



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

**КРИВЕ КОНСТАНТНЕ
ГЕОДЕЗИЈСКЕ КРИВИНЕ
ПОЕНКАРЕОВЕ ГОРЊЕ
ПОЛУРАВНИ**

МАСТЕР РАД

Аутор:
Давид Петровић

Ментор:
др Мирослава Антић

Београд
Мај 2016.

Садржај

Увод	1
1 Површи са метриком	2
Појмови диференцијалне геометрије	
површи	2
Раван Лобачевског	6
2 Варијациони рачун	9
Формулација проблема	9
Услови првог реда	10
Теорија поља у варијационом рачуну	12
Геодезијске и варијациони рачун	13
3 Полуравански модел геометрије Лобачевског	15
Геодезијске линије полураванског модела	16
Изометрије у \mathbb{H}	24
Геодезијска кривина	35
Литература	47

Увод

Циљ овог рада је да читаоцу представимо полуравански модел геометрије Лобачевског.¹

Плејферова аксиома, еквивалентна Петом Еуклидовом постулату, наводи да за тачку A и праву p која је не садржи у њима одређеној равни постоји тачно једна права која садржи A , а дисјунктна је са p . У 19. веку Николај Лобачевски и Јанош Бољај, независно један од другог, изучавају геометријску теорију у којој претпостављају да важи негација овог тврђења, и тако заснивају хиперболичку геометрију. Касније, у еуклидској геометрији конструисани су многи модели хиперболичке геометрије равни и простора, међу којима су најпознатији Поенкареов диск модел, Клајнов диск модел и Поенкареова горња полураван. Слично, постоје и модели еуклидске геометрије реализовани у хиперболичком простору, те су ове две теорије еквиконзистентне.

Прва два одељка садрже сведену теоријску основу из две различите области математике.

Основно из теорије диференцијалне геометрије непоходно за разумевање главног текста рада наведено је у Одељку 1.

Теореме из варијационог рачуна коришћене су само у одређивању геодезијских линија полураванског модела у истоименој секцији, а неопходна тврђења су изложена у Одељку 2.

Одељак 3 је главни део рада. Он почиње дефинисањем Поенкареовог полураванског модела. Наставља се проналажењем геодезијских линија где решавамо управо проблем варијационог рачуна. Касније одређујемо све криве константне геодезијске кривине, и закључујемо да се ради о епициклима. На крају рада извршена је класификација епицикала.

Специјални случај епицикала јесу геодезијске линије. Неформално речено, геодезијске су оне линије на површи које немају закривљење. У еуклидској равни то су управо праве линије. Најкраћи пут између две тачке на површи јесте управо по геодезијској. Сем тога геодезијске се могу описати и као линије које на површи имају константну брзину, односно константан први извод. Термин геодезијска долази из геодезијске науке која мери растојања на Земљиној површини.

Ради бољег разумевања модела, размотрене су и основне трансформације, изометрије. Извели смо и истакли битну особину да су све изометрије полураванског модела билинеарне трансформација познате као Мебијусове трансформације.

Захвалан сам члановима комисије др Владимиру Јанковићу, др Тијани Шукиловић и ментору др Мирослави Антић на коментарима и саветима који су помогли да побољшам квалитет и коначан изглед рада.

¹Хиперболичка геометрија је други прихваћени назив.

Одељак 1

Површи са метриком

У овом одељку даћемо кратак преглед појмова и тврђења везаних за диференцијалну геометрију површи, као и саму раван Лобачевског. За више детаља видети још и [10].

Појмови диференцијалне геометрије површи

Нека је $U \subset \mathbb{R}^2$ област. Ако је $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$, инјективно и диференцијабилно пресликавање ранга два, слика $f(U) = M$ је диференцијабилна површ. Ако су u и v локалне координате у U , тада је M параметризована са u и v .

Крива површи M је пресликавање $\bar{\alpha} : I \rightarrow M$ при чему је I интервал ($I \subset \mathbb{R}$). Криву можемо задати и као пресликавање $\alpha : t \mapsto (u(t), v(t))$, где координатне функције површи зависе од параметра t , односно важи $\bar{\alpha}(t) = f \circ \alpha(t)$. Ако је пресликавање α диференцијабилно кажемо да је $\bar{\alpha}$ диференцијабилна крива.

Пример 1. Крива задата са $t \mapsto (t, v_0)$, $v_0 = \text{const.}$ је координатна крива. Слично и крива $t \mapsto (u_0, t)$ је координатна.

Свакој тачки P површи M придружимо дводимензиони векторски простор $T_P M$ којег називамо тангентним простором те површи у тачки P . Он је скуп свих тангентних вектора на криве површи M које садрже P . При том, ако је крива кроз P задата са $t \mapsto (u(t), v(t))$, тангентни вектор у тачки $f(u(t_0), v(t_0))$, где је $t_0 \in I$ дат је са $(u'(t_0), v'(t_0))$.

Једна база тангентног простора $T_P M$ је састављена од вектора тангентних на координатне криве:

$$\partial u_P = (1, 0)_P, \quad \partial v_P = (0, 1)_P.$$

Дефиниција 1. Нека су u и v координате диференцијабилне површи M , и f и g диференцијабилне функције $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Пресликавање дато са $P \mapsto f(P) \cdot \partial u_P + g(P) \cdot \partial v_P$ назива се векторско поље површи M .

Векторско поље можемо интуитивно сматрати глатким одабиром тангентних вектора на површи.

Дефиниција 2. Линеарна конексија на диференцијабилној површи M је пресликавање $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, где су X, Y и $\nabla_X Y$ векторска поља за које важи:

1. $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y$
2. $\nabla_X (fY_1 + gY_2) = X(f)Y_1 + f \nabla_X Y_1 + X(g)Y_2 + g \nabla_X Y_2$,
где су $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције.

При том, ако је $X = \alpha \cdot \partial u + \beta \cdot \partial v$, онда је $X(f) = \alpha \frac{\partial f}{\partial u} + \beta \frac{\partial f}{\partial v}$.

На свакој површи постоји више линеарних конексија. С обзиром на особине 1. и 2. свака од њих је одређена на јединствен начин вредностима на пољима ∂u и ∂v .

Ако запишемо

$$\nabla_{\partial u} \partial u = \Gamma_{uu}^u \partial u + \Gamma_{uu}^v \partial v$$

$$\nabla_{\partial u} \partial v = \Gamma_{uv}^u \partial u + \Gamma_{uv}^v \partial v$$

$$\nabla_{\partial v} \partial u = \Gamma_{vu}^u \partial u + \Gamma_{vu}^v \partial v$$

$$\nabla_{\partial v} \partial v = \Gamma_{vv}^u \partial u + \Gamma_{vv}^v \partial v$$

коэффициенти Γ_{ij}^k , $i, j, k \in \{u, v\}$ називају се Кристофеловим симболима те конексије.

Примедба. Уколико су X, Y векторска поља на површи M може се показати да је пресликавање $[X, Y]$ дато са

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

такође векторско поље на површи, и називамо га Лијевим заградама.¹

Дефиниција 3. Ако су E_1, E_2 векторска поља на површи M , таква да $E_1(P), E_2(P)$ чине ортонормирану базу простора $T_P M$ за сваку тачку P површи M , тада је Гаусова кривина у тачки P дата са

$$K(P) = g(\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_1, E_2)(P).$$

Може се показати да дефиниција Гаусове кривине не зависи од избора пара векторских поља E_1, E_2 .

¹Sophus Lie (1842-1899.) норвешки математичар.

Дефиниција 4. Нека је g_P скаларни производ у тангентном простору $T_P M$. Пресликавање g које пару векторских поља X, Y придружује диференцијабилну функцију на M дата са

$$g(X, Y)(P) = g_P(X(P), Y(P))$$

назива се метрика.

Метрику интуитивно можемо схватити као гладак одабир скаларних производа на површи.

Како је скаларни производ билинеарна форма, очигледно је метрика одређена на јединствен начин вредностима за векторска поља ∂u и ∂v .

Ако означимо $g(\partial u, \partial u) = E$, $g(\partial u, \partial v) = F$, $g(\partial v, \partial v) = G$, онда метрику краће запишемо на следећи начин:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.1)$$

Израз (1.1) још називамо и првом фундаменталном формом у координатама u и v .

Пример 2. У еуклидској равни стандардна метрика дата је са $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Ако је $\alpha : I \rightarrow U$ крива на површи, дужина тангентног вектора у тачки P дата је са $\|\alpha'\|(P) = \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))}(P)$.

Ако се две криве α и β секу у датој тачки, тада је угао између њих одређен са

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{g(\alpha', \beta')}{\sqrt{g(\alpha', \alpha')} \sqrt{g(\beta', \beta')}}. \quad (1.2)$$

Ако је $\alpha : I \rightarrow U$ крива и $\psi : I_1 \rightarrow I$, ($I_1 \subset \mathbb{R}$) дифеоморфизам, тада крива $\beta : I_1 \rightarrow U$ дата са $\beta = \alpha \circ \psi$ има исту слику као α . Функцију ψ називамо и репараметризацијом криве α . Тада је

$$\beta(t) = \alpha(\psi(t)) = (u(\psi(t)), v(\psi(t)))$$

$$\beta'(t) = (u'(\psi(t)) \cdot \psi'(t), v'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)) = \psi'(t) \cdot (u'(\psi(t)), v'(\psi(t))).$$

Зато је

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(\psi(t))\| \cdot \|\psi'(t)\|. \quad (1.3)$$

Дефиниција 5. Дужина криве $\alpha : I \rightarrow U$ је $l(\alpha) = \int_I \|\alpha'\|$.

Уочимо да из (1.3) следи да дужина криве не зависи од репараметризације. Ако је $t_0 \in I$ фиксирана вредност и $t \in I$: дужина криве α између тачака $\alpha(t_0)$ и $\alpha(t)$ је дата са $\int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = s$. Пресликавање $t \mapsto s$ јесте репараметризација. Параметар s назива се природним параметром и тада за $\beta(s) = \alpha(t(s))$ важи $\|\beta'\| = 1$.

Дефиниција 6. Ако су P и Q тачке површи онда је

$$\rho(P, Q) = \inf \{l(\alpha) : \alpha \text{ спаја } P \text{ и } Q\}$$

растојање тачака P и Q .

Када у површ M уведемо растојање добијамо метрички простор.

Ако су прве фундаменталне форме оригинала и слике сразмерне у свакој тачки, тада је пресликавање конформно. Тада, због (1.2) видимо да конформно пресликавање чува углове.

Дефиниција 7. Нека је функција $f : M \rightarrow M$ дата са $(u, v) \mapsto (u_1, v_1)$. Тада је Јакобијева матрица пресликавања f :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Ако је g метрика на површи тада постоји јединствена линеарна конекција за коју важи:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(\partial x_j, \partial x_k) = g(\nabla_{\partial x_i} \partial x_j, \partial x_k) + g(\partial x_j, \nabla_{\partial x_i} \partial x_k)$$

$$\text{и } \nabla_{\partial x_i} \partial x_j = \nabla_{\partial x_j} \partial x_i$$

где су $x_i, x_j, x_k \in \{u, v\}$.

