Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

MASTER RAD

MATEMATIČKO MODELIRANJE KREDITNOG RIZIKA

Mentor: Prof. Dr. Slobodanka Janković

Student: Dragana Rosić 1090/2013

BEOGRAD, 2015.

Sadržaj

1 Uvod

Cilj ovog master rada je da predstavi upotrebu i značaj matematike, tačnije matematičkih modela, pri modeliranju kreditnog rizika, gde sam [1]kreditni rizik predstavlja najznačajniji rizik kojem su izložene sve finansijske institucije u svom poslovanju.
U prvom poglavlju ovoga rada dat je kratak uvod i definicija kreditnog rizika. Navedene su vrste finansijskog rizika sa akcentom na kreditni rizik i njegove osnovne karakteristike.
U drugom poglavlju rada navedene su osnovne karakteristike finansijskog tržišta. Najviše pažnje posvećeno je obveznicama, rizičnim i bezrizičnim. Navedene su definicije i osnovne karakteristike kamatne stope, kreditnog spreda, kamatnog svopa, kreditnog svopa i opcija.
U trećem poglavlju opisan je postupak modeliranja kamatne stope. Navedeni su najvažniji primeri modela kamatne stope, kao što su Vasičekov model, Dothanov model i drugi.
U četvrtom poglavlju rada opisani su modeli kreditnog rizika sa akcentom na Mertonov model i Black-Cox-ov model. Definisana je verovatnoća preživljavanja i verovatnoća dogadjaja neizvršenja i naveden je postupak za njihovo računanje.
U petom poglavlju rada definisani su modeli kreditnog rizika sa reduciranom formom i navedene su njihove osnovne odlike. Navedeni su osnovni primeri ovih modela, kao što su Puasonov proces i Cox-ov proces.
Šesto poglavlje rada jeste matematički dodatak u kome je navedena neophodna teorija za definisanje i konstrukciju modela kamatne stope i kreditnog rizika, kao i za računanje verovatnoće neizvršenja i verovatnoće preživljavanja.

1.1 Tipovi finansijskog rizika

Savremena teorija upravljanja rizikom novijeg je datuma. Razvila se u poslednjih dvadesetak godina. Za to vreme, primenjujući njene postulate, obrazovani poslovni ljudi su stekli sposobnost da prepoznaju rizik, da ga izmere, razumeju potencijalne posledice i da preuzmu odgovarajuće mere za njegovo izbegavanje, odnosno ublažavanje njegovih posledica. Uspeh svega toga neposredno zavisi od dostupnosti merodavnih informacija. Teško da iko može uspešno da predvidi buduća kretanja akcija, kamatnih stopa, cena sirove nafte ili deviznih kurseva, ako nije na izvoru informacija. Iz tih razloga, upravljanje rizikom, danas predstavlja jedan od najznačajnijih poslova na globalnom finansijskom tržištu.

Rizik se može poistovetiti sa stanjem u kojem postoji mogućnost nastupanja nekog štetnog dogadjaja. Pod štetnim dogadjajem se u ekonomiji podrazumeva gubitak ili neočekivani trošak.

Vrste finansijskog rizika:

[1]http://www.sef.rs/finansije/znacaj-pravilne-procene-modeliranja-kreditnog-rizika-javnom-privatnom-sektoru.html

- Tržišni rizik: rizik promena tržišnih cena, koje dovode do sniženja vrednosti pojedine finansijske imovine;

- Kreditni rizik: rizik promene kreditne sposobnosti klijenata (kupca ili dužnika), koji može uticati na promenu vrednosti finansijske imovine poverilaca (preduzeća ili banke);

- Rizik likvidnosti: rizik kada preduzeće ne može u celosti da naplati svoja potraživanja ili pogoršanje sposobnosti preduzeća da uredno isplaćuje svoje obaveze.

- Operativni rizik: rizik koji se odnosi na potencijalne gubitne vrednosti zbog neodgovarajuće organizacije, lošeg upravljanja, pogrešne kontrole, prevara, kradja i ljudskih grešaka;

- Sistemski rizik: rizik od poremećaja u pružanju finansijskih usluga koji je izazvan problemom u celom finansijskom sistemu.

Medjutim, ova podela nije baš najpreciznija, rizik se može posmatrati i kao oblik tržišnog rizika i kao oblik kreditnog rizika. Upravljanje kreditnim rizikom snažno je povezano sa upravljanjem tržišnim rizikom i zbog njihove prirode ne treba ih razdvajati. Zbog toga, u ovom radu ćemo posvetiti pažnju i tržišnom i kreditnom rizik.

1.2 Kreditni rizik

[2]Kreditni rizik predstavlja najznačajniji rizik kome je svaka finansijska institucija izložena u svom poslovanju. Iako se kreditni rizik prevashodno vezuje za bankarsko poslovanje, njime su izložene i mnoge državne finansijske institucije prilikom obavljanja finansijskih transakcija u domenu javnih finansija.
Ukoliko bi se poslužili definicijom Banke za medjunarodna poravnanja, kreditni rizik predstavlja rizik da dužnik neće biti u mogućnosti da ispuni obavezu po osnovu ugovora(default) u navedenom periodu, odnosno da neće biti u mogućnosti da ispuni obavezu ne uzimajući u obzir dužinu vremenskog perioda u kome bi ta obaveza bila neizmirena.

Kreditni rizik nastaje usled aktivnosti pozajmljivanja, investiranja i davanja kredita i odnosi se na povraćaj pozajmljenog novca ili isplate od prodaje robe. Upravljačka tela u bankama prilikom svakodnevnog poslovanja prave kompromise izmedju visine rizika i visine stope prinosa. Rizik gubitka nastaj usled mogućnosti da plasirana sredstva ne budu vraćena kroz amortizaciju kredita. Gubitak može biti kompletan, a može bitii delimičan ukoliko se deo sredstava ipak amortizuje. Pored toga, kreditni rizik obuhvata smanjenje kreditnog rejtinga preduzeća, što podrazumeva pad pozicije preduzeća na rejting listi. Medjutim, pad rejtinga ne podrazumeva i gubitak sredstava, mada implicira povećanje mogućnosti gubitka. Na primer, smanjenje kreditnog kvaliteta

[2]http://www.sef.rs/finansije/znacaj-pravilne-procene-modeliranja-kreditnog-rizika-javnom-privatnom-sektoru.html

emitenta hartija od vrednosti predstavlja izvor rizika jer dovodi do smanjenja tržišne vrednosti hartija od vrednosti koje preduzeće poseduje.

Kreditni rizik se povećava usled produženja roka isteka, roka saldiranja ili roka dospeća. Takodje, kreditni rizik se povećava usled povećanja kamtnih stopa ili pogoršanja opštih ekonomskih uslova. Verovatnoća neizvršenja ugovorenih obaveza se povećava i u slučaju kada je preduzeće akumulisalo velike gubitke, kada duguje drugim ugovornim stranama, ili kada kreditori ili druge ugovorene strane u preduzeću imaju finansijske probleme ili su bankrotirali.

U skorijoj prošlosti može se primetiti značajan razvoj modeliranja kreditnog rizika. Naime, brojne finansijske i akademske institucije su razvile sofisticirane ekonomske i matematičko-statističke modele na osnovu kojih je moguće proceniti, kvantifcirati i donekle predvideti izloženost kreditnom riziku. Značaj ovih modela za upravljanje rizicima se ogleda u mogućnosti merenja performansi odredjenih investicija na osnovu njihove izloženosti kreditnom riziku kao i njihovo medjusobno uporedjivanje, kreiranju istorijskih baza podataka o izmirivanjima obaveza odredjenih ekonomskih entiteta, procenama o budućim neuspesima u izmirivanju obaveza na osnovu istorijskih podataka, unapredjivanje analize profitabilnosti investicije a samim tim i bolje plasiranje finansijskih sredstava.

Postoji mnogo modela koji sa različitim pristupima procenjuju kreditni rizik. Ono što je ključno za bilo koji od ovih modela prilikom procene kreditnog rizika su sledeći elementi:

- Izbor funkcije raspodele na osnovu koje će se modelirati gubitak uzrokovan kreditnim rizikom;
- Očekivani i neočekivani gubitak izazvan kreditnim rizikom;
- Vremenski period;

U modeliranju kreditnog rizika jedna od najbitnijih stavki je kako proceniti visinu gubitka koji bi mogao nastati ukoliko dodje do realizacije kreditnog rizika. Prilikom modeliranja ovog tipa rizika bitno je obratiti posebnu pažnju na tri ključna elemenata kako ne bi došlo do pogrešne procene štete usled kreditnog rizika.

- Promene kreditnog rejtinga;
- Korelacija izmedju bankrotstva i kreditnog rejtinga;
- Promene u izloženosti kreditnom riziku.

2 Finansijsko tržište. Obveznice

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je sledeća literatura: [1] i [5].

Obveznice predstavljaju osnovni tip finansijskih instrumenata sa kojima trguje tržište novca. Obveznice su vrednosni papiri sa fiksnim prihodom, njihova vrednost potiče iz obećanja koja oni predstavljaju, a to je fiksna dobit, odnosno prihod za onoga ko poseduje vrednosni papir, tokom odredjenog vremenskog perioda. Sa pomenutim finansijskim instrumentima se trguje, a onaj ko ih poseduje ima odredjen i definisan tok novca. Obveznica predstavlja obavezu za onog ko ju je izdao, da plaća novac onome ko poseduje obveznicu u skladu sa pravilima koja su odredjena u trenutku kada je obveznica izdata.

Obveznice izdate od strane korporacija ili zemalja u razvoju sa sobom nose odredjeni stepen rizika a to je da neke odredbe ugovora ne budu ispunjene. Ovo je suština onoga što podrazumevamo pod ***default risk***, rizik od neizvršenja obaveza. Neuspeh preduzeća da ispuni svoje obaveze, odredbe ugovora, može se posmatrati i kao okidač koji uzrokuje bankrot preduzeća. Ovo vreme se naziva ***default time*** za firmu, i matemtički je predstavljeno kao *vreme zaustavljanja* τ,to je slučajna promenljiva koja uzima vrednosti iz intervala $[0, \infty]$.

2.1 Bezrizične obveznice i kamatne stope

Obveznice koje izdaju vlade razvijenih zemalja smatraju se bezrizičnim. Medjutim, i kod njih postoji volatilnost rizika, jer su njihove cene osetljive na promenu kamatnih stopa. Volatilnost nekog financijskog instrumenta nam govori o veličini promena njegove cene u nekom proteklom periodu, a najčešće se računa kao standardna devijacija promene cene u tom periodu. Volatilnost je jedan od indikatora rizika: sto je volatilnost finansijskog instrumenta veća, to je veća i njegova rizičnost.

Definicija 2.1.1 *Obveznica koja ima samo jednu isplatu, na dan dospeća T, naziva se zero kupon bond, bezkuponska obveznica.*

Cenu bezkuponske obveznice, sa nominalnom vrednošću koja je jednaka jednoj novčanoj jedinici, sa vremenom dospeća T u trenutku t ćemo označiti sa

$$P_t(T) = P_t^T.$$

Vreme do dospeća $T - t$ je vremenski period, u godinama, od sadašnjeg trenutka t do trenutka dospeća $T \geq t$.

Pretpostavka 2.1.1 *Nadalje ćemo pretpostavljati da važi:*

- *ne postoje troškovi novčanih transakcija;*
- *sve podleže istoj kamatnoj stopi;*
- *ne postoji arbitraža, odnosno pravljenje sigurnog profita bez rizika.*

Dalje pretpostavljamo da su obveznice bezrizične, otuda imamo da je $P_T(T) = 1$ za svako T . Za svako fiksirano t pretpostavljamo da je $P_t(T)$ diferencijabilno po T skoro svuda.

Kratkoročne vladine obveznice, koje izdaje američka državna blagajna, nazivaju se blagajničke novčanice. Emituje se u apoenima od 10 000 \$ ili više, sa fiksnim dospećem od 13, 26, 52 nedelje. Blagajničke novčanice se prodaju po diskontnoj vrednosti. Recimo, blagajnička novčanica od 10 000 \$ može da se prodaje za 9 500 \$, a razlika u ceni predstavlja kamatu. Na dan dospeća dobija se pun iznos. One se kupuju na takozvanim aukcijama i veoma su likvidne (uvek postoje kupci) i mogu da se lako prodaju pre datuma isteka.

Američki blagajnički zapisi imaju dospeće u rasponu od 1 do 10 godina i prodaju se u apoenima od 1 000 \$. Vlasnik blagajničkog zapisa dobija takozvane kuponske isplate svakih 6 meseci do dospeća. Kuponska isplata predstavlja kamatu, a njena visina je fiksirana za vreme trajanja blagajničkog zapisa (do dospeća). Po dospeću vlasnik blagajničkog zapisa dobija poslednju kuponsku isplatu i dobija iznos na zapisu. I blagajnički zapisi se prodaju na aukcijama.

Definicija 2.1.2 *Prosta kamatna stopa za period [S,T] je stopa $L_t(S,T)$ koja zadovoljava*

$$[1 + L_t(S,T)(T - S)]P_t(T) = P_t(S) \text{ za svako } t < S < T. \tag{2.1}$$

Definicija 2.1.3 *Složena kamatna stopa za period [S,T] je stopa $R_t(S,T)$ koja zadovoljava*

$$e^{R_t(S,T)(T-S)}P_t(T) = P_t(S) \text{ za svako } t < S < T. \tag{2.2}$$

Ako stavimo da je $S = t$ u obe definicije, dobijamo prostu dobit $L_t(T)$ definisanu sa

$$[1 + L_t(T)(T - t)]P_t(T) = 1 \;\; za \;\; svako \;\; t < T \tag{2.3}$$

i složenu dobit definisanu sa

$$e^{R_t(T)(T-t)}P_t(T) = 1 \;\; za \;\; svako \;\; t < T. \tag{2.4}$$

Tako, $L_t(T)(T - t))$ predstavlja iznos kamate koja se plaća u trenutku T za kredit od 1\$ uzet na period $[t, T]$.

Definicija 2.1.4 *Ugovor kojim se stranka obavezuje da plati ugovorenu cenu u trenutku T za robu (ili vrednosne papire, novac, akcije), koji će joj biti isporučeni u trenutku T naziva se forvard ugovor. Kod forvard ugovora se i cena i vreme isporuke T odredjuju u trenutku $t = 0$.*

Pod pretpostavkom da je cena obveznice $P_t(T)$ diferencijabilna u odnosu na vreme dospeća T, definišemo trenutnu forvard stopu $f_t(T)$ kao

$$f_t(T) = \lim_{S \to T-} L_t(S, T) = \lim_{S \to T-} R_t(S, T) = -\frac{\partial \log P_t(T)}{\partial T}. \tag{2.5}$$

Slično, definišemo trenutnu kamatnu stopu r_t kao

$$r_t = \lim_{T \to t+} L_t(T) = \lim_{T \to t+} R_t(T) \tag{2.6}$$

i lako je proveriti da je $r_t = f_t(T)$. Štaviše, lako dobijamo da je

$$P_t(T) = e^{-\int_t^T f_t(s)ds}. \tag{2.7}$$

Pretpostavka 2.1.2 *Postoji aktiva sa kojom se trguje i ona je definisana kao stohastički proces koji zadovoljava*

$$dC_t = r_t C_t dt, \;\; C_0 = 1. \tag{2.8}$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine dobijamo, za $0 \leq s \leq t$

$$dC_s = r_s C_s ds, \quad odnosno$$

$$\frac{dC_s}{C_s} = r_s, \quad pa \;\; vazi$$

$$\int_0^t \frac{dC_s}{C_s} = \int_0^t r_s ds \quad odakle$$

$$\ln C_t - \ln C_0 = \int_0^t r_s ds.$$

Pošto je po pretpostavci $C_0 = 1$, dobijamo da je

$$C_t = exp(\int_0^t r_s ds). \tag{2.9}$$

2.2 Rizične obveznice i kreditni spred

Rizične kreditne obveznice izdate od strane korporacija ili nerazvijenih zemalja zavise od specifične prirode izdavaoca, od čega je najvažnije da li je firma solventna ($\tau > t$) ili bankrotirala ($\tau \leq t$), τ je trenutak bankrota firme.

