Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Pojam polinoma u osnovnoj školi,
problemi i sugestije

– Master rad –

Student: Ana Rili

Mentor: dr Aleksandar Lipkovski

Beograd, 2015.

Sadržaj

Predgovor

Pojam polinoma i operacije sa njima predstavlja najvažniji algebarski sadržaj u osnovnoj školi. Iskustvo nam govori da je poslednjih godina razumevanje pojma polinoma, a posebno znanje osnovnih operacija sa njima i važnih polinomijalnih identiteta sve slabije. Cilj ovog rada je da se izdvoje glavni metodički problemi u obradi ove teme u osnovnoj školi, kao i da se predlože metodička rešenja nastavnicima kako da učenici lakše savladaju pojam polinoma i pripreme se za rad sa polinomima u srednjoj školi.

Rad se sastoji iz pet poglavlja.

U prvom poglavlju uvode se algebarski izrazi i pojam polinoma kao vrsta algebarskog izraza. Zatim je data podela polinoma prema broju članova na monome, binome i trinome, i za svaku vrstu neke specifičnosti.

U drugom poglavlju obrađuju se operacije sa polinomima: sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma, i osnovni polinomijalni identiteti – razlika kvadrata i kvadrat binoma. Velika važnost se posvećuje rastavljanju polinoma na činioce.

U trećem poglavlju se preko primera izdvajaju i analiziraju greške koje učenici najčešće prave u radu sa polinomima i predlažu neka drugačija rešenja za njihovo savladavanje.

Četvrto poglavlje je posvećeno primeni polinoma u osnovnoj školi: u rešavanju jednačina, u dokazivanju Pitagorine teoreme, u geometriji.

1. Algebarski izrazi i polinomi

1.1. Algebarski izrazi

U prethodnim razredima susreli ste se s pojmom brojevni izraz i brojevna vrednost izraza. Zapisujem $(4{,}2 + \cdot \sqrt{5} : \frac{1}{8}$. Da li je ovo brojevni izraz? Da li ovo ima smisla? A ovo $\frac{4}{7} + (: -1)$? Zahtevam od učenika da zapišu neke brojevne izraze u sveskama, pa nekoliko zapisujem na tabli. Zatim određuju brojevnu vrednost tih izraza. Na primer:

$$(6{,}3 - 12 : 1{,}5) \cdot 4{,}1 = (6{,}3 - 8) \cdot 4{,}1 = (-1{,}7) \cdot 4{,}1 = -6{,}97$$

$$6{,}3 - \left(4{,}2 + \frac{1}{4}\right) \cdot 3 = 6{,}3 - (4{,}2 + 0{,}25) \cdot 3 = 6{,}3 - 4{,}45 \cdot 3 = 6{,}3 - 13{,}35 = -7{,}05$$

Najjednostavniji brojevni izraz predstavljaju realni brojevi (konstante), na primer: 1, $\frac{3}{17}$, $-\sqrt{5}$, $-3{,}43$. Složene brojevne izraze dobijamo od osnovnih, povezujući ih znacima za četiri osnovne operacije + (sabiranje), - (oduzimanje), · (množenje), : (deljenje). Oznake negativnih brojeva najčešće stavljamo u zagrade. Primeri složenih brojevnih izraza: $4 + \frac{1}{7}$, $\sqrt{3} - 1$, $38{,}6 \cdot (-4)$, $5 : (-1{,}2)$. Povezivanjem takvih izraza dobijamo nove složenije izraze. Na primer: povezivanjem izraza $4 + \frac{1}{7}$ i $\sqrt{3} - 1$ znakom · dobijamo novi složeniji izraz $\left(4 + \frac{1}{7}\right) \cdot (\sqrt{3} - 1)$ koji nazivamo proizvodom izraza $4 + \frac{1}{7}$ i $\sqrt{3} - 1$.

Pored brojevnih izraza, pominjali smo i izraze sa promenljivim, koje takođe nazivamo i *algebarski izrazi*. Promenljive najčešće označavamo malim latiničnim slovima $a, b, c, \dots, x, y, z$, a ponekad koristimo i slova sa indeksima $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ Osnovni algebarski izrazi su znaci brojeva i znaci promenljivih. Povezivanjem dva osnovna algebarska izraza znakom jedne od četiri osnovne operacije (+, -, ·, :) dobijamo novi složeniji algebarski izraz, a povezivanjem takvih izraza dobijamo još složenije algebarske izraze. Osnovni algebarski izrazi su: 4, $-\frac{22}{47}$, $\sqrt{2}$, $-8{,}17$, a, x, dok su $a + 4$, $(a + 4) \cdot \sqrt{2}$, $\frac{x - 8{,}17}{4 - \frac{22}{47}} \cdot (2a - \sqrt{2})$ složeni algebarski izrazi. Kad se promenljivim u algebarskom izrazu dodele konkretne brojevne vrednosti, taj izraz postaje brojevni izraz i možemo da odredimo njegovu brojevnu vrednost.

1.2. Pojam polinoma

U većini udzbenika uvodi se podela algebarskih izraza na racionalne algebarske izraze i cele algebarske izraze. Računske operacije +, -, · i : su zatvorene u skupu $\mathbb{Q}$, pa izraze dobijene njihovom primenom nazivamo racionalni algebarski izrazi. Računske operacije +, - i · su zatvorene u skupu $\mathbb{Z}$, pa izraze dobijene njihovom primenom nazivamo celi algebarski izrazi. S obzirom na to da se izrazi grade od realnih brojeva ova podela zbunjuje učenike, pa bih ja taj deo izostavila.

Takođe, postoji podela algebarskih izraza na cele (kad imenilac ne sadrži promenljivu, npr. $\frac{3ax^2}{7}$), razlomljene (kad imenilac sadrži i promenljivu, npr. $\frac{7x^2}{x+3}$), racionalne (kad ne sadrže promenljivu ispod znaka za koren, npr. $x + y\sqrt{5}$), iracionalne (kad se pod znakom korena nalaze i promenljive, npr. $2a\sqrt{x} + c$). Dakle, algebarski izrazi mogu biti celi racionalni (npr. $x\sqrt{3}$) i celi iracionalni (npr. $3\sqrt{x}$), razlomljeni racionalni (npr. $\frac{3}{x}$) i razlomljeni iracionalni (npr. $\frac{3}{\sqrt{x}}$). Ova podela učenicima je prihvatljivija. Ali budući da se u osnovnoj školi obrađuju samo polinomi, mislim da je bitno učenicima na primerima pokazati koji algebarski izarazi jesu polinomi, a koji nisu i izbeći ovakve podele.

Polinomi su algebarski izrazi dobijeni pomoću znakova brojeva, znakova promenljivih i znakova operacija sabiranja, oduzimanja i množenja (+, -, ·).

Na primer, izrazi $4,\ \frac{1}{3},\ 3\sqrt{7},\ 7a,\ 7-4x,\ 5x^2+7x-\frac{2}{7},\ \frac{x+3}{4},\ a^3b^2+ca^5-\sqrt{5}$ jesu polinomi, dok izrazi $\frac{1}{x}$ i $\frac{3}{6+a}$ nisu polinomi, jer operacija deljenja kod polinoma nije zastupljena.

<u>Zadatak</u>: Koji od navedenih algebarskih izraza su polinomi?

a) $y - \frac{3}{y^2+7}$
b) $(y-2)\cdot(2-a)$
c) $4a^2 + 12ab$
d) $2a^2 - \sqrt{2}ab$
e) $\frac{x-5}{3} = \frac{1}{3}\cdot(x-5)$
f) $\frac{x-5}{3x}$
g) $\frac{x^2+8}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(x^2+8)$

Odgovor: b), c), d), e), g)

U polinomu može učestvovati više različitih promenljivih. Polinomi sa jednom promenljivom x su na primer: $3x,\ x-7,\ x^2-\frac{3}{4}x+5,\ x^3-x$. Polinomi sa dve promenljive x i y su na primer: $3x+y+1, -5xy,\ x^2-\frac{3}{4}y+5,\ x^3-y$.

1.3. Vrste polinoma

Monomi su polinomi koje dobijamo od znakova brojeva, znakova promenljivih i znaka za množenje (·).

Na primer, izrazi $5,\ x,\ 3x,\ 3x^2,\ x^3y^2, -8a^7bc^3$ jesu monomi, dok izrazi $x-7,\ 4x^2-7x$ nisu monomi.

Brojevna konstanta u monomu naziva se koeficijent monoma. Sve promenljive određenog stepena koje učestvuju u monomu čine promenljivi deo. Zbir izložilaca promenljivih koje učestvuju u monomu nazivamo stepen tog monoma. Ako je monom konstanta, kažemo da je njegov stepen nula. Za monome koji se razlikuju samo u koeficijentu (imaju jednak promenljivi deo) kažemo da su slični.

Na primer: $5x,\ \frac{1}{4}x$ i $3x$ su slični monomi sa jednom promenljivom, $-3a^7b^3,\ \sqrt{3}a^7b^3$ i $\frac{3}{7}b^3a^7$ su slični monomi sa dve promenljive.

Zadatak: Odredi koeficijente i stepen sledećih monoma.

a) $4{,}2 \cdot x^2$ → koeficijent je 4,2; stepen je 2
b) $-8a^7bc^3$ → koeficijent je -8; stepen je 7+1+3=11
c) x^3y^2 → koeficijent je 1; stepen je 3+2=5
d) $\frac{1}{13}x^4y^2z$ → koeficijent je $\frac{1}{13}$; stepen je 4+2+1=7

Zadatak: Odredi tri monoma koja su slična sa monomom

a) $-6x^3$ → $6x^3,\ \sqrt{2}x^3,\ -\frac{5}{6}x^3$
b) xy^2 → $-7xy^2,\ 11xy^2,\ \frac{4}{15}xy^2$
c) $-\frac{1}{3}a^2b^4$ → $-a^2b^4,\ 5a^2b^4,\ \sqrt{3}a^2b^4$

Ako su A i B dva neslična monoma, onda izraz A+B nazivamo *binomom*, a za monome A i B kažemo da su članovi binoma A+B. Za binom se kaže da je dvočlani polinom.