Ако означимо са $g_{ij} = g(\partial x_i, \partial x_j)$ коефицијенте прве фундаменталне форме, може се показати да су Кристофелови симболи ове конекције једнаки

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right) g^{kl}, \quad (1.4)$$

при чему смо са g^{ij} означили коефицијенте матрице инверзне матрици g_{ij} .

Дефиниција 8. У случају ортогоналне параметризације површи, тј. када је $F = 0$, Кристофелови симболи дати су са

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{E_u}{2E} & \Gamma_{uu}^v &= -\frac{E_v}{2G} \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{E_v}{2E} & \Gamma_{uv}^v &= \frac{G_u}{2G} \\ \Gamma_{vv}^u &= -\frac{G_u}{2E} & \Gamma_{vv}^v &= \frac{G_v}{2G}. \end{aligned}$$

а Гаусова кривина површи са

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right).$$

Дефиниција 9. Нека је $\alpha : I \rightarrow U$ природно параметризована крива и означимо $\alpha'(s) = T$ тангентни вектор. Тада постоји јединствено јединично векторско поље N такво да (T, N) чини у свакој тачки криве позитивно оријентисану ортонормирану базу.

Како је $g(T, T) = 1$, $T(g(T, T)) = 0 \implies g(\nabla_T T, T) = 0$ те је $\nabla_T T$ колинеаран са N .

Ако је $\nabla_T T = k_g \cdot N$, k_g називамо оријентисаном геодезијском кривином криве α .

Ако је $k_g = 0$, тада је α геодезијска линија.

Лема 1. Координате векторског поља $k_g \cdot N$ су:

$$k_g \cdot N = (u'' + \Gamma_{uu}^u u'^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u v'^2, v'' + \Gamma_{uu}^v u'^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v v'^2).$$

Доказ.

$$\begin{aligned} k_g \cdot N &= \nabla_T T \\ &= \nabla_T \left(u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= T(u') \frac{\partial}{\partial u} + u' \nabla_T \frac{\partial}{\partial u} + T(v') \frac{\partial}{\partial v} + v' \nabla_T \frac{\partial}{\partial v} \\ &= u'' \frac{\partial}{\partial u} + u' \left(u' \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} + v' \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &\quad + v'' \frac{\partial}{\partial v} + v' \left(u' \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} + v' \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= u'' \frac{\partial}{\partial u} + u'^2 \cdot \left(\Gamma_{uu}^u \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{uv}^u \frac{\partial}{\partial v} \right) + v'^2 \left(\Gamma_{vv}^u \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{uv}^v \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &\quad + 2u'v' \left(\Gamma_{uv}^u \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{uv}^v \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \cdot (u'' + \Gamma_{uu}^u u'^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u v'^2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} \cdot (v'' + \Gamma_{uu}^v u'^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v v'^2). \end{aligned}$$

□

Може се показати да за произвољну тачку $P \in M$ и тангентни вектор $X_P \in T_P M$ постоји јединствена геодезијска крива кроз P тангентна на X_P .

Раван Лобачевског

Системи аксиома на којима се заснивају еуклидска и геометрија Лобачевског², упућујемо читаоца на [3] где су детаљно изложени, разликују

²Николај Иванович Лобачевски (1793 - 1856.) руски математичар.

се у једној аксиоми. У еуклидској геометрији важи пети Еуклидов постулат. Његова негација, која важи у геометрији Лобачевског, је еквивалентна тврђењу да за произвољну тачку A и праву p која је не садржи постоје бар две праве њихове равни инцидентне са A , а дисјунктне са p . Очигледно је да тада постоји бесконачно много таквих правих. Међу њима постоје две a и b такве да произвољна права кроз A сече p ако и само ако припада пару унакрсних углова које одређују a и b којима припада и p . За њих кажемо да су паралелне p . Праве те равни које не секу p нити су јој паралелне су јој хиперпаралелне. Може се показати да за две хиперпаралелне праве постоји тачно једна заједничка нормала.

Ако заједничка нормала сече хиперпаралелне праве p и q у тачкама P и Q онда је растојање између p и q једнако мери дужи PQ . Паралелне праве, иако немају заједничких тачака, су на растојању нула.

Бијекције равни Лобачевског које чувају растојања међу тачкама, односно сликају дужи у њима подударне дужи, називају се изометрије. Уколико изометрија слика оријентисане троуглове у троуглове исте оријентације кажемо да је директна, а иначе је индиректна, видети [3].

Осна рефлексија S_p хиперболичке равни, у односу на праву p , слика произвољну тачку A у A' , тако да је $AA' \perp p$ и да средиште дужи AA' , тачка A_0 припада p . Свака осна рефлексија је индиректна трансформација.

Може се показати да се произвољна изометрија хиперболичке равни може представити као композиција до три осне рефлексије. Произвољна изометрија је директна или индиректна у зависности од тога да ли се представља као композиција парног или непарног броја осних рефлексија. Ако је директна, композиција је две рефлексије $S_p \circ S_q$. Ако се p и q поклапају у питању је идентитет, ако се секу ротација око пресечне тачке, ако су паралелне орицикличка ротација, а ако су хиперпаралелне транслација.

Ако је у питању индиректна изометрија, онда може бити осна рефлексија или клизајућа рефлексија.

Важе тврђења:

Теорема 2. *Индиректна изометрија са бар једном фиксном тачком је осна рефлексија.*

Теорема 3. *Директна изометрија је одређена сликама две дате тачке.*

Теорема 4. *Директна изометрија са тачно једном фиксном тачком је ротација.*

Максималан скуп правих равни Лобачевског је прамен ако за произвољне три праве a, b, c које му припадају композиција рефлексија $S_c \circ S_b \circ S_a$ је осна рефлексија S_d . Тада и права d припада том прамену. Један прамен је одређен двома својим правима. У равни Лобачевског постоје три врсте праменова:

- конкурентни (елиптички) чије све праве садрже једну фиксирану тачку
- параболички (паралелни) чије су све праве паралелне датој полуправој
- хиперпаралелни (хиперболички) чије су све праве ортогоналне на задату праву s .

Дефиниција 10. Нека је χ прамен и X тачка која не припада свим правама тог прамена. Скуп свих слика тачке X у рефлексима у односу на праве тог прамена назива се епицикл.

Како постоје три врсте праменова, постоје и три врсте епицикала. Епицикл који одговара елиптичком прамену је круг, параболичком одговара орицикл, а хиперболичком одговара еквидистанта.

Нека су A и B две разне тачке једног епицикла дефинисаног помоћу прамена χ . Тада постоји права p прамена χ која садржи тачку A . Нека је q права прамена χ таква да се рефлексом S_q тачка A слика у тачку B . Тада важи:

$$S_q \circ S_p(A) = B.$$

Ако је прамен елиптички, праве p и q се секу и композиција је ротација. Ако је прамен параболички p и q су паралелне и композиција је орицикличка ротација. Ако је у питању хиперболички прамен композиција је translација.

При том и S_p и S_q сликају тачке епицикла у тачке епицикла односно епицикл је инваријантан за $S_q \circ S_p$. Дакле, постоји директна изометрија која слика епицикл у себе, а дату тачку A у тачку B .

Одељак 2

Варијациони рачун

У овом одељку даћемо кратак преглед појмова везаних за варијациони рачун, који ће нам бити потребни у даљем раду.

Формулација проблема

Започећемо одељак формулацијом најједноставнијег проблема варијационог рачуна који ћемо решавати у одређивању геодезијски линија. Означаваћемо га и краће са НПВР. Он гласи:

- Наћи функцију $y_*(\cdot) \in C^1[x_0, x_1]$ која минимизује функционал $J(y(\cdot))$, при чему је:

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x)) dx,$$

и која задовољава почетне услове $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Функцију $L(x, y, y') : V \rightarrow \mathbb{R}$ називамо интегрант. Њен домен је област $V \subset \mathbb{R}^3$. Са x, y, y' смо означили прву, другу и трећу променљиву интегранта $L = L(x, y, y')$ ¹. Са $L_x, L_y, L_{y'}$ ћемо означавати одговарајуће парцијалне изводе.

Са $\Gamma^1 y(\cdot)$ означаваћемо проширени график функције $y(\cdot)$, задат са:

$$\Gamma^1 y(\cdot) = \{(x, y(x), y'(x)) : x \in [x_0, x_1]\}.$$

Домен функционала $J(y(\cdot))$ је скуп

$$D = \{y(\cdot) \in C^1[x_0, x_1] : \Gamma^1(y(\cdot)) \subset V\},$$

док ћемо са D_0 означавати скуп функција $y(\cdot) \in D$ које задовољавају почетне услове, и њих ћемо звати допустивим функцијама

$$D_0 = \{y(\cdot) \in D : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}.$$

¹Због честог појављивања интегранта у овом одељку, означаваћемо га краће са L .

Решења НПВР

Постоје три типа решења НПВР: два локална (слабо и јако) и једно глобално. Локално решење је она функција y_* која минимизује функционал $J(y(\cdot))$ у некој својој околини. Јако решење y_* задовољава:

$$J(y_*(\cdot)) \leq J(y(\cdot))$$

за сваку функцију $y(\cdot) \in D_0$ тако да је $\|y_*(\cdot) - y(\cdot)\|_0 < \epsilon$ за неко $\epsilon > 0$, при чему је норма $\|\cdot\|_0$ дефинисана са:

$$\|y(\cdot)\|_0 = \sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x)|.$$

Ако уместо $\|\cdot\|_0$ норму користимо норму $\|\cdot\|_1$ дефинисану са:

$$\|y(\cdot)\|_1 = \max \left\{ \sup_{x \in [x_0, x_1]} |y(x)|, \sup_{x \in [x_0, x_1]} |y'(x)| \right\}$$

и посматрамо околину функције $y_*(\cdot)$ у норми $\|\cdot\|_1$, онда је у питању слабо решење. Приметимо да смо код слабог решења смањили околину функције $y_*(\cdot)$ наметнувши додатан услов ограничености првог извода. Зато следи да ако је $y_*(\cdot)$ јако решење онда је оно и слабо решење.

Нама ће у овом раду бити потребно само глобално решење. Глобално решење је допустива функција $y_*(\cdot)$ која задовољава:

$$J(y_*(\cdot)) \leq J(y(\cdot))$$

за сваку функцију $y(\cdot) \in D_0$, и оно је истовремено и локално решење.

Услови првог реда

Сада ћемо навести неопходан услов који мора да задовољи функција $y_*(\cdot)$ како би била решење НПВР.

