за једну страну једнакости, због особине рефлексивности једнакости $(a=a)$, важи у идентичкој форми и за другу страну једнакости.

Код математичких ребуса, метод разликовања случајева показао се као веома делотворан. Како су цифре елементи скупа {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, у најгорем случају проблем се може свести на разматрање 10 могућности. Међутим, обично постоје извесна ограничења, тако да се проблем своди на мање случајева.

ПРИМЕР 22: Цифре a и b су различите и такве да важи $\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba}=\overline{abaaba}$ *дешифровати ову једнакост.*

РЕШЕЊЕ: Дату једнакост можемо писати као:

(10*a*+*a*)(10*b*+*a*)(*100a+10b+a*)=100000*a*+10000b+1000*a*+100*a*+10b+*a,* после сређивања десне стране једначине добијамо (10*a*+*a*)(10*b*+*a*)(*100a+10b+a*)=1000(*100a+10b+a*)+ *100a+10b+a* односно 11*a(*10*b*+*a*)=1001. Како 1001 можемо писати као производ бројева 7, 11 и 13, биће 11*a(*10*b*+*a*)= $7\cdot11\cdot13$ после дељења са 11 остаје *a(*10*b*+*a*) = $7\cdot13$. Ако је *a*=7 тада би *b* било 73 а треба по услову задатка да буде цифра. Међутим производ бројева 7 и 13 је 91, тада имамо *a(*10*b*+*a*)=91. Одавде закључујемо да је *a*=9, *b*=1, сада је почетна једнакост

$11\cdot91\cdot191=191191$

7.2. *Магичне фигуре*

Магичне фигуре припадају занимљивом делу математике – математичким играма. Када говоримо о магичним фигурама, први сусрет у настави математике је са магичним квадратима. Они се веома често решавају на основу маштовитости ученика и урађеног великог броја примера, што различитијих типова. Следи излагање једне методологије за решавање једног типа математичких квадрата.

Када треба цифре 1,2,3,4,5,6,7,8,9 распоредити у таблицу 3x3, тако да у свакој врсти, колони и дијагонали буде исти збир, тада је згодно постојећу таблицу проширити са четири поља. По дијагонали испишемо дате цифре у поретку. Цифре које су у дописаним пољима са леве и десне стране замене места, исто тако и цифре у дописаним пољима горе и доле. На тај начин добија се један поредак цифара, а таквих могућности је четири.

		1		
	2		4	
3		5		7
	6		8	
		9		

		1		
	2	9	4	
3	7	5	3	7
	6	1	8	
		9		

15	15	15	15
2	9	4	15
7	5	3	15
6	1	8	15
			15

		3		
	2		6	
1		5		9
	4		8	
		7		

		3		
	2	7	6	
1	9	5	1	9
	4	3	8	
		7		

15	15	15	15
2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
			15

		9		
	8		6	
7		5		3
	4		2	
		1		

		9		
	8	1	6	
7	3	5	7	3
	4	9	2	
		1		

15	15	15	15
8	1	6	15
3	5	7	15
4	9	2	15
			15

		7		
	8		4	
9		5		1
	6		2	
		3		

		7		
	8	3	4	
9	1	5	9	1
	6	7	2	
		3		

15	15	15	15
8	3	4	15
1	5	9	15
6	7	2	15
			15

Свака од ових могућности је по један пример задатка.

7.3 Диофантове једначине једне променљиве

Дефиниција 1: *Једначина која садржи једну променљиву и која има за услов да је она целобројна, јесте Диофантова једначина једне променљиве.*

Проблем Диофантових једначина једне променљиве, може се уопштити на проблем полинома, а за такво разматрање веома су значајне следеће две теореме.

Теорема 1: *Ако је* $\frac{p}{q}$ (p и q узајамно прости бројеви и $q \neq 0$) рационална нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ са целобројним коефицијентима ($a_n \neq 0$), онда је p делилац броја a_n.

Доказ: Ако је $\frac{p}{q}$ рационална нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, онда је : $a_n (\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + ... + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$. Како је $q \neq 0$, после множења са q^{n-1}, добијамо једнакост: $a_n \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0$. Како је десна страна једнакости једнака нули, то мора бити и лева страна, тј. сабирци на левој страни једнакости морају бити цели бројеви. Тако да сабирак $a_n \frac{p^n}{q}$ мора бити цео број, што значи да a_n мора бити дељив целим бројем (јер p и q су узајамно прости бројеви и $q \neq 0$). Ако сада почетну једнакост помножимо са $\frac{q}{p}$, добијамо нову једнакост: $a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_0 q^{n-1} + a_0 \frac{q^n}{p} = 0$.

Одавде, аналогно разматрајући, добијамо да је p целобројни делилац броја a_0.

Теорема 2: *Ако x_0 представља целобројну нулу следећег полинома* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *са целобројним коефицијентима (* $a_n \neq 0$*), онда је x_0 један од целобројних делилаца броја* a_0.

Доказ: Ако је x_0 нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ и ако је x_0 цео број, то је онда $P(x_0) = a_n x_0^n + ... + a_1 x_0 + a_0 = 0$. Ако је $a_0 = 0$, онда је $P(x_0) = x_0(a_n x_0^{n-1} + ... + a_2 x_0 + a_1)$, па је једна нула полинома $x_0 = 0$. Ако је $a_0 \neq 0$, онда је и $x_0 \neq 0$, па је $P(x_0) = a_n x_0^n + ... + a_1 x_0 + a_0 = 0$ еквивалентно са $a_n x_0^{n-1} + ... + a_1 + \frac{a_0}{x_0} = 0$.

Како је десна страна једначине цео број и како су сви сабирци на левој страни целобројни, то мора бити и $\frac{a_0}{x_0}$, дакле x_0 је један од целобројних делилаца броја a_0.

ПРИМЕР 23: Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.

РЕШЕЊЕ: Нека је први тражени број k. Тада је по услову задатка:

$k^3 + (k-1)^3 + (k-2)^3 = (k+3)^3$, сређивањем ове једнакости добијамо: $k^3 - 6k - 9 = 0$. Могуће целобројне нуле полинома су из скупа бројева који су делиоци броја -9, односно $k \in \{1,-1,3,-3,9,-9\}$. Провером се добија да је к=3, па су тражени бројеви 3,4,5 и 6.

7.4. Линеарне Диофантове једначине облика ax+by=c

Дефиниција 2: *Ако су a,b,c цели бројеви и $ab \neq 0$, линеарна једначина облика ax+by=c, при чему су вредности за x и y из скупа целих бројева, назива се линеарна Диофантова једначина са две непознате.*

Ако је $c = 0$, тј. *ax+by=c,* посматрана једначина представља хомогену, линеарну Диофантову једначину. Свака линеарна једначина са две непознате и целобројним коефицијентима може се свести на једначину облика *ax+by=c.*

Основна питања која се постављају при решавању сваке Диофантове једначине су следећа:

- Доказати или оповргнути постојање решења;
- Да ли једначина има коначан број решења или их има бесконачно;
- Ако једначина има коначно решења, одредити њихов број;
- Ако једначина има коначно решења, одредити сва њена решења;
- Ако једначина има бесконачно много решења, одредити формуле које дају сва решења (ако је то могуће);
- Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако они постоје).

Када говоримо о линеарној Диофантовој једначини са две променљиве, одговори на ова питања налазе се у следећим примерима и теоремама.

ПРИМЕР 24: Имају ли једначине $x+y=2006$ и $2x+10y=2005$ решења у скупу целих бројева?

РЕШЕЊЕ: Прва једначина очигледно има бесконачно много решења у скупу целих бројева, уређени пар $(x,y)=(x_0, 2006-x_0)$ – представља опште целобројно решење где је x_0 било који цео број.

Друга једначина нема решења, јер за ма који пар целих бројева (x,y) на десној страни једначине је непаран број, док је на левој страни паран.

Егзистенција решења једначине $ax+by=c$ у скупу целих бројева, може се установити на основу следеће теореме:

Теорема 3: *Потребан и довољан услов да линеарна диофантова једначина $ax+by=c$ (a,b,c цели бројеви и $ab \neq 0$,) има решења је да је број c дељив са НЗД (a,b).*

Доказ. Нека је НЗД $(a,b)=d, d \neq 1$. Ако је (x_0, y_0) једно целобројно решење линеарне Диофантове једначине облика $ax+by=c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$ и постоје узајамно прости бројеви k и l такви да је $a = kd$ и $b = ld$, што значи да је $kdx_0 + ldy_0 = c$, тј. $d(kx_0 + ly_0 = c)$. Лева страна једнакости је дељива са d, па мора бити и десна страна, тј. $d|c$.

Обрнуто, нека је $d|c$, тада постоји цео број m такав да је $c = md$. Како се број d, може представити као линеарна функција од a и b, то је $d = \alpha a + \beta b \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z})$. Тада је $c = md = m(\alpha a + \beta b)$, па је онда $x = m\alpha,\ y = m\beta$, једно решење дате једначине.

Следе две непосредне последице доказане теореме:

Последица 1: Линеарна Диофантова једначина $ax+by=c$ (a,b,c цели бројеви и $ab \neq 0$), увек има решење ако је НЗД (a,b)=1, тј. ако су a и b узајамно прости цели бројеви.

Последица 2: Линеарна Диофантова једначина $ax+by=c$ (a,b,c цели бројеви и $ab \neq 0$), нема решења ако се НЗД (a,b) не садржи у c.

ПРИМЕР 25: Доказати да једначина $2x + 5y = 111$ има бесконачно много целобројних решења а да једначина $3x + 6y = 1000$ нема целобројних решења.

РЕШЕЊЕ: Бројеви 2 и 5 су узајамно прости, па прва једначина, на основу последице 1, увек има решења. Када посматрамо другу једначину, НЗД(3,6)=3 и како се 3 не садржи у 1000, на основу последице 2, друга једначина нема целобројних решења.

Ако једначина *ax+by=c* има решења, односно ако је $(a,b)=d,\ d\neq 1$ делилац броја c, тада постоје цели бројеви k,l,m, такви да је $a=kd, b=ld, c=md$. Једначина тада постаје $kdx+ldy=md$, или $kx+ly=m$, где су k и l узајамно прости бројеви.

Претходним разматрањима је проблем егзистенције решења једначине *ax+by=c* решен, следи покушај проналажења алгоритма за решавање свих линеарних Диофантових једначина.

Ојлеров метод

ПРИМЕР 26: Одредити сва решења једначине 3x+7y=89, ако су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 3 и 7 узајамно прости бројеви, то значи да једначина увек има решења. Решавајући једначину по x и трансформишући њену десну страну у количник, добијамо једнакост $x=\dfrac{89-7y}{3}=29-2y-\dfrac{y-2}{3}$ па је x цео број само ако је број $y-2$, дељив са 3, односно ако је $y-2=3k, k$ неки цео број. Тада је $y=3k+2$ а $x=25-7k$. Добијено решење је опште решење дате једначине, а дата једначина има бесконачно много решења јер за свако целобројно k добијамо уређени пар $(x,y)=(25-7k,3k+2)$ који јесте решење дате једначине.

Изложен Ојлеров метод најчешће није функционалан јер се до коначног решења долази применом илустрованог поступка у неколико корака. Овај поступак јесте једноставан, али није лак за реализацију. Због тога се тражи ефикаснији метод за решавање линеарне Диофантове једначине.

Метод почетног решења

Нека је (x_0,y_0) једно целобројно решење једначине *ax+by=c,* где су a и b узајамно прости цели бројеви. Како је $ax_0+by_0=c$ *то је и* $ax+by=ax_0+by_0$. Тада је $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, и ако целу једначину поделимо са $b, b\neq 0$ добијамо $\dfrac{a}{b}(x-x_0)+y-y_0=0$. Како је десна страна једнакости цео број то мора бити и лева страна. Пошто су бројеви a и b узајамно прости цели бројеви, то онда значи да $x-x_0$ мора бити дељиво са b, односно $x-x_0=kb$, где је k било који цео број, па имамо да је

$x = x_0 + kb;\ y = y_0 - ak$. На овај начин дошли смо до једног рационалног поступка за решавање једначине *ax+by=c,* који је прецизиран следећом теоремом.

