УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Небојша Т. Николић

ШТАЈНЕРОВИ СИСТЕМИ И НОВЕ КОНСТРУКЦИЈЕ (v,k,t)-ПОКРИВАЊА

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Nebojša T. Nikolić

STEINER SYSTEMS AND NEW CONSTRUCTIONS OF THE (v,k,t)-COVERINGS

doctoral dissertation

Belgrade, 2015

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

др Александар Савић, доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије

др Ненад Младеновић, научни саветник,
Математички Институт САНУ, Београд

др Милан Дражић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Дугошија, редовни професор у пензији,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Подаци о докторској дисертацији

Наслов докторске дисертације

Штајнерови системи и нове конструкције $(v, k, t)-$покривања.

Резиме

Штајнеров систем $S(t, k, v)$ је скуп који садржи v елемената (v-скуп) са фамилијом k-подскупова (блокова), таквих да је сваки t-подскуп садржан у тачно једном блоку ($v \geqslant k \geqslant t \geqslant 1$; $v, k, t \in \mathbb{N}$). У случају $(v, k, t)-$покривања, сваки t-подскуп је садржан у бар једном блоку дате фамилије. Штајнеров систем $S(t, k, v)$ постоји ако и само ако је $C(v, k, t) = \binom{v}{t}/\binom{k}{t}$, где је $C(v, k, t)$ кардиналност минималног $(v, k, t)-$покривања. Проблем егзистенције Штајнеровог система $S(t, k, v)$ и проблем одређивања минималног $(v, k, t)-$покривања су отворени проблеми, а њихова решења су позната само у неким специјалним случајевима.

Поред прегледа досадашњих резултата везаних за проблем егзистенције Штајнерових система и проблем минималног $(v, k, t)-$покривања, у овом раду је дато неколико нових конструкција $(v, k, t)-$покривања. С обзиром да број блокова $(v, k, t)-$покривања представља горњу границу вредности $C(v, k, t)$, овим конструкцијама је добијен велики број горњих граница. У више случајева, добијене горње границе су боље од најбољих познатих горњих граница вредности $C(v, k, t)$.

У дисертацији је дата нова комбинаторна конструкција минималних $(v, 3, 2)-$покривања, која представља уопштење Боузове и Сколемове конструкције Штајнерових система тројки $\mathrm{STS}(6n + 3)$ и $\mathrm{STS}(6n + 1)$. У сваком од 6 случајева ($v = 6n, \ldots, 6n + 5$), $(v, 3, 2)-$покривање је добијено деловањем одређене пермутације p на полазни скуп блокова. Добијена конструкција уједно представља нови доказ тврђења да су вредности $C(v, 3, 2)$ једнаке Шонхајмовој доњој граници $L(v, 3, 2)$.

Преостале конструкције $(v, k, t)-$покривања које су дате у овом раду су хеуристичке. Најпре је дата нова, побољшана имплементација познатог похлепног алгоритма. Затим је дат нови похлепни алгоритам, као и теорема о довољним условима за једнакост похлепних лекс и похлепних колекс покривања. На крају, користећи такозвану LR процедуру, развијене су и имплементиране још три хеуристике: метода великих околина, метода промењљивог спуста и општа метода промењљивих околина.

Метода великих околина је поступак узастопног уклањања дела решења и његовог обнављања у циљу побољшања актуелног решења. У предложеном алгоритму, то је поступак систематског избацивања и додавања блокова у покривање, заснован на LR процедури. Помоћу LR процедуре, из $(v, k, t)-$покривања се избацују блокови који самостално покривају најмањи број t-подскупова, а затим се непокривени t-подскупови покривају са што мањим бројем нових блокова. За покривање непокривених t-подскупова се користи похлепни алгоритам.

Метода промењљивих околина је заснована на идеји систематских промена околина у оквиру алгоритма за локално претраживање, како би се избегла конвергенција ка локалном минимуму. Варијанта методе у којој се претраживање околина врши на детерминистички начин назива се метода промењљивог спуста. Варијанта у којој је процедура локалног претраживања замењена методом промењљивог спуста је општа метода промењљивих околина. У основи локалног претраживања примењеног у ове две хеуристике такође се налази LR процедура.

Метода великих околина, метода промењљивог спуста и општа метода промењљивих околина, по квалитету добијених резултата и по перформансама, надмашују две хеуристике за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања познате из литературе: симулирано каљење и табу претраживање. За разлику од постојећих, предложене хеуристике је могуће применити на произвољно $(v, k, t)-$покривање. Применом наведених хеуристика, у 23 случаја су побољшане до сада најбоље познате горње границе вредности $C(v, k, t)$.

Кључне речи

Штајнерови системи, $(v, k, t)-$покривања, метахеуристике, метода великих околина, метода промењљивих околина.

Научна област

Математика

Ужа научна област

Оптимизација

УДК број

519.144(043.3)

Dissertation data

Doctoral dissertation title

Steiner systems and new constructions of the $(v, k, t)-$coverings

Abstract

A Steiner system $S(t, k, v)$ is a set which contains v elements (v-set) and a family of k-subsets (blocks), such that each t-subset appears in exactly one block ($v \geqslant k \geqslant t \geqslant 1$; $v, k, t \in \mathbb{N}$). In the case of a $(v, k, t)-$covering, each t-subset appears in at least one block of a given family. A Steiner system $S(t, k, v)$ exists if and only if $C(v, k, t) = \binom{v}{t} / \binom{k}{t}$, where $C(v, k, t)$ is the cardinality of minimal $(v, k, t)-$covering. As the existence of Steiner system $S(t, k, v)$ and the determination of the minimal $(v, k, t)-$covering are still open problems, their solutions are known only in some special cases.

Besides the review of the previous results related to the problem of the existence of Steiner systems and the problem of determining the minimal $(v, k, t)-$covering, several new constructions of $(v, k, t)-$covering are given in this paper. Since the number of blocks in $(v, k, t)-$covering represents the upper bound on $C(v, k, t)$, a large number of upper bounds are also obtained by using these constructions. In many cases, the obtained upper bounds are better than the best known upper bounds on $C(v, k, t)$.

This dissertation gives a new combinatorial construction of minimal $(v, 3, 2)-$coverings, which represents a generalization of Bose and Skolem constructions of the Steiner triple systems STS$(6n + 3)$ and STS$(6n + 1)$. In each of the 6 cases ($v = 6n, \ldots, 6n + 5$), $(v, 3, 2)-$covering is obtained by applying certain permutation p to the initial set of blocks. The obtained construction also represents a new proof of the statement that the values of $C(v, 3, 2)$ are equal to Schönheim lower bound $L(v, 3, 2)$.

Other constructions of $(v, k, t)-$coverings, given in this paper, are heuristic. First, we give improved implementation of the well known greedy algorithm. Then, a new greedy algorithm, as well as the theorem which provides a sufficient condition for equality of greedy lex and greedy colex coverings are given. Finally, by

using so called LR procedure, three other heuristics are developed and implemented: Large neighbourhood search, Variable neighborhood descent and General variable neighborhood search.

Large neighbourhood search is the procedure of alternately destroying and repairing a solution in order to improve the incumbent solution. In the proposed algorithm, this is the procedure for systematic removing and adding blocks to the covering, based on LR procedure. By using LR procedure, the blocks which exclusively cover the minimal number of t-subsets are removed from $(v, k, t)-$covering, and then the uncovered t-subsets are covered with as few blocks as possible. The greedy algorithm is used for the covering of the uncovered t-subsets.

Variable neighborhood search is based on the idea of systematic change of neighborhood within a local search algorithm in order to avoid the convergence to a local minimum. A variant of the method where changes of neighborhood is performed in a deterministic way is called Variable neighborhood descent. A variant where the local search procedure is replaced by the Variable neighborhood descent method is General variable neighborhood search. The basis of the local search procedure applied in these two heuristics is also LR procedure.

Regarding quality of the obtained results and the performance of the methods, Large neighbourhood search, Variable neighborhood descent, and General variable neighborhood search overcome two heuristics for solving the problem of minimal $(v, k, t)-$covering known from the literature: Simulated annealing and Tabu search. Unlike the existing heuristics, the proposed heuristics are applicable to arbitrarily $(v, k, t)-$covering. By applying aforementioned heuristics, 23 new best known upper bounds on $C(v, k, t)$ are established.

Keywords

Steiner systems, $(v, k, t)-$coverings, metaheuristics, large neighborhood search, variable neighborhood search.

Scientific field

Mathematics

Scientific subfield

Optimization

UDC number

519.144(043.3)

Садржај

Предговор

Предмет овог рада су две врсте комбинаторних шема, Штајнерови системи и $(v,k,t)-$покривања, а основни проблем који се разматра је проблем минималног $(v,k,t)-$покривања. Биће изложено неколико конструкција које у великом броју случајева дају најбоља позната $(v,k,t)-$покривања.

Рад се састоји из четири целине. У уводном делу су описане комбинаторне шеме, а затим је дат преглед досадашњих резултата везаних за Штајнерове системе (поглавље 1.1) и $(v,k,t)-$покривања (поглавље 1.3). Посебно су обрађени Штајнерови системи тројки (поглавље 1.2), где је дата Боузова и Сколемова конструкција Штајнерових система тројки STS$(6n+3)$ и STS$(6n+1)$. Као уопштење тих конструкција, у другом делу рада је дата нова комбинаторна конструкција минималних $(v,3,2)-$покривања.

Трећи део овог рада је посвећен решавању проблема минималног $(v,k,t)-$покривања коришћењем метахеуристика. У поглављу 3.1 је описана нова имплементација познатог похлепног алгоритма и једна његова модификација. Такође, дати су довољни услови за једнакост похлепних лекс и похлепних колекс покривања. У поглављу 3.2 је представљен нови (LR) алгоритам. У поглављима 3.3, 3.4 и 3.5, редом су описане хеуристике развијене за решавање проблема минималног $(v,k,t)-$покривања: метода великих околина, метода променљивог спуста и општа метода променљивих околина. Применом наведених хеуристика добијена су 23 покривања која су боља од најбољих познатих покривања.

У последњем делу је дат закључак и научни допринос овог рада.

Овом приликом бих желео да се захвалим ментору, доц. др Александру Савићу, који је руководио израдом ове докторске дисертације,

као и члановима комисије: др Ненаду Младеновићу, проф. др Милану Дражићу и проф. др Ђорђу Дугошији.

Посебну захвалност дугујем проф. др Вери Ковачевић-Вујчић на подршци да ову дисертацију приведем крају.

Изнад свега се захваљујем својој породици, супрузи Драгани и ћеркама Марији и Мили, на огромном стрпљењу и подршци.

Глава 1

Увод

Као почетак развоја теорије комбинаторних шема обично се узима крај 18. века, када је Ојлер[1] представио "проблем 36 официра", односно проблем егзистенције ортогоналних латинских квадрата. Посебно значајну улогу у развоју комбинаторних система тројки имају радови Штајнера[2] и Киркмана[3], средином 19. века. С обзиром на велики број отворених проблема, током 20. века су интензивирана истраживања из ове области. Својим значајем истичу се радови Хананија[4], Хола[5], Рајзера[6] и других [25]. Последњих година значајну улогу има примена рачунара и метода комбинаторне оптимизације у решавању још увек великог броја отворених проблема везаних за комбинаторне шеме.

Комбинаторна шема (*combinatorial design*) или **блок шема** (*block design*) је једна врста инцидентног система [21, 36]. У најширем смислу, блок шема је уређени пар $(V, \mathcal{B})$, где је V коначан скуп и $\mathcal{B}$ фамилија подскупова (блокова) скупа V, тако да су задовољени одређени услови "балансираности" [79]. На пример, нека је

$$\mathcal{B} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\},\{5,6,1\},\{1,4,7\},\{2,5,7\},\{3,6,7\},\{2,4,6\}\}$$

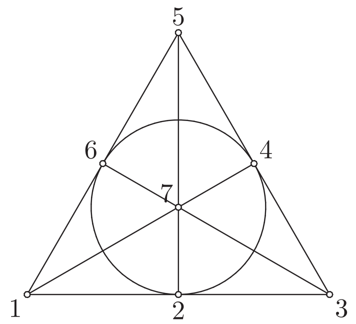
[1] Leonhard Euler, швајцарски математичар, 1707-1783.
[2] Jakob Steiner, швајцарски математичар, 1796-1863.
[3] Thomas Kirkman, британски математичар, 1806-1895.
[4] Haim Hanani, израелски математичар, 1912-1991.
[5] Marshall Hall, амерички математичар, 1910-1990.
[6] Herbert Ryser, амерички математичар, 1923-1985.

скуп који садржи 7 подскупова скупа $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $(V, \mathcal{B})$ је блок шема која задовољава следеће услове балансираности:

$a)$ Сви елементи скупа $\mathcal{B}$ су трочлани подскупови скупа V и

$b)$ Сваки двочлани подскуп од V садржан је у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$.

Блок шема из претходног примера може се графички представити као Фано раван [23, 46] - пројективна раван реда 2, са 7 тачака и 7 правих које представљају блокове (Слика 1.1).



Слика 1.1: Фано раван

Блок шема $(V, \mathcal{B})$ која задовољава услове $a)$ и $b)$ је Штајнеров систем тројки. Општије, **Штајнеров систем** (*Steiner system*) је блок шема $(V, \mathcal{B})$ која задовољава:

$a_1)$ Сви блокови из $\mathcal{B}$ су кардиналности k (k-подскупови скупа V) и

$b_1)$ Сваки t-подскуп скупа V садржан је у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$,

где су t, k и $v = |V|$ природни бројеви за које важи $2 \leqslant t < k < v$. Више речи о Штајнеровим системима биће у наредном поглављу.

У овој дисертацији, од посебног интереса су **шеме покривања** (*covering designs*) које можемо схватити као уопштење Штајнерових система. Наиме, ако услов $b_1)$ заменимо условом

$b_1')$ Сваки t-подскуп скупа V садржан је у бар једном од блокова из $\mathcal{B}$,

добијамо $(v, k, t)-$покривање. На сличан начин се може дефинисати $(v, k, t)-$паковање. Више речи о $(v, k, t)-$покривањима (паковањима) биће у поглављу 1.3.

t−шеме ($t-$*designs*) такође представљају уопштење Штајнерових система. Ако услов $b_1)$ заменимо условом

$b_1'')$ Сваки t-подскуп скупа V садржан је у тачно λ блокова из $\mathcal{B}$ $(\lambda \in \mathbb{N})$,

добијамо $t-(v,k,\lambda)$ шему. То значи да је Штајнеров систем еквивалентан са $t-(v,k,1)$ шемом, док је Штајнеров систем тројки еквивалентан са $2-(v,3,1)$ шемом. Као и у случају Штајнерових система, ако услов $b_1)$ заменимо условом

$b_1''')$ Сваки t-подскуп скупа V садржан је у најмање (највише) λ блокова,

добијамо $t-(v,k,\lambda)$ покривање (паковање).

Поред Штајнерових система, у литератури су најзаступљеније $2-(v,k,\lambda)$ шеме, тј. **уравнотежене некомплетне блок шеме** (*Balanced Incomplete Block Designs* - BIBD). Иако је потпуно одређен параметрима (v,k,λ), BIBD се најчешће задаје са параметрима (v,b,r,k,λ), где је b укупан број блокова у $\mathcal{B}$ и r број блокова из $\mathcal{B}$ који садрже фиксиран елемент скупа V. Простим пребројавањем добијене су једнакости [93]

$$vr = bk \qquad \text{и} \qquad \lambda(v-1) = r(k-1), \tag{1.0.1}$$

одакле се могу елиминисати параметри b и r. Фишерова[7] неједнакост [28]

$$b \geqslant v \qquad (\text{еквивалентно: } r \geqslant k), \tag{1.0.2}$$

такође даје неопходне услове за егзистенцију BIBD-а са параметрима (v,b,r,k,λ). За BIBD, за који важи једнакост $b=v$ (тј. $r=k$), кажемо да је симетричан. Поред (1.0.1) и (1.0.2), неопходне услове за егзистенцију симетричног BIBD-а са параметрима (v,b,r,k,λ) дали су Брок, Рајзер и Чола[8] [14, 87]:

– ако је v паран, тада је $k-\lambda$ потпун квадрат,
– ако је v непаран, тада једначина $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$ има нетривијално решење у скупу целих бројева.

Шеме са балансираним паровима (*Pairwise Balanced Designs* - PBD) представљају уопштење BIBD-а. Код PBD-а кардиналност свих блоко-

[7] Ronald Fisher, британски математичар-статистичар, 1890-1962.
[8] Bruck-Ryser-Chowla theorem.

ва не мора бити једнака k већ може припадати датом коначном скупу вредности $K \subset \mathbb{N}$.

Уређене шеме (*directed designs*) представљају уопштење Штајнерових система, тј. $t-$шема. Код уређених шема, уместо подскупова $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ посматрају се одговарајуће уређене n-торке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Од осталих блок шема треба поменути **ортогоналне шеме** (*ortogonal designs*), **турнирске шеме** (*tournament designs*), **цикличне системе** (*cyclic systems*), **графичке шеме** (*graphical designs*), као и велики број комбинаторних објеката који су у тесној вези са комбинаторним шемама: **Латинске квадрате** (*Latin squares*), **Румове квадрате** (*Room squares*), **Адамарове матрице** (*Hadamard matrices*), **ортогоналне низове** (*orthogonal arrays*), **кодове** (*codes*), **мултиграфове** (*multigraphs*), итд.

Централно питање у теорији комбинаторних шема је питање егзистенције одређене комбинаторне шеме. На пример, видећемо да Штајнеров систем тројки $(V, \mathcal{B})$ постоји ако и само ако је $v = 6m+1$ или $v = 6m+3$ ($m \in \mathbb{N}$). С обзиром да $(v, k, t)-$покривање (паковање) постоји за све вредности параметара ($2 \leqslant t < k < v$), у овом случају централни проблем је одређивање минималног (максималног) $(v, k, t)-$покривања (паковања), у смислу кардиналности скупа $\mathcal{B}$.

Две блок шеме $(V_1, \mathcal{B}_1)$ и $(V_2, \mathcal{B}_2)$ су изоморфне ако постоји бијективно пресликавање $f : V_1 \mapsto V_2$ које чува блокове ($B \in \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow f(B) \in \mathcal{B}_2$). Због тога, решења наведених проблема не зависе од избора самог скупа V већ од кардиналности скупа V. Поред решавања наведених проблема, велики број научних радова из ове области бави се одређивањем свих неизоморфних шема са датим параметрима. На пример, до на изоморфизам, постоје јединствени Штајнерови системи тројки за $v = 7$ (Слика 1.1) и $v = 9$, тачно два Штајнерова система тројки за $v = 13$, итд [25].

На крају, поменимо широку примену комбинаторних шема у креирању статистичких тестова, турнирских распореда и лото система, у преносу података и криптографији, у кодирању, итд.

Више детаља о комбинаторним шемама се може наћи у [3, 5, 7, 15, 17, 25, 36, 47, 53, 79, 93, 97].

1.1 Штајнерови системи

Као што је речено у претходном делу, Штајнеров систем је блок шема $(V, \mathcal{B})$ која задовољава услове a_1) и b_1), односно [15, 25]:

Дефиниција 1.1.1. *Штајнеров систем $S(t,k,v)$; $t,k,v \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant t < k < v$ је уређени пар $(V, \mathcal{B})$ који задовољава следеће особине:*

1. *V је скуп који садржи v елемената (v-скуп).*
2. *$\mathcal{B}$ је фамилија k-подскупова (блокова) од V.*
3. *Сваки t-подскуп од V садржан је у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$.*

Претходна дефиниција се може проширити за $t = 1$, $t = k$ и $k = v$, када за Штајнерове системе кажемо да су тривијални. С обзиром да егзистенција Штајнеровог система зависи само од вредности параметара v, k и t, коришћење ознаке $S(t,k,v)$ је коректно. За Штајнеров систем тројки $S(2,3,v)$ уобичајна ознака је STS(v) (*Steiner triple system*), док је за Штајнеров систем $S(3,4,v)$ уобичајна ознака SQS(v) (*Steiner quadruple system*).

Нису у потпуности познати услови егзистенције Штајнеровог система $S(t,k,v)$. Помоћу следеће две леме [3] добијају се неки од неопходних услова егзистенције.

Лема 1.1.2. *Штајнеров систем $S(t,k,v)$ садржи $\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$ блокова.*

Доказ. Следи из чињенице да је $\binom{v}{t}$ број свих t-подскупова скупа V, док је $\binom{k}{t}$ број t-подскупова садржаних у једном блоку. $\square$

Лема 1.1.3. *Ако постоји Штајнеров систем $S(t,k,v)$ онда постоји Штајнеров систем $S(t-1,k-1,v-1)$.*

Доказ. Нека је $(V, \mathcal{B})$ Штајнеров систем $S(t,k,v)$ и нека је $V = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$. Нека је $\mathcal{B}_{x_1}$ скуп свих k-подскупова из $\mathcal{B}$ који садрже елемент x_1 и нека је $\overline{\mathcal{B}}_{x_1}$ скуп $(k-1)$-подскупова добијених од k-подскупова из $\mathcal{B}_{x_1}$ избацивањем елемента x_1. С обзиром да је сваки t-подскуп од V, који садржи x_1, садржан у тачно једном блоку из $\mathcal{B}_{x_1}$, следи да је сваки $(t-1)$-подскуп од $V \backslash \{x_1\}$ садржан у тачно једном блоку из $\overline{\mathcal{B}}_{x_1}$. То значи да је $(V \backslash \{x_1\}, \overline{\mathcal{B}}_{x_1})$ Штајнеров систем $S(t-1,k-1,v-1)$. $\square$

Напомена 1: У претходној леми, за $t = 2$ добија се тривијални Штајнеров систем $S(1, k-1, v-1)$, који постоји ако и само ако $(k-1)\big|(v-1)$.

Напомена 2: Штајнеров систем $S(t-1, k-1, v-1)$, добијен из Штајнеровог система $S(t, k, v)$ избацивањем елемента x_1 из блокова који га садрже, назива се контракција 1. реда система $S(t, k, v)$. Понављајући поступак на $S(t-1, k-1, v-1)$ добијамо Штајнеров систем $S(t-2, k-2, v-2)$, који представља контракцију 2. реда система $S(t, k, v)$ итд.

На основу Лема 1.1.2 и 1.1.3 добијају се неопходни услови за егзистенцију Штајнеровог система $S(t, k, v)$ [3]:

$$\tbinom{k}{t}\Big|\tbinom{v}{t}\ ,\ \tbinom{k-1}{t-1}\Big|\tbinom{v-1}{t-1}\ ,\ \dots\ ,\ \tbinom{k-t+1}{1}\Big|\tbinom{v-t+1}{1}. \tag{1.1.1}$$

У општем случају, горњи услови нису довољни за егзистенцију Штајнеровог система $S(t, k, v)$. На пример, не постоје Штајнерови системи $S(2, 6, 36)$ [17], $S(4, 5, 15)$ и $S(4, 6, 18)$ [7], иако задовољавају услове (1.1.1).

За Штајнеров систем тројки $S(2, 3, v)$, тј. STS(v), услови (1.1.1) постају $\tbinom{3}{2}\Big|\tbinom{v}{2}$ и $\tbinom{2}{1}\Big|\tbinom{v-1}{1}$, односно $6\big|v(v-1)$ и $2\big|(v-1)$. Није тешко видети да су добијени услови дељивости еквивалентни са $v \equiv 1$ или $3 \pmod 6$. Другим речима, неопходан услов за егзистенцију Штајнеровог система тројки STS(v) је [53, 93]

$$v = 6n + 1 \ \text{ или } \ v = 6n + 3 \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.1.2}$$

У поглављу 1.2 ћемо видети да је услов (1.1.2) довољан за егзистенцију Штајнеровог система тројки STS(v). Може се показати да су услови (1.1.1) такође довољни за егзистенцију Штајнерових система $S(2, 4, v)$ и $S(3, 4, v)$, тј. SQS(v). Наиме, Штајнеров систем $S(2, 4, v)$ постоји ако и само ако важи [38, 82]

$$v = 12n + 1 \ \text{ или } \ v = 12n + 4 \ \ (n \in \mathbb{N}), \tag{1.1.3}$$

док Штајнеров систем SQS(v) постоји ако и само ако важи [37, 54]

$$v = 6n + 2 \text{ или } v = 6n + 4 \ \ (n \in \mathbb{N}). \tag{1.1.4}$$

Пре него што дамо још један неопходан услов за егзистенцију Штајнерових система, дајемо дефиницију и основне особине коначне *пројективне равни* [15, 23, 46]:

Дефиниција 1.1.4. *Нека је P коначан скуп тачака, $\mathcal{L}$ коначан скуп правих и $\mathcal{I}$ релација инциденције између њих. $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ је коначна пројективна раван ако важе следеће особине:*

1. *Сваке две различите тачке из P су инцидентне са тачно једном правом из $\mathcal{L}$.*
2. *Сваке две различите праве из $\mathcal{L}$ су инцидентне са тачно једном тачком из P.*
3. *Постоје четири тачке у P, међу којима никоје три нису колинеарне.*

Ако је $(P, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ коначна пројективна раван, постоји $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ (ред равни) тако да свака права садржи тачно $n + 1$ тачку. Тада, кроз сваку тачку пролази тачно $n+1$ правих, а P садржи n^2+n+1 различитих тачака. Дакле, $(P, \mathcal{L})$ је Штајнеров систем $S(2, n+1, n^2+n+1)$, за који такође кажемо да је пројективна раван реда n. $S(2, 3, 7)$ је најједноставнија пројективна раван (Слика 1.1). За сваки $n = p^m$ (p прост, $m \in \mathbb{N}$) постоји пројективна раван реда n [46]. Није позната пројективна раван реда n, за $n \neq p^m$. Не постоје пројективне равни реда 6 и 10 [51], а питање егзистенције пројективне равни реда 12 и даље је отворено.

Нека је сада $(V, \mathcal{B})$ Штајнеров систем $S(2, k, v)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_v\}$ и $B \in \mathcal{B}$ блок који не садржи x_1. За сваки елемент $x_i \in B$ постоји јединствени блок $B_i \in \mathcal{B}$ који садржи подскуп $\{x_1, x_i\}$, $i \neq 1$. С обзиром да је број блокова из $\mathcal{B}$ који садрже x_1 једнак $(v-1)/(k-1)$ (број блокова у $S(1, k-1, v-1)$), важи неједнакост $(v-1)/(k-1) \geqslant k$, тј. $v-1 \geqslant k(k-1)$. Примењујући добијену неједнакост на Штајнеров систем $S(2, k-t+2, v-t+2)$ (контракција реда $(t-2)$), добијамо још један неопходан услов за егзистенцију Штајнеровог система $S(t,k,v)$ [55]:

$$v - t + 1 \geqslant (k - t + 2)(k - t + 1). \tag{1.1.5}$$

Претпоставимо да за Штајнеров систем $S(2,k,v)$ важи једнакост у (1.1.5), тј. да важи $v - 1 = k(k-1)$. То је могуће ако и само ако сваки блок који садржи x_1 има тачно један заједнички елемент са блоком B. Пошто то важи за произвољан блок B и произвољно $x_1 \notin B$, следи да свака два различита блока (праве) из $\mathcal{B}$ имају тачно један заједнички елемент (тачку). Пошто у $S(2,k,v)$, свака два различита елемента припадају тачно једном блоку, Штајнеров систем $S(2,k,v)$ је пројективна раван.

Ако за Штајнеров систем $S(3,k,v)$ важи једнакост у (1.1.5), онда је контракција $S(2,k-1,v-1)$ пројективна раван реда n, па је $k = n+2$ и $v = n^2 + n + 2$. Из услова дељивости (1.1.1) добијамо $\binom{n+2}{3} \Big| \binom{n^2+n+2}{3}$, тј. $(n+2)\big|(n^2+n+2)(n^2+n+1) = [(n+2)^2 - 3(n+2) + 4]\,[(n+2)^2 - 3(n+2) + 3]$. То значи да $(n+2)\big|12$, односно $n \in \{2,4,10\}$. С обзиром да $S(3,12,112)$ не постоји [92], преостају једино Штајнерови системи $S(3,4,8)$ и $S(3,6,22)$.