Теорема 5 (Ојлерова² теорема). *Нека интегрант L има непрекидне партиципалне изводе по другој и трећој променљивој, $L_y, L_{y'}$. Ако је $y_*(\cdot)$ слабо решење НПВР онда је $y_*(\cdot)$ решење једначине:*

$$\frac{d}{dx} L_{y'}(x, y(x), y'(x)) = L_y(x, y(x), y'(x)), \quad (2.1)$$

за свако $x \in [x_0, x_1]$.

²Leonhard Euler (1707-1783.) швајцарски математичар. Већи део живота провео у Санкт Петербургу у Русији.

Једначину (2.1) називамо Ојлеровом једначином, а одговарајућа решења $y_*(\cdot)$ ове једначине називамо екстремалама. Допустиве екстремеле јесу решења једначине (2.1) која су допустиве функције. Допустиве екстремале јесу једини кандидати за (локално и глобално) решење НПВР.

Следећа теорема даје довољан услов да екстремала буде из скупа $C^2([x_0, x_1])$.

Теорема 6 (Хилбертова³ теорема). *Нека је $L \in C^2(V)$. Ако екстремала $y_*(x)$ задовољава услов $L_{y'_i y'_i}(x, y_*(x), y'_i(x)) \neq 0$ онда је она два пута непрекидно диференцијабилна.*

За наредну дефиницију потребна нам је функција E дефинисана са:

$$E(x, y, u, v) = L(x, y, v) - L(x, y, u) - L_{y'_i}(x, y, u)(v - u).$$

Дефиниција 1. Екстремалу $y_*(\cdot)$ која задовољава услов

$$E(x, y_*(x), y'_i(x), v) \geq 0$$

за свако $v \in \mathbb{R}$ и $x \in [x_0, x_1]$ тако да је тројка $(x, y_*(x), v) \in V$, називаћемо Вајерштрасовом екстремалом интегранта L .

НПВР се може решавати и над векторским функцијама $y(\cdot)$. Тада је функционал:

$$J(y_1(\cdot), y_2(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1(x), y_2(x), y'_1(x), y'_2(x)) dx,$$

а почетни услови су дати са

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{10} \\ y_1(x_1) &= y_{11} \\ y_2(x_0) &= y_{20} \\ y_2(x_1) &= y_{21}. \end{aligned}$$

Одредимо које услове задовољава решење у овом случају.

Нека је функција $y_*(\cdot) = (y_{*1}(\cdot), y_{*2}(\cdot))$ решење одговарајућег проблема. Фиксирајмо једну координатну функцију, рецимо $y_2(\cdot) = y_{*2}(\cdot)$. Тада се проблем своди на већ познати случај минимизовања функционала:

$$J(y_1(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1(x), y_{*2}(x), y'_1(x), y'_{*2}(x)) dx.$$

Зато је функција $y_{*1}(\cdot)$ решење Ојлерове једначине:

$$\frac{d}{dx} L_{y'_1}(x, y_1(x), y_{*2}(x), y'_1(x), y'_{*2}(x)) = L_{y_1}(x, y_1(x), y_{*2}(x), y'_1(x), y'_{*2}(x)),$$

³David Hilbert (1862-1943.) немачки математичар.

за $x \in [x_0, x_1]$.

Аналогно, ако фиксирамо прву координатну функцију, добијамо да је функција y_{*2} решење једначине:

$$\frac{d}{dx}L_{y'_2}(x, y_{*1}(x), y_2(x), y'_{*1}(x), y'_2(x)) = L_{y_2}(x, y_{*1}(x), y_2(x), y'_{*1}(x), y'_2(x)),$$

за $x \in [x_0, x_1]$, те тако добијамо да у случају решавања проблема на домену векторских функција, решење задовољава систем једначина облика:

$$\frac{d}{dx}L_{y'_i} = L_{y_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Теорија поља у варијационом рачуну

Нека је у овој секцији интегрант $L \in C^2(V)$.

Нека је G област у \mathbb{R}^2 . Функцију $u(x, y) \in C^1(G)$ ћемо звати поље. За поље $u(x, y)$ ћемо рећи да је спрегнуто са интегрантом L ако је тројка $(x, y, u(x, y)) \in V$ за свако $(x, y) \in G$ и ако за функције $p(x, y)$ и $H(x, y)$ дефинисане формулама:

$$p(x, y) = L_{y'}(x, y, u(x, y))$$

$$H(x, y) = L_{y'}(x, y, u(x, y))u(x, y) - L(x, y, u(x, y)),$$

криволинијски интеграл

$$\int_C p(x, y)dy - H(x, y)dx$$

не зависи од пута у области G .

Напомена. Пошто $L \in C^2(V)$, $u(x, y) \in C^1(G)$ онда су $p(x, y)$ и $H(x, y)$ глатке.

За област ћемо рећи да је једноструко (просто) повезана уколико се свака контура може непрекидном трансформацијом превести у тачку без напуштања те области.

Дефиниција 2. Функција $y(x)$ јесте трајекторија поља $u(x, y)$ ако је решење диференцијалне једначине:

$$u(x, y(x)) = y'(x).$$

Следе две теореме које повезују трајекторије поља са екстремалама проблема.

Теорема 7. *Ако је поље $u(x, y)$ спрегнуто са интегрантом L онда је свака трајекторија поља $u(x, y)$ екстремала интегранта L .*

Теорема 8. Нека је G једноструко повезана област у \mathbb{R}^2 . Ако је свака трајекторија поља $u(x, y)$ екстремала интегранта L , онда је поље $u(x, y)$ спрегнуто са интегрантом L .

Дефиниција 3. Поље $u(x, y)$ спрегнуто са L је Вајерштрасово поље, ако задовољава:

$$E(x, y, u(x, y), v) \geq 0$$

за $(x, y) \in G$ и за свако $v \in \mathbb{R}$ за које је израз дефинисан, тј. $(x, y, v) \in V$.

Теорема 9. Поље $u(x, y)$ спрегнуто са интегрантом L је Вајерштрасово поље интегранта L ако и само ако је свака трајекторија поља $u(x, y)$ Вајерштрасова екстремала интегранта L .

Теорема 10 (Довољан услов екстремума). Нека је $u(x, y)$ Вајерштрасово поље интегранта L дефинисано на G . Нека скуп G покрива пресек пројекције скупа V на равни (x, y) и траке $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}$. Ако је допустива екстремала u_* трајекторија поља $u(x, y)$, онда је она глобално решење НПВР.

За фамилију екстремала $u_\lambda(x) = u(x, \lambda)$ ћемо рећи да једноструко прекрива област G уколико кроз сваку тачку $(x, y) \in G$ пролази тачно једна екстремала u_λ .

Теорема 11. Нека су Γ и G једноструко повезане области у \mathbb{R}^2 , и $u(x, \lambda) \in C^2(\Gamma)$. Ако су задовољени услови:

- а) За фиксирано λ , $u(x, \lambda)$ је екстремала интегранта L чији график лежи у G ,
- б) Екстремале из а) једноструко прекривају област G ,
- в) $\frac{\partial u}{\partial \lambda}(x, \lambda) \neq 0$.

Тада постоји глатко поље $u(x, y)$ дефинисано на G коме су екстремале из а) трајекторије.

Напомена. Поље $u(x, y)$ из претходне теореме је спрегнуто са интегрантом L .

Геодезијске и варијациони рачун

У овој секцији доказаћемо следеће тврђење:

Теорема 12. Нека је γ најкраћа крива која лежи на површи M и повезује две фиксирани тачке на тој површи. Тада је $k_g = 0$ дуж γ .

Доказ. Нека су $u^1 = u$ и $u^2 = v$ локалне координате површи M . Затим нека је прва фундаментална форма површи M дата са $ds^2 = g_{ij}u^i u^j$. При том смо користили Ајнштајнову нотацију за сумирање по заједничком индексу, што је скраћена ознака за $g_{ij}u^i u^j = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}u^i u^j$. Такође, извод ћемо уместо са $u'(x)$ означавати са $\dot{u}(x)$.

Како се дужина криве рачуна по формули:

$$l(\gamma) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dx,$$

онда се налажење криве најмање дужине своди на проблем минимизовања функционала $J(u(\cdot)) = J(u^1(\cdot), u^2(\cdot)) = l(\gamma)$.

Интегрант је облика $L = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$, а одговарајући парцијални изводи:

$$L_{u^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$$L_{\dot{u}^k} = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{u}^k} g_{kj} \dot{u}^j.$$

Сада добијамо Ојлерове једначине облика (2.2):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{u}^k} g_{kj} \dot{u}^j \right) = \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j, \quad k = 1, 2.$$

Ако природно параметризујемо криву, онда је $ds = \sqrt{g_{ij} u^i u^j} = 1$. Заменом у Ојлеровим једначинама добијамо:

$$g_{kj} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.3)$$

Ако једнакости (2.3) помножимо са g^{mk} и сумирамо по k добићемо:

$$g^{mk} g_{kj} \ddot{u}^j + \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad m = 1, 2.$$

Имамо из (1.4) да се Кристофелови симболи рачунају као:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).$$

Зато на крају добијамо систем:

$$\ddot{u}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad m = 1, 2. \quad (2.4)$$

Но како су једначине (2.4) управо координате вектора $k_g \cdot N$, што смо показали у Леми 1, следи да је геодезијска кривина нула. \square

Одељак 3

Полуравански модел геометрије Лобачевског

Један од модела геометрије Лобачевског је и Поенкареов¹ полуравански модел. Представићемо његова својства у овом одељку.

Дефиниција 1. Нека су у еуклидској равни дате Декартове правоугле координате. Полураван чији је руб x -оса, а која садржи тачке са позитивном y координатом називамо горња полураван. Како координате (x, y) произвољне тачке можемо представити и у облику комплексног броја $z = x + iy$ тачке горње полуравни дате су са

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Руб ове полуравни, праву $\text{Im}(z) = 0$, називамо апсолутом.

Метрика (односно прва фундаментална форма) у \mathbb{H} је дата са:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Она се разликује у односу на еуклидску метрику за именилац y^2 . Како су две метрике у свакој тачки горње полуравни сразмерне са фактором y^2 , оне су конформне. То значи да су хиперболичке мере углова између кривих исте као и њихове еуклидске мере.

Ипак, како се ове две метрике не подударају, дужине кривих горње полуравни у двема метрикама се у општем случају разликују. Зато су и геодезијске криве ове две метрике различите. Подсетимо се и да је дужина криве независна од параметризације.

¹Jules Henri Poincare (1854.-1912.) француски математичар.

Геодезијске линије полураванског модела

Сада ћемо пронаћи геодезијске криве горње полуравни, као најкраће криве које спајају две тачке.

Потражимо прво најкраће криве које повезују две тачке које припадају еуклидској полуправој нормалној на апсолуту. Њихове координате су (x_0, y_0) и (x_0, y_1) .