Neka je $\bar{P}_t(T)$ cena u trenutku $t \leq T$ rizičnih bezkuponskih obveznica izdate od strane odredjenih firmi sa vremenom dospeća T i nominalnom vrednošću koja je jednaka jednoj novčanoj jedinici. Onda je jasno da $\bar{P}_t(T)1_{\{\tau>t\}} > 0$ predstavlja cenu obveznice koje izdaju firme kako bi opstale do trenutka t. S obzirom da važi

$$\begin{aligned} \bar{P}_T(T)1_{\{\tau>T\}} &= 1_{\{\tau>T\}} = P_T(T)1_{\{\tau>T\}}, \\ \bar{P}_T(T)1_{\{\tau\leq T\}} &< 1_{\{\tau\leq T\}} = P_T(T)1_{\{\tau\leq T\}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

Na osnovu Zakona jedinstvene cene[3] imamo da je

$$\bar{P}_t(T)1_{\{\tau>t\}} > P_t(T)$$

za sva vremena koja predhode t (nejednakost je stroga dok $P[\tau \leq T|\tau > t] > 0$). Paralelno sa bezrizičnim kamatnim stopama, ako pretpostavimo da firmine obveznice postoje za sva vremena dospeća $T > t$ i da je $\bar{P}_t(T) > 0$ diferencijabilna po T, tada možemo definisati forvard stopu neizvršenja $\bar{f}_t(T)$

$$\bar{P}_t(T) = e^{-\int_t^T \bar{f}_t(u)du}. \tag{2.12}$$

Razumno je pretpostaviti da cena rizičnih obveznica pokazuje oštriji pad kao funkcija vremena dospeća za razliku od cena bezrizičnih obveznica, otuda je razlika $\bar{f}_t(s) - f_t(s)$ nenegativna skoro sigurno. Ova razlika se naziva ***kreditni spred***. Na primer, [4]prinos spred (YS) i [5]forvard spred (FS) u trenutku t za vreme dospeća $T > t$ su dati sa

$$YS_t(T) = \frac{1}{(T-t)}\int_t^T FS_t(s)ds = \frac{1}{T-t}\int_t^T (\bar{f}_t(S) - f_t(S))ds = \frac{1}{t-T}log(\frac{P_t(T)}{\bar{P}_t(T)}). \tag{2.13}$$

Možemo takodje definisati prostu forvard stopu neizvršenja ili rizičnu kamatnu stopu $L_t(S,T)$ za period $[S,T]$

$$[1 + \bar{L}_t(S,T)(T-S)]\bar{P}_t(T) = \bar{P}_t(S).$$

[3]Zakon jedinstvene cene (LOP - Law of one price) pretpostavlja dejstvo pariteta kupovne moći, odnosno da za isto dobro valuta mora imati istu kupovnu moć u obe zemlje, odnosno da ima istu relativnu vrednost.

[4]Yield spread (YS)

[5]Forward spread (FS)

2.3 Kreditni derivati i derivati kamatnih stopa

U ovom delu rada ćemo opisati najjednostavnije derivate kamatnih stopa i navešćemo jednostavne argumente za uspostavljanje veze izmedju njih. Odredjivanje cene ovih derivate zahteva poznavanje metodologije martingala koja će biti navedena u poglavlju na kraju ovoga rada.

2.3.1 Obveznice sa promenljivom kamatnom stopom

Podsetimo se da su najjednostavniji mogući derivati kamatnih stopa bezkuponske obveznice sa vremenom dospeća T, čiju cenu označavamo sa $P_t(T)$ ili $\bar{P}_t(T)$. U ovom delu ćemo se fokusirati na bezrizičan slučaj, ali analogni proizvod može se definisati na osnovu rizičnih korporativnih obveznica.

U praksi, obveznice sa kojim se najviše trguje su kuponske obveznice kojima se plaćaju odredjeni iznosi $c = (c_1, \dots, c_N)$ u trenucima $T = (T_1, \dots, T_N)$. Takva obveznica se može predstaviti kao portfolio bezkuponskih obveznica sa vremenom dospeća $T_n, n = 1, \dots, N$ i nominalnom vrednošću c_n i time njena cena u trenutku t je

$$P(t, c, T) = \sum_{n=1}^{N} c_n P_t(T_n). \tag{2.14}$$

U Severnoj Americi, kuponska obveznica sa vremenom dospeća T, nominalnom vrednošću P i kuponskom stopom c ima polugodišnje kupone koji su jednaki $cP/2$ na dan $T - i/2, i = 1, 2 \dots$ i konačnu isplatu nominalne vrednosti plus kupon $P(1 + c/2)$ na datum dospeća. Obično su kuponske stope odredjene u trenutku izdavanja.

U drugom slučaju, c_n je odredjena vrednošću promenljive kamatne stope koja preovladava za period izmedju datuma $T = (T_0 = 0, T_1, \dots, T_N)$. Pretpostavljamo da je T_0 vrednost ili na datum izdavanja ili odmah nakon ugovorenog plaćanja. Prototip obveznica sa promenljivom kamatnom stopom je definisan sa tokom plaćanja

$$c_n = L_{T_{n-1}}(T_n)(T_n - T_{n-1})N, \ \ n = 1, \dots, N - 1,$$

i $c_N = (1 + L_{T_{N-1}}(T_N)(T_N - T_{N-1}))N$, gde je $L_{T_{n-1}}(T_N)$ je prost prinos za period $[T_{n-1}, T_n]$ i N predstavlja fiksiranu nominalnu vrednost. Podsećajući se (2.3), dobijamo da je

$$c_n = \frac{N}{P_{T_{n-1}}(T_n)} - N, n < N.$$

Primećujemo da u $t = 0$ možemo ponoviti ovu uplatu kupovinom N bezkuponskih obveznica sa vremenom dospeća T_{n-1} i prodajom N bezkuponskih obveznica sa vremenom dospeća T_n. Stoga vrednost u trenutku t plaćanja c_n je

$$N(P_t(T_{n-1}) - P_t(T_n)),$$

što znači da je vrednost obveznica sa promenljivom kamatnom stopom u trenutku 0

$$N[\sum_{n-1}^{N}(P_0(T_{n-1}) - P_0(T_n)) + P_0(T_N)] = N. \tag{2.15}$$

2.3.2 Kamatni svop

U skupu inovativnih finansijskih instrumenata jedan od najzastupljenijih je svakako svop ugovor. Suština svopova leži u razmeni, a ne trajnoj prodaji neke aktive ili obaveze. Razmenjuje se samo skup isplata (novčanih tokova) koji proizilazi iz tih poslova. Svop je ugovor izmedju dve strane kojim su se te strane usaglasile oko medjusobne razmene novčanih tokova koja će se odigrati u budućnosti. [6]Kamatni svop (IRS) je finansijski derivat koji predstavlja razmenu izmedju dva novčana toka koja je bazirana na različitim kamatnim stopama, ali najčešće u istoj valuti i kao takav predstavlja zaštitu od kamatnih rizika. Ugovorene strane iz svop ugovora se obavezuju da u toku trajanja ugovora plaćaju jedna drugoj iznose koji su jednaki dogovorenim kamatnim stopama. Prilikom takve razmene ne dolazi i do razmene glavnice, već samo do razmene kamatnih stopa.

Najjednostavniji primer svopa je kamatni forvard ugovor, što čini kredit sa nominalnom vrednošću N za jedan budući period $[S, T]$ sa poznatom kamatnom stopom K. Vlasnik (dužnik) uzima iznos N u trenutku S i vraća iznos $N(1 + K(T - S))$ u trenutku T. Iz definicije trenutne forvard stope možemo primeniti da je ovaj ugovor ekvivalentan ugovoru kojim dužnik uzima iznos $N(1 + L_S(T)(T - S))$ i vraća $N(1 + K(T - S))$ u trenutku T. Vrednost kamatnog forvard ugovora u trenutku $t \leq S < T$ je

$$N[P_t(S) - P_t(T)(1 + K(T - S))] = NP_t(T)(L_t(S,T) - K)(T - S).$$

Vidimo da fiksna stopa koja čini da ovaj ugovor vredi 0 u trenutku T je

$$K^* = L_t(S,T),$$

i ona služi kao alternativna definicija proste forvard stope $L_t(S,T)$.

Kamatni forvard ugovori za mnoge periode je generički poznat kao kamatni svop. U takvim ugovorima, tok isplata baziran na fiksnoj prostoj kamatnoj stopi K i nominalnoj vrednosti N na datume $T = (T_1, \ldots, T_N)$ u zamenu za tok

[6]Interest Rate Swap (IRS)

isplata baziran na istoj nominalnoj vrednosti, istom periodu, ali na promenljivoj kamatnoj stopi. U trenutku T_n, za $n = 1, \ldots, N$, tok novca je isti kao kamatni forvard ugovori za period (T_{n-1}, T_n), koji je

$$N(L_{T_{n-1}}(T_n) - K)(T_n - T_{n-1}),$$

koristeći predhodni rezultat, vrednost u trenutku $t = 0$ toka novca je

$$N(P_0(T_{n-1}) - P_0(T_n)) - NK(T_n - T_{n-1})P_t(T_n),$$

pa je totalna vrednost kamatnog svopa u trenutku 0

$$IRS(N, T, K) = N[1 - P_0(T_n) - K \sum_{n=1}^{N} P_0(T_n)(T_n - T_{n-1})]. \tag{2.16}$$

Slično za kamatni forvard ugovor, možemo definisati stopu svopa u trenutku $t = 0$ kao stopu K^* koja čini da ovaj ugovor ima vrednost 0. To je

$$K^*(T) = \frac{(1 - P_0(T_N))}{(\sum_{n=1}^{N} P_0(T_n)(T_n - T_{n-1}))}, \tag{2.17}$$

koja se naziva ***par*** kuponska stopa. Ona čini tržišnu vrednost kuponske obveznice jednaku njenoj nominalnoj vrednosti.

2.3.3 Kreditni svop

[7] Svop kreditnih neizvršenja (CDS) je kreditni derivat kojim se najčešće trguje, koji ne zahteva finansiranje, i koji u osnovi ima mogućnost neizvršenja- to znači da je njegova isplata povezana sa nastupanjem ili nenastupanjem kreditnog dogadjaja. Ovaj ugovor je sličan ugovoru o osiguranju, a osnovna svrha mu je pokrivanje gubitka po portfolijima hartija od vrednosti ili kredita u slučaju neizvršenja emitenta te finansijske aktive. CDS predstavlja vanberzanski finansijski instrument i ugovor izmedju prodavca i kupca zaštite od rizika neizvršenja obaveza na setu dužničkih obveznica koje emituje referentni subjekat. Glavni razlog za njegovu popularnost je to što je CDS najjednostavniji oblik transfera kreditnog rizika medju svim kreditnim derivatima.
Kako su CDS vrsta kreditnih derivata, i ovde se radi o zaštiti referentne aktive, gde kupac zaštite (prodavac rizika) uz jednokratne ili periodične naknade osigurava svoja potraživanja po toj aktivi, dok je prodavac zaštite (kupac rizika) obavezan da kompezira kupca u slučaju nastanka unapred utvrdjenog kreditnog dogadjaja.

[7] Credit Default Swap (CDS)

Rok dospeća ne mora da se podudara sa rokom dospeća referentne aktive, i to često i nije slučaj. Obično referentna aktiva ima duži rok trajanja od CDS.
CDS je bilateralni ugovor u kom prodavac zaštite osigurava kupca zaštite u slučaju nastupanja specifičnog kreditnog dogadjaja, u ugovorenom teorijskom iznosu, za specifičan period i za specifičnu referentnu aktivu (referentni portfolio).
Kupac zaštite se obavezuje da plaća svop premiju (najčešće u vidu periodičnih isplata) prodavcu zaštite, sve do roka dospeća CDS ugovora T ili trenutka nastupanja kreditog dogadjaja τ. Zauzvrat, prodavac zaštite se obavezuje da vrši isplatu kupcu zaštite u slučaju nastanka neizvršenja vezanog za referentnu obavezu (aktivu) ili referentnog subjekta. Ukoliko ne nastupi kreditni dogadjaj, on ne vrši nikakvo placanje.
Ukupne isplate koje vrši kupac zaštite se jednim imenon nazivaju ***osnova premije***. Uslovljena isplata koju će možda morati da izvrši prodavac zaštite se naziva ***osnova zaštite***.
Naknada za CDS se plaća kao deo vrednosti ugovora, a sam svop se može strukturisati na jednom finansijskom instrument ili na više. Isplata po osnovu CDS ugovora može biti u različitim oblicima, a osnovna determinanta su preference kupca ili obe ugovorne strane. Prema tome, isplata može biti vezana za promenu cene referentne aktive ili neke druge specificirane aktive, može biti odredjena fiksno u odnosu na neku ugovorenu stopu oporavka cene aktive, a može biti isporuka referentne aktive po specifičnoj ceni.
Prilikom nastupanja kreditnog dogadjaja, CDS ugovor se okončava i dolazi do saldiranja- prodavac zaštite kompenzuje kupcu zaštite. Saldiranje može biti novčano ili fizičko, što se odlučuju unapred prilikom zaključivanja ugovora.
Ukoliko nastupanje neizvršenja dovede do fizičkog saldiranja CDS, kupac zaštite isporučuje prodavcu zaštite odredjeni iznos neizvršenih obaveza referentnog subjekta, u zamenu za njihovu nominalnu vrednost (i pored toga što sada imaju mnogo manju vrednost, nominalna vrednost je umanjena pod uticajem stope povraćaja R_τ). Fizičko saldiranje će preferirati prodavac zaštite koji smatra de će čekanjem ili započinjanjem precesa pronalaženja alternativnih rešenja sa emitentom referentne aktive moći da dobije više od cene neizvršenja.
Ukoliko kreditni dogadjaj nastupi kod CDS sa novčanim saldiranjem, relevantna obveznica referentnog subjekta će biti procenjena i prodavac zaštite će platiti kupcu zaštite nominalnu vrednost referentne obaveze(koja je jednaka teorijskom iznosu CDS) umanjenu za njenu tržišnu vrednost (odnosno, kompenzovaće kupca zaštite za smanjenje kreditnog boniteta obveznice). Novčano saldiranje će preferirati kupac zaštite koji još uvek ne poseduje isporučenu aktivu, da bi izbegao potencijalni rizik da će smanjena ponuda izazvati povećanje cene koja može da nastupi prilikom neizvršenja, kao i kupac zaštite koji svop neizvršenja koristi radi kreiranja sintetičke kratke pozicije na kredit.

Pretpostavimo da je stopa oporavka fiksna vrednost R, što znači da rizična obveznica sa vremenom dospeća T, vredi

$$1_{\{\tau > T\}} + R1_{\{\tau \leq T\}} = R + (1-R)1_{\{\tau > T\}} \tag{2.18}$$

na dan dospeća, što pokazuje da se obveznica sa nadoknadom[8] može izraziti kao R puta rizična obveznica plus $1-R$ puta rizična obveznica bez nadoknade[9] (čiju cenu označavamo sa $\bar{P}_t^0(T)$):

$$\bar{P}_t^R(T) = RP_t(T) + (1-R)\bar{P}_t^0(T), \bar{P}_t^0(T) = \frac{1}{1-R}[\bar{P}_t^R(T_k) - RP_t(T_k)]. \tag{2.19}$$

Što se tiče CDS , ako pretpostavimo da je do neizvršenja došlo u intervalu $[T_{k-1}, T_k]$, onda dolazi do fizičkog saldiranja u trenuktu T_k, što znači da prodavac zaštite kupuje rizične obveznice od kupca zaštite za njihovu nominalnu vrednost. Takva isplata u trenutku T_k iznosi

$$(1-R)N(1_{\{\tau > T_{k-1}\}} - 1_{\{\tau > T_k\}}). \tag{2.20}$$

Drugi član je isplata $1-R$ puta rizične kuponske obveznice bez oporavka, i može se proceniti u smislu $P_t(T_k)$ i $P_t(T_k)$ u svakom trenutku $t < T_k$. Prvi član, medjutim, ne može se primeniti na rizične i bezrizične obveznice, ocenjivanjem ovog člana zahteva model. Neka $b_t^{(k)}$ označava tržišnu vrednost iznosa koji se isplaćuje ukoliko dodje do neizvršenja u trenutku $t < T_1$. Premija u trenutku T_k

$$s(T_k - T_{k-1})N1_{\{\tau > T_k\}}, \tag{2.21}$$

$\boldsymbol{s}$ označava redovnu taksu koju kupac zaštite plaća prodavcu zaštite, može se primeniti na obveznice sa vremenom dospeća T_k i otuda imamo da je u trenutku $t < T_1$

$$a_t^{(k)} = s(T_k - T_{k-1})NP_t^0(T) = \frac{s(T_k - T_{k-1})N}{1-R}[\bar{P}_t(T_k) - RP_t(T_k)].$$

Ovde smo zanemarili takozvani rashod koji se često dodaje premiji za period tokom kojeg se dogodilo neizvršenje. Totalna vrednost CDS-a u trenutku t je

$$CDS(t, s, N, T) = \sum_{k=1}^{K}(b_t^{(k)} - a_t^{(k)}). \tag{2.22}$$

[8]Bond with recovery
[9]Zero-recovery defaultable bond

2.3.4 Opcije

Opcije su vrednosni papiri koji spadaju u takozvane finansijske derivate. Finansijski derivati se karakterišu time da njihova vrednost zavisi, odnosno izvedena je iz vrednosti nekih drugih vrednosnih papira, koje se nazivaju podloga . Najpoznatija vrsta finansijskih derivata su opcije.

