УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

**МАКСИМОВИЋ ТАЊА**

# Изометријске трансформације еуклидске равни и простора и њихове групе

МАСТЕР РАД

**Ментор: др. Александар Липковски**

Београд 2015.

# Садржај

# Увод

Мастер рад је посвећен изометријским трансформацијама и њиховим групама.

Изометријске трансформације или геометријска кретања су посебно интересантан део геометрије јер се са применом ове теорије срећемо свакодневно у простору око нас. Оне су садржај градива основне школе, а знање о њима се продубљује кроз средњошколско и факултетско образовање и одласцима на такмичења.
Појам групе је један од фундаменталних математичких појмова који прожима многе области математике, савремене физике и кристалографије.

У првом поглављу дефинисаћу изометријске трансформације и навести нека општа својства изометријских трансформација простора $E^n$.
У другом поглављу бавићу се врстама изометријских трансформација равни $E^2$.
У трећем поглављу бавићу се врстама изометријских трансформација простора $E^3$.
У четвртом поглављу бавићу се групама изометријских трансформација.
У петом поглављу осврнућу се на везу музике и изометријских трансформација.

Циљ овог рада је да се класификују изометријске трансформације равни $E^2$ и простора $E^3$ и кроз примере покажу које су групе изометријских трансформација и којим групама су изоморфне.

# 1. Изометријске трансформације

Око 300. године п.н.е. настало је најсистематичније дело из геометрије тог времена под насловом „Елементи“, које је написао Еуклид. У седмој аксиоми „Елемената“, која гласи: „Оне које се могу довести до поклапања, једнаке су међу собом.“, први пут прећутно се употребљава кретања геометријских фигура. Ту већ видимо да ће изометријске трансформације омогућити да дефинишемо подударност било којих фигура у простору.

## 1.1. Дефиниција и општа својства изометријских трансформација простора $E^n$

**Дефиниција1.1:** Изометријском трансформацијом или геометријским кретањем простора $E^n$ (n=1,2,3) називамо бијективну трансформацију $\mathcal{I}$: $E^n \rightarrow E^n$ такву да за сваке две тачке X, Y $\in E^n$ и њихове слике X', Y' $\in E^n$ важи релација (X,Y) $\cong$ (X', Y').

Будући да за сваке две тачке X, Y $\in E^n$ важи релација (X,Y) $\cong$ (X, Y), идентична трансформација $\mathcal{E}$, тј. коинциденција која сваку тачку простора $E^n$ преводи у ту исту тачку, представља изометријску трансформацију тог простора.

**Теорема1.1:** Композиција двеју изометријских трансформација простора $E^n$ представља такође изометријску трансформацију.

Доказ: Нека су $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ било које две изометријске трансформације простора $E^n$. Ако обележимо са X и Y произвољне тачке тог простора, са $X_1$ и $Y_1$ тачке које у изометријској трансформацији $\mathcal{I}_1$ одговарају тачкама X и Y, а са $X_2$ и $Y_2$ тачке које у изометријској трансформацији $\mathcal{I}_2$ одговарају тачкама $X_1$ и $Y_1$, тада у композицији $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ тачкама X и Y одговарају тачке $X_2$ и $Y_2$. При томе је (X, Y) $\cong$ $(X_1, Y_1)$ и
$(X_1, Y_1) \cong (X_2, Y_2)$, па је (X, Y) $\cong$ $(X_2, Y_2)$. Стога композиција $\mathcal{I}_2 \circ \mathcal{I}_1$ представља такође изометријску трансформацију простора $E^n$ . ■

**Теорема1.2:** Инверзна трансформација изометријске трансформације простора $E^n$ представља такође изометријску трансформацију тог простора.

Доказ: Нека је $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација простора $E^n$. Ако обележимо са X и Y произвољне тачке тог простора, а са $X'$ и $Y'$ тачке које у изометријској трансформацији $\mathcal{I}$ одговарају тачкама X и Y, биће (X, Y) $\cong$ (X',Y'). С обзиром да је релација подударности парова тачака симетрична, биће
(X',Y') $\cong$ (X, Y), па је инверзна трансформација $\mathcal{I}^{-1}$ такође изометријска трансформација. ■

**Теорема1.3:** Скуп свих изометријских трансформација простора $E^n$ (n=1,2,3) представља групу.

Доказ: Будући да су изометријске трансформације простора $E^n$ елементи групе свих бијективних трансформација тог простора, и из теореме1.1 и теореме1.2 следи да скуп свих изометријских трансформација простора $E^n$ представља подгрупу поменуте групе. ■

**Дефиниција1.2**: Група која се састоји из свих изометријских трансформација простора $E^n$ називамо групом изометријских трансформација тог простора и симболички обележавамо са $G(\mathcal{J})$.