Теорема 4: *Ако је уређени пар* (x_0, y_0)*, једно решење линеарне Диофантове једначине* $ax + by = c$, $(a, b \neq 0$; a, b *су узајамно прости цели бројеви), тада и само тада је релацијама* $x = x_0 + bk$ *и* $y = y_0 - ak$, $(k \in \mathbb{Z})$ *дато опште решење дате једначине.*

Доказ: Ако је (x_0, y_0), једно решење линеарне Диофантове једначине $ax + by = c$ тада је $ax_0 + by_0 = c$. Из $x = x_0 + bk$ *и* $y = y_0 - ak$, следи $ax + by = a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) =$

$ax_0 + abk + by_0 - abk = ax_0 + by_0 = c$, што доказује да је $x = x_0 + bk$ и $y = y_0 - ak$ једно решење дате једначине.

Треба доказати и да других решења нема. Ако претпоставимо да је (α, β) једно решење дате једначине које се не може приказати у облику $(x_0 + bk,\ y_0 - ak)$. Па ако је (α, β) једно решење дате једначине, онда је $a\alpha + b\beta = c$. Како је за свако целобројно k и $a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = c$ то је $a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = a\alpha + b\beta$, тада је

$a(x_0 + bk - \alpha) + b(y_0 - ak - \beta) = 0$.

Пошто су a и b различити од нуле, то је $x_0 + bk - \alpha = -\dfrac{b(y_0 - ak - \beta)}{a}$ и како су a и b узајамно прости бројеви следи да је $y_0 - ak - \beta = am$ $(m \in \mathbb{Z})$, следи да је $\beta = y_0 - ak - am = y_0 - a(k + m)$. Ако је $k + m = n$; $(n \in \mathbb{Z})$, тада је $\beta = y_0 - an$, а $x_0 + bk - \alpha = -bm$ па је $\alpha = x_0 + bk + bm = x_0 + b(k + m) = x_0 + bn$. Коначно се добија $\alpha = x_0 + bn,\ \beta = y_0 - an$ што је у противуречности са претпоставком.

ПРИМЕР 27: Одредити једно решење, а затим написати опште решење Диофантове једначине 4x+11y=121, где су x и y цели бројеви.

РЕШЕЊЕ: Како су 4 и 11 међусобно прости бројеви и НЗД(4,11)=1 а 1 се садржи у 121, тада дата Диофантова једначина има решења у скупу целих бројева. Лако се закључује да је једно решење $x_0 = 0,\ y_0 = 11$. Из дате једначине видимо да је $a = 4, b = 11, c = 121$ и $d = 1$, па су сва решења дате једначине дефинисана са $x = 5k$, $y = 11 - 4k$

У претходном примеру је једно решење било очигледно, у следећем примеру биће показано како се до једног решења долази ако се оно на први поглед не може одредити.

ПРИМЕР 28: Одредити сва целобројна решења једначине 27x+59y=20.

РЕШЕЊЕ: Како је НЗД(27,59)=1, а 1 је делитељ броја 20, то говори да дата једначина има решења у скупу целих бројева. Из дате једначине видимо да је $a = 27; b = 59; c = 20$ и $d = 1$. Како једно решење (почетно решење) није очигледно, можемо се помоћи Еуклидовим алгоритмом да до њега дођемо. Узастопним дељењем добијамо следеће једнакости:

$$59 = 2 \cdot 27 + 5$$
$$27 = 5 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

Поступак дељења завршавамо када је остатак дељења један. Сада из добијених једнакости изражавамо остатке:

$$5 = 59 - 2 \cdot 27$$
$$2 = 27 - 5 \cdot 5$$
$$1 = 5 - 2 \cdot 2$$

У последњу једнакост уврстимо израз за број 2 из претпоследње и тд.

$$1 = 5 - 2 \cdot (27 - 5 \cdot 5) = 5 - 2 \cdot 27 + 10 \cdot 5 = 11 \cdot 5 - 2 \cdot 27 =$$

[сада уврстимо израз за 5 из прве једнакости]

$$= 11 \cdot (59 - 2 \cdot 27) - 2 \cdot 27 = 11 \cdot 59 - 22 \cdot 27 + 11 \cdot 59 - 24 \cdot 27$$

Дакле, добили смо $1 = -24 \cdot 27 + 11 \cdot 59$ и леву и десну страну помножимо са 20 и добијамо једнакост $-480 \cdot 27 + 220 \cdot 59 = 20$

Тако смо дошли до једног решења линаерне Диофантове једначине *27x+59y=20* а то је $x_0 = -480; \quad y_0 = 220$ и коначно добијамо опште решење $x = x_0 + bk; \quad y = y_0 - ak$

$x = -480 + 59k$ и $y = 220 - 27k$ где је k цео број. Може се изабрати и неко друго почетно решење мање по апсолутној вредности. Нпр. за $k = 8$ добија се $x_0 = -8$ и $y_0 = 4$, у овом случају, опште решење је : $x = -8 + 59t$ и $y = 4 - 27t, \quad t \in \mathbb{Z}$.

Напомена: Зависно од ,,избора почетног“ решења, добили смо наизглед ,,различита“ али суштински иста решења линеарне Диофантове једначине. За $x_0 = -480; \quad y_0 = 220$ добија се опште решење $x = -480 + 59k$ и $y = 220 - 27k$ где је k цео број. За $x_0 = -8$ $y_0 = 4$ добија се решење $x = -8 + 59t$ и $y = 4 - 27t, \quad t \in \mathbb{Z}$, сменом $t = -8 + k$ ово решење постаје $x = -480 + 59k; \; y = 220 - 27k$, дакле, решења су суштински иста.

Линеарне Диофантове једначине нису саме себи циљ. Познавање алгоритма за њихово решавање од значаја је ако се примени у одговарајућим ситуацијама. Диофантове једначине су корисне у решавању разних теоријских и практичних проблема, што ће потврдити следећа два примера.

ПРИМЕР 29: Колико има парова природних бројева (x,y), таквих да важи једнакост 3x+7y=555?

РЕШЕЊЕ: Како је НЗД(3,7)=1 а 1 је делилац броја 555, још је *a=3, b=7, c=555, d=1,* такође је $3\cdot 185+7\cdot 0=555$, то је почетно решење једначине $x_0=185$, $y_0=0$. Тада је опште решење *x=185+7k, y=3k.* Како су *x,y* природни бројеви *за x* важи 3 ≤ x ≤ 185 а за y, 3 ≤ y ≤ 78 па следи да је 3 ≤ 3k ≤ 78 односно, 1 ≤ x ≤ 26 па тако дата једначина има тачно 26 решења у скупу природних бројева (3,78), (10,75), … , (178,3)

ПРИМЕР 30: На двадесет четворо људи подељено је 24 хлебова, тако да је свако дете добило пола хлеба, свака жена један хлеб а сваки мушкарац 4 хлеба. Колико је било деце, жена и мушкараца?

РЕШЕЊЕ: По условима задатка имамо $x+y+z=24$ односно, $\frac{1}{2}x+y+4z=24$. Сада ако од прве одузмемо другу једначину добијамо $\frac{1}{2}x-3z=0 \Rightarrow x=6z$, заменом у прву једначину добијамо $6z+y+z=24$ одакле је $y=24-7z$. Опште решење је $x=6k,\ y=24-7k,\ z=k$. Још мора бити $0\le x\le 24$ тј. $0\le 6k\le 24$ и $0\le y\le 24$ тј. $0\le 24-7k\le 24$, одакле добијамо $0\le k\le 3$. То значи да имамо укупно 4 решења.

$(x,y,z)\in\{(0,0,24);(1,6,17);(12,10,2);(6,17,1)\}$

7.5. Диофантове једначине степена већег од један

7.5.1. Питагорине тројке

Дефиниција 3: *Уређену тројку природних бројева (x,y,z) зовемо Питагорина тројка ако су x и y дужине катета а z дужина хипотенузе неког правоуглог троугла, односно, ако важи $x^2+y^2=z^2$. Ако су бројеви x,y и z узајамно прости, тада (x,y,z) називамо примитивна Питагорина тројка, а такав троугао примитиван Питагорин троугао.*

Може се приметити да је у свакој примитивној Питагориној тројки тачно један од бројева x,y непаран. Јасно је да ако би x и y били непарни онда би из $x^2 + y^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ и $z^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, добили контрадикцију.

Теорема 5: *Све примитивне Питагорине тројке (x,y,z), у којима је y паран број, дате су формулама:* $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ *и* $z = m^2 + n^2$ *где је* $m > n$ *а* m *и* n *су узајамно прости природни бројеви и нису исте парности. Такође важи и* $y = m^2 - n^2$; $x = 2mn$; $z = m^2 + n^2$.

Диофантов доказ: Ако једначину $x^2 + y^2 = z^2$, поделимо са z^2, добићемо $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$ и ако уведемо смену $a = \frac{x}{z}$ и $b = \frac{y}{z}$ тада имамо $a^2 + b^2 = 1$. Једначину решавамо Диофантовим методом. Како је једно решење једначине (-1,0), отуда је $b = -1 + mt$ и $a = nt$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Тако добијамо $(mt-1)^2 + (nt)^2 = 1$ па је $1 - 2mt + m^2t^2 + n^2t^2 = 1$ тј. $t = \frac{2m}{m^2 + n^2}$ а одатле заменом добијамо $a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; b = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$. Враћањем у смене $a = \frac{x}{z}$ и $b = \frac{y}{z}$ добијамо: $y = 2kmn; x = k(m^2 - n^2); z = k(m^2 + n^2)$, за $k = 1$ добија се тражена формула $y = 2mn$, $x = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$.

Последица теореме 5: Опште решење једначине $x^2+y^2=z^2$ *дато је у облику* $x=k(m^2-n^2)$ $y=2kmn$, $z=k(m^2+n^2)$, *gde su* $k,m,n \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 31: Одредити све правоугле троуглове код којих је једна страница једнака 12 мерних јединица.

РЕШЕЊЕ: Разликујемо три случаја:

1) Ако је $x = 12 = 2mn$ онда је

а) $m = 6, n = 1$ и $x = 12; y = 35; z = 37$

б) $m = 3; n = 2$ и $x = 12; y = 5; z = 13$

2) Ако је $y = 12 = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, тада је $m + n = 6$ а $m - n = 2$, па је $m = 4, n = 2$ односно, $y = 12, x = 16, z = 20$.

3) Ако је $z = 12 = m^2 + n^2$ тада нема решења јер не постоје природни бројеви m и n чији је збир квадрата једнак 12.

7.5.2. Квадратне Диофантове једначине

Дефиниција 4: *Једначина облика $x^2+axy+y^2=z^2$, где је a дати цео број, представља квадратну Диофантову једначину.*

За $a=0$ Квадратна Диофантова једначина постаје $x^2+y^2=z^2$ Питагорина једначина.