Definicija 2.3.1 *Opcija je finansijski ugovor kojim se stiče pravo, ali ne i obaveza, da se kupi (kupovna opcija, na engleskom - call option) ili proda (prodajna opcija - put option) akcija, ili neki drugi vrednosni papir, pod dogovorenim uslovima.*

Uslovi koji su prisutni u tom ugovoru su sledeći:

- ugovorena cena ili cena po isteku ili na dospeću vrednosnog papira na koji se odnose
- ugovoreno vreme do isteka opcije

Prvo ćemo se upoznati sa opcijama čija su podloga bezkuponske obveznice. Evropska call opcija sa ugovorenom cenom K i vremenom dospeća S koja u podlozi ima obveznice sa vremenom dospeća T, gde je $T > S$ ima cenu u trenutku S

$$(P_S(T) - K)^+.$$

Ovu vrednost ćemo u trenutku $t < S < T$ označavati sa $c(t, S, K, T)$. Slično, evropska put opcija sa istim parametrima ima cenu u trenutku $t < S < T$ i koju označavamo sa $p(t, S, K, T)$

$$(K - P_S(T))^+.$$

Ove osnovne vanilla opcije mogu se koristiti u analizi komplikovanijih kreditnih derivata.

3 Modeliranje kamatne stope

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je sledeća literatura: [1], [3] i [7].

U prvom delu ovoga rada videli smo da za mnoge važne derivate sa fiksnim prihodom kao što su kamatni forvard ugovori i svopovi, koji mogu biti rizični i bezrizični, cenu možemo odrediti pomoću formula u koje ulaze cene bezkuponskih obveznica. Medjutim, obveznice i mnogi drugi sofisticirani ugovori, tačnije hjivove cene, zavise od mnogih pretpostavki. U ovom delu rada , ukratko ćemo se upoznati sa teorijom koja se odnosi na modeliranje cene opcija pomoću bezrizičnih kamatnih stopa.

3.1 Diferencijal

Prvo ćemo istražiti nekoliko formalnih veza izmedju obveznica, kratkoročnih stopa i forvard stopa, pod pretpostavkom da one zadovoljavaju stohastičke diferencijalne jednačine u Braunovoj filtraciji. Ovi odnosi pokazuju veze izmedju tri osnovna pristupa za modeliranje.
Neka su

$$dr_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{3.1}$$

$$\frac{dP_t(T)}{P_t(T)} = M_t(T)dt + \Sigma_t(T)dW_t \tag{3.2}$$

$$df_t(T) = \alpha_t(T)dt + \sigma_t(T)dW_t, \tag{3.3}$$

gde su poslednje dve jednačine beskonačno-dimenzioni sistem stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Teorema 3.1.1 *1. Ako $P_t(T)$ zadovoljava (3.2), tada $f_t(T)$ zadovoljava (3.3) sa*

$$\alpha_t(T) = \Sigma_t(T)\frac{\partial \Sigma_t(T)}{\partial T} - \frac{\partial M_t(T)}{\partial T},$$

$$\sigma_t(T) = -\frac{\partial \Sigma_t(T)}{\partial T}.$$

2. Ako $f_t(T)$ zadovoljava (3.3), tada r_t zadovoljava (3.1) sa

$$a(t) = \frac{\partial f_t(T)}{dt}|_{T=t} + \alpha_t(T)$$

$$b(t) = \sigma_t(t)$$

3. Ako $f_t(T)$ zadovoljava (3.3), tada $P_t(T)$ zadovoljava (3.2) sa

$$M_t(T) = r_t - \int_t^T \alpha_t(s)ds + \frac{1}{2}|\int_t^T \sigma_t(s)ds|^2$$

$$\Sigma_t(T) = -\int_t^T \sigma_t(s)ds$$

Dokaz:

1. Da bi dobili traženi rezultat primenjujemo Itovu formulu[10] na $\log P_t(T)$, u integralnom obliku i diferenciramo po T.

2. Za bilo koje $t \leq T$, integracija (3.3) daje

$$f_t(T) = f_0(T) + \int_0^t [\alpha_s(T)ds + \sigma_s(T)dW_s] \tag{3.4}$$

$$\partial f_t(T) = \partial f_0(T) + \int_0^t [\partial\alpha_s(T)ds + \partial\sigma_s(T)dW_s] \tag{3.5}$$

Izraze za $\alpha_s(T)$ i $\sigma_s(T)$ možemo zapisati u sledećem obliku

$$\alpha_s(T) = \alpha_s(s) + \int_s^T \partial\alpha_s(u)du, \ \ \sigma_s(T) = \sigma_s(s) + \int_s^T \partial\sigma_s(u)du \qquad (3.6).$$

$f_0(T) = r_0(T) + \int_0^T \partial f_0(u)du$ može biti ubačeno u (3.4) sa $T = t$ i posle smene redosleda integracije dobijamo

$$r_t = r_0 + \int_0^t [\alpha_s(s)ds + \sigma_s(s)dW_s] \tag{3.7}$$

$$+ \int_0^t (\partial f_0(u) + \int_0^u [\partial\alpha_s(u)ds + \partial\sigma_s(u)dW_s])du \qquad (3.8).$$

Koristimo (3.5) da ovo zapišemo kao

$$r_t = r_0 + \int_0^t [\partial f_s(s)ds + \alpha_s(s)ds + \sigma_s(s)dW_s]$$

što je i traženi rezultat.

[10]Pogledati dodatak 6.4

3. Zapisaćemo $P_t(T) = e^{Y_t(T)}$, gde je $Y_t(T) = -\int\limits_t^T f_t(s)ds$.

Primenjujemo Itovu formulu i zatim koristimo fundamentalnu teoremu i (3.3) da dobijemo izraz za $dY_t(T)$. Konačno, koristimo Fubinijevu teoremu da zamenimo redosled integracije kako bismo došli do traženog rešenja.

Ova teorema se ne bavi pitanjem kako modeliranje trenutne kamatne stope r_t vodi do dobijanja cene $P_t(T)$ ili forvard stope $f_t(T)$. Ispostavlja se da postoji jedan nedostatak koji treba dodati u jednačinu (3.1) da bi u potpunosti odredili model. Ovo je tema narednog poglavlja.

3.2 Jednofaktorsko modeliranje kamatnih stopa

Jednofaktorski modeli koji su se prvi put pojavili sedamdesetih godina dvadesetog veka, još uvek se u mnogim bankama i na finansijskim tržištima koriste kao osnovni modeli prilikom formiranja ročne strukture kamatnih stopa. Jedan od razloga je taj što su jednofaktorski modeli bili prvi modeli kojima se opisalo kretanje kamatnih stopa, dok se drugi razlog, možda i važniji, ogleda u činjenici da su zaista jednostavni za korišćenje. Važno je napomenuti da ne postoji model koji u potpunosti opisuje kretanje kamatnih stopa na tržištu. Kako su kamatne stope različite na različitim finansijskim tržištima, veoma je teško pronaći model koji verodostojno opisuje tako raznolike i komplikovane strukture kamatnih stopa.

Spot stopa (poznata kao trenutna ili kratkoročna) predstavlja nevidljivu veličinu. Ona se definše kao stopa infinitezimalno kratke ročnosti (od jednog momenta do drugog). U praksi, medjutim, jednaka je stopi postignutoj na najkraći mogući depozit.

Trenutnu kamatnu stopu r_t odredjuje sledeća diferencijalna jednačina

$$dr_t = a(t, r_t)dt + b(t, r_t)dW_t. \tag{3.9}$$

Pretpostavljamo da determinističke funkcije a, b zadovoljavaju Lipšicov uslov i uslove koji garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine. Prvi deo jednačine predstavlja devijaciju od teoretskog proseka i deterministički je (jer pretpostavlja da će kamatne stope, nezavisno od toga u kojoj meri fluktuiraju, da teže nekoj srednjoj vrednosti). Nasuprot tome, drugi uslov (volatilnost) je stohastički , jer obuhvata Vinerov process dW_t kao izvor slučajnosti (poznat kao standardno Braunovo kretanje).

Da bi gore navedeni model spot stope imao bilo kakvu praktičnu svrhu, mora biti moguće da se koristi za izvodjenje cenovne jednačine proizvoda kojima se trguje na tržištu, kao što su obveznice. Na tržištu bez arbitraže, bezkuponske obveznice sa vremenom dospeća $T > 0$ se tretiraju kao derivati koji zavise od jednog faktora, trenutne kamatne stope r_t.

3.2.1 Tržišna cena rizika

Trenutna kamatna stopa, ovde modelirana kao Itova difuzija, je Markovljeva i sledi da je cena bezkuponske obveznice sa vremenom dospeća T data sa $P_t(T) = p^T(t, r_t)$ gde je p^T je funkcija dve promenljive. Iz Itove formule imamo da je

$$dP_t(T) = M_t(T)P_t(T)dt + \Sigma_t(T)P_t(T)dW_t, \tag{3.10}$$

gde je $P_t(T) = p^T(t, r_t) = f(t, r_t)$, $M_t(T) = M^T(t, r_t), \Sigma_t(T) = \Sigma^T(t, r_t)$. Primenom Itove formule i (3.9) dobijamo

$$\partial p^T(t, r_t) = \partial f(t, r_t) = \partial_t f(t, r_t)dt + \partial_r f(t, r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial^2_{rr} f(t, r_t)dt$$

$$M^T(t, r)p^T(t, r) = \partial_t p^T + a\partial_r p^T + \frac{1}{2}b^2\partial^2_{rr}p^T \tag{3.11}$$

$$\Sigma^T(t, r)p^T(t, r) = b\partial_r p^T. \tag{3.12}$$

Uzimamo u obzir drugo vreme dospeća $S < T$, sa odgovarajućom stohastičkom diferencijalnom jednačinom za $P_t(S) = p^S(t, r_t)$, i pretpostavimo da konstruišemo samofinansirajući [11] portfolio koji se sastoji od (H^S, H^T) obveznica sa vremenom dospeća S i obveznica sa vremenom dospeća T. Tada vrednost porfolia $X = H^S P(S) + H^T P(T)$ zadovoljava

$$dX^H = H^S dP(S) + H^T dP(T)$$

$$= [H^S p^S M^S + H^T p^T M^T]dt + [H^S p^S \Sigma^S + H^T p^T \Sigma^T]dW$$

Ako stavimo da je

$$H^S p^S \Sigma^S + H^T p^T \Sigma^T = 0, \tag{3.13}$$

naš portfolio će biti bezrizičan, odsustvo arditraže podrazumeva da stopa dobiti mora biti kratkoročan kamatna stopa . To dovodi do

$$\frac{H^S p^S M^S + H^T p^T M^T}{H^S p^S + H^T p^T} = r \tag{3.14}$$

Koji, nakon korišćenja (3.13) i nekih izračunavanja, ima oblik

$$\frac{M^T - r_t}{\Sigma^T} = \frac{M^S - r_t}{\Sigma^S}.$$

Pošto smo razdvojili S i T, ovaj izraz je funkcija od t i r_t i zaključujemo da postoji proces λ takav da

$$\lambda_t = \lambda(t, r_t) = \frac{M^T - r_t}{\Sigma^T} \tag{3.15}$$

[11] Portfolio je samofinansirajući ako nema ni priliva ni odliva keša u njemu do trenutka dospeća T, odnosno sve promene u vrednosti portfolia zavise isključivo od promena u vrednosti aktiva koje on sadrži.

koji važi sa svako t i sva vremena dospeća T. Proces λ je nezavisan od vremena dospeća obveznice i naziva se ***tržišna cena kreditnog rizika***.
Zamenom izraza (3.11) i (3.12) u jednačinu $M^T = r + \lambda\Sigma^T$ dobijamo da cena obveznice bez arbitraže p^T zadovoljava jednačinu

$$\partial_t p^T + [a(t,r) - \lambda(t,r)b(t,r)]\partial_r p^T + \frac{1}{2}b(t,r)^2\partial^2_{rr}p^T - rp^T = 0, \qquad (3.16)$$

sa graničnim uslovom $p^T(T,r) = 1$. Iz Feynman-Kac[12] reprezentacije dobijamo da je

$$p^T = E^{Q(\lambda)}[e^{-\int_t^T r_s ds}], \qquad (3.17)$$

za meru $Q(\lambda)$ gde je kratkoročna stopa

$$dr_t = [a(t,r) - \lambda(t,r)b(t,r)]dt + b(t,r_t)dW_t^{Q(\lambda)}. \qquad (3.18)$$

Tako da, koristeći teoremu Girsanova[13], vidimo da je mera cene $Q(\lambda)$ u odnosu na fizičku meru P

$$\frac{dQ((\lambda)}{dP} = exp(-\int_0^T \lambda(t,r_t)dW_T - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda(t,r_t)^2 dt). \qquad (3.19)$$

3.2.2 Afini modeli

Kaže se da su jednofaktorski modeli kratkoročne stope afini ako cena bezkuponske obveznice može biti zapisana u obliku

$$P_t(T) = e^{A(t,T)+B(t,T)r_t}, \qquad (3.20)$$

za determinističke funkcije A i B. Sledeća teorema nam potvrdjuje postojanje afinih modela navodjenjem dovoljnog uslova o Q-dinamici za r.

Teorema 3.2.1 *Pretpostavimo da je data kratkoročna stopa r_t u odnosu na meru Q*

$$dr_t = a^Q(t,r_t)dt + b(t,r_t)dW_t^Q \qquad (3.21)$$

sa a^Q i b koje su u obliku

$$a^Q(t,r) = k(t) + \eta(t) \qquad (3.22)$$

$$b(t,r) = \sqrt{y(t)r + \delta(t)} \qquad (3.23)$$

za determinističke funkcije k, η, y, δ. Tada je model afini i funkcije A i B zadovoljavaju Riccatijeve jednačine

[12]Pogledati dodatak 6.5
[13]Teorema Girsanova je navedena u dodatku 6.8

$$\frac{dB}{dt} = -k(t)B - \frac{1}{2}y(t)B^2 + 1 \tag{3.24}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\eta(t)B - \frac{1}{2}\delta(t)B^2 + 1 \tag{3.25}$$

Za $0 \leq t < T$, sa graničnim uslovom $B(T,T) = A(T,T) = 0$.

Napominjemo da pod istim uslovima da Q-mera za r_t ima homogene vremenske koeficijente ,važi da su A i B funkcije promenljive $T - t$. Prinos je tada u obliku

$$R_t(T) = -\frac{A(T-t)}{T-t} - \frac{B(T-t)}{T-t}r_t$$

što znači da je moguća kriva prinosa odredjena sa vremenski homogenim jednofaktorskim afinim modelom jednostavna funkcija $-\frac{A(T-t)}{T-t}$ plus slučajan umnožak funkcije $-\frac{B(T-t)}{T-t}$.

3.2.3 Vasičekov model

Jedan od najranijih i najpoznatijih jednofaktorskih modela koji se pojavio 1977. godine je Vasičekov model, poznat kao i Gausov model ili Ornstein-Uhlenbeck-ov model koji se stabilizuje oko srednje vrednost.
Prema Vasičekovom modelu kretanje kratkoročne kamatne stope predstavlja stohastički proces definisan na sledeći način:

$$dr_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma dW_t. \tag{3.26}$$

gde su :
r_t-kamatne stope u trenutku t,
$\tilde{k}$-koeficijent brzine obrtaja oko dugoročne srednje vrednosti,
$\tilde{\theta}$-nivo dugoročne srednje vrednosti,
σ-volatilnost kratkoročne kamatne stope.