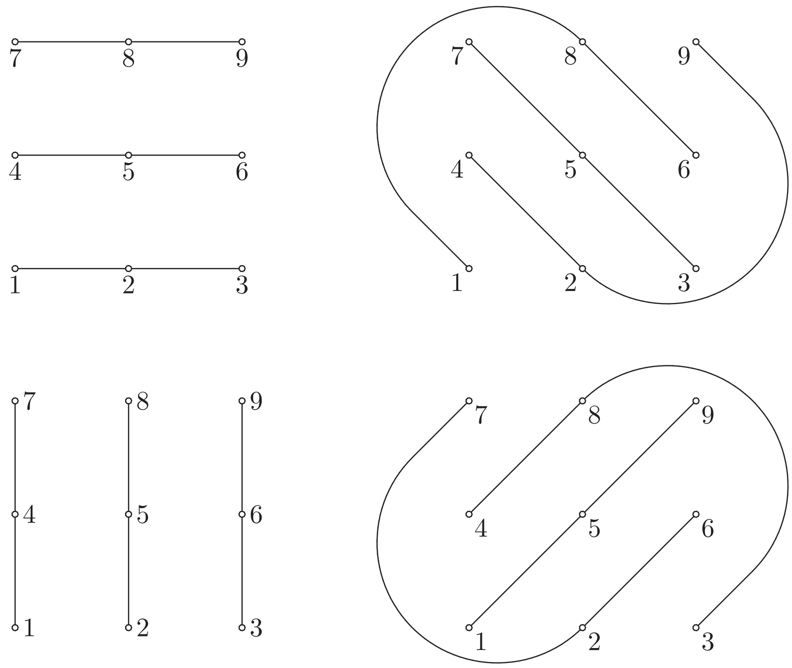
Ако за Штајнеров систем $S(4,k,v)$ важи једнакост у (1.1.5), онда је контракција $S(2,k-2,v-2)$ пројективна раван, а $S(3,4,8)$ и $S(3,6,22)$ једине могуће контракције $S(3,k-1,v-1)$. С обзиром да $S(4,5,9)$ не задовољава услове дељивости (1.1.1), преостаје једино Штајнеров систем $S(4,7,23)$. Слично, $S(5,8,24)$ је једини Штајнерови систем облика $S(5,k,v)$ за који важи једнакост у (1.1.5), а систем $S(6,9,25)$ не задовољава услове дељивости (1.1.1). Тиме је доказана следећа теорема [55] која описује све Штајнерове системе за које се у (1.1.5) достиже једнакост.

Теорема 1.1.5. *Ако за Штајнеров систем $S(t,k,v)$ важи једнакост*
$v - t + 1 = (k - t + 2)(k - t + 1)$, тада:

(i) ако је $t = 2$, тада је $S(t,k,v)$ пројективна раван,

(ii) ако је $t > 2$, тада $(t,k,v) \in \{(3,4,8),(3,6,22),(4,7,23),(5,8,24)\}$.

Попут пројективне равни, може се дефинисати *афина раван* [15, 23, 46]. Суштинска разлика је аксиома паралелности. Показује се да постоји $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ (ред равни) тако да свака права садржи тачно n тачака, док цела раван садржи n^2 различитих тачака. За индуковани Штајнеров систем $S(2,n,n^2)$ такође кажемо да је афина раван реда n. Такође, може се показати да афина раван реда n постоји ако и само ако постоји пројективна раван реда n [46, 53]. $S(2,3,9)$ је најједноставнија, нетривијална афина раван (Слика 1.2).



Слика 1.2: Класе паралелних правих афине равни $S(2,3,9)$

Поменули смо да су све познате пројективне (афине) равни реда $n = p^m$ (p прост, $m \in \mathbb{N}$). У том случају, пројективна (афина) раван се добија конструисањем пројективне геометрије $\mathrm{PG}_2(n)$ (афине геометрије $\mathrm{AG}_2(n)$), димензије 2, над коначним пољем $\mathbb{F}_n$. Општије, помоћу пројективне геометрије $\mathrm{PG}_d(n)$ и афине геометрије $\mathrm{AG}_d(n)$, димензије $d \geqslant 2$, над пољем $\mathbb{F}_n$, редом се добијају следећи Штајнерови системи [15, 25, 46]:

$$\begin{aligned} &S(2, n+1, n^d + \ldots + n + 1);\ \ n = p^m, \\ &S(2, n, n^d);\ \ n = p^m. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Од других бесконачних фамилија Штајнерових система имамо [33, 63]:

$$\begin{aligned} &S(3, n+1, n^d+1);\ n = p^m, \\ &S(2, n+1, n^3+1);\ n = p^m, \\ &S(2, 2^r, 2^{r+s}+2^r-2^s);\ 2 \leqslant r < s. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Прва фамилија у (1.1.7) је индукована сферном геометријом, друга је индукована униталном геометријом (*unital geometry*), док је трећа фамилија Денистонових шема (*Denniston designs*).

Поред услова (1.1.1) и (1.1.5), без доказа дајемо још два неопходна услова за егзистенцију Штајнеровог система $S(t,k,v)$ [15, 55]:

$$\begin{aligned} &v \geqslant (t+1)(k-t+1), \\ &\tbinom{v}{t} \geqslant \tbinom{v}{\lfloor t/2 \rfloor}\tbinom{k}{t}, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

где је $\lfloor x \rfloor$ највећи цео број не већи од x.

Као што је речено, у општем случају нису познати довољни услови за егзистенцију Штајнерових система. За $t > 3$ познато је само коначно много Штајнерових система $S(t,k,v)$ [15, 30]. За $t = 5$ то су: $S(5,6,12)$, $S(5,6,24)$, $S(5,6,36)$, $S(5,6,48)$, $S(5,6,72)$, $S(5,6,84)$, $S(5,6,108)$, $S(5,6,132)$, $S(5,6,168)$, $S(5,6,244)$, $S(5,7,28)$ и $S(5,8,24)$, а за $t = 4$ то су одговарајуће контракције 1. реда: $S(4,5,11)$, $S(4,5,23)$, $S(4,5,35)$, $S(4,5,47)$, $S(4,5,71)$, $S(4,5,83)$, $S(4,5,107)$, $S(4,5,131)$, $S(4,5,167)$, $S(4,5,243)$, $S(4,6,27)$ и $S(4,7,23)$. Није познат ни један Штајнеров систем $S(t,k,v)$, за $t > 5$.

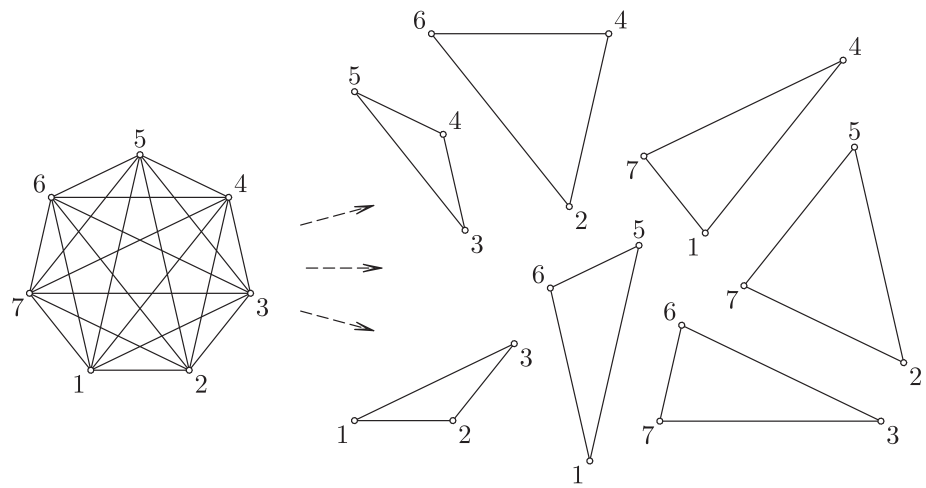
На крају поменимо да су Штајнерови системи коришћени у оспореном, алгебарском решењу проблема четири боје [24]. Коришћено је тврђење да за Штајнеров систем $S(n+1, 2n, 6n)$ важи $n \leqslant 4$, што следи из прве неједнакости у (1.1.7).

Поред датих референци везаних за комбинаторне шеме, у [8, 18, 55, 67] се може наћи више детаља у вези Штајнерових система.

1.2 Штајнерови системи тројки

У овом делу, основни циљ нам је да покажемо да су услови (1.1.2) довољни за егзистенцију Штајнеровог система тројки STS(v). Пре тога, изнећемо неколико особина ових Штајнерових система. Најкомплетнији преглед Штајнерових система тројки се може наћи у [18].

Као што је речено, Штајнеров систем тројки STS(v) је специјални случај Штајнеровог система $S(t,k,v)$, за $t=2$ и $k=3$. Дакле, STS(v) је уређени пар $(V,\mathcal{B})$, где је V v-скуп и $\mathcal{B}$ фамилија 3-подскупова (блокова) од V, таквих да је сваки пар елемената из V садржан у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$. Из угла теорије графова, Штајнеров систем тројки STS(v) може се представити као декомпозиција (разбијање) скупа свих грана комплетног графа K_v на троуглове (Слика 1.3).[9]



Слика 1.3: Разбијање скупа свих грана графа K_7 на троуглове

Штајнерове системе тројки могуће је посматрати и из алгебарског угла [55]. На пример, нека је $(V,\circ)$ комутативни групоид за који још важи $x\circ x=x$ и $x\circ(x\circ y)=y$, за све $x,y\in V$. Ако је $\mathcal{B}=\{(x,y,x\circ y):\ x,y\in V,\ x\neq y\}$, онда је $(V,\mathcal{B})$ Штајнеров систем тројки. Обрнуто, нека је $(V,\mathcal{B})$ Штајнеров систем тројки и $\circ$ бинарна операција дефинисана са $x\circ x=x$ и $x\circ y=$ трећи елемент у блоку који садржи x и y ($x,y\in V$, $x\neq y$). Тада је $(V,\circ)$ комутативни групоид са особинама $x\circ x=x$ и $x\circ(x\circ y)=y$

[9] Важи општије: Штајнеров систем $S(2,k,v)$ представља разбијање скупа свих грана комплетног графа K_v на k-клике.

$(x, y \in V)$. Слично, сваком Штајнеровом систему тројки $(V, \mathcal{B})$ одговара комутативни групоид $(V \cup \{e\}, \circ)$, са јединицом e и особином $x \circ (x \circ y) = y$, за све $x, y \in V$.

Вратимо се на проблем егзистенције Штајнерових система тројки. Да би доказали да су неопходни услови (1.1.2) уједно и довољни за егзистенцију Штајнеровог система тројки STS(v), потребно је доказати егзистенцију Штајнерових система STS$(6n+1)$ и STS$(6n+3)$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Познато је више директних и индиректних конструкција наведених Штајнерових система тројки. Овде ћемо приказати Боузову конструкцију (*Bose construction*) Штајнерових система STS$(6n+3)$ и Сколемову конструкцију (*Skolem construction*) Штајнерових система STS$(6n+1)$. Пре тога, доказаћемо неколико помоћних тврђења неопходних за наведене конструкције. Најпре дајемо следећу једноставну лему [53]:

Лема 1.2.1. *Нека је V v-скуп и $\mathcal{B}$ фамилија 3-подскупова (блокова) од V. Ако је сваки пар елемената из V садржан у бар једном блоку из $\mathcal{B}$ и ако је $|\mathcal{B}| \leqslant v(v-1)/6$, тада је $(V, \mathcal{B})$ Штајнеров систем тројки* STS(v).

Доказ. С обзиром да је број свих парова из V једнак $\binom{v}{2}$, а сваки блок садржи $\binom{3}{2}$ пара, из првог услова добијамо $|\mathcal{B}| \geqslant \binom{v}{2} / \binom{3}{2} = v(v-1)/6$, што заједно са другим условом даје $|\mathcal{B}| = v(v-1)/6$. То значи да је сваки пар елемената из V садржан у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$, односно $(V, \mathcal{B})$ је Штајнеров систем тројки. □

Напомињемо да такође важи: ако је сваки пар из V садржан у највише једном блоку из $\mathcal{B}$ и ако је $|\mathcal{B}| \geqslant v(v-1)/6$, тада је $(V, \mathcal{B})$ Штајнеров систем тројки. Сада наводимо дефиниције *квазигрупе* и *латинског квадрата*.

Дефиниција 1.2.2. *$(K, \circ)$ је квазигрупа реда n ако је K n-скуп и $\circ$ бинарна операција на K, таква да за све $a, b \in K$ једначине $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$ имају јединствена решења у скупу K.*

Дефиниција 1.2.3. *Латински квадрат реда n је низ $n \times n$ (квадратна шема), са елементима из n-скупа K, тако да су елементи у свакој врсти и свакој колони међусобно различити.*

Без губљења општости, можемо узети да је $K = \{1, 2, \dots, n\}$.

Свакој квазигрупи реда n одговара један латински квадрат реда n и обрнуто (Слика 1.4).

$\circ$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	1	2	3
3	3	4	1	2
4	2	3	4	1

$\iff$

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

Слика 1.4: Квазигрупа и одговарајући латински квадрат реда 4

За Боузову и Сколемову конструкцију неопходне су *идемпотентне* и *полу-идемпотентне* комутативне квазигрупе (латински квадрати). Квазигрупа је идемпотентна ако је $i \circ i = i$, за све $i \in K$. Квазигрупа реда $2n$ је полу-идемпотентна ако је $i \circ i = (n+i) \circ (n+i) = i$, за $i = 1, \dots, n$. Квазигрупа је комутативна ако и само ако је одговарајући латински квадрат симетричан у односу на главну дијагоналу. На Слици 1.5 је дата идемпотентна комутативна квазигрупа реда 5 (а) и полу-идемпотентна комутативна квазигрупа реда 4 (б).

$\circ$	1	2	3	4	5
1	**1**	4	2	5	3
2	4	**2**	5	3	1
3	2	5	**3**	1	4
4	5	3	1	**4**	2
5	3	1	4	2	**5**

а)

$\circ$	1	2	3	4
1	**1**	3	2	4
2	3	**2**	4	1
3	2	4	**1**	3
4	4	1	3	**2**

б)

Слика 1.5: Идемпотентна и полу-идемпотентна комутативна квазигрупа

Следећа лема даје довољне услове за егзистенцију идемпотентне комутативне квазигрупе [53, 93].

Лема 1.2.4. *Идемпотентна комутативна квазигрупа реда n постоји ако и само ако је n непаран.*

Доказ. $\Rightarrow$) Нека је $(K, \circ)$ идемпотентна комутативна квазигрупа реда n. Нека је $a \in K$ и $\mathcal{R}_a = \{(x, y) : x \circ y = a\}$. Сваком елементу скупа $\mathcal{R}_a$ одго-

вара тачно једно "a" у одговарајућем латинском квадрату, одакле је $|\mathcal{R}_a| = n$. С обзиром да је квазигрупа идемпотентна тачно један елемент скупа $\mathcal{R}_a$ се налази на главној дијагонали, а с обзиром да је квазигрупа комутативна одговарајући латински квадрат је симетричан у односу на главну дијагоналу. То значи да је број елемената скупа $\mathcal{R}_a$ ван дијагонале паран ($n-1$ је паран), одакле следи да је n непаран.
$\Leftarrow$) Тривијална квазигрупа реда 1 је идемпотентна и комутативна. Конструишимо идемпотентну комутативну квазигрупу реда $2n+1$, за произвољно $n \in \mathbb{N}$. Кренимо од познате адитивне групе (квазигрупе) $(\mathbb{Z}_{2n+1}, +)$, где је $\mathbb{Z}_{2n+1} = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ и $+$ сабирање по модулу $2n+1$. Квазигрупа је комутативна, а главна дијагонала одговарајућег латинског квадрата садржи $2n+1$ различитих елемената: $0, 2, \ldots, 2n, 1, 3, \ldots, 2n-1$, редом. Извршимо следећу пренумерацију у латинском квадрату (квазигрупи): $2i \mapsto i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $2i-1 \mapsto n+i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, тако да главна дијагонала садржи редом елеменате: $0, 1, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots, 2n$. Добијена квазигрупа реда $2n+1$ је идемпотентна и комутативна, што је и требало доказати. $\square$

На сличан начин, полазећи од групе $(\mathbb{Z}_{2n}, +)$, након пренумерације се може добити полу-идемпотентна комутативна квазигрупа реда $2n$. Дакле, важи следећа лема [53, 93]:

Лема 1.2.5. *Полу-идемпотентна комутативна квазигрупа реда n постоји ако и само ако је n паран.*

Најзад, спремни смо за Боузову [9, 53, 93] и Сколемову [53, 91] конструкцију. Без губљења општости, надаље ћемо подразумевати да је $K = \mathbb{Z}_n$, тј. да је $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \circ)$ произвољна идемпотентна и $(\mathbb{Z}_{2n}, \circ)$ произвољна полу-идемпотентна комутативна квазигрупа.

1.2.1 STS$(6n+3)$: Боузова конструкција

Теорема 1.2.6. *Нека је $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \circ)$ идемпотентна комутативна квазигрупа и $V = \mathbb{Z}_{2n+1} \times \mathbb{Z}_3$. Нека је $\mathcal{B}$ скуп следећих 3-подскупова од V:*

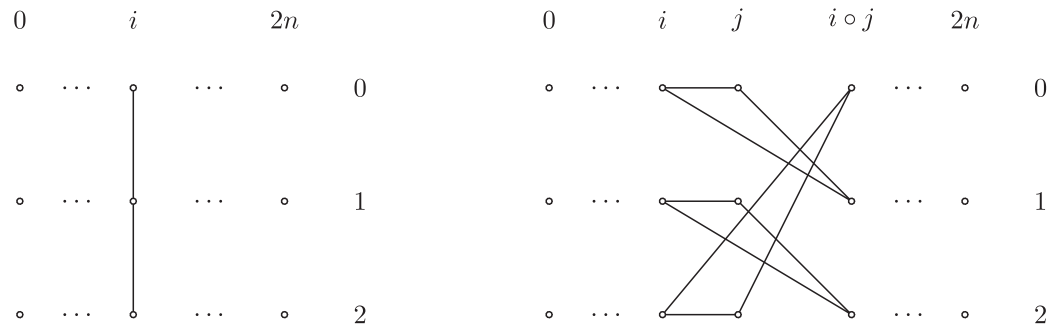
типа 1: $\{(i,0),(i,1),(i,2)\}$; $i \in \mathbb{Z}_{2n+1}$ *и*

типа 2: $\{(i,0),(j,0),(i \circ j,1)\}$, $\{(i,1),(j,1),(i \circ j,2)\}$, $\{(i,2),(j,2),(i \circ j,0)\}$;
$i,j \in \mathbb{Z}_{2n+1}$, $i < j$.

Тада је $(V, \mathcal{B})$ *Штајнеров систем тројки* STS$(6n+3)$.

Напомена: Блокови типа 2 се могу једноставније задати са:
$\{(i,a),(j,a),(i \circ j, a+1)\}$; $i,j \in \mathbb{Z}_{2n+1}$, $i < j$, $a \in \mathbb{Z}_3$, где је $a+1$ сабирање по модулу 3.

Доказ. Најпре покажимо да сваки пар елемената из V припада неком блоку из $\mathcal{B}$. Нека су (i,a) и (j,b) $(i,j \in \mathbb{Z}_{2n+1},\ a,b \in \mathbb{Z}_3)$ два произвољана, различита елемената скупа V. Разликоваћемо следећа три случаја:
1. случај: $i = j$. Тада је $a \neq b$, па елементи (i,a) и (i,b) припадају блоку $\{(i,0),(i,1),(i,2)\}$, типа 1 (Слика 1.6).
2. случај: $a = b$. Тада је $i \neq j$, на пример $i < j$. Елементи (i,a) и (j,a) припадају блоку $\{(i,a),(j,a),(i \circ j, a+1)\}$, типа 2 (Слика 1.6).
3. случај: $i \neq j$ и $a \neq b$. С обзиром да $a,b \in \mathbb{Z}_3$, без губљења општости можемо узети да је $a+1 = b$. У квазигрупи $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \circ)$, постоји јединствено $l \in \mathbb{Z}_{2n+1}$ тако да је $i \circ l = j$. Како је квазигрупа идемпотентна, из $i \neq j$ следи $i \neq l$. Ако је $i < l$, елементи (i,a) и (j,b) припадају блоку $\{(i,a),(l,a),(i \circ l, a+1)\} = \{(i,a),(l,a),(j,b)\}$, типа 2. Ако је $l < i$, елементи (i,a) и (j,b) припадају блоку $\{(l,a),(i,a),(l \circ i, a+1)\} = \{(l,a),(i,a),(j,b)\}$, такође типа 2.



Слика 1.6: Блокови при Боузовој конструкцији

Дакле, сваки пар елемената из V садржан је у бар једном блоку из $\mathcal{B}$. Са друге стране, број елемената скупа V је $|V| = 3(2n+1) = 6n+3$, а број блокова у $\mathcal{B}$ је $|\mathcal{B}| = (2n+1) + 3 \cdot \binom{2n+1}{2} = (6n+3)(6n+2)/6$. На основу Леме 1.2.1, $(V, \mathcal{B})$ је Штајнеров систем тројки STS$(6n+3)$. $\square$

1.2.2 STS$(6n+1)$: Сколемова конструкција

Теорема 1.2.7. *Нека је $(\mathbb{Z}_{2n}, \circ)$ полу-идемпотентна комутативна квазигрупа и $V = \mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_3 \cup \{\infty\}$. Нека је $\mathcal{B}$ скуп следећих 3-подскупова од V:*

типа 1: $\{(i,0),(i,1),(i,2)\}\,;\ i \in \mathbb{Z}_n\,,$

типа 2: $\{(i,0),(j,0),(i\circ j,1)\},\ \{(i,1),(j,1),(i\circ j,2)\},\ \{(i,2),(j,2),(i\circ j,0)\}\,;$
$i, j \in \mathbb{Z}_{2n},\ i < j,$

типа 3: $\{\infty,(n+i,0),(i,1)\},\ \{\infty,(n+i,1),(i,2)\},\ \{\infty,(n+i,2),(i,0)\}\,;\ i \in \mathbb{Z}_n.$

Тада је $(V, \mathcal{B})$ Штајнеров систем тројки STS$(6n+1)$.

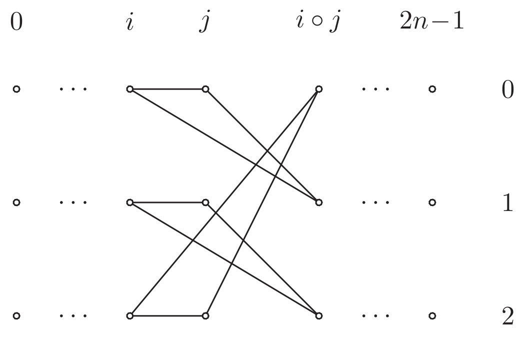
Напомена: У теорији комбинаторних шема, "∞" је уобичајна ознака за елемент који је по некој особини различит од других елемената скупа V.

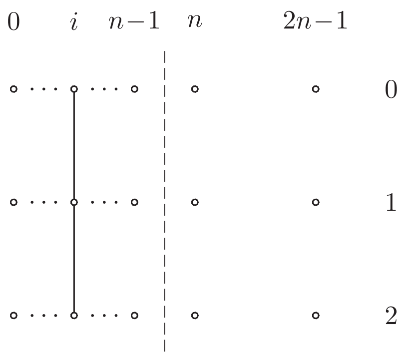
Доказ. Број елемената скупа V је $|V| = 3\cdot 2n + 1 = 6n+1$, а број блокова у $\mathcal{B}$ је $|\mathcal{B}| = n + 3\cdot\binom{2n}{2} + 3n = (6n+1)(6n)/6$. На основу Леме 1.2.1, довољно је доказати да сваки пар елемената из V припада бар једном блоку из $\mathcal{B}$.

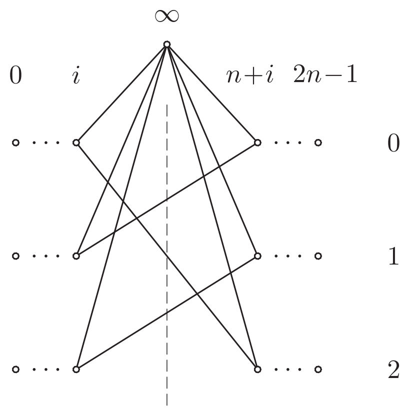
Пар елемента ∞ и (i,a) $(i \in \mathbb{Z}_{2n},\ a \in \mathbb{Z}_3)$ припада блоку типа 3 (Слика 1.7): за $i < n$ пар припада блоку $\{\infty,(n+i,a-1),(i,a)\}$, а за $i \geqslant n$ блоку $\{\infty,(i,a),(i-n,a+1)\}$ (сабирање $a+1$ и одузимање $a-1$ је по модулу 3).

Нека су (i,a) и (j,b) $(i,j \in \mathbb{Z}_{2n},\ a,b \in \mathbb{Z}_3)$ два произвољана, различита елемената скупа $V \backslash \{\infty\}$. Разликоваћемо следеће случајеве:

1. случај: $i = j$. Тада је $a \neq b$, па без губљења општости можемо узети да је $a+1 = b$. Ако је $i < n$, елементи (i,a) и (i,b) припадају блоку $\{(i,0),(i,1),(i,2)\}$, типа 1 (Слика 1.7). Нека је сада $i \geqslant n$. У квазигрупи $(\mathbb{Z}_{2n}, \circ)$, постоји јединствено $l \in \mathbb{Z}_{2n}$ тако да је $i \circ l = i$. Како је квазигрупа полу-идемпотентна важи $i \circ i = n - i$, па је $i \neq l$. Ако је $i < l$, елементи (i,a) и (i,b) припадају блоку $\{(i,a),(l,a),(i\circ l,a+1)\} = \{(i,a),(l,a),(i,b)\}$, типа 2 (Слика 1.7). Ако је $l < i$, елементи (i,a) и (i,b) припадају блоку $\{(l,a),(i,a),(l\circ i,a+1)\} = \{(l,a),(i,a),(i,b)\}$, такође типа 2.







Слика 1.7: Блокови при Сколемовој конструкцији

2. случај: $a = b$. Тада је $i \neq j$, на пример $i < j$. Елементи (i, a) и (j, a) припадају блоку $\{(i, a), (j, a), (i \circ j, a + 1)\}$, типа 2.

3. случај: $i \neq j$ и $a \neq b$. Поново можемо узети да је $a + 1 = b$. У квазигрупи $(\mathbb{Z}_{2n}, \circ)$, постоји јединствено $l \in \mathbb{Z}_{2n}$ тако да је $i \circ l = j$. Ако је $i < l$, елементи (i, a) и (j, b) припадају блоку $\{(i, a), (l, a), (i \circ l, a + 1)\} = \{(i, a), (l, a), (j, b)\}$, типа 2. Ако је $l < i$, елементи (i, a) и (j, b) припадају блоку $\{(l, a), (i, a), (l \circ i, a + 1)\} = \{(l, a), (i, a), (j, b)\}$, такође типа 2. Ако је $i = l$, онда је $i \circ i = j$. С обзиром да је квазигрупа полу-идемпотентна и $i \neq j$, следи $i = n + j$. То значи да елементи (i, a) и (j, b) припадају блоку $\{\infty, (n+j, a), (j, a+1)\} = \{\infty, (i, a), (j, b)\}$, типа 3, чиме је доказ завршен. $\square$

1.3 (v, k, t)–покривања

Попут Штајнерових система, имамо следећу дефиницију (v, k, t)–покривања [33, 63]:

Дефиниција 1.3.1. *(v, k, t)–покривање ($v, k, t \in \mathbb{N}$, $v > k > t \geqslant 2$) је уређени пар $(V, \mathcal{B})$ који задовољава следеће особине:*

1. *V је скуп који садржи v елемената (v-скуп).*
2. *$\mathcal{B}$ је фамилија k-подскупова (блокова) од V.*
3. *Сваки t-подскуп од V садржан је у бар једном блоку из $\mathcal{B}$.*

Претходна дефиниција се може проширити за $v = k$, $k = t$, $t = 1$ и $t = 0$, када за одговарајућа покривања кажемо да су тривијална. За разлику од Штајнерових система, (v, k, t)–покривање постоји за све вредности параметара $v, k, t \in \mathbb{N}$, $v \geqslant k \geqslant t \geqslant 0$. На пример, ако је $\mathcal{B}$ скуп свих k-подскупова од V, онда је $(V, \mathcal{B})$ једно (v, k, t)–покривање. Нама су од посебног интереса минимална (оптимална) (v, k, t)–покривања, тј. покривања са минималним бројем блокова. Број блокова минималног (v, k, t)–покривања обележавамо са $C(v, k, t)$ (*covering number*).

У тривијалним случајевима имамо $C(k, k, t) = 1$, $C(v, t, t) = \binom{v}{t}$, $C(v, k, 0) = 1$ и $C(v, k, 1) = \lceil \frac{v}{k} \rceil$ ($\lceil x \rceil$ је најмањи цео број не мањи од x). Специјално, за $v = nk + 1$ и $t = 1$ је $C(nk + 1, k, 1) = n + 1$, што значи да је за "покривање" $nk + 1$ елемента k-подскуповима неопходно бар $n+1$ таквих подскупова. Другим речима, (v, k, t)–покривања и вредности $C(v, k, t)$ можемо схватити као уопштење Дирихлеовог принципа.