Потражимо прво дужину криве чија слика припада тој полуправој. Њена параметризација је $x(t) = (x_0, y(t))$, $y(t) \in [y_0, y_1]$, а дужина криве је:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dy^2}}{y} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{y_0}^{y_1} = \ln \frac{y_1}{y_0}. \quad (3.1)$$

Претпоставимо сада да се крећемо по некој другој кривој чија слика не припада еуклидској правој ортогоналној на апсолуту. Без смањења општости можемо претпоставити и да је та крива растућа по другој променљивој. Тада ће важити:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dy^2}}{y} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{y_0}^{y_1}.$$

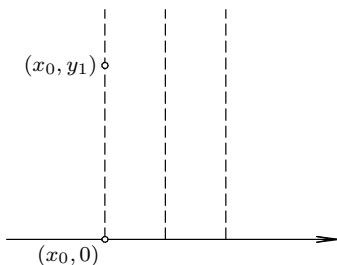
Дакле, најкраћа крива која повезује дате две тачке је еуклидска дуж која припада полуправој ортогоналној на апсолуту.

Такође, видимо да се природни параметар рачуна по формули

$$s = \ln y \Big|_{t_0}^t,$$

па је геодезијска крива параметризована природним параметром дата са $\alpha(s) = (x_0, Ce^s)$, где је C константа. Видимо да су ове геодезијске дефинисане за $s \in \mathbb{R}$.

Нека је $y = (x_0, y_1)$ тачка горње полуравни, а $x = (x_0, 0)$ тачка апсолуте. Иако тачке апсолуте по дефиницији не припадају горњој полуравни, можемо формулу (3.1) применити и на овај шири случај. Видимо да тада она имплицира да је тачка x са апсолуте бесконачно удаљена од тачке y .



Слика 1. Геодезијске линије у \mathbb{H}

Потражимо сада најкраће криве које спајају тачке $z_0 = (x_0, y_0)$ и $z_1 = (x_1, y_1)$ са различитим x координатама.



Слика 2. Крива која спаја две тачке у \mathbb{H}

Претпоставимо да смо нашли такву криву $\gamma^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}$, и означимо је са $\gamma^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$. Тада је дужина криве γ^* :

$$\begin{aligned} \|\gamma^*\| &= \inf_{\gamma} \|\gamma\| = \inf_{\gamma} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} dt \\ \gamma^*(t_0) &= \gamma(t_0) = z_0 \\ \gamma^*(t_1) &= \gamma(t_1) = z_1. \end{aligned}$$

Претпоставимо да криву γ можемо параметризовати са првом координатом као параметром, односно да њена слика не садржи дуж ортогоналну на апсолуту. Онда ћемо задатак налажења криве γ^* решавати као проблем варијационог рачуна одређивања функције:

$$\{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

која минимизује функционал $J(y(\cdot))$, при чему је:

$$J(y(\cdot)) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx.$$

Интегрант овог проблема је облика:

$$L(x, y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}.$$

Домен интегранта L је $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Парцијални изводи интегранта су дати једначинама:

$$L_y(x, y, y') = -\frac{1 + y'^2}{y^2}$$

$$L_{y'}(x, y, y') = \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Оба парцијална извода су непрекидне функције на домену V . Израчунајмо и други извод по трећој променљивој интегранта L :

$$L_{y'y'}(x, y, y') = \frac{1}{y(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Како је $L_{y'y'} > 0$, то је интегрант конвексна функција по трећој променљивој. Стога ће бити:

$$L(x, y, v) > L(x, y, u) + L_{y'}(x, y, u)(v - u).$$

Зато је $E(x, y, u, v) > 0$ за свако $u, v \in R$ те су све екстремале полазног проблема Вајерштрасове екстремале.

Како је $L \in C^2(V)$ и важи $L_{y'y'} > 0$, то из Теореме 6 закључујемо да ће екстремале имати непрекидан други извод.

Решимо Ојлерову једначину да бисмо одредили екстремале:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_{y'} &= L_y \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} \right) &= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2} \\ \frac{y''y\sqrt{1+y'^2} - y'^2\sqrt{1+y'^2} - y'y' \frac{2y'y''}{2\sqrt{1+y'^2}}}{y^2(1+y'^2)} &= -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^2} \\ y''y\sqrt{1+y'^2} - y'^2\sqrt{1+y'^2} - y'y' \frac{y''y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= -(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2} \\ y''y(1+y'^2) - y'^2(1+y'^2) - y'^2yy'' &= -(1+y'^2)^2 \\ y''y - y'^2 - y'' &= -1 - 2y'^2 - y'' \\ y''y + 1 + y'^2 &= 0 \\ (y'y + x)' &= 0 \\ y'y + x &= \text{const} = C \\ 2y'y + x &= 2C \\ \frac{d}{dx}(y^2 + x^2) &= 2C \\ y^2 + x^2 &= 2Cx + D \\ y^2 + x^2 - 2Cx + C^2 &= C^2 + D \\ (x - C)^2 + y^2 &= C^2 + D. \end{aligned}$$

На крају означимо $R^2 = C^2 + D$. Тако смо добили да екстремале нашег проблема задовољавају једначину:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

што је управо једначина еуклидског круга са центром на x -оси. Екстремале ће бити допустиве ако је тројка $(x, y, y'(x)) \in V$, и ако задовољавају почетни услов $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Како је јединствено одређен еуклидски круг са центром на реалној оси који садржи две разне тачке (x_0, y_0) и (x_1, y_1) то постоји јединствена допустива екстремала $y_*(\cdot)$. Она је део еуклидског круга са центром $(C, 0)$, који се

налази у горњој полуравни (с обзиром да је домен интегранта $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$). То је еуклидски полукруг који је дат једначином:

$$y_*(x) = \sqrt{R^2 - (x - C)^2}.$$

Потребно је још показати да ова екстремала јесте глобално решење одговарајућег проблема варијационог рачуна.

Ако за области G и Γ из Теореме 11 узмемо:

$$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

$$\Gamma = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda > 0, C - \sqrt{\lambda} < x < C + \sqrt{\lambda}\},$$

затим за параметарску фамилију екстремала изаберемо:

$$y(x, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2},$$

онда су задовољени услови Теореме 11. Наиме, са променом параметра λ , $y(x, \lambda)$ јесу концентрични полукругови који једноструко прекривају област G . Извод је једнак:

$$y'_\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C)^2}},$$

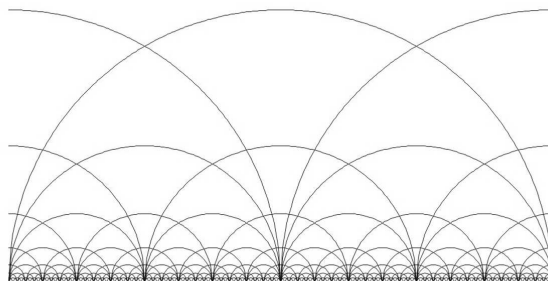
и увек је већи од нуле јер је $\lambda \in \Gamma$.

Из Теореме 11 и њене последице следи да постоји поље $u(x, y)$ спрегнуто са L коме су $y(x, \lambda)$ трајекторије.

Како су све екстремале Вајерштрасове, то ће према Теорему 9 поље $u(x, y)$ бити Вајерштрасово поље интегранта L .

Како још и G покрива пресек пројекције скупа V на раван xy и траке $[x_0, x_1] \times R$, онда су задовољени услови Теореме 10 па ће екстремала $y_*(\cdot)$ бити глобално решење полазног проблема.

Закључујемо да су ови полукругови такође геодезијске линије у \mathbb{H} .



Слика 3. Геодезијске линије у \mathbb{H}

Како за произвољну тачку горње полуравни и тангентни вектор у њој, постоји јединствена геодезијска крива која ту тачку садржи и тангентна је на дати вектор, овим смо пронашли све геодезијске криве дате метрике.

Нађимо растојање између двеју тачака са различитом x координатом. Нека су то тачке $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$ које припадају полукругу чија је једначина $\gamma(t) = (C + R \cos t, R \sin t)$, при чему параметар t узима вредности из интервала $(0, \pi)$, и нека је $\gamma(t_0) = z_0, \gamma(t_1) = z_1$.

Биће нам потребан први извод криве γ :

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t).$$

Сада израчунајмо дужину лука од z_0 до z_1 :

$$\begin{aligned} d(z_0, z_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2 \sin^2 t}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\sin t} dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Једнакост (3.2) је задовољена без апсолутне вредности јер је $\sin t$ позитивна функција на интервалу $t \in (0, \pi)$.

Да бисмо решили интеграл (3.2), уведемо смену:

$$\tan \frac{t}{2} = u.$$

Притом добијамо да:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} dt &= \frac{1}{1+u^2} du \\ \sin t &= \frac{2u}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Решимо сада неодређени интеграл уведеном сменом:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} &= \int \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}} 2 \frac{du}{1+u^2} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

где је $C \in \mathbb{R}$ нека константа. Најзад, када уведемо границе, добијамо да се растојање рачуна по формули:

$$d(z_0, z_1) = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right|_{t_0}^{t_1} = \ln \left| \tan \frac{t_1}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{t_0}{2} \right|. \quad (3.3)$$

Приметимо да, уколико се параметар t приближава вредности 0 или π то растојање тежи бесконачности. Дакле тачке са апсолуте које припадају полукругу јесу бесконачно удаљене од тачака у полуравни које припадају истом полукругу. Зато тачке апсолуте можемо сматрати бесконачно далеким.

Уочимо да се природни параметар ове криве рачуна као:

$$s = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| - C,$$

тј. да су природно параметризоване геодезијске овог облика дате са $\alpha(s) = (C + R \cos(2 \arctan e^s), R \sin(2 \arctan e^s))$ па су дефинисане за све $s \in \mathbb{R}$.

Слике геодезијских линија зовемо h -правама. Такође, сматрамо да су парови тачака (A, B) и (C, D) подударни ако су једнака растојања између A и B , односно C и D . Тада директно следи да тачке горње полуравни и њене h -праве задовољавају аксиоме геометрије равни Лобачевског, видети [3], односно представља њен модел. При том, уколико нема недоумица, идентификујемо геодезијску криву и одговарајућу h -праву.

Примедба. Израчунајмо Гаусову кривину Полураванског модела.

Коефицијенти прве фундаменталне форме су дати са: $E = G = 1/y^2, F = 0$.