Teorema 6*: Сва целобројна решења једначине $x^2+axy+y^2=z^2$ дата су у облику:* $x=k(an^2-2mn),\ y=k(m^2-n^2)$ *и* $z=k(amn-m^2-n^2)$

Доказ: Како је једначина $x^2+axy+y^2=z^2$ симетрична, решења могу бити и $x=k(m^2-n^2)$, $y=k(an^2-2mn)$ и $z=k(amn-m^2-n^2), k,m,n,\in\mathbb{Z}$. Ако једначину $x^2+axy+y^2=z^2$ трансформишемо у облик: $x(x+ay)=(z-y)(z+y)$ и ако је $y=z$, добијамо да је $x=0$ или $x+ay=0,$ па резултат следи. У свим другим случајевима имамо да је $\frac{x}{z-y}=\frac{z+y}{z-y}=\frac{n}{m}$, за неко $m,n\in\mathbb{Z}$ и $m,n\neq 0$. Из последње једнакости добијамо хомогени систем: $mx+ny-nz=0$ и $nx+(n-an)y-mz=0,$ чија су решења $x=\frac{an^2-2mn}{amn-m^2-n^2}\cdot z$ и $y=\frac{m^2-n^2}{amn-m^2-n^2}\cdot z$. Ако узмемо да је $z=amn-m^2-n^2$, добићемо тражена решења.

Teorema 7*: Сва природна решења једначине $x^2+axy+y^2=z^2$ дата су у облику:* $x=k(2mn+an^2), y=k(m^2-n^2)$ и $z=k\left| amn+m^2+n^2 \right|$ где су $k,m,n\in\mathbb{Z}^+$ и $2m+an>0, m>n.$ Како је у питању симетрична једначина, решења могу бити и $x=k(m^2-n^2)$, $y=k(an^2-2mn)$ и $z=k\left| amn+m^2+n^2 \right|$, за $k,m,n\in\mathbb{Z}^+$ и $2m+an>0, m>n.$

Teorema 8*:* Сва целобројна решења једначине *$x^2+axy+y^2=z^2$ дата су у облику:* $x=k(m^2-bn^2), y=k(an^2-2mn)$ и $z=k(amn-m^2-bn^2),\quad k,m,n\in\mathbb{Z}.$

Доказ теореме 8 и 9 веома је сличан доказу теореме 7.

За школску праксу значајна су три случаја квадратне Диофантове једначине *$x^2+axy+y^2=z^2$*

1) $a=0$; Дата једначина постаје $x^2+y^2=z^2$ - Питагорина једначина, што нам говори да се ради о правоуглом троуглу код кога су x и y - катете, а z - хипотеноза. Дакле, ради се о троуглу код кога је угао наспрам странице z једнак 90°.

2) $a=1$; Дата једначина постаје $x^2+xy+y^2=z^2$. Имајући у виду претходне теореме, решења ове једначине су: $x=k(2mn-n^2),\ y=k(m^2-n^2),\ z=k(m^2+mn+n^2)$, а због симетричности једначине решења могу бити и $x=k(m^2-n^2),\ y=k(2mn-n^2)$ и $z=k(m^2+mn+n^2)$ за $k,m,n\in\mathbb{Z}^+$ и $m>n$. Ова решења дају странице троугла код кога је угао наспрам странице z једнак 120°.

3) $a=-1$; Дата једначина постаје $x^2-xy+y^2=z^2$. Према претходним теоремама, решења ове једначине су: $x=k(2mn-n^2),\ y=k(m^2-n^2)$ и $z=k(m^2-mn+n^2)$, као и (због симетричности) $x=k(m^2-n^2),\ y=k(2mn-n^2)$ и $z=k(m^2-mn+n^2)$, наравно за $k,m,n\in\mathbb{Z}^+$ и $m>n$. Ова решења дају странице троугла, код кога је угао наспрам странице z једнак 60°.

ПРИМЕР 32: У скупу природних бројева, наћи све тројке (x,y,z) које задовољавају једначину $x^2+xy+y^2=49^2$.

РЕШЕЊЕ: У овој једначини је $a=1$, дакле у питању је други случај из претходног разматрања, па на основу $x=k(2mn+n^2)$, $y=k(m^2-n^2)$ и $z=k(m^2+mn+n^2)$, треба одредити $k,m,n\in\mathbb{N}$, тако да је $m>n$. Из дате једначине видимо да је $z=49$, па мора бити $k(m^2+mn+n^2)=49$. Како је $m^2+mn+n^2>1$, то ће бити $k=1$ или $k=7$. Корисно је направити табелу за $k=1$ и $m>n$.

m	n	m^2+mn+n^2
2	1	7
3	1	13
4	1	21
5	1	31
6	1	43
3	2	19
4	2	28
5	2	39
4	3	37
5	3	49

Из табеле видимо да је $m=5, n=3$, тако да добијамо решења: $(x,y)=(39,16)$ и $(x,y)=(16,39)$. Ако је $k=7$, једнакост $m^2+mn+n^2=7$ је тачна за $m=2, n=1$. Тако добијамо решења: $(x,y)=(35,21)$ и $(x,y)=(21,35)$. Тако да су коначна решења: $(39,16);(16,39);(35,21);(21,35)$.

7.5.3. Диофантове једначине облика $x^4 \pm ax^2y^2+y^4=z^2$

Теорема 9: *Ненегативна целобројна решења једначине* $x^4 \pm x^2y^2+y^4=z^2$ *су* $(x,y,z)=(k,0,k^2)$ *или* $(x,y,z)=(0,k,k^2), k \in \mathbb{Z}^+$.

Доказ: Ако претпоставимо да је НЗД$(x,y)=1$, то значи да x и y нису исте парности, иначе би било $z^2 \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Претпоставимо још да је y непаран и минималан. Множењем са 4 малом трансформацијом, почетна једначина постаје : $4y^4=4z^2-4x^4-4x^2y^2-y^4+y^4$ односно биће $4z^2-(2x^2+y^2)^2=3y^4$, тј. $(2z+2x^2+y^2)(2z-2x^2-y^2)=3y^4$. Ако је НЗД $(2z+2x^2+y^2,\ 2z-x^2-y^2)=d$, тада је d непарно, $d|z$ и $d|2x^2+y^2$. Из једнакости $4z^2-(2x^2+y^2)^2=3y^2$ видимо да је $d|3y$. Ако је $d>3$, тада $d|y$ и $d|2x^2$, тј. НЗД$(x,y)\geq d$, што је контрадикција. Тако да је: $2z+2x^2+y^2=a^4, 2z-2x^2-y^2=3b^4, y=ab$ или $2z+2x^2+y^2=3a^4, 2z-2x^2-y^2=b^4$, $y=ab$ где су a и b природни бројеви.

У првом случају је $4x^2=a^4-2a^2b^2-3b^4 \equiv -4(\mathrm{mod}\,16)$, а то је контрадикција. У другом случају је $4x^2=3a^4-2a^2-2b^2-b^4=(a^2-b^2)(3a^2+b^2)$. Како су и a и b непарни, следи да је $a^2-b^2=c^2$ и $3a^2+b^2=4d^2$, за неко $c,d \in \mathbb{N}$. Тада је $a=p^2+q^2, b=p^2-q^2, p,q \in \mathbb{Z}^+$ и $p^4+p^2q^2+q^2=d^4$ што је контрадикторно са претпоставкомда је y минималан. Према томе $y=1, \quad a=b=1$ и $x=0$, тако да за $z=k^2$ добијамо решења: $(x,y,z)=(k,0,k^2)$ тј. $(x,y,z)=(0,k,k^2)$.

ПРИМЕР 33: Решити у скупу природних бројева следећи систем једначина:
$$\begin{aligned}3u^2+v^2&=4s^2\\ u^2+3v^2&=4t^2\end{aligned}$$

РЕШЕЊЕ: Увођењем смене $u=x+y, v=x-y$, добијамо еквивалентан систем једначина:
$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2&=s^2\\ x^2-xy+y^2&=t^2\end{aligned}$$
множењем ових једначина добијамо: $x^4+x^2y^2+y^4=(st)^2$

На основу претходне теореме је $(x,y,st)=(k,0,k^2)$ или $(x,y,st)=(0,k,k^2)$, тако да одавде следе решења: $(u,v,s,t)=(k,k,k,k),\ k\in\mathbb{Z}$.

Без извођења доказа следи теорема:

Теорема 10: *Ненегативна целобројна решења једначине* $x^4-x^2y^2+y^4=z^2$ *су дата са* $(x,y,z)\in\{(k,0,k^2);(0,k,k^2);(k,k,k^2)\}$

7.5.4. Диофантове једначине облика $x^n+y^n=z^n$

На маргинама Диофантове ,,Аритметике“, француски правник и судија Пјер де Ферма[2] (вероватно један од највећих математичара-аматера свих времена) написао је 45 коментара. Најзначајнији је онај у коме Ферма коментарише проблем II_8 из Диофантове ,,Аритметике“ а који се односи на опште решење Питагорине једначине $x^2+y^2=z^2$. Ферма пише: ,, Немогуће је куб разложити на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, и уопште никакав степен већи од квадрата, на два степена са истим таквим изложиоцем. Ја сам за то открио изванредан доказ, али су маргине ове књиге сувише мале да га овде изложим.“

Овај његов коментар претворио се у проблем који су математичари (како професионалци, тако и аматери) више од три века безуспешно покушавали да реше, тј. да за једноставну теорему пронађу и елементаран доказ. Та теорема названа је велика Фермаова теорема, а еволуција њеног доказивања показује да само доказ за n=4 припада сфери елементарне математике, и он ће бити изложен. Докази за n=5,7,11… знатно су компликованији и могу остати за рад са даровитима у току студија.

ПРИМЕР 34: Доказати да једначина $x^4+y^4=z^4$ нама решења у скупу природних бројева.

РЕШЕЊЕ: Биће довољно доказати да једначина $x^4+y^4=z^2$ нема решења, јер ако не постоји потпун квадрат, као збир два четврта степена, онда не постоји ни четврти степен. Проблем се решава методом ,,најмањег“ решења.

[2]Пјер де Ферма (1601-1665) Француски математичар и правник. Значајна су његова бриљантна истраживања у теорији бројева.

Претпоставићемо да постоје решења, тј. природни бројеви x_0, y_0 и z_0, такви да је ${x_0}^4 + {y_0}^4 = {z_0}^2$ и да је z_0 најмањи природан број који задовољава дату једнакост. Ако је $x^4 + y^4 = z^2$, можемо претпоставити да су x, y, z у паровима узајамно прости бројеви, као и да је x паран, а y непаран број. Пошто су x^2, y^2 и z чланови основне Питагорине тројке, тада постоје бројеви m и n, такви да је $x^2 = 2mn,\ y^2 = m^2 - n^2$ и $z = m^2 + n^2$. Видимо да је $y^2 + n^2 = m^2$, тако да су сада y, n и m чланови нове основне Питагорине тројке, што значи да сада постоје узајамно прости природни бројеви p и q такви да је $y = p^2 - q^2, n = 2pq$ и $m = p^2 + q^2$. Из претходног је очигледно $x^2 = 2mn = 4pq(p^2 + q^2)$. Како су p и q узајамно прости, биће и pq и $p^2 + q^2$ узајамно прости. Да би број $4pq(p^2 + q^2)$ био потпун квадрат, мора сваки од чинилаца овог производа да буде потпун квадрат. Односно, морају постојати природни бројеви a, b и c, такви да је $p = a^2, q = b^2$ и $p^2 + q^2 = c^2$. Тада је $p^2 + q^2 = a^4 + b^4 = c^2$, тако да бројеви a, b и c, задовољавају полазну једначину $x^4 + y^4 = z^2$. Јасно је да је c мање од z_0, па смо дошли до противуречности са претпоставком, тако да је доказ завршен.

Примедба: Доказ велике Фермаове теореме за n=3 извео је Ојлер[3] 1768. год. Али тек после сто година је Гаус[4] доказао теоријске основе, које је неосновано у свом доказу користио Ојлер. Како је већ речено, математичари су се више од три века бавили великом Фермаовом теоремом. Тек 1995. Године у једном од престижних математичких часописа ,,Annals of Mathematics ", публикован је потпун доказ ове теореме који је заузео цео број поменутог часописа. Тако је на крају 20. века цео свет признао да је велика Фермаова теорема, која је све до тада у ствари била хипотеза, постала доказана теорема. Енглески математичар Ендрју Вајлс[5], са сарадницима, је остварио своје дечачке снове и доказавши велику Фермаову теорему, ушао у историју.