Ако постоји Штајнеров систем $S(t, k, v)$ он је уједно и минимално (v, k, t)–покривање и $C(v, k, t) = \binom{v}{t} / \binom{k}{t}$ (Лема 1.1.2). Обрнуто, ако је $C(v, k, t) = \binom{v}{t} / \binom{k}{t}$ онда постоји Штајнеров систем $S(t, k, v)$. Дакле, (v, k, t)–покривања представљају уопштење Штајнерових система.

Поред Штајнерових система, следеће комбинаторне шеме се налазе у тесној вези са (v, k, t)–покривањима [33, 63]:

– t-(v, k, λ)–покривање је уређени пар $(V, \mathcal{B})$, где је V v-скуп, $\mathcal{B}$ фамилија k-подскупова (блокова) од V, таква да је сваки t-подскуп од V садржан у најмање λ блокова из $\mathcal{B}$. $C_\lambda(v,k,t)$ је минималан број блокова t-(v,k,λ)−покривања. t-$(v,k,1)$−покривање је (v,k,t)−покривање. Већину тврђења, која важе за (v,k,t)−покривања, могуће је проширити на случај t-(v,k,λ)−покривања.

– Уређено (v,k,t)−покривање је уређени пар $(V,\mathcal{B})$, где је V v-скуп, $\mathcal{B}$ фамилија уређених k-торки скупа V, таква да је свака уређена t-торка скупа V садржана (у одговарајућем редоследу) у бар једној k-торки из $\mathcal{B}$. $DC(v,k,t)$ је минималан број блокова (k-торки) уређеног (v,k,t)−покривања. Уређено (v,k,t)−покривање је t-$(v,k,t!)$−покривање. Слично као у случају (v,k,t)−покривања, могу се дефинисати уређена t-(v,k,λ)−покривања и вредности $DC_\lambda(v,k,t)$.

– (v,k,t)−паковање је уређени пар $(V,\mathcal{B})$, где је V v-скуп, $\mathcal{B}$ фамилија k-подскупова (блокова) од V, таква да је сваки t-подскуп од V садржан у највише једном блоку из $\mathcal{B}$. $D(v,k,t)$ је максималан број блокова (v,k,t)−паковања. Слично као у случају покривања, могу се дефинисати t-(v,k,λ)−паковања и вредности $D_\lambda(v,k,t)$, као и уређена t-(v,k,λ)−паковања и вредности $DD_\lambda(v,k,t)$.

– Туранов (v,k,t)−систем (*Turán system*) је уређени пар $(V,\mathcal{B})$, где је V v-скуп, $\mathcal{B}$ фамилија t-подскупова (блокова) од V, таква да сваки k-подскуп од V садржи бар један блок из $\mathcal{B}$ $(v \geqslant k \geqslant t)$. $T(v,k,t)$ је минималан број блокова Турановог (v,k,t)−система. $(V,\mathcal{B})$ је Туранов систем ако и само ако $(V,\{V \backslash B : B \in \mathcal{B}\})$ је $(v,v-t,v-k)$−покривање. Важи једнакост $T(v,k,t) = C(v,v-t,v-k)$.

– Кворум систем (*quorum system*) је уређени пар $(V,\mathcal{B})$, где је V v-скуп, $\mathcal{B}$ фамилија подскупова (кворума) од V, таквих да свака два кворума имају непразан пресек. Веза између кворум система и (v,k,t)−покривања се може наћи у [16].

– (v,k,t,d) покривајући код константне тежине (*constant-weight covering code*) је код дужине v и тежине k, такав да за сваку реч тежине t постоји реч из кода на (Хаминговом) растојању не већем од d.

$K(v,k,t,d)$ је минималан број речи овог (v,k,t,d) кода. За $k \geqslant t$, $(v,k,t,k-t)$ покривајући код константне тежине је изоморфан са $(v,k,t)-$покривањем и важи једнакост $K(v,k,t,k-t) = C(v,k,t)$.

– (v,k,r,t) лото шема (*lottery scheme*) је скуп k-подскупова (блокова) неког v-скупа, таквих да сваки r-подскуп садржи бар t заједничких елемената са неким од блокова. (v,k,t,t) лото шема је изоморфна са $(v,k,t)-$покривањем.

Основни проблем код $(v,k,t)-$покривања (*covering design problem*) је конструисање минималног $(v,k,t)-$покривања, односно одређивање вредности $C(v,k,t)$. Тачне вредности $C(v,k,t)$ су познате само за мале вредности параметара v, k и t, као и у неким специјалним случајвима као што су $C(v,3,2)$ и $C(v,4,2)$. Највећи број научних радова из ове области се бави оцењивањем вредности $C(v,k,t)$, тј. одређивањем доњих и горњих граница вредности $C(v,k,t)$. Пре него што наведемо постојеће резултате, дајемо један пример минималног $(v,k,t)-$покривања.

Пример 1.3.2. *Нека је* $V = \mathbb{Z}_6$ *и*

$$\mathcal{B} = \{\{0,1,3\},\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,4,0\},\{4,5,1\},\{5,0,2\}\}.$$

Директном провером утврђујемо да је сваки пар елемената из V *покривен бар једним блоком из* $\mathcal{B}$*, тј.* $(V,\mathcal{B})$ *је једно* $(6,3,2)-$*покривање. Ако би постојало* $(6,3,2)-$*покривање* $(V,\mathcal{B}')$ *са 5 блокова, на основу Дирихлеовог принципа, постојао би елемент из* V *(на пример* $0 \in V$*) који се налази у највише* $\left\lfloor \frac{5\cdot 3}{6} \right\rfloor = 2$ *блока из* $\mathcal{B}'$*. Међутим, тада не могу бити покривени сви парови* $\{0,i\}$ $(i = 1,\ldots,5)$ *блоковима из* $\mathcal{B}'$*, што је супротно претпоставци да је* $(V,\mathcal{B}')$ *покривање. Дакле,* $(V,\mathcal{B})$ *је минимално* $(6,3,2)-$*покривање и* $C(6,3,2) = 6$*.* $(V,\mathcal{B})$ *није Штајнеров систем јер су парови* $\{0,3\}$*,* $\{1,4\}$ *и* $\{2,5\}$ *садржани у по два различита блока. Није тешко приметити да је* $\mathcal{B} = \{\{0+i,1+i,3+i\} : i \in \mathbb{Z}_6\}$*, што значи да је* $(V,\mathcal{B})$ *такозвано циклично покривање.*

1.3.1 Доње границе вредности $C(v,k,t)$

Како је $\binom{v}{t}$ број свих t-подскупова скупа V и $\binom{k}{t}$ број t-подскупова садржаних у једном блоку, број блокова $(v,k,t)-$покривања не може бити мањи од $\binom{v}{t}/\binom{k}{t}$. Дакле, важи неједнакост

$$C(v,k,t) \geqslant \left\lceil \frac{v(v-1)\cdots(v-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)} \right\rceil, \tag{1.3.1}$$

Де Кон (*de Caen*) је дао неједнакост [10][10]

$$C(v,k,t) \geqslant \left\lceil \frac{(t+1)(v-t)}{(k+1)(v-k)} \cdot \frac{v(v-1)\cdots(v-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)} \right\rceil, \tag{1.3.2}$$

која је, за поједине вредности параметара, боља од неједнакости (1.3.1).

У општем случају, најбољу доњу границу вредности $C(v,k,t)$ дао је Шонхајм (*Schönheim*) [88]:

$$C(v,k,t) \geqslant \left\lceil \frac{v}{k} \left\lceil \frac{v-1}{k-1} \cdots \left\lceil \frac{v-t+1}{k-t+1} \right\rceil \cdots \right\rceil \right\rceil. \tag{1.3.3}$$

Шонхајмова неједнакост је последица следеће леме [88]:

<u>Лема</u> 1.3.3. *Нека је $(V,\mathcal{B})$ једно $(v,k,t)-$покривање и $x \in V$. Нека је $\mathcal{B}_x$ скуп свих блокова из $\mathcal{B}$ који садрже x и $\overline{\mathcal{B}}_x$ скуп добијен избацивањем елемента x из тих блокова. Тада је $(V \backslash \{x\}, \overline{\mathcal{B}}_x)$ једно $(v-1,k-1,t-1)-$покривање.*

Доказ претходне леме је аналоган доказу Леме 1.1.3.

Ако са $F(x)$ означимо број блокова из $\mathcal{B}$ који садрже x, на основу Леме 1.3.3 следи $F(x) \geqslant C(v-1,k-1,t-1)$. Сумирањем добијене неједнакости по $x \in V$ добија се $k \cdot C(v,k,t) \geqslant v \cdot C(v-1,k-1,t-1)$, тј.

$$C(v,k,t) \geqslant \left\lceil \frac{v}{k} C(v-1,k-1,t-1) \right\rceil. \tag{1.3.4}$$

Итерирањем неједнакости (1.3.4) добија се Шонхајмова неједнакост (1.3.3). Дакле, $C(v,k,t) \geqslant L(v,k,t)$, где је $L(v,k,t)$ Шонхајмова доња граница:

$$L(v,k,t) = \left\lceil \frac{v}{k} \left\lceil \frac{v-1}{k-1} \cdots \left\lceil \frac{v-t+1}{k-t+1} \right\rceil \cdots \right\rceil \right\rceil. \tag{1.3.5}$$

[10] Де Кон је одговарајућу неједнакост доказао за Туранове бројеве $T(v,k,t)$.

У већини случајева када су вредности $C(v,k,t)$ познате, важи једнакост $C(v,k,t) = L(v,k,t)$. Ипак, за одређене вредности параметара доказана је строга неједнакост $C(v,k,t) > L(v,k,t)$. Најпознатију неједнакост овог типа дао је Ханани. Пре Хананијевог тврђења наводимо следеће, општије, тврђење [63]:

Теорема 1.3.4. *Ако* $k \nmid vC(v-1,k-1,t-1)$ *и ако за неко* l $(2 \leqslant l \leqslant t)$ *важи*

$$C(v-1,k-1,t-1) = \frac{\binom{v-1}{l-1}}{\binom{k-1}{l-1}} C(v-l,k-l,t-l),$$

тада је

$$C(v,k,t) \geqslant \left\lceil \frac{vC(v-1,k-1,t-1)+l}{k} \right\rceil. \tag{1.3.6}$$

Доказ. Нека је $(V,\mathcal{B})$ једно $(v,k,t)-$покривање са $C(v,k,t)$ блокова и нека је A произвољан l-подскуп од V. Слично као у доказу Леме 1.3.3, са $F(A)$ означимо број блокова из $\mathcal{B}$ који садрже A. Јасно је да важи неједнакост $F(A) \geqslant C(v-l,k-l,t-l)$. Претпоставимо да за сваки l-подскуп A важи једнакост $F(A) = C(v-l,k-l,t-l)$. Сумирањем по свим l-подскуповима A, добијамо $\binom{k}{l}C(v,k,t) = \binom{v}{l}C(v-l,k-l,t-l)$. Последња једнакост је еквивалентна са

$$C(v,k,t) = \frac{v\binom{v-1}{l-1}}{k\binom{k-1}{l-1}} C(v-l,k-l,t-l) = \frac{vC(v-1,k-1,t-1)}{k},$$

што је супротно претпоставци да $k \nmid vC(v-1,k-1,t-1)$. Дакле, постоји l-подскуп A_0 за који важи $F(A_0) > C(v-l,k-l,t-l)$. Нека је x произвољан елемент из A_0 и $F(x)$ број блокова из $\mathcal{B}$ који садрже x. Сумирањем неједнакости $F(A) \geqslant C(v-l,k-l,t-l)$ по свим l-подскуповима A који садрже елемент x, добијамо $\binom{k-1}{l-1}F(x) > \binom{v-1}{l-1}C(v-l,k-l,t-l)$. Из последње неједнакости следи $F(x) > \frac{\binom{v-1}{l-1}}{\binom{k-1}{l-1}}C(v-l,k-l,t-l) = C(v-1,k-1,t-1)$, тј.

$$F(x) \geqslant C(v-1,k-1,t-1)+1, \text{ за све } x \in A_0.$$

Сумирањем добијене неједнакости са

$$F(y) \geqslant C(v-1,k-1,t-1), \text{ за све } y \notin A_0,$$

добијамо

$$kC(v,k,t) \geqslant vC(v-1,k-1,t-1)+l,$$

одакле следи неједнакост (1.3.6). $\square$

Нека је $t = l = 2$, $(k-1)\big|(v-1)$ и $v(v-1) \equiv 1 \pmod{k}$. Није тешко приметити да је тада $v(v-1) = (k-1)(ks-1)$, за неко $s \in \mathbb{N}$, одакле добијамо $L(v,k,2) = \left\lceil \frac{v(v-1)}{k(k-1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{(ks-1)(k-1)}{k(k-1)} \right\rceil = \left\lceil s - \frac{1}{k} \right\rceil = s$. Са друге стране, из претходне теореме добијамо $C(v,k,2) \geqslant \left\lceil \frac{v(v-1)}{k(k-1)} + \frac{2}{k} \right\rceil = \left\lceil s + \frac{1}{k} \right\rceil = s+1$. Тиме је доказано тврђење Хананија [39]:

Теорема 1.3.5. *Ако* $(k-1)\big|(v-1)$ *и ако је* $v(v-1) \equiv 1 \pmod{k}$*, тада је*

$$C(v,k,2) \geqslant L(v,k,2)+1. \tag{1.3.7}$$

Хананијева неједнакост, при датим условима, побољшава Шонхајмову неједнакост за један. $B(v,k,2)$ је уобичајна ознака за доњу границу имплицирану Шонхајмовом и Хананијевом неједнакошћу. Дакле, $C(v,k,2) \geqslant B(v,k,2)$, где је

$$B(v,k,2) = \begin{cases} L(v,k,2)+1, & \text{ако } (k-1)\big|(v-1) \text{ и } v(v-1) \equiv 1 \pmod{k}, \\ L(v,k,2) & \text{, у супротном.} \end{cases} \tag{1.3.8}$$

Поред наведених доњих граница вредности $C(v,k,t)$ које важе у општем случају, за поједине вредности параметара добијена су одређена побољшања. Највећи број појединачних побољшања дао је Сидоренко (*Sidorenko*) [30]. На пример, он је доказао да важи неједнакост $C(15,9,3) \geqslant 10$, односно једнакост $C(15,9,3) = 10$. На основу (1.3.4), добијају се неједнакости $C(16,10,4) \geqslant 16$, $C(17,11,5) \geqslant 25$, $C(18,12,6) \geqslant 38$, итд. Слично, у [6] је доказана неједнакост $C(19,6,2) \geqslant 15$, односно једнакост $C(19,6,2) = 15$, одакле се добијају неједнакости $C(20,7,3) \geqslant 43$, $C(21,8,4) \geqslant 113$, $C(22,9,5) \geqslant 277$, итд. Већина познатих доњих граница се могу наћи на сајту [30].

1.3.2 Горње границе вредности $C(v, k, t)$

У општем случају, најбољу горњу границу су дали Ердош и Спенсер (*Erdős and Spencer*) [27]:

$$C(v,k,t) \leqslant \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} \cdot \left(1 + \ln \binom{k}{t}\right). \tag{1.3.9}$$

Најбољу асимптотску горњу границу дао је Редл (*Rödl*) [83]. Он је дефинисао *густину* покривања као просечан број блокова који садрже један t-подскуп, а затим је доказао да за фиксиране вредности k и t постоји покривање са густином $1 + o(1)$, кад $v \to \infty$.

Приметимо да је Редлова горња граница боља од Ердош-Спенсерове, код које је густина једнака $1 + \ln \binom{k}{t}$. Међутим, Редлова граница је асимптотска и није применљива за коначне вредности параметра v.

Већина горњих граница вредности $C(v, k, t)$ добијена је конструисањем $(v, k, t)-$покривања што мање "величине", тј. $(v, k, t)-$покривања са што је могуће мањим бројем блокова. Број блокова добијеног покривања представља горњу границу вредности $C(v, k, t)$. Овде ћемо навести најчешће конструкције, тј. покривања која се добијају помоћу тих конструкција. Већина познатих конструкција $(v, k, t)-$покривања се може наћи у [31]. Актуелне вредности горњих граница вредности $C(v, k, t)$ се могу наћи на сајту [30].

Штајнерови системи

Као што је већ речено, Штајнеров систем $S(t, k, v)$ је уједно и минимално $(v, k, t)-$покривање. Дакле, када Штајнеров систем $S(t, k, v)$ постоји, тада је $C(v, k, t) = \binom{v}{t} / \binom{k}{t}$ (Лема 1.1.2).

Штајнерови системи су детаљније описани у поглављу 1.1. Тачне вредности $C(v, k, t)$, које се добијају из Штајнерових система $S(t, k, v)$, биће наведене у наредном поглављу.

Туранови системи

Већ је речено (страна 21) да је $(V, \mathcal{B})$ Туранов $(v, k, t)-$систем ако и само ако $(V, \{V \backslash B : B \in \mathcal{B}\})$ је $(v, v-t, v-k)-$покривање и важи једнакост $T(v, k, t) = C(v, v-t, v-k)$. То значи да је свака конструкција Турановог $(v, k, t)-$система уједно и конструкција $(v, v-t, v-k)-$покривања. Без обзира на ову повезаност, Туранови системи и $(v, k, t)-$покривања се углавном проучавају засебно и за различите вредности параметара. У случају покривања, већина радова се бави вредностима $C(v, k, t)$ када су односи v/k и v/t релативно велики. У случају Туранових система, већина радова се бави вредностима $C(v, k, t)$, тј. $T(v, v-t, v-k)$, када су односи v/k и v/t релативно мали.

Туран је дао конструкцију Турановог $(v, k+1, 2)-$система тако што је v-скуп поделио на k скупова "скоро исте" кардиналности (сваки са n или $n+1$ елемената, где је $n = \lfloor v/k \rfloor$) и за блокове узео све парове елемената истог скупа. Добијени Туранов систем је оптималан и садржи $nv - k\binom{n+1}{2}$ блокова [96]. Преведено на покривања, $(v, v-2, t)-$покривање достиже Шонхајмову доњу границу, односно [31]

$$C(v, v-2, t) = L(v, v-2, t). \tag{1.3.10}$$

На сличан начин, разбијањем v-скупа на више скупова "скоро исте" кардиналности, Туран је дао неколико конструкција Туранових $(v, k, 3)-$система. Из тих конструкција следе неједнакости:

$$T(v,4,3) \leqslant \begin{cases} n(n-1)(2n-1) \ , & \text{за } v = 3n, \\ n^2(2n-1) \ , & \text{за } v = 3n+1, \\ n^2(2n+1) \ , & \text{за } v = 3n+2, \end{cases} \tag{1.3.11}$$

$$T(v,5,3) \leqslant \binom{\lceil v/2 \rceil}{3} + \binom{\lfloor v/2 \rfloor}{3} \tag{1.3.12}$$

и

$$T(v,k+1,3) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{\lfloor (2v+i)/k \rfloor}{3}. \tag{1.3.13}$$

Туран је дао хипотезу да је добијени Туранов $(v, 4, 3)-$систем оптималан, тј. да у (1.3.11) важи једнакост. Хипотеза је потврђена за $v \leqslant 13$. За преостала два Туранова система, постоје вредности v када они нису оптимални, тј. када у (1.3.12) и (1.3.13) не важе једнакости. Међутим, Туран је дао хипотезу да је Туранов $(kn/2, k+1, 3)-$систем оптималан и да важи једнакост $T(kn/2, k+1, 3) = k\binom{n}{3}/2$. Наведена хипотеза још увек није доказана, нити оповргнута.

Више детаља о Турановим системима и њиховим конструкцијама се може наћи у [11, 12, 86, 90, 96].

Покривања добијена коришћењем коначних геометрија

У поглављу 1.1 је поменуто да пројективна геометрија $\mathrm{PG}_d(n)$ и афина геометрија $\mathrm{AG}_d(n)$, димензије $d \geqslant 2$, над пољем $\mathbb{F}_n$ $(n = p^m)$, редом индукују Штајнерове системе $S\left(2, n+1, \frac{n^{d+1}-1}{n-1}\right)$ и $S\left(2, n, n^d\right)$. За тачке пројективне геометрије $\mathrm{PG}_d(n)$ се могу узети класе еквиваленције вектора $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \neq \mathbf{0}$ над $\mathbb{F}_n$, где је $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$, за $\lambda \in \mathbb{F}_n$.

t-раван $(1 \leqslant t \leqslant d)$ је t-димензиони потпростор од $\mathrm{PG}_d(n)$, јединствено одређен са $d-t$ независних линеарних хомогених једначина. Пројективна геометрија садржи $\begin{bmatrix} d+1 \\ t+1 \end{bmatrix}_n$ различитих t-равни, где је

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^r)(1-q^{r-1})\ldots(1-q^{r-s+1})}{(1-q^s)(1-q^{s-1})\ldots(1-q)}$$

Гаусов q-биномни коефицијент. Пројективна геометрија $\mathrm{PG}_d(n)$ садржи $\frac{n^{d+1}-1}{n-1}$ тачака, а свака t-раван садржи $\frac{n^{t+1}-1}{n-1}$ тачака.

Избацивањем свих тачака чија је прва координата $x_0 = 0$ из пројективне геометрије $\mathrm{PG}_d(n)$, добија се афина геометрија $\mathrm{AG}_d(n)$. Афина геометрија садржи n^d тачака и $n^{d-t}\begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}_n$ различитих t-равни, док свака t-раван садржи n^t различитих тачака.

У случају обе геометрије, сваки $(t+1)$-подскуп тачака припада некој t-равни (t-раван је јединствено одређена са $t+1$ независних тачака, тј. вектора). Другим речима, скуп свих t-равни је скуп блокова којима су "покривени" сви $(t+1)$-подскупови тачака ових геометрија. На тај начин се добија једно $\left(\frac{n^{d+1}-1}{n-1}, \frac{n^{t+1}-1}{n-1}, t+1\right)-$покривање (за пројективну геометрију) и једно $\left(n^d, n^t, t+1\right)-$покривање (за афину геометрију). Из добијених покривања следи [81]

$$C\left(\frac{n^{d+1}-1}{n-1}, \frac{n^{t+1}-1}{n-1}, t+1\right) \leqslant \begin{bmatrix} d+1 \\ t+1 \end{bmatrix}_n, \tag{1.3.14}$$

тј. [1]

$$C\left(n^d, n^t, t+1\right) \leqslant n^{d-t} \begin{bmatrix} d \\ t \end{bmatrix}_n. \tag{1.3.15}$$

У [2] се може наћи детаљнији опис покривања добијених коришћењем коначних геометрија.

Циклична покривања

Нека је $V = \mathbb{Z}_v$ и $\mathcal{B}_0$ скуп одређених k-подскупова (блокова) од V. Нека је $\mathcal{B}_1$ скуп блокова добијен цикличним пресликавањем $i \mapsto i+1 \pmod{v}$ блокова, тј. елемената блокова, из $\mathcal{B}_0$. Слично, нека је $\mathcal{B}_2$ скуп блокова добијен цикличним пресликавањем блокова из $\mathcal{B}_1$, итд. На крају, нека је $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_{v-1}$, тако да је $|\mathcal{B}| = v|\mathcal{B}_0|$. За $(v,k,t)-$покривање $(V, \mathcal{B})$, добијено на описани начин, кажемо да је циклично покривање [31]. Напоменимо да пресликавање $i \mapsto i+1 \pmod{v}$ представља цикличну пермутацију $(0\ 1\ \ldots\ v-1)$, скупа $\mathbb{Z}_v$.

Циклична покривања се најчешће користе када је очекивани број блокова покривања велики. У том случају, покривање се може задати само помоћу базних блокова $\mathcal{B}_0$ (или било ког од скупова $\mathcal{B}_i$). На пример, циклично $(6,3,2)-$покривање из Примера 1.3.2 се може задати помоћу базног блока $\{0,1,3\}$. Преосталих 5 блокова покривања добија се цикличним "померањем" базног блока: $\{1,2,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,0\}$, $\{4,5,1\}$ и $\{5,0,2\}$. Слично, циклично $(10,4,3)-$покривање са 30 блокова може се задати помоћу три базна блока: $\{0,1,2,6\}$, $\{0,1,3,4\}$ и $\{0,2,4,7\}$, док се циклично $(24,10,3)-$покривање са 24 блока може задати помоћу једног базног блока: $\{0,1,2,4,5,7,11,12,14,20\}$ [30].

Индукована покривања

Под индукованим покривањем подразумевамо $(\overline{v}, \overline{k}, t)-$покривање добијено коришћењем познатог $(v,k,t)-$покривања, где је $\overline{v} < v$ и $\overline{k} < k$ [31].

Нека је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, k, t)-$покривање и $\overline{V}$ произвољан $\overline{v}$-подскуп скупа V. Нека је $\mathcal{B}'$ скуп блокова који се добија од блокова из $\mathcal{B}$ избацивањем свих елемента који не припадају скупу $\overline{V}$. Блокови из $\mathcal{B}'$ покривају све t-подскупове скупа $\overline{V}$ али могу бити различите кардиналности. Нека је $\overline{\mathcal{B}}$ скуп блокова који се добија од блокова из $\mathcal{B}'$, на следећи начин:

(i) избацивањем блокова који садрже мање од t елемената,

(ii) додавањем i произвољних елемената блоку који садржи $\overline{k} - i$ елемената $(0 \leqslant i \leqslant \overline{k} - t)$ и

(iii) заменом блока који садрже $\overline{k} + i$ елемената са блоковима $(\overline{k} + i, \overline{k}, t)-$покривања $(1 \leqslant i \leqslant k - \overline{k})$.

Под (ii) подразумевамо додавање i произвољних елемената скупа $\overline{V}$, тако да добијени блок садржи $\overline{k}$ различитих елемената. У (iii) подразумевамо $(\overline{k} + i, \overline{k}, t)-$покривање са елементима замењеног блока.

Добијено покривање $(\overline{V}, \overline{\mathcal{B}})$ је индуковано $(\overline{v}, \overline{k}, t)-$покривање.

За полазно покривање се може узети произвољно $(v, k, t)-$покривање. Наравно, што је могуће мање величине. На пример, може се узети покривање добијено коришћењем коначних геометрија. За $\overline{V}$ се може узети произвољан $\overline{v}$-подскуп скупа V. Најчешће се $\overline{V}$ добија случајним избором $\overline{v}$ различитих елемената скупа V.

Конструкција даје најбоље резултате када су величине $(\overline{k}+i, \overline{k}, t)-$покривања (коришћених у (iii)) блиске Шонхајмовим границама $L(\overline{k}+i, \overline{k}, t)$. За мале вредности параметара, конструкција даје најбоље резултате када је $\overline{k}/\overline{v}$ приближно једнако k/v [31].

<u>Покривања добијена комбиновањем мањих покривања</u>

Нека је $(V_1, \mathcal{B}_1)$ једно $(v_1, k_1, t_1)-$покривање са $C(v_1, k_1, t_1)$ блокова, $(V_2, \mathcal{B}_2)$ једно $(v_2, k_2, t_2)-$покривање са $C(v_2, k_2, t_2)$ блокова и $v = v_1 + v_2$, $k = k_1+k_2$ и $t = t_1+t_2$. Комбинујући сваки блок првог покривања са сваким блоком другог покривања, добијамо $C(v_1, k_1, t_1) \cdot C(v_2, k_2, t_2)$ k-блокова који покривају све t-подскупове скупа $V_1 \cup V_2$ који се могу представити као унија једног t_1-подскупа од V_1 и једног t_2-подскупа од V_2. Параметре k_1 и k_2 можемо изабрати тако да израз $C(v_1, k_1, t_1) \cdot C(v_2, k_2, t_2)$ има најмању вредност. Понављајући описани поступак за свако $t_1 = 0, 1, \ldots t$, добијамо скуп k-блокова који покривају све t-подскупове v-скупа $V_1 \cup V_2$, тј. добијамо једно $(v, k, t)-$покривање. Дакле, важи неједнакост [31]

$$C(v,k,t) \leqslant \sum_{t_1=0}^{t} \min_{k_1} \Big(C(v_1,k_1,t_1) \cdot C(v-v_1,k-k_1,t-t_1) \Big), \tag{1.3.16}$$

где је $k_1 \in [\,\max\{t_1, k+v_1-v\}, \min\{v_1, k+t_1-t\}\,]$. Штавише, неједнакост (1.3.16) важи за свако $v_1 = 1, 2, \ldots, v-1$, тако да за горњу границу $C(v, k, t)$ можемо узети минималну вредност израза са десне стране, по v_1.