Рачунајући Кристофелове симболе добијамо:

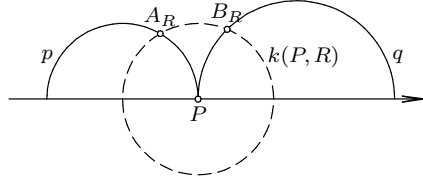
$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^x &= \frac{E_x}{2E} = 0 & \Gamma_{xx}^y &= -\frac{E_y}{2G} = \frac{1}{y} \\ \Gamma_{xy}^x &= \frac{E_y}{2E} = -\frac{1}{y} & \Gamma_{xy}^y &= \frac{G_x}{2G} = 0 \\ \Gamma_{yy}^x &= -\frac{G_x}{2E} = 0 & \Gamma_{yy}^y &= \frac{G_y}{2G} = -\frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Гаусова кривина горње полуравни је:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right)_x + \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right)_y \right) = -\frac{y^2}{2} \left(-\frac{2}{y^3} \cdot y^2 \right)_y = -\frac{y^2}{2} \cdot \frac{2}{y^2} = -1.$$

Дакле Гаусова кривина је константна и износи -1 . При том, све природно параметризоване геодезијске криве су дефинисане на \mathbb{R} . Може се показати да су ова два услова: константна негативна кривина и дефинисаност геодезијских кривих на \mathbb{R} , довољни и неопходни услови да површ буде модел геометрије Лобачевског.

Посматрајмо две геодезијске линије p и q које у еуклидском смислу имају заједничку тачку P на апсолути, са еуклидским координатама $(c, 0)$.



Слика 4. Паралелне h -праве p и q

Нека је $k(P, R)$ h -права која је еуклидски круг, и сече p и q у тачкама A_R и B_R . Растојање између h -правих p и q је инфимум растојања између њихових тачака па је мање или једнако растојању тачака A_R и B_R , које се рачуна према формули (3.3):

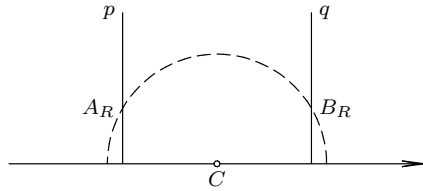
$$d(A_R, B_R) = \ln \left| \tan \frac{t_1}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{t_0}{2} \right|$$

Уколико $R \rightarrow 0$ важи да $t_1 \rightarrow \pi/2^+$, $t_0 \rightarrow \pi/2^-$. Зато растојање између A_R и B_R тежи нули, па је

$$d(p, q) \leq d(A_R, B_R) \rightarrow 0$$

па је и растојање између p и q нула. Ипак, ове h -праве немају заједничких тачака, па закључујемо да су паралелне.

Слично, нека су p и q h -праве које еуклидски представљају полу-праве ортогоналне на апсолуту у тачкама A и B . Нека је C средиште еуклидске дужи AB , а $k(C, R)$ круг.



Слика 5. Паралелне h -праве p и q

h -права коју тај круг дефинише сече p и q редом у тачкама A_R и B_R . Растојање између тих тачака рачуна се по формули (3.3), и једнако је:

$$d(A_R, B_R) = \ln \left| \tan \frac{t_1}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{t_0}{2} \right|.$$

Када $R \rightarrow +\infty$, тада $t_1 \rightarrow \pi/2^+$, $t_0 \rightarrow \pi/2^-$, па тада растојање између A_R и B_R тежи нули. Како ни праве p и q немају заједничких тачака, закључујемо да су паралелне.

Ако је p h -права и A тачка која јој не припада очигледно је да постоје тачно две h -праве кроз A које су паралелне p , на управо описан начин, те смо овим описали све парове паралелних правах.

Ако две h -праве имају заједничку h -тачку, онда се оне секу, а уколико се не секу, нити су паралелне, оне су хиперпаралелне.

Изометрије у \mathbb{H}

Изометрије смо дефинисали као бијекције које сликају дужи у њима подударне дужи. Зато изометрије чувају метрику. Показаћемо прво формуле рефлексије у односу на h -праве. Како се свака изометрија може представити као композиција највише три осне рефлексије, видећемо да је свака изометрија дифеоморфизам. Такође, уочићемо да директне трансформације имају позитиван, а индиректне негативан Јакобијан.

Подсетимо са да је метрика горње полуравни дата са $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Нађимо неке примере изометрија горње полуравни.

Пример 1. Пресликавање $f(z) = -\bar{z}$ јесте изометрија.

Оно слика тачку $x + iy$ у тачку $-x + iy$ која такође припада горњој полуравни. Геометријски ово пресликавање можемо видети као еуклидску рефлексију у односу на имагинарну осу.

Одатле следи да f слика простор \mathbb{H} у себе, као и да је бијекција. Инверз је дат пресликавањем $f^{-1}(z) = f(z)$. Ако f представимо као $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (-x, y)$ онда су функције u и v глатка пресликавања па је f диференцијабилна, а онда је таква и f^{-1} , те је f дифеоморфизам.

Да би f било изометрија потребно је да не мења елемент дужине лука. То следи из следећих једнакости:

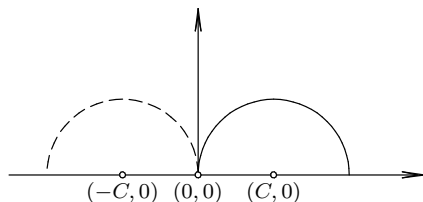
$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{(-dx)^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Јакобијева матрица пресликавања f је

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

па је Јакобијан $\det J = -1$.

Како су тачке на имагинарној оси фиксне за ово пресликавање, а при том пресликавање није идентичко, у питању је осна рефлексија чија је оса h -права дата са $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) > 0$.



Слика 6. Слика геодезијске при изометрији $f(z) = -\bar{z}$

Пример 2. Слично, пресликавање f дато са

$$f(z) = -\bar{z} + 2k$$

представља рефлексију у односу на h -праву дату једначином $\operatorname{Re}(z) = k$, $\operatorname{Im}(z) > 0$. Јакобијан овог пресликавања је негативан.

Пример 3. Посматрајмо пресликавање:

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Ако f представимо као векторску функцију:

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

онда је Јакобијева матрица од f дата са:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Тада директно следи да је f бијекција и да важи

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2},$$

па је у питању изометрија. При том f је и инволуција јер је $f \circ f(z) = z$. Уочимо да су тачке које припадају јединичном еуклидском кругу фиксне, а да пресликавање f није идентичко. Зато је f осна рефлексија у односу на h -праву одређену јединичним еуклидским кругом.

Детерминанта Јакобијеве матрице је:

$$\begin{aligned} \det J &= \frac{-x^4 + 2x^2y^2 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(-1)(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -1. \end{aligned}$$

Пример 4. Слично је и пресликавање $f(z) = \frac{R^2}{\bar{z}-a} + a$ осна рефлексија у односу на h -праву одређену еуклидским кругом са центром $(a, 0)$ и полупречником R .

Како је свака изометрија композиција осних рефлексија, а Јакобијан композиције пресликавања једнак производу Јакобијана, видимо да индиректне изометрије имају негативан, а директне позитиван Јакобијан и да су дифеоморфизми.

Наведимо сада још неколико примера изометрија хиперболичке равни.

Пример 5. Пресликавање задато са $f(z) = z + a$, $a \in \mathbb{R}$, или друкчије записано

$$f : (x, y) \mapsto (u, v) = (x + a, y)$$

јесте изометрија.

Дато пресликавање је очигледно бијективно пресликавање \mathbb{H} у \mathbb{H} , диференцијабилно и има диференцијабилно инверзно пресликавање

$$f^{-1}(z) = z - a.$$

Проверимо још да не мења елемент дужине лука:

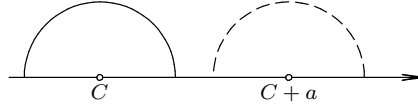
$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{d(x+a)^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Дакле дато пресликавање јесте изометрија. Јакобијева матрица од f је:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

дакле јединична матрица, па је Јакобијан $\det J = 1$. Зато је f директна изометрија.

Ово пресликавање можемо видети као еуклидску транслацију по x оси.



Слика 7. Слика геодезијске при изометрији $f(z) = z + a$

Пример 6. Пресликавање $f(z) = \lambda z$ где $\lambda > 0$ јесте изометрија.

Како је $\lambda > 0$ то је ова функција бијекција простора \mathbb{H} у себе, и има инверз $f^{-1}(z) = \frac{1}{\lambda}z$. Обе функције f и f^{-1} јесу диференцијабилне.

Проверимо елемент дужина лука:

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{d(\lambda x)^2 + d(\lambda y)^2}{(\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2(dx^2 + dy^2)}{\lambda^2 y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Дакле пресликавање $f(z) = \lambda z$ јесте изометрија.

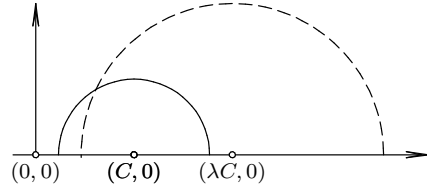
Пресликавање f можемо записати и као:

$$f : (x, y) \mapsto (u, v) = (\lambda x, \lambda y).$$

Јакобијева матрица је:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

па је Јакобијан $\det J = \lambda^2 > 0$. Зато је f директна изометрија.



Слика 8. Слика геодезијске при изометрији $f(z) = 2z$

Пример 7. Пресликавање $f(z) = -\frac{1}{z}$ јесте изометрија.

Како пресликавање $f(z)$ можемо видети и као композицију (еуклидске) инверзије у односу на јединични круг $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ и (еуклидске) рефлексије у односу на имагинарну осу $z \mapsto -\bar{z}$ то је ово пресликавање бијекција простора \mathbb{H} у себе. Инверз овог пресликавања је $f^{-1}(z) = f(z)$.

Запишимо пресликавање f у облику:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x+iy} = -\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}.$$

Ако раздвојимо реални део $u = -\frac{x}{x^2+y^2}$ и имагинарни $v = \frac{y}{x^2+y^2}$ видимо да је пресликавање f диференцијабилно. Даље имамо:

$$\begin{aligned} du &= \frac{-dx(x^2+y^2) - (-x)(2xdx+2ydy)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-dx(x^2+y^2) + x(2xdx+2ydy)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{dx(x^2-y^2) + 2xydy}{(x^2+y^2)^2}, \\ dv &= \frac{dy(x^2+y^2) - y(2xdx+2ydy)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{dy(x^2+y^2-2y^2) - 2xydx}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{dy(x^2-y^2) - 2xydx}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{dy(x^2-y^2) - 2xydx}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Зато је:

$$\begin{aligned}
\frac{du^2 + dv^2}{v^2} &= \frac{\frac{(dx(x^2-y^2)+2xydy)^2 + (dy(x^2-y^2)-2xydx)^2}{(x^2+y^2)^4}}{\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} \\
&= \frac{dx^2(x^2-y^2)^2 + 4ydxdy(x^2-y^2) + 4x^2y^2dy^2}{y^2(x^2+y^2)^2} \\
&\quad + \frac{dy^2(x^2-y^2)^2 - 4xydxdy(x^2-y^2) + 4x^2y^2dx^2}{y^2(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{(dx^2 + dy^2)(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2(dx^2 + dy^2)}{y^2(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{(dx^2 + dy^2)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2)}{y^2(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{(dx^2 + dy^2)(x^2 + y^2)^2}{y^2(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.
\end{aligned}$$

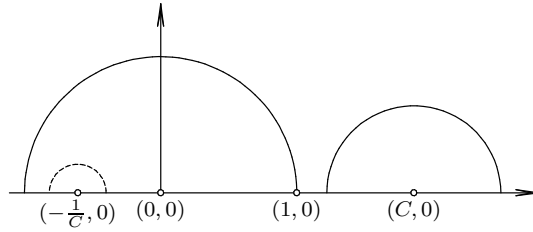
Овим је показано да пресликавање $f(z) = -\frac{1}{z}$ јесте изометрија.
 Јакобијева матрица од f је

$$J = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix},$$

а њена детерминанта:

$$\det J = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 + y^4.$$

Како је $\det J > 0$ онда је f директна изометрија.