Parametri $\tilde{k}, \tilde{\theta}$ i σ su pozitivne konstante, dok dW_t, predstavlja prirast standardnog Vinerovog procesa.
Model ima kako svojih prednosti, tako i nedostataka. Prednost Vasiček modela je ta što pruža eksplicitno rešenje. S druge strane, glavni nedostatak leži u činjenici da kamatne stope mogu uzimati negativne vrednosti, a poznato je da je takva pretpostavka na stvarnim finansijskim tržištima nerealna.
U modelu parametar $\tilde{\theta}$ predstavlja srednju vrednost kamatne stope na duge staze. Ako je trenutna kamatna stopa veća od dugoročne srednje vrednosti ($r_t > \tilde{\theta}$), koeficijent $\tilde{k} > 0$ će prouzrokavati da pomeranje (drift) kamatne stope bude negativno, odnosno da njeno kretanje bude usmereno u pravcu dugoročne srednje vrednosti. Slično tome, ako je trenutna kamatna stopa niža

od dugoročne srednje vrednosti $r_t < \tilde{\theta}$, koeficijent $\tilde{k} > 0$ će prouzrokovati pozitivno pomeranje kamatne stope usmereno u pravcu dugoročne srednje vrednosti. Ovakvo kretanje kamatnih stopa je i ekonomski opravdano. Niže kamatne stope podstiču privrednu aktivnost, povećavaju tražnju za finansijskim sredstvima. Vremenom, to neminovno vodi cikličnom padu ekonomske aktivnosti, a samim tim i rastu kamatnih stopa koje teže nekom prirodnom nivou. Obrnuta situacija se dešava kada su kamatne stope visoke.
Ako bi kamatnu stopu napisali u eksplicitnom obliku $f(t, r_t) = e^{\tilde{k}t}(r_t - \tilde{\theta})$, onda bi se za rešavanje stohastičke diferencijalne jednačine iz izraza (3.26) mogla prmeniti Itova lema na sledeći način:

$$\begin{aligned} df &= \tilde{k}e^{\tilde{k}t}(r_t - \tilde{\theta})dt + e^{\tilde{k}t}dr_t \\ &= \tilde{k}e^{\tilde{k}t}(r_t - \tilde{\theta})dt + \tilde{k}e^{\tilde{k}t}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma e^{\tilde{k}t}dW_t \\ df &= \sigma e^{\tilde{k}t}dW_t, \qquad (3.27). \end{aligned}$$

Integracijom izraza (3.27) dobijamo

$$e^{\tilde{k}t}(r_t - \tilde{\theta}) - (r_0 - \tilde{\theta}) = \sigma \int_0^t e^{\tilde{k}u}dW_u.$$

Daljim sredjivanjem izraza dobija se

$$r_t = e^{-\tilde{k}t}[r_0 + \tilde{\theta}(e^{\tilde{k}t} - 1) + \int_0^t \sigma e^{\tilde{k}u}dW_u]$$

$$r_t = r_0 e^{-\tilde{k}t} + \tilde{\theta}(1 - e^{-\tilde{k}t}) + \sigma \int_0^t e^{\tilde{k}(u-t)}dW_u. \qquad (3.28)$$

Rešenje stohastičke diferencijalne jednjačine iz izraza (3.26) za neki interval izmedju s i t, uz uslov $0 \leq s < t$, može se predstaviti u obliku

$$r_t = r_s e^{-\tilde{k}(t-s)} + \tilde{\theta}(1 - e^{-\tilde{k}(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{\tilde{k}(u-t)} dW_u.$$

Integral na desnoj strani izraza (3.28) ima normalnu raspodelu cija je srednja vrednost jednaka nuli, a disperzija

$$E[(\int_0^t \sigma e^{\tilde{k}(u-t)} dW_u)^2] = E[\int_0^t (\sigma e^{\tilde{k}(u-t)})^2 du]$$

$$= \sigma^2 e^{-2\tilde{k}t} E[\int_0^t e^{2\tilde{k}u} du]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}}(1 - e^{-2\tilde{k}t}).$$

Uslovna očekivana vrednost i disperzija promenljive r_t ako je poznato r_0 biće

$$E_o[r_t] = \tilde{\theta} + (r_0 - \tilde{\theta})e^{-\tilde{k}t}$$

$$Var_0[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}}(1 - e^{-2\tilde{k}t}).$$

Ako je poznata vrednost r_s, uslovna očekivana vrednost i disperzija promenljive r_t biće

$$E_s[r_t] = \tilde{\theta} + (r_s - \tilde{\theta})e^{-\tilde{k}(t-s)}$$

$$Var_s[r_t] = \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}}(1 - e^{-2\tilde{k}(t-s)}).$$

Sa porastom vremena, očekivana vrednost teži dugoročnoj srednjoj vrednosti, a disperzija ostaje ograničena, ukazujući na to da se proces stabilizuje oko srednje vrednosti. To znači da je proces, posmatran u dužem vemenskom periodu, stacionaran i da ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $\tilde{\theta}$ i disperzijom $\frac{\sigma^2}{2\tilde{k}}$.

Teorema 3.2.2 *U Vasičekovom modelu, cena bezkuponske obveznice je data da* $P_t(T) = e^{A(t,T)+B(t,T)r_t}$ *gde je*

$$B(t,T) = \frac{1}{\tilde{k}}[e^{-\tilde{k}(T-t)} - 1]$$

$$A(t,T) = \frac{1}{\tilde{k}}(\frac{1}{2}\sigma^2 - \tilde{k}^2\tilde{\theta})[B(t,T) - u(T-t)] - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4\tilde{k}}.$$

Dokaz:
Izvodjenje obrasca za vrednovanje bezkuponske obveznice zasniva se na činjenici da r predstavlja Markovljev proces. Drugim rečima, ako bi krenuli od trenutka t sa ciljem da odredimo vrednost stope r_u u trenutku u, gde je $u \geq t$, potrebno je samo da poznajemo vrednost stope r_t.
Cena obveznice u trenutku t sa rokom dospeća T predstavlja funkciju kratkoročne kamatne stope izražene na sledeći način

$$P(t, T, r_t) = E[\exp(-\int_t^T r_u du | r_t)]$$

$$= E[\exp(-\int_t^T r_u(r_t) du)] \tag{3.29}$$

gde je r_u stohastički proces opisan Vasičekovim modelom:

$$r_u = e^{-\tilde{k}(u-t)}[r_t + \tilde{\theta}(e^{\tilde{k}(u-t)} - 1) + \sigma \int_t^u e^{\tilde{k}(v-t)} dW_v].$$

Na osnovu izraza (3.29) dobija se da je cena bezkuponske obveznice jednaka sa

$$P(t, T, r_t) = \exp(E[-\int_t^T r_u(r_t) du] + \frac{1}{2} Var(-\int_t^T r_u(r_t) du)) \tag{3.30}$$

gde je

$$E[-\int_t^T r_u(r_t) du] = \int_t^T (r_t e^{-\tilde{k}(u-t)} + \tilde{\theta}(1 - e^{-\tilde{k}(u-t)}))du$$

$$= -(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}}) r_t + \tilde{\theta}(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}} - (T-t))$$

$$Var(-\int_t^T r_u(r_t) du) = \frac{\sigma^2}{\tilde{k}^2}((T-t) - \frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}}) - \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}}(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}})^2.$$

Uvrštavajući ova dva izraza u izraz (3.30) dobija se konačno rešenje za cenu bezkuponske obveznice

$$P(t, T, r_t) = \exp(-(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}}) r_t + \tilde{\theta}(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}} - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}^2}(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}})$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\tilde{k}}(\frac{1 - e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}})^2)$$

$$P(t,T,r_t) = \exp(-B(t,T)r_t + \tilde{\theta}B(t,T) - \tilde{\theta}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}^2}B(t,T)$$
$$+\frac{\sigma^2}{2\tilde{k}^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{4\tilde{k}}B(t,T)^2)$$
$$P(t,T,r_t) = \exp(-B(t,T)r_t + A(t,T)) \tag{3.31}$$

gde je

$$B(t,T) = \frac{1-e^{-\tilde{k}(T-t)}}{\tilde{k}}$$
$$A(t,T) = (\tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{2\tilde{k}^2})[B(t,T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\tilde{k}}.$$

3.2.4 Dothanov model

U cilju rešenja problema negativne kamatne stope koji se javlja u predhodno spomenutom modelu, Dothan(1978) uvodi lognormalni model za kamatnu stopu u kom je logaritam kratkoročne stope Braunovo kretanje sa konstantnim driftom. Neka je kratkoročna stope r_t data sa

$$dr_t = \tilde{k}r_t dt + \sigma r_t dW_t, \tag{3.32}$$

sa tržišnom cenom rizika u obliku $\lambda_t = \lambda$, tako da r pri meri Q zadovoljava jednačinu

$$dr_t = kr_t dt + \sigma r_t dW_t^Q, \tag{3.33}$$

gde je $k = (\bar{k} - \lambda\sigma)$. Primenom Itove leme možemo doći do rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (3.33)

$$dr_t = r_t' dt + r_{W_t}' dW_t^Q + \frac{1}{2}r_{tt}'' dt,$$

$$dr_t = (r_t' + \frac{1}{2}r_{tt}'')dt + r_{W_t}' dW_t^Q.$$

Ako poslednji izraz izjednačimo sa (3.33) dobijamo

$$r_t' + \frac{1}{2}r_{tt}'' = kr_t,$$

$$r_{W_t}' = \sigma r_t.$$

Iz poslednje dva izraza lako se može dobiti da je

$$r_t = r_0 exp[(k - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^Q].$$

Pa su očekivana vrednost i disperzija pri meri Q

$$E^Q[r_t] = r_0 e^{kt},$$

$$Var^Q[r_t] = r_0^2 e^{2kt}(e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Iako je ovo pozitivno, možemo zaključiti da se model stabilizuje oko srednje vrednosti ako i samo ako je $k < 0$.

3.2.5 Eksponencijalni Vasičekov model

Drugi načina za dobijanje lognormal modela za kamatnu stopu je da pretpostavimo da logaritam kratkoročne stope Ornstein-Uhlenbeck-ovog procesa. Uzimamo da je

$$dr_t = r_t(\bar{\theta} - \bar{k} log r_t)dt + \sigma r_t dW_t, \tag{3.34}$$

za pozitivne konstante k i θ i datu tržišnu cenu rizika u obliku $\lambda_t = \lambda log r_t + c$. Tada je r_t u odnosu na meru Q

$$dr_t = r_t(\theta - k \log r_t)dt + \sigma r_t dW_t^Q, \tag{3.35}$$

sa $\theta = (\tilde{\theta} - \sigma c)$ i $k = (\bar{k} + \lambda\sigma)$. Eksplicitno rešenje za stohastičku diferencijalnu jednačinu može biti lako dobijeno iz rešenja Ornstein Uhlenbeck stohastičke diferencijalne jednačine, naime

$$r_t = \exp[\log r_0 e^{-kt} + \frac{\theta - \sigma^2/2}{k}(1 - e^{-kt}) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW_s^Q].$$

Štaviše,

$$E^Q[r_t] = \exp[\log r_0 e^{-kt} + \frac{\theta - \sigma^2/2}{k}(1 - e^{-kt}) + \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-2kt})]$$

$$E^Q[r_t^2] = \exp[2 \log r_0 e^{-kt} + \frac{2\theta - \sigma^2}{k}(1 - e^{-kt}) + \frac{\sigma^2}{k}(1 - e^{-2kt})].$$

Stoga vidimo da je eksponencijalni Vasičekov model model koji se stabilizuje oko srednje vrednosti

$$\lim_{t\to\infty} E^Q[r_t] = \exp(\frac{\theta - \sigma^2/2}{k} + \frac{\sigma^2}{4k})$$

sa dugoročnom disperzijom

$$\lim_{t\to\infty} Var^Q[r_t] = \exp(\frac{2\theta - \sigma^2/2}{k} + \frac{\sigma^2}{2k})[exp(\frac{\sigma^2}{2k}) - 1].$$

Eksponencijalni Vasičekov model nije afini model i ne daje analitičke izraze za bezkuponske obveznice i za opcije nad njima.

3.2.6 Cox-Ingersoll-Ross-ov model

Kanonski izabran model koji je afini i koji se stabilizuje oko srednje vrednosti sa vremenski homogenim koeficijentima je model kod kog je kratkoročna stopa data sa

$$dr_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \tag{3.36}$$

za pozitivne konstante $\tilde{k}, \tilde{\theta}$ i σ koji zadovoljavaju $2\tilde{k}\tilde{\theta} \geq \sigma^2$. U cilju da predstavimo funkcionalni oblik ovog modela pod bezrizičnom merom, uzimamo tržišnu cenu rizika u obliku $\lambda_t = a\sqrt{r_t} + b/\sqrt{r_t}$, pa je r_t u odnosu na meru Q

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^Q, \tag{3.37}$$

gde je $k = \tilde{k} + a\sigma$ i $k\theta = \tilde{k}\tilde{\theta} - b\sigma$. Sa malo dodatnog rada može se dokazati da r_t ima necentralnu χ^2 raspodelu sa

$$E^Q[r_t] = r_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt})$$

$$Var^Q[r_t] = r_0 \frac{\sigma^2}{k}(e^{-kt} - e^{-2kt}) + |\theta \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-kt})^2.$$

Mnogo važnije je, pošto važi $a^Q(t,r) = k(\theta - r)$ i $b^2(t) = \sigma^2 r$, da je model afini. Rešavanje odgovarajućih Riccatijevih jednačina za funkcije $A(t,T)$ i $B(t,T)$ je dugačko, ali jednostavno i dovodi do formule za cenu obveznica.

Teorema 3.2.3 *U Cox-Ingersoll-Ross-ovom modelu (CIR), cena obveznice je data sa*

$$P_t(T) = \exp[A(t,T) + B(t,T)r_t]$$

gde su

$$A(t,T) = \frac{2k\theta}{\sigma^2}\log[\frac{2y\exp[(k+y)(T-t)/2]}{2y + (k+y)(\exp[(T-t)y] - 1)}] \tag{3.38}$$

$$B(t,T) = \frac{2(1 - \exp[(T-t)y])}{2y + (k+y)(\exp[(T-t)y] - 1)} \tag{3.39}$$

i $y^2 = k^2 + 2\sigma^2$.

4 Strukturni modeli kreditnog rizika

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je sledeća literatura: [1], [3] i [6].

Kreditni rizik se odnosi na mogućnost finansiskog gubitka usled promene kreditnog kvaliteta učesnika na tržištu. Najradikalnija promena u kreditnom kvalitetu jeste dogadjaj neizvršenja obaveza koje su propisane ugovorom. Operativno, za srednje i velike firme, neizvršenje obaveza je izazvano neuspehom firme da ispuni svoje dužničke obaveze, koje obično dovode do bankrota firme. Ovakav neuspeh je redak i jedinstven dogadjaj nakon čega firma prestaje normalno da funkcioniše i koji uzrokuje velike finansijske gubitke za nosioca osiguranja. Ovo vidjenje kreditnog rizika se odnosi i na obveznice izdate od država sa nezanemarljivim rizikom, kao što su zemlje u razvoju.
Kod strukturnih modela, pod dogadjajem neizvršenja se smatra dogadjaj kada je vrednost imovine firme niža u odnosu na visinu duga. Ovi modeli zahtevaju jake pretpostavke o dinamici sredstava firme, njenom dugu i o strukturi njenog kapitala. Glavna prednost strukturnih modela je ta da oni daju intuitivnu sliku, kao i objašnjenje neispunjenja obaveza. Mi ćemo spomenuti i druge prednosti, kao i mane ovih modela u nastavku.

4.1 Merton model

Merton model uzima jednostavnu sliku strukture duga i pretpostavlja da vrednost A_t aktive firme prati geometrijsko Braunovo kretanje sa jednačinom

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t, \quad A_0 > 0, \tag{4.1}$$

gde je μ srednja stopa prinosa aktive i σ je volatilnost aktive.

Velike i sredne firme se finansiraju akcijama (kapital) i obveznicama (dug). Mertonov model pretpostavlja da se dug sastoji od jednostavne obveznice sa glavnicom K i vremenom dospeća T. Na dan dospeća, ako je totalna vrednost aktive veća nego dug, dug se plati u celosti a ostatak se deli medju akcionarima. Medjutim, ako je $A_T < K$ tada se smatra da je došlo do neizvršenja obaveza: vlasnici obveznica naplaćuju dug i dobijaju pravo da likvidiraju firmu i dobiju likvidacionu vrednost (jednaku ukupnoj vrednosti firme jer ne postoje stečajni troškovi) umesto duga. Vlasnici akcija ne dobijaju ništa u ovom slučaju, ali po principu ograničene odgovornosti nisu dužni da uplate dodatna sredstva na račun duga.
Iz ovih jednostavnih zapažanja, vidimo da vlasnici obveznica imaju novčani tok u trenutku T koji je jednak sa

$$(A_T - K)^+,$$

i ovaj kapital može da se posmatra kao evropska call opcija. Sa druge strane, vlasnici obveznica primaju $\min(A_T, K)$. Štaviše, fizička verovatnoća od nastupanja dogadjaja τ neispunjenja obaveza u trenutku T, merena u trenutku t, je

$$P_t[\tau = T] = P_t[A_T \leq K] = N[-d_2^P],$$

gde je $N[.]$ vrednost funkcije normalne $N[0,1]$ raspodele i

$$d_2^P = (\sigma\sqrt{T-t})^{-1}(\log(A_t/K) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t)).$$

Vrednost call opcije E_t, $t < T$, može se izvesti koristeći klasične martingalske argumente. Pod pretpostavkom da se može trgovati sa vrednošću firme A_t, napominjemo da je $e^{-rt}A_t$ martingal pod bezrizičnom merom Q sa tržišnom cenom rizika (koja je definisana u delu 3.2.1) $\phi = (\mu - r)\sigma$ i Radon-Nikodinovim izvodom

$$\frac{dQ}{dP} = exp(\phi W_T - \frac{1}{2}\phi^2 T). \tag{4.2}$$

Tada imamo standardnu Black-Scholles formula za call opciju

$$E_t = E^Q[e^{-r(T-t)}(A_T - K)^+] \tag{4.3}$$

$$= A_t N[d_1] - e^{-r(T-t)} K N[d_2] \tag{4.4}$$

gde je

$$d_1 = \frac{\log(A_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \ d_2 = \frac{\log(A_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{4.5}$$

Vlasnik obveznice, sa druge strane, prima

$$min(K, A_T) = A_T - (A_T - K)^+ = K - (K - A_T)^+.$$

Prilikom dogadjaja neizvršenja, vlasnik obveznice prima A_T/K, što se naziva frakcija oporavka[14], od glavnice obveznice K. $(K - A_T)/K$ se naziva gubitak usled neplaćanja LGD[15].
Vrednost kapitala raste kada raste volatilnost firme.
Strukturni modeli kao što je Mertonov model zavise od nevidljive varijable A_T. Za kompanije kojima se javno trguje, cena akcija, je pažljivo posmatrana na tržištu. Obično pristup koji se koristi za ocenjivanje vrednosti firme A_T i volatilnosti σ u Mertonovom modelu je Black-Scholes formula za call opciju E_t.