С обзиром на метод конструкције, добијено покривање може да садржи сувишне блокове. У том случају, описана метода се може побољшати избацивањем сувишних блокова, по одређеном редоследу. У неким случајевима, побољшање је могуће добити заменом два суседна сабирка у (1.3.16), $\min\limits_{k_1}\Big(C(v_1,k_1,t_1) \cdot C(v-v_1,k-k_1,t-t_1)\Big)$ и $\min\limits_{k_1}\Big(C(v_1,k_1,t_1+1) \cdot C(v-v_1,k-k_1,t-t_1-1)\Big)$, са $\min\limits_{k_1}\Big(C(v_1,k_1,t_1+1) \cdot C(v-v_1,k-k_1,t-t_1)\Big)$. Наиме, комбинујући све блокове (v_1, k_1, t_1+1) и (v_2, k_2, t_2) покривања $(v = v_1 + v_2,\ k = k_1 + k_2,\ t = t_1 + t_2)$, добијамо блокове који покривају све t-подскупове скупа $V_1 \cup V_2$ који садрже t_1 елемената скупа V_1 и t_2 елемената скупа V_2, као и све t-подскупове који садрже $(t_1 + 1)$ елемената скупа V_1 и $(t_2 - 1)$ елемената скупа V_2.

Претходно разматрање се може уопштити на следећи начин. Нека је $C_{t',t''}$ минималан број блокова потребних за покривање свих t-подскупова скупа $V_1 \cup V_2$ који садрже $t_1 \in [t', t'']$ елемената скупа V_1 и $t - t_1$ елемената скупа V_2. С обзиром да је $C_{t',t''} \leqslant C_{t',l} + C_{l+1,t''}$ $(t' \leqslant l < t'')$, имаћемо

$$C_{t',t''} \leqslant \min\left(\min_{t' \leqslant l < t''} \Big(C_{t',l} + C_{l+1,t''} \Big), \min_{k_1} \Big(C(v_1,k_1,t'') \cdot C(v-v_1,k-k_1,t') \Big) \right). \tag{1.3.17}$$

Коришћењем динамичког програмирања и неједнакости (1.3.17), могу се добити горње границе вредности $C_{0,t}$, које уједно представљају горње границе вредности $C(v, k, t)$ [31].

У конструкције које користе мања покривања спада и следећа конструкција Сидоренка [90].[11] Нека је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, k, t)-$покривање са $C(v, k, t)$ блокова, $x \in V$ и $x', x'' \notin V$. Нека је даље $\mathcal{B}'$ скуп блокова добијен заменом елемента x елементима x' и x'' у блоковима $B \in \mathcal{B}$ који садрже x $(B \cup \{x', x''\} \backslash \{x\})$, тј. додавањем елемента x', односно x'', блоковима $B \in \mathcal{B}$ који не садрже x $(B \cup \{x'\}$ и $B \cup \{x''\})$. Ако је $(V \backslash \{x\}, \mathcal{B}'')$ једно $(v-1, k+1, t+1)-$покривање са $C(v-1, k+1, t+1)$ блокова, онда је $(V \cup \{x', x''\} \backslash \{x\}, \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}'')$ једно $(v+1, k+1, t+1)-$покривање. Такође, из Сидоренкове конструкције следи неједнакост

$$C(v+1, k+1, t+1) \leqslant \left\lfloor \frac{2v-k}{v} C(v, k, t) \right\rfloor + C(v-1, k+1, t+1), \qquad (1.3.18)$$

У ову групу конструкција спада и конструкција Морлија и ван Риза (*Morley and van Rees*) [68]. Из њихове конструкције следи неједнакост

$$C(2v+l, v+k+l, t+s+1) \leqslant C(v, k, t) + C(v+l, k+l, s). \qquad (1.3.19)$$

<u>Просте конструкције</u>

Иако би се могле сврстати у претходне две категорије, због њихове једноставности, следеће конструкције се називају простим [31].

Нека је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, k, t)-$покривање са $C(v, k, t)$ блокова и нека је $\mathcal{B}'$ скуп блокова добијен додавањем произвољног елемента скупа $V \backslash B$ сваком блоку $B \in \mathcal{B}$. Тада је $(V, \mathcal{B}')$ једно $(v, k+1, t)-$покривање и важи неједнакост

$$C(v, k+1, t) \leqslant C(v, k, t). \qquad (1.3.20)$$

Нека је $(V \cup \{\infty\}, \mathcal{B})$ једно $(v+1, k, t)-$покривање са $C(v+1, k, t)$ блокова и нека је $\mathcal{B}'$ скуп блокова добијен (од блокова из $\mathcal{B}$) избацивањем елемента ∞ (из блокова B који садрже ∞) и додавањем произвољног елемента скупа $V \backslash B$. Тада је $(V, \mathcal{B}')$ једно $(v, k, t)-$покривање и важи неједнакост

$$C(v, k, t) \leqslant C(v+1, k, t). \qquad (1.3.21)$$

[11] Сидоренко је дао конструкцију одговарајућих Туранових система.

Нека је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, k, t)-$покривање са $C(v, k, t)$ блокова и нека је $\mathcal{B}'$ скуп блокова добијен додавањем елемента ∞ $(\infty \notin V)$ сваком блоку из $\mathcal{B}$. Тада је $(V \cup \{\infty\}, \mathcal{B}')$ једно $(v+1, k+1, t)-$покривање и важи неједнакост

$$C(v+1, k+1, t) \leqslant C(v, k, t). \tag{1.3.22}$$

Нека је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, k, t)-$покривање са $C(v, k, t)$ блокова и $(V, \mathcal{B}')$ једно $(v, k-1, t-1)-$покривање са $C(v, k-1, t-1)$ блокова. Ако је $\mathcal{B}''$ скуп блокова добијен додавањем елемента ∞ $(\infty \notin V)$ блоковима из $\mathcal{B}'$, тада је $(V \cup \{\infty\}, \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'')$ једно $(v+1, k, t)-$покривање и важи неједнакост

$$C(v+1, k, t) \leqslant C(v, k, t) + C(v, k-1, t-1). \tag{1.3.23}$$

Конструкција $(v-1, k-1, t-1)-$покривања помоћу датог $(v, k, t)-$покривања, описана у Леми 1.3.3, такође спада у просте конструкције. Наведеном конструкцијом се добија неједнакост (1.3.4), односно

$$C(v-1, k-1, t-1) \leqslant \left\lfloor \frac{k}{v} C(v, k, t) \right\rfloor. \tag{1.3.24}$$

На крају поменимо просту конструкцију $(nv, nk, t)-$покривања помоћу датог $(v, k, t)-$покривања. Ако се сваки елемент датог $(v, k, t)-$покривања замени са n различитих елемената неког скупа са nv елемената, добија се $(nv, nk, t)-$покривање. Дакле, важи неједнакост

$$C(nv, nk, t) \leqslant C(v, k, t). \tag{1.3.25}$$

Покривања добијена коришћењем метода комбинаторне оптимизације

Комбинаторни проблем минималног $(v, k, t)-$покривања се може егзактно решити само за мале вредности параметара v, k и t [56]. За веће вредности параметара се могу користити хеуристичке методе [22, 76–78].

У наредној глави ће бити више речи о хеуристичким методама за конструисање $(v, k, t)-$покривања, што је могуће мање величине. Биће дато неколико нових хеуристика за решавање датог проблема.

1.3.3 Тачне вредности $C(v, k, t)$

У претходним поглављима (1.3.1 и 1.3.2) дате су одређене доње и горње границе вредности $C(v, k, t)$. Ако су добијене доње и горње границе међусобно једнаке, тада је добијена тачна вредност $C(v, k, t)$. На пример, за све вредности параметара за које постоји Штајнеров систем $S(t, k, v)$ важи $C(v, k, t) = L(v, k, t)$, тј. $C(v, k, t) = \binom{v}{t}/\binom{k}{t}$. Штавише, важи следеће Шонхајмово тврђење [63]:

Теорема 1.3.6. *Ако постоји Штајнеров систем $S(t, k, v)$, тада је $C(v + 1, k, t) = L(v + 1, k, t)$.*

Доказ. Најпре, математичком индукцијом, докажимо да за сваки Штајнеров систем $S(t, k, v)$ важи

$$L(v+1, k, t) = \frac{v+1}{k} L(v, k-1, t-1) + \frac{k-t}{k} = L(v, k, t) + L(v, k-1, t-1). \tag{1.3.26}$$

За Штајнеров систем $S(1, k, v)$, једнакости (1.3.26) су еквивалентне са $\left\lceil \frac{v+1}{k} \right\rceil = \frac{v+k}{k} = \left\lceil \frac{v}{k} \right\rceil + 1$, што је очигледно тачно, с обзиром на услове дељивости (1.1.1). Претпоставимо да једнакости (1.3.26) важе за Штајнеров систем $S(t-1, k-1, v-1)$ и докажимо да важе за Штајнеров систем $S(t, k, v)$ (видети Лему 1.1.3). Имаћемо редом:

$$\begin{aligned}
&L(v, k, t) + L(v, k-1, t-1) = \\
&= L(v, k, t) + \frac{k-1}{k} L(v, k-1, t-1) + \frac{1}{k} L(v, k-1, t-1) = \\
&= \frac{v}{k} L(v-1, k-1, t-1) + \frac{v}{k} L(v-1, k-2, t-2) + \frac{k-t}{k} + \frac{1}{k} L(v, k-1, t-1) = \\
&= \frac{v}{k} L(v, k-1, t-1) + \frac{k-t}{k} + \frac{1}{k} L(v, k-1, t-1) = \\
&= \frac{v+1}{k} L(v, k-1, t-1) + \frac{k-t}{k}.
\end{aligned}$$

С обзиром да је последњи израз природан број и $\frac{k-t}{k} \in (0, 1)$, на крају имамо

$$L(v, k, t) + L(v, k-1, t-1) = \left\lceil \frac{v+1}{k} L(v, k-1, t-1) \right\rceil = L(v+1, k, t),$$

чиме су једнакости (1.3.26) доказане.

Полазно тврђење ћемо такође доказати математичком индукцијом. За Штајнеров систем $S(1,k,v)$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да је тврђење тачно за Штајнеров систем $S(t-1,k-1,v-1)$ и докажимо да важи за Штајнеров систем $S(t,k,v)$. Из неједнакости (1.3.23), (1.3.26) и индукцијске претпоставке следи

$$\begin{aligned} C(v+1,k,t) &\leqslant C(v,k,t)+C(v,k-1,t-1) = \\ &= L(v,k,t)+L(v,k-1,t-1) = \\ &= L(v+1,k,t). \end{aligned}$$

С обзиром да је $C(v+1,k,t) \geqslant L(v+1,k,t)$, важиће једнакост $C(v+1,k,t) = L(v+1,k,t)$, чиме је тврђење доказано. $\square$

У поглављу 1.1 је доказано да Штајнеров систем $S(2,3,v)$ постоји ако и само ако је $v = 6n+1$ или $v = 6n+3$ $(n \in \mathbb{N})$. Дакле, у тим случајевима важи једнакост

$$C(v,3,2) = L(v,3,2). \tag{1.3.27}$$

На основу претходне теореме, једнакост (1.3.27) важи и за $v = 6n+2$ и $v = 6n+4$. Форт и Хедланд (*Fort and Hedlund*) су доказали да једнакост (1.3.27) важи за свако $v \in \mathbb{N}$; $v \geqslant 3$ [29]. У следећем делу овог рада, ми ћемо доказати једнакост (1.3.27) тако што ћемо дати нову конструкцију минималних $(v,3,2)-$покривања.

У случају $(k,t) = (4,2)$, независно од других аутора [45], Милс (*Mills*) је доказао једнакост [57, 58]

$$C(v,4,2) = L(v,4,2) + \begin{cases} 1\ , & \text{за } v = 7,9,10, \\ 2\ , & \text{за } v = 19, \\ 0\ , & \text{у супротном.} \end{cases} \tag{1.3.28}$$

У случају $(k,t) = (5,2)$ и $v \equiv 13 \pmod{20}$, испуњени су услови Теореме 1.3.5, па је у том случају $B(v,5,2) = L(v,5,2)+1$ доња граница за $C(v,5,2)$ (видети (1.3.8)). Штавише, важи једнакост [33, 52, 62, 69, 70]

$$C(v,5,2) = B(v,5,2), \tag{1.3.29}$$

осим, евентуално, у случајевима:

1. $v = 15$,
2. $v \equiv 0 \pmod 4$ и $v \leqslant 280$,
3. $v \equiv 9 \pmod{20}$ и $v \leqslant 429$,
4. $v \equiv 13 \pmod{20}$ и $v \in \{13, 53, 73\}$,
5. $v \equiv 17 \pmod{20}$ и $v \leqslant 377$.

За $v = 15$ важи једнакост $C(15, 5, 2) = B(15, 5, 2) + 1 = 13$.

Поред наведених, познате су следеће вредности $C(v, k, 2)$ [33, 63]:

1. $C(v, k, 2) = 3$, за $1 < v/k \leqslant 3/2$,
2. $C(v, k, 2) = 4$, за $3/2 < v/k \leqslant 5/3$,
3. $C(v, k, 2) = 5$, за $5/3 < v/k \leqslant 9/5$,
4. $C(v, k, 2) = 6$, за $9/5 < v/k \leqslant 2$,
5. $C(v, k, 2) = 7$, за $2 < v/k \leqslant 7/3$,
   осим за $7k - 3v = 1$ $(C(v, k, 2) = 8)$,
6. $C(v, k, 2) = 8$, за $7/3 < v/k \leqslant 12/5$,
   осим за $12k - 5v \in \{0, 1\}$ и $v - k$ непаран $(C(v, k, 2) = 9)$,
7. $C(v, k, 2) = 9$, за $12/5 < v/k \leqslant 5/2$,
   осим за $5k - 2v = 0$ и $v - k$ непаран $(C(v, k, 2) = 10)$,
8. $C(v, k, 2) = 10$, за $5/2 < v/k \leqslant 8/3$,
   осим за $8k - 3v \in \{0, 1\}$, $v - k$ непаран и $k > 2$ $(C(v, k, 2) = 11)$,
9. $C(v, k, 2) = 11$, за $8/3 < v/k \leqslant 14/5$,
   осим за $14k - 5v \in \{0, 1\}$, $v - k$ непаран и $k > 4$ $(C(v, k, 2) = 12)$,
10. $C(v, k, 2) = 12$, за $14/5 < v/k \leqslant 3$,
    осим за $3k - v = 0$, $3 \nmid k$ и $4 \nmid k$ $(C(v, k, 2) = 13)$,
11. $C(v, k, 2) = 13$, за $3 < v/k \leqslant 13/4$,
    осим за $C(13l + 2, 4l + 1) = C(13l + 3, 4l + 1) = C(13l + 6, 4l + 2, 2) = 14$ $(l \geqslant 2)$ и $C(16, 5, 2) = C(19, 6, 2) = 15$.

Каро и Јастер (*Caro and Yuster*) су доказали следеће тврђење које описује асимптотско понашање $C(v, k, 2)$ [13]:

Теорема 1.3.7. *За свако $k \geqslant 2$, постоји $v_0 = v_0(k)$ тако да је*

$$C(v,k,2) = B(v,k,2), \text{ за све } v > v_0.$$

У случају $(k,t) = (4,3)$, важи једнакост [33, 44, 59, 61]

$$C(v,4,3) = L(v,4,3), \tag{1.3.30}$$

осим за $v = 7$ и евентуално за $v = 12l+7$, где $l \in \{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,16,21,23,25,29\}$. За $v = 7$ важи $C(7,4,3) = L(7,4,3)+1 = 12$ [49, 94].

За $C(v,k,3)$ су познате следеће вредности [60, 95]:

1. $C(v,k,3) = 4$, за $1 < v/k \leqslant 4/3$,
2. $C(v,k,3) = 5$, за $4/3 < v/k \leqslant 7/5$,
3. $C(v,k,3) = 6$, за $7/5 < v/k \leqslant 3/2$,
   осим за $3k - 2v = 0$ и v непаран,
4. $C(v,k,3) = 7$, за $3/2 < v/k \leqslant 17/11$,
   осим за $17k - 11v = 1$,
5. $C(v,k,3) = 8$, за $17/11 < v/k \leqslant 8/5$,
   осим за $8k - 5v = 1$ и $k > 7$.

За $t \geqslant 4$, углавном су познате појединачне вредности $C(v,k,t)$. Поред Штајнерових система и вредности $C(v,k,t)$ које се могу добити на основу Теореме 1.3.6, познате су вредности $C(v,k,t)$ када је разлика $v-k$ мала. На пример, није тешко доказати да је [33, 63]

$$C(v,v-1,t) = t+1. \tag{1.3.31}$$

Као што је већ речено, Туран је доказао једнакост (1.3.10), односно

$$C(v,v-2,t) = L(v,v-2,t).$$

Туран је такође дао следећу хипотезу (видети (1.3.11)):

$$C(v, v-3, v-4) = \begin{cases} n(n-1)(2n-1) & , \text{ за } v = 3n, \\ n^2(2n-1) & , \text{ за } v = 3n+1, \\ n^2(2n+1) & , \text{ за } v = 3n+2, \end{cases} \tag{1.3.32}$$

која је потврђена за $v \leqslant 13$.

Појединачне вредности $C(v, k, t)$ су углавном добијене компјутерским претраживањем. Табеле са одређеним вредностима $C(v, k, t)$ се могу наћи у [31, 33, 63]. Актуелне вредности $C(v, k, t)$ се могу наћи на сајту [30].

Глава 2

Нова конструкција минималних $(v, 3, 2)-$покривања

У претходном поглављу смо видели да је $L(v, k, t)$ доња граница за $C(v, k, t)$. У овом делу ћемо дати нову конструкцију $(v, 3, 2)-$покривања са $L(v, 3, 2)$ блокова [71]. Тиме ћемо доказати да је $C(v, 3, 2) = L(v, 3, 2)$. Као што ћемо видети, ова конструкција представља уопштење Боузове и Сколемове конструкције Штајнерових система тројки STS$(6n + 3)$ и STS$(6n+1)$ (поглавље 1.2). За разлику од оригиналне конструкције Форта и Хедланда [29], као и других индиректних конструкција, наша конструкција спада у директне конструкције. Сама конструкција је једноставна и не захтева конструисање других комбинаторних шема, попут шема са балансираним паровима (PBD) или шема које су дељиве у групе (GDD) [33].

При конструисању $(v, 3, 2)-$покривања користићемо одређене пермутације полазног скупа V; $|V| = v$. У циклусној нотацији, пермутација $p = (a_0\ a_1 \ldots a_{k-1})(b_0\ b_1 \ldots b_{l-1}) \ldots$ $(a_i, b_j \in V)$ означава пресликавање $p : V \mapsto V$, дефинисано са $p(a_i) = a_{i+1 \pmod k}$, $p(b_j) = b_{j+1 \pmod l}, \ldots$ Пермутација $p^j : V \mapsto V$ је дефинисана са $p^j(a_i) = \underbrace{p(p(\ldots p}_{j}(a_i)\ldots)) = a_{i+j \pmod k}$.

За блок $\{p(a), p(b), p(c)\}$ кажемо да је добијен деловањем пермутације p на блок $\{a, b, c\}$; $a, b, c \in V$. Под деловањем пермутације p, n пута на блок $\{a, b, c\}$, подразумевамо деловање пермутација $p^0 = e, p^1, \ldots, p^{n-1}$ на блок $\{a, b, c\}$. Деловањем пермутације p, n пута на блок $\{a, b, c\}$, редом се добијају блокови $\{a, b, c\}, \{p(a), p(b), p(c)\}, \ldots, \{p^{n-1}(a), p^{n-1}(b), p^{n-1}(c)\}$.

Као што је уобичајно, конструкцију минималних $(v, 3, 2)-$покривања ћемо извести посебно за свако $v \pmod 6$. У сваком од 6 случајева, конструисаћемо $(v, 3, 2)-$покривање са $L(v, 3, 2)$ блокова, где је (из (1.3.5))

$$L(v,3,2) = \begin{cases} 6n^2 & , \text{ за } v = 6n, \\ 6n^2 + n & , \text{ за } v = 6n+1, \\ 6n^2 + 4n + 1 & , \text{ за } v = 6n+2, \\ 6n^2 + 5n + 1 & , \text{ за } v = 6n+3, \\ 6n^2 + 8n + 3 & , \text{ за } v = 6n+4, \\ 6n^2 + 9n + 4 & , \text{ за } v = 6n+5. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Најпре дајемо познату конструкцију $(6n+3, 3, 2)-$покривања, тј. Штајнеровог система STS$(6n+3)$ [21, 36].

2.1 Минимално $(6n+3, 3, 2)-$покривање

Теорема 2.1.1. *Нека је* $v = 6n+3$ *и* $V = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2n}\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{2n}\} \cup \{c_0, c_1, \ldots, c_{2n}\}$. *Нека је* $\mathcal{B}$ *скуп блокова који се добија деловањем пермутације*

$$p = (a_0\ a_1 \ldots a_{2n})(b_0\ b_1 \ldots b_{2n})(c_0\ c_1 \ldots c_{2n}), \tag{2.1.1}$$

$2n+1$ *пута на блокове*

$$\begin{array}{llll} \{a_0, b_1, b_{2n}\}, & \{a_0, b_2, b_{2n-1}\}, & \ldots & , \{a_0, b_n, b_{n+1}\}, \\ \{b_0, c_1, c_{2n}\}, & \{b_0, c_2, c_{2n-1}\}, & \ldots & , \{b_0, c_n, c_{n+1}\}, \\ \{c_0, a_1, a_{2n}\}, & \{c_0, a_2, a_{2n-1}\}, & \ldots & , \{c_0, a_n, a_{n+1}\}, \\ \{a_0, b_0, c_0\}\ . & & & \end{array} \tag{2.1.2}$$

Тада је $(V, \mathcal{B})$ *једно* $(v, 3, 2)-$*покривање са* $L(v, 3, 2)$ *блокова.*

Доказ. Деловањем пермутације p, $2n+1$ пута на произвољан блок из (2.1.2), добија се $2n+1$ блокова, што значи да $\mathcal{B}$ садржи $(3n+1)(2n+1) = 6n^2 + 5n + 1 = L(6n+3, 3, 2)$ различитих блокова. Докажимо да је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, 3, 2)-$покривање, тј. да је сваки пар елемената скупа V садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Сваки пар $\{a_0, b_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant 2n)$ је садржан у неком блоку из (2.1.2): пар $\{a_0, b_0\}$ у блоку $\{a_0, b_0, c_0\}$, а пар $\{a_0, b_j\}$ $(j \neq 0)$ у неком блоку из прве врсте у (2.1.2). Деловањем пермутације p^i $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$ на блокове из (2.1.2), елемент a_0 се пресликава у елемент $a_i = p^i(a_0)$, док се елементи $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ пресликавају, редом, у $b_i, b_{i+1 \pmod{2n+1}}, \ldots, b_{i-1 \pmod{2n+1}}$. Дакле, сваки пар $\{a_i, b_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Због симетрије, исто важи за све парове $\{b_i, c_j\}$ и $\{c_i, a_j\}$.

Посматрајмо сада парове $\{a_i, a_j\}$. Сваки пар $\{a_i, a_j\}$, за који важи $i + j = 2n + 1$, садржан је у неком блоку из треће врсте у (2.1.2). За произвољан пар $\{a_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i < j \leqslant 2n)$ је довољно доказати да постоји пар $\{a_r, a_s\}$ $(0 \leqslant r, s \leqslant 2n,\ r+s = 2n+1)$ и пермутација p^t $(0 \leqslant t \leqslant 2n)$ којом се пар $\{a_r, a_s\}$ пресликава у пар $\{a_i, a_j\}$, односно, довољно је доказати да систем једначина

$$\begin{cases} r + s = 2n + 1, \\ r + t \pmod{2n+1} = i, \\ s + t \pmod{2n+1} = j, \end{cases}$$

има решење по r, s и t. Ако су i и j исте парности, решење система је

$$r = 2n + 1 - \frac{j-i}{2},\ s = \frac{j-i}{2} \text{ и } t = \frac{i+j}{2},$$

а ако су i и j различите парности, решење система је

$$r = n - \frac{j-i-1}{2},\ s = n + \frac{j-i+1}{2} \text{ и } t = n + \frac{i+j+1}{2} \pmod{2n+1}.$$

Дакле, сваки пар $\{a_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n,\ i \neq j)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Због симетрије, исто важи за све парове $\{b_i, b_j\}$ и $\{c_i, c_j\}$. Тиме је тврђење доказано. □

Напомена 1: Из Леме 1.2.1 следи да је добијено $(6n+3, 3, 2)-$покривање Штајнеров систем $\mathrm{STS}(6n+3)$. То значи да је сваки пар елемената скупа V садржан у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$.

Напомена 2: Претходна конструкција је еквивалентна са Боузовом конструкцијом (поглавље 1.2) са идемпотентном комутативном квазигрупом $(\mathbb{Z}_{2n+1}, \circ)$, дефинисаном у доказу Леме 1.2.4. Елементи a_i, b_i и c_i, редом, одговарају елементима $(i,2)$, $(i,1)$ и $(i,0)$.

На сличан начин конструишемо $(6n+4,3,2)-$покривање.

2.2 Минимално $(6n+4,3,2)-$покривање

Теорема 2.2.1. *Нека је $v=6n+4$ и $V=\{a_0,a_1,\ldots,a_{2n}\}\cup\{b_0,b_1,\ldots,b_{2n}\}\cup\{c_0,c_1,\ldots,c_{2n}\}\cup\{\infty\}$. Нека је $\mathcal{B}$ скуп блокова који се добија деловањем пермутације*

$$p=(a_0\ a_1\ldots a_{2n})(b_0\ b_1\ldots b_{2n})(c_0\ c_1\ldots c_{2n})(\infty), \tag{2.2.1}$$

$2n+1$ пута на блокове

$$\begin{array}{llll} \{a_0,b_1,b_{2n}\},\ \{a_0,b_2,b_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{a_0,b_n,b_{n+1}\}, \\ \{b_0,c_1,c_{2n}\},\ \{b_0,c_2,c_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{b_0,c_n,c_{n+1}\}, \\ \{c_0,a_1,a_{2n}\},\ \{c_0,a_2,a_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{c_0,a_n,a_{n+1}\}, \\ \{a_0,b_0,c_0\}\ ,\quad \{a_0,b_0,\infty\}\ , & & \end{array} \tag{2.2.2}$$

укључујући блокове који се добијају деловањем пермутације p, $n+1$ пута на блок

$$\{c_0,c_n,\infty\}. \tag{2.2.3}$$

Тада је $(V,\mathcal{B})$ једно $(v,3,2)-$покривање са $L(v,3,2)$ блокова.

Доказ. Скуп $\mathcal{B}$ садржи $(3n+2)(2n+1)+(n+1)=6n^2+8n+3=L(6n+4,3,2)$ различитих блокова. Докажимо да је $(V,\mathcal{B})$ једно $(v,3,2)-$покривање, тј. да је сваки пар елемената скупа V садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Као у Теореми 2.1.1 се доказује да је сваки од парова $\{a_i,b_j\}$, $\{b_i,c_j\}$ и $\{c_i,a_j\}$ $(0\leqslant i,j\leqslant 2n)$, као и сваки од парова $\{a_i,a_j\}$, $\{b_i,b_j\}$ и $\{c_i,c_j\}$ $(0\leqslant i,j\leqslant 2n,\ i\neq j)$, садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Још треба доказати да је сваки пар који садржи елемент ∞ садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Деловањем пермутације p^i на блок $\{a_0,b_0,\infty\}$ добија се блок $\{a_i,b_i,\infty\}$, па је сваки од парова $\{a_i,\infty\}$ и $\{b_i,\infty\}$ $(0\leqslant i\leqslant 2n)$ садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Деловањем пермутације p^i на блок $\{c_0,c_n,\infty\}$ добија се блок $\{c_i,c_{n+i},\infty\}$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. Дакле, сваки пар $\{c_i,\infty\}$ $(0\leqslant i\leqslant 2n)$ је такође садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Напомена: Добијено $(6n+4,3,2)-$покривање није Штајнеров систем јер су парови $\{a_i,b_i\}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n)$, $\{c_i,c_{n+i}\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $\{c_n,\infty\}$ садржани у по два различита блока из $\mathcal{B}$.

На сличан начин конструишемо и $(6n+5,3,2)-$покривање.