Слика 9. Слика геодезијске при изометрији $f(z) = -\frac{1}{z}$

Пример 8. Пресликавања облика:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$

јесу изометрије јер се могу представити као композиције пресликавања из претходних примера.

Наиме, ако је $c = 0$ онда је:

$$m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Пресликавање m је композиција пресликавања из претходних примера $f_1(z) = \frac{a}{d}z$ и $f_2(z) = z + \frac{b}{d}$.

Ако је $c \neq 0$ онда је:

$$m(z) = f(J(g(z)))$$

где су пресликавања:

$$\begin{aligned} g(z) &= c^2z + cd \\ f(z) &= (ad - bc)z + \frac{a}{c} \\ J(z) &= -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Сва три су композиције пресликавања из претходних примера, па су дакле изометрије.

Да би m било неконстантно пресликавање неопходно је да $ad - bc \neq 0$, док је даље услов $ad - bc > 0$ неопходан да би се пресликавањем m горња полураван сликала у себе.

Приметимо да се пресликавања овог облика могу увек свести на облик:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ тако да важи } ad - bc = 1.$$

Наиме пресликавања облика $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ и $m_\lambda(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$, $\lambda \neq 0$ се поклапају.

Директне изометрије

Дефиниција 2. Означимо са $Mob^+(\mathbb{H})^2$ скуп свих пресликавања облика:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1. \quad (3.4)$$

Инверз пресликавања m рачуна се по формули:

$$m^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

²Трансформације $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ овог облика називају се и мебијусове трансформације по математичару Аугусту Фердинанду Мебијусу (1790 - 1868.) одакле потиче и ознака.

и такође припада $Mob^+(\mathbb{H})$. Како су и идентитет и композиција два елемента из скупа $Mob^+(\mathbb{H})$ такође елементи скупа $Mob^+(\mathbb{H})$, то овај скуп има структуру групе.

Приметимо да су сва пресликавања из $Mob^+(\mathbb{H})$ директне изометрије. Наиме, пресликавања из Примера 5., 6. и 7. јесу директне изометрије, па је таква и њихова композиција.

Пример 9. Пронађимо пресликавања $m \in Mob^+(\mathbb{H})$ која фиксирају тачку i .

$$\begin{aligned} m(i) &= i \\ ai + b &= i \cdot (ci + d) \\ ai + b &= -c + id. \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да је:

$$a = d \text{ и } b = -c.$$

Зато важи:

$$ad - bc = a^2 + b^2 = 1.$$

Онда закључујемо да постоји $\varphi \in \mathbb{R}$ такав да је:

$$a = \cos \varphi, \quad b = \sin \varphi.$$

Пресликавање m се може записати:

$$m(z) = \frac{z \cos \varphi + \sin \varphi}{-z \sin \varphi + \cos \varphi}. \quad (3.5)$$

Како су у питању директне изометрије са бар једном фиксном тачком, овако задата пресликавања су ротације око тачке i .

Пример 10. Потражимо сада ротацију $f(z)$ око тачке i , која слика произвољно изабрану тачку $\omega \in \mathbb{H}$ на имагинарну осу. Овај захтев се може приказати изразом $\operatorname{Re}(f(\omega)) = 0$. Ако запишемо $\omega = u + iv$ где

$u, v \in \mathbb{R}$, онда ће бити:

$$\begin{aligned}
 f(u + iv) &= \frac{\cos \varphi(u + iv) + \sin \varphi}{-\sin \varphi(u + iv) + \cos \varphi} \\
 &= \frac{(u \cos \varphi + \sin \varphi) + iv \cos \varphi}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi) - iv \sin \varphi} \\
 &= \frac{((u \cos \varphi + \sin \varphi) + iv \cos \varphi) \cdot ((-u \sin \varphi + \cos \varphi) + iv \sin \varphi)}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi)^2 + v^2 \sin^2 \varphi}, \\
 \operatorname{Re}(f(u + iv)) &= \frac{-u^2 \sin \varphi \cos \varphi + u \cos^2 \varphi - u \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - v^2 \sin \varphi \cos \varphi}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi)^2 + v^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2\varphi(1 - u^2 - v^2) + u \cos 2\varphi}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi)^2 + v^2 \sin^2 \varphi}, \\
 \operatorname{Im}(f(u + iv)) &= \frac{uv \sin \varphi \cos \varphi + v \sin^2 \varphi - uv \sin \varphi \cos \varphi + v \cos^2 \varphi}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi)^2 + v^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= \frac{v}{(-u \sin \varphi + \cos \varphi)^2 + v^2 \sin^2 \varphi}.
 \end{aligned}$$

Из услова $\operatorname{Re}(f(u + iv)) = 0$ закључујемо да је:

$$\frac{1}{2} \sin 2\varphi(1 - u^2 - v^2) + u \cos 2\varphi = 0. \quad (3.6)$$

Ако означимо:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2}(1 - u^2 - v^2) \\
 B &= u,
 \end{aligned}$$

онда ће бити:

$$A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi = 0.$$

Ако би важило $A = B = 0$, имали бисмо да $u = 0$, $v = 1$, односно $u + iv = i$, а сматрамо да је $\omega \neq i$. Дакле постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такав да је:

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= \cos \theta, \\
 \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} &= \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Ако израз (3.6) поделимо са $\sqrt{A^2 + B^2}$ биће:

$$\cos \theta \sin 2\varphi + \sin \theta \cos 2\varphi = 0.$$

Одатле добијамо да је $\sin(\theta + 2\varphi) = 0$, тј.:

$$\begin{aligned}
 \theta + 2\varphi &= k\pi \\
 \varphi &= -\frac{\theta}{2} + \frac{k\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да за уређени пар $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ важи:

$$(\cos \varphi, \sin \varphi) \in \left\{ \left(\pm \cos \frac{\theta}{2}, \mp \sin \frac{\theta}{2} \right), \left(\pm \sin \frac{\theta}{2}, \mp \cos \frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

Ако за коефицијенте узмемо пар $(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2})$ добијамо да је ротација:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\omega \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{\omega \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{-\omega \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{-\omega \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{-\omega \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}}{-\omega \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Последња једнакост одговара ротацији f када за коефицијенте узмемо пар $(-\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$, па се ротације за прва два пара тачака поклапају.

Друга два пара такође дају исту ротацију:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\omega \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}}{\omega \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\omega \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}{-\omega \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Дакле имамо две ротације, једну са параметром $\varphi = -\frac{\theta}{2}$, а другу са параметром $\varphi = -\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$. Ове две ротације сликају ω у две тачке, од којих једна има имагинарни део мањи од 1, а друга има имагинарни део већи од један.

Дефиниција 3. Означимо са $Isom^+(\mathbb{H})$ скуп свих директних изометрија горње полуравни.

Тада важи следеће:

Теорема 13. Све директне изометрије полуравноског модела су облика:

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1,$$

односно $Mob^+(\mathbb{H}) = Isom^+(H)$.

Доказ. Већ смо видели да су пресликавања овог облика заиста директне изометрије. Покажимо још да су све директне изометрије у $Mob^+(\mathbb{H})$.

Посматрајмо прво произвољне две тачке z_0 и ω_0 . Уочимо да пресликавање $J_2 \circ J_1$ где је:

$$J_1(z) = z - \operatorname{Re}(z_0)$$

$$J_2(z) = \frac{z}{\operatorname{Im}(z_0)}$$

јесте пресликавање које слика z_0 у i , тј.:

$$J_2 \circ J_1(z_0) = i.$$

Пресликавања J_1 и J_2 јесу изометрије као пресликавања облика (3.4). Означимо са ω слику тачке ω_0 :

$$J_2 \circ J_1(\omega_0) = \omega.$$

Ротацијом f као у Примеру 10. пресликајмо ω на имагинарну осу и означимо њену слику са ω_1 . Како f фиксира тачку i , то ће композиција $f \circ J_2 \circ J_1$ сликати праву $z_0\omega_0$ на имагинарну осу. Тада су парови тачака i и ω_1 , тј. z_0 и ω_0 на подударним одстојањима. При том, можемо изабрати f тако да слика од ω има имагинарни део већи од 1.

Свака директна изометрија равни Лобачевског је на јединствен начин одређена сликама неке две тачке те равни. Тачке i и ω_1 се пресликавањем $(f \circ J_2 \circ J_1)^{-1}$ сликају у произвољно изабране z_0 и ω_0 редом, па је тиме дата одговарајућа директна изометрија. Како је она облика (3.4) добијамо да важи тврђење. \square

Нека је f изометрија у односу на коју је слика дате криве инваријантна. Ако је T_A тангентан вектор на криву у тачки A , он ће се изометријом сликати у вектор тангентан у B . Како изометрија чува углове вектор N_A се слика или у N_B или у $-N_B$. Ако је у питању директна изометрија N_A се слика у N_B те је $k_g(A) = k_g(B)$.

Подсетимо се и да за сваки епицикл постоји директна изометрија која га слика у себе, а дату његову тачку p у његову произвољну тачку q . Зато је геодезијска кривина епицикала константна.

Индиректне изометрије

Преостало је да испитамо индиректне изометрије.

Већ смо уочили да је пресликавање f задато са $z \mapsto -\bar{z}$, или друкчије записано:

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (-x, y)$$

осна рефлексија и самим тим индиректно пресликавање.

Произвољна индиректна изометрија се може представити као композиција директне изометрије и рефлексије. Нека је директна изометрија m облика (3.4), онда је композиција:

$$f \circ m(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}.$$

Зато закључујемо следеће:

Теорема 14. *Све индиректне изометрије у полураванском моделу су облика:*

$$m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1. \quad (3.7)$$

Геодезијска кривина

Нека је $\gamma(t)$ природно параметризована крива. Нађимо њену геодезијску кривину k_g .