**Теорема1.4:** Ако су A, B две различите тачке неке праве p и A', B' тачке праве p такве да је (A, B) ≅ (A', B'), тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: p \rightarrow p$ таква да је $\mathcal{J}(A) = A'$ и $\mathcal{J}(B) = B'$.

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}$ праве $p$ поседује две разне инваријантне тачке она преставља коинциденцију.

**Теорема1.5:** Ако су A, B, C три неколинеарне тачке равни $E^2$ и A', B', C' тачке те исте равни такве да је (A,B,C) ≅ (A', B', C'), тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: \mathrm{E}^2 \rightarrow \mathrm{E}^2$ таква да је $\mathcal{J}(A) = A'$ , $\mathcal{J}(B) = B'$ и $\mathcal{J}(C) = C'$.

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}: \mathrm{E}^2 \rightarrow \mathrm{E}^2$ поседује три неколинеарне инваријантне тачке, она преставља коинциденцију.

**Теорема1.6:** Ако су A, B, C, D четири некомпланарне тачке простора $E^3$ и A', B', C', D' тачке тог истог простора такве да је (A, B, C, D) ≅ (A', B', C', D'), тада постоји јединствена изометријска трансформација $\mathcal{J}: \mathrm{E}^3 \rightarrow \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{J}(A) = A'$ , $\mathcal{J}(B) = B'$, $\mathcal{J}(C) = C'$, $\mathcal{J}(D) = D'$.

Последица: Ако изометријска трансформација $\mathcal{J}: \mathrm{E}^3 \rightarrow \mathrm{E}^3$ поседује четири некомпланарне инваријантне тачке, она преставља коинциденцију.

**Дефиниција1.3:** Кажемо да је у простору $E^n$(n=1,2,3) фигура Φ подударна или конгруентна са фигуром $\Phi'$, и симболички обележавамо са $\Phi \cong \Phi'$, ако постоји изометријска трансформација $\mathcal{J}$ тог простора таква да је $\mathcal{J}(\Phi) = \Phi'$.

**Теорема1.7:** Релација подударности геометријских фигура у еуклидском простору $E^n$(n=1,2,3) је релација еквиваленције.

Доказ: С обзиром да је идентична трансформација $\mathcal{E}$ простора $E^n$ изометријска и да за сваку фигуру Φ тог простора важи релација $\mathcal{E}$(Φ)= Φ, имамо да је Φ ≅ Φ, па је релација подударности фигура у простору $E^n$ **рефлексивна**.
Ако су Φ и $\Phi'$ две фигуре у простору $E^n$ такве да је $\Phi \cong \Phi'$, према дефиницији1.3 постоји изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора $E^n$ таква да је $\mathcal{J}(\Phi) = \Phi'$.
Будући да инверзна трансформација $\mathcal{J}^{-1}$ изометријске трансформације $\mathcal{J}$ представља такође изометријску трансформацију, из релације $\mathcal{J}^{-1}$(Φ')= Φ следи да је $\Phi' \cong \Phi$, па је релација подударности фигура у простору $E^n$ **симетрична.**
Ако су Φ, $\Phi'$и $\Phi''$ три фигуре у простору $E^n$ такве да је $\Phi \cong \Phi'$ и $\Phi' \cong \Phi''$, према дефиницији1.3 постоје изометријске трансформације $\mathcal{J}'$ и $\mathcal{J}''$ простора $E^n$ такве да

је $\mathcal{I}'(\Phi) = \Phi'$ и $\mathcal{I}''(\Phi') = \Phi''$. С обзиром да композиција $\mathcal{I} = \mathcal{I}'' \circ \mathcal{I}'$ представља изометријску трансформацију простора $E^n$, из релације $\mathcal{I}(\Phi) = \mathcal{I}'' \circ \mathcal{I}'(\Phi) = \Phi''$ следи да је $\Phi \cong \Phi''$, па је релација подударности фигура у простору $E^n$ **транзитивна**. ■

Ова теорема нам омогућује да скуп свих фигура еуклидског простора $E^n$ разврстамо на тзв. класе еквиваленције, којих има неизмерно много. Такве су нпр. класе подударних дужи, класе подударних углова, класе подударних троуглова, итд.