2.3 Минимално $(6n+5,3,2)-$покривање

Теорема 2.3.1. *Нека је* $v = 6n+5$ *и* $V = \{a_0,a_1,\ldots,a_{2n}\} \cup \{b_0,b_1,\ldots,b_{2n}\} \cup \{c_0,c_1,\ldots,c_{2n}\} \cup \{\infty_0,\infty_1\}$. *Нека је* $\mathcal{B}$ *скуп блокова који се добија деловањем пермутације*

$$p = (a_0\ a_1 \ldots a_{2n})(b_0\ b_1 \ldots b_{2n})(c_0\ c_1 \ldots c_{2n})(\infty_0\ \infty_1), \tag{2.3.1}$$

$2n+1$ *пута на блокове*

$$\begin{array}{llcl}
\{a_0,b_1,b_{2n}\}, & \{a_0,b_2,b_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{a_0,b_n,b_{n+1}\},\\
\{b_0,c_1,c_{2n}\}, & \{b_0,c_2,c_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{b_0,c_n,c_{n+1}\},\\
\{c_1,a_1,a_{2n}\}, & \{c_1,a_2,a_{2n-1}\}, & \ldots & ,\{c_1,a_n,a_{n+1}\},\\
\{a_0,b_0,\infty_0\}, & \{b_0,c_0,\infty_1\}, & ,\{c_1,a_0,\infty_1\}, &
\end{array} \tag{2.3.2}$$

укључујући блок $\{c_0,\infty_0,\infty_1\}$. *Тада је* $(V,\mathcal{B})$ *једно* $(v,3,2)-$*покривање са* $L(v,3,2)$ *блокова.*

Пре доказа теореме, приметимо да се у блоковима треће врсте и последњем блоку у (2.3.2), уместо очекиваног елемента c_0 налази c_1. Такође, елемент ∞_1 се налази у два, а ∞_0 у само једном блоку из (2.3.2). Тиме је изгубљена симетричност, па доказ захтева разматрање већег броја случајева.

Доказ. Скуп $\mathcal{B}$ садржи $(3n+3)(2n+1)+1 = 6n^2+9n+4 = L(6n+5,3,2)$ различитих блокова. Докажимо да је $(V,\mathcal{B})$ једно $(v,3,2)-$покривање, тј. да је сваки пар елемената скупа V садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Као у Теореми 2.1.1 се доказује да је сваки од парова $\{a_i, b_j\}$ и $\{b_i, c_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n)$ садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Такође, сваки пар $\{c_1, a_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant 2n)$ је садржан у неком блоку из (2.3.2): пар $\{c_1, a_0\}$ у последњем блоку, а пар $\{c_1, a_j\}$ $(j \neq 0)$ у неком блоку из треће врсте у (2.3.2). Деловањем пермутације p^i $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$ на блокове из (2.3.2), елемент c_1 се пресликава у $c_{i+1} = p^i(c_1)$ (у c_0, када је $i = 2n$), док се елементи $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ пресликавају, редом, у $a_i, a_{i+1 \pmod{2n+1}}, \ldots, a_{i-1 \pmod{2n+1}}$. Дакле, сваки пар $\{c_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n)$ је такође садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Као у Теореми 2.1.1 се доказује да је и сваки од парова $\{a_i, a_j\}$, $\{b_i, b_j\}$ и $\{c_i, c_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n,\ i \neq j)$ садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Још треба доказати да је сваки пар који садржи ∞_0 или ∞_1, садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Деловањем пермутације p, $2n+1$ пута на последња три блока из (2.3.2), редом се добијају блокови:

$$\begin{array}{llcl}
\{a_0, b_0, \infty_0\}, & \{a_1, b_1, \infty_1\}, & \ldots & , \{a_{2n}, b_{2n}, \infty_0\}, \\
\{b_0, c_0, \infty_1\}, & \{b_1, c_1, \infty_0\}, & \ldots & , \{b_{2n}, c_{2n}, \infty_1\}, \\
\{c_1, a_0, \infty_1\}, & \{c_2, a_1, \infty_0\}, & \ldots & , \{c_0, a_{2n}, \infty_1\}.
\end{array}$$

Непосредном провером се утврђује да је сваки од парова $\{a_i, \infty_j\}$, $\{b_i, \infty_j\}$ и $\{c_i, \infty_j\}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n,\ j \in \{0,1\})$, осим пара $\{c_0, \infty_0\}$, садржан у неком од наведених блокова. Пар $\{c_0, \infty_0\}$, као и пар $\{\infty_0, \infty_1\}$, садржан је у додатном блоку $\{c_0, \infty_0, \infty_1\}$. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Напомена: Добијено $(6n+5, 3, 2)-$покривање није Штајнеров систем јер је пар $\{c_0, \infty_1\}$ садржан у три различита блока из $\mathcal{B}$.

Конструкција Штајнеровог система STS$(6n+1)$ се у извесној мери разликује од претходних конструкција.

2.4 Минимално $(6n+1, 3, 2)-$покривање

Теорема 2.4.1. *Нека је* $v = 6n+1$ *и* $V = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{2n-1}\} \cup \{c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1}\} \cup \{\infty\}$. *Нека је* $\mathcal{B}$ *скуп блокова који се добија деловањем* *пермутације*

$$p = (a_0\ a_1 \ldots a_{2n-1})(b_0\ b_1 \ldots b_{2n-1})(c_0\ c_1 \ldots c_{2n-1})(\infty), \tag{2.4.1}$$

n пута на блокове

$$\begin{array}{cccc}
\{a_0, b_0, b_{2n-1}\}, & \{a_0, b_1, b_{2n-2}\}, & \ldots, & \{a_0, b_{n-1}, b_n\}, \\
\{b_0, c_0, c_{2n-1}\}, & \{b_0, c_1, c_{2n-2}\}, & \ldots, & \{b_0, c_{n-1}, c_n\}, \\
\{c_0, a_0, a_{2n-1}\}, & \{c_0, a_1, a_{2n-2}\}, & \ldots, & \{c_0, a_{n-1}, a_n\}, \\
\{a_n, b_0, \infty\}, & \{a_n, b_1, b_{2n-1}\}, & \ldots, & \{a_n, b_{n-1}, b_{n+1}\}, \\
\{b_n, c_0, \infty\}, & \{b_n, c_1, c_{2n-1}\}, & \ldots, & \{b_n, c_{n-1}, c_{n+1}\}, \\
\{c_n, a_0, \infty\}, & \{c_n, a_1, a_{2n-1}\}, & \ldots, & \{c_n, a_{n-1}, a_{n+1}\}, \\
\{a_n, b_n, c_n\}. & & &
\end{array} \tag{2.4.2}$$

Тада је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, 3, 2)-$покривање са $L(v, 3, 2)$ блокова.

Доказ. Скуп $\mathcal{B}$ садржи $n(6n+1) = 6n^2 + n = L(6n+1, 3, 2)$ различитих блокова. Докажимо да је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v, 3, 2)-$покривање, тј. да је сваки пар елемената скупа V садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Сваки пар $\{a_0, b_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant 2n-1)$ је садржан у неком блоку из прве врсте у (2.4.2). Такође, сваки пар $\{a_n, b_j\}$ $(0 \leqslant j \leqslant 2n-1)$ је садржан у неком блоку из (2.4.2): пар $\{a_n, b_n\}$ у блоку $\{a_n, b_n, c_n\}$, а пар $\{a_n, b_j\}$ $(j \neq n)$ у неком блоку из четврте врсте у (2.4.2). Деловањем пермутације p^i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ на блокове из (2.4.2), елемент a_0 се пресликава у a_i, a_n се пресликава у a_{n+i}, док се елементи $b_0, b_1, \ldots, b_{2n-1}$ пресликавају, редом, у $b_i, b_{i+1 \pmod{2n}}, \ldots, b_{i-1 \pmod{2n}}$. Дакле, сваки од парова $\{a_i, b_j\}$ и $\{a_{n+i}, b_j\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1,\ 0 \leqslant j \leqslant 2n-1)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Једноставније, сваки пар $\{a_i, b_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Због симетрије, исто важи за све парове $\{b_i, c_j\}$ и $\{c_i, a_j\}$.

На сличан начин се доказује да је сваки од парова $\{a_i, \infty\}$ и $\{a_{n+i}, \infty\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, односно $\{a_i, \infty\}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$, садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Због симетрије, исто важи за све парове $\{b_i, \infty\}$ и $\{c_i, \infty\}$.

Посматрајмо сада парове $\{a_i, a_j\}$. Сваки пар $\{a_i, a_j\}$ за који важи $i + j = 2n - 1$ садржан је у неком блоку из треће врсте, док је сваки пар $\{a_i, a_j\}$ за који важи $i + j = 2n$ садржан у неком блоку из шесте врсте у (2.4.2). За произвољан пар $\{a_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i < j \leqslant 2n-1)$ довољно је доказати да постоји пар $\{a_r, a_s\}$ $(0 \leqslant r, s \leqslant 2n-1,\ r+s = 2n-1$ или $r+s = 2n)$ и пермутација p^t $(0 \leqslant t \leqslant n-1)$ којом се пар $\{a_r, a_s\}$ пресликава у пар $\{a_i, a_j\}$, односно, довољно је доказати да бар један од система

$$I: \begin{cases} r+s = 2n-1, \\ r+t \pmod{2n} = i, \\ s+t \pmod{2n} = j, \end{cases} \qquad II: \begin{cases} r+s = 2n, \\ r+t \pmod{2n} = i, \\ s+t \pmod{2n} = j, \end{cases}$$

има решење по r, s и t. Ако је $1 \leqslant i+j \leqslant 2n-2$, решење је

$$r = 2n - \frac{j-i+\delta}{2},\ s = \frac{j-i-\delta}{2} \ \text{ и } \ t = \frac{i+j+\delta}{2},$$

а ако је $2n-1 \leqslant i+j \leqslant 4n-3$, решење је

$$r = n - \frac{j-i+\delta}{2},\ s = n + \frac{j-i-\delta}{2} \ \text{ и } \ t = \frac{i+j+\delta}{2} - n,$$

где је

$$\delta = \begin{cases} 0\ , & \text{ако су } i \text{ и } j \text{ исте парности (решење система } II), \\ 1\ , & \text{ако су } i \text{ и } j \text{ различите парности (решење система } I). \end{cases}$$

Дакле, сваки пар $\{a_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1,\ i \neq j)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Због симетрије, исто важи за све парове $\{b_i, b_j\}$ и $\{c_i, c_j\}$. Тиме је тврђење доказано. □

Напомена 1: Из Леме 1.2.1 следи да је добијено $(6n+1, 3, 2)-$покривање Штајнеров систем STS$(6n+1)$. То значи да је сваки пар елемената скупа V садржан у тачно једном блоку из $\mathcal{B}$.

Напомена 2: Као у случају $(6n+3, 3, 2)-$покривања и Боузове конструкције, претходна конструкција је еквивалентна са Сколемовом конструкцијом (поглавље 1.2) са полу-идемпотентном комутативном квазигрупом $(\mathbb{Z}_{2n}, \circ)$ (Лема 1.2.5). Елементи a_i, b_i и c_i, редом, одговарају елементима $(2n-1-i, 2)$, $(2n-1-i, 1)$ и $(2n-1-i, 0)$.

На сличан начин конструишемо $(6n, 3, 2)-$покривање.

2.5 Минимално $(6n,3,2)-$покривање

Теорема 2.5.1. *Нека је* $v = 6n$ *и* $V = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{2n-1}\} \cup \{c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1}\}$. *Нека је* $\mathcal{B}$ *скуп блокова који се добија деловањем пермутације*

$$p = (a_0\ a_1 \ldots a_{2n-1})(b_0\ b_1 \ldots b_{2n-1})(c_0\ c_1 \ldots c_{2n-1}), \tag{2.5.1}$$

n пута на блокове

$$\begin{array}{cccc}
\{a_0, b_0, b_{2n-1}\}, & \{a_0, b_1, b_{2n-2}\}, & \ldots, & \{a_0, b_{n-1}, b_n\}, \\
\{b_0, c_0, c_{2n-1}\}, & \{b_0, c_1, c_{2n-2}\}, & \ldots, & \{b_0, c_{n-1}, c_n\}, \\
\{c_0, a_0, a_{2n-1}\}, & \{c_0, a_1, a_{2n-2}\}, & \ldots, & \{c_0, a_{n-1}, a_n\}, \\
\{a_n, b_0, b_n\}, & \{a_n, b_1, b_{2n-1}\}, & \ldots, & \{a_n, b_{n-1}, b_{n+1}\}, \\
\{b_n, c_0, c_n\}, & \{b_n, c_1, c_{2n-1}\}, & \ldots, & \{b_n, c_{n-1}, c_{n+1}\}, \\
\{c_n, a_0, a_n\}, & \{c_n, a_1, a_{2n-1}\}, & \ldots, & \{c_n, a_{n-1}, a_{n+1}\}.
\end{array} \tag{2.5.2}$$

Тада је $(V, \mathcal{B})$ *једно* $(v,3,2)-$*покривање са* $L(v,3,2)$ *блокова.*

Доказ. Доказ је потпуно аналоган доказу претходне теореме. Једина разлика је што су сада парови $\{a_n, b_n\}$, $\{b_n, c_n\}$ и $\{c_n, a_n\}$ садржани, редом, у блоковима $\{a_n, b_0, b_n\}$, $\{b_n, c_0, c_n\}$ и $\{c_n, a_0, a_n\}$ из (2.5.2), уместо у блоку $\{a_n, b_n, c_n\}$. Дакле, сваки пар елемената скупа V је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$, односно $(V, \mathcal{B})$ је $(v,3,2)-$покривање.

$\mathcal{B}$ садржи $6n \cdot n = 6n^2 = L(6n,3,2)$ различитих блокова, чиме је тврђење доказано. □

Напомена: Добијено $(6n,3,2)-$покривање није Штајнеров систем јер су парови $\{a_i, a_{n+i}\}$, $\{b_i, b_{n+i}\}$ и $\{c_i, c_{n+i}\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ садржани у по два различита блока из $\mathcal{B}$.

На крају дајемо конструкцију $(6n+2,3,2)-$покривања.

2.6 Минимално $(6n+2,3,2)-$покривање

Теорема 2.6.1. *Нека је* $v = 6n+2$ *и* $V = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\} \cup \{b_0, b_1, \ldots, b_{2n-1}\} \cup \{c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1}\} \cup \{\infty_0, \infty_1\}$. *Нека је* $\mathcal{B}$ *скуп блокова који се добија деловањем пермутације*

$$p = (a_0\ a_1 \ldots a_{2n-1})(b_0\ b_1 \ldots b_{2n-1})(c_0\ c_1 \ldots c_{2n-1})(\infty_0)(\infty_1), \qquad (2.6.1)$$

n пута на блокове

$$\begin{array}{rrrcl}
 & \{a_0,b_0,b_{2n-1}\}, & \{a_0,b_1,b_{2n-2}\}, & \ldots & , \{a_0,b_{n-1},b_n\}, \\
 & \{b_0,c_0,c_{2n-1}\}, & \{b_0,c_1,c_{2n-2}\}, & \ldots & , \{b_0,c_{n-1},c_n\}, \\
 & \{c_0,a_0,a_{2n-1}\}, & \{c_0,a_1,a_{2n-2}\}, & \ldots & , \{c_0,a_{n-1},a_n\}, \\
\{a_n,b_0,\infty_0\}, & \{a_n,b_0,\infty_1\}, & \{a_n,b_1,b_{2n-1}\}, & \ldots & , \{a_n,b_{n-1},b_{n+1}\}, \\
\{b_n,c_0,\infty_0\}, & \{b_n,c_0,\infty_1\}, & \{b_n,c_1,c_{2n-1}\}, & \ldots & , \{b_n,c_{n-1},c_{n+1}\}, \\
\{c_n,a_0,\infty_0\}, & \{c_n,a_0,\infty_1\}, & \{c_n,a_1,a_{2n-1}\}, & \ldots & , \{c_n,a_{n-1},a_{n+1}\}, \\
 & \{a_n,b_n,c_n\}, & & &
\end{array} \qquad (2.6.2)$$

укључујући блок $\{a_0, \infty_0, \infty_1\}$. *Тада је* $(V, \mathcal{B})$ *једно* $(v,3,2)-$*покривање са* $L(v,3,2)$ *блокова.*

Доказ. Скуп $\mathcal{B}$ садржи $n(6n+4)+1 = 6n^2+4n+1 = L(6n+1,3,2)$ различитих блокова. Докажимо да је $(V, \mathcal{B})$ једно $(v,3,2)-$покривање, тј. да је сваки пар елемената скупа V садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Као у Теореми 2.4.1 се доказује да је сваки од парова $\{a_i, b_j\}$, $\{b_i, c_j\}$ и $\{c_i, a_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1)$, као и сваки од парова $\{a_i, a_j\}$, $\{b_i, b_j\}$ и $\{c_i, c_j\}$ $(0 \leqslant i, j \leqslant 2n-1,\ i \neq j)$, садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$.

Још треба доказати да је сваки пар који садржи ∞_0 или ∞_1, садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Деловањем пермутације p, n пута на блокове $\{a_n, b_0, \infty_0\}$, $\{b_n, c_0, \infty_0\}$, $\{c_n, a_0, \infty_0\}$, редом се добијају блокови:

$$\begin{array}{llcl}
\{a_n,b_0,\infty_0\}, & \{a_{n+1},b_1,\infty_0\}, & \ldots & , \{a_{2n-1},b_{n-1},\infty_0\}, \\
\{b_n,c_0,\infty_0\}, & \{b_{n+1},c_1,\infty_0\}, & \ldots & , \{b_{2n-1},c_{n-1},\infty_0\}, \\
\{c_n,a_0,\infty_0\}, & \{c_{n+1},a_1,\infty_0\}, & \ldots & , \{c_{2n-1},a_{n-1},\infty_0\}.
\end{array}$$

Непосредном провером се утврђује да је сваки од парова $\{a_i, \infty_0\}$, $\{b_i, \infty_0\}$

и $\{c_i, \infty_0\}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$ садржан у неком од наведених блокова. На исти начин, сваки од парова $\{a_i, \infty_1\}$, $\{b_i, \infty_1\}$ и $\{c_i, \infty_1\}$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$ је садржан у неком блоку из $\mathcal{B}$. Пар $\{\infty_0, \infty_1\}$ је садржан у додатном блоку $\{a_0, \infty_0, \infty_1\}$. Тиме је тврђење доказано. $\square$

Напомена 1: У додатном блоку $\{a_0, \infty_0, \infty_1\}$, уместо елемента a_0 могли смо узети призвољан елемент скупа V.

Напомена 2: Добијено $(6n+2, 3, 2)-$покривање није Штајнеров систем јер су парови $\{a_{n+i}, b_i\}$, $\{b_{n+i}, c_i\}$ и $\{c_{n+i}, a_i\}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, као и парови $\{a_0, \infty_0\}$ и $\{a_0, \infty_1\}$, садржани у по два различита блока из $\mathcal{B}$.

Глава 3

Метахеуристике и проблем минималног (v, k, t)–покривања

Метахеуристика представља поступак за приближно решавање оптимизационих проблема. Оптимизациони проблем се може формулисати на следећи начин [20, 26, 42]. Одредити

$$\min\{f(x) : x \in X, X \subseteq \mathcal{S}\}, \tag{3.0.1}$$

где је $\mathcal{S}$ простор решења, $X \subseteq \mathcal{S}$ скуп допустивих решења и $f : X \mapsto \mathbb{R}$ функција циља датог проблема.[1] Допустиво решење $x^* \in X$ је оптимално решење проблема (3.0.1) ако је $f(x^*) \leqslant f(x)$, за свако $x \in X$. Ако је $\mathcal{S}$ највише пребројив скуп, (3.0.1) је проблем комбинаторне оптимизације, тј. комбинаторни проблем.

Успешна примена егзактних алгоритама за решавање комбинаторних проблема је најчешће ограничена димензијом проблема. За комбинаторне проблеме великих димензија је практично немогуће добити оптимално решење у разумном времену. Ту пре свега спадају NP-тешки проблеми, за чије решавање није познат егзактни алгоритам полиномијалне сложености [20]. За такве проблеме, хеуристичке (приближне) методе представљају практично једини начин за њихово успешно решавање.

Употребом хеуристика не добијају се обавезно оптимална решења,

[1] Проблем максимизације се своди на проблем минимизације функције $-f$.

већ довољно "добра" решења, у разумном времену. Хеуристике су најчешће намењене за решавање конкретних проблема. Метахеуристике су хеуристике које су развијене на општијем нивоу и које се могу адаптирати за решавање већег броја (не само комбинаторних) проблема. Неке од најчешће коришћених метахеуристика су похлепни алгоритми, табу претраживање, метода променљивих околина, симулирано каљење, генетски алгоритми, мрављи алгоритми итд.

Проблем минималног $(v, k, t)-$покривања, тј. проблем одређивања вредности $C(v, k, t)$, спада у комбинаторне проблеме. Математички модел проблема је

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{1}^T x \\ &Ax \geqslant \mathbf{1}, \\ &x \in \{0,1\}^{\binom{v}{k}}, \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

где је $A = [a_{ij}]$ матрица димензије $\binom{v}{t} \times \binom{v}{k}$ ($a_{ij} = 1$ ако је i-ти t-подскуп садржан у j-том k-подскупу; у супротном је $a_{ij} = 0$), а $\mathbf{1}$ вектор чији су сви елементи једнаки 1. Решење проблема је вектор x, где је $x_j = 1$ ако је j-ти k-подскуп (блок) садржан у покривању; у супротном је $x_j = 0$.

Проблем (3.0.2) припада класи NP-тешког проблема покривања скупа (*set covering problem*) и може се егзактно решити само за мале вредности параметара v, k и t [56]. За веће вредности параметара се могу користити хеуристичке методе за добијање приближног решења, односно $(v, k, t)-$покривања са што је могуће мањим бројем блокова. Поред похлепног алгоритма, који ће бити приказан у наредном поглављу, у [76] је коришћено симулирано каљење, док је у радовима [22, 77, 78] коришћено табу претраживање за решавање проблема минималног покривања.

У наредним поглављима представићемо неколико нових хеуристика за решавање наведеног проблема. Најпре ћемо дати нову имплементацију похлепног алгоритма, новог похлепног алгоритма и новог алгоритма редукције (*Level Reduction* - LR). Затим ћемо представити методу великих околина, методу променљивог спуста и (општу) методу променљивих околина. Код свих је предложена LR процедура у основи локалног претраживања, што чини суштинску разлику у односу на друге хеуристике за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања.

3.1 Похлепни алгоритам

Похлепни алгоритми спадају у једноставне, конструктивне метахеуристике. Најчешће се користе за добијање почетног решења у оквиру других, комплекснијих хеуристика. У неким случајевима, похлепним алгоритмима се добијају веома добра, па чак и оптимална решења [19, 34, 72]. У [31] је дат следећи похлепни алгоритам за генерисање $(v, k, t)-$покривања.

Алгоритам 1 - Похлепни алгоритам

---

1. Поређати k-подскупове v-скупа у листу.
2. Изабрати k-подскуп који садржи максималан број непокривених t-подскупова. Ако таквих k-подскупова има више, изабрати онај који је први у листи.
3. Понављати корак 2, све док има непокривених t-подскупова.

Поредак k-подскупова (блокова) у листи може бити произвољан. У зависности од уређења k-подскупова, приказани алгоритам је тестиран са лексикографском (*lexicographic*), колекс (*colex-squashed*), греј (*gray*) и случајном (*random*) уређењем. Колекс уређење је слично лексикографском, са том разликом што се елементи v-скупа посматрају у супротном редоследу у односу на лексикографско уређење (видети Табелу 3.1). Греј уређење је такво да се два суседна k-подскупа разликују у само једном елементу. Поређењем резултата, показало се да овај похлепни алгоритам даје најбоље резултате, у просеку, са лексикографским и колекс уређењем k-подскупова. Следе, редом, похлепни алгоритми са греј и случајним уређењем.

У општем случају, $(v, k, t)-$покривања добијена похлепним алгоритмом нису оптимална. Ипак, у [32] је показано да су $(v, k, t)-$покривања добијена похлепним алгоритмом асимптотски добра, тј. да достижу Редлову горњу границу (видети поглавље 1.3.2). Преко 40% горњих граница из [31] је добијено помоћу похлепног алгоритма, а више од половине њих је једнако са најбољим горњим границама вредности $C(v, k, t)$. Треба нагласити да је већина тих горњих граница добијена похлепним алгоритмом са лексикографским или колекс уређењем k-подскупова.

Нова имплементација похлепног алгоритма

Како би добили конкретна $(v, k, t)-$покривања, ми смо (рачунарски) имплементирали Алгоритам 1 [74]. Наша имплементација има исту рачунску сложеност као она која је предложена у [31]. Међутим, наша имплементација садржи одређена побољшања. Пре свега, k и t-подскупови скупа $V = \{1, \ldots, v\}$ су представљени као природни бројеви мањи од 2^v, чији бинарни запис садржи k, односно t јединица на одговарајућим позицијама. У Табели 3.1 су дати сви 3-подскупови скупа са 5 елемената, заједно са одговарајућом целобројном репрезентацијом. С обзиром да смо алгоритам имплементирали са лексикографским и колекс уређењем k-подскупова (када алгоритам даје најбоље резултате), 3-подскупове у Табели 3.1 дајемо у лексикографском и колекс редоследу.

Табела 3.1: Лексикографско и колекс уређење подскупова

Лексикографско уређење			Колекс уређење		
{1,2,3}		$00111_2 = 7$	{1,2,3}		$00111_2 = 7$
{1,2,4}		$01011_2 = 11$	{1,2,4}		$01011_2 = 11$
{1,2,5}		$10011_2 = 19$	{1,3,4}		$01101_2 = 13$
{1,3,4}		$01101_2 = 13$	{2,3,4}		$01110_2 = 14$
{1,3,5}	$\sim$	$10101_2 = 21$	{1,2,5}	$\sim$	$10011_2 = 19$
{1,4,5}		$11001_2 = 25$	{1,3,5}		$10101_2 = 21$
{2,3,4}		$01110_2 = 14$	{2,3,5}		$10110_2 = 22$
{2,3,5}		$10110_2 = 22$	{1,4,5}		$11001_2 = 25$
{2,4,5}		$11010_2 = 26$	{2,4,5}		$11010_2 = 26$
{3,4,5}		$11100_2 = 28$	{3,4,5}		$11100_2 = 28$

Целобројна репрезентација k и t-подскупова побољшава ефикасност алгоритма. На пример, $A \subseteq B$ се може записати као $a \;\&\; b = a$ (или као $a \;\&\; \overline{b} = 0$), где су a и b целобројне репрезентације подскупова A и B, а & бинарна конјункција ($\overline{b}$ је бинарни комплемент од b). Такође, целобројна репрезентација k-подскупова захтева мање меморијског простора. На пример, уобичајена репрезентација подскупа $\{1, 2, \ldots, 16\}$ заузима 38 бајтова меморије, док целобројна репрезентација $1111111111111111_2 = 65535$ заузима само 5 бајтова меморије.

Поред наведеног, похлепни алгоритам који је имплементиран у [31] је додатно лимитиран расположивом величином системске меморије. Наиме, поменути алгоритам користи низ димензије $\binom{v}{k}$ за меморисање свих k-подскупова. На пример, за $v = 32$ и $k = 16$ димензија низа је $\binom{v}{k} = 601080390$. Наша имплементација алгоритма, уместо низа k-подскупова, користи одређену процедуру за њихово динамичко генерисање [35]. Процедура представља побољшање добро познате Кнутове процедуре за генерисање свих комбинација [50].

На Слици 3.1 је дат псеудо-код нашег похлепног алгоритма. Поменуто динамичко генерисање k-подскупова у псеудо-коду је представљено са $Tekuci\_Blok \leftarrow Next(Tekuci\_Blok)$ (линија 13). Добијена $(v, k, t)-$покривања, укључујући њихове величине (горње границе за $C(v, k, t)$) и времена извршавања, налазе се на сајту *http://www.math.fon.bg.ac.rs/covering*. Као и у [31], $(v, k, t)-$покривања су дата за $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$, $t \leqslant 8$ и $v > k > t \geqslant 2$.

Једноставности ради, за лексикографско уређење надаље ћемо рећи да је *лекс* уређење, похлепни алгоритам са лекс (колекс) уређењем k-подскупова зваћемо *похлепни лекс (колекс) алгоритам*, а покривања добијена тим алгоритмом зваћемо *похлепна лекс (колекс) покривања*.

У општем случају, похлепни лекс и похлепни колекс алгоритми дају различита покривања. Међутим, за одређене вредности параметара v, k и t, добијена покривања су идентична. У тим случајевима, за добијање покривања је довољно користити само једну од ове две процедуре.

Довољни услови за једнакост похлепних лекс и похлепних колекс покривања

У овом делу ћемо доказати да су похлепна лекс и похлепна колекс покривања једнака (идентична) када је $v = k + 1$, односно када је $k = t + 1$ [74]. Најпре ћемо доказати следећу лему. Релације поретка, лекс и колекс, редом ћемо означити са $\prec_L$ и $\prec_C$.