Нека је P тачка на кривој γ , а T_P тангентни простор у тачки P . Означимо са T тангентни вектор на криву γ

$$T = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Тада је:

$$\|T\| = \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y^2}}.$$

Како је крива природно параметризована, онда $\|T\| = 1$, па је:

$$x'^2 + y'^2 = y^2.$$

Решење ове једначине је:

$$\begin{aligned} x' &= y \cos \theta \\ y' &= y \sin \theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

где смо са θ означили функцију угла који вектор $(x'(t), y'(t))$ заклапа са вектором $(1, 0)$.

Тада је $N = (-y \sin \theta, y \cos \theta)$ јединична нормала на T таква да је база (T, N) позитивно оријентисана. Ако у Леми 1. заменимо Кристофелове симболе онда је:

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot (x'' + \Gamma_{xx}^x x'^2 + 2\Gamma_{xy}^x x' y' + \Gamma_{yy}^x y'^2) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (y'' + \Gamma_{xx}^y x'^2 + 2\Gamma_{xy}^y x' y' + \Gamma_{yy}^y y'^2) \\ &= \left(-\frac{2x' y'}{y} + x'' \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{x'^2 - y'^2}{y} + y'' \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \left(y' \cos \theta - y \sin \theta \cdot \theta' - \frac{1}{y} \cdot 2y \cos \theta \cdot y \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + \left(\frac{1}{y} y^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{y} y^2 \sin^2 \theta + y' \sin \theta + y \cos \theta \cdot \theta' \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (y \sin \theta \cos \theta - 2y \sin \theta \cos \theta - y \sin \theta \cdot \theta') \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + (y \cos^2 \theta - y \sin^2 \theta + y \sin \theta \sin \theta + y \cos \theta \cdot \theta') \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (-y \sin \theta \cos \theta - y \sin \theta \cdot \theta', y \cos^2 \theta + y \cos \theta \cdot \theta') \\ &= (-y \sin \theta (\cos \theta + \theta'), y \cos \theta (\cos \theta + \theta')) \\ &= (\cos \theta + \theta') \cdot N. \end{aligned}$$

Добијамо да геодезијска кривина задовољава:

$$k_g = \theta' + \cos \theta. \quad (3.9)$$

Криве константне геодезијске кривине

У овом одељку ћемо одредити криве константне геодезијске кривине полураванског модела.

Напомена. Означеваћемо са $c_i \in \mathbb{R}$ константе које настају услед интеграције.

Потражимо криве константне геодезијске кривине $k_g = C$. Посматраћемо криву $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ која је природно параметризована. Изразимо θ' из једначине (3.9):

$$\theta' = C - \cos \theta.$$

У потрази за кривама константе геодезијске кривине посматраћемо одвојено случајеве када је $\theta' = 0$ и када је $\theta' \neq 0$.

1. Посматрајмо прво једноставнији случај када је: $\theta' = 0$, тј. угао θ је константан.

Тада је $\cos \theta = C$, па је кривина C из интервала $[-1, 1]$. Ако у (3.8) заменимо $\theta = c_1$:

$$\begin{aligned}x' &= y \cdot \cos c_1 \\y' &= y \cdot \sin c_1.\end{aligned}$$

Тада следи:

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= \sin c_1 \\(\ln y)' &= \sin c_1 \\ \ln y &= s \cdot \sin c_1 + \overline{c_2}.\end{aligned}$$

Добијамо да важи:

$$\begin{aligned}y &= c_2 \cdot e^{s \cdot \sin c_1}, \quad c_2 = e^{\overline{c_2}}, \\x' &= c_2 \cdot e^{s \cdot \sin c_1} \cdot \cos c_1.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Сада ћемо посматрати подслучајеве:

- (а) Ако је $\sin c_1 = 0$, онда је кривина $C = \cos \theta \in \{-1, 1\}$. За криве које то испуњавају из једначина (3.10) добијамо:

$$\begin{aligned}x' &= c_2 \cos c_1 = \text{const.} \\x &= (c_2 \cdot \cos c_1) \cdot s + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R} \\y &= c_2 = \text{const.}\end{aligned}$$

Видимо да слике ових кривих припадају еуклидским правама које су у еуклидском смислу паралелне апсолути.

(б) Ако је $\sin c_1 \neq 0$, кривина је дата са $|C| = |\cos \theta| < 1$, а за криве које то испуњавају из једначина (3.10) добијамо:

$$\begin{aligned}x' &= (c_2 \cdot \cos c_1) \cdot e^{\sin c_1 \cdot s} \\x &= \frac{c_2 \cdot \cos c_1}{\sin c_1} \cdot e^{\sin c_1 \cdot s} + c_3 \\y &= c_2 \cdot e^{\sin c_1 \cdot s}.\end{aligned}$$

Слике датих кривих дакле припадају еуклидским правама за датим једначинама:

$$x = \frac{\cos c_1}{\sin c_1} \cdot y + c_3.$$

У случају када је $\cos c_1 = \cos \theta = 0$ односно геодезијска кривина једнака нули $k_g = C = 0$, слике тражених кривих припадају еуклидским правама ортогоналним на апсолуту, односно датим једначинама $x = c_3$.

Ако је $k_g \neq 0$ и $k_g \in (-1, 1)$ решења су еуклидске праве које граде угао c_1 са x -осом:

$$y = \frac{\sin c_1}{\cos c_1} (x - c_3).$$

2. Посматрајмо сада случај: $\cos \theta \neq C$. Тада је:

$$\begin{aligned}\theta' &= C - \cos \theta \neq 0 \\ \frac{d\theta}{ds} &= C - \cos \theta \\ ds &= \frac{d\theta}{C - \cos \theta} \\ I = \int ds &= \int \frac{d\theta}{C - \cos \theta}.\end{aligned}$$

Овде је са s означен параметар којим је крива $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ природно параметризована.

Уведимо смену: $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Тада важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{1+t^2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos \theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & \sin \theta &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} dt &= \frac{1}{2} d\theta.\end{aligned}$$

Изразимо интеграл I са овако уведеном сменом:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{C - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
 &= \int \frac{2dt}{C(1+t^2) - (1-t^2)} \\
 I &= \int ds = \int \frac{2dt}{t^2(C+1) + (C-1)}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Могући су следећи подслучајеви:

- (а) $C < -1$ или $C > 1$
- (б) $C = -1$
- (в) $C = 1$
- (г) $C \in (-1, 1)$.

У наредном извођењу користићемо једначине (3.8).

- (а) $C \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$:

Тада је $C + 1 = \epsilon|C + 1|$ и $(C - 1) = \epsilon|C - 1|$, где ϵ узима једну од вредности из скупа $\{-1, 1\}$.

Изразимо сада координате $y(t)$ и $x(t)$. Имамо из (3.8):

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{y} &= \sin \theta \Rightarrow (\ln y)' = \sin \theta \\
 \ln y &= \int \sin \theta ds \\
 \ln y &= \int \frac{2t}{1+t^2} 2\epsilon \frac{dt}{|C+1|t^2 + |C-1|} \\
 &= \frac{2\epsilon}{|C-1| - |C+1|} \ln \frac{1+t^2}{at^2+b} + c_2, \\
 &= \frac{2}{(C-1) - (C+1)} \ln \frac{1+t^2}{at^2+b} + c_2 \\
 &= \ln \frac{at^2+b}{1+t^2} + c_2 \\
 \Rightarrow y &= k \cdot \frac{at^2+b}{1+t^2},
 \end{aligned}$$

где смо означили $a = |C + 1|$, $b = |C - 1|$, $k = e^{c_2} > 0$.

Израчунајмо и координату x :

$$\begin{aligned}
 x' &= y \cos \theta \\
 x &= \int k \frac{at^2 + b}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} ds \\
 &= k \cdot \int \frac{at^2 + b}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot 2\epsilon \cdot \frac{dt}{at^2 + b} \\
 &= 2\epsilon k \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt = 2\epsilon k \frac{t}{1+t^2} + c_3 \\
 \Rightarrow x &= 2\epsilon k \frac{t}{1+t^2} + c_3.
 \end{aligned}$$

Дакле добили смо:

$$\begin{aligned}
 x &= 2\epsilon k \frac{t}{1+t^2} + c_3 \\
 y &= \epsilon k \cdot \frac{|C+1|t^2 + |C-1|}{1+t^2}.
 \end{aligned}$$

Из једначина за x и y имамо да је:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{x - c_3}{2\epsilon k} \frac{1}{t} \\
 \frac{y}{k\epsilon} &= \frac{(C+1)(t^2+1) - (C+1) + (C-1)}{1+t^2} \\
 &= (C+1) - \frac{2}{1+t^2} \\
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{2} \left((C+1) - \frac{y}{k\epsilon} \right). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Сада можемо да изразимо t :

$$\begin{aligned}
 \frac{x - c_3}{2\epsilon k} \frac{1}{t} &= \frac{1}{2} \left((C+1) - \frac{y}{k\epsilon} \right) \\
 t &= \frac{x - c_3}{2\epsilon k} \frac{2}{(C+1) - \frac{y}{k\epsilon}} \\
 \Rightarrow t &= \frac{(x - c_3)}{k\epsilon(C+1) - y}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Ако из једначина (3.12) и (3.13) израчунамо израз $\frac{1}{1+t^2}$ добићемо да важе следеће две једнакости:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{2} \frac{k\epsilon(C+1) - y}{k\epsilon} \\
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{(y - k\epsilon(C+1))^2}{(x - c_3)^2 + (k\epsilon(C+1) - y)^2} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

Сада изједначавањем десних страна у једначинама (3.14) долазимо до једначине кривих константне геодезијске кривине:

$$\begin{aligned} -2k\epsilon(y - k\epsilon(C + 1)) &= (x - c_3)^2 + (y - k\epsilon(C + 1))^2 \\ (x - c_3)^2 + (y - k\epsilon(C + 1) + k\epsilon)^2 &= k^2\epsilon^2 = k^2 \\ (x - c_3)^2 + (y - \epsilon k C)^2 &= k^2. \end{aligned}$$

Дакле, реч је о круговима са центром у тачки $(c_3, \epsilon k C)$ и полупречника k . Пошто је $|\epsilon k C| > k$ круг неће сећи x -осу те се све његове тачке налазе у горњој полуравни.

(б) $C = -1$:

Истим поступком као у делу под (а) изразимо прво координате y и x .

$$\begin{aligned} \ln y &= \int \sin \theta ds \\ &= - \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= -\ln(1+t^2) + c_1 \\ y &= \frac{k}{1+t^2}, \quad k > 0, \\ x' &= y \cos \theta \\ &= \frac{k}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x &= \int y \cos \theta ds = - \int \frac{k(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt \\ x &= -k \frac{t}{1+t^2} + c_2. \end{aligned}$$

Дакле израчунали смо:

$$\begin{aligned} x &= -k \frac{t}{1+t^2} + c_2 \\ y &= k \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Како је $x - c_2 = -ty$ тада можемо изразити параметар t као:

$$t = -\frac{x - c_2}{y}.$$

Када изразимо $1 + t^2$ из једначина за y и t добићемо:

$$\begin{aligned} 1 + t^2 &= \frac{k}{y} \\ 1 + t^2 &= 1 + \left(\frac{x - c_2}{y}\right)^2. \end{aligned}$$

Ако изједначимо десне стране горњих једнакости добићемо једначину кривих:

$$\left(y - \frac{k}{2}\right)^2 + (x - c_2)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Дакле крива константне геодезијске кривине -1 јесте еуклидски круг који додирује x -осу.