7.6. Ирационалне Диофантове једначине

Када говоримо о ирационалним Диофантовим једначинама, неће бити теоријских разматрања, већ ће са неколико примера бити илустроване карактеристичне проблемске ситуације, везане за ове једначине. Треба напоменути да се посебна пажња мора посветити домену дефинисаности корена.

[3] Леонард Ојлер (1707-1783) швајцарски математичар и физичар.
[4] Карл Фридрих Гаус(1777-1855) немачки математичар који је дао значајан допринос теорији бројева.
[5] Ендрју Вајлс (1953) британски математичар, постао је славан доказавши велику Фермаову теорему.

ПРИМЕР 35: Одредити сва целобројна решења дате једначине: $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$

РЕШЕЊЕ: На основу услова дефинисаности квадратног корена добијамо: $x-\frac{1}{5}\geq 0 \wedge y-\frac{1}{5}\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{5} \wedge y\geq \frac{1}{5}$, па када дату једначину помножимо са $\sqrt{5}$, добијамо: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5$. Јасно је да важи $0\leq 5x-1\leq 25 \wedge 0\leq 5y-1\leq 25$, тј. $1\leq x\leq 5 \wedge 1\leq y\leq 5$. Како је $5x-1=a^2 \quad \wedge \quad 5y-1=b^2$, онда мора бити $a+b=5$, односно, $x=\frac{a^2+1}{5} \quad \wedge \quad y=\frac{b^2+1}{5}$. Пошто x и y морају бити цели бројеви, онда a и b узимају узајамне вредности 2 и 3, па су једина решења дате једначине $(1,2);(2,1)$.

ПРИМЕР 36: Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{1996}$ *у скупу ненегативних целих бројева.*

РЕШЕЊЕ: Дата једначина еквивалентна је са једначином $x=y+z+1996+2\sqrt{yz}-4\sqrt{499y}-4\sqrt{499z}$. Бројеви x,y,z су ненегативни цели бројеви још $yz, 499y, 499z$ треба да буду потпуни квадрати. Можемо узети да је $y=499a^2$ а $z=499b^2$. Па на основу овога и почетне једнакости одређујемо границе, ако је: $0\leq y=499a^2\leq 1996 \quad \wedge \quad 0\leq z=499b^2\leq 1996$, онда је $0\leq a\leq 2; \quad 0\leq b\leq 2$ и $a+b\leq 2$. Разматрањем случајева добијамо шест решења:

(0,0,1996),(0,1996,0),(1996,0,0),(0,499,499),(499,0,499),(499,499,0)

ПРИМЕР 37: Одредити све целе бројеве x *и* y *текве да је* $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1976}$

РЕШЕЊЕ: Очигледна решења су $(x,y)=(0,1976)\vee(x,y)=(1976,0)$. Ако су x и y природни бројеви, онда је $\sqrt{x}=\sqrt{1976}-\sqrt{y}$, квадрирањем добијамо $x=1976-2\sqrt{1976y}+y$, ова једначина има решења у скупу природних бројева ако је $1976y=2^3\cdot 247\cdot y=k^2$ $(k\in\mathbb{N})$. Како је број 247 прост број то је $y=2\cdot 247=494$. Дакле, $x=494$, тако да је треће решење дате једначине $(x,y)=(494,494)$.

7.7. Експоненцијалне Диофантове једначине

Решавање експоненцијалних Диофантових једначине је у суштини синтеза свих изложених метода и због тога су оне веома важне. За решавање експоненцијалних Диофантових једначина користе се основне теореме теорије бројева, као и најважније особине експоненцијалних функција.

ПРИМЕР 38: Постоје ли природни бројеви x и y такви да важи једнакост $2^x + 1 = y^2$?

РЕШЕЊЕ: Дату једнакост можемо писати као $2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$. Изрази $y-1$ и $y+1$ су исте парности, па због тога што је њихов производ 2^x, они су парни. Тако је $y-1 = 2^a$ и $y+1 = 2^b$, $(a+b = x,\ a < b)$. Ако од друге одузмемо прву једнакост, добијамо: $2^b - 2^a = 2 \Rightarrow \quad 2^a(2^{b-a} - 1) = 2$ па је $2^a = 2 \quad \wedge \quad 2^{b-a} - 1 = 1$, одакле је $a = 1$ и $b = 2$. Тако добијамо да је $x = a + b = 3$ и коначно, једино решење дате једначине је : $(x, y) = (3,3)$.

ПРИМЕР 39: Одредити целе бројеве x и y тако да је $3^x - 2^y = 5$

РЕШЕЊЕ: Како је $2^y = 3^x - 5 > 0$ тада мора бити $3^x > 5$, тако да је онда $x \geq 2$. Сада имамо да је $2^y = 3^x - 5 \geq 9 - 5 = 4$, односно $y \geq 2$. Ако је $x \geq 2$, тада је $3^x = 2^y + 5 \equiv 0(\bmod 3)$. Како је $2 \equiv (-1)(\bmod 3) \ \Rightarrow \ (-1)^y + 5 \equiv 0(\bmod 3)$ одакле закључујемо да је y паран број. Слично за $y \geq 2$ број $2^y = 3^x - 5 \equiv 0(\bmod 4)$. Како је $3^x \equiv (-10(\bmod 4) \Rightarrow (-1)^x - 5 \equiv 1(\bmod 4)$ па је x паран број. Дакле, $x = 2a,\ y = 2b,\ (a, b \in \mathbb{N})$. Тада дата једначина постаје $3^{2a} - 2^{2b} = (3^a - 2^b)(3^a + 2^b) = 5$. Како је 5 прост број и још је $3^a - 2^b < 3^a + 2^b$ имамо да је $3^a - 2^b = 1$ и $3^a + 2^b = 5$. Следи да је $2 \cdot 3^a = 6$ и $2 \cdot 2^b = 4$. Тада је $a = b = 1$, тј. $(x, y) = (2,2)$ једино решење дате једначине.

7.8. Пелова једначина

Нека је *m* позитиван цео број који није потпун квадрат (без умањења општости може се претпоставити да је *m* производ различитих простих бројева), тада једначину облика $x^2 - my^2 = 1$ зовемо *Пелова једначина.* Видимо да су $x = \pm 1$, $y = 0$ тривијална решења сваке Пелове једначине, док су сва друга решења нетривијална.

Леву страну Пелове једначине можемо факторисати на следећи начин: $(x + y\sqrt{m})(x - y\sqrt{m}) = 1$. Зато, ако је (x, y) једно нетривијално решење дате једначине, па ако са x_n, y_n означимо целе бројеве дефинисане са $x_n + y_n\sqrt{m} = (x + y\sqrt{m})^n$ за $n \geq 1$, тада и (x_n, y_n) јесте решење дате једначине. Дакле, ако дата једначина има бар једно нетривијално решење, тада их има бесконачно много. Нетривијална решења увек постоје, ово тврђење (које је засновано на неким основним резултатима из области Диофантових апроксимација), биће дато без доказа.

Теорема 11: *Нека је m позитиван цео број који није потпун квадрат, тада једначина* $x^2 - my^2 = 1$ *има бесконачно много решења.*

Теорема 12: *Нека је m позитиван цео број који није потпун квадрат и нека је* (x_0, y_0) *оно позитивно решење* $(x_0 > 0, y_0 > 0)$ *једначине* $x^2 - my^2 = 1$ *за које је* $x_0 + y_0\sqrt{m}$ *минимално, тада су сва решења* (x, y) *дате једначине одређена са:* $(x + y\ \sqrt{m}) = \pm(x_0 + y_0\sqrt{m})^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доказ: На основу претходних примедби, ако је (x_0, y_0) решење једначине $x^2 - my^2 = 1$, онда је и сваки пар (x, y) одређен условом из формулације теореме, такође решење дате једначине. Доказаћемо да других решења нема. Претпоставимо супротно, да постоји неко решење (x, y) које није задатог облика. Без умањења општости претпоставимо, да је $x + y\sqrt{m} > 0$. Како је $\lim_{n\to-\infty}(x + y\sqrt{m})^n = 0$, $\lim_{n\to+\infty}(x + y\sqrt{m})^n = +\infty$ следи да постоји неко $k \in \mathbb{Z}$, тако да је $(x_0 + y_0\sqrt{m})^k < x + y\sqrt{m} < (x_0 + y_0\sqrt{m})^{k+1}$. Ако помножимо ову двоструку неједнакост са $(x_0 - y_0\sqrt{m})^k > 0$ и како је $x_0^{\ 2} - my_0^{\ 2} = 1$, добијамо: $1 < (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k < x_0 + y_0\sqrt{m}$.

Ако сада дефинишемо $x^{'}, y^{'} \in \mathbb{Z}$ са $x^{'} + y^{'}\sqrt{m} = (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k$, тада важи

$$\begin{aligned}(x^{'})^2 - m(y^{'})^2 &= (x^{'} + y^{'}\sqrt{m})(x^{'} - y^{'}\sqrt{m}) \\ &= (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k(x - y\sqrt{m})(x_0 + y_0\sqrt{m})^k \\ &= (x^2 - my^2)(x_0^{\ 2} - my_0^{\ 2})^k = 1\end{aligned}$$

па и $(x^{'}, y^{'})$ представља решење дате једначине.

Неједнакост $1 < (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k < x_0 + y_0\sqrt{m}$ можемо сада писати као $1 < x^{'} + y^{'}\sqrt{m} < x_0 + y_0\sqrt{m}$, одакле је $0 < x^{'} - y^{'}\sqrt{m} < 1$. Због последњих неједнакости немогући су случајеви $y^{'} = 0$, затим $x^{'} > 0, y^{'} < 0$, као и $x^{'} < 0, y^{'} > 0$. Због неједнакости $1 < (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k < x_0 + y_0\sqrt{m}$ не може бити ни $x^{'}, y^{'} < 0$. Тако мора бити

$x^{'}, y^{'} > 0$. Међутим сада друга неједнакост из $1 < (x + y\sqrt{m})(x_0 - y_0\sqrt{m})^k < x_0 + y_0\sqrt{m}$ чини контрадикцију са претпостављеним минималним својствима решења (x_o, y_0).

Овај доказ је илустрација онога што се у теорији Диофантових једначина зове *Фермаов метод бесконачног спуштања,* под претпоставком да посматрана једначина има решење (одређеног типа), уочи се решење које је у извесном смислу ,,минимално“. С друге стране, својства једначине дају могућност да се, полазећи од ,,минималног“ решења, конструише мање, што даје контрадикцију и показује да таква решења у ствари не постоје.