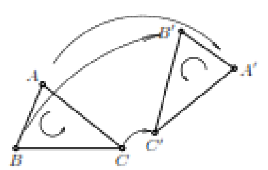
# 2. Врсте изометријских трансформација равни $E^2$

## 2.1. Директне и индиректне изометријских трансформација равни $E^2$

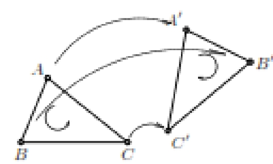
Постоје две врсте изометријских трансформација равни $\mathrm{E}^2$:

1. **Директне** изометријске трансформације које не мењају орјентацију равни $\mathrm{E}^2$.
2. **Индиректне** изометријске трансформације које мењају орјентацију равни $\mathrm{E}^2$.

Да бисмо установили да ли је нека изометријских трансформација равни $\mathrm{E}^2$ директна или индиректна, довољно је утврдити да ли неке две одговарајуће тројке неколинеарних тачака одређују истосмерне или супротносмерне троуглове.




Директна изометријска трансформација




Индиректна изометријска трансформација

Идентична трансформација равни $\mathrm{E}^2$ представља директну изометријску трансформацију те равни.
Као специјалан случај теореме1.5 налазимо да директна изометријска трансформација равни $\mathrm{E}^2$ са две различите инваријантне тачке увек представља коинциденцију.

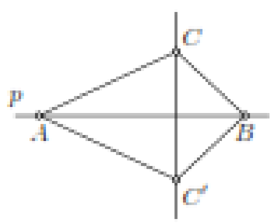
Композиција две директне или две индиректне изометријске трансформације равни $\mathrm{E}^2$ увек представља директну изометријску трансформмацију те равни.
Композиција једне директне и једне индиректне изометријске трансформације равни $\mathrm{E}^2$ увек представља индиректну изометријску трансформацију.
Скуп свих директних изометријских трансформација равни $\mathrm{E}^2$ представља некомутативну подгрупу групе $G(\mathcal{J})$ свих изометријских трансформација равни $\mathrm{E}^2$. Ту подгрупу називамо групом директних изометријских трансформација равни $\mathrm{E}^2$ и симболички означавамо са $G(\mathcal{J}^+)$.

# 2.2. Осна рефлексија равни $E^2$

**Дефиниција2.2.1:** Осном рефлексијом или осном симетријом равни $E^2$ са осом $p \subset E^2$ називамо неидентичну изометријску трансформацију $\mathcal{S}_p: E^2 \to E^2$ којој је свака тачка праве $p$ инваријантна.

Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни $E^2$ ван праве $p$ нема инваријантних тачака.
Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни $E^2$ једнозначно је одређена својом осом или једним паром одговарајућих неистоветних тачака.

**Теорема2.2.1:** Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни $E^2$ је индиректна изометријска трансформација.
Доказ:




Ако са A и B обележимо две различите тачке осе $p$ и са C било коју тачку равни $E^2$ ван осе $p$, биће права $p$ медијатриса дужи CC', где је C'=$\mathcal{S}_p(C)$.
Стога су тачке C и C' са различитих страна праве $p$, па су одговарајући троуглови ABC и ABC' супротносмерни одакле следи да је трансформација $\mathcal{S}_p$ индиректна. ■

Инволуциона трансформација је свака неидентична трансформација $f$ којој квадрат представља коинциденцију, тј. $f^2 = \mathcal{E}$.

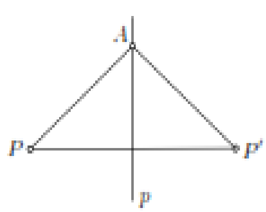
**Теорема2.2.2:** Осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ еуклидске равни $E^2$ је инволуциона трансформација.

Доказ: Обележимо са X произвољну тачку равни $E^2$ и са X', X'' тачке такве да је

$$\mathcal{S}_p(X) = X' \text{ и } \mathcal{S}_p(X') = X''.$$

Ако је $X \in p$, тада је $X = X'$ и $X' = X''$, па је $X = X''$. Ако $X \notin p$, тада је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$, па је оса $p$ осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ медијатриса сваке од дужи $XX'$ и $X'X''$, па је $X = X''$. Овим смо доказали да у сваком случају важи релација $\mathcal{S}_p^2 = \mathcal{E}$, па је осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ инволуциона трансформација. ■

**Теорема2.2.2:** Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ поседује бар једну инваријантну тачку A, она представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_p$ којој оса $p$ садржи тачку A.