[14] recovery fraction
[15] lost given default

4.2 Black-Cox-ov model

Najjednostavniji model neizvršenja u prvom pojavljivanju uzima vrednost firme datu sa (4.1) i ostatkom duga sa glavnicom K i vremenom dospeća T. Medjutim, umesto mogućnosti da se neizvršenje desi u trenutku dospeća T, Black-Cox pretpostavljaju da se neizvršenje desi u prvom trenutku kada vrednost firme padne ispod vremenski zavisne barijere $K(t)$. Ovo može da se objasni pravom koje ima vlasnik obveznica, da likvidira firmu ako u bilo kom trenutku vrednost padne ispod barijere. Vreme neizvršenja je definisano kao

$$\tau = inf\{t > 0 : A_t < K(t)\} \tag{4.9}$$

za izbor vremenski zavisne barijere, treba primetiti da ako $K(t) > K$ tada vlasnici obveznica su uvek potpuno pokriveni, što je nerealno. Sa druge strane, treba jasno da važi $K_T < K$. Priroda izbora je takva da povećava vremenski zavisnu barijeru $K(t) = K_0 e^{kt}, K_0 \leq K e^{-kT}$.Prvi prolazak barijere koja dovodi do neizvršenja može se posmatrati kao prolazak Braunovog kretanja sa driftom. Posmatrajući

$$\{A_t < K(t)\} = W_t + \sigma^{-1}(r - \sigma^2/2 - k)t \leq \sigma^{-1} \log(K_0/A_0),$$

dobijamo da bezrizižna verovatnoća neizvršenja koje se dešava pre vremena $t \leq T$ je data sa

$$Q[0 \leq \tau < t] = Q[\min_{s \leq t}(A_s/K(s)) \leq 1] = Q[\min_{s \leq t} X_s \leq \sigma^{-1} \log(\frac{K_0}{A_0})], \tag{4.10}$$

gde je $X_t = W_t + mt, m = \sigma^{-1}(r - \sigma^2/2 - k)$. Ovo je klasični problem verovatnoće koji je detaljno diskutovan na kraju ovog rada[16], čije je rešenje dato sa

$$Q[\min_{s \leq t} X_t \leq d] = 1 - FP(-d; -m; t)$$

$$FP(d; m; t) := N[\frac{d - mt}{\sqrt{t}}] - e^{2md} N[\frac{-d - mt}{\sqrt{t}}], d \geq 0. \tag{4.11}$$

Tada dobijamo formulu

$$Q[0 \leq \tau < t] = 1 - FP(-d; -m; t) \tag{4.12}$$

sa $m = \sigma^{-1}(r - \sigma^2/2 - k)$ i $d = \sigma^{-1} \log(\frac{K_0}{A_0}) < 0$.
Isplata nosiocu kapitala na datum dospeća je

$$(A_T - K)^+ 1_{\{\min_{s \leq t} X_s > d\}} = (e^{KT} A_0 e^{\sigma X_T} - K)^+ 1_{\{\min_{s \leq t} X_s > d\}} \tag{4.13}$$

Ovo je ekvivalentno isplati call opcije, i može biti ocenjeno pomoću Black-Scholes-ove formule.

[16]Pogledati dodatak 6.10

4.3 Neizvršenje obaveza i cena obveznica

U ovom delu rada ćemo izložiti svojstva verovatnoće neizvršenja obaveza i verovatnoće preživljavanja, videćemo šta to implicira kod rizičnih obveznica. Podsetimo se na trenutak da je neizvršenje obaveza τ, vreme zaustavljanja [17], slučajna veličina $\tau : \Omega \to R_+ \cup \{\infty\}$ tako da $\{\tau \leq t\} \in F_t$, za svako $t \geq 0$. Drugim rečima, slučajna veličina τ je vreme zaustavljanja ako je stohastički proces

$$\begin{aligned} H_t(\omega) &= 1_{\{\tau \leq t\}}(\omega) = 1, \;\; \tau(\omega) \leq t \\ H_t(\omega) &= 1_{\{\tau \leq t\}}(\omega) = 0, \quad inace \end{aligned} \tag{4.15}$$

prilagodjen filtraciji F_t. Vreme neizvršenja obaveza, H_t je poznato ka proces neizvršenja i $H_t^C = 1 - H_t$ je proces preživljavanja.

Kažemo da je vreme zaustavljanja $\tau > 0$ predvidljivo ako postoji niz vremena zaustavljanja $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ takav da

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \tau,$$

Ako znamo stohastičku analizu prepoznaćemo ovo kao podatak da je proces indikatora H_t predvidljiv. Da se zna, suprotno od predvidljivog vremena zustavljanja je potpuno nedostupno vreme zaustavljanja, to je vreme zaustavljanja τ takvo da je

$$P[\tau = \bar{\tau} < \infty] = 0,$$

za bilo koje predvidljivo vreme zaustavljanja $\bar{\tau}$.

4.3.1 Bezuslovna verovatnoća neizvršenja obaveza

Za dato vreme neizvršenja obaveza τ, verovatnoća preživljavanja za t godina je

$$P[\tau > t] = 1 - P[\tau \leq t] = 1 - E[1_{\{\tau \leq t\}}] \tag{4.16}$$

Nekoliko drugih povezanih pojmova mogu se izvesti iz osnovne verovatnoće. Na primer,

$$P[s < \tau \leq t] = P[\tau > s] - P[\tau > t] \tag{4.17}$$

je bezuslovna verovatnoća neizvršenja obaveza koje se dešava tokom intervala $[s, t]$.
Koristeći Bayes-ovu formulu za uslovnu verovatnoću, može se zaključiti da verovatnoća preživljavanja u t godina pod uslovom opstanaka do $s \leq t$ godina je

$$P[\tau > t | \tau > s] = \frac{P[\{\tau > t\} \cap \{\tau > s\}]}{P[\tau > s]} = \frac{P[\tau > t]}{P[\tau > s]} \tag{4.18}$$

[17] Pogledati dodatak 6.1, definicija 6.1.3

Pretpostavljajući da je $P[\tau > t]$ strogo pozitivno i diferencijalno po t definešemo funkciju forvard stope neizvršenja kao

$$h(t) = -\frac{\partial \log P[\tau > t]}{\partial t} \tag{4.19}$$

tada sledi

$$P[\tau > t|\tau > s] = e^{-\int\limits_s^t h(u)du}. \tag{4.20}$$

Forvard stopa neizvršenja meri trenutnu stopu dolaska za dogadjaj neizvršenja u trenutku t pod uslovom preživljavanja do trenutka t. Zaista, ako je $h(t)$ neprekidno imamo da je za kratak interval $[t, t + \triangle t]$,

$$h(t)\triangle t \approx P[t \leq \tau \leq t + \triangle t|\tau > t].$$

4.3.2 Uslovna verovatnoca neizvršenja obaveza

Ove verovatnoće su izvedene iz $P[\tau > t]$, tj. uslovljene konstantnim skupom podataka dostupnim u trenutku 0. Generalno, možemo se fokusirati na $SP_s := P[\tau > t|F_s]$, tj. na verovatnocu preživljavanja u t godina uslovljena sa svim dostupnum informacijama u trenutku $s \leq t$. Ako pretpostavimo da je ta verovatnoća pozitivna i diferencijabilna po t, onda možemo zapisati ka

$$SP_t = H_s^c e^{-\int\limits_s^t h_s(u)du}, \tag{4.21}$$

gde je

$$h_s(t) = \frac{\partial log SP_s(t)}{\partial t}. \tag{4.22}$$

Definišemo $h_s(t)$ kao proces forvard stope neizvršenja s obzirom na sve informacije do trenutka s: jasno je da je $h_0(t) = h(t)$.

Proces indikatora H_t, definisan u (4.15), je submartingal. Koristićemo Doob-Meyerovu dekompoziciju, u kojoj postoji jedinstven neopadajući predvidljiv proces Λ_t, nazvan kompenzator, takav da $H_t - \Lambda_t$ je ravnomerno integrabilni martingal. Pošto se neizvršenje dešava jedanput, mi znamo da je

$$\Lambda_t = \Lambda_{\tau \wedge t}.$$

U nekim slučajevima kompenzator može biti zapisan kao

$$\Lambda_t = \int\limits_0^t \lambda_s ds \tag{4.23}$$

za nenegativan, progresivno merljiv proces λ_t. U ovom slučaju proces λ_t se naziva intenzitet neizvršenja.

Može biti pokazano da važi

$$\lambda_t = h_t(t). \tag{4.24}$$

Dakle, dok funkcija forvard stope neizvršenja $h(t)$ daje trenutnu stopu neizvršenja uslovljena jedino preživljavanjem do t, intenzitet neizvršenja λ_t meri trenutnu stopu neizvršenja uslovljenu svim informacijama dostupnim do trenutka t.

4.3.3 Podrazumevana verovatnoca preživljavanja

U ovom delu rada istražujemo kako cena rizične bezkuponske obveznice može biti iskorišćena za zaključivanje o bezrizičnoj verovatnoći. Pretpostavljamo u ovoj sekciji da kamatna stopa r_t i vreme neizvršenja obaveza τ su nezavisne pod bezrizičnom merom Q.
Neka je $\bar{P}_t(T)1_{\tau>t}$ cena u trenutku $t \leq T$ rizične bezkuponske obveznice izdate od strane firme sa vremenom dospeća T i glavnicom jednakoj jednoj jedinici valute. Tada, pošto smo pretpostavili da obveznica ne plaća nista kao oporavak, znamo da je

$$\bar{P}_t(T)1_{\{r>t\}} = E_t^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} 1_{\{r>T\}}] \tag{4.25}$$

i pošto su r_t i τ nezavisni imamo da je

$$P_t(T)1_{r>T} = P_t(t)Q[\tau > T|F_t].$$

Dakle, sve dok je $\tau > t$ bezrizična verovatnoća preživljavanja je data sa

$$Q[\tau > T|F_t] = \frac{\bar{P}_t(T)}{P_t(T)} = exp[-\int_t^T (\bar{f}_t(s) - f_t(s))ds] \qquad (4.26).$$

Tako su ročne structure bezrizične verovatnoće preživljavanja kompletno odredjene pomoću ročnih struktura rizičnih i bezrizičnih bezkuponskih obveznica. U nastavku ćemo se oslanjati na dve gore navedene pretpostake , (4.26) ćemo nazivati podrazumevana verovatnoća preživljavanja, naglašavajući činjenicu da je izvedena iz tržišne cene i povezana sa bezrizičnom merom Q.

5 Modeli kreditnog rizika sa reduciranom formom

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je sledeća literatura: [1].

Modeli kreditnog rizika sa reduciranom formom su takodje poznati kao i modeli hazard stope[18]. U strukturnim modelima, neizvršenje je direktno povezano sa vrednošću firme, i u najjednostavnijoj verziji vreme neizvršenja je predvidljivo. Nasuprot tome, modeli kreditnog rizika sa reduciranom formom pretpostavljaju da je neizvršenje uvek iznenadjenje i da je vreme zaustavljanja nepredvidljivo. Vrednost firme nije modelirana, ali je pažnja usmerena na trenutnu verovatnoću preživljavanja.

5.1 Osnovne odlike

Razmotrimo za trenutak fizičku verovatnoću: kasnije ćemo sve rezultate transformisati u ekvivalentne iskaze pod merom neutralnom od rizika. Stohastički proces $H_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ je submartingal u prirodnoj filtraciji $(H_t)_{t\geq 0}$, i pod pretpostavkom diferencijabilnosti, postoji pozitivna funkcija $h(t)$ takva da je

$$H_t - \int_0^t h(s)(1 - H_s)ds$$

H martingal. Kada postoji tržišna filtracija $(G_t)_{t\geq 0}$ (grubo govorećvi sadrži sve informacije osim činjenica kašnjenja, tj. neizvršenja ili opstanka) postoji G_t adaptiran proces λ_t takav da je

$$H_t - \int_0^t \lambda_s(1 - H_s)ds$$

martingal pod filtracijom

$$F_t := H_t \vee G_t.$$

pretpostavlja se da je verovatnoća daljeg neizvršenja isključena u trenutku neizvršenja. Martingalsni uslov podrazumeva da je

$$P[t < \tau \leq t + dt|F_t] = \lambda_t(1 - H_t)dt + o(dt)$$

za malo dt i što znači da je kod modela kreditnog rizika sa reduciranom formom, neizvršenje nepredvidljivo vreme zaustavljanja.

[18]Hazard (opasnost) u vremenu t je stopa u vrlo malom vremensom intervalu oko t, tj. trenutna stopa

5.2 Osnovni primeri modela kreditnog rizika sa reduciranom formom

Modeli kreditnog rizika sa reduciranom formom imaju ključnu pretpostavku vezanu za vezu izmedju vremena neizvršenja (kodirana u filtraciji H) i tržišne filtracije G. U suštini, jedna pretpostavka je da neizvršenje dato u trenutku t nema uticaj na evoluciju filtracije tržišta van t. Pre nego formalizujemo ovaj pojam, pokušaćemo da razvijemo jednu intuitivnu ideju istažujući neke važne primere osnovnih modela sa reduciranom formom.
Zbog pretpostavke da dogadjaj neizvršenja ne utiče na stopu neizvršenja, možemo zamisliti proces H koji se nastavlja nakon neizvršenja prema istoj stopi λ_t. To dovodi do ideje da je $h_t = N_{t\wedge\tau}$ gde je N_t counting proces, koji je neopadajući sa uslovom $N_0 = 0$. Tada je vreme neizvršenja definisano kao

$$\tau = \inf\{t|N_t > 0\}. \tag{5.1}$$

Sada ćemo se fokusirati na proces N_t koji zahteva intezitetom λ_t, tj.

$$\Lambda_t^N = \int_0^t \lambda_s ds$$

i $N_t - \Lambda_t^N$ je martingal.