Када је познато основно решење (x_0, y_0), могу се формирањем рекурентне везе између два узастопна решења, одредити и остала решења (x_n, y_n). Како је

$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{m} = (x_n + y_n\sqrt{m})(x_0 + y_0\sqrt{m})$ следи

$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{m} = x_n x_0 + m y_n y_0 + \sqrt{m}(x_n y_0 + y_n x_0).$

Изједначавањем рационалних и ирационалних делова једнакости, добијамо $x_{n+1} = x_n x_0 + m y_n y_0$ и $y_{n+1} = x_n y_0 + y_n x_0$. Формуле за директно одређивање низова су

$$x_n = \frac{1}{2}[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n + (x_0 - y_0\sqrt{m})^n]$$

$$y_n = \frac{1}{2}[(x_0 + y_0\sqrt{m})^n - (x_0 - y_0\sqrt{m})^n]$$

Овде је главни проблем како одредити основно решење (x_0, y_0)? Некада то може бити и једноставно:

- Ако је $m = a^2 - 1,$ онда је $x^2 - my^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1.$ Одавде је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$ тако да је основно решење $(x_{0,} y_0) = (a, 1)$
- Ако је $m = a^2 + 1, x^2 - my^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1.$ Тада је $x^2 = a^2 y^2 + y^2 + 1$ а да би био потпун квадрат мора бити $y^2 = 2ay,$ па је $y = 2a,$ а $x = ay + 1 = 2a^2 + 1.$ Тако да је $(x_0, y_0) = (2a^2 + 1, 2a)$.
- Ако Пелова једначина $x^2 - my^2 = 1$ има решења, онда једначина $x^2 - q^2 \cdot my^2 = 1,$ има основно решење $(x_0, y_0) = (x_0, \frac{y_0}{q}).$ Овде m одређујемо на основу претходна два случаја. На пример основно решење једначине $x^2 - 5y^2 = 1$ је (9,4), па је према томе основно решење за једначину $x^2 - 20y^2 = 1,$ односно $x^2 - 2^2 \cdot 5y^2 = 1$ износи

$(x_0, y_0) = (9, \frac{4}{2}) = (9,2)$. Аналогно за једначину $x^2 - 63y^2 = 1$, односно $x^2 - 3^2 \cdot 7y^2 = 1$. Основно решење $(x_0, y_0) = (8, \frac{3}{3}) = (8,1)$.

ПРИМЕР 40: *Одредити опште решење једначине* $x^2 - 3y^2 = 1$.

РЕШЕЊЕ: Минимално решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (2,1)$. Опште решење ове једначине је $x_{n+1} = 2x_n + 3 \cdot 1 \cdot y_n = 2x_n + 3y_n$; $y_{n+1} = x_n + 2y_n$, односно, дато општом формулом: $x + y\sqrt{3} = \pm(2 + \sqrt{3})^n$.

8. Још неколико занимљивих задатака

8.1. Математичке загонетке и питалице

1. Излет

Иван, Стефан и Алекса су кренули на излет. Да би у котлићу скували рибљу чорбу, Иван је понео 10 цепаница, Стефан 6, а Алекса је уместо дрва дао 160 динара да надокнади трошкове. Колико од овог новца припада Ивану а колико Стефану?

РЕШЕЊЕ: Закључујемо да би свих 16 цепаница коштало $3 \cdot 160$ динара, односно 480 динара. Значи да једна цепаница кошта 30 динара. Тако да Ивану за 10 цепаница припада 10 пута 30 динара, тј. 300 динара. Међутим и он сам користи ватру за 160 динара, па је његов део 300-160=140 динара. Стефану за 6 цепаница припада 6 пута 30 динара, односно 180 динара. Он такође користи ватру за 160 динара, па му остаје 180-160=20 динара.

2. Деда и унук

...Десило се то 1932 године. Мени је тада било баш онолико година колико показују последње две цифре у години мога рођења. Када сам ово испричао деди, рекао ми је да је и са његовим годинама исти случај. Мени је то изгледало немогуће...

РЕШЕЊЕ: Могуће је, јер унук је рођен у двадесетом веку 19_ _. Удвостручен број који представљају преостале две цифре је 32. Последње две цифре у години унуковог рођења добијамо када 32 поделимо са 2, а то је 16. Тако сазнајемо да је унук рођен 1916 године, а

1932 има 16 година , тачно онлико колико показују последње две цифре у години његовог рођења. Деда је рођен у деветнаестом веку, 18_ _. Удвостручен број преостале две цифре треба да буде 1932, односно 132. Тражени број добијамо када 132 поделимо са 2 а то је 66. Деда је рођен 1866 године и 1932 године има 66 година, баш онолико година колико показују последње две цифре године његовог рођења.

3. Кликери

Деца су распоредила кликере у три неједнаке гомилице, укупно 72 кликера. Ако са прве гомилице пренесу на другу онолико кликера колико је на њој већ било, затим са друге на трећу колико је на њој било, и најзад са треће на прву онолико колико се на њој сада налази, на свим гомилицама биће исти број кликера. Колико је на почетку било кликера на свакој гомилици?

РЕШЕЊЕ: Биће лакше овај задатак решавати од краја. Знамо да на крају свака гомилица има исти број кликера а то је 24. Ако прва има 24 кликера а на њу је пренето онолико колико је на њој било кликера, значи да је било 12 и 12 је пренето. Тих 12 кликера је пренето са треће гомилице, па је на њој морало бити 24 плус 12 тј. 36. Пре последњег (трећег) преношења, број кликера на гомилицама је изгедао овако I-12; II-24; III-36. Другим преношењем је са друге гомилице пренето на трећу онолико колико је на њој било, тј. пренето је 18 и 18 је било. Пре овог преношења број кликера по гомилицама изгледао је овако: I-12; II-42; III-18. Првим преношењем је са прве гомилице на другу пренето онолико колико ја на њој било а to је 21. Тако сазнајемо да је на почетку број кликера по гомилицама изгледао овако: I-33; II-21; III-18.

4. Аритметички трик

Ако се замисли произвољан троцифрени број, без било каквих ограничења, затим му се допише исти тај број. Сада се добијени шестоцифрени број подели са 7, па се добијени резултат подели са 11, и још добијени број подели са 13, добиће се замишљени број.

ОБЈАШЊЕЊЕ: Нека је замишљени број 234, када му допишемо исти број он постаје $234234 = 234000 + 234 = 234 \cdot 1001$. Значи да је замишљени број помножен са 1001, па како је онда узастопно дељен са 7, 11, 13, а производ ова три броја је 1001, није чудо да је као резултат добијен замишљени број.

5. Избрисана цифра

Замислити вишецифрени број, затим одредити збир његових цифара, па тај збир одузети од замишљеног броја и у добијеном броју избрисати једну цифру, било коју. Саопштити остале цифре, знаће се која је цифра избрисана.

ОБЈАШЊЕЊЕ: Замислимо нпр. број 432, 4+3+2= 9, 432-9= 423 и ако избришемо 4 и саопштимо да су остале цифре 2 и 3, 2+3=5, до најближег броја дељивог са 9 треба 4 и то је избрисана цифра. Како?

Када од било ког броја одузмемо збир његових цифара остаје број који је дељив са 9. Ако се догоди да је збир саопштених цифара дељив са 9 то значи да је избрисана цифра 0 или 9.

6. Погоди број не питајући ништа

Замисли се било који троцифрен број који се не завршава нулом, затим се његове цифре поређају обрнутим редоследом и од већег одузме мањи. Добијеној разлици дода се број који настаје када се цифре напишу обрнутим редоследом. Крајњи резултат је 1089.

ОБЈАШЊЕЊЕ: Нпр. 234 и 432, од већег одузмемо мањи, значи 432-234= 198. Овом броју додамо број који настаје писањем његових цифара обрнутим редоследом, а то је 891. Значи 198+891= 1089. Како се ово може знати?

Узмимо број $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, број са обрнутим редоследом цифара, гласиће: $100c + 10b + a$, њихова разлика је $99a - 99c = 99(a-c) = 100(a-c) - (a-c) =$ $= 100(a-c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c = 100(a-c-1) + 90 + (10 - a + c)$. Видимо да се разлика састоји од следеће 3 цифре: цифра стотине је $a - c - 1$; цифра десетице је: 9, а цифра јединице: $10 - a + c$. Број са обрнутим редоследом цифара пишемо $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$. Сабирањем оба броја добијамо:

$$100(a-c-1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089.$$

8.2. Пета математичка операција

Алгебру често називају ,,аритметиком седам операција“, што значи да су опште познатим операцијама којих има четири, прикључене још три нове, а то су степеновање и две степеновању супротне операције: кореновање и логаритмовање. Застаћемо код ,,пете операције“ – степеновања.

Потреба за овом операцијом настала је из свакодневног живота. Рачунање површине и запремине захтева познавање другог и трећег степена. Снага гравитације, електростатичко и магнетно узајамно деловање, светлост и звук опадају сразмерно другом степену растојања.

Степене са изложиоцима већим од 3 не налазимо само у збиркама алгебарских задатака. У прорачунима везаним са чврстином материјала нпр. јављају се четврти степени. Испитивање силе којом текућа вода ваља камење, подразумева формуле у којима се јављају изрази шестог степена.

7. Промена времена током недеље

Нека се разликују само сунчани и облачни дани. На колико се начина у току једне недеље могу смењивати сунчани и облачни дани?

РЕШЕЊЕ: Први дан у недељи може бити сунчан или облачан, тако да имамо две могуће комбинације. Током два дана могуће комбинације су: сунчан-сунчан; облачан-облачан; сунчан-облачан; облачан-сунчан. Сада имамо 2^2 могућих комбинација. Током три дана биће $2^2 \cdot 2 = 2^3$. Током четири дана биће $2^3 \cdot 2 = 2^4$ итд. Током седам дана биће $2^6 \cdot 2 = 2^7 = 128$

8. На три спрата

- *Са три двојке, не користећи знаке операција написати што већи број.*

РЕШЕЊЕ: Са три двојке без знакова операција се могу написати следећи бројеви: $2^{2^2} = 2^4 = 16$ од овог броја већи је 222, од овог већи број је 22^2=484 а од овог још већи $2^{22} = 4\ 194\ 304$

- *Са три тројке, не користећи знаке операција написати што већи број.*

РЕШЕЊЕ: То може бити $3^{3^3} = 3^{27}$ или 3^{33}. Очигледно је 3^{33} већи број.

- *Са три четворке, не користећи знаке операција написати што већи број.*

РЕШЕЊЕ: Можемо писати $4^{4^4} = 4^{256}$ или 4^{44}, јасно је да је 4^{256} већи број.

Треба дати одговор на питање због чега поједине цифре када се напишу на три спрата дају огромне бројеве а друге не?

Задатак је био са три једнаке цифре без употребе знакова операција, записати што већи број. Ако цифру означимо словом a $(a \in \{2,3,4,...,9\})$, бројевима $2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$ одговара запис $a^{10a+a} = a^{11a}$, док троспратни запис у општем облику изгледа овако a^{a^a}. Сада теба одредити за које вредности параметра a овај троспратни запис представља већи број него први. Обе формуле јесу степени са једнаким целим основама а то значи да већем изложиоцу одговара већи број. Треба одредити када је $a^a > 11a$. Ако обе стране неједнакости поделимо са a имаћемо следећу неједнакост: $a^{a-1} > 11$. Лако је уочити да је она испуњена за $a > 3$.

8.3. Превод са стварног, на језик алгебре

9. Бомбоне

Колико је Ана имала бомбона, ако је свом брату Аци дала трећину свих бомбона, сестра Јеца јој је узела две или четири или шест бомбона (а да Ана није знала колико), половину преосталих бомбона Ана је изгубила, затим јој је Јеца вратила половону онога што је узела, онда је ана две бомбоне дала другарици Гоци, а последњу бомбону је сама појела?

РЕШЕЊЕ: Нека је Ана на почетку имала x бомбона и нека је Јеца узела к бомбона. На основу услова задатка имамо:

Први начин : $x = \frac{1}{3}x + k + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x - k) - \frac{1}{2}k + 2 + 1 \Rightarrow x = 9$

Други начин: $x - \frac{1}{3}x - 2k - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}x - 2k) + k - 2 = 1 \Rightarrow x = 9$

10. Бомбоне

Две девојчице су купиле кесицу бомбона, отвориле је и свака је узела део бомбона. Када је свака своје пребројала, прва девојчица је рекла: Ти имаш више бомбона од мене, толико више да ако ти ја дам 2 имаћеш дупло више него ја. Али ако ти даш мени две имаћемо једнако. Колико је свака девојчица имала бомбона у првој подели?

РЕШЕЊЕ: На основу овог текста треба саставити једначине. Ако са x означимо број бомбона прве девојчице, а са y број бомбона друге девојчице, имаћемо следеће једначине: $y+2=2(x-2) \quad \wedge \quad y-2=x+2$, односно $2x-y=6 \quad \wedge \quad y-x=4$ одакле добијамо $x=10, \quad y=14$.