Primeri binoma: $a+b,\ \frac{3}{5}+x,\ 7x+2yz^3,\ 2x-3$, gde su a,b,x,y,z promenljive.

Napomena: $2x-3$ je drukčiji zapis za $2x+(-3)$.

Ako su A, B i C tri neslična monoma, onda izraz A+B+C nazivamo *trinomom*, a za monome A, B i C kažemo da su članovi trinoma A+B+C. Za trinom se kaže da je tročlani polinom.

Primeri trinoma: $a+b+1,\ 1+2x+x^2,\ x-2y+3z,\ 4x^2y+x^3z-\frac{3}{7}yz^3,$ gde su a,b,x,y,z promenljive.

Za polinome sa više od tri člana ne postoji poseban naziv.

Polinom po promenljivoj x je izraz $P=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, pri čemu je $n\in\mathbb{N}$ i $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Ako je $a_n\neq 0$ broj n se naziva stepenom polinoma, koeficijent a_n je najstariji ili vodeći koeficijent, sabirak a_nx^n je najstariji član tog polinoma ili vodeći monom, a sabirak a_0 slobodan član tog polinoma. Ako je $a_n=1$ polinom se naziva monični polinom. Polinom je linearan ako je $n=1$.

Izračunati vrednost polinoma P u datoj tački znači za konkretnu vrednost promenljive x odrediti brojevnu vrednost tog izraza.

Zadatak: Odredi vrednost polinoma:

a) $2a^2-3a+7$ za $a\in\left\{-4,0,\frac{1}{3}\right\}$

$$2\cdot(-4)^2-3\cdot(-4)+7=2\cdot 16+12+7=51$$
$$2\cdot 0^2-3\cdot 0+7=2\cdot 0+0+7=7$$
$$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{1}{3}+7=2\cdot\frac{1}{9}-1+7=\frac{2}{9}+6=6\frac{2}{9}$$

b) $y^{50}+y^{100}-y^{150}+2$ za $y\in\{1,-1\}$

$$1^{50}+1^{100}-1^{150}+2=1+1-1+2=3$$
$$(-1)^{50}+(-1)^{100}-(-1)^{150}+2=1+1-1+2=3$$

c) $20x^2-2xy+1$ za $x=\frac{1}{2}$, $y=-10$

$$20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}\cdot(-10)+1=20\cdot\frac{1}{4}+15+1=5+15+1=21$$

Napomena: Ako u polinomu učestvuje više promenljivih, da bismo izračunali njegovu brojevnu vrednost treba da bude zadata konkretna vrednost za svaku promenljivu.

Jedno od objašnjenja porekla reči polinom, binom i monom:

Reč binom (*binomium, binomius, binome, binomial*) je nastala prva od latinske reči *bis-* što znači dvaput i reči *nomen* što znači ime. Reč polinom (*polynomial*) vodi poreklo od reči binom (*binomial*) i dobija se zamenom prefiksa *bi-* grčkim prefiksom *poly-* koji označava mnoštvo, a monom (monomial) vodi poreklo od grčke reči *monos-* što znači jedan jedini.

Reč „polynomial“ prvi je upotrebio francuski matematičar François Viète (1540-1603) tvrdi Florian Cajori (1859-1930), švajcarsko-američki istoričar matematike. François Viète se smatra ocem moderne (simboličke) algebre. On je popularizovao uvođenje slova u do tada retoričku algebru (gde su problemi i rešenja dati rečima) i sinkopatsku algebru (gde se pojedini pojmovi i operacije označavaju skraćenicama). Takođe reč je pronađena u knjizi Aritmetika, iz 1674. godine, koju je napisao Samuel Jeake (1623–1690), engleski trgovac i astrolog.

Reči „binomial“ i „polynomial“ dobile su svoje značenje i u biologiji. Binomijalnu nomenklaturu uveo je švedski naučnik Karl Line (1707-1778) kao način imenovanja vrsta koje se sastoji iz dva dela (imena roda i epiteta vrste). Do tada se koristila polinomijalna nomenklatura po kojoj ime vrste sadrži više od dve reči.

2. Operacije sa polinomima

2.1. Sabiranje polinoma

Zbir sličnih monoma određujemo primenjujući distributivnost operacije množenja prema sabiranju.

Primeri:

$4x + 7x = (4 + 7)x = 11x$

$3ab - 7{,}5ab = (3 - 7{,}5)ab = -4{,}5ab$

$$-\frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{6}x^2y = \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)x^2y = \left(-\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right)x^2y = -\frac{3}{6}x^2y = -\frac{1}{2}x^2y$$

Zbir sličnih monoma je njima sličan monom čiji je koeficijent jednak zbiru koeficijenata datih monoma ili nula ako je zbir koeficijenata datih monoma nula.

Prethodno pravilo važi i u slučajevima kada sabiramo više sličnih monoma.

Zadatak: Odredi zbir sličnih monoma koji su elementi skupa

$$\{(-1)^{n+1}nx^4 \mid n \in \mathbb{N}\ i\ 1 \leq n \leq 20\}$$

Elementi datog skupa su monomi: $x^4, -2x^4,\ 3x^4,\ -4x^4, \ldots, 19x^4, -20x^4$.

Zbir datih monoma je $\big(1 + (-2) + 3 + (-4) + \ldots + 19 + (-20)\big)x^4 = -10x^4$.

Napomena: Iako su 5 i $\sqrt{2}$ slični monomi njih ne možemo da saberemo, 5 je racionalan, a $\sqrt{2}$ iracionalan broj, tj. ne znamo vrednost broja $\sqrt{2}$.

Za dati monom M njemu suprotan monom je –M. Važi da je M + (–M) = 0. Koeficijenti dva uzajamno suprotna monoma su uzajamno suprotni brojevi.

Razlika dva monoma jednaka je zbiru prvog monoma i monoma suprotnog drugom.

Primer: Razlika sličnih monoma $-1\frac{2}{5}x^3$ i $\frac{3}{10}x^3$ je monom

$$-1\frac{2}{5}x^3 + \left(-\frac{3}{10}\right)x^3 = \left(-1\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)x^3 = \left(-\frac{14}{10} - \frac{3}{10}\right)x^3 = -\frac{17}{10}x^3 = -1\frac{7}{10}x^3$$

Napomena: Neslični monomi se ne mogu sabirati. Zbir nesličnih monoma čini polinom.

Kažemo da je polinom u sređenom obliku ako je zapisan u obliku zbira međusobno nesličnih monoma.

Na primer, polinomi $\frac{1}{6}x^2 + a,\ x^4 + 2x^3 - 3x,\ 4a^4b + a^2b^2 - 4ab^4$ su u sređenom obliku, dok polinomi $\frac{1}{6}x^2 - x + x^2 + 4,\ 4a^2b + ab - a^2b - ba$ nisu u sređenom obliku.

Polinom ćemo srediti tako što saberemo sve slične monome. Da ne bismo izostavili neki od monoma, slične monome ćemo izdvojiti tako što ih označimo na isti način - istom bojom ili istom vrstom podvlačenja, a neslične na različite načine. Polinom sređujemo primenjujući zakon komutativnosti i asocijativnosti operacije sabiranja.

Primeri:

$$\frac{1}{6}x^2 - x + x^2 + 4 = \frac{1}{6}x^2 + x^2 - x + 4 = \left(\frac{1}{6} + 1\right)x^2 - x + 4 = \frac{7}{6}x^2 - x + 4$$

$$4a^2b + ab - a^2b - ba = 4a^2b - a^2b + ab - ba = (4 - 1)a^2b = 3a^2b$$

Ako je polinom u sređenom obliku, stepen tog polinoma je jednak najvećem od stepena monoma koji čine taj polinom.

Napomena: Polinom je najpogodnije napisati tako da monomi čiji je stepen veći prethode monomima sa manjim stepenom.

Zadatak: Odredi stepen sledećih polinoma

a) $\frac{1}{2}x^2 + 4$ → polinom je stepena 2
b) $4a^4b + a^2b^2 - ab^4$ → polinom je stepena 5
c) $2z^5 - 5z + z^7$ → polinom je stepena 7

Sabiranje polinoma vršimo primenom zakona komutativnosti i asocijativnosti operacije sabiranja. Pre sabiranja pogodno je polinome napisati u sređenom obliku.

Zbir dva polinoma određujemo tako što saberemo slične monome, a preostale monome iz oba polinoma prepišemo.

Prethodno pravilo važi i u slučajevima kada sabiramo više polinoma.

Primeri:

Zbir polinoma $P = a^2 + 5a - 3$ i $Q = -3a^2 + 1$ je polinom

$$
\begin{aligned}
P+Q &= (a^2+5a-3)+(-3a^2+1) \\
&= a^2+5a-3-3a^2+1 && \text{oslobađanje od zagrada} \\
&= a^2-3a^2+5a+(-3)+1 && \text{komutativnost} \\
&= (a^2-3a^2)+5a+(-3+1) && \text{asocijativnost} \\
&= (1-3)a^2+5a+(-2) && \text{distributivnost} \\
&= -2a^2+5a-2
\end{aligned}
$$

Zbir polinoma $A = 2x^2 + 3$ i $B = x - 4$ je polinom

$$A + B = (2x^2+3)+(x-4) = \underbrace{2x^2+3+x-4}_{\text{nesređeni oblik polinoma}} = 2x^2+x+(3-4) = \underbrace{2x^2+x-1}_{\text{sređeni oblik polinoma}}$$

Zbir polinoma $S = x^4 - 2x^3 + x - 3$ i $T = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x$ je polinom

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
S+T = & & x^4 & -2x^3 & & +\ x & -3 \\
+ & 2x^5 & -x^4 & -3x^3 & +x^2 & +4x & \\
\hline
= & 2x^5 & & -5x^3 & +x^2 & +5x & -3
\end{array}
$$

Napomena: Ako se koristi ovaj metod neophodno je da se pri potpisivanju polinoma vodi računa da se slični monomi zapišu jedan ispod drugog.