5.2.1 Puasonov proces

Puasonov proces N_t sa parametrom $\lambda > 0$ je neopadajući proces sa početnim uslovom $N_0 = 0$ sa nezavisnim i stacionarnim koracima koji imaju Puasonovu raspodelu. Konkretnije, za sve $0 \leq s < t$ imamo da je

$$P[N_t - N_s = k] = \frac{(t-s)^k \lambda^k}{k!} e^{-(t-s)\lambda}. \tag{5.2}$$

Jasno je iz ove definicije da je $E[N_t] = \lambda t$ i da je $(N_t - \lambda t)$ martingal. Dakle kompenzator za N_t je

$$\Lambda_t = \lambda t,$$

iz čega sledi da je konstanta λ intenzitet Puasonovo procesa.
Puasonov proces ima veliki broj važnih osobina što ga čini pogodnim i sveprisutnim u modeliranju diskretnih dogadjaja. Ovaj proces je Markovljev, jer pojava njegovog sledećeg k skoka tokom nekog intervala posle trenutka t je nezavisan od istorijskih trenutaka do t. Takodje, vidimo iz (5.2) da verovatnoća jednog skoka tokom malog intervala dužine $\triangle t$ je aproksimativno $\lambda\triangle t$ i verovatnoća za dva ili više skokova tokom istog vremena je nula. Može se lako pokazati da vreme čekanja izmedju dva skoka je eksponencijalna slučajna promenljiva sa parametrom λ. Posebno, ako iskoristimo (5.1) da definišemo neizvršenje kao vreme prvog skoka od N_t, tada je očekivano vreme neizvršenja $1/\lambda$ i verovatnoća preživljavanja posle t godina je

$$P[\tau > t] = E[N_t = 0] = e^{-\lambda t}. \tag{5.3}$$

Iz definicije forvard stope neizvršenja (4.19) dobijamo

$$h(t) = -\frac{\partial log P[\tau > t]}{\partial t} = \lambda \tag{5.4}$$

tako da

$$P[\tau > t | \tau > s] = e^{-\int\limits_s^t h(u)du} = e^{\lambda(t-s)}. \tag{5.5}$$

5.2.2 Nehomogen Puasonov proces

Kao što smo upravo videli, modeliranje neizvršenja kao dolazak prvog skoka Puasonovog procesa dovodi do konstante hazard stope. U praksi, stopa rizika (hazard stopa) je promenljiva u vremenu, dok preživljavanje u različitim vremenskim intervalima dovodi do različitih verovatnoća neizvršenja tokom sledećeg malog vremenskog intervala. U cilju da se dobije realnija ročna struktura verovatnoće preživljavanja, možemo uvesti vremenski promenljiv intenzitet $\lambda(t)$.
Neka N_t označava nehomogen Puasonov proces koji je neopadajući sa početnim uslovom $N_0 = 0$ sa nezavisnim koracima koji zadovoljava

$$P[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!}(\int\limits_s^t \lambda(u)du)^k exp(-\int\limits_s^t \lambda(u)du), \tag{5.6}$$

za neku pozitivnu determinističku funkciju $\lambda(t)$. Obratimo pažnju da je

$$N_t - \int\limits_0^t \lambda(s)ds$$

martingal, tj.

$$\Lambda_t = \int\limits_0^t \lambda(s)ds$$

je kompenzator za N_t i funkcija $\lambda(t)$ je intenzitet nehomogenog Poasonovog procesa.
Osobine Puasonovog procesa važe i za nehomogen slučaj. Na primer, verovatnoća skoka tokom malog intervala $\triangle t$ je aproksimativno data sa $\lambda(t)\triangle t$. Štaviše, vreme čekanja izmedju dva skoka je neprekidna slučajna veličina sa gustinom

$$\lambda(t)e^{-\int\limits_0^t \lambda(s)ds}.$$

Definišanjem neizvršenja kao dolazak prvog skoka dovodi do verovatnoće preživljavanja

$$P[\tau > t | \tau > s] = e^{-\int\limits_s^t \lambda(u)du}. \tag{5.7}$$

Iz ovog izraza dobijamo, za nehomogen Puasonov proces modela sa reduciranom formom, da je

$$h(t) = \lambda(t). \tag{5.8}$$

U gornjem Puasonovom procesu, intenzitet λ je deterministički i dat je modelom sa reduciranom formom sa $F_t = H_t$ i G_t trivijalnom filtracijom. U realnosti, preživljavanje do trenutka t nije jedina relevantna informacija u cilju odredjivanja verovatnoće neizvršenja za sledeći interval $[t, t+\triangle t]$. Drugi parametri, kao što su kreditni rejting i vrednot kapitala jednog obveznika, ili makroekonomske promenljive kao što su recesija i poslovni ciklusi, obezbedjuju dodatni tok informacija koje treba primenitii prilikom nalaženja verovatnoće preživljavanja. Sledeći korak u generalizaciji osnovnih modela je da se omogući stohastički intenzitet λ_t, zadržavajući neka poželjna svojstva Puasonovog procesa.

5.2.3 Cox-ov proces

Pretpostavićemo da su sve informacije vezane za ekonomiju dostupne, osim vremena neizvršenja, koje se izražava kroz tržišnu filtraciju G_t. Na primer, G_t može biti filtracija generisana sa d-dimenzionim procesom X_t. Pretpostavljamo da svi bezrizični ekonomski faktori, uključujući i bezrizičnu kamatnu stopu, su adaptirani u odnosu na G_t. Dalje pretpostavljamo da postoji nenegativan proces λ_t koji je takodje adaptiran u odnosu na G_t tako da igra ulogu stohastičkog intenziteta, poveznog sa različitim komponentama procesa X_t.
Sledeća pretpostavka je da važi da je $H_t := H_t^N$ filtracija generisana sa procesom N_t. Konačno, filtracija za model je dobijena kao

$$F_t = G_t \vee H_t^N. \tag{5.9}$$

Definicija 5.2.1 *Proces N_t je Cox-ov proces ako je, pod uslovom vezanim za informacije G_t dostupnim do trenutka t, N_t nehomogen Puasonov proces sa vremenski zavisnim intezitetom $\lambda(s) = \lambda_s$, za $0 \leq s \leq t$. Tako da je*

$$P[N_t - N_s = k | F_s \vee G_t] = \frac{(\Lambda_t - \Lambda_s)^k}{k!} e^{-(\Lambda_t - \Lambda_s)} \tag{5.10}$$

gde je $\Lambda_t = \int\limits_0^t \lambda_s ds$.
Drugim rečima, svaka realizacija procesa λ do trenutka t odredjuje verovatnoću lokalnog skoka u procesu N do trenutka t.
Ova definicija se nekad naziva dvostruka stohastička pretpostavka. Ona daje veoma pogodan analitički okvir za nalaženje stohastičkih intenziteta i mogla bi da se koristi kao podloga za komplikovanije modele.
Iz definicije, za $s < t$ imamo da je

$$E[N_t - \Lambda_t | F_s] = E[E[N_t - \Lambda_t | F_s \vee G_t] | F_s] = N_s - \Lambda_s$$

i otuda kompenzator Cox-ovog procesa ima oblik

$$\Lambda_t = \int\limits_0^t \lambda_s ds,$$

gde opravdano λ_t nazivamo njegov stohastički intenzitet.
Da dobijemo bezuslovnu verovatnoću skoka kod Cox-ovog procesa uzimamo prosek realizacija ovog stohastičkog intenziteta, koristaći izraz za verovatnoću nehomogenog Puasonovog skoka za svaku realizaciju, tada je

$$P[N_t - N_s = k] = E[\frac{1}{k!}(\int_s^t \lambda_u du)^k exp(-\int_s^t \lambda_u du)]. \tag{5.11}$$

Slično, vreme čekanja izmedju svakog od ovih skokova je neprekidna slučajna veličina sa uslovnom gustinom

$$\frac{d}{dt}E[1_{\tau > t}|F_s] = E[\lambda(t)e^{-\int_s^t \lambda_u du}|G_s].$$

Definišemo neizvršenje kao dolazak prvog skoka što dovodi do sledećeg izraza za verovatnoću preživljavanja

$$P[\tau > t] = E[e^{-\int_0^t \lambda_s ds}]. \tag{5.12}$$

Dakle, iz definicije hazard stope date u (4.19) dobijamo

$$h(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\log E[e^{-\int_0^t \lambda_s ds}]. \tag{5.13}$$

Uslovna verovatnoća preživljavanja uslovljena sa informacijama F_s dostupnim u trenutku $s \leq t$ posle t godina je

$$P[\tau > t|F_s] = H_s^c E[e^{-\int_s^t \lambda_u du}|G_s]. \tag{5.14}$$

Iz definicije (4.22), forvar stopa neizvršena je data sa

$$h_s(t) = -H_s^c \frac{\partial}{\partial t} logE[e^{-\int_s^t \lambda_u du}|G_s]. \tag{5.15}$$

Jednostavna, ali važna posledica (5.10) je sledeće zapažanje

$$E[H_t^c|G_t] = E[H_t^c|f_0 \vee G_t] = e^{-\int_0^s \lambda_u du}. \tag{5.16}$$

To znači da, uslovljena posmatranjem jedino tržišne filtracije G_t u trenutku t, verovatnoća da neće doći još uvek do neispunjenja obaveza od strane firme je $e^{-\int_0^t \lambda_u du}$.
Proizvod osiguranja kredita može se posmatrati kao proizvod koji plaća stohastički iznos u trenutku neizvršenja. Neka je iznos plaćanja u trenutku τ X_τ

gde je X_t proces adaptiran u odnosu na tržišnu filtraciju G. Očekivani iznos isplate za osiguranje tokom perioda $[t, T]$ izračunat u trenutku t je

$$
\begin{aligned}
E[X_\tau(H_t^c - H_T^c)|F_t] &= E[E[X_\tau(H_t^c - H_T^c)|F_t \vee G_T]|F_t] \\
&= E[H_t^c \int_t^T X_s \lambda_s e^{-\int_s^t \lambda_u du} |F_t] \\
&= H_t^c \int_t^T E[X_s \lambda_s e^{-\int_s^t \lambda_u du} ds|G_t]. \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Primetimo da je (5.14) matematički ekvivalentno sa A.21 gde stohastički intenzitet igra ulogu stohastičke trenutne stope. Dakle matematički alati za računanje cene obveznice u teoriji bezrizične kamatne stope opisane u 3.2 može se iskoristiti za računanje istorijske verovatnoće preživljavanja u rizičnim modelima sa reduciranom formom pod dvostrukom stohastičkom pretpostavkom. U praksi, možemo modelirati proces intenziteta λ_t kao jedan od pogodnih procesa koji dovode do afinih ročnih struktura, kao što je Cox-Ingersoll-Ross proces.

5.3 Definicija modela sa reduciranom formom

Pretpostavljamo kao i ranije da je konačna filtracija $F_t = H_t \vee G_t$ gde je H_t prirodna filtracija rizičnog indikatorskog procesa $H_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ (filtracija procesa brojača neizvršenja N_t) i G_t označava tržišnu filtraciju. Nas zanima slučaj kada je τ F vreme zaustavljanja, ali ne G vreme zaustavljanja.
Naredne dve ključne pretpostavke, koje su ekvivalentne jedna drugoj, pokrivaju specifične zavisne strukture Coxovog procesa:

Definicija 5.3.1 *H-uslov znači sledeće: Pod verovatnosnom merom P, su H_t i G_∞ nezavisne pod uslovom G_t. To znači da za svaku H_t-merljivu slučajnu veličinu X i G_∞ merljivu slučajnu veličinu Y važi*

$$
E[XY|G_t] = E[X|G_t]E[Y|G_t]
$$

Definicija 5.3.2 *Martingalski uslov invarijantnosti znači sledeće: svaki G_t martingal je takodje $F_t = H_t \vee G_t$ martingal.*

Pretpostavljajući prethodne uslove dobijamo dovoljnu strukturu da definišemo šta podrazumevamo pod modelima sa reduciranom formom ili Cox-ovim procesom. Uzimajući zajedno prethodne dve definicuje dobijamo: (i) dogadjaj neizvršenja ne može prouzrokovati bilo koji posmatrani efekat na tržišnu filtraciju; (ii) h-uslov zabranjuje tzv. "zarazu", neizvršenje svojih obaveza jedne firme utiče na neizvršenje obaveze druge firme. Dakle modeli sa reduciranom formom isključuju nekoliko efekata koji su često posmatrani kao važni u kreditnom riziku: ovo je jedan od primarnih slabosti.

Definicija 5.3.3 *Modeli neizvršenja sa reduciranom formom su modeli kod kojih je vreme neizvršenja dato sa slučajnom veličinom*

$$\tau = \inf\{t > 0 : N_t > 0\}, \tag{5.18}$$

gde je N_t proces sa intenzitetom λ. Štaviše, pretpostavljamo da je intenzitet λ G-adaptiran, i filtracija $H = \sigma N$, G zadovoljava H-uslov i martingalski uslov invarijantosti.

Tako, τ je vreme prvog skoka procesa N_t, proces neizvršenja je $H_t = N_{t\wedge\tau}$ i kompenzator od H je $\lambda_t^H = \Lambda_{t\wedge\tau}^N$. Dakle, s obzirom na raspodelu za N_t, verovatnoća preživljavanja je data sa

$$P[\tau > T] = E[H_t^c] = P[N_T = 0],$$

gde je $H_t^c := 1 - H_t$ indikatir funkcije preživljavanja.
Predlog koji ćemo navesti u nastavku nam daje osnovne analitičke alate za modele sa reduciranom formom.

Teorema 5.3.1 *Kod modela sa reduciranom formom, za svaku F-merljivu slučajnu veličinu Y, važi*

1.

$$E[H_t^c Y|F_t] = H_t^c \frac{E[H_t^c Y|G_t]}{E[H_t^c|G_t]} \tag{5.19}$$

2.

$$E[H_t^c|G_t] = e^{-\int\limits_0^t \lambda_u du} \tag{5.20}$$

3. Ako je Y G-merljiva, tada je

$$E[H_t^c Y|F_t] = H_s^c E[e^{-\int\limits_0^t \lambda_u du} Y|G_s], \quad s \le t \tag{5.21}$$

4. Za svaki ograničen G_t predvidljiv proces Y_t i $s \le t$, važi

$$E[(H_s^c - H_t^c)Y_\tau|F_s] = H_s^c \int\limits_s^t E[Y_u e^{-\int\limits_s^u \lambda_v dv}|G_s]du \tag{5.22}$$

Napomena 5.3.1 *1. Formula (5.19) podrazumeva da za svaku F_t slučajnu veličinu Y, postoji G_t slučajna veličina $\hat{Y}$ takva da je $H_t^c Y = H_t^c \hat{Y}$.*
2. (5.20) i (5.22) su generalizacija (5.16) i (5.17) iz predhodne sekcije.
3. Uzimajući da je $Y = Y_s = e^{\int\limits_0^s \lambda_u du}$ može se videti iz (5.21) da je $H_t^c e^{-\int\limits_0^t \lambda_u du}$ F-martingal. Ovo je alternativni način za razmišljanje o F kompenzatoru.

Dokaz:
Da se dokaže (5.19), dovoljno je da se dokaže da važi

$$E[H_t^c Y E[H_t^c|G_t]|F_t] = H_t^c E[H_t^c Y|G_t]$$

Za svaku F slučajnu veličinu X, $E[X|F_t]$ je jedinstvena F_t slučajna veličina takva da je $\int_A E[X|F_t]dP = \int_A XdP$ za svako $A \in F_t$. Neka je $C = \{\tau > t\}$ i uzmimo u obzir da za svaki sku $A \in F_t$ možemo naći $B \in G_t$ takvo da je $A \cap C = B \cap C$ (ovo je tačno jer za svaki skup $D \in H_t$ važi ili $D \supset C$ ili $D \cap C = \oslash$). Tada je

$$\begin{aligned}
\int_A H_t^c Y E[H_t^c|G_t]dP &= \int_{A\cap C} Y E[H_t^c|G_t]dP = \int_{B\cap C} Y E[H_t^c|G_t]dP \\
&= \int_B H_t^c Y E[H_t^c|G_t]dP = \int_B E[H_t^c Y E[H_t^c|G_t]|G_t]dP \\
&= \int_B E[H_t^c Y|G_t]E[H_t^c|G_t]dP = \int_B E[H_t^c E[H_t^c Y|G_t]|G_t]dP \\
&= \int_B H_t^c E[H_t^c Y|G_t]dP = \int_{B\cap C} E[H_t^c Y|G_t]dP \\
&= \int_{A\cap C} E[H_t^c Y|G_t]dP = \int_A H_t^c E[H_t^c Y|G_t]dP \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

sa čim je dokazano (5.19).
Da dokažemo (5.20), definišemo $\tilde{\Lambda}_t$ kao $E[H_t^c|G_t] = e^{-\tilde{\Lambda}_t}$ i pokazujemo da $\int_0^t H_s^c d\tilde{\Lambda}_s$ mora biti F-kompenzator za H_t^c. Prvo uzimamo u obzir da je $\tilde{\Lambda}$ neopadajuća: koristeći h-uslov možemo pokazati da za $s < t$, $e^{-\tilde{\Lambda}_s} - e^{-\tilde{\Lambda}_t} = E[(H_s^c - H_t^c)|G_t] \geq 0$. Na osnovu (5.19) i činjenice da je $H_s^c H_t^c = H_t^c$ za $s \leq t$, imamo da je

$$E[H_t^c e^{\bar{\Lambda}_t}|F_s] = H_s^c e^{\bar{\Lambda}_s} E[H_s^c H_t^c e^{\bar{\Lambda}_t}|G_s] = H_s^c e^{\bar{\Lambda}_s} E[E[H_t^c e^{\bar{\Lambda}_t}|G_t]|G_s] = H_s^c e^{\bar{\Lambda}_s},$$

drugim rečima, $H_t^c e^{\bar{\Lambda}_t}$ je F_t-martingal. Ovo implicira da je $H_t^c + \int_0^t H_s^c d\tilde{\Lambda}_t$ je F_t-martingal: ovo zaključujemo koristeći stohastički integral

$$H_t^c - H_t^0 + \int_0^t H_s^c d\tilde{\Lambda}_t = \int_0^t [d[H_s^c] + H_s^c e^{-\bar{\Lambda}_s} d[e^{\bar{\Lambda}_s}]] = \int_0^s e^{-\bar{\Lambda}_s} d[H_s^c e^{\bar{\Lambda}_s}].$$

na osnovu jedinstvenosti F-kompenzatora i činjenice da su $\tilde{\Lambda}, \Lambda$ G-adaptirani, imamo da je $\tilde{\Lambda} = \Lambda$.
Da bi pokazali jednačinu (5.21) uzimamo u obzir cinjenicu da je $H_s^c H_t^c = H_t^c$ za $s \leq t$ i koristimo (5.19) i (5.20) da zapišemo:

$$E[H_t^c Y|F_s] = E[H_s^c(H_t^c Y)|F_s] = H_s^c e^{\bar{\Lambda}_s} E[E[H_t^c Y|G_t]|G_s]$$

pomoću H-uslova $E[H_t^c Y|G_t] = E[H_t^c|G_t]E[Y|G_t] = E[e^{-\Lambda_t} Y|G_t]$, i rezultat sada sledi.