11. Радник-нерадник

По договору, радник је од газде добија по 48 франака за сваки дан проведен на послу, а за сваки дан недоласка на посао морао је да врати газди 12 франака. За тридесет дана испоставило се да радник није зарадио ништа. Колико је дана радник радио тог месеца?

РЕШЕЊЕ: Први начин: Нека је x број дана које је радник провео на послу, тада ће $30-x$ бити број дана када радник није радио. Како за месец дана није зарадио ништа, решавамо једначину: $x \cdot 48=(30-x) \cdot 12$, одакле је $4x=30-x \Rightarrow 5x=30 \Rightarrow x=6$. Значи да је тог месеца радник радио 6 дана.

Други начин: Овај задатак се може решити и веома једоставно. Како је сума коју радник за један дан може да заради четири пута већа од суме коју треба да врати газди ако не дође на посао, и како радник није зарадио ништа, можемо закључити да је број дана које је провео на послу четири пута мањи од броја дана када није долазио. Тако треба 30 да поделимо у односу 4:1, тј. на пет једнаких делова (на по 6 дана) па су четири дела 24 дана, а један део 6 дана.

12. Задруга косача

(Задатак који се веома допао великом писцу Л.М. Толстоју)

,,Задруга косача требало је да покоси две ливаде, једну двапут већу од друге. Пола дана задруга је косила велику ливаду. После тога задруга се поделила на две једнаке групе. Прва половина остала је на великој ливади и до мрака је покосила до краја, а друга половина је косила малу ливаду и до мрака је на њој остала непокошена још једна парцела, коју је наредног дана један косач покосио за један радни дан“. Колико је косача било у задрузи?

РЕШЕЊЕ: Број косача означимо са x, а нека са y буде означена величина парцеле коју један косач треба да покоси за један дан. Велику ливаду косило је пола дана x косача, они су покосили $x \cdot \frac{1}{2} y=\frac{xy}{2}$ ливаде. Другу половину дана ту ливаду је косило само пола задруге, тј. $\frac{x}{2}$ косача, и они су покосили $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y=\frac{xy}{4}$ ливаде. Како је до увече већа ливада била цела покошена, њена површина је $\frac{xy}{2}+\frac{xy}{4}=\frac{3xy}{4}$. Мању ливаду је пола дана косило $\frac{x}{2}$ косача, и покосили су површину $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y=\frac{xy}{4}$. Непокошени део ливаде је y који један косач покоси за један дан. Површина мање ливаде је $\frac{xy}{4}+y=\frac{xy+4y}{4}$ и још знамо да је прва ливада двапут већа од друге. $\frac{3xy}{4}=2\frac{xy+4y}{4}\Rightarrow 3xy=2y(x+4)$ одакле је $3x=2x+8\Rightarrow x=8$, значи било је 8 косача.

Међутим, овај задатак је веома једноставан да се за његово рашавање не мора применити алгебарски апарат.

Ако је пола дана велику ливаду косила цела задруга а пола дана пола задруге, јасно је да за пола дана, пола задруге покоси $\frac{1}{3}$ велике ливаде. Значи на малој ливади остала је непокошена парцела $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, одакле видимо да један косач дневно покоси $\frac{1}{6}$ велике ливаде, а било је покошено $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ што значи да је било 8 косача.

13. Краве на ливади

Трава на целој ливади расте подједнако брзо и густо. Познато је да би је 70 крава појело за 24 дана, а 30 крава за 60 дана. Колико би крава појело ливаду за 96 дана?

РЕШЕЊЕ: Мора се водити рачуна да трава на ливади непрекидно расте. Означимо прираст траве са y. Значи за 24 дана порасте 24 y траве, и ако целокупну количину траве на ливади пре него што су краве почеле да пасу означимо са 1, онда за 24 дана краве поједу $1+24y$. За један дан 70 крава поједе количину траве једнаку $\frac{1+24y}{24}$, а једна крава ће појести $\frac{1+24y}{24\cdot 70}$. Аналогно, из података да би 30 крава попасло ливаду за 60 дана долазимо до закључка да једна крава поједе за један дан $\frac{1+60y}{30\cdot 60}$ количину траве. Значи да је $\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+60y}{30\cdot 60}$ одакле добијамо $y=\frac{1}{480}$. Сада можемо наћи колики део количине траве затечене на ливади, на почетку паше поједе дневно једна крава, а то је $\frac{1+24y}{24\cdot 70}=\frac{1+24\cdot\frac{1}{480}}{24\cdot 70}=\frac{1}{1600}$. Једначина за коначно решење задатка, ако је тражени број крава x, је $\frac{1+96\cdot\frac{1}{480}}{96\cdot x}=\frac{1}{1600}$ одакле добијамо $x=20$. За 96 дана целу ливаду би попасло 20 крава.

14. Премештање казаљки на часовнику

(Биограф и пријатељ славног физичара А. Ајнштајна, А. Мошковски, желећи да разоноди свог пријатеља за време болести, предложио му је да реши следећи задатак):

„У 12 часова ако би велика и мала казаљка замениле места, оне би ипак показивале тачно време. Међутим, у другим моментима, замена места казаљки довела бо до положаја какав на исправном часовнику не може бити. Када и колико често казаљке на часовнику заузимају такве положаје, да када међусобно замене места, дају положаје такође могуће на исправном часовнику?“

РЕШЕЊЕ: Меримо растојања казаљки по кругу бројчаника, почев од тачке која припада броју 12 и то у 60-тим деловима круга. Ако један од тражених положаја казаљки уочимо у тренутку када се мала (сатна) казаљка удаљила од броја 12 за x подеока, а велика (минутна) за y подеока. Сатна казаљка прелази 60 подеока за 12 часова, тј. 5 подеока за 1 час. Она x подеока прелази за $\frac{x}{5}$ часова, тј. од момента када је часовник показивао 12 часова прошло је $\frac{x}{5}$ часова. Минутна казаљка је прошла y подеока за y минута тј. за $\frac{y}{60}$ часова, односно, број 12 је минутна казаљка прешла пре $\frac{y}{60}$ часова, или за $\frac{x}{5}-\frac{y}{60}$ часова после тренутка када су обе казаљке биле на 12. Овај број је цео (од 0 до 11), јер показује колико је пуних часова прошло после 12. Када казаљке замене места, по аналогији, наћи ћемо да је од 12 часова до времена које показују прошло $\frac{y}{5}-\frac{x}{60}$ часова. Овај број је исто цео (од 0 до 11), па имамо систем једначина: $\frac{x}{5}-\frac{y}{60}=m\wedge\frac{y}{5}-\frac{x}{60}=n$, где су m,n цели бројеви од 0 до 11. Из добијеног система налазимо: $x=\frac{60(12m+n)}{143}$; $y=\frac{60(12n+m)}{143}$. Када m и n заузимају вредности од 0 до 11 добијамо све тражене положаје казаљки.

Свака од 12 вредности m може се сложити са сваком од 12 вредности n, тако да је очекиван број решења $12 \cdot 12$=144, али ипак имамо 143 решења, јер за $m=0, n=0$ као и за $m=11, n=11$ имамо $x=60, y=60$, тј. часовник у оба случаја показује 12.

Узмимо за пример један од могућих положаја, када је рецимо $m=8, n=5$. Тада имамо $x=\frac{60(5+12\cdot 8)}{143}=42{,}38;\ y=\frac{60(8+12\cdot 5)}{143}=28{,}53$. Одговарајуће време је 8 часова и 28,53 минута и 5 часова и 42,38 минута. Да бисмо нашли свих 143 решења треба круг бројчаника поделити на 143 једнака дела.

Још један пример: *Концерт је почео између 18 и 19 часова, а завршио се између 21 и 22 часа. Колико дуго је трајао концерт ако су сатна и минутна казаљка за то време замениле места?*

РЕШЕЊЕ: На основу претходног разматрања и услова задатка узимајући за m,n 6 и 9 добијамо $x=\frac{60(6+12\cdot 9)}{143}=47\frac{119}{143}$ и $y=\frac{60(9+12\cdot 6)}{143}=33\frac{141}{143}$. То значи да је концерт трајао од 18 часова и $47\frac{119}{143}$ минута до 21 час и $33\frac{141}{143}$ минута, укупно 2 часа и $46\frac{2}{13}$ минута.

15. Поклопљене казаљке на часовнику

Сатне казаљке су се поклопиле тачно у подне. Када ће се оне поново поклопити?

РЕШЕЊЕ: Први начин. Нека до поклапања протекне x сати, за то време казаљка прође $\frac{x}{12}$ круга, а минутна казаљка x кругова, при чему је минутна прешла неколико (k) кругова више, тако имамо једначину $x-\frac{x}{12}=k,\ k\in\mathbb{N}$, одакле је $x=\frac{12}{11}k.$ Стављајући $k=0,1,2,3,\ldots$ добијамо после колико часова ће бити поклапања. Нпр. прво поклапање је за $k=1$, тј. после $\frac{12}{11}$ сати$=1\,h\,5\frac{5}{12}\min=1\,h\,5\min\ 27\frac{5}{11}s,$ тј. приближно у 13 h 5 min. 27s; друго поклапање је за k=2, тј. после $\frac{24}{11}$ сати=2h 10$\frac{10}{11}\min$.

Други начин. Нека до поклапања протекне x сати. Сатна казаљка за 1 сат опише угао 30° а за x сати угао од 30x степени. Минутна казаљка за 1 сат опише 360°, а за x сати 360x степени. Пошто је за то време минутна казаљка описала неколико пута по 360° више, тј.

$360k$ степени више, где k=0,1,2,3,… имаћемо једначину $360x = 30x + 360k \Rightarrow 12x = x + 12k \Rightarrow x = \frac{12}{11}k, k = 0,1,2,...$ (као у првом начину).

Трећи начин. Минутна казаљка обиђе цео круг за 60 минута, а за један минут $\frac{1}{60}$ круга. Сатна казаљка обиђе цео круг за 12 сати, за 1 сат обиђе $\frac{1}{12}$ круга, а за један минут пређе $\frac{1}{720}$ круга. Нека се казаљке први пут поклопе после x минута. За то време минутна казаљка ће прећи $\frac{x}{60}$ круга, а сатна $\frac{x}{720}$ круга, али ће за то време минутна казаљка прећи и 1 круг више (до $k-$тог поклапања k кругова више), па имамо једначину $\frac{x}{60} - \frac{x}{720} = 1$, одакле је $x = 65\frac{5}{11}$ (У општем случају: $\frac{x}{60} - \frac{x}{720} = k \Rightarrow x = 65\frac{5}{11}k$ минута). Дакле, казаљке ће се први пут поклопити после 65$\frac{5}{11}$ минута, тј. после 1 сата и $5\frac{5}{12}$ минута, тј. приближно у 13h 5min 27s. и тд.

Пример: *Колико ће времена протећи од 4 часа до првог поклапања казаљки на часовнику?*

РЕШЕЊЕ: На основу претходних разматрања и услова задатка, закључујемо да је k=4, па имамо да ће до поклапања доћи у $\frac{12}{11} \cdot 4h = 4\ h\ \frac{240}{11}\min = 4h\ 21\frac{9}{11}\min$. Односно после 4h и 21$\frac{9}{11}\min$.

16. Када једначина мисли уместо нас

Отац има 32 године, а син 5. После колико година ће отац бити десет пута старији од сина?

РЕШЕЊЕ: Обележимо са x тражени број година. После x година оцу ће бити 32+x година, а сину 5+x година и тада отац треба да буде 10 пута старији од сина. Значи 32+x=10(5+x), одакле је x=-2. Када је састављана једначина није се водило рачуна о томе да узраст оца у будућности никада неће бити 10 пута већи од узраста сина. Такав однос могао је да буде само у прошлости.