Za dati polinom P njemu suprotan polinom je –P. Važi da je P + (–P) = 0. Parovi odgovarajućih koeficijenata (koeficijenti sličnih monoma iz ova dva polinoma) dva uzajamno suprotna polinoma su međusobno suprotni brojevi.

Razlika dva polinoma jednaka je zbiru prvog polinoma i polinoma suprotnog drugom.

<u>Primer</u>: Razlika polinoma $M = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x$ i $L = x^4 - 2x^3 + x - 3$ je polinom

$$
\begin{aligned}
M-L &= (2x^5-x^4-3x^3+x^2+4x)-(x^4-2x^3+x-3) \\
&= 2x^5-x^4-3x^3+x^2+4x-x^4+2x^3-x+3 \\
&= 2x^5-2x^4-x^3+x^2+3x+3
\end{aligned}
$$

Napomena: Učenici ne moraju da traže suprotan polinom –L polinomu L, pa da ga sabiraju sa polinomom M, već odmah mogu da traže razliku polinoma M i L, vodeći računa kod oslobađanja zagrada (kad je ispred zagrade znak „–“ svim članovima u zagradi moraju da promene znak).

<u>Zadatak</u>: Ako su dati polinomi $A = a^2b + ab^2$, $B = -ab^2 - ab - 3$ i $C = ba^2 - 3$ odredi polinom $A + B - C$.

$$
\begin{aligned}
A+B-C &= \big((a^2b+ab^2)+(-ab^2-ab-3)\big)-(ba^2-3) \\
&= a^2b+ab^2-ab^2-ab-3-ba^2+3 = -ab
\end{aligned}
$$

Zadatak: Ako su dati polinomi $P = x^2 + 5x - 4$, $Q = -3x^2 + 7$ i $R = 4x + 2$, odredi $P + Q, Q + P, (P + Q) + R, P + (Q + R)$.

$P + Q = (x^2 + 5x - 4) + (-3x^2 + 7) = x^2 + 5x - 4 - 3x^2 + 7 = -2x^2 + 5x + 3$

$Q + P = (-3x^2 + 7) + (x^2 + 5x - 4) = -3x^2 + 7 + x^2 + 5x - 4 = -2x^2 + 5x + 3$

Zaključujemo da je $P + Q = Q + P$.

$(P + Q) + R = (-2x^2 + 5x + 3) + (4x + 2) = -2x^2 + 5x + 3 + 4x + 2 = -2x^2 + 9x + 5$

$$\begin{aligned} P + (Q + R) &= (x^2 + 5x - 4) + \big((-3x^2 + 7) + (4x + 2)\big) \\ &= x^2 + 5x - 4 + (-3x^2 + 7 + 4x + 2) \\ &= x^2 + 5x - 4 - 3x^2 + 4x + 9 \\ &= -2x^2 + 9x + 5 \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.

Za svaka tri polinoma A, B i C važi A + B = B + A, (A + B) + C = A + (B + C).

2.2. Množenje polinoma

2.2.1. Množenje monoma

Proizvod dva monoma određujemo primenjujući komutativni i asocijativni zakon operacije množenja i svojstva stepena.

Primeri:

$2a \cdot 3a^2 = \underbrace{2 \cdot 3} \cdot \underbrace{a \cdot a^2} = 6a^3$

$2x^2y^3 \cdot (-5)x^2yz^3 = \underbrace{2 \cdot (-5)} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2} \cdot \underbrace{y^3 \cdot y} \cdot z^3 = -10x^4y^4z^3$

Proizvod monoma je monom čiji je koeficijent jednak proizvodu koeficijenata, a promenljivi deo proizvodu promenljivih delova činilaca.

Proizvod proizvoljnog broja monoma je novi monom.

Zadatak: Odredi proizvod monoma A, B i C ako je

a) $A = -\frac{1}{2}x,\ B = 4x^3,\ C = -x^2$

$$A \cdot B \cdot C = \left(-\frac{1}{2}x\right) \cdot 4x^3 \cdot (-x^2) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot (-1)} \cdot \underbrace{x \cdot x^3 \cdot x^2} = 2 \cdot x^{1+3+2} = 2x^6$$

b) $A = ab^2,\ B = -5a,\ C = 3b^2c^3$

$$A \cdot B \cdot C = ab^2 \cdot (-5a) \cdot 3b^2c^3 = \underbrace{1 \cdot (-5) \cdot 3} \cdot \underbrace{a \cdot a} \cdot \underbrace{b^2 \cdot b^2} \cdot c^3 = -15a^2b^4c^3$$

Stepenovanje monoma prirodnim brojem je proizvod čiji je svaki činilac dati monom. Broj monoma u proizvodu određen je izložiocem nad tim monomom. Postupak skraćujemo koristeći svojstvo da je stepen proizvoda jednak proizvodu stepena činilaca.

Primeri:

$(x^4)^5 = x^{20}$

$(-2xy^3)^5 = (-2)^5 \cdot x^5 \cdot (y^3)^5 = -32x^5y^{15}$

$$\left(-\frac{3}{5}a^3b^5c^7\right)^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^4 \cdot (a^3)^4 \cdot (b^5)^4 \cdot (c^7)^4 = \frac{81}{625}a^{12}b^{20}c^{28}$$

2.2.2. Množenje polinoma monomom

Ako polinom napišemo u obliku zbira nesličnih monoma $P = A_1 + A_2 + \ldots + A_k,\ k \in \mathbb{N}$, onda je na osnovu distributivnosti množenja prema sabiranju

$P \cdot M = (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \ldots + A_k \cdot M$

Polinom P množimo monomom M tako što svaki član polinoma P pomnožimo monomom M, pa dobijene proizvode saberemo.

Primer:

Proizvod polinoma $P = x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ i monoma $M = 5x$ je polinom

$$\begin{aligned} P \cdot M &= (x^3 + 2x^2 + 3x - 4) \cdot 5x \\ &= x^3 \cdot 5x + 2x^2 \cdot 5x + 3x \cdot 5x - 4 \cdot 5x && \text{distributivnost} \\ &= 5x^4 + 10x^3 + 15x^2 - 20x && \text{množenje monoma} \end{aligned}$$

2.2.3. Množenje polinoma polinomom

Jednakost $P \cdot M = (A_1 + A_2 + \ldots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \ldots + A_k \cdot M$ važi i kad je M bilo koji polinom. Ako polinom M napišemo u obliku $M = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$, $n \in \mathbb{N}$ gde su $B_1, B_2, \ldots, B_n$ neslični monomi onda je na osnovu distributivnosti množenja prema sabiranju

$$
\begin{aligned}
P \cdot M &= (A_1 + A_2 + \dots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \dots + A_k \cdot M \\
&= A_1 \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) + A_2 \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) + \dots + A_k \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) \\
&= \ A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 + \dots + A_1 \cdot B_n \\
&+ \ A_2 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + \dots + A_2 \cdot B_n \\
&+ \ \dots \\
&+ \ A_k \cdot B_1 + A_k \cdot B_2 + \dots + A_k \cdot B_n
\end{aligned}
$$

Polinom A množimo polinomom B tako što svaki član polinoma A pomnožimo svakim članom polinoma B, pa dobijene proizvode saberemo.

Primeri:

Proizvod polinoma $A = 2x^2 - 3x + 4$ i polinoma $B = 5x + 6$ je polinom

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= (2x^2 - 3x + 4) \cdot (5x + 6) \\
&= 2x^2 \cdot (5x + 6) - 3x \cdot (5x + 6) + 4 \cdot (5x + 6) && \text{distributivnost} \\
&= 10x^3 + 12x^2 - 15x^2 - 18x + 20x + 24 && \text{distributivnost} \\
&= 10x^3 - 3x^2 + 2x + 24 && \text{sređeni oblik polinoma}
\end{aligned}
$$

Proizvod polinoma $Q = 3a^2 - 2a + 1$ i polinoma $P = a^3 + 5a - 2$ je polinom

$$
\begin{aligned}
P \cdot Q &= (3a^2 - 2a + 1) \cdot (a^3 + 5a - 2) \\
&= 3a^2 \cdot a^3 + 3a^2 \cdot 5a + 3a^2 \cdot (-2) \\
&+ (-2a) \cdot a^3 + (-2a) \cdot 5a + (-2a) \cdot (-2) \\
&+ 1 \cdot a^3 + 1 \cdot 5a + 1 \cdot (-2) \\
&= 3a^5 + 15a^3 - 6a^2 - 2a^4 - 10a^2 + 4a + a^3 + 5a - 2 \\
&= 3a^5 - 2a^4 + 16a^3 - 16a^2 + 9a - 2
\end{aligned}
$$

Učenicima je ponekad teško na ovaj način da množe polinome, jer često pri množenju svakog člana sa svakim, ne znaju dokle su stigli, pa neki član izostave. Zato predlažem uspravno množenje kao jedan od načina množenja polinoma sa tri i više članova jer je pregledniji i manja je mogućnost da učenici pogreše.

Postupak množenja je sledeći: Svaki član prve zagrade (prvog polinoma) množimo sa svakim članom druge zagrade (drugog polinoma), tako što u novu zagradu upisujemo proizvode prvog člana prve zagrade i svih članova druge zagrade, zatim u sledeću zagradu upisujemo proizvode drugog člana prve zagrade i svih članova druge zagrade, i tako redom dok god ima članova u prvoj zagradi. Kad izvršimo množenje, tražimo slične monome i sabiramo ih, pa zapisujemo polinom u sređenom obliku.