Dokazujemo (5.22) za jednostavan predvidljiv proces $Y_t = \sum_{i=1}^{N} Y_{t_{i-1}} 1_{\{t_{i-1}<t\leq t_i\}}$ gde je Y_{t_i} G_{t_i}-merljivo i $s_0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots t_N = t$:

$$E[(H_s^c - H_t^c)Y_\tau|F_s] = E[\sum_i Y_{t_{i-1}} 1_{t_{i-1}<t\leq t_i}|F_s]$$
$$= H_s^c e^{\Lambda_s} \sum_i E[(e^{-\Lambda_{t_{i-1}}} - e^{-\Lambda_{t_i}})Y_{t_{i-1}} G_s]$$
$$= H_s^c e^{\Lambda_s} \sum_i E[(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\Lambda_u} \Lambda_u du)Y_{t_{i-1}}|G_s]$$
$$= H_s^c \int_s^t E[Y_u e^{-\int_s^u \lambda_v dv} \Lambda_u|G_s]du \qquad (5.24)$$

5.4 Konstrukcija modela sa reduciranom formom

Sada ćemo navestii dva prirodna puta za konstrukciju modela sa reduciranom formom, počinjemo sa G_t adaptiranim neopadajućim procesom $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$.

5.4.1 Konstrukcija A

Neka je $Z_1, Z_2, \ldots,$ niz eksponencijalnih slučajnih veličina sa očekivanjem 1 koje zavise od G i definišemo rekurzivno

$$\tau_1 = \inf\{t|\Lambda_t \geq Z_1\},$$
$$\tau_n = \inf\{t|\Lambda_t - \Lambda_{\tau_{n-1}} \geq Z_n\}, \qquad n = 2, 3, \ldots \qquad (5.25)$$

Tada definišemo $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{\tau_k \leq k\}}$.

5.4.2 Konstrukcija B

Neka je $N_t^{(1)}$ Puasonov proces sa $\lambda = 1$ koji je nezavisan od G. Tada proces $N_t := N_{\Lambda_t}^{(1)}$ definiše model sa reduciranom formom sa $H_t := \sigma(N_s, s \leq \Lambda_t)$ i $F_t = H_t \vee G_t$. Da vi se ovo dokazalo, treba uzeti u obzir da je

$$P[N_t - N_s = k|H_s \vee G_\infty] = P[N_{\Lambda_t}^{(1)} - N_{\Lambda_s}^{(1)} = k|G_{\Lambda_s}^{N^{(1)}} \vee G_\infty]$$
$$= \frac{(\Lambda_t - \Lambda_s)^k}{k!} e^{-(\Lambda_t - \Lambda_s)}. \qquad (5.26)$$

5.4.3 Simulacija vremena neizvršena

Ako je F neopadajuća funkcija $F : R \to [0,1]$ takva da važi

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad i \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

možemo konstruisati slučajnu veličinu X koja ima F kao funkciju raspodele, $X = F^{-1}(U)$, za uniformnu slučajnu veličinu $U : \Omega \to [0,1]$. Ovo imamo na osnovu $P[X \leq x] = P[F^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F(x)] = F(x)$. Dakle, ako je model neizvršenja takav da verovatnoća preživljavanja $P[\tau > t]$ može lako da se invertuje, možemo dobiti tačnu raspodelu za vreme neizvršenja similacijom uniformne slučajne veličine U i postavljanja τ kao rešenje

$$P[\tau > t] = U.$$

Za Cox-ov proces, alternativni metod za simulaciju vremena neizvršenja bez potrebe da se invertuje ročna struktura za verovatnoću preživljavanja je simulacija kompenzatora, koji se zasniva na numeričkoj simulaciji procesa kompenzatora

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds.$$

Metod se sastoji od simuliranja eksponencijalne slučajne veličine Z sa očekivanjem 1, nezavisnom od procesa intenziteta λ_t, i uzimanja vremena neizvršenja kao

$$\tau = inf\{t > 0 : \Lambda_t \geq Z\}.$$

Tada, koristeći činjenicu da je $P[Z > z] = e^{-z}$, imamo da je

$$P[\tau > t | G_t] = P[Z > \int_0^t \lambda_s ds | G_t] = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

5.5 Afini modeli intenziteta

Analogno sa teorijom kamatne stope, možemo proces inteziteta λ napisati u sledećem obliku

$$\lambda_t = a + bX_t$$

gde su a i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ pozitivne konstante i $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^n)$ je multidimenzioni Markovljev proces. Model je afini ako za $s < t$ verovatnoća preživljavanja može biti zapisana u obliku

$$P[\tau > t | F_s] = H_s^c \exp[A(s,t) + B(s,t)X_s] \tag{5.27}$$

za neke koeficijent funkcije $A(s,t) \quad i \quad B(s,t) \in R^n$. U sekciji 3.2.2 videli smo primer jednog afinog modela gde je osnovni faktor kamatna stopa r_t i odredjena je kao Itov proces.

5.5.1 Cox-Ingersoll-Ross intenzitet

Kao prvi primer afinog modela, razmotrićemo jednofaktorski model gde intenzitet prati CIR dinamiku

$$d\lambda_t = k(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t, \tag{5.28}$$

za pozitivne konstante k, θ i σ koje zadovoljavaju uslov $4k\theta > \sigma^2$. Kao obično, parametri k i θ predsavljaju dugoročne srednje vrednosti i stopu koja se stabilizuje oko srednje vrednosti za λ_t, dok je σ koeficijent volatilnosti.
Koristeći deo koji smo već naveli za modele kamatnih stopa, imamo da je verovatnoća preživljavanja u CIR modelu data u sledećem obliku

$$P[\tau > t|F_s] = H_s^c \exp[A(s,t) + B(s,t)\lambda_s]$$

gde su

$$A(s,t) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} log[\frac{2y\exp[(k+y)(t-s)/2]}{2y + (k+y)(\exp[(t-s)y] - 1)}] \tag{5.29}$$

$$B(s,t) = \frac{2(1 - \exp[(t-s)y])}{2y + (k+y)(\exp[(t-s)y] - 1)} \tag{5.30}$$

i $y^2 = k^2 + 2\sigma^2$.
Zanimljivo je napomenuti da iz ove formule verovatnoća preživljavanja raste ako raste parametar volatilnosti, dok su ostali parametri fiksirani. Drugim rečima, forvard stopa neizvršenja opada kada volatilnost u procesu raste.
Efekat volatilnosti u verovatnoći preživljavanja i forvard stope se kompenzuje. Velike vrednosti k znače da λ_t ostaje blisko dugoročnoj sredini θ. Ovo je efekat dovodjenja forvard stope blizu dugoročnog nivoa. Sa druge strane, male vrednosti za k naglašavaju uticaj volatilnosti u λ_t, dovodeći do veće verovatnoće preživljavanja i manje forvard stope.

5.6 Rizik-neutralne i fizičke mere

U ovom poglavlju pažnju ćemo posvetiti modelima sa reduciranom formom pod rizik-neutralnom merom Q. S obzirom na model sa reduciranom formom pod merom P, ne sledi nužno da će model biti sa reduciranom formom pod rizik-neutralnom merom Q: dvostruka stohastička pretpostavka neophodno je da bude posebno navedena za P i Q. Štaviše, intenziteti λ_t^P i λ_t^Q mogu zavisiti različito od promenljivih modela, i mogu takodje imati različite verovatnoće za svaki deo. Čak i u situaciji gde važi $\lambda_t^P = \lambda_t^Q$ još uvek imamo da

$$P[\tau > T|F_t] = H_t^c E[e^{-\int_t^T \lambda_s ds}|G_t]$$

je različito od

$$Q[\tau > T|F_t] = H_t^c E^Q[e^{-\int_t^T \lambda_s^Q ds}|G_t].$$

Forma teoreme Girsanova je primenljiva na modele sa reduciranom formom potvrdjujući postojanje promene mere $\frac{dQ}{dP}|_{F_T}$ za svaki adaptiran proces Θ_t, η_t (zadovoljavajući odgovarajuće uslove) tako da ako

$$W_t^Q = W_t + \int_0^t \Theta_s ds, \quad \lambda_t^Q = \eta_t \lambda_t,$$

tada N_t, proces sa intenzitetom λ pod P, ima intenzitet λ_t^Q pod Q i W_t^Q je Q-Braunovo kretanje.
I dalje difinišemo dogadjaj neizvršenja kao prvi skok procesa N_t, ali suština je da je slučajno vreme neizvršenja

$$\tau = \inf\{t > 0 : N_t > 0\}$$

ima drugačiju raspodelu pod Q. Prema tome, pretpostavljamo da je proces N_t takav da je

$$N_t - \int_0^t \lambda_s^Q ds$$

Q-martingal.
Kao i prethodne definicije i primeri, koji uključuju dvostruku stohastičku pretpostavku, imamo rizik-neutralni analog bezrizičnog intenziteta λ_t^Q. Posebno,

$$Q[\tau > t|F_s] = H_s^c E^Q[e^{-\int_0^t \lambda_u^Q du}|G_s],$$

tako da formula verovatnoće preživljavanja koji smo upavo izveli iz intenziteta afinih modela primenjuje se za bezrizičnu verovatnoću takodje. Premija kreditnog rizika, definiše se kao količnik $\eta_t := \lambda_t^Q / \lambda_t^P$.

6 Dodatak
Matematički alati

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je sledeća literatura: [1], [4] i [8].

U ovom delu rada navešćemo delove teorije koji čine osnovu za modeliranje, o kome smo govorili u prethodnom delu ovoga rada. Treba napomenuti da je veoma važno biti upoznat sa teorijom koja sledi.

6.1 Martingali

Pretpostavljamo da je dat prostor verovatnoće $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$. Pretpostavljamo da filtracijaF_t da zadovoljava tzv. ***uobičajene uslove***. Mnoga važna tvrdjenja moguće je dokazati samo ako se ti uslovi pretpostave.

Definicija 6.1.1 *Kažemo da filtracija $\{F_t\}_{t\geq 0}$ zadovoljava uobičajene uslove ako važi*
i) F_0 sadrži sve podskupove svih skupova P-mere nula σ-algebre F.
ii) $F_{t^+} := \bigcap_{s>t} F_s = F_t, \forall t \geq 0$.

Ako pretpostavimo da je prostor verovatnoća (Ω, F, P) kompletan, prvi uslov možemo zameniti uslovom : "F_0 sadrži sve skupove P-mere nula".Na ovaj način dobijamo veću filtraciju, nego pri kompletiranju svakog od prostora (Ω, F_t, P) ponaosob, jer mogu postojati skupovi mere nula koji su u F a koji se ne nalaze ni u jednom F_t.

Definicija 6.1.2 *Slučajni proces $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo martingalom u odnosu na filtraciju $\{F_t\}_{t\geq 0}$ ako je adaptiran u odnosu na $\{F_t\}_{t\geq 0}$, ako je, za svako t, $E|M_t| < \infty$ i ako je za sve $0 \leq s < t$*

$$E(M_t|F_s) = M_s, \ \ skoro \ \ sigurno.$$

Ako u poslednjem uslovu umesto "=" važi " $\leq$ " onda proces $\{M_t\}_{t\geq 0}$ zovemo supermartingalom. Ako, pak, važi " $\geq$ ", onda je takav proces submartingal.

Martingali su naziv dobili po popularnoj kockarskoj strategiji XIX veka koja bi, navodno, obezbedjivala siguran dobitak igračima koji su je primenjivali. Igra se sastojala u sledećem. Kockar bi ulagao odredjenu svotu i bacao novčić. Ako bi dobio "glavu" osvajao bi dva puta više novca nego što je uložio, a ukoliko bi palo "pismo", ulog bi odlazio kazinu. Martingal se sastojao u dupliranju uloga posle svake izgubljene partije. Na taj način, kada konačno padne "glava", igrač bi raspolagao sa dovoljno novca da "pokrije" sve dotadašnje opklade i pride još zaradi. Matematičari su čak uspeli da dokažu da verovanoća dobitka teži jedinici, kada broj partija teži beskonačnosti. Problem je, naravno, što su u dokazu korišćene dve potpuno nerealne pretpostavke - igrač na raspolaganju ima beskonačno vremena i nema gornjeg ograničenja uloga sa kojim se može ući u igru. Čak i kada bi ambiciozni kockar uspeo da reši prvi problem, kazino je bio tu da se postara da drugi ostane nerešiv.

Definicija 6.1.3 *Neka je dat prostor verovatnoće* $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$. *Slučajnu promenljivu* $V : \Omega \to [0, \infty)$ *se naziva slučajnim vremenom, a ako pri tom važi*

$$\forall t \geq 0, \quad V \leq t \in F_t,$$

V nazivamo **vremenom zaustavljanja** *u odnosu na filtraciju* $F_{t\geq 0}$.

Definicija 6.1.4 *Slučajni proces* $\{L_t\}_{t\geq 0}$ *adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{F_t\}_{t\geq 0}$ *zovemo lokalnim martingalom ako postoji skoro sigurno rastući i divergentan niz vremena zaustavljanja* $\{V_n\}_{n\geq 1}$ *takav da je zaustavljeni proces* L^{V_n} *martingal u odnosu na filtraciju* $\{L_t\}_{t\geq 0}$, *za svako* $n \geq 1$. *Niz vremena zaustavljanja* $\{V_n\}_{n\geq 1}$ *zovemo lokalizujuim nizom lokalnog martingala* L.

Definicija 6.1.5 *Neka je dat prostor verovatnoća* $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geq 0}, P)$. *Proces* X *je* m*-dimenzioni semimartingal ako je adaptiran, neprekida sa desna i ima graničnu vrednost s leva i ima dekompoziciju*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

gde je A *proces konačne varijacije na svakom konačnom intervalu, a* $M = M\{M_t, t \in I\}$ *uniformno integrabilan lokalni martingal.*

6.2 Itova difuzija

Jednodimenziona Itova difuzija je stohastički proces $X_t, t \geq 0$ koji zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \qquad (A.1)$$

gde su a, b deterministčke funkcije.
U nastavku je navedena teorema o egzistenciji i jedinstvenosti Itove stohastičke diferencijalne jednačine koja uzima vrednosti u n-dimenzionom Euklidskom prostoru R^n i vodjena je m-diminzionim Braunovim kretanjem W.

Teorema 6.2.1 *Neka je $T > 0$, i neka su*

$$a : R^n \times [0, T] \to R^n \qquad (A.2)$$

$$b : R^n \times [0, T] \to R^{n \times m} \qquad (A.3)$$

merljive funkcije za koje postoje konstanete C i D takve da važi

$$|a(x,t)| + |b(x,t)| \le C(1 + |x|) \qquad (A.4)$$

$$|a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \le D|x - y| \qquad (A.5)$$

za sve $t \in [0, T]$ i sve x i $y \in R^n$, gde je

$$|b|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 \qquad (A.6).$$

Neka je Z slučajna veličina koja je nezavisna od σ algebre generisane sa $W_s, s \ge 0$ i sa konačnim momentom drugog reda:

$$E[|W|^2] < +\infty. \qquad (A.7)$$

Tada stohastička diferencijalna jednačina sa datim početnim uslovom

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t \quad za \quad t \in [0, T]; \qquad (A.8)$$

$$X_0 = Z; \qquad (A.9)$$

ima skoro sigurno rešenje $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ tako da je X adaptirano u odnosu na filtraciju Z i $W_s, s \le t$, i

$$E[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty. \qquad (A.10)$$

6.3 Markovljevo svojstvo i generator

Vremenski homogena Itova difuzija X_t koja zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$$

ima Markovljevo svojstvo ako se budući razvoj procesa može predvideti samo pomoću trenutnog stanja, bez pozivanja na prošlost.