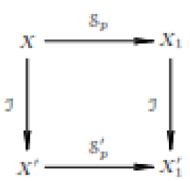

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ индиректна а $\mathcal{E}$ директна изометријска трансформација биће $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Па у равни $E^2$ постоји тачка $P$ таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. При томе је $(P, A) \cong (P', A)$, па се тачка $A$ налази на медијатриси $p$ дужи $PP'$. Будући да су $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{I}$ индиректне изометријске трансформације, композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију равни $E^2$. Та трансформација поседује две различите инваријантне тачке $A$ и $P$ па представља коинциденцију. Стога је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ и према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$. ■

**Теорема2.2.3:** Ако су $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ две осне рефлексије равни $E^2$ са разним осама $p$ и $q$, а X тачка те исте равни $E^2$, тада је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X \iff X = p \cap q$.

Доказ: Претпоставимо најпре да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$. Ако обележимо са X' тачку такву да је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, биће и $\mathcal{S}_q(X') = X$. Индиректним поступком докажимо да је $X = X'$. Ако би, напротив, важила релација $X \neq X'$, тада би постојале две различите медијатрисе $p$ и $q$ дужи $XX'$, што је немогуће. Стога је $X = X'$, па је $\mathcal{S}_p(X) = X$ и $\mathcal{S}_q(X) = X$. Из ових једнакости следи да је $X \in p$ и $X \in q$, па је $X = p \cap q$.
Обратно, ако претпопставимо да је задовољена релација $X = p \cap q$, тада је $X \in p$ и $X \in q$, па је $\mathcal{S}_p(X) = X$ и $\mathcal{S}_q(X) = X$, и према томе $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X$. ■

Трансмутација или преображавањем неке трансформације $f$ неком трансформацијом $g$ називамо трансформацију $f' = g \circ f \circ g^{-1}$.

**Теорема2.2.4:** Ако је $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија еуклидске равни $E^2$ и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација те исте равни, затим $p'$ права која у изометрији $\mathcal{I}$ одговара правој $p$, тада је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.



Доказ: Према дефиницији осне рефлексије, за сваку тачку $X' \in p'$ која у изометрији $\mathcal{I}$ одговара некој тачки $X \in p$, имамо да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X') = \mathcal{I}^{-1}(X_1')$. Ако обе ове стране помножимо са лева са изометријом $\mathcal{I}$, добијамо да је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}(X') = \mathcal{I} \circ \mathcal{I}^{-1}(X') = \mathcal{E}$(X')$= X'$. На тај начин, композиција $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1}$ преводи сваку тачку праве $p'$ у ту исту тачку.
Будући да та композиција представља индиректну, дакле неидентичку, изометријску трансформацију равни $E^2$ којој је свака тачка праве $p'$ инваријантна, она представља осну рефлексију $\mathcal{S}_{p'}$, наиме биће $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$. ■

**Теорема2.2.5:** Две осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ еуклидске равни $E^2$, са разним осама $p$ и $q$, су комутативне трансформације ако и само ако је $p \perp q$, наиме биће

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \iff p \perp q.$$

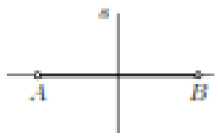
Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, тј. $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p$ (*)
Ако обележимо са $p'$ праву одређену релацијом $\mathcal{S}_q(p) = p'$, према закону трансмутације осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_q$, налазимо да је

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{p'} \qquad (**)$$

Из једнакости (*) и (**) следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p'}$, па је $p = p'$, тј. $\mathcal{S}_q(p) = p$. Отуда и из релације $p \neq q$ закључујемо да је $p \perp q$.
Обратно, претпоставимо сад да је $p \perp q$. Из ове релације следи да је $\mathcal{S}_q(p) = p$, те према закону трансмутације осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_q$, налазимо да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_p$, тј. $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. ■

Осна рефлексија равни $E^2$ омогућује да у геометрији те равни установимо специфичну релацију подударности тзв. релацију осносиметричне подударности ликова.

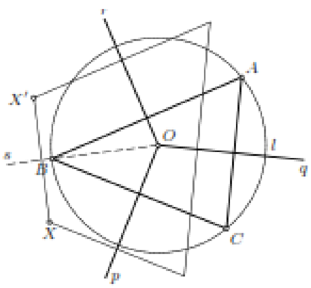
**Дефиниција2.2.2:** Каже се да је у равни $E^2$ лик $\Phi$ осносиметричан са ликом $\Phi'$ у односу на неку праву $s$ ако је $\mathcal{S}_s(\Phi) = \Phi'$. Праву $s$ називамо осом симетрије ликова $\Phi$ и $\Phi'$. Специјално, ако је $\mathcal{S}_s(\Phi) = \Phi$, тада се каже да је права $s$ оса симетрије лика $\Phi$.