Primer:

Proizvod polinoma $R = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ i polinoma $S = y^2 + 5xy - 2y$ je polinom

$$\begin{pmatrix} 3x^3 \\ -2x^2 \\ 4x \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ 5xy \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^3 y^2 \\ 3x^3 \cdot 5xy \\ 3x^3 \cdot -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x^2 \cdot y^2 \\ -2x^2 \cdot 5xy \\ -2x^2 \cdot -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x \cdot y^2 \\ 4x \cdot 5xy \\ 4x \cdot -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5y^2 \\ -5 \cdot 5xy \\ -5 \cdot -2y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^3 y^2 \\ 15x^4 y \\ -6x^3 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x^2 y^2 \\ -10x^3 y \\ 4x^2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4xy^2 \\ 20x^2 y \\ -8xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5y^2 \\ -25xy \\ 10y \end{pmatrix}$$

$$= 15x^4 y + 3x^3 y^2 - 16x^3 y - 2x^2 y^2 + 24x^2 y + 4xy^2 - 33xy - 5y^2 + 10y$$

Zadatak: Ako su dati polinomi $P = x^2 + 5x - 4$, $Q = -3x^2 + 7$ i $R = 4x + 2$, odredi $P \cdot Q, Q \cdot P, (P \cdot Q) \cdot R, P \cdot (Q \cdot R)$

$$P \cdot Q = (x^2 + 5x - 4) \cdot (-3x^2 + 7) = -3x^4 + 7x^2 - 15x^3 + 35x + 12x^2 - 28$$
$$= -3x^4 - 15x^3 + 19x^2 + 35x - 28$$

$$Q \cdot P = (-3x^2 + 7) \cdot (x^2 + 5x - 4) = -3x^4 - 15x^3 + 12x^2 + 7x^2 + 35x - 28$$
$$= -3x^4 - 15x^3 + 19x^2 + 35x - 28$$

Zaključujemo da je $P \cdot Q = Q \cdot P$.

$$(P \cdot Q) \cdot R = (-3x^4 - 15x^3 + 19x^2 + 35x - 28) \cdot (4x + 2)$$
$$= -12x^5 - 6x^4 - 60x^4 - 30x^3 + 76x^3 + 38x^2 + 140x^2 + 70x - 112x - 56$$
$$= -12x^5 - 66x^4 + 46x^3 + 178x^2 - 42x - 56$$

$$\begin{aligned} P \cdot (Q \cdot R) &= (x^2 + 5x - 4) \cdot \big((-3x^2 + 7) \cdot (4x + 2)\big) \\ &= (x^2 + 5x - 4) \cdot (-12x^3 - 6x^2 + 28x + 14) \\ &= -12x^5 - 6x^4 + 28x^3 + 14x^2 \\ &\qquad -60x^4 - 30x^3 + 140x^2 + 70x \\ &\qquad + 48x^3 + 24x^2 - 112x - 56 \\ &= -12x^5 - 66x^4 + 46x^3 + 178x^2 - 42x - 56 \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$.

Za svaka tri polinoma A, B i C važi A · B = B · A, (A · B) · C = A · (B · C).

2.3. Kvadrat binoma

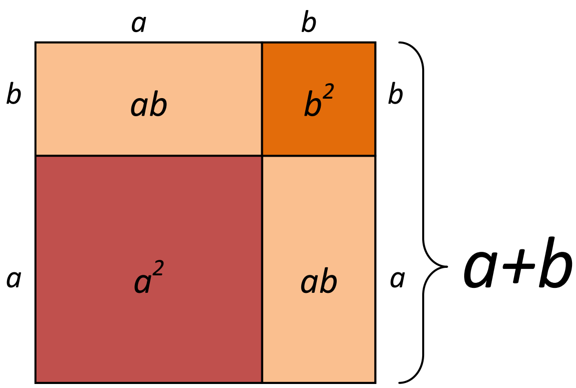
Izraz oblika $(A + B)^2$ predstavlja kvadrat binoma A + B. Pošto ćemo često biti u prilici da računamo kvadrate binoma, u interesu nam je da to pojednostavimo. Zato izvodimo opšti obrazac za kvadrat binoma koji ćemo koristiti kad nam bude potrebno (bez ponovnog izvođenja).

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + 2AB + B^2$$

Kvadrat binoma jednak je zbiru kvadrata prvog člana, dvostrukog proizvoda prvog i drugog člana i kvadrata drugog člana tog binoma.

Geometrijsko objašnjenje formule za određivanje kvadrata binoma:

Ako su vrednosti monoma A i B merni brojevi *a* i *b* dužina neke dve duži, tada je $(A + B)^2$ površina kvadrata stranice *a + b*, A^2 površina kvadrata stranice *a*, B^2 površina kvadrata stranice *b*, AB površina pravougaonika čije su stranice dužina *a* i *b*. Važi: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

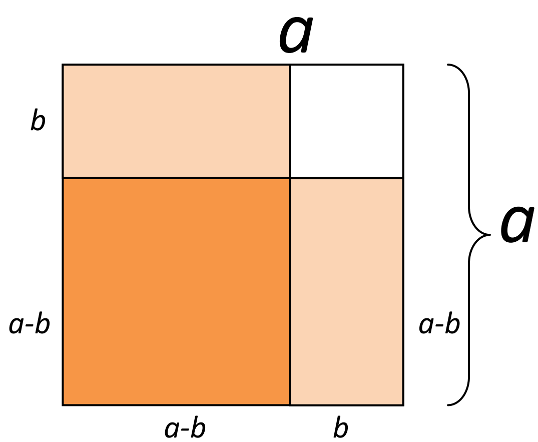


U Euklidovim Elementima u drugoj knjizi može da se nađe interpretacija pravila za kvadrat binoma: Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat nad celom duži jednak je zbiru kvadrata nad odsečcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćenog odsečcima.

Formula za kvadrat binoma važi i ako su A i B bilo koji polinomi.

Izraz oblika $(A - B)^2$ predstavlja kvadrat razlike monoma A i B. Takođe izvodimo opšti obrazac koji ćemo koristiti kad nam bude potrebno (bez ponovnog izvođenja):

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A\cdot A - A\cdot B - B\cdot A + (-B)\cdot(-B) = A^2 - 2AB + B^2$$



$(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Često se ova dva obrasca zapisuju $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

<u>Zadatak</u>: Odredi kvadrat binoma P ako je

a) $P = 4a + 1$
$(4a+1)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 1 + 1^2 = 16a^2 + 8a + 1$

b) $P = \frac{1}{3}x - 4$
$\left(\frac{1}{3}x - 4\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot 4 + 4^2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 16$

c) $P = -6x - 7y$
$$\begin{aligned}(-6x-7y)^2 &= \big((-6x) + (-7y)\big)^2 = (-6x)^2 + 2 \cdot (-6x) \cdot (-7y) + (-7y)^2 \\ &= 36x^2 + 84xy + 49y^2\end{aligned}$$

Za naprednije učenike: Pored jednakosti za kvadrat binoma, poznate su i formule za kub binoma, kao i za više stepene binoma.

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B) \cdot (A+B) \cdot (A+B) = (A+B)^2 \cdot (A+B) = (A^2 + 2AB + B^2) \cdot (A+B) \\ &= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + B^2A + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)^4 &= (A+B)^3 \cdot (A+B) = (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \cdot (A+B) \\ &= A^4 + A^3B + 3A^3B + 3A^2B^2 + 3A^2B^2 + 3AB^3 + B^3A + B^4 \\ &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4\end{aligned}$$

Uočava se pravilnost u tim formulama. U članovima na desnoj strani, zbir stepena monoma A i stepena monoma B je stalan i u slučaju $(A+B)^3$ jednak je 3, a u slučaju $(A+B)^4$ jednak je 4. Pri tom iz člana u član stepeni monoma A opadaju za 1, dok stepeni monoma B rastu za 1. Koeficijenti koji se javljaju u ovim formulama dobijaju se iz Paskalovog trougla.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

U svakom redu ove šeme na prvom i poslednjem mestu se nalazi broj 1, dok ostala polja popunjavamo tako što u njih upišemo zbir brojeva iz dva polja iznad.

U trećem redu se nalaze brojevi 1, 2, 1 koji su koeficijenti u izrazu za kvadrat binoma, u četvrtom redu se nalaze brojevi 1, 3, 3, 1 koji su koeficijenti u izrazu za kub binoma, u petom redu se nalaze brojevi 1, 4, 6, 4, 1 koji su koeficijenti u izrazu za $(A + B)^4$ i tako dalje.

2.4. Razlika kvadrata

Izraz oblika $A^2 – B^2$ predstavlja razliku kvadrata monoma.

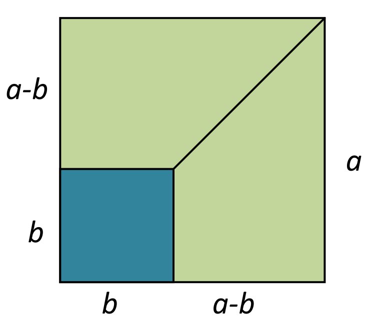
Množenjem polinoma dobijamo da za bilo koje monome A i B važi

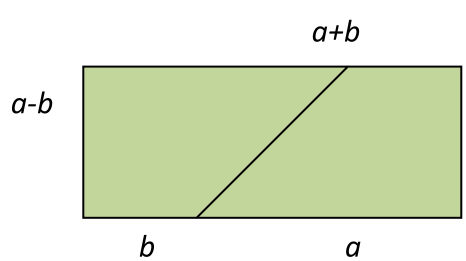
$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$.

Razlika kvadrata dva neslična monoma jednaka je proizvodu njihovog zbira i njihove odgovarajuće razlike, tj. $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

Geometrijsko objašnjenje razlike kvadrata:

Neka je a^2 površina kvadrata stranice a, a b^2 površina kvadrata stranice b i neka je $a > b$. Sa slike levo vidimo da je razlika površina kvadrata stranice a i kvadrata stranice b jednaka dvostrukoj površini pravouglog trapeza čije su osnovice a i b, a visina $a – b$.





$$a^2 - b^2 = 2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot (a-b) = (a+b) \cdot (a-b)$$

Sa slike desno vidimo da je površina dva pravougla trapeza čije su osnovice *a* i *b*, a visina *a* – *b* jednaka površini pravougaonika čije su stranice *a* + *b* i *a* – *b*.