Teorema 6.3.1 *Neka je f ograničena Borelova funkcija iz R^n, τ vreme zaustavljanja F_t tako da je $\tau < \infty$ skoro sigurno. Tada za svako $h \ge 0$ važi*

$$E_x[f(X_{\tau+h})|F_\tau] = E_{X_\tau}[f(X_h)].$$

Definicija 6.3.1 *Markovljev generator procesa X_t je definisan kao*

$$\Im f(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}$$

za funkciju $f : R^n \to R$ tako da granica postoji u x. Za C_0^2 funkcija f je data sa

$$\Im f(x) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (bb')_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

6.4 Itova formula

Prvo ćemo navesti Itovu formulu u njenom najjednostavnijem obliku. Neka je dat Itov proces

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

i dva puta diferencijabilna realna funkcija f. Tada je funkcija $f(X)$ takodje Itov proces koji zadovoljava jednačinu

$$df(X_t) = f^{'}(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f^{''}(X_t) \sigma_t^2 dt$$

$$= f^{'}(X_t) \sigma_t dW_t + (f^{'}(X_t) \mu_t + \frac{1}{2} f^{''}(X_t) \sigma_t^2) dt.$$

Itova formula za bilo koju funkciju $f(t, x)$ sa neprekidnim parcijalnim izvodom prvog reda i ograničenim parcijalnim izvodom drugog reda

$$\overline{f}(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}, \quad f^{'}(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad f^{''}(t, x) = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$$

je data sledećim izrazom:

$$df(t, X_t) = \overline{f}(t, X_t) dt + f^{'}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f^{''}(t, X_t) \sigma_t^2 dt$$

$$= \overline{f}(t, X_t) dt + f^{'}(t, X_t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2} f^{''}(t, X_t) \sigma_t^2 dt$$

$$= (\overline{f}(t, X_t) + \mu_t f^{'}(t, X_t) + \frac{\sigma_t^2}{2} f^{''}(t, X_t)) dt + f^{'}(t, X_t) \sigma_t dW_t.$$

U opštem slučaju, Itova formula može biti primenjena na bilo koje neprekidne d-dimenzione semimartingale $X = (X^1, X^2, \ldots, X^d)$ i neprekidnu dva puta diferencijabilnu, realnu funkciju f iz R^d. Tada je $f(X)$ Itov proces koji zadovoljava

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^{d} f_{,i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} f_{,ij}(X_t) d[X^i, X^j]_t.$$

U ovom izrazu, termin $f_{,i}$ predstavlja parcijalni izvod od $f(x)$ po x^i i $[X^i, X^j]$ je kvadratni kovarijacioni proces od X^i i X^j.

6.5 Feynman-Kac-ova formula

Za bilo koju integrabilnu funkciju $F(x), \phi(t,x)$ i bilo koje vreme $T > 0$, Markovljev proces podrazumeva postojanje funkcije $f(t,x), t \in [0,T], x \in R$ tako da

$$f(t, X_t) = E[F(X_T)e^{\int_t^T \phi(s,X_s)ds})|F_t]. \qquad (A.11)$$

Feynman-Kac formula navodi da je f rešenje parabolične diferencijalne jednačine

$$\partial_t f(t,x)\Im[f](t,x) + \phi(t,x)f(t,x) = 0 \ \ t < T$$

$$f(T,x) = F(x). \qquad (A.12)$$

Važnost ove formule se vidi u nastavku: pošto proces $e^{\int_0^t \phi(s,X_s)ds} f(t,X_t)$ mora biti martingal, uslov bez drifta i Itova formula dovode do parcijalne diferencijalne jednačine.

6.6 Jednačina Kolmogorova

Za bilo koje vreme $0 \leq t \leq T$, funkcija gustine uslovne verovatnoće $X_t|_{F_s}$,

$$p(t,x;T,y) := \partial_y P[X_T \leq y | X_t = x] \qquad (A.13)$$

zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\partial_t p(t,x;s,y) + \Im[p](t,x;s,y) = 0 \ \ t < s$$

$$p(t,x;s,y) = \delta(x-y) \qquad (A.14)$$

Ovaj rezultat nam na jednostavan način daje rešenje Feynman-Kac jednačine sa $\phi = 0$. Bilo koja funkcija F

$$f(t,x) := E[F(X_T)|X_t = x] = \int_R F(y)p(t,x;T,y)dy \qquad (A.15)$$

je rešenje Feyman-Kac-ove K diferencijalne jednačine, gde zatim sledi A.14.

6.7 Ornstein-Uhlenbeck-ov proces

Jednodimenzioni Ornstein-Uhlenbeck proces je specijalni oblik Itovog procesa:

$$dX_t = (a - bX_t)dt + cdW_t, \qquad a, b, c \ \ konstante. \qquad (A.16)$$

Ova stohastička diferencijalna jednačina može biti rešena eksplicitno na sledeći način. Prvo uzimamo da je

$$d(e^{bt}(X_t - a/b)) = ce^{bt}dW_t$$

integrabilno na $[S, T]$ i dobijamo da je

$$e^{bT}(X_T - a/b) = e^{bS}(X_S - a/b) + c\int\limits_S^T e^{bt}dW_t$$

ili ekvivalentno

$$X_T = e^{-b(T-S)}X_S + (1 + e^{-b(T-S)})a/b + c\int\limits_S^T e^{-b(T-t)}dW_t.$$

Tako martingali imaju normalnu raspodelu sa

$$E[X_t|F_s] = e^{-b(t-s)}X_s + (1 - e^{-b(t-s)})a/b \qquad (A.17)$$

$$Var[X_t|F_s] = E[(c\int\limits_s^t e^{-b(t-u)}dW_u)^2|F_s] = c^2\int\limits_s^t e^{-2b(t-u)}du$$

$$= \frac{c^2}{2b}(1 - e^{-2b(t-s)}) \qquad (A.18)$$

gde u poslednjoj liniji koristimo Itovu izometriju. Gore navedeno lako proširujemo do multidimenzionog Ornstein-Uhlenbeck-ovog procesa

$$dX_t = (A + BX_t)dt + CdW_t$$

gde su X, A, B, C, W matrice veličine $(d, 1), (d, 1), (d, d), (d, d), (d, 1)$ respektivno.

6.8 Teorema Girsanova

Teorema 6.8.1 *Neka je ϕ_t proces adaptiran u odnosu na prirodnu filtraciju Vinerovog procesa $\{F_t^W\}$ koji zadovoljava Novikov-e uslove: Za svako $t > 0$*

$$E[e^{\frac{1}{2}\int\limits_0^t \phi_s^2 ds}] < \infty.$$

Tada

$$Z_t = \exp[\int\limits_0^t \phi_s dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \phi_s^2 ds,]$$

je martingal koji zadovoljava $E[Z_t] = 1$. Verovatnoća mera Q ekvivalentna sa P može biti definisana ka Radon-Nikodym izvod

$$\frac{dQ}{dP}|_{F_t} = Z_t$$

i proces

$$W_t^Q = W_t - \int\limits_0^t \phi_s ds$$

je Braunovo kretanje u prostoru verovatnoća (Ω, F, F_t^W, Q).

6.9 Teorija arbitraže

Uzimamo u obzir konačno vreme T i pretpostavljamo da se ekonomija sastoji od $d+1$ bez plaćanja dividendi hartija od vrednosti kojima se trguje čija je cena modelirana pomoću $d+1$-dimenzionog adaptiranog semimartingala $S_t = (S_t^0 = C_t, S_t^1, \ldots, S_t^d)$. Prihvatljiva strategija trgovanja je predvidljiv S-integrabilni proces $H_t = (\eta_t, H_t^1, \ldots, H_t^d)$. Bogatstvo povezano sa strategijom trgovanja H je dato sa $X_t^H = H_t^{'} S_t$ i strategija se naziva samofinansirajuća ako proces bogatstva zadovoljava

$$dX_t^H = H_t^{'} dS_t. \qquad (A.19)$$

Kao i uvek, pretpostavljamo odsustvo arbitraže, gde mogućnost arbitraže je samofinansirajuća strategija trgovanja takva da je $X_0^H = 0, X_T^H \geq 0$ skoro sigurno i $P(X_T^H > 0) > 0$. Pod odgovarajućim uslovima procesa cene S_t i prihvatljivom strategijom trgovanja, **Prva fundamentalna teorema o arbitraži** nam govori da je tržiste slobodno od arbitraže ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalska mera Q, takva de je, merljiva, ekvivalentna sa P, i da je diskontovana cena aktive S_t^k / C_t martingal.
Finansijski derivati sa vremenom dospeća T su F_T-merljive slučajne veličine koje ćemo u nastvku obeležavati sa B. Oni su replikabilni ako postoji samofinansirajuća strategija trgovanja H_t takva da je

$X_T^H = B$ (skoro sigurno) u kom slučaju zakon cene diktira da cena derivata u trenutku $t \leq T$ mora biti $\pi_t^B = X_t^H$.
Druga fundamentalna teorema o arbitraži nam govori da za kompletno tržište ekvivalnetna mera Q_0 je jedinstvena. Jer diskontovano bogatstvo prihvatljivog samofinansirajućeg portfolija su uvek Q_0 martingali, sledi da su diskontovane cene finansijskih derivata na kompletnom tržištu martingali u odnosu na Q_0. Na nekompletnom tržištu, postoji više od jedne ekvivalentne martingalse mere Q. Na osnovu istih argumenata kao gore, replikativni finansijski derivati na ovom tržištu će biti diskontovane cene (date sa $\frac{\pi_t^B}{C_t} = \frac{X_t^H}{C_t}$), koje su martingali pod jednom od ekvivalentnih martingalskih mera Q.
Po definiciji, ne-replikativni finansijski derivati imaju efektivan udar na ekonomiju, njihovo prisustvo ne može biti replikovano aktivom sa kojom se već trguje. Tako da, sa ne-replikativnmi derivatom se može trgovati ako se posmatraju kao nova aktiva i arbitraža može nastati ako njegova cena nije u skladu sa predhodno postojećim sredstvima.
U nastavku iz Prve fundamentalne teoreme o arbitraži do arbitraže neće doći ako i samo ako, za svako $0 \leq t \leq T$, važi da je

$$\pi_t^B = E_t^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} B], \tag{A.20}$$

za neku ekvivalentnu martingalsku meru Q. Konkretno, cene bezkuponske obveznice može se zapiati u sledećem obliku

$$P_t(T) = E_t^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} B]. \tag{A.21}$$

6.10 Braunovo kretanje

Braunovo kretanje predstavlja jedan od najvažnijih slučajnih procesa. Kao matematički alat za rešavanje praktičnih problema, našao je primenu u gotovo svim prirodnim, a uz to i u nekoliko društvenih nauka. Teorija stohastičke integracije, jedno od najvažnijih otkrića savremene teorije verovatnoće, u najvećoj meri motivisana je upravo osobinama trajektorija ovog procesa. Iako neprekidne, nediferencijabilne su u svakoj svojoj tački, imaju neograničenu varijaciju na svakom konačnom segmentu i vrlo izražene fraktalne osobine. Ipak, ispostavlja se da je Braunovo kretanje, iako na prvi pogled čudan matematički objekat, od velike koristi, kako teoretičarima, tako i onima sa pragmatičnijim pogledom na svet.
Braunovo kretanje predstavlja podesan model za čitavu familiju raznorodnih pojava. Može se jednako dobro koristiti za opisivanje kretanja krupnih čestica, uronjenih u vodeni rastvor, kao i za modeliranje kretanja cena akcija i finansijskih derivata na berzi.

Definicija 6.10.1 *Slučajni proces sa neprekidnim vremenom* $\{Xt\}_{t\in[0,T)}$ *naziva se standardno Braunovo kretanje na intervalu [0, T) ako poseduje sledeća četiri svojstva.*

(i) $X_0 = 0$*, skoro sigurno.*

(ii) (Nezavisnost priraštaja) $\forall n$ *i svaki izbor* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ *slučajne veličine* $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *su nezavisne.*

(iii) Za svako $0 \leq s < t < T$ *prirataj* $X_t - X_s$ *ima Gausovu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom* $t - s$*.*

(iv) (Skoro sigurna neprekidnost) $P\{\omega : X_\omega(t) \in C[0,T)\} = 1$ *.*

Videli smo da su mnogi modeli kreditnog rizika rešivi u smislu vremena dostizanja nivoa Braunovog kretanja. Ovde predstavljamo ključnu ideju. Neka

$$\overline{M}_t^\mu = \max_{s\leq t} X_t, \qquad \underline{M}_t^\mu = \min_{s\leq t} X_s \qquad (A.22)$$

označavaju maksimum i minimum procesa Braunovog kretanja $X_t = W_t + \mu t$ sa konstantnim drifrom. Verovatnoća za $(\overline{M}_t^\mu, X_t)$ i $(\underline{M}_t^\mu, X_t)$ se može izraziti pomoću sledeće funkcije

$$FP(a,b;\mu,t) := N[\frac{a-\mu t}{\sqrt{t}}] - e^{2\mu b} N[\frac{a-2b-\mu t}{\sqrt{t}}], -\infty < a \leq b < \infty, t \geq 0.$$

7 Zaključak

U ovom master radu dat je kratak uvod u teoriju finansijskih rizika, sa akcentom na kreditni rizik kome smo posvetili najveći deo ovog rada. Cilj rada je da ukaže na značaj koji matematike ima na finansijskom tržištu, a kroz ovaj rada to smo dokazali koristeći matematičke alate predstavljajući razne modele kreditnog rizika. Sumirajući dobijene rezultate u ovom radu vidimo da matematika ima veliku primenu prilikom modeliranja kreditnog rizika. Videli smo da veliku ulogu ima Braunovo kretanje, jednačine Itoa i stohastička analiza.

Kreditni rizik je najznačajniji rizik kome je banka izložena u svom poslovanju, a upravljanje kreditnim rizikom u banci je osnova za uspešno poslovanje. Kao što smo već naveli na početku ovog rada, kreditni rizik je rizik da dužnik neće ispuniti sve obaveze date ugovorom, odnosno rizik da će doći do neizvršenja obaveza. Toliko puta upotrebljenu reč u ovom radu, ***neizvršenje***, smo posmatrali kao slučajnu veličinu ili vreme zaustavljanja. Naveli smo osnovne finansijske instrumente sa kojima se trguje na tržištu, a medju njima najznačajnije obveznice koje predstavljaju finansijske instrumente iz kojih se mogu izvesti drugi, komplikovaniji, finansijski derivati. Kasnije smo naveli veoma značajne kamatne stope kao i modele kamatnih stopa, tačnije upoznali smo se sa teorijom koja se odnosi na modeliranje cena finansijskih derivata pomoću kamatnih stopa. Takodje smo deo rada posvetili verovatnoći neizvršenja, uslovnoj i bezuslovnoj.
Konačno dolazimo do modela kreditnog rizika. U ovom radu fokusirali smo se na dve vrste modela kreditnog rizike, strukturne modele i modele sa reduciranom formom, navodeći njihove prednosti i mane, kao i njihove osnovne primere. Vidimo da kod modela kreditnog rizika veoma važnu ulogu ima Braunovo kretanje i teorija martingala. Mnogi modeli trenutak neizvršenja povezuju sa vremenom dostizanja nivoa kod Braunovog kretanja.

Kao zaključak ovog rada još jednom ističemo značaj matematike na tržištu finansija, a u ovom radu je naveden samo mali deo kroz modele kreditnog rizika, kao i značaj kreditnog rizika. Značaj upravljanja i modeliranja kreditnim rizikom proističe iz potencijalne opasnosti da veliki broj, npr. korisnika kredita neće biti u mogućnosti da ispuni svoje obaveze i na taj način banke ulaze u zonu tehničke insolventnosti. Zato u cilju minimiziranja kreditnog rizika kreditni sektor mora da prati dejstvo svih faktora koji utiču na kvalitet kreditnog portfelja banke i da na vreme reaguju na ona kretanja koja mogu dovesti do bankrota.

8 Literatura

[1] M.R.Grasseli, T.R.Hurd, 2010. Credit Risk Modeling, McMaster University Hamilton.

[2] Tomasz R.Bielecki, Marek Rutkowiski, 2001. Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging.

[3] T.Bielecki, M.Jeanblanc and M.Rutkowski,2006. Credit Risk.

[4] J. Michael Steele, 2000. Stochastic Calculus and Financia, Springer.

[5] Slobodanka Janković, 2014. Elementi finansijske matematike, Beograd.

[6] Dora Seleši, 2002. Modeli finansijske matematike, Institut za matematiku i informatiku, Novi Sad.

[7] Vesna Prorok, 2013. Modeling the Term Structure of Interest Rate Based on the One-Factor Vasicek Model, Proceedings of the Faculty of Economics in East Sarajevo.

[8] Stojan Jovanović, 2011. Teorija stohastičke integracije, Beograd.