(в) $C = 1$:

Аналогно случају под (б), срачунајмо координате x, y и параметар t :

$$\ln y = \int \sin \theta ds = \int \frac{2t}{1+t^2} \frac{1}{t^2} dt = 2 \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + c_2$$

$$y = k \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$x' = y \cos \theta = k \frac{t^2}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = k \int \frac{t^2}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \frac{1}{t^2} dt$$

$$x = k \frac{t}{1+t^2} + c_2,$$

$$yt = x - c_2$$

$$t = \frac{x - c_2}{y}.$$

Изразимо $\frac{t^2}{1+t^2}$ из једначина за y и t :

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{y}{k}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{y^2}{(x - c_2)^2 + y^2}.$$

Изједначавањем десних страна добијамо:

$$(x - c_2)^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Дакле и у овом случају смо добили кругове који додирују апсолуту.

(г) Преостао је случај када $C \in (-1, 1)$.

Приметимо да ће тада $C - 1$ и $C + 1$ бити супротног знака.

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \int \sin \theta ds \\
 &= \int \frac{2t}{1+t^2} ds \\
 &= \int \frac{4t}{(1+t^2)((C+1)t^2 - (1-C))} dt \\
 &= -[\ln(1+t^2) - \ln|1-C - (1+C)t^2|] + c_2 \\
 y &= k \frac{(1-C) - (1+C)t^2}{1+t^2}, \quad k = e^{c_2} > 0.
 \end{aligned}$$

Израчунајмо и x координату:

$$\begin{aligned}
 x' &= y \cos \theta \\
 x &= \int k \frac{(1-C) - (1+C)t^2}{1+t^2} \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot 2 \frac{dt}{(C+1)t^2 - (1-C)} \\
 &= -2k \cdot \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt \\
 x &= -2k \frac{t}{1+t^2} + c_3.
 \end{aligned}$$

Из једначина за x и y ћемо изразити прво t :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+t^2} &= -\frac{x-c_3}{2k} \frac{1}{t} \\
 \frac{1}{1+t^2} &= \left[\frac{y}{k} + (1+C) \right] \frac{1}{2} = \frac{y+k(1+C)}{2k} \\
 t &= -\frac{x-c_3}{2k} \cdot \frac{2k}{y+k(1+C)}.
 \end{aligned}$$

Затим из последње две једнакости израчунајмо израз $\frac{1}{1+t^2}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{(y+k(1+C))^2}{(x-c_3)^2 + (y+k(1+C))^2} \\
 \frac{1}{1+t^2} &= \frac{y+k(1+C)}{2k}.
 \end{aligned}$$

Изједначавањем десних страна и сређивањем добијене једнакости добијамо једначину кривих:

$$\begin{aligned}
 \frac{(y+k(1+C))^2}{(x-c_3)^2 + (y+k(1+C))^2} &= \frac{y+k(1+C)}{2k} \\
 2k(y+k(1+C)) &= (x-c_3)^2 + (y+k(1+C))^2 \\
 (x-c_3)^2 + (y+k(1+C)-k)^2 &= k^2 \\
 (x-c_3)^2 + (y+kC)^2 &= k^2.
 \end{aligned}$$

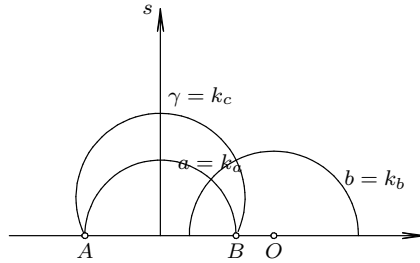
Дакле решење јесте круг са центром (c_3, kC) и полупречником k . Како је $|kC| < k$ то круг сече x -осу, а слика тражене криве припада пресеку овог круга са горњом полуравни.

Класификација епицикала

Сумирајмо резултат из претходног одељка и класификујмо добијене криве:

1. Ако је геодезијска кривина $|k_g| = 0$, онда је у питању геодезијска линија, односно h -права.
2. Ако је $0 < |k_g| < 1$, онда се ради или о еуклидским полуправама са теменом на реалној оси, или о еуклидским круговима који секу реалну осу.

Означимо са γ онај део еуклидског круга k_c (који сече реалну осу у двама тачкама A и B) који се налази у горњој полуравни. Одредимо прамен h -правих које рефлексијама фиксирају епицикл γ .



Слика 10. Еквидистанта γ

У ту сврху уочимо следеће h -праве:

Нека је s h -права која је еуклидски полуправа ортогонална на γ . Даље, нека је a h -права која је еуклидски део круга k_a са центром у пресеку s са реалном осом, а који сече апсолуту у тачкама A и B .

Нека је b произвољна h -права која је ортогонална на a . Означимо са $k_b(O, R)$ еуклидски круг који садржи h -праву b .

Из ортогоналности $k_b \perp k_a$ следи да је потенција

$$p(O, k_a) = OB \cdot OA = R^2.$$

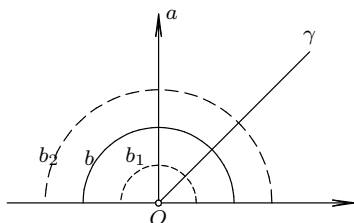
Но како је потенција тачке O у односу на круг k_c такође $OB \cdot OA$, тј. $p(O, k_c) = R^2$ онда је $b \perp k_c$, па је и $b \perp \gamma$.

Зато ће епицикл γ бити инваријантан у односу на прамен правих ортогоналних на h -праву a , тј. прамен хиперпаралелних правих.

Дакле, ако је геодезијска кривина епицикла γ из интервала $(0, 1)$, онда је тај епицикл еквилистанта.

Аналогно се може утврдити и за криву γ која је еуклидска полу-права са теменом O на реалној оси.

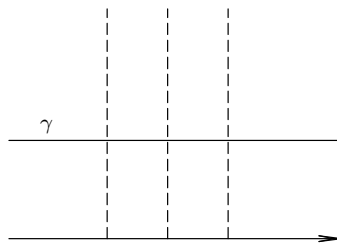
Наиме, тада је h -права a еуклидска полуправа са истим теменом као γ , а прамен хиперпаралелних h -правих чине еуклидски полукругови са центром у темену ових двеју полуправих.



Слика 11. Еквилистанта γ

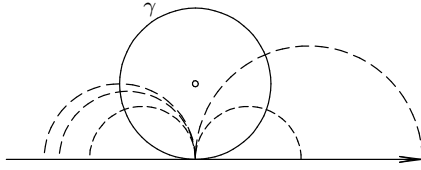
3. Ако је $|k_g| = 1$ тада су одговарајуће криве еуклидске праве паралелне реалној оси и кругови који додирују реалну осу.

Посматрајмо случај када је γ еуклидска права паралелна са реалном осом. Тада прамен паралелних h -правих (параболички прамен) фиксира криву γ . Дакле, γ је орицикл.



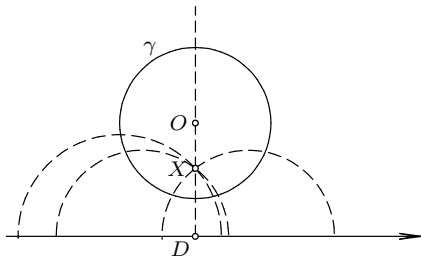
Слика 12. Орицикл γ

Уколико је γ еуклидски круг који додирује реалну осу, онда су h -праве које садрже тачку додира са осом ортогоналне на γ , и рефлексјама (које су еуклидске инверзије у односу на круг) фиксирају криву γ . Те h -праве такође чине параболички прамен, те је γ орицикл.



Слика 13. Орицикл γ

4. Ако је $|k_g| > 1$ у питању су еуклидски кругови $\gamma = k_c(O, r)$ који немају заједничких тачака са реалном осом.



Слика 14. Круг γ

Означимо са d еуклидско растојање тачке O од x -осе, са D подножје еуклидске нормале из O на x -осу и са l корен потенције тачке D у односу на еуклидски круг k_c

$$l^2 = p(D, \gamma) = d^2 - r^2.$$

Даље, нека је X тачка на полуправој OD таква да је еуклидско растојање $d_e(D, X) = l$.

Означимо $a = d - l$. Тада је:

$$l^2 = (d - a)^2 = d^2 - r^2$$

$$a^2 - 2ad + r^2 = 0$$

$$a(2d - a) = r^2.$$

Ако је k_b произвољан еуклидски круг са центром на x -оси који садржи тачку X , онда k_b одређује и једну h -праву. Важи:

$$p(O, k_b) = a \cdot (a + d - a + d - a) = a \cdot (2d - a) = r^2.$$

Зато је $\gamma \perp k_b$, тј. епицикл γ је ортогоналан на прамен конкурентних правих кроз тачку X . Дакле, епицикл γ је круг.

Закључак

Показали смо да оно што су у еуклидској равни кругови, у полураванском моделу јесу полуправе и делови кругова у горњој полуравни. У случају полуправе ортогоналне на реалну осу, или полукруга (који је такође ортогоналан на реалну осу) имамо да су то геодезијске линије; а у осталим случајевима ради се о епициклима.

Приказали смо и формуле за рачунање растојања међу тачкама и описали различите врсте праменова у моделима као и основне трансформације, тј. изометрије модела. Показано је да су изометрије Мебијусове трансформације. На крају смо класификовали епицикле на основу њихове геодезијске кривине.

Литература

- [1] A. James, *Hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, London, 2005.
- [2] L. Deborah, *A General Theory of Geodesics with Applications to Hyperbolic Geometry*, 1995.
- [3] Z. Lučić: *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Beograd 1997.
- [4] S. Aljančić, *Matematika 2 - Varijacioni račun*, Beograd, 1974.
- [5] M. Bendersky, *The Calculus of Variations*, 2008.
- [6] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1969.
- [7] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Houston, Texas, 1999.
- [8] M. Raussen, *Elementary differential geometry: Curves and Surfaces*, Denmark, 2008.
- [9] T. Shifrin, *Differential geometry: A first course in Curves and Surfaces*, University of Georgia, 2015.
- [10] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag London, 2001.
- [11] N. Persson, *Shortest paths and geodesics in metric spaces*, Masters thesis in mathematics, 2012.
- [12] M. Petrović, *Moderna diferencijalna geometrija površi nulte srednje krivine*, Master rad, Niš, 2013.
- [13] www.wikipedia.org