Zadatak: Razliku kvadrata napiši u obliku proizvoda.

a) $y^2 - 1 = (y+1) \cdot (y-1)$
b) $4x^2 - 5 = (2x)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x + \sqrt{5}\right) \cdot \left(2x - \sqrt{5}\right)$
c) $36a^2 - 49b^2 = (6a)^2 - (7b)^2 = (6a + 7b) \cdot (6a - 7b)$

Zadatak: Primenom razlike kvadrata date proizvode napiši u obliku sređenih polinoma.

a) $(x-3) \cdot (x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
b) $(2a + 3b) \cdot (2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

2.5. Rastavljanje (faktorizacija) polinoma na činioce

Za polinom koji je predstavljen u obliku proizvoda drugih polinoma kažemo da je rastavljen (razložen) na činioce. Rastaviti polinom na proste činioce (faktore) znači napisati ga u obliku proizvoda prostih polinoma (polinoma koji se ne mogu dalje rastavljati).

Primeri:

a) Monom $\frac{1}{5}x^2y = \frac{1}{5} \cdot x \cdot x \cdot y$ rastavljen je na činioce $\frac{1}{5}, x, x$ i y.
b) Binom $2x + 4$ se primenom distributivnog zakona $2x + 4 = 2 \cdot x + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (x + 2)$ rastavlja na činioce 2 i $x + 2$.
c) Binom $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y) \cdot (2x + 3y)$ se primenom formule za razliku kvadrata rastavlja na činioce $2x - 3y$ i $2x + 3y$.
d) Trinom $a^2 + 10a + 25$ se primenom formule za kvadrat binoma rastavlja na činioce $a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot 5 \cdot a + 5^2 = (a+5)^2$ na činioce $a + 5$ i $a + 5$.

Ako za polinom $P = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ važi da se svaki od sabiraka $A_1, A_2, \ldots, A_n,\ n \in \mathbb{N}$ može napisati u obliku $A_1 = B_1 \cdot C,\ A_2 = B_2 \cdot C, \ldots, A_n = B_n \cdot C$ pri čemu je *C* polinom, tada se primenom distributivnog zakona, polinom *P* može rastaviti na činioce na sledeći način $P = (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) \cdot C$ ili $P = C \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$. Takođe kažemo i da *„izvlačimo zajednički činilac ispred zagrade“*.

<u>Zadatak</u>: Rastavi na proste činioce date polinome primenom zakona distributivnosti

a) $16a + 2a^2 = 2a \cdot 8 + 2a \cdot a = 2a \cdot (8 + a)$
b) $5x^2y^3z - 15xy^2 = 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z - 5 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y = 5xy^2 \cdot (xyz - 3)$
c) $a \cdot (x - y) + 7 \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (a + 7)$
d) $2a^3b^2c + 8a^2b + 10abc = 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot c = 2ab \cdot (a^2bc + 4a + 5c)$
e) $(x^2 + x) - (x + 1) \cdot x^2 = (x + 1) \cdot x \cdot 1 - (x + 1) \cdot x \cdot x = (x + 1) \cdot x \cdot (1 - x)$

<u>Zadatak</u>: Rastavi na proste činioce date polinome primenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata

a) $(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$
b) $4a^2 + 28ab + 49b^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 7b + (7b)^2 = (2a + 7b)^2$
c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}y + \left(\frac{1}{3}y\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y\right)^2$
d) $81a^2 - 121b^2 = (9a)^2 - (11b)^2 = (9a - 11b) \cdot (9a + 11b)$
e) $(x + 3)^2 - 25 = (x + 3)^2 - 5^2 = (x + 3 - 5) \cdot (x + 3 + 5) = (x - 2) \cdot (x + 8)$
f) $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 = (a^2 - 1)^2 = \big((a - 1) \cdot (a + 1)\big)^2 = (a - 1)^2 \cdot (a + 1)^2$
g) $a^4 - 81x^4 = (a^2)^2 - (9x^2)^2 = (a^2 - 9x^2) \cdot (a^2 + 9x^2)$
$= (a^2 - (3x)^2) \cdot \underbrace{(a^2 + 9x^2)}_{zbir\ kvadrata} = (a - 3x) \cdot (a + 3x) \cdot (a^2 + 9x^2)$

Napomena: Zbir kvadrata ne može da se rastavi na činioce u skupu realnih brojeva.

h) $16 - a^2 - 2ab - b^2 = 16 - (a^2 + 2ab + b^2) = 16 - (a + b)^2 = 4^2 - (a + b)^2$
$= \big(4 - (a + b)\big) \cdot \big(4 + (a + b)\big) = (4 - a - b) \cdot (4 + a + b)$

Metod grupisanja: Ako polinom nema tzv. zajednički monom koji se može izvući pred zagradu, ali ga možemo dovesti na oblik u kojem se može „izvući pred zagradu" neki binom, trinom (polinom), grupisanjem monoma dolazimo do rešenja.

<u>Zadatak</u>: Rastavi na proste činioce date polinome grupisanjem članova

a) $ax - ay - 4x + 4y$

I način:

$(ax - ay) + (-4x + 4y) = a \cdot (x - y) + 4 \cdot (-x + y) = a \cdot (x - y) - 4 \cdot (x - y)$
$= (x - y) \cdot (a - 4)$

II način:

$$(ax-4x)+(-ay+4y)=x\cdot(a-4)+y\cdot(-a+4)=x\cdot(a-4)-y\cdot(a-4)$$
$$=(a-4)\cdot(x-y)$$

b) $6by-15bx-4ay+10ax$

I način:

$$(6by-15bx)+(-4ay+10ax)$$
$$=(3\cdot2\cdot b\cdot y-3\cdot5\cdot b\cdot x)+(-2\cdot2\cdot a\cdot y+2\cdot5\cdot a\cdot x)$$
$$=3b\cdot(2y-5x)+2a\cdot(-2y+5x)=3b\cdot(2y-5x)-2a\cdot(2y-5x)$$
$$=(2y-5x)\cdot(3b-2a)$$

II način:

$$(6by-4ay)+(-15bx+10ax)$$
$$=(3\cdot2\cdot b\cdot y-2\cdot2\cdot a\cdot y)+(-3\cdot5\cdot b\cdot x+2\cdot5\cdot a\cdot x)$$
$$=2y\cdot(3b-2a)+5x\cdot(-3b+2a)=2y\cdot(3b-2a)-5x\cdot(3b-2a)$$
$$=(3b-2a)\cdot(2y-5x)$$

Za monome $15bx$ i $4ay$ ne postoji zajednički činilac, tako da te monome ne možemo da grupišemo.

c) $x^2y+3xy+2x+6=(x^2y+3xy)+(2x+6)=xy\cdot(x+3)+2\cdot(x+3)$
$=(x+3)\cdot(xy+2)$

d) $14xy+15xz-10x^2-21yz=2\cdot7\cdot x\cdot y+3\cdot5\cdot x\cdot z-2\cdot5\cdot x\cdot x-3\cdot7\cdot y\cdot z$
$=7y\cdot(2x-3z)+5x\cdot(3z-2x)=7y\cdot(2x-3z)-5x\cdot(2x-3z)$
$=(2x-3z)\cdot(7y-5x)$

Kako rastaviti na činioce trinom koji ne predstavlja kvadrat nekog binoma?

Primer:

Znamo da odredimo proizvod binoma $(x+1)\cdot(x+5)=x^2+5x+x+5=x^2+6x+5$. Ali kako ćemo uraditi obrnuto, da od datog trinoma napravimo proizvod dva binoma?

I način: Od datog trinoma pokušavamo da napravimo kvadrat binoma zadržavajući najstariji i srednji član, dok slobodni član modifikujemo.

$$x^2+6x+5=\overbrace{x^2+2\cdot x\cdot3+9}-4$$
$$=(x+3)^2-2^2$$
$$=(x+3-2)\cdot(x+3+2)$$
$$=(x+1)\cdot(x+5)$$

II način: Posmatrajući kako je dobijen trinom od proizvoda dva binoma $(x+1)\cdot(x+5) = x^2+5x+x+5 = x^2+6x+5$ možemo da zaključimo da broj 5 u trinomu dobijamo tako što množimo brojeve 5 i 1 u zagradama, a 6x dobijamo tako što sabiramo članove 5x i 1x. Tj. ako je zadat trinom x^2+6x+5 mi tražimo dva broja koja kad se množe daju rezultat 5, a kad se sabiraju daju rezultat 6.

$? \cdot ? = 5$
$? + ? = 6$ Lako se vidi da su u pitanju brojevi 1 i 5.

Sada član 6x predstavimo u obliku zbira 5x i 1x.

$x^2+6x+5 = (x^2+5x)+(x+5)$ Faktorišemo prva dva i druga dva člana.
$= x\cdot(x+5)+1\cdot(x+5)$ Izdvajamo zajednički činilac ispred zagrade.
$= (x+5)\cdot(x+1)$

III način: Kad rastavljamo polinom drugog stepena koji može da se rastavi u skupu realnih brojeva rešenje dobijamo u obliku ( )·( ).

Posmatramo polinom x^2+6x+5, njegov najstariji član $x^2 = x\cdot x$, i slobodan član $5 = 5\cdot 1$ i popunjavamo zagrade stavljajući po jedan činilac od najstarijeg i slobodnog člana u svaku zagradu, ostavljajući prazno mesto za znak broja.

$(x\quad 1)\cdot(x\quad 5)$ → Množimo svaki član sa svakim ostavljajući mesta za znak.