17. Средња брзина вожње (један практичан задатак из свакодневног живота)

Бициклиста је путем од А до Б (узбрдо) возио брзином 10 km/h , а истим путем од Б до А (низбрдо) брзином 30 km/h. Према томе средња брзина на читавом путу била је 20km/h. да ли је баш тако?

РЕШЕЊЕ: Ово једноставно решење било би тачно када би вожња у једном и другом смеру трајала исто време, међутим јасно је да је повратак трајао краће због веће брзине. Тако закључујемо да је дато решење нетачно. Није тешко доћи до тачног решења ако се уведе помоћна променљива за растојање између места А и Б, коју можемо означити са d, а тражену средњу брзину са x, тражена једначина има облик $\frac{2d}{x}=\frac{d}{10}+\frac{d}{30}$, како је d различито од нуле, можемо целу једначину поделити са d. Тако добијамо $\frac{2}{x}=\frac{d}{10}+\frac{d}{30}$, тј. $\frac{2}{x}=\frac{4}{30}\Rightarrow x=15$. Дакле средња брзина је 15km/h.

Ако бисмо исти задатак решавали са општим бројевима (у једном правцу бициклиста је ишао брзином *a у* другом *b) имамо* једначину $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ *. Овај израз зове се хармонијска брзина и она је увек мања од аритметичке која се рачуна као* $\frac{a+b}{2}$.

8.4. Када је аритметици потребна помоћ

Аритметика често није у могућности да сопственим средствима докаже тачност неких својих тврђења, па се тада користе општији алгебарски поступци и методи.

Дељивост са 11: Алгебра знатно олакшава налажење правила, по којима унапред (без дељења), можемо установити да ли је дати број дељив посматраним делиоцем. Треба од збира свих цифара на непарним местима да одузмемо збир свих цифара на парним местима, ако се као резултат добије број дељив са 11 (позитиван или негативан) или нула, тада је задати број дељив са 11.

Пример: *Да ли је број 87 635 064 дељив са 11?*

РЕШЕЊЕ: 8+6+5+6=25;   7+3+0+4=14, разлика је 25-*14*=11, што нам говори да дати број јесте дељив са 11.

За бројеве који немају велики број цифара постоји још једно правило дељивости са 11. Идући с десна на лево дати број се дели на двоцифрене класе и затим се ове класе сабирају. Ако је добијени збир дељив са 11, тада је и дати број дељив са 11.

Пример: *Да ли је број 528 дељив са 11?*

РЕШЕЊЕ: Класе су 5 и 28 њихов збир је 33. Број 33 је дељив са 11, тако је и дати број дељив са 11.

18. Питање на квизу

Број који вам може донети 10 000 динара је четвороцифрен, прве две цифре су му исте и друге две цифре има исте и још је тај број потпун квадрат. Који је то број?

РЕШЕЊЕ: Нека је тај број $\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b)$, дакле број мора бити дељив са 11, па коначан квадрат мора бити дељив са 11^2. На основу било ког од претходних правила дељивости са 11 налазимо да је број $(a+b)$ дељив са 11, то значи да је $a+b=11$ јер је $a,b<11$. Последња цифра броја b који је потпун квадрат, може бити 0,1,4,5,6, или 9. Тада је $a=11-b$, па може бити 7,6,5 или 2. Дакле постоје следеће могућности: $b=4, a=7;\quad b=5, a=6; \vdots b=6, a=5;\quad b=9, a=2$. Тражени број може бити 7744; 6655; 5566; 2299. Последња три броја нису потпуни квадрати, 6655 је дељив са 5 али не и са 25. Број 5566 је дељив са 2 али не и са 4; 2299=21$\cdot$19, такође није квадрат. Остаје само 7744=88^2 то је тражени број.

19. Саобраћајни прекршај

*Три млада математичара су ишла улицом и уочила аутомобил чији је возач направио саобраћајни прекршај. Нису упамтили све регистарске бројеве тог ауте, већ само неке 13**45*. Међутим пошто су то математичари, један је запазио да је број дељив са 8, други да је дељив са 9, а трећи да је дељив са једанаест.*

РЕШЕЊЕ: Нека је то број облика $\overline{13xy45z}$. Да би он био дељив са 8 мора бити 8 делилац броја $\overline{45z}=450+z=448+(z+2),$ дакле 8 мора бити садржано у $z+2 \Rightarrow z=6$. Услов да је 9 делилац броја $\overline{13xy456}$ значи да збир $1+3+x+y+4+5+6=18+(x+y+1)$ мора бити дељив са 9, односно да је 9 садржано у $x+y+1$, одакле је $x+y=8$ или $x+y=17$. Услов да је 11 делилац броја $\overline{13xy456}$ значи да је са 11 дељив израз $6-5+4-y+x-3+1=x-y+3$, па је $x-y=-3$ или $x-y=8$. Имамо два случаја:

1. Ако је $x+y$ паран број, онда је $x+y=8$ и $x-y=8 \Rightarrow x=8,\ y=0$;

2. Ако је $x+y$ непаран број, онда је $x+y=17$ и $x-y=-3 \Rightarrow x=7,\ y=10,$ што није могуће јер је y цифра. Према томе једино решење је број 1380456.

Право знање математике је способност да се математичка средства одаберу тако да се увек нађе директан и сигуран пут који води решењу, без обзира да ли метода решавања задатка спада у аритметику, алгебру, геометрију, и тд. Размотримо пример када алгебра може само да закомпликује ствари.

Пример 1: *Наћи најмањи од свих бројева који приликом дељења са два даје остатак један, са 3 остатак 2, са 4 остатак 3, са 5 остатак 4, са 6 остатак 5, са 7 остатак 6, са 8 остатак 7, са 8 остатак 7, са 9 остатак 8.*

РЕШЕЊЕ: Приликом рашавања овог задатка било би много једначина и питање је како би се из њих испетљали. Међутим за решавање овог задатка нису потребне никакве једначине нити алгебра. Решење се добија простим расуђивањем. Додајемо траженом броју број 1 и када га поделимо са 2 остатак ће бити 1+1=2 а то значи да је број дељив са 2. Аналогно, тај број ће бити дељив са 3,4,5,6,7,8 и 9. Најмањи од свих таквих бројева је $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$. Тако да је наш тражени број 2519.

Пример 2: *Одреди најмањи природан број који приликом дељења редом са 2,3,4,5,6,7,8 и 9 увек даје остатак 1?*

РЕШЕЊЕ: Нека је n тражени број. Тада је $n-1=$ НЗС(2,3,4,5,6,7,8,9)=360 $\Rightarrow n=360+1=361$.

8.5. *Диофантове једначине*

20. Како платити чоколадицу?

Аца је у продавници купио чоколадицу која кошта 19 динара. Он има новчанице само од по 3 динара, а продавац само од по 5 динара. Могу ли се они раскусурати?

РЕШЕЊЕ: Задатак се своди на решавање линеарне Диофантове једначине $3x-5y=19$. Дакле, треба да одредимо x (број новчаница од по 3 динара) и y (број новчаница од по 5 динара) и још знамо да су x и y цели бројеви. Оставимо на левој страни једачине само промењљиву са мањим коефицијентом, па имамо $3x=19+5y$ односно $x=\frac{19+5y}{3}$ тј. $x=\frac{18+1+5y}{3}=6+\frac{1+5y}{3}=6+\frac{3y+2y+1}{3}=6+y+\frac{2y+1}{3}$. Како су x,6 и y цели бројеви, једначина може бити тачна само ако је и $\frac{2y+1}{3}$ такође цео број. Узмимо да је $\frac{2y+1}{3}=m$, тада је $x=6+y+m$. Како је $m=\frac{2y+1}{3}\Rightarrow 3m=2y+1$ односно $2y=3m-1$, одакле одређујемо $y=\frac{3m-1}{2}=\frac{2m+m-1}{2}=m+\frac{m-1}{2}$. Поново како су y и m цели бројеви, то и $\frac{m-1}{2}$ мора бити цео број, означимо га са n. Према томе је $y=m+n$, где је $n=\frac{m-1}{2}$ одакле добијамо $m=2n+1$. Ову вредност за m замењујемо у претходне једначине: $y=m+n=(2n+1)+n=3n+1, \quad x=6+y+m=6+(n+1)+(2n+1)=8+5n$.

Тако смо нашли изразе за x и y; $x=8+5n, \quad y=1+3n$ [6].

/Доказали смо да свако целобројно решење једначине $3x-5y=19$ има облик $x=8+5n$; $y=1+3n$ за n цео број. У обратно тврђење, да за свако цело n добијамо неко целобројно решење дате једначине, можемо се уверити расуђујући обратним редом, или ако нађене вредности за x и y заменимо у дату једначину./

Вредности за x и y су: $x=8+n\in\{8,13,18,23,\ldots\}; \quad y=1+3n\in\{1,4,7,10,\ldots\}$

Закључујемо да Аца може дати 8 новчаница од 3 динара и добити као кусур 1 новчаницу од 5 динара. Или, 13 новчаница од 3 динара а добије кусур 4 новчанице од 5 динара.

Теоријски гледано, овај задатак има бесконачно много решења. Практично ни купац ни продавац немају на располагању неограничено много новчаница. Ако нпр. свако од њих има по 10 новчаница, плаћање се може извршити на само један начин, давањем 8 новчаница по 3 динара и добијањем као кусур 1 новчанице од 5 динара.

Како бисмо решили овај задатак, ако сада кажемо да Аца има само новчанице од 5 динара, а продавац од 3?

---

[6] До ових решења дате линеарне Диофантове једначине дошли смо Ојлеровим методом, који је изложен у одељку 7.4.

Резултате можемо добити из готовог решења првобитног задатка, користећи се једноставним алгебарским расуђивањем. Јер, давати новчанице од по 5 динара и примати новчанице од по 3 динара исто је што и примати негативне новчанице од по 5 динара и примати негативне новчанице од по 3 динара. Тако да се новоформулисани задатак решава истим једначинама које смо саставили за основни задатак, али под условом да су x и y негативни бројеви.

Из једначина $x = 8 + 5n$ и $y = 1 + 3n$ а знајући да је $x < 0$ и $y < 0$ следи да је $8 + 5n < 0$ и $1 + 3n < 0$, те је према томе $n < -\frac{8}{5}$. За $n = -2, -3, -4, \ldots$ из претходних формула добијамо вредности $x \in \{-2, -7, -12, \ldots\}$, $y \in \{-5, -8, -11, \ldots\}$. Прво решење $x = -2;\ y = 5$, значи да купац плаћа -2 новчанице од по 3 динара, а продавац враћа -5 новчаница од 5 динара. Односно, плаћа се са 5 новчаница од 5 динара и добија се кусур 2 новчанице од 3 динара. Слично и за остале парове решења.

21. Анин рођендан

Ана слави рођендан. Од родитеља је добила 500 динара да почасти своје другарице. Одлучила је да купи 20 колача од 3 врсте, и то од 40 динара, 25 динара и 5 динара. Колико колача од сваке врсте Ана може да купи?

РЕШЕЊЕ: Овај проблем нам даје две једначине са три непознате: $40x + 25y + 5y = 500$ и $x + y + z = 20$. Нека смо са x означили колаче од 40 динара, са y колаче од 25 динара и са z колаче од 5 динара. Ако сада прву једначину поделимо са 5 и од ње одузмемо другу добићемо једначину $7x + 4y = 80$, одакле је $4y = 80 - 7x \Rightarrow y = \frac{80 - 7x}{4} = 20 - 7 \cdot \frac{x}{4}$, где $\frac{x}{4}$ треба да буде цео број. Нека је $\frac{x}{4} = n \Rightarrow x = 4 \cdot n,\ y = 20 - 7n$. Ако ово заменимо у другу једначину почетног система, добијамо: $4n + 20 - 7n + z = 20$, односно, $y = 3n$. Како су $x > 0,\ y > 0$ и $z > 0$, није тешко одредити да мора бити $0 < n < 2\frac{6}{7}$ а то значи да n може бити 1 или 2. Тако добијамо скуп решења $\{(4,13,3);(8,6,6)\}$. Видимо да се куповина колача може извршити на два начина.