Улаз: v, k, t.
/* Иницијализација */
$Izabrani\_Blok \leftarrow \{1, 2, \ldots, k\}$;
$Izabrani\_Blok$ додати у покривање; $C \leftarrow 1$;
$Pokriveni \leftarrow \emptyset$; $Nepokriveni \leftarrow \emptyset$;
t-подскупове поређати у колекс поредак. Првих $\binom{k}{t}$ додати скупу $Pokriveni$, а преосталих $\binom{v}{t} - \binom{k}{t}$ додати скупу $Nepokriveni$;
for $i \leftarrow 0$ to $\binom{v}{k} - 1$ **do** $Blok\_pokriva[i] \leftarrow \binom{k}{t}$;
/* Похлепно бирање блокова */
repeat
    $Tekuci\_Blok \leftarrow \{1, 2, \ldots, k\}$; $Max \leftarrow 0$; $i \leftarrow 0$;
    repeat
        $Blok\_pokriva[i]$ умањити за број t-подскупова од $Tekuci\_Blok$ који припадају скупу $Pokriveni$;
        if $Blok\_pokriva[i] > Max$ **then**
            $Izabrani\_Blok \leftarrow Tekuci\_Blok$;
            $Max \leftarrow Blok\_pokriva[i]$;
        $Tekuci\_Blok \leftarrow Next(Tekuci\_Blok)$; $i \leftarrow i + 1$;
    until $i = \binom{v}{k}$
    $Izabrani\_Blok$ додати у покривање; $C \leftarrow C + 1$;
    $Pokriveni \leftarrow \emptyset$; Скупу $Pokriveni$ додати t-подскупове од $Izabrani\_Blok$ који припадају скупу $Nepokriveni$;
    $Nepokriveni \leftarrow Nepokriveni \backslash Pokriveni$;
until $Nepokriveni = \emptyset$
Излаз: $(v, k, t)-$покривање са C блокова.

Слика 3.1: Псеудо-код похлепног алгоритма

Лема 3.1.1. *Нека су* A *и* B k*-подскупови и нека је* $A \cap B$ $(k-1)$*-подскуп скупа* $\{1, 2, \ldots, v\}$. *Тада је* $A \prec_L B \Leftrightarrow A \prec_C B$.

Доказ. Нека је $C = A \cap B$. Тада је $A = C \cup \{a\}$ и $B = C \cup \{b\}$, за неке a и b из датог скупа. За симетричну разлику $A \oplus B$, скупова A и B, важи $A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \{a, b\}$, где $\overline{A}$ и $\overline{B}$ означавају комплементе скупова A и B. Релације лекс и колекс се могу дефинисати помоћу симетричне разлике: $A \prec_L B \Leftrightarrow$ најмањи елемент из $A \oplus B$ припада A; $A \prec_C B \Leftrightarrow$ највећи елемент из $A \oplus B$ припада B (видети "*Order relations on subsets*" у [4]). Дакле, $A \prec_L B \Leftrightarrow a < b$ и $A \prec_C B \Leftrightarrow a < b$, чиме је лема доказана. □

Приметимо да претходна лема важи за произвољан тотално уређен v-скуп. Из леме следи да су лекс и колекс поредак k-подскупова скупа

$\{1, 2, \ldots, k, k+1\}$ идентични, па према томе и похлепна лекс и похлепна колекс $(k+1, k, t)-$покривања. У случају $(v, k, k-1)-$покривања, важи следећа теорема.

Теорема 3.1.2. *Похлепна лекс и похлепна колекс $(v, k, k-1)-$покривања су идентична, до на пермутацију изабраних k-подскупова.*

Доказ. Нека је A k-подскуп који је изабран у покривање похлепним лекс или колекс алгоритмом. Нека је $f(A)$ број $(k-1)$-подскупова који су садржани у A, а нису садржани у k-подскуповима који су претходно изабрани у покривање. Другим речима, избором k-подскупа A у покривање покрива се $f(A)$, до тада непокривених, $(k-1)$-подскупова. Јасно је да је $f(A) = k$, за првих неколико изабраних k-подскупова A, као и да је $f(A) \geq f(B)$ ако је k-подскуп A изабран пре k-подскупа B.

Покажимо да су скупови $L_m = \{A : A$ *је изабран похлепним лекс ал. и* $f(A) = m\}$ и $C_m = \{A : A$ *је изабран похлепним колекс ал. и* $f(A) = m\}$ једнаки, за свако $m \in \{1, \ldots, k\}$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $L_m \neq C_m$, за неко m. Нека је m_0 највећи природан број за који то важи, односно, нека је $L_{m_0} \neq C_{m_0}$ и $L_m = C_m$ за $m \in \{m_0+1, \ldots, k\}$. Тада је бар један од скупова $L_{m_0} \backslash C_{m_0}$ и $C_{m_0} \backslash L_{m_0}$ непразан. На пример, нека је $L_{m_0} \backslash C_{m_0} \neq \emptyset$. Од k-подскупова из $L_{m_0} \backslash C_{m_0}$, нека је A први изабран (похлепним лекс алгоритмом) у L_{m_0}. С обзиром да A није изабран (похлепним колекс алгоритмом) у C_{m_0}, постоји B који је изабран у C_{m_0}, тако да је $B \prec_C A$ и $B \cap A$ је $(k-1)$-подскуп који није био покривен пре избора B у C_{m_0} (након избора B у C_{m_0}, A покрива мање од m_0 непокривених $(k-1)$-подскупова). На основу Леме 3.1.1 следи $B \prec_L A$, одакле закључујемо да $B \notin L_{m_0}$ (из $B \in L_{m_0}$ следи $A \notin L_{m_0}$). Као и у претходном случају, то је могуће само ако постоји $C \in L_{m_0}$, тако да је $C \prec_L B$ и $C \cap B$ је $(k-1)$-подскуп који није био покривен пре избора C у L_{m_0}. На основу Леме 3.1.1 следи $C \prec_C B$, одакле закључујемо да $C \notin C_{m_0}$ (из $C \in C_{m_0}$ следи $B \notin C_{m_0}$). Дакле, $C \in L_{m_0} \backslash C_{m_0}$ и $C \prec_L A$ $(C \prec_L B \prec_L A)$, што је у супротности са претпоставком да је A k-подскуп из $L_{m_0} \backslash C_{m_0}$ који је први изабран у L_{m_0}. До истог закључка се долази у случају $C_{m_0} \backslash L_{m_0} \neq \emptyset$, чиме је тврђење доказано. □

Претходно тврђење нам омогућава да за добијање најзахтевнијих $(v, k, t)-$покривања користимо само један од ова два похлепна алгоритма. Заиста, највећа покривања, која троше највише рачунарског времена, су облика $(v, k, k-1)$. На пример, $(32, 9, 8)$ похлепно лекс (колекс) покривање, које садржи 1530641 блокова.

Нова похлепна покривања

Овде ће бити приказана једна модификација похлепног Алгоритма 1 [74]. Резултујући алгоритам ћемо звати *нови похлепни* алгоритам. За листу, у којој први члан следи након последњег, рећи ћемо да је *циклична*.

Алгоритам 2 - Нови похлепни алгоритам

---

1. Поређати све k-подскупове v-скупа у цикличну листу и изабрати први k-подскуп: $\{1, 2, \ldots, k\}$.
2. Изабрати k-подскуп који садржи максималан број непокривених t-подскупова. Ако таквих k-подскупова има више, изабрати први који следи након претходно изабраног у цикличној листи.
3. Понављати корак 2, све док има непокривених t-подскупова.

Алгоритам 2 се разликује од Алгоритма 1 у корацима 1. и 2. Новим похлепним алгоритмом, након избора једног k-подскупа у покривање, нема враћања на почетак листе. Генерисање следећих k-подскупова се наставља почевши од последње изабраног k-подскупа.

Псеудо-код новог похлепног алгоритма се незнатно разликује од псеудо-кода похлепног алгоритма (Слика 3.1). Основна разлика је у линији 7, где се $Tekuci\_Blok \leftarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ замењује са $Tekuci\_Blok \leftarrow Izabrani\_Blok$.

Није тешко приметити да важи следећа импликација: ако се похлепним лекс (колекс) алгоритмом добија Штајнеров систем $S(t, k, v)$, онда се новим похлепним лекс (колекс) алгоритмом добија исти Штајнеров систем. На пример, добро познати Штајнеров систем $S(5, 8, 24)$ (покривајући код константне тежине $A(24, 8, 5)$) се добија, не само похлепним лекс и колекс алгоритмима, већ и новим похлепним лекс и колекс алгоритмима.

Нови похлепни алгоритам се такође може имплементирати са различитим уређењима k-подскупова у (цикличној) листи: лекс, колекс, греј, случајним и другим уређењима. Као и у случају похлепног алгоритма, нови похлепни алгоритам смо имплементирали са лекс и колекс уређењем k-подскупова. Добијена нова похлепна лекс и колекс покривања су, у просеку, незнатно лошија од похлепних лекс и колекс покривања. И поред тога, са сваким од ова два алгоритма се добијају покривања која су у 21.40% случајева боља или једнака[2] од покривања из [31]. У Табели 3.2 је дат списак бољих покривања. Наглашене (подебљане) су величине покривања која су боља од најбољих познатих покривања. Детаљнији резултати, укључујући сама покривања, могу се наћи на сајту *http://www.math.fon.bg.ac.rs/covering*.

3.2 LR алгоритам

У поглављу 3.1 поменуто је да су $(v, k, t)-$покривања добијена похлепним алгоритмом асимптотски добра. Такође, у многим случајевима су величине добијених покривања једнаке, или чак мање, од до сада најбољих горњих граница вредности $C(v, k, t)$. Ипак, може се десити да у добијеним покривањима постоје сувишни (редундантни) блокови, који се могу избацити из покривања. На пример, нека је $(v, k, t)-$покривање добијено похлепним лекс алгоритмом. У свакој итерацији алгоритма бира се најбољи k-подскуп, што значи да се k-подскупови бирају, редом, у скупове $L_{\binom{k}{t}}, L_{\binom{k}{t}-1}, \ldots, L_2, L_1$ (видети доказ Теореме 3.1.2). Избором k-подскупа у L_m, покрива се m до тада непокривених t-подскупова и $\binom{k}{t} - m$ претходно покривених t-подскупова. Дакле, може се десити да су сви t-подскупови, које покрива изабрани k-подскуп A, покривени преосталим k-подскуповима из покривања (нарочито ако су скупови L_m непразни, за мале вредности m). То значи да је блок A сувишан и да се може избацити из покривања, односно, почетно покривање се може редуковати.

[2] У смислу мање или једнаке величине (броја блокова) покривања.

Табела 3.2: Нова похлепна покривања која су боља од покривања из [31]

Нова похлепна лекс покривања				Нова похлепна колекс покривања			
v	k	t	величина	v	k	t	величина
20	7	4	245	29	13	3	23
32	5	4	7829	30	5	4	6236
32	7	4	1710	32	5	4	7830
19	6	5	2498	19	6	5	2500
22	7	5	2084	22	8	5	743
31	11	5	1067	23	12	6	368
19	8	6	1798	26	8	6	14634
23	12	6	369	30	7	6	109216
24	11	6	882	32	7	6	**154099**
32	7	6	**154044**	18	10	7	657
19	9	7	2792	21	9	7	6386
23	10	7	5033	25	14	7	578
23	13	7	538	27	8	7	150645
25	8	7	83011	30	13	7	4491
27	15	7	617	32	12	7	14251
28	10	7	23569	22	10	8	14898
29	16	7	654	23	10	8	22692
30	13	7	4492	26	13	8	4503
30	14	7	2472	26	15	8	1109
32	8	7	**532247**	26	16	8	596
19	10	8	3576	29	14	8	5987
24	14	8	1012	30	14	8	8172
25	12	8	6998				
26	9	8	246959				
26	15	8	1108				

Ако покривање има више од једног редундантног блока, може се десити да их не можемо све уклонити из покривања. Наиме, ако постоји t-подскуп који је покривен само са редундантним блоковима, њиховим уклањањем такав t-подскуп би постао непокривен. Да се то не би десило, једно решење је уклањање редундантних блокова по неком редоследу, уз ажурирање скупа редундантних блокова након сваког уклањања. Друга могућност је уклањање свих редундантних блокова одједном, уз покривање непокривених t-подскупова новим блоковима. Наравно, број додатих блокова би требало да буде мањи од броја избачених блокова. За покривање непокривених t-подскупова могуће је користити различите методе а, с обзиром да је очекивани број непокривених t-подскупова релативно мали, похлепни алгоритам је најприроднији избор.

Описана метода редукције је веома једноставна, али је ограничена на покривања која садрже редундантне блокове. Уопштимо сада идеју редукције на покривања која не садрже редундантне блокове.

Нека је $\mathcal{C}$ произвољно $(v,k,t)-$покривање. Слично као у доказу Теореме 3.1.2, сваком блоку A датог покривања придружимо вредност $F(A) \in \left\{0,1,\ldots,\binom{k}{t}\right\}$, која представља број t-подскупова који су покривени блоком A, а нису покривени преосталим блоковима из $\mathcal{C}$ (избацивањем блока A из покривања, тачно $F(A)$ t-подскупова остаје непокривено). Ако покривање не садржи редундантне блокове ($F(A) = 0$), најбољи кандидати за избацивање су блокови који самостално покривају само један t-подскуп ($F(A) = 1$). Ако покривање не садржи ни такве блокове, најбољи кандидати су блокови који самостално покривају два t-подскупа ($F(A) = 2$), итд. Као у случају избацивања редундантних блокова, непокривене t-подскупове на крају треба покрити са што је могуће мањим бројем нових блокова.

Један од начина да се реализује описана редукција је дат следећим (*Level Reduction* - LR) алгоритмом [73, 74][3]. Улаз алгоритма је $(v,k,t)-$покривање $\mathcal{C}$ и вредност параметра $L \in \left\{0,1,\ldots,\binom{k}{t}-1\right\}$. Излаз је ново, ако је могуће редуковано $(v,k,t)-$покривање.

Алгоритам 3 - LR алгоритам

---

1. За сваки блок A датог покривања одредити вредност $F(A)$.
2. Избацити из покривања блокове A за које важи $F(A) \leqslant L$.
3. Одредити $\mathcal{T}$: скуп свих t-подскупова који нису покривени преосталим блоковима.
4. Ако је $\mathcal{T} \neq \emptyset$, похлепним лекс алгоритмом покрити t-подскупове из $\mathcal{T}$ (додати нове блокове у покривање).

Основна карактеристика LR алгоритма је специфичан избор блокова који ће бити избачени из покривања. У кораку 2. се избацују блокови

[3] У [74], скраћеница LR је коришћена у контексту општијег LNS алгоритма.

A са особином $F(A) \leqslant L$, тј. блокови који самостално покривају највише L t-подскупова. За $L = 0$, LR редукција је еквивалентна описаној редукцији редундантних блокова. За $L = 1$, из покривања се избацују блокови који самостално покривају највише један t-подскуп, за $L = 2$ избацују се блокови који самостално покривају највише два t-подскупа, итд. Као у случају редукције редундантних блокова, сви блокови могу бити избачени одједном или сукцесивно, уз ажурирање вредности $F(A)$ након сваког избацивања.

Када је $L < L_{min} = \min\limits_{A \in \mathcal{C}} F(A)$, ниједан блок неће бити избачен из покривања, тј. алгоритам неће произвести никакво дејство на улазно покривање. Са повећањем вредности L повећава се (тачније, не смањује) број избачених блокова, чиме се повећава могућност редукције полазног покривања. Са друге стране, број избачених блокова не би требало да буде превелик. Под претпоставком да је број блокова, потребних за покривање неких t-подскупова, пропорционалан броју t-подскупова које покривамо, пожељно је да просечан број непокривених t-подскупова по једном избаченом блоку буде што мањи, тј. да је вредност L што мања.[4] Такође, похлепни алгоритам у кораку 4. ће бити ефективнији и ефикаснији ако број избачених блокова није превелик (у односу на број блокова полазног покривања). У сваком случају, може се очекивати да ће LR алгоритам дати најбоље резултате за мале вредности параметра L, тј. за $L = 0, 1, 2, \ldots$ $(L_{min}, L_{min} + 1, L_{min} + 2, \ldots)$.

За покривање непокривених t-подскупова се користи похлепни лекс алгоритам зато што, у просеку, даје боље резултате од других похлепних алгоритама. Наравно, уместо похлепног лекс алгоритма се могу користити друге (хеуристичке) методе. Могуће су и друге модификације LR алгоритма. На пример, поред поменуте могућности сукцесивног избацивања блокова, могуће је унапред задати број или проценат блокова који ће бити избачени из покривања.

[4] У општем случају, број непокривених t-подскупова није једнак $\sum F(A)$ (сума по свим избаченим блоковима A), већ је увећан за број непокривених t-подскупова који су били покривени са два или више избачених блокова.

Практичну вредност предложеног LR алгоритма ћемо видети у наредним поглављима, његовом имплементацијом у другим, сложенијим хеуристикама.

3.3 Метода великих околина

Претходно описани LR алгоритам смо најпре имплементирали у једноставни алгоритам за локално претраживање, узастопном применом LR процедуре. Узастопна примена LR процедуре, све док се не задовољи одређени критеријум заустављања, у суштини представља методу великих околина (*Large Neighbourhood Search* - LNS). LNS је поступак узастопног уклањања дела решења и његовог обнављања (*destroying and repairing the solution*) у циљу побољшања актуелног решења (видети [80, 84, 89]).[5] У нашем LNS алгоритму [74], узастопна примена LR процедуре је поступак узастопног избацивања и додавања блокова у покривање, са циљем редуковања броја блокова актуелног покривања.

У LNS-у, околина је дефинисана имплицитно, помоћу неке једноставније хеуристике (претрага великих околина се врши хеуристички). У нашем случају, простор решења је скуп свих $(v, k, t)-$ покривања, а околина се може дефинисати заменом одређеног броја блокова новим блоковима.[6] Величина овако дефинисане околине може да буде релативно велика, а њено претраживање временски захтевно. Због тога се локална претрага може редуковати на она решења која "са већом вероватноћом" представљају боља решења. У нашем LNS алгоритму, то се постиже LR процедуром. Другим речима, околина је дефинисана имплицитно, помоћу LR процедуре.

На Слици 3.2 је дат псеудо-код предложеног LNS алгоритма. Као и код LR алгоритма, улаз је $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}$ и вредност параметра L. Излаз је ново, ако је могуће редуковано $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}^*$. Детаљнији псеудо-код се може наћи у [74].

[5] LNS се незнатно разликује од итеративног похлепног алгоритма [48, 85], а може се посматрати и као специјални случај методе променљивих околина [65, 66].

[6] Број додатих блокова не мора бити једнак броју избачених блокова, али мора бити довољан за добијање допустивог решења, тј. $(v, k, t)-$покривања.

/* Иницијализација */
1: Изабрати вредност параметра L и почетно $(v,k,t)-$покривање $\mathcal{C}$;
2: $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}$;
/* LR процедура */
3: **repeat**
4: За сваки блок A покривања $\mathcal{C}$ одредити вредност $F(A)$;
5: Избацити из покривања $\mathcal{C}$ блокове A за које важи $F(A) \leqslant L$;
6: Одредити $\mathcal{T}$: скуп свих t-подскупова који нису покривени преосталим блоковима из $\mathcal{C}$;
7: **if** $\mathcal{T} \neq \emptyset$ **then**
8: Похлепним лекс алгоритмом покрити t-подскупове из $\mathcal{T}$ и додати нове блокове у покривање $\mathcal{C}$;
9: **if** $|\mathcal{C}| < |\mathcal{C}^*|$ **then**
10: $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}$;
11: **until** Критеријум заустављања

Слика 3.2: Псеудо-код LNS алгоритма

Кораци 4–8 представљају кораке LR алгоритма, док се у кораку 10 чува најбоље решење (редуковано покривање), ако је такво решење нађено. У нашој имплементацији алгоритма, у кораку 5, сви блокови A са својством $F(A) \leqslant L$ се избацују одједном (а не сукцесивно, уз ажурирање вредности $F(A)$).

У општем случају, LNS алгоритам допушта кретање од бољег ка лошијем решењу (*non-improving moves*), када LR не налази редуковано $(v,k,t)-$покривање. Дакле, претраживање се наставља и када се налазимо у локалном минимуму. С обзиром на велики број временски захтевних инстанци, у нашој имплементацији LNS алгоритма допуштена су само кретање ка бољем решењу, а критеријум заустављања је да LR не редукује актуелно покривање ($|\mathcal{C}| \geqslant |\mathcal{C}^*|$).

LNS алгоритам се може применити на произвољно $(v,k,t)-$покривање (почетно решење). Резултат примене алгоритма, поред полазног покривања, зависи и од вредности параметра L. У нашој имплементацији је најчешће $L \leqslant 3$, а полазна покривања су сва претходно добијена покривања, као и добра покривања[7] са сајта [30].

[7] Добра покривања (*good overings*) је уобичајан назив за покривања која су релативно блиска минималним (оптималним) покривањима.

Нумерички резултати

Сва добијена редукована покривања, укључујући њихове величине (горње границе за $C(v,k,t)$) и времена извршавања, се налазе на сајту *http://www.math.fon.bg.ac.rs/covering*. Овде ћемо дати одређене податке о добијеним (редукованим) покривањима. Сва израчунавања су вршена на Intel(R) Core(TM)2 Duo E8400 CPU 3.00 GHz рачунару са 4 GB RAM меморије, под Linux оперативним системом.

LNS алгоритам је најпре примењен на претходно добијена похлепна и нова похлепна $(v,k,t)-$покривања, за $v > k > t \geqslant 2$, $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$ и $t \leqslant 8$. Око 20% ових покривања је једнако (у смислу величине) са најбољим познатим покривањима, па је могућност редукције таквих покривања веома мала. Сва покривања су тестирана за $L \in \{0,1,2,3\}$.

Као што је раније поменуто, извршавање алгоритма се зауставља када није добијено побољшање ($|\mathcal{C}| \geqslant |\mathcal{C}^*|$) или после одређеног броја итерација, за временски захтевне инстанце. Прецизније, за $L = 2$, извршавање се зауставља након 15 итерација за $(29-30,9,8)-$покривања и након 10 итерација за $(31-32,9,8)-$покривања. За $L = 3$, извршавање алгоритма се зауставља након 15 итерација за $(31-32,8,7)$, $(28,9,8)$ и $(32,10,8)-$покривања, након 10 итерација за $(29-30,9,8)-$покривања и након 5 итерација за $(31-32,9,8)-$покривања.

С обзиром да су резултати похлепног алгоритма, као и већине других познатих конструкција (поглавље 1.3.2), дати у [31], резултате LNS алгоритма ћемо поредити са резултатима из [31]. Наравно, добијена покривања ћемо поредити и са најбољим познатим покривањима из [22, 30, 31, 77, 78]. У Табели 3.3 су дати подаци о броју редукованих покривања, као и њихово поређење са покривањима из [31] и најбољим познатим покривањима. Подаци се односе на 1631 инстацу.

У Табели 3.4 је дат списак редукованих покривања која су једнака или боља од најбољих познатих покривања. Величине бољих покривања су наглашене (подебљане). У табели су приказана само најбоља редукована покривања добијена са различитим вредностима параметра L. На пример, сва четири редукована похлепна лекс $(32,7,6)-$покривања су

Табела 3.3: Резултати примене LNS-а на (нова) похлепна покривања

Примена LNS-а на:	Похлепна лекс покривања				Похлепна колекс покривања				Нова похлепна лекс покрив.				Нова похлепна колекс покрив.			
$L =$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Укупан број редукованих покривања	165	228	315	363	168	226	315	384	163	236	349	445	171	252	358	457
Број редукованих покривања једнаких са покрив. из [31]	10	10	13	19	11	15	16	22	9	9	17	22	9	11	16	23
Број редукованих покривања бољих од покрив. из [31]	44	70	118	137	33	51	102	134	25	36	90	130	25	37	87	114
Број редукованих покривања једнаких са најбољим	10	10	9	11	11	13	13	13	7	7	9	11	9	10	11	12
Број редукованих покривања бољих од до сада најбољих	11	12	13	14	9	11	12	14	9	10	12	14	8	9	12	13

Табела 3.4: Редукована (нова) похлепна покривања која су једнака или боља од најбољих познатих покривања

Редукована похлепна лекс покривања				Редукована похлепна колекс покривања				Редукована нова пох. лекс покривања				Редукована нова пох. колекс покривања			
v	k	t	величина	v	k	t	величина	v	k	t	величина	v	k	t	величина
11	5	2	7^3	10	4	2	9^1	11	5	2	7^3	10	4	2	9^1
12	5	2	9^0	11	5	2	7^3	12	5	2	9^2	11	5	2	7^0
20	9	2	7^0	12	5	2	9^0	15	9	2	4^0	13	4	2	13^0
22	7	2	13^0	13	4	2	13^0	18	11	2	4^0	14	4	2	18^3
24	11	2	7^0	20	9	2	7^0	19	6	2	15^2	14	5	2	12^3
27	12	2	7^0	24	11	2	7^0	21	13	2	4^0	16	7	2	8^0
28	13	2	7^0	27	12	2	7^0	24	15	2	4^0	17	4	2	26^2
30	14	2	7^0	28	13	2	7^0	25	15	2	4^0	20	9	2	7^0
32	15	2	7^0	30	14	2	7^0	8	5	3	8^0	23	10	2	8^0
8	5	3	8^0	32	15	2	7^0	11	6	3	11^3	27	12	2	7^0
20	14	3	6^0	8	5	3	8^0	20	14	3	6^0	30	13	2	8^0
31	7	6	$\mathbf{125153}^3$	13	8	3	10^1	10	7	5	20^3	8	5	3	8^2
32	7	6	$\mathbf{153580}^3$	15	7	3	15^0	31	7	6	$\mathbf{125218}^3$	15	7	3	15^0
12	9	7	40^3	20	14	3	6^0	32	7	6	$\mathbf{153472}^3$	9	5	4	30^0
29	8	7	$\mathbf{250828}^3$	10	6	4	20^2	28	8	7	$\mathbf{190917}^3$	10	7	5	20^3
30	8	7	$\mathbf{323980}^3$	31	7	6	$\mathbf{125153}^3$	29	8	7	$\mathbf{251859}^3$	31	7	6	$\mathbf{125236}^3$
31	8	7	$\mathbf{418459}^3$	32	7	6	$\mathbf{153580}^3$	30	8	7	$\mathbf{324497}^3$	32	7	6	$\mathbf{153250}^3$
32	8	7	$\mathbf{506277}^3$	29	8	7	$\mathbf{250828}^3$	31	8	7	$\mathbf{418476}^3$	29	8	7	$\mathbf{251206}^3$
29	9	8	$\mathbf{629331}^3$	30	8	7	$\mathbf{323980}^3$	32	8	7	$\mathbf{506487}^3$	30	8	7	$\mathbf{325972}^3$
30	9	8	$\mathbf{861598}^3$	31	8	7	$\mathbf{418459}^3$	29	9	8	$\mathbf{628984}^3$	31	8	7	$\mathbf{418552}^3$
30	10	8	$\mathbf{260998}^3$	32	8	7	$\mathbf{506277}^3$	30	9	8	$\mathbf{861909}^3$	32	8	7	$\mathbf{506530}^3$
31	9	8	$\mathbf{1158126}^3$	29	9	8	$\mathbf{629331}^3$	30	10	8	$\mathbf{260895}^3$	29	9	8	$\mathbf{629132}^3$
31	10	8	$\mathbf{350408}^3$	30	9	8	$\mathbf{861598}^3$	31	9	8	$\mathbf{1158289}^3$	30	9	8	$\mathbf{861741}^3$
32	9	8	$\mathbf{1512328}^3$	30	10	8	$\mathbf{260896}^3$	31	10	8	$\mathbf{350561}^3$	30	10	8	$\mathbf{260784}^3$
32	10	8	$\mathbf{465755}^3$	31	9	8	$\mathbf{1158126}^3$	32	9	8	$\mathbf{1512207}^3$	31	9	8	$\mathbf{1157984}^3$
32	11	8	$\mathbf{164691}^3$	31	10	8	$\mathbf{350432}^3$	32	10	8	$\mathbf{465773}^3$	31	10	8	$\mathbf{350211}^3$
				31	12	8	$\mathbf{50433}^3$					32	9	8	$\mathbf{1512219}^3$
				32	9	8	$\mathbf{1512328}^3$					32	10	8	$\mathbf{465628}^3$
				32	10	8	$\mathbf{465627}^3$								

боља од најбољег познатог покривања: 154076 блокова за $L = 0$, 153873 блока за $L = 1$, 153609 блокова за $L = 2$ и 153580 блокова за $L = 3$.

Величина најбољег од ових покривања (153580) је приказана у Табели 3.4. Вредност параметра L, за коју је добијено дато покривање, је приказана у експоненту. У случају више таквих вредности L, у табели је приказана мања вредност.