$x^2\quad 5x\quad 1x\quad 5$ → Posmatramo član 6x i razmišljamo kako da ga dobijemo od 1x i 5x. Član 6x dobijamo tako što saberemo 5x i 1x, i sad zaključujemo koji znak će biti ispred 1x i 5x.

$x^2+5x+1x+5$

Vraćamo se na zagrade, stavljamo odgovarajući znak i dobijamo rešenje

$(x+1)\cdot(x+5)$
tj. $x^2+6x+5 = (x+1)\cdot(x+5)$

Za naprednije učenike: Kako rastaviti na činioce trinom koji ne predstavlja kvadrat nekog binoma, a koeficijent uz x^2 nije 1?

Primer: Rastavi na činioce polinom $3x^2+5x-2$

Sada tražimo dva broja koja kad se sabiraju daju rezultat 5, a kad se množe daju rezultat –6 (najstariji koeficijent 3 pomnožen slobodnim članom –2).

$? \cdot ? = -6$
$? + ? = 5$ Lako se vidi da su u pitanju brojevi 6 i –1.

Sada član 5x predstavimo u obliku zbira 6x i –1x.

$$3x^2+5x-2=\underbrace{3x^2+6x}\underbrace{-x-2}$$ Faktorišemo prva dva i druga dva člana.

$$=3x\cdot(x+2)-1\cdot(x+2)$$ Izdvajamo zajednički činilac ispred zagrade.

$$=(x+2)\cdot(3x-1)$$

<u>Zadatak</u>: Kombinovanjem različitih metoda rastavi na proste činioce date polinome

Napomena: Uvek prvo gledamo da li postoje zajednički činioci svih monoma koje možemo da izvučemo ispred zagrade, pa tek onda koristimo ostale metode.

a) $7a\cdot 1-7ax^2=7a\cdot(1^2-x^2)=7a\cdot(1-x)\cdot(1+x)$

b) $$\begin{aligned}18ax^2+24axy+8ay^2&=2a\cdot(9x^2+12xy+4y^2)\\&=2a\cdot((3x)^2+12xy+(2y)^2)\\&=2a\cdot(3x+2y)^2\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}2x^3-x^2-8x+4&=(2x^3-1x^2)+(-8x+4)\\&=x^2\cdot(2x-1)-4\cdot(2x-1)\\&=(2x-1)\cdot(x^2-4)\\&=(2x-1)\cdot(x^2-2^2)\\&=(2x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)\end{aligned}$$

d) $4-25x^2+20xy-4y^2$

Ne postoji zajednički činilac za sva četiri člana. Ako pokušamo da grupišemo dva po dva člana opet ne možemo da izdvojimo zajednički polinom ispred zagrade. Tražimo kvadrat binoma ili razliku kvadrata.

$$\begin{aligned}&4-25x^2+20xy-4y^2\\&=4-(25x^2-20xy+4y^2)\\&=4-((5x)^2-2\cdot 5x\cdot 2y+(2y)^2)\\&=2^2-(5x-2y)^2 && \text{kvadrat binoma}\\&=\big(2-(5x-2y)\big)\cdot\big(2+(5x-2y)\big) && \text{razlika kvadrata}\\&=(2-5x+2y)\cdot(2+5x-2y)\end{aligned}$$

<u>Primer</u>: Da li polinom y^2-3y+9 može da se rastavi na činioce?

$$y^2-3y+9=\underbrace{y^2-2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot y+\tfrac{9}{4}}_{kvadrat\ binoma}+\tfrac{27}{4}=\left(y-\tfrac{3}{2}\right)^2+\tfrac{27}{4}$$

Ne može da se rastavi na činioce, mada liči na kvadrat binoma $y-3$. Međutim znamo da je $(y-3)^2=y^2-6y+9$.

3. Razumevanje pojma polinoma kod učenika

Iako se učenici susreću sa promenljivom u ranijim razredima osnovne škole, upotreba slova u matematici pravi veliku konfuziju mnogim učenicima. Ako još uvedemo koeficijente polinoma pomoću slova *a, b, c,...*, a promenljive pomoću slova *x, y, z,...*, a često i slova *a, b, c,...*, učenike potpuno zbuni takva terminologija. Preporuka je da se za koeficijente pišu konkretni realni brojevi, osim kod uopštavanjua, a za promenljive da se koriste mala latinična slova engleske abecede.

Često za proizvoljne polinome da bismo pokazali neka tvrđenja koristimo slova A, B, C,... Kad uvedemo formule za kvadrat binoma $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ i razliku kvadrata $A^2 - B^2 = (A+B)\cdot(A-B)$, gde su *A* i *B* proizvoljni monomi, deluje da je učenicima jasno kako mogu da primenjuju te formule. Međutim, dešava se da oni ne znaju šta može da stoji umesto slova *A* i *B,* pa kad im zadamo da odrede kvadrat binoma $x+y$, tj. $(x+y)^2$, ne dobijemo odgovor. Ne shvataju da i ako promenimo imena promenljivih formule i dalje važe. Algebra se ne ograničava samo na operacije nad brojevima i promenljivima. Zato je jedna od ideja metodičara nastave matematike da se te formule uvedu na sledeći način:

$(\square + \heartsuit)^2 = \square^2 + 2\square\heartsuit + \heartsuit^2$ i $\square^2 - \heartsuit^2 = (\square + \heartsuit)\cdot(\square - \heartsuit)$.

Problemi u radu sa polinomima se često javljaju jer učenici ne usvoje dobro pojam stepena i pre uvođenja pojma polinoma potrebno je ponoviti šta je stepen i važne osobine stepena.

Sabiranje jednakih sabiraka $\underbrace{4+4+4}_{3}$ kraće zapisujemo $4\cdot 3$, dok množenje jednakih činilaca $\underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3}$ kraće zapisujemo 4^3, tj. u opštem slučaju $\underbrace{x+\ldots+x}_{n}$ kraće zapisujemo $x\cdot n$, dok $\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{n}$ kraće zapisujemo x^n, gde je x bilo koji realan, a n bilo koji prirodan broj.

$4^3\cdot 4^5 = \underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3}\cdot\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}_{5} = 4^{3+5} = 4^8$ tj. $x^n\cdot x^m = x^{n+m},\ n,m\in\mathbb{N}$

$4^7 : 4^2 = \frac{4^7}{4^2} = \frac{\overbrace{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}^{7}}{\underbrace{4\cdot4}_{2}} = 4^{7-2} = 4^5$ tj. $x^n : x^m = x^{n-m},\ n,m\in\mathbb{N},\ n>m,\ x\neq 0$

$4^1 = 4,\ \ 4^0 = 1$ tj. $x^1 = x$ i $x^0 = 1, x\neq 0$

$$(4\cdot 7)^5 = (4\cdot 7)\cdot(4\cdot 7)\cdot(4\cdot 7)\cdot(4\cdot 7)\cdot(4\cdot 7)$$
$$= (4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4)\cdot(7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7) = 4^5\cdot 7^5$$ tj. $(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n,\ n\in\mathbb{N}$

$\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4^5}{7^5}$ tj. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n},\ n \in \mathbb{N},\ y \neq 0$

$(4^3)^5 = 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3+3+3+3} = 4^{3\cdot 5} = 4^{15}$ tj. $(x^n)^m = x^{n\cdot m},\ n, m \in \mathbb{N}$

Zakon distributivnosti se obrađuje u mlađim razredima, ali tada učitelji često izostve njegovu primenu. U starijim razredima nastavnici podrazumevaju da učenici to već znaju, ali problemi nastaju kod primene zakona distributivnosti u sabiranju monoma i rastavljanju polinoma na činioce.

Pogrešno urađen primer: $2x^3 + 5x^3 = 7x^6$

Ovde je najbolje vratiti se na problem koliko je $2 + 5$. Učenici znaju da je to 7. A koliko je $2♠ + 5♠$? Učenici znaju da je rezultat 7♠. Ovde možemo da primenimo zakon distributivnosti $2♠ + 5♠ = (2 + 5)♠ = 7♠$.

Sada se vraćamo na postavljen problem i sabiramo monome na isti način.
$2x^3 + 5x^3 = (2 + 5) \cdot x^3 = 7x^3$.

Problem kako rastaviti na činioce polinom $4x^2 + 6y$ možemo svesti na problem na koliko dece najviše možemo podeliti 4 kruške i 6 jabuka tako da svako dete dobije isti broj jabuka i krušaka. Grupisanjem voća dolazi se do rešenja da će dvoje dece ravnopravno podeliti to voće, što znači da će svako dete dobiti po 2 kruške i 3 jabuke (crtamo na tabli). Zatim zapisujemo odgovor:

4 kruške + 6 jabuka = 2 · (2 kruške + 3 jabuke)

Vraćamo se na početni problem i rešavamo ga na isti način:
$4x^2 + 6y = 2 \cdot (2x^2 + 3y)$

Pogrešno urađen primer: $\underbrace{2a^2b + 4ab + a}_{L} = \underbrace{a \cdot (2ab + 4b)}_{D}$

Ovde je jako bitno da učenici proverom utvrde da leva i desna strana ove jednakosti nisu jednake. Sada množenjem polinoma na desnoj strani dobijaju $a \cdot (2ab + 4b) = 2a^2b + 4ab$ i utvrđuju da član *a* koji se pojavljuje na levoj strani fali. Sad treba postaviti pitanje učenicima: Koji je to broj koji kad se pomnoži sa *a* daje rezultat *a*? Sad učenici shvataju da je to broj 1 i ispravljaju zadatak. Koeficijent uz član *a* je broj 1 i takvo dopisivanje koeficijenta tamo gde fali olakšava učenicima da korektno urade zadatak.

$2a^2b + 4ab + 1a = a \cdot (2ab + 4b + 1)$

Napomena: Kad primenjujemo zakon distributivnosti često kažemo da „izvlačimo zajednički činilac ispred zagrade“, ali zbog komutativnosti množenja je svejedno da li je zajednički činilac ispred ili iza zagrade.