22. Ког датума је Анин рођендан?

Анина другарица Ива предложила је Ани да се мало поиграју. Рекла јој је да број дана у датуму свога рођења помножи са 12, а број месеци са 31 и каже јој збир ова два производа, а она ће погодити када је Ана рођена. Ана је следила Ивина упутства и рекла број 407. Ива је знала да је Ана рођена 21. маја. Како је Ива погодила датум Аниног рођења?

РЕШЕЊЕ: Ива зна да решава неодређене једначине. Задатак се своди на решавање неодређене једначине $12x+31y=407$ у скупу целих позитивних бројева, при чему x није веће од 31 а y није веће од 12. Тако имамо следеће једначине:

$x=\dfrac{407-32y}{12}=33-3y+\dfrac{11+5y}{12}=33-3y+m$, добили смо да је $x=33-3y+m$.

Ако смо са m означили $m=\dfrac{11+5y}{12}$ одакле добијамо $y=\dfrac{12m-11}{5}=2m-2+\dfrac{2m-1}{5}$, тако да је $y=2m-2+n$ а $n=\dfrac{2m-1}{5}$ следи да је $m=\dfrac{5n+1}{2}$. Када ово заменимо у израз за y добијамо $y=2\cdot\dfrac{5n+1}{2}-2+n=6n-1$ и сада добијене изразе за y и m заменимо у израз за x добијамо $x=33-3(6n-1)+\dfrac{5n+1}{2}=\dfrac{73-31n}{2}$. Узимајући у обзир услове задатка да су x,y позитивни цели бројеви, x не већи од 31, а y не већи од 12 добијамо да је $n=1$, $x=21$ а $y=5$.

Докажимо сада да трик увек успева, односно да једначина $12x+31y=a$ увек има једно решење у скупу целих позитивних бројева, ако смо са a означили саопштени број. Претпоставимо супротно, тј. да ова једначина има два различита решења у скупу $\mathbb{Z}^+$ и нека су она (x_1,y_1) и (x_2,y_2), где x_1,x_2 нису већи од 31, а y_1,y_2 нису већи од 12. Тако сада имамо $12x_1+31y_1=a$ и $12x_2+31y_2=a$. Ако од прве одузмемо другу једначину добићемо $12(x_1-x_2)+31(y_1-y_2)=0$. Одавде следи да је број (x_1-x_2) дељив са 31. Знамо да су x_1 и x_2 позитивни цели бројеви који су мањи или једнаки 31, а то онда значи да је њихова разлика мања од 31. Због тога је број $12(x_1-x_2)$ дељив са 31 само када је $x_1=x_2$, односно када се једно решење поклапа са другим. Тако је претпоставка о постојању различитих решења доведена до противуречности.

23. Правоугаоник

Ако су дужине страница правоугаоника цели бројеви, колике треба да буду те странице да би обим правоугаоника био бројно једнак његовој површини?

РЕШЕЊЕ: Ако означимо дужине страница правоугаоника са a и b, тада једначина има облик: $2a+2b=ab$, одакле је $a=\frac{2b}{b-2}$. Како a и b треба да буду позитивни, то и $b-2$ треба да буде позитиван цео број, а то значи да b треба да буде веће од 2. Примећујемо да је $a=\frac{2b}{b-2}=\frac{2(b-2)+4}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$. Како a треба да буде цео број али за $b>2$ то је могуће само ако је $b=3{,}4$ или 6. Одговарајуће вредности за a биће редом 6,4 и 3. Тако добијамо да је тражена фигура или правоугаоник са страницама 3 и 6 или квадрат странице 4.

24. Два двоцифрена броја

Постоје ли такви двоцифрени бројеви чији се производ не мења ако у сваком од њих цифре замене места?

РЕШЕЊЕ: Нека је један број $\overline{xy}=10x+y$ а други $\overline{zt}=10z+t$. Питамо се да ли важи $(10x+y)(10z+t)=(10y+x)(10t+z)$, одакле добијамо $xz=yt$, где су x,y,z,t цели бројеви мањи од 10. Састављамо од 9 цифара све парове са једнаким производима:

$1\cdot 4=2\cdot 2 \quad 1\cdot 9=3\cdot 3 \quad 2\cdot 9=3\cdot 6$

$1\cdot 6=2\cdot 3 \quad 2\cdot 6=3\cdot 4 \quad 3\cdot 8=4\cdot 6$

$1\cdot 8=2\cdot 4 \quad 2\cdot 8=4\cdot 4 \quad 4\cdot 9=6\cdot 6$

Имамо укупно 9 једнакости, из сваке од њих могу се саставити једна или две групе бројева. Нпр. из $1\cdot 4=2\cdot 2$ једно решење је $12\cdot 42=21\cdot 24$. Из $1\cdot 6=2\cdot 3$ имамо два решења: $12\cdot 63=21\cdot 36$ и $13\cdot 62=31\cdot 26$. Тако проналазимо следећа решења:

$12\cdot 42=21\cdot 24; \quad 12\cdot 63=21\cdot 36; \quad 12\cdot 84=21\cdot 48; \quad 13\cdot 62=31\cdot 26; \quad 13\cdot 93=31\cdot 39;$

$14\cdot 82=41\cdot 28; \quad 23\cdot 64=32\cdot 46; \quad 23\cdot 96=32\cdot 69; \quad 24\cdot 63=42\cdot 36; \quad 24\cdot 84=42\cdot 48$

$26\cdot 93=62\cdot 39; \quad 34\cdot 86=43\cdot 68; \quad 36\cdot 96=63\cdot 69; \quad 36\cdot 84=63\cdot 48$

8.6. Шеста математичка операција

Основне математичке операције сабирање и множење имају по једну инверзну операцију, то су одузимање и дељење. Математичка операција степеновање има две инверзне операције: одређивање основе датог степена и одређивање изложиоца. Одређивање основе је шеста математичка операција и зове се кореновање. Одређивање изложиоца је седма операција, зове се логаритмовање. Како то да сабирање и множење имају само по једну инверзну операцију а степеновање две? Није тешко дати одговор на ово питање, оба сабирка код сабирања су равноправна и могу заменити своја места. Оба чиниоца код множења су такође међусобно равноправна па и они могу заменити своја места. Међутим, основа степена и изложилац нису међусобно равноправни и не могу заменити места $(2^3 \neq 3^2)$. Закључујемо да се налажење оба сабирка, као и оба чиниоца врши на исти начин (стога само по једна инверзна операција). За налажење основе и изложиоца степена потребно је користити различите поступке. Корен означавамо као $\sqrt[n]{a}$ („n-ти корен броја a“). За исту операцију можемо користити ознаку $a^{\frac{1}{n}}$ која нам говори да је корен у ствари степен чији је узложилац разломак.

25. Шта је веће ?

25.1. Шта је веће $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$. Задатак решити не рачунајући вредност корена.

РЕШЕЊЕ: Степенујемо оба израза са 10, тада добијамо $(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^{\frac{10}{5}} = 5^2 = 25$ и $(\sqrt{2})^{10} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$. Очигледно је 32 > 25 па је и $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$.

25.2. Шта је веће $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ или $\sqrt{3}+\sqrt{19}$?

РЕШЕЊЕ: Подизањем на квадрат оба израза добијамо: $(\sqrt{7}+\sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70}$ и $(\sqrt{3}+\sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}$. Ако од оба израза одузмемо 17 добићемо $2\sqrt{70}$ и $5+2\sqrt{57}$, подизањем на квадрат добијамо 280 и $253+20\sqrt{57}$, па сада од оба израза одузмемо 253 и добијемо 27 и $20\sqrt{57}$. Како је 57>4, то је и $20\sqrt{57}$ >40. Значи да је $\sqrt{3}+\sqrt{19} > \sqrt{7}+\sqrt{10}$.

26. Реши одмах

$x^{x^3} = 3$, *чему је једнако* x *?*

РЕШЕЊЕ: Ко добро познаје алгебарску симболику одмах ће знати да је $x=\sqrt[3]{3}$.

Заиста, тада је $x^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$ па је заиста $x^{x^3}-x^3=0$ што је и требало доказати.

До решења се може доћи и овако: Нека је $x^3=y$, тада је $x=\sqrt[3]{y}$ па једначина има облик $(\sqrt[3]{y})^y=3$ или после подизања на куб, $y^y=3^3$ одакле је очигледно да је $y=3$ и да ја због тога $x=\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{3}.$.

9. Закључак

У школама, наставници и професори, се свакако срећу са талентованом децом у већем или мањем броју. Од изузетног је значаја такво дете препознати и не дозволити да потенцијали таквог детета остану неискоришћени на најбољи могући начин. Овај рад би могао да послужи наставницима и професорима као ,,мали подсетник“ психолошких и педагошких метода препознавања даровитих ученика. Такође и као полазна тачка у раду са њима.

Рад је посвећен само једном специфичном сегменту рада са математичким талентима, а то су Диофантове једначине, које су веома оскудно заступљене у садржајима редовне наставе и не помињу се експлицитно. Садржаји додатне наставе претпостављају теме о Диофантовим једначинама кроз које се много тога може научити и у теоријском и практичном смислу. С тога је корисно посветити им посебну пажњу.

Кроз рад са Диофантовим једначинама стиче се добар увид у теоријску поткованост ученика, затим у способност њиховог расуђивања, логичког закључивања, обим стеченог искуства у одабиру математичких средстава која јесу сигуран пут ка решењу проблема. Једном речју, могућ је добар увид у напредак и постигнућа током рада са свим, а посебно талентованим ученицима.

Основна замисао је да рад послужи као препорука или инспирација и ученицима и наставницима да трагају за што квалитетнијим и оригиналнијим методичким решењима.

Литература:

1. *Андрић В. Мала збирка Диофантових једначина, Ваљево, 2006.*

2. *Батлер Ч. и Врен Л. Настава математике у средњој школи (програми и методи) ,, Вук Караџић" Београд 1967.*

3. *Арслановић Ш. Аспекти математике за надарене ученике средњошколског узраста, Удружење математичара БИХ, Сарајево 2001.*

4. *Ивић И. Пешикан А. Антић С. Активно учење 2001.*

5. *Наставни програм математике за гимназије у Републици Србији –КММ ,,Архимедес"*

6. *Мићић В. ; Каделбург З. ; Ђукић Д. ; Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије, Београд, 1989.*

7. *Перељман Ј. Занимљива аритметика и алгебра - одабране стране, Друштво математичара Србије, Београд, 1981.*

8. *Стојановић В. Водич за шампионе, MATHEMATISKOP 1 , , Београд, 1999.*

9. *Стојановић В. Збирка решених задатака за 1. разред средњих школа MATHEMATISKOP 3, Београд, 2004.*

10. *Георгијевић Д.; Обрадовић М. Збирка решених задатака за 2. разред средњих школа, MATHEMATISKOP 4, Београд, 2000.*

11. *Јовановић М.; Тошић Д. Збирка решених задатака и проблема из математике за ученике средњих школа, Београд, 2010.*

12. *,, Ух, лепог ли задатка !" Архимедесов математички турнир (Избор задатака 1. Разред средње школе, -Други део) Архимедес, Београд, 2008.*

13. www.diofant.org

14. www.scribd.com, *Смајиловић М. Диофантове једначине – Збирка задатака*

15. http://ruzakrstic.wordpress.com, *Проф. Др. Андрић В. Линеарна Диофантова једначина*