Из Табела 3.3 и 3.4 се може видети да су резултати примене LNS алгоритма слични за сва четири типа покривања[8] и (у просеку) сразмерни квалитету улазних покривања. Број редукованих покривања је приближно једнак, с тим што је, за $L = 2$ и за $L = 3$, нешто већи за нова похлепна покривања (Табела 3.3). Такође, приближно су једнаке вредности параметара v, k и t за које се добијају добра $(v, k, t)-$покривања (Табела 3.4). На пример, сва редукована похлепна и нова похлепна $(29 - 32, 9, 8)-$покривања су боља од најбољих познатих покривања.

Из претходних табела се може видети да са повећањем вредности L расте број и квалитет редукованих покривања, па су најбољи резултати добијени за $L = 3$ (као у горњем примеру $(32, 7, 6)-$покривања). Могуће је да се, за одређено $(v, k, t)-$покривање, најбоље редуковано покривање добија за неко $L > 3$. Из разлога које смо поменули у поглављу 3.2, ми смо примену LNS алгоритма ипак ограничили на вредности $L \leqslant 3$.

LNS алгоритам је такође примењен на покривања добијена простом конструкцијом која је описана у Леми 1.3.3: из блокова датог $(v, k, t)-$покривања се избацује елемент који се појављује у најмање блокова и сви преостали блокови. На тај начин се добија $(v - 1, k - 1, t - 1)-$покривање, за које ћемо рећи да је ПК покривање. Описана проста конструкција је примењена на похлепна и нова похлепна покривања, за $v > k > t \geqslant 3$, $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$ и $t \leqslant 8$. На тај начин су добијена ПК похлепна и ПК нова похлепна покривања, за $v > k > t \geqslant 2$, $v \leqslant 31$, $k \leqslant 15$ и $t \leqslant 7$. На добијена ПК покривања је примењен LNS алгоритам за $L \in \{0, 1, 2, 3\}$. Извршавање алгоритма се зауставља када је $|\mathcal{C}| \geqslant |\mathcal{C}^*|$, тј. након 15 итерација за $(31, 8, 7)-$покривање и $L = 3$.

У Табели 3.5 су дати подаци о броју редукованих ПК покривања, као и њихово поређење са покривањима из [31] и најбољим познатим покривањима. Подаци се односе на 1316 инстаци. У Табели 3.6 је дат

[8] На основу Теореме 3.1.2, похлепна лекс и колекс $(v, k, k - 1)-$покривања су једнака.

списак редукованих покривања која су једнака или боља од најбољих познатих покривања. Величине бољих покривања су наглашене.

Табела 3.5: Резултати примене LNS-а на ПК (нова) похлепна покривања

Примена LNS-а на:	ПК похлепна лекс покривања				ПК похлепна колекс покрив.				ПК нова похлеп. лекс покривања				ПК нова похлеп. колекс покрив.			
L_1	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Укупан број редукованих покривања	209	562	753	840	199	512	746	846	240	577	776	866	303	601	794	871
Број редукованих покривања једнаких са покрив. из [31]	11	15	21	23	8	10	18	20	5	7	10	17	8	12	15	17
Број редукованих покривања бољих од покрив. из [31]	4	7	27	35	4	9	29	36	4	7	26	35	3	8	30	38
Број редукованих покривања једнаких са најбољим	11	15	20	23	8	10	17	19	5	7	10	16	8	12	15	17
Број редукованих покривања бољих од до сада најбољих	2	3	3	5	2	3	3	5	2	3	3	5	1	3	3	5

Табела 3.6: Редукована ПК (нова) похлепна покривања која су једнака или боља од најбољих познатих покривања

Редукована ПК похлепна лекс покрив.				Редукована ПК пох. колекс покрив.				Редукована ПК нова похлепна лекс покрив.				Редукована ПК нова пох. колекс покрив.			
v	k	t	величина	v	k	t	величина	v	k	t	величина	v	k	t	величина
8	5	2	4^{1}	8	5	2	4^{1}	8	5	2	4^{1}	8	5	2	4^{1}
9	4	2	8^{1}	9	5	2	5^{2}	9	4	2	8^{2}	9	5	2	5^{2}
9	5	2	5^{2}	10	4	2	9^{2}	10	3	2	17^{1}	10	4	2	9^{2}
12	7	2	5^{0}	10	5	2	6^{2}	10	5	2	6^{2}	13	9	2	3^{0}
13	4	2	13^{0}	12	5	2	9^{3}	13	4	2	13^{0}	14	5	2	12^{3}
14	4	2	18^{1}	12	7	2	5^{2}	14	5	2	12^{2}	15	7	2	7^{2}
14	7	2	6^{0}	14	4	2	18^{2}	14	6	2	7^{2}	16	11	2	3^{0}
15	6	2	10^{3}	14	5	2	12^{3}	15	6	2	10^{3}	17	12	2	3^{0}
16	7	2	8^{3}	14	9	2	4^{0}	17	4	2	26^{3}	19	8	2	9^{2}
16	11	2	3^{0}	16	11	2	3^{0}	21	14	2	3^{0}	20	14	2	3^{0}
17	4	2	26^{2}	18	12	2	3^{0}	25	12	2	7^{0}	21	15	2	3^{0}
18	12	2	3^{0}	20	14	2	3^{0}	7	4	3	12^{0}	23	11	2	7^{0}
20	14	2	3^{0}	21	14	2	3^{0}	11	8	3	5^{3}	31	15	2	7^{0}
21	14	2	3^{0}	23	5	2	28^{2}	13	8	3	10^{3}	11	8	3	5^{3}
9	5	3	12^{2}	29	14	2	7^{0}	15	11	3	5^{3}	16	4	3	140^{1}
11	8	3	5^{3}	11	8	3	5^{3}	16	4	3	140^{3}	17	13	3	4^{0}
13	8	3	10^{3}	19	14	3	5^{3}	9	5	4	30^{2}	9	5	4	30^{1}
14	6	3	25^{0}	9	5	4	30^{1}	9	6	4	12^{3}	9	6	4	12^{1}
15	11	3	5^{2}	9	6	4	12^{2}	24	8	5	759^{0}	15	7	4	57^{3}
9	5	4	30^{1}	14	11	5	10^{0}	31	7	6	$\mathbf{124469}^{3}$	31	7	6	$\mathbf{124397}^{3}$
9	6	4	12^{3}	11	8	6	29^{3}	28	8	7	$\mathbf{186685}^{3}$	28	8	7	$\mathbf{187674}^{3}$
14	11	5	10^{0}	31	7	6	$\mathbf{124505}^{3}$	29	8	7	$\mathbf{253110}^{3}$	29	8	7	$\mathbf{253770}^{3}$
24	8	5	759^{0}	18	15	7	14^{0}	30	8	7	$\mathbf{325750}^{3}$	30	8	7	$\mathbf{326557}^{3}$
11	8	6	29^{2}	28	8	7	$\mathbf{187253}^{3}$	31	8	7	$\mathbf{419490}^{3}$	31	8	7	$\mathbf{419419}^{3}$
31	7	6	$\mathbf{124505}^{3}$	29	8	7	$\mathbf{253285}^{3}$								
18	15	7	14^{0}	30	8	7	$\mathbf{326852}^{3}$								
28	8	7	$\mathbf{187253}^{3}$	31	8	7	$\mathbf{419428}^{3}$								
29	8	7	$\mathbf{253285}^{3}$												
30	8	7	$\mathbf{326852}^{3}$												
31	8	7	$\mathbf{419428}^{3}$												

Као и у случају (нових) похлепних покривања, из Табела 3.5 и 3.6 се може видети да су резултати примене LNS алгоритма на ПК (нова) похлепна покривања слични за сва четири типа покривања. У поређењу са бројем редукованих (нових) похлепних покривања, број редукованих ПК (нових) похлепних покривања је знатно већи (у процентима, 46.04% наспрам 17.61%). Ово је очекивано, с обзиром да су ПК покривања (у просеку) лошија од (нових) похлепних покривања, па је могућност њихове редукције већа. Такође, добијен је мањи број добрих $(v, k, t)-$покривања у односу на редукована (нова) похлепна покривања. На пример, добијено је по 5 редукованих ПК (нових) похлепних покривања наспрам 13 или 14 редукованих (нових) похлепних покривања, бољих од најбољих познатих покривања. Треба нагласити да су најбоља редукована (нова) похлепна покривања добијена за оне вредности параметара v, k и t за које ПК покривања нису тестирана (на пример, за $t = 8$).

На крају, LNS алгоритам је примењен на добра покривања са сајта [30], за $v > k > t \geqslant 2$, $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$, $t \leqslant 8$ и $L \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Како су скоро сва покривања из [30] уједно и најбоља позната покривања, добијено је само 9 редукованих покривања (Табела 3.7)[9]. Због могућих промена (ажурурања) покривања са сајта [30], у табели су дате и величине оригиналних покривања.

Табела 3.7: Редукована покривања из [30]

v	k	t	Величина покривања из [30]	Величина редукованог покривања
28	8	7	192505	192502^{1}
28	11	7	8895	$\mathbf{8894}^{2}$
32	12	7	12689	12688^{4}
28	12	8	19986	$\mathbf{19975}^{4}$
29	12	8	27555	$\mathbf{27554}^{2}$
29	13	8	11815	$\mathbf{11813}^{4}$
31	11	8	123285	122707^{4}
31	12	8	51785	51414^{4}
32	12	8	69820	68861^{4}

[9] У време објављивања резултата LNS алгоритма [74], редуковано $(31, 11, 8)-$покривање је било боље од тада најбољих покривања.

Из претходних табела се може видети да је применом LNS алгоритма добијен велики број покривања која су боља од најбољих познатих покривања. Међутим, применом алгоритма на различита покривања, добра редукована покривања су углавном добијена за исте вредности параметара v, k и t. У Табели 3.8 је сумирано свих 20 нових горњих граница вредности $C(v,k,t)$, добијених применом LNS алгоритма. Од свих редукованих $(v,k,t)-$покривања која су претходно наведена као боља од најбољих познатих покривања, у Табели 3.8 су наведена само најбоља од тих $(v,k,t)-$покривања.

Табела 3.8: Нове горње границе вредности $C(v,k,t)$ добијене применом LNS алгоритма

v	k	t	Нова горња граница	Метод конструкције LNS алгоритам примењен на
31	7	6	**124397**	ПК ново похлепно колекс пок.
32	7	6	**153250**	Ново похлепно колекс пок.
28	8	7	**186685**	ПК ново похлепно лекс пок.
28	11	7	**8894**	Покривање из [30]
29	8	7	**250828**	Похлепно лекс (колекс) пок.
30	8	7	**323980**	Похлепно лекс (колекс) пок.
31	8	7	**418459**	Похлепно лекс (колекс) пок.
32	8	7	**506277**	Похлепно лекс (колекс) пок.
28	12	8	**19975**	Покривање из [30]
29	9	8	**628984**	Ново похлепно лекс пок.
29	12	8	**27554**	Покривање из [30]
29	13	8	**11813**	Покривање из [30]
30	9	8	**861598**	Похлепно лекс (колекс) пок.
30	10	8	**260784**	Ново похлепно колекс пок.
31	9	8	**1157984**	Ново похлепно колекс пок.
31	10	8	**350211**	Ново похлепно колекс пок.
31	12	8	**50433**	Похлепно колекс пок.
32	9	8	**1512207**	Ново похлепно лекс пок.
32	10	8	**465627**	Похлепно колекс пок.
32	11	8	**164691**	Похлепно лекс пок.

Просечно време добијања редукованог покривања је 1854.325 секунди. За $L = 3$, када су добијена најбоља покривања, просечно време износи 3354.052 секунди.

3.4 Метода промењљивог спуста

Метода промењљивих околина (*Variable Neighborhood Search* - VNS) је метахеуристика, предложена у [65], која је заснована на једноставној и ефективној идеји промена околина у оквиру алгоритма за локално претраживање. Промена околина се врши систематски, како би се избегла конвергенција ка локалном минимуму. Више речи о општој методи промењљивих околина биће у поглављу 3.5. Варијанта VNS-а, у којој се претраживање околина врши на детерминистички начин, назива се метода промењљивог спуста (*Variable Neighborhood Descent* - VND). VND метода се заснива на чињеници да локални минимум у једној околини простора решења није обавезно локални минимум у некој другој околини. Дакле, ако је x^* најбоље решење у околини $N_1(x^*)$, могуће је да постоји боље решење у околини $N_2(x^*)$. Ако је x^* најбоље решење и у околини $N_2(x^*)$, могуће је да постоји боље решење у околини $N_3(x^*)$, итд. На Слици 3.3 је дат псеудо-код VND алгоритма.

/* Иницијализација */
Изабрати k_{max}, скуп околина N_k $(k = 1, \ldots, k_{max})$ и почетно решење x^*;
$k \leftarrow 1$;
/* Претраживање околина */
repeat
    Одредити најбоље решење x' у околини $N_k(x^*)$;
    if $f(x') < f(x^*)$ **then**
        $x^* \leftarrow x'$; $k \leftarrow 1$;
    else
        $k \leftarrow k + 1$;
until $k > k_{max}$

Слика 3.3: Псеудо-код VND алгоритма

Најпре се бира вредност k_{max}, околине $N_1, \ldots, N_{k_{max}}$ и почетно решење x^* из простора решења. Почетно решење се може добити на случајан начин или применом неке једноставније хеуристике. Локалну претрагу почињемо од околине $N_1(x^*)$. Ако је пронађено боље решење $x' \in N_1(x^*)$, оно се проглашава за најбоље $(x^* \leftarrow x')$ и поново се врши претрага околине $N_1(x^*)$. Ако није пронађено боље решење у $N_1(x^*)$, наставља се са претрагом околине $N_2(x^*)$. Ако је претрагом околине $N_k(x^*)$ ($k \in \{2, \ldots, k_{max}\}$) пронађено боље решење x', оно се проглашава за најбоље и поступак креће из почетка ($k \leftarrow 1$). Ако није пронађено боље решење, наставља се са претрагом околине $N_{k+1}(x^*)$, итд. Поступак се наставља све док постоји боље решење x' у бар једној од околина $N_k(x^*)$ ($k \in \{1, \ldots, k_{max}\}$).

Као резултат VND алгоритма, добија се решење које је локални минимум у свим дефинисаним околинама N_k. С обзиром да је глобални минимум уједно и локални минимум у свим околинама, добрим одабиром околина N_k може се добити решење које је "блиско" оптималном.

За претраживање околина, уместо стратегије најбољег побољшања (*best improvement strategy*) у кораку 4, може се користити стратегија првог побољшања (*first improvement strategy*). Такође, околине се могу задати имплицитно, једноставнијим хеуристикама помоћу којих ће се вршити претраживање околина. Више о VND методи и њеним различитим варијантама се може наћи у [40–43].

Наш VND алгоритам за проблем минималног $(v, k, t)-$покривања [73], заснован је на хеуристичком претраживању околина. Као у случају LNS алгоритма, простор решења је скуп свих $(v, k, t)-$покривања, а различите околине су дефинисане имплицитно, помоћу LR процедуре за различите вредности параметра L. Прецизније, претрага околине N_1 се реализује применом LR процедуре за $L = L_{min}$, претрага околине N_2 се реализује применом LR процедуре за $L = L_{min} + 1$, итд.[10]

На Слици 3.4 је дат псеудо-код предложеног VND алгоритма. Улаз је $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}$ и вредност параметра l_{max} (уместо k_{max}). Излаз је ново, ако је могуће редуковано $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}^*$. Претрага околине се врши у кораку 5. Ако је применом LR процедуре (за $L = L_{min} + l$) нађено редуковано покривање $\mathcal{C}'$, оно се проглашава за најбоље ($\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}'$) и поступак креће из почетка ($l \leftarrow 0$ и рачуна се ново L_{min}). Ако није нађено редуковано покривање, наставља се са применом LR процедуре за нову вредност параметра L ($l \leftarrow l + 1$). Поступак се наставља све док

[10]Вредност L_{min} је дефинисана у поглављу 3.2.

се може наћи редуковано покривање $\mathcal{C}'$, за бар једну вредност параметра $L = L_{min} + l$ $(l = 0, 1, \ldots, l_{max} - 1)$, односно, све док је $l < l_{max}$.

/* Иницијализација */
1: Изабрати l_{max} и почетно $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}$;
2: $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}$; $l \leftarrow 0$;
3: $L_{min} \leftarrow \min\limits_{A \in \mathcal{C}^*} F(A)$;
/* Претраживање околина */
4: **repeat**
5: Применом LR процедуре на покривање $\mathcal{C}^*$, за $L = L_{min} + l$, добити ново покривање $\mathcal{C}'$;
6: **if** $|\mathcal{C}'| < |\mathcal{C}^*|$ **then**
7: $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}'$; $l \leftarrow 0$;
8: $L_{min} \leftarrow \min\limits_{A \in \mathcal{C}^*} F(A)$;
9: **else**
10: $l \leftarrow l + 1$;
11: **until** $l = l_{max}$

Слика 3.4: Псеудо-код VND алгоритма за проблем минималног $(v, k, t)-$покривања

За разлику од LNS алгоритма, где се LR процедура примењује за фиксирану вредност параметра L, код VND алгоритма се вредност параметра L мења, почевши од L_{min}. То је учињено како би добили различите LR процедуре (корак 5), тј. различите околине N_{l+1} $(l = 0, 1, \ldots, l_{max} - 1)$.

У оквиру LR процедуре, поступак избацивања блокова A са својством $F(A) \leqslant L$ се не мора обављати из почетка за свако ново L. У сваком кораку се могу избацивати само блокови A са својством $F(A) = L$. У том случају је неопходно меморисати скуп неизбачених блокова, због наредних итерација.

Као и LNS, VND алгоритам се може применити на произвољно $(v, k, t)-$покривање. С обзиром да су резултати примене LNS алгоритма слични за све типове похлепних покривања, VND алгоритам смо применили само на похлепна лекс и колекс покривања[11] и на добра покривања са сајта [30].

[11] У раду [73], VND алгоритма је примењен само на похлепна лекс покривања.

У нашој имплементацији VND алгоритма, блокови се избацују сукцесивно (а не одједном, као код LNS-а), уз ажурирање вредности $F(A)$. Редослед избацивања блокова је одређен редоследом блокова у полазном покривању (у случају похлепних покривања, редоследом избора блокова у покривање).

Нумерички резултати

Сва добијена редукована покривања, укључујући њихове величине (горње границе за $C(v,k,t)$) и времена извршавања, се налазе на сајту *http://www.math.fon.bg.ac.rs/vnd*. Овде ћемо дати одређене податке о добијеним покривањима.

VND алгоритам је најпре примењен на похлепна лекс и похлепна колекс $(v,k,t)-$покривања, за $v > k > t \geqslant 2$, $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$ и $t \leqslant 8$. Сва покривања су тестирана за $l_{max} = 4$.

У Табели 3.9 су дати подаци о броју редукованих покривања и њихово поређење са најбољим познатим покривањима [22, 30, 31, 77, 78]. Подаци се односе на 1631 инстацу.

Табела 3.9: Резултати примене VND-а на похлепна лекс и колекс покривања

Примена VND-а на:	Похлепна лекс покривања	Похлепна колекс покривања
Укупан број редукованих покривања	483	532
Број редукованих покривања једнаких са најбољим	13	27
Број редукованих покривања бољих од до сада најбољих	13	14

Из Табеле 3.9 се може видети да је добијен мало већи број редукованих похлепних колекс покривања од броја редукованих похлепних лекс покривања. Такође, већи је број редукованих похлепних колекс покривања која су једнака са најбољим познатим покривањима (27 наспрам 13 таквих редукованих похлепних лекс покривања).

У поређењу са LNS алгоритмом, примењеним на похлепна лекс и колекс покривања за $L = 3$, применом VND алгоритма је добијен већи број редукованих покривања (483 наспрам 363, односно 532 наспрам 384). Ово се може објаснити чињеницом да се у сваком кораку VND алгоритма избацује одређени број блокова (A, за које је $F(A) = L_{min} + l$), што код LNS алгоритма није случај (када је $L_{min} > 3$). Применом VND-a je добијен и већи број редукованих покривања која су једнака са најбољим познатим покривањима (27 наспрам 13, у случају редукованих похлепних колекс покривања), док је приближно једнак број редукованих покривања која су боља од најбољих познатих покривања.

Због великог броја редукованих похлепних колекс покривања која су једнака са најбољим познатим покривањима, у Табели 3.10 су наведена само редукована покривања, добијена применом VND алгоритма, која су боља од најбољих познатих покривања.

Табела 3.10: Редукована похлепна лекс и колекс покривања која су боља од најбољих познатих покривања

Редукована похлепна лекс покривања				Редукована похлепна колекс покривања			
v	k	t	величина	v	k	t	величина
32	7	6	**153595**	32	7	6	**153618**
29	8	7	**258059**	29	8	7	**257923**
30	8	7	**334601**	30	8	7	**334368**
31	8	7	**424057**	31	8	7	**423750**
32	8	7	**524633**	32	8	7	**509149**
29	9	8	**642773**	29	9	8	**642559**
30	9	8	**874977**	30	9	8	**874637**
30	10	8	**261340**	30	10	8	**261261**
31	9	8	**1167567**	30	13	8	**16848**
31	10	8	**350694**	31	9	8	**1167262**
32	9	8	**1523162**	31	10	8	**350859**
32	10	8	**465790**	31	12	8	**50423**
32	11	8	**164593**	32	9	8	**1523196**
				32	10	8	**466189**

Поређењем покривања у Табели 3.10, може се закључити да су редукована похлепна колекс покривања, у већини случајева, боља од одговарајућих редукованих похлепних лекс покривања. Такође, редукована похлепна лекс и колекс $(v, k, k-1)-$покривања се међусобно разликују (што није случај код LNS алгоритма). Разлог је то што је у нашој имплементацији VND алгоритма битан и редослед блокова у покривању, због сукцесивног избацивања блокова у оквиру LR процедуре.

Из претходних табела се може видети да су применом VND и LNS алгоритма, добра редукована покривања углавном добијена за исте вредности параметара v, k и t. Поредећи величине тих покривања, може се закључити да су покривања добијена применом LNS-а, у већини случајева, боља од покривања добијених применом VND-а. Поново је сукцесивно избацивање блокова (уз ажурирање вредности $F(A)$) један од разлога. Наиме, на тај начин се избацује мање блокова из покривања, па је и могућност редукције покривања мања (као у случају мањих вредности параметра L у LNS алгоритму). И поред тога, применом VND алгоритма на похлепна лекс и колекс покривања, побољшане су две горње границе вредности $C(v, k, t)$ (за $C(31, 12, 8)$ и $C(32, 11, 8)$) и добијена је једна нова горња граница (за $C(30, 13, 8)$).

VND алгоритам је примењен и на добра покривања са сајта [30], за $v > k > t \geqslant 2$, $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$, $t \leqslant 8$ и $l_{max} = 4$. Добијено је 8 редукованих покривања која су боља од одговарајућих најбољих познатих покривања (Табела 3.11).

Табела 3.11: Редукована покривања из [30]

v	k	t	Величина покривања из [30]	Величина редукованог покривања
28	11	7	8895	**8894**
29	8	7	259931	**257242**
30	8	7	337223	**336988**
31	8	7	430492	**424079**
28	12	8	19986	**19976**
29	12	8	27555	**27554**
29	13	8	11815	**11813**
30	13	8	16849	**16848**

Из Табеле 3.11 се може видети да нису добијена побољшања претходно добијених горњих граница вредности $C(v, k, t)$. Међу добијеним вредностима, три су једнаке са горњим границама добијеним применом LNS алгоритма (за $C(28, 11, 7)$, $C(29, 12, 8)$ и $C(29, 13, 8)$), док је једна једнака са горњом границом добијеном применом VND алгоритма на похлепна колекс покривања (за $C(30, 13, 8)$).

Просечно време добијања редукованог покривања применом VND алгоритма је 2319.545 секунди, што је за око 30% мање у односу на LNS алгоритам за $L = 3$.

3.5 Метода промењљивих околина

Метода промењљивих околина (VNS) је метахеуристика коју су 1997. године предложили Младеновић и Хансен[12] [65]. Као што је поменуто у поглављу 3.4, VNS метода је заснована на ефективној идеји промена околина у оквиру алгоритма за локално претраживање. Промена околина се врши систематски, како би се избегла конвергенција ка локалном минимуму.

VNS метода се заснива на следећим чињеницама [41, 42]:

(i) Локални минимум у једној околини простора решења није обавезно локални минимум у некој другој околини.

(ii) Глобални минимум је уједно и локални минимум у свим околинама.

(iii) За велики број проблема, локални минимуми (у једној или више околина) су релативно близу једни другима.

Из (i) следи да се конвергенција ка локалном минимуму у једној околини може избећи променом околине у простору решења. Из (ii) следи да се добрим одабиром околина може добити решење које је "блиско" оптималном. Из последње (емпиријске) чињенице следи да информације о локалном минимуму често садрже и информације о глобалном минимуму. Другим речима, у потрази за бољим решењем, треба се фокусирати на области које су блиске тренутно најбољим решењима.

[12] Nenad Mladenović and Pierre Hansen.

Претрага различитих околина се може вршити детерминистички (VND), стохастички (*Reduced* VNS - RVNS) или комбиновано, што представља основну варијанту VNS-а (*Basic* VNS - BVNS).

На Слици 3.5 је дат псеудо-код BVNS алгоритма.

/* Иницијализација */
1: Изабрати k_{max}, скуп околина N_k $(k = 1, \ldots, k_{max})$, почетно решење x^* и критеријум заустављања;
2: **repeat**
3:     $k \leftarrow 1$;
4:     **repeat**
        /* Размрдавање */
5:         Случајно генерисати x' из околине $N_k(x^*)$;
        /* Локално претраживање */
6:         Применом неке методе лакалног претраживања, одредити локални минимум x'' у околини x';
7:         **if** $f(x'') < f(x^*)$ **then**
8:             $x^* \leftarrow x''$; $k \leftarrow 1$;
9:         **else**
10:             $k \leftarrow k + 1$;
11:     **until** $k > k_{max}$
12: **until** критеријум заустављања

Слика 3.5: Псеудо-код BVNS алгоритма

Најпре се бира вредност k_{max}, околине $N_1, \ldots, N_{k_{max}}$, почетно решење x^* из простора решења и одређује се критеријум заустављања извршавања алгоритма. Околине $N_1, \ldots, N_{k_{max}}$ се најчешће бирају тако да је $|N_1(x)| < |N_2(x)| < \ldots < |N_{k_{max}}(x)|$. Почетно решење се бира на случајан начин или применом неке једноставније хеуристике.

У главној петљи алгоритма (линије $4 - 11$), најпре се случајно бира x' из околине $N_1(x^*)$, а затим се врши локално претраживање околине x' (x' је почетно решење). Ако је пронађено решење x'' боље од полазног x^*, оно се проглашава за најбоље ($x^* \leftarrow x''$) и поступак се понавља. Уколико x'' није боље од x^*, наставља се са случајним избором x' из околине $N_2(x^*)$. У k-том кораку, случајно се бира x' из околине $N_k(x^*)$, а затим се врши локално претраживање околине x'. Ако је пронађено решење x'' боље од актуелног x^*, оно се проглашава за најбоље ($x^* \leftarrow x''$) и поступак креће из почетка ($k \leftarrow 1$). Ако x'' није боље од x^*, увећава се вредност параметра k ($k \leftarrow k+1$). Ако је $k \leqslant k_{max}$, наставља се са случајним избором x' из околине $N_k(x^*)$, а уколико је $k > k_{max}$, поступак креће из почетка ($k \leftarrow 1$), све док се не задовољи критеријум заустављања. Критеријум заустављања може да буде достигнуто време извршавања, достигнут број итерација, достигнут број итерација између два побољшања итд.

Уобичајен назив за случајан избор решења $x' \in N_k(x^*)$ је размрдавање (*shaking*). Размрдавањем се спречава циклично претраживање околина. Уобичајен назив за варијанту VNS методе у којој је процедура локалног претраживања замењена са VND процедуром је општа метода променљивих околина (*General Variable Neighborhood Search* - GVNS). Више о VNS методи и њеним различитим варијантама се може наћи у [40–43, 64, 65].

У нашем GVNS алгоритму за проблем минималног $(v, k, t)-$покривања [75], процедура локалног претраживања је замењена са VND процедуром описаном у поглављу 3.4. У оквиру GVNS алгоритма, покривање добијено применом VND процедуре на покривање $\mathcal{C}$, за дату вредност параметра l_{max}, означено је са VND$(\mathcal{C}, l_{max})$. Простор решења је скуп свих $(v, k, t)-$покривања, а околине N_m ($m = 1, \ldots, m_{max}$)[13] су дефинисане на следећи начин: $\mathcal{C}' \in N_m(\mathcal{C})$ ако и само ако се покривање $\mathcal{C}'$ може добити од покривања $\mathcal{C}$, заменом највише $m\%$ (m процената) блокова покривања $\mathcal{C}$ новим блоковима. Дакле, бар $(100 - m)\%$ блокова покривања $\mathcal{C}$ су заједнички блокови ова два покривања.