Kod sabiranja monoma potrebno je zadavati primere gde je dat zbir nesličnih monoma (koji obrazuju polinom), jer učenici često ne shvataju da različite pojmove (objekte) ne mogu da sabiraju.

Pogrešno urađen primer: $2x^3 + 5x = 7x^4$

Učenicima često nije jasno šta znači rastaviti polinom na činioce i zašto to rade. Potrebno je insistirati na primeni rastavljanja polinoma na činioce da uvide da pojedine probleme najlakše mogu rešiti na taj način.

Iako je provera da li su dobro rastavili polinom na činioce korisna, učenici misle da je u zadatku potrebno vratiti se na prvobitni oblik, tj. ne znaju kad su završili sa rastavljanjem polinoma. Primer: $16a + 2a^2 = 2a \cdot (8 + a) = 16a + 2a^2$. Da bi se to izbeglo ideja je da provera bude usmena. Svaki put kad se vrate na početni polinom (koji je predstavljen kao zbir monoma) ponavljati im da kad su došli do proizvoda polinoma bili su na pravom putu da reše zadatak. Još treba da pokušaju da svaki od tih polinoma napišu u obliku proizvoda drugih polinoma i ako to ne može da se uradi završili su zadatak.

<u>Primer</u>: Rastavi polinom $x^4 - 2x^2 - 3$ na proste činioce

$$x^4 - 2x^2 - 3 = \underbrace{(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1}_{kvadrat\ binoma} - 4 = \underbrace{(x^2 - 1)^2 - 2^2}_{razlika\ kvadrata}$$

$$= (x^2 - 1 - 2) \cdot (x^2 - 1 + 2) = \underbrace{(x^2 - 3)}_{razlika\ kvadrata} \cdot \underbrace{(x^2 + 1)}_{zbir\ kvadrata}$$

$$= \left(x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) \cdot (x^2 + 1) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 1)$$

Napomena: Razlika kvadrata može da se rastavi na činioce, a zbir kvadrata ne može da se rastavi na činioce (u skupu realnih brojeva).

Učenicima je ponekad teško da uoče slične monome ako se redosled promenljivih promeni.

<u>Primer</u>: Koji od sledećih monoma $2xy^2z^5$, $-5y^2xz^5$, $2xyz$, $\frac{1}{6}xy^2z^5$, $9xz^5$ su slični?

Učenici odmah uoče da su $2xy^2z^5$ i $\frac{1}{6}xy^2z^5$ slični monomi, a za $-5y^2xz^5$ kažu da nije njima sličan. Tada je jako bitno podsetiti učenike da je množenje komutativana operacija i da monom $-5y^2xz^5$ mogu da napišu u obliku $-5xy^2z^5$. Sada je jasno da su slični monomi $2xy^2z^5$, $\frac{1}{6}xy^2z^5$ i $-5y^2xz^5$.

4. Primena stečenog znanja o polinomima

Polinomi imaju veoma značajnu primenu u svim oblastima matematike, fizici, hemiji, astronomiji, meteorologiji, ekonomiji, računarskoj tehnici i informatici.

4.1. Primena rastavljanja polinoma u rešavanju jednačina

Mislim da je ovde važno napomenuti šta su nule (koreni) nekog polinoma, iako se to u udžbenicima ne obrađuje, a u osmom razredu se uči šta je nula funkcije. Nula polinoma P je vrednost promenljive x za koju je $P = 0$, tj. rešavanjem jednačine $P = 0$ dobijamo nule tog polinoma.

Primeri: Reši jednačine

a) $4x^2 - 3 = 0$

$$4x^2 - 3 = (2x)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(2x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2x + \sqrt{3}\right)$$
$$\left(2x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(2x + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$2x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ili} \quad 2x + \sqrt{3} = 0$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ili} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $4x^3 + 5x^2 = 0$

$$4x^3 + 5x^2 = x^2 \cdot (4x + 5)$$
$$x^2 \cdot (4x + 5) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \text{ili} \quad 4x + 5 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ili} \quad x = -\frac{5}{4}$$

c) $25x^2 - 10x + 1 = 0$

$$25x^2 - 10x + 1 = (5x - 1)^2$$
$$(5x - 1)^2 = 0$$
$$5x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{5}$$

d) $a^2 + 6a + 6 = 0$

$$a^2 + 6a + 6 = \overbrace{a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 9} - 3 = (a + 3)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$= \left(a + 3 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(a + 3 + \sqrt{3}\right)$$
$$\left(a + 3 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(a + 3 + \sqrt{3}\right) = 0$$
$$a + 3 - \sqrt{3} = 0 \quad \text{ili} \quad a + 3 + \sqrt{3} = 0$$
$$a = -3 + \sqrt{3} \qquad \text{ili} \quad a = -3 - \sqrt{3}$$

e) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

Rastavljamo na činioce polinom $4x^2 - 3x - 1$.

$4x^2 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x$ i $-1 = -1 \cdot 1$. Član $4x^2$ zapisujemo u obliku proizvoda dva činioca, npr. $4x^2 = (2x) \cdot (2x)$ jer po jedan moramo da stavimo u svaku zagradu. Popunjavamo zagrade $(2x - 1) \cdot (2x + 1)$ i množenjem proveravamo da li dobijamo polazni polinom. Pošto je $(2x - 1) \cdot (2x + 1) = 4x^2 - 1$ zaključujemo da smo napravili grešku pri izaboru činioca člana $4x^2$, pa ih biramo na drugi način, npr. $4x^2 = (4x) \cdot x$ i ponovo popunjavamo zagrade izostavljajući znak.

$(4x \quad 1) \cdot (x \quad 1)$ Sad množimo svaki član prvog binoma sa svakim članom drugog binoma.

$4x^2 \quad 4x \quad x \quad 1$

Posmatramo na koji način od 4x i x možemo da dobijemo –3x. Pošto je $-4x + x = -3x$, dopunjavamo znak članovima.

$4x^2 - 4x + x - 1$

$(4x + 1) \cdot (x - 1)$

Sad se vraćamo na rešavanje polazne jednačine $4x^2 - 3x - 1 = 0$.

$(4x + 1) \cdot (x - 1) = 0$

$4x + 1 = 0$ ili $x - 1 = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ ili $x = 1$

4.2. Izračunavanje brojevne vrednosti izraza

Često možemo na lakši način da izračunamo brojevnu vrednost izraza koristeći formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata, i zakon distributivnosti.

Primeri: Izračunaj

Primenom zakona distributivnosti skraćujemo postpak izračunavanja.

a) $14{,}35 \cdot 12{,}52 + 7{,}48 \cdot 14{,}35 = 14{,}35 \cdot (12{,}52 + 7{,}48) = 14{,}35 \cdot 20 = 287$

$153{,}7 \cdot 13{,}4 + 1{,}6 \cdot 153{,}7 - 5 \cdot 153{,}7 = 153{,}7 \cdot (13{,}4 + 1{,}6 - 5) = 153{,}7 \cdot 10 = 1537$

Primena formule za razliku kvadrata ponekad nam olakšava izračunavanje brojevne vrednosti izraza.

b) $375^2 - 125^2 = (375 - 125) \cdot (375 + 125) = 250 \cdot 500 = 125000$

$673{,}25^2 - 326{,}75^2 = (673{,}25 - 326{,}75) \cdot (673{,}25 + 326{,}75)$

$= 346{,}5 \cdot 1000 = 346500$

Primenom formule za kvadrat binoma takođe možemo da odredimo kvadrat nekog broja.

c) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$
$103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$

4.3. Primena polinoma u dokazivanju Pitagorine teoreme

Dokaz Pitagorine teoreme primenom formule za kvadrat binoma izveo je Džejms Garfild, 20. predsednik SAD. Prema pisanjima dokaz je nastao kao posledica matematičke rasprave sa članovima Kongresa.

Ideja dokaza je da se na polazni pravougli trougao nadoveže još jedan njemu podudaran, tako da se kraća kateta prvog i duža kateta drugog nalaze na jednoj pravoj i da polaze iz istog temena. Zatim se spajanjem preostala dva temena trouglova koja pripadaju hipotenuzama dobija pravougli trapez čije su osnovice dužine *a* i *b*, a visina dužine *a*+*b*.

Iz podudarnosti trouglova ΔABC i ΔDEF znamo da je $\angle FDE = \angle CAB,\ \angle DEF = \angle ABC$. Važi da je $\angle FDE + \angle DEF = 90°,\ \angle CAB + \angle ABC = 90°$, tj. $\angle CAB + \angle DEF = 90°$. Ugao kod temena A trougla ΔABD je prav jer je suplementan zbiru uglova $\angle CAB$ i $\angle DEF$, tj. trougao ΔABD je prav je pravougli.

Površinu trapeza možemo odrediti na dva načina. Sa jedne strane, njegova površina se može dobiti kao proizvod poluzbira osnovica i visine, a sa druge kao zbir površina tri trougla na koje je podeljen, pa važi:

$$P_{\square BCFD} = P_{\Delta DEF} + P_{\Delta ABC} + P_{\Delta DAB}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

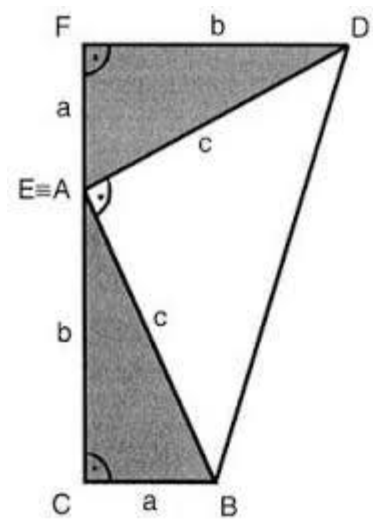
$$\frac{(a+b)^2}{2} = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{2} = a \cdot b + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2}{2} + a \cdot b + \frac{b^2}{2} = a \cdot b + \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

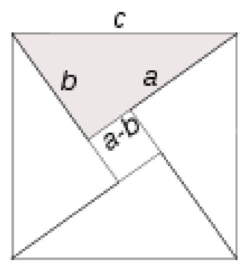


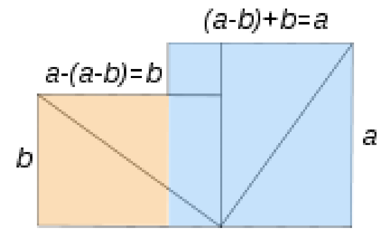
Još jedan dokaz Pitagorine teoreme potiče od čuvenog indijskog matematičara Bhaskare koji je živeo u 12. veku. Bhaskara je sastavio četiri podudarna trougla. Hipotenuza tih trouglova jednaka je stranici *c*, dok duže katete *b* tih trouglova obrazuju unutrašnji kvadrat dužine stranica *b-a*.

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (b-a)^2$$

$$c^2 = 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$





4.4. Neki zanimljivi zadaci

<u>Zadatak 1</u>: Proizvod dva uzastopna neparna prirodna broja je 143. Koji su to brojevi?

Rešenje:

I način: Ako sa x predstavimo nepoznati neparni broj, onda njemu uzastopni neparni broj je $x+2$ ili $x-2$. Tada je:

$x \cdot (x+2) = 143$

$x^2 + 2x - 143 = 0$ Pokušavamo da napravimo kvadrat binoma.

$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{kvadrat binoma}} - 144 = 0$

$(x+1)^2 - 12^2 = 0$

$(x+1-12) \cdot (x+1+12) = 0$

$(x-11) \cdot (x+13) = 0$

$x - 11 = 0$ ili $x + 13 = 0$

$x = 11$ ili $x = -13$

Pošto se u zadatku traži da x bude prirodan broj, onda je $x = 11$ i njemu uzastopni prirodan broj je $x + 2 = 11 + 2 = 13$. Zaista, $11 \cdot 13 = 143$.

II način: Ako je je x paran broj, njemu susedni neparni brojevi su $x-1$ i $x+1$. Tada je:

$(x-1) \cdot (x+1) = 143$ Primenjujemo formulu za razliku kvadrata.

$x^2 - 1 = 143$

$x^2 - 1 - 143 = 0$

$x^2 - 144 = 0$

$x^2 - 12^2 = 0$ Primenjujemo formulu za razliku kvadrata.

$(x-12) \cdot (x+12) = 0$

$x - 12 = 0$ ili $x + 12 = 0$
$x = 12$ ili $x = -12$
Pošto x mora da bude prirodan broj, onda je $x = 12$, a njemu susedni neparni brojevi su 11 i 13.

<u>Zadatak 2</u>: Dokaži da je razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja deljiva sa 8.

Rešenje: Parne brojeve možemo predstaviti u obliku $2k$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, a njemu susedne neparne u obliku $2k - 1$ i $2k + 1$. Tada je:

$$(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = \big((2k+1) - (2k-1)\big) \cdot \big((2k+1) + (2k-1)\big)$$
$$= (2k + 1 - 2k + 1) \cdot (2k + 1 + 2k - 1) = 2 \cdot 4k = 8k$$

Broj 8k je deljiv sa 8, tj. razlika kvadrata dva uzastopna neparna broja je deljiva sa 8.

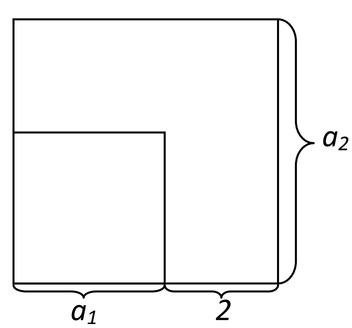
<u>Zadatak 3</u>: Stranice dva kvadrata se razlikuju za 2cm, a njihove površine za 40cm^2. Odredi dužine stranica tih kvadrata.

Rešenje: Neka su, redom, a_1 i a_2 dužine stranica manjeg i većeg kvadrata, a P_1 i P_2 njihove površine.

$a_2 - a_1 = 2 \implies a_2 = a_1 + 2$
$P_2 - P_1 = 40$

Površina kvadrata stranice *a* se izračunava po formuli $P = a^2$.

$a_2{}^2 - a_1{}^2 = 40$
$(a_1 + 2)^2 - a_1{}^2 = 40$
$a_1{}^2 + 4a_1 + 4 - a_1{}^2 = 40$
$4a_1 + 4 = 40$
$4a_1 = 40 - 4 = 36$
$a_1 = 36 : 4$
$a_1 = 9cm$
$a_2 = a_1 + 2$
$a_2 = 11cm$



<u>Zadatak 4</u>: Zamisli broj. Od tog broja oduzmi 7. Zatim dobijeni rezultat pomnoži sa 3. Sad dodaj 30, pa rezultat podeli sa 3. Oduzmi prvobitni zamišljeni broj. Dobio/la si broj 3 (uvek se dobija broj 3 kao konačan rezultat). Koristeći polinome ilustrovaćemo ovaj „trik".

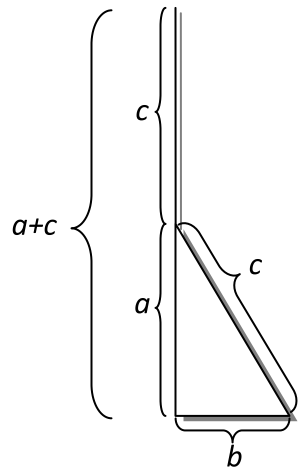
Neka je x zamišljeni broj.

$$\frac{((x-7)\cdot 3)+30}{3}-x=\frac{3x-21+30}{3}-x=\frac{3x+9}{3}-x=\frac{3\cdot(x+3)}{3}-x=x+3-x=3$$

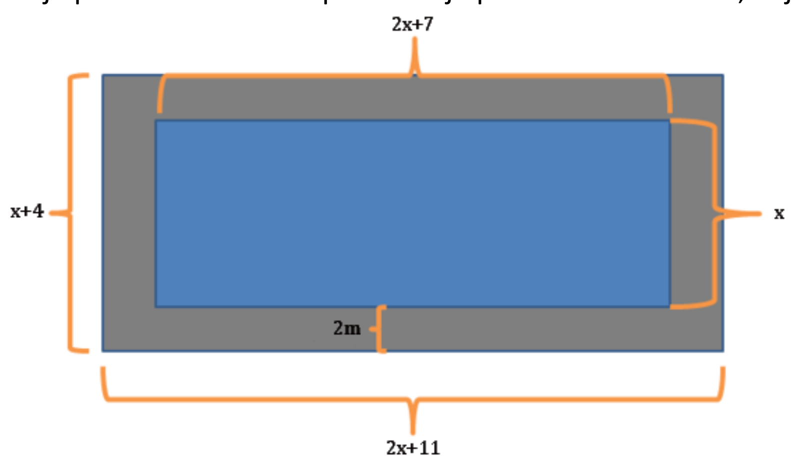
<u>Zadatak 5</u>: Telefonski stub koji je bio visine 25m prelomljen je usled nevremena i vrhom dodiruje zemlju na udaljenosti 5m od podnožja. Na kojoj visini je prelomljen stub?

$b=5$
$a+c=25 \;\Rightarrow c=25-a$
$a=?$

$c^2=a^2+b^2$
$(25-a)^2=a^2+5^2$
$25^2-2\cdot 25\cdot a+a^2=a^2+25$
$625-50a=25$
$50a=625-25=600$
$a=600:50$
$a=12m$



<u>Zadatak 6</u>: Marko želi da napravi vrt u svom dvorištu. On želi da dužina njegove leje bude sedam metara duža od dve širine leje. Takođe želi da napravi stazu oko leje koja je 2 metara široka, kao što je prikazano na slici ispod. Ako je površina staze 62m^2, koje su dimenzije leje?



$(x+4)\cdot(2x+11)-x\cdot(2x+7)=62$
$2x^2+11x+8x+44-2x^2-7x=62$
$12x+44=62$
$12x=62-44$
$12x=18$
$x=\frac{18}{12}$
$x=1{,}5m$ širina leje
$2x+7=2\cdot 1{,}5+7=10m$ dužina leje

Zaključak

U ovom radu uveden je pojam polinoma i osnovne operacije sa njima: sabiranje, oduzimanje i množenje. Za svaku operaciju predloženo je nekoliko načina rada, a učenik uvek treba da izabere opciju koja je njemu najpogodnija. Bitno je dopustiti učenicima da razvijaju i predlažu neke svoje ideje za rešavanje zadataka, jer u protivnom može se desiti da nauče šablon koji neće znati da primene na teže probleme. Potrebno je uraditi što više različitih tipova zadataka i izložiti nekoliko puteva rešavanja. Dakle, na mehanizovanju ne treba insistirati, ali razvijanje pamćenja je vrlo važan zadatak nastave matematike. Učenik treba mnoge činjenice da zapamti da bi pomoću njih mogao misliti. Važno je od samog početka podsticati učenike na induktivno mišljenje, tj. na uopštavanje postupaka iz konkretnih primera. Takođe, insistirati da, kad god je u prilici, učenik izvrši analizu, sintezu i dedukciju, ali da obazrivo primenjuje analogiju.

Literatura

[1] Udžbenik iz matematike za sedmi razred osnovne škole – Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Klett, Beograd, 2015.

[2] Zbirka zadataka iz matematike za sedmi razred osnovne škole – Sanja Milojević, Nenad Vulović, Klett, Beograd, 2015.

[3] Matematika za 7. razred osnovne škole – Siniša Ješić, Dragica Mišić, Marko Ignjatović, Nataša Babačev, Gerundijum, Beograd, 2012.

[4] Matematika za sedmi razred osnovne škole – Svetozar Milić, Branko Jevremović, Marko Ignjatović, ZUNS, Beograd, 2012.

[5] Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi – Stanko Prvanović, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1970.

[6] http://www.mathtutor.ac.uk/algebra/factorisingquadratics