На Слици 3.6 је дат псеудо-код предложеног GVNS алгоритма. Улаз је $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}$ и вредности параметара m_{max}, n_{max} и l_{max}. Излаз је ново, ако је могуће редуковано $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}^*$. За почетно најбоље решење се узима покривање добијено применом VND алгоритма на полазно покривање $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}^* \leftarrow$ VND$(\mathcal{C}, l_{max})$).[14] Критеријум заустављања је достигнути број (n_{max}) пролазака кроз главну петљу алгоритма (линије $6 - 14$) без побољшања покривања $\mathcal{C}^*$. Променљива n представља бројач таквих пролазака.

[13]Због параметра k, $(v, k, t)-$покривања, променљива k је замењена променљивом m.

[14]Ово одговара уобичајној иницијализацији $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}$, за полазно покривање $\mathcal{C}$ које је добијено применом VND процедуре.

/* Иницијализација */
Изабрати m_{max}, n_{max}, l_{max} и почетно $(v, k, t)-$покривање $\mathcal{C}$;
$\mathcal{C}^* \leftarrow \mathrm{VND}(\mathcal{C}, l_{max})$;
$n \leftarrow 0$;
repeat
    $m \leftarrow 1$;
    repeat
        /* Размрдавање */
        Случајно генерисати $\mathcal{C}' \in N_m(\mathcal{C}^*)$;
        /* VND процедура */
        $\mathcal{C}'' \leftarrow \mathrm{VND}(\mathcal{C}', l_{max})$;
        if $|\mathcal{C}''| < |\mathcal{C}^*|$ **then**
            $\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}''$;
            $m \leftarrow 1$; $n \leftarrow 0$;
        else
            $m \leftarrow m + 1$;
    until $m > m_{max}$
    $n \leftarrow n + 1$;
until $n = n_{max}$

Слика 3.6: Псеудо-код GVNS алгоритма за проблем минималног $(v, k, t)-$покривања

У главној петљи GVNS алгоритма најпре се случајно бира $\mathcal{C}' \in N_m(\mathcal{C}^*)$ (размрдавање), а затим се примењује VND процедура на добијено покривање ($\mathcal{C}'' \leftarrow \mathrm{VND}(\mathcal{C}', l_{max})$). Ако је покривање $\mathcal{C}''$ боље од покривања $\mathcal{C}^*$, оно се проглашава за најбоље ($\mathcal{C}^* \leftarrow \mathcal{C}''$) и поступак креће из почетка ($m \leftarrow 1$, $n \leftarrow 0$). У супротном, увећава се вредност променљиве m ($m \leftarrow m + 1$) и наставља се са случајним избором $\mathcal{C}' \in N_m(\mathcal{C}^*)$, све док је $m \leqslant m_{max}$. Ако је $m > m_{max}$, у главној петљи алгоритма није добијено побољшање, па се бројач n увећава ($n \leftarrow n + 1$). Поступак се наставља за $m = 1$, све док је $n < n_{max}$.

Случајно генерисање $\mathcal{C}' \in N_m(\mathcal{C}^*)$ се реализује тако што се из покривања $\mathcal{C}^*$ на случајан начин избаци $\left\lfloor \frac{m}{100} \cdot |\mathcal{C}^*| \right\rfloor$ блокова, а затим се преостали скуп блокова допуни до покривања $\mathcal{C}'$. Ако би се допуна до покривања вршила случајним избором блокова, добијено покривање $\mathcal{C}'$ би могло да буде исувише удаљено од добрих покривања. У нашој имплементацији GVNS алгоритма, допуна до покривања се врши као у претходним случајевима, похлепним лекс алгоритмом. Као у случају VND процедуре, поступак избацивања блокова се не мора обављати из почетка за свако ново m. У сваком кораку је могуће избацити само $\left\lfloor \frac{1}{100} \cdot |\mathcal{C}^*| \right\rfloor$ блокова[15], уз меморисање скупа неизбачених блокова.

Као и претходни алгоритми, предложени GVNS алгоритам се може применити на произвољна $(v, k, t)-$покривања. У нашем случају, GVNS је примењен на претходно добијена (нова) похлепна покривања и на покривања са сајта [30]. Сва покривања су тестирана за $m_{max} = n_{max} = 10$ и $l_{max} = 3$. Приметимо да је вредност параметра l_{max} смањена у односу на његову вредност ($l_{max} = 4$) при имплементацији VND алгоритма. То је учињено како би се локално претраживање учинило што ефикаснијим, а размрдавање што ефективнијим.

У Табели 3.12 су наведена само најбоља (до сада добијена) покривања, боља од најбољих познатих покривања и од покривања која су претходно добијена применом LNS и VND алгоритма.

Табела 3.12: Нове горње границе вредности $C(v, k, t)$ добијене применом GVNS алгоритма

v	k	t	Нова горња граница	Метод конструкције GVNS примењен на
32	7	6	**153099**	Похлепно лекс пок.
28	11	7	**8893**	Покривање из [30]
31	8	7	**414314**	Ново похлепно колекс пок.
32	8	7	**500614**	Похлепно лекс пок.
32	11	7	**25126**	Покривање из [30]
28	9	8	**469726**	Ново похлепно колекс пок.
29	9	8	**607236**	Ново похлепно лекс пок.
29	12	8	**27551**	Покривање из [30]
30	9	8	**851640**	Ново похлепно лекс пок.
31	9	8	**1142110**	Похлепно лекс пок.
32	9	8	**1498534**	Ново похлепно лекс пок.
32	10	8	**465360**	Похлепно колекс пок.

С обзиром да су у Табели 3.12 наведена само најбоља покривања, њихове величине представљају нове горње границе вредности $C(v, k, t)$.

[15] Како би размрдавање имало ефекта, у нашој имплементацији GVNS алгоритма се у сваком кораку избацују бар 2 блока.

Међу добијеним вредностима, две представљају побољшања најбољих познатих горњих граница (за $C(32, 11, 7)$ и $C(28, 9, 8)$), док преосталих десет представљају побољшања најбољих горњих граница које су претходно добијене применом LNS или VND алгоритма.

Применом LNS, VND и GVNS алгоритма, добра покривања су добијена за исте или сличне вредности параметара v, k и t, углавном за покривања са великим бројем блокова. Разлог је то што је у сва три алгоритма локално претраживање дефинисано имплицитно, помоћу LR процедуре која омогућава промену више блокова актуелног покривања. У другим хеуристикама за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања (симулирано каљење [76] и табу претраживање [22, 77, 78]), локално претраживање се врши променама само неколико елемената једног блока актуелног покривања.

Такође, друге хеуристике су ограничене избором параметара покривања: симулирано каљење је ограничено са $v \leqslant 13$ [76], а табу претраживање са $v \leqslant 20$ [22]. Хеуристике које су предложене у овом раду су имплементиране на $(v, k, t)-$покривања за $v \leqslant 32$, $k \leqslant 16$ и $t \leqslant 8$ (1631 инстанца, у односу на 168 инстанци за симулирано каљење и 156 за табу претраживање). Предложене хеуристике су и ефикасније од постојећих. Упоређујући најзахтевније инстанце, VND алгоритму је било потребно око 51 CPU сати за добијање $(32, 9, 8)-$покривања са 1523162 блока, док је табу алгоритам потрошио око 147 CPU сати за добијање $(17, 8, 4)-$покривања са 53 блока.

Применом LNS, VND и GVNS алгоритма добијене су 23 нове горње границе вредности $C(v, k, t)$. У Табели 3.13 су наведене до сада најбоље (старе) горње границе, нове горње границе и одговарајући алгоритам, тј. метод конструкције.

Табела 3.13: Нове горње границе вредности $C(v,k,t)$

v	k	t	Стара горња граница	Нова горња граница	Метод конструкције
31	7	6	126592	**124397**	**LNS**
32	7	6	154130	**153099**	**GVNS**
28	8	7	191372	**186685**	**LNS**
28	11	7	8895	**8893**	**GVNS**
29	8	7	259931	**250828**	**LNS**
30	8	7	337223	**323980**	**LNS**
31	8	7	430492	**414314**	**GVNS**
32	8	7	532248	**500614**	**GVNS**
32	11	7	25127	**25126**	**GVNS**
28	9	8	470340	**469726**	**GVNS**
28	12	8	19986	**19975**	**LNS**
29	9	8	650404	**607236**	**GVNS**
29	12	8	27555	**27551**	**GVNS**
29	13	8	11815	**11813**	**LNS, VND**
30	9	8	879517	**851640**	**GVNS**
30	10	8	262146	**260784**	**LNS**
30	13	8	16849	**16848**	**VND**
31	9	8	1174351	**1142110**	**GVNS**
31	10	8	351807	**350211**	**LNS**
31	12	8	50435	**50423**	**VND**
32	9	8	1530641	**1498534**	**GVNS**
32	10	8	467414	**465360**	**GVNS**
32	11	8	164722	**164593**	**VND**

Глава 4

Закључак

У овом раду је дато неколико нових конструкција $(v,k,t)-$покривања, са што је могуће мањим бројем блокова. Комбинаторном конструкцијом добијена су минимална $(v,3,2)-$покривања. Конструкцијом је дат полазни скуп блокова и пермутација p, помоћу које се од полазних добијају преостали блокови минималног $(v,3,2)-$покривања. Такође, развијене су три нове хеуристике за решавање проблема минималног $(v,k,t)-$покривања: LNS, VND и GVNS. У свим наведеним хеуристикама, локално претраживање је дефинисано помоћу LR процедуре, развијене специјално за овај проблем. Хеуристичким конструкцијама су добијене 23 нове горње границе вредности $C(v,k,t)$.

Најважнији научни доприноси овог рада могу се сумирати на следећи начин:

(*i*) Дата је нова комбинаторна конструкција минималних $(v,3,2)-$покривања. Конструкција представља уопштење Боузове и Сколемове конструкције Штајнерових система STS$(6n+3)$ и STS$(6n+1)$. Добијена конструкција уједно представља нови доказ познате једнакости

$$C(v,3,2) = \left\lceil \frac{v}{3} \left\lceil \frac{v-1}{2} \right\rceil \right\rceil.$$

(*ii*) Доказана је теорема о довољним условима за једнакост похлепних лекс и похлепних колекс покривања. Једнакост похлепних лекс и колекс $(v,k,k-1)-$покривања је омогућила да се за добијање најзахтевнијих $(v, k, t)-$покривања, са највећим бројем блокова, користи само један од ова два похлепна алгоритма.

(*iii*) Развијен је потпуно нови LR алгоритам за решавање проблема минималног (v, k, t)покривања. У сложенијим хеуристикама, дефинисана околина је релативно велика, а њено потпуно претраживање може да буде временски захтевно. Због тога се претраживање околине врши хеуристички, помоћу LR процедуре.

(*iv*) Развијен је софистицирани LNS алгоритам за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања. Његовом применом је добијено 20 покривања која су боља од најбољих познатих покривања.

(*v*) Развијен је VND алгоритам за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања. На основу добро осмишљеног система околина и пажљиво уклопљене LR процедуре, добијено је 19 покривања која су боља од најбољих познатих покривања.

(*vi*) GVNS алгоритам је конструисан обједињавањем претходно осмишљених LR и VND процедура у оквиру опште VNS методе за решавање проблема минималног $(v, k, t)-$покривања. Погодно изабран однос ширине претраге и брзе процедуре побољшавања текућих решења, допринео је добијању квалитетних решења. Добијено је 12 нових покривања која су боља од најбољих познатих покривања, као и од нових покривања која су добијена применом LNS и VND алгоритма.

Нова комбинаторна конструкција минималних $(v, 3, 2)-$покривања је презентована у самосталном раду који је прихваћен за публиковање Н. Николић [71]. Резултати везани за похлепни и LNS алгоритам су приказани у раду који је прихваћен за публиковање у међународном часопису са SCI листе Н. Николић, И. Грујичић, Н. Младеновић [74], док је VND алгоритам презентован у раду који је објављен у међународном часопису Н. Николић, И. Грујичић, Ђ. Дугошија [73]. Предложени GVNS алгоритам је презентован на међународној конференцији Н. Николић, Н. Младеновић, И. Грујичић, Д. Макајић-Николић [75], а одговарајући рад је у припреми за објављивање.

Могући правци даљих истраживања и унапређења добијених резултата су:

- Решавање неких отворених проблема. На пример, проблем егзистенције Штајнеровог система $S(6, k, v)$;
- Уопштавање конструкције минималних $(v, 3, 2)-$покривања на шири скуп покривања. На пример, на $(v, 4, 2)$ или $(v, 4, 3)-$покривања;
- Замена похлепног алгоритма неком другом процедуром покривања непокривених t-подскупа;
- Замена LR процедуре неком другом процедуром локалног претраживања;
- Модификација добијених хеуристика ради решавања општијих проблема. На пример, проблема t-$(v, k, \lambda)-$покривања и паковања.

Литература

[1] C. T. Abraham, S. P. Ghosh, and D. K. Ray-Chaudhuri, "File organization schemes based on finite geometries", *Information and Control* 12 (1968), pp. 143–163.

[2] I. Anderson, *Combinatorial Designs*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1990.

[3] I. Anderson, *Combinatorial Designs and Tournaments*, Oxford Univerisity Press, Oxford, 1997.

[4] I. Anderson, *Combinatorics of Finite Sets*, Dover Publications, New York, 2002.

[5] I. Anderson and I. Honkala, *A Short Course in Combinatorial Designs*, Internet Edition, 1997.

[6] J. A. Bate, P. C. Li, and G. H. J. van Rees, "Finally C(19,6,2)=15", *Congressus Numerantium* 157 (2002), pp. 95–102.

[7] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory, 2nd Edition*, Cambridge Univerisity Press, Cambridge, 1999.

[8] J. L. Blanchard, "A Construction for Steiner 3-Designs", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 71(1) (1995), pp. 60–66.

[9] R. C. Bose, "On the construction of balanced incomplete block designs", *Annals of Eugenics* 9 (1939), pp. 353–399.

[10] D. de Caen, "Extension of a theorem of Moon and Moser on complete subgraphs", *Ars Combinatoria* 16 (1983), pp. 5–10.

[11] D. de Caen, "The current status of Turán's problem on hypergraphs" in *Extremal Problems for Finite Sets*, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1994, pp. 187–197.

[12] D. de Caen, D. L. Kreher, and J. Wiseman, "On constructive upper bounds for the Turán numbers T(n,2r+1,2r)", *Congressus Numerantium* 65 (1988), pp. 277–280.

[13] Y. Caro and R. Yuster, "Covering graphs: The covering problem solved", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 83(2) (1998), pp. 273–282.

[14] S. Chowla and H. J. Ryser, "Combinatorial problems", *Canadian Journal of Mathematics* 2 (1950), pp. 93–99.

[15] C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (Editors), *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2007.

[16] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, and D. R. Stinson, "Quorum systems constructed from combinatorial designs", *Information and Computation* 169(2) (2001), pp. 160–173.

[17] C. J. Colbourn and R. A. Mathon (Editors), *Combinatorial Design Theory*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1987.

[18] C. Colbourn and A. Rosa, *Triple Systems*, Oxford Univerisity Press, Oxford, 1999.

[19] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, "Lexicographic codes: Error-correcting codes from game theory", *IEEE Transactions on Information Theory* 32(3) (1986), pp. 337–348.

[20] D. Cvetković, M. Čangalović, Đ. Dugošija, V. Kovačević-Vujčić, S. Simić, and J. Vuleta, *Kombinatorna optimizacija: Matematička teorija i algoritmi*, Društvo operacionih istraživača Jugoslavije, Beograd, 1996.

[21] D. Cvetković and S. Simić, *Kombinatorika: klasichna i moderna*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[22] C. Dai, B. Li, and M. Toulouse, "A Multilevel Cooperative Tabu Search Algorithm for the Covering Design Problem", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 68 (2009), pp. 33–65.

[23] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer, Berlin, 1968.

[24] A. Dharwadker, *A new proof of the four colour theorem*, `http://www.dharwadker.org`, 2000.

[25] J. H. Dinitz and D. R. Stinson (Editors), *Contemporary Design Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1992.

[26] Z. Dražić, "Modifikacija metode promenljivih okolina i njihove primene za rešavanje problema raspoređivanja prenosa datoteka", doktorska disertacija, Beograd, 2014.

[27] P. Erdős and J. Spencer, *Probabilistic Methods in Combinatorics*, Spencer Academic Press, New York, 1974.

[28] R. A. Fisher, "An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks", *Annals of Eugenics* 10 (1940), pp. 52–75.

[29] M. K. Fort and G. A. Hedlund, "Minimal coverings of pairs by triples", *Pacific Journal of Mathematics* 8(4) (1958), pp. 709–719.

[30] D. M. Gordon, *La Jolla Covering Repository*, `http://www.ccrwest.org/cover.html`.

[31] D. M. Gordon, G. Kuperberg, and O. Patashnik, "New constructions for covering designs", *Journal of Combinatorial Design* 3(4) (1995), pp. 269–284.

[32] D. M. Gordon, O. Patashnik, G. Kuperberg, and J. H. Spencer, "Asymptotically optimal covering designs", *Journal of Combinatorial Theory Series A* 75(2) (1996), pp. 270–280.

[33] D. M. Gordon and D. R. Stinson, "Coverings" in *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2007, pp. 365–373.

[34] J. Gorski, L. Paquete, and F. Pedrosa, "Greedy algorithms for a class of knapsack problems with binary weights", *Computers and Operations Research* 39(3) (2012), pp. 498–511.

[35] I. Grujičić, N. Nikolić, and N. Mladenović, "Algorithms for fast generating all combinations" (2015). (у припреми)

[36] M. Hall, *Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[37] H. Hanani, "On quadruple systems", *Canadian Journal of Mathematics* 12 (1960), pp. 145–157.

[38] H. Hanani, "The existence and construction of balanced incomplete block designs", *The Annals of Mathematical Statistics* 32 (1961), pp. 361–386.

[39] H. Hanani, "Balanced incomplete block designs and related designs", *Discrete Mathematics* 11 (1975), pp. 255–369.

[40] P. Hansen and N. Mladenović, "Variable neighborhood search: Principles and applications", *European Journal of Operational Research* 130 (2001), pp. 449–467.

[41] P. Hansen and N. Mladenović, "Variable neighborhood search" in *Handbook of metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 2003, pp. 145–184.

[42] P. Hansen, N. Mladenović, J. Brimberg, and J. A. M. Pérez, "Variable neighborhood search" in *Handbook of Metaheuristics*, Springer, New York, 2010, pp. 61–86.

[43] P. Hansen, N. Mladenović, and J. A. M. Pérez, "Variable neighborhood search: methods and applications", *Annals of Operations Research* 175(1) (2010), pp. 367–407.

[44] A. Hartman, W. H. Mills, and R. C. Mullin, "Covering triples by quadruples: An asymptotic solutions", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 41(1) (1986), pp. 117–138.

[45] J. D. Horton, R. C. Mullin, and R. G. Stanton, "Minimal coverings of pairs by quadruples", *Congressus Numerantium* 3 (1971), pp. 495–516.

[46] D. R. Hughes and F. C. Piper, *Projective Planes*, Springer, Berlin, 1973.

[47] D. R. Hughes and F. C. Piper, *Design Theory*, Cambridge Univerisity Press, Cambridge, 1985.

[48] L. W. Jacobs and M. J. Brusco, "A local search heuristic for large set-covering problems", *Naval Research Logistics* 42 (1995), pp. 1129–1140.

[49] J. G. Kalbfleisch and R. G. Stanton, "Maximal and minimal coverings of $(k-1)$-tuples by k-tuples", *Pacific journal of mathematics* 26 (1968), pp. 131–140.

[50] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 3*, Addison-Wesley, Stanford, 2005.

[51] C. W. H. Lam, L. H. Thiel, and S. Swiercz, "The nonexistence of finite projective planes of order 10", *Canadian Journal of Mathematics* 41 (1989), pp. 1117–1123.

[52] E. R. Lamken, W. H. Mills, R. C. Mullin, and S. A. Vanstone, "Coverings of pairs by quintuples", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 44(1) (1987), pp. 49–68.

[53] C. C. Linder and C. A. Rodger, *Design Theory: Second Edition*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2009.

[54] C. C. Lindner and A. Rosa, "Steiner quadruple systems - a survey", *Discrete Mathematics* 21 (1978), pp. 147–181.

[55] C. C. Linder and A. Rosa (Editors), *Topics on Steiner systems*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[56] F. Margot, "Small covering designs by branch-and-cut", *Mathematical Programming* 94(2-3) (2003), pp. 207–220.

[57] W. H. Mills, "On the covering of pairs by quadruples I", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 13 (1972), pp. 55–78.

[58] W. H. Mills, "On the covering of pairs by quadruples II", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 15 (1973), pp. 138–166.

[59] W. H. Mills, "On the covering of triples by quadruples", *Congressus Numerantium* 10 (1974), pp. 563–581.

[60] W. H. Mills, "Covering designs I: Coverings by a small number of subsets", *Ars Combinatoria* 8 (1979), pp. 199–315.

[61] W. H. Mills, "A covering of triples by quadruples", *Congressus Numerantium* 33 (1981), pp. 253–260.

[62] W. H. Mills and R. C. Mullin, "Covering pairs by quintuples: The case v congruent to 3 (mod 4)" *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 49(2) (1988), pp. 308–322.

[63] W. H. Mills and R. C. Mullin, "Coverings and packings" in *Contemporary Design Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1992, pp. 371–399.

[64] N. Mladenović, M. Dražić, V. Kovačević-Vujčić, and M. Čangalović, "General variable neighborhood search for the continuous optimization", *European Journal of Operational Research* 191(3) (2008), pp. 753–770.

[65] N. Mladenović and P. Hansen, "Variable neighborhood search", *Computers and Operations Research* 24(11) (1997), pp. 1097–1100.

[66] N. Mladenović, R. Todosijević, and D. Urošević, "An Efficient General Variable Neighborhood Search For Large Travelling Salesman Problem With Time Windows", *Yugoslav Journal of Operations Research* 23(1) (2013), pp. 19–30.

[67] H. Mohacsy and D. K. Ray-Chaudhuri, "A construction for infinite families of Steiner 3-designs", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 94(1) (2001), pp. 127–141.

[68] M. Morley and G. H. J. van Rees, "Lottery schemes and covers", *Utilitas Mathematica* 37 (1990), pp. 159–165.

[69] R. C. Mullin, "On covering pairs by quintuples: The cases $v \equiv 3$ or 11 modulo 20", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 2 (1987), pp. 133–146.

[70] R. C. Mullin, "On the determination of the covering numbers $C(2,5,v)$", *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 4 (1988), pp. 123–132.

[71] N. Nikolić, "New construction of minimal $(v,3,2)-$coverings", *Yugoslav Journal of Operations Research* (2015). (прихваћен)

[72] N. Nikolić, M. Čangalović, and I. Grujičić, "Symmetry properties of resolving sets and metric bases in hypercubes", *Optimization Letters*, DOI: 10.1007/s11590-014-0790-2 (2014).

[73] N. Nikolić, I. Grujičić, and Đ. Dugošija, "Variable neighborhood descent heuristic for covering design problem", *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 39 (2012), pp. 193–200.

[74] N. Nikolić, I. Grujičić, and N. Mladenović, "A large neighbourhood search heuristic for covering designs", *IMA Journal of Management Mathematics*, DOI: 10.1093/imaman/dpu003 (2014).

[75] N. Nikolić, N. Mladenović, I. Grujičić, and D. Makajić-Nikolić, "Variable neighborhood search heuristic for covering design problem", *3rd International Conference on Variable Neighborhood Search, Djerba (Tunisia)* (2014).

[76] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, "Upper bounds for covering designs by simulated annealing", *Congressus Numerantium* 96 (1993), pp. 93–111.

[77] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, "New coverings of t-sets with $(t+1)$-sets", *Journal of Combinatorial Designs* 7(3) (1999), pp. 217–226.

[78] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård, "Coverings of t-sets with $(t+2)$-sets", *Discrete Applied Mathematics* 95 (1999), pp. 425–437.

[79] D. Pei, *Authentication Codes and Combinatorial Designs*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2006.

[80] D. Pisinger and S. Ropke, "Large Neighborhood Search", *International Series in Operations Research & Management Science* 146 (2010), pp. 399–419.

[81] D. K. Ray-Chaudhuri, "Combinatorial information retrieval systems for files", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 16(5) (1968), pp. 973–992.

[82] C. Reid and A. Rosa, "Steiner systems S(2,4,v) - a survey", *The Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Surveys* 18 (2010), pp. 1–34.

[83] V. Rödl, "On a packing and covering problem", *European Journal of Combinatorics* 5(1) (1985), pp. 69–78.

[84] A. Roli, S. Benedettini, T. Stützle, and C. Blum, "Large neighbourhood search algorithms for the founder sequence reconstruction problem", *Computers and Operations Research* 39(2) (2012), pp. 213–224.

[85] R. Ruiz and T. Stützle, "A simple and effective iterated greedy algorithm for the permutation flowshop scheduling problem", *European Journal of Operational Research* 177(3) (2007), pp. 2033–2049.

[86] M. Ruszinkó, "Turán systems" in *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2007, pp. 649–651.

[87] H. J. Ryser, "A note on a combinatorial problem", *Proceedings of the American Mathematical Society* 1 (1950), pp. 422–424.

[88] J. Schönheim, "On coverings", *Pacific Journal of Mathematics* 14 (1964), pp. 1405–1411.

[89] P. Shaw, "Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems", *Lecture Notes in Computer Science* 1520 (1998), pp. 417–431.

[90] A. Sidorenko, "What we know and what we do not know about Turán numbers", *Graphs and Combinatorics* 11(2) (1995), pp. 179–199.

[91] T. Skolem, "Some remarks on the triple systems of Steiner", *Mathematica Scandinavica* 6 (1958), pp. 273–280.

[92] N. J. A. Sloane and J. G. Thompson, "The nonexistence of a certain Steiner system S(3,12,112)", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 30(3) (1981), pp. 209–236.

[93] D. R. Stinson, *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[94] J. D. Swift, "A generalized Steiner problem", *Rendiconti di Matematica* 2(6) (1969), pp. 563–569.

[95] D. T. Todorov, "On some covering designs", *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 39(1) (1985), pp. 83–101.

[96] P. Turán, "Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie", *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941), pp. 436–452.

[97] W. D. Wallis (Editor), *Design 2002: Further Computational and Constructive Design Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

Биографија аутора

Небојша Николић је рођен 1. септембра 1970. године у Параћину. Основну школу завршио је у Рашевици и Поточцу код Параћина. Математичку гимназију "Вељко Влаховић" у Београду завршио је 1989. године. Освојио је многобројне награде на републичким и савезним такмичењима из математике, а 1989. године је освојио је сребрну медаљу на Међународној математичкој олимпијади. Добитник је Новембарске награде општине Стари град и Октобарских награда општине Параћин и града Београда.

Након завршетка Математичке гимназије уписао је Математички факултет у Београду, а школску 1989/90 провео је на одслужењу војног рока. Дипломирао је 1994. године на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом $9,50$. Докторске академске студије на Математичком факултету, студијски програм Математика, уписао је 2009. године и положио је све испите предвиђене Планом докторских студија, са просечном оценом $9,88$.

Од 1997. до 2000. године радио је на Машинском факултету у Београду, где је држао вежбе на предметима Математика 1 и Математика 2. Од школске 2000/01. године ангажован је на Факултету организационих наука у Београду. Током тог времена, држао је вежбе на предметима Математика 1, Математика 2, Математика 3, Нумеричка анализа и Дискретне математичке структуре. У наведеном периоду, више година предавао је у Математичкој гимназији у Београду.

Од 2006. до 2010. године учесник је пројекта 144007 (Математички модели и методе оптимизације са применама), а од 2010. године пројекта 174010 (Математички модели и методе оптимизације великих система) Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Објавио је више радова и саопштења, од чега је 6 радова у часописима са SCI листе.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Небојша Николић

број индекса 2051/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Штајнерови системи и нове конструкције (v,k,t)-покривања

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 04. 06. 2015.

Николић Небојша

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Небојша Николић

Број индекса 2051/2009

Студијски програм Математика

Наслов рада Штајнерови системи и нове конструкције (v,k,t)-покривања

Ментор доц. др Александар Савић

Потписани Небојша Николић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 04.06.2015.

Николић Небојша

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Штајнерови системи и нове конструкције (v,k,t)-покривања

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 04.06.2015.

Никола Недија

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.