Дуж AB у равни $E^2$ има две и само две осе симетрије. Једна од њих садржи дуж AB, а друга представља њену медијатрису.

Угао у равни $E^2$ има само једну осу симетрије, то је права која садржи његову бисектрису.

**Задатак1:** У задати круг $l$ равни $E^2$ уписати $\Delta ABC$ којем су странице BC, CA, AB паралелне респективно са задатим правама a, b, c.




Решење: Претпоставимо да постоји $\Delta ABC$ који задовољава постављене услове.
Медијатрисе $p, q, r$ страница BC, CA, AB садрже средиште $O$ круга $l$ и управне су на правама a, b, c. Композиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ представља индиректну изометријску трансформацију равни $E^2$ са инваријантним тачкама $O$ и $B$, према томе презентира осну рефлексију $\mathcal{S}_s$ којој оса $s$ садржи тачке $O$ и $B$.
Приступајући конструкцији $\Delta ABC$, установимо најпре положај праве $s$. Стога конструишимо праве $p, q, r$ које садрже тачку, а управне су на правама a, b, c. Ако је X' тачка која у композицији $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ одговара произвољној тачки X различитој од тачке $O$, биће $\mathcal{S}_s(X) = X'$. При релацији $X \neq X'$ права $s$ је медијатриса дужи $XX'$, а при релацији $X = X'$ права $s$ је одређена тачкама $O$ и $X$. У оба случаја права $s$ садржи тачку $O$, према томе сече круг $l$ у двема тачкама; нека је $B$ било која од њих. Ако обележимо са $C$ и $A$ тачке такве да је $\mathcal{S}_p(B) = C$ и $\mathcal{S}_q(C) = A$, биће $A, B, C$ три различите тачке круга $l$, према томе оне одређују $\Delta ABC$ уписан у круг $l$. Из релације $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$ следи да је $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, па је $\mathcal{S}_r(A) = B$. На тај начин, праве $p, q, r$ представљају медијатрисе страница BC, CA, AB, па је $BC \parallel a$, $CA \parallel b$, $AB \parallel c$. С обзиром да права $s$ сече круг $l$ у двема тачкама, задатак има два решења.

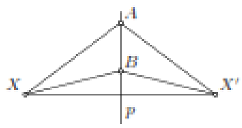
**Теорема2.2.6:** Свака изометријска трансформација $\mathcal{I}$ еуклидске равни $E^2$ може се представити као композиција коначног броја осних рефлексија; минималан број осних рефлексија заступљених у таквој композицији није већи од три.

Доказ: Према максималном броју инваријантних линеарно независних тачака изометријске трансформације $\mathcal{I}$, разликујемо следећа четири случаја:

1. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ може да поседује највише три инваријантне, линеарно независне тачке.

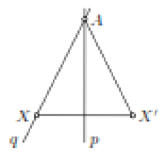
То су неколинеарне тачке равни $E^2$. Па таква изометријска трансформација представља коинциденцију, па с обзиром на инволутивност било које осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ равни $E^2$ имамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$.

2. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује највише две инваријантне линеарно независне тачке (нпр. $A, B$).




Пошто је $A \neq B$ те две тачке одређују праву $p$. С обзиром да ван праве $p$ изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, имамо да је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, те постоји тачка $X \in E^2$ таква да је $\mathcal{I}(X) = \mathrm{X}'$ и $X \neq X'$. При томе је $(A, X) \cong (A, X')$ и $(B, X) \cong (B, X')$ па је права $p$ медијатриса дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ предтавља изометријску трансформацију равни $E^2$, која има три неколинеарне инваријантне тачке $A, B, X$ , па је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E} \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$.

3. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује само једну инваријантну тачку ( нпр. $A$).




С обзиром да је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, постоји тачка $X \in E^2$ таква да је $\mathcal{I}(X) = \mathrm{X}'$ и $X \neq X'$. При томе је $(A, X) \cong (A, X')$, па је тачка $A$ на медијатриси $p$ дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ предтавља изометријску трансформацију равни $E^2$, која има две неколинеарне инваријантне тачке $A, X$. Ван праве $AX$ композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, јер би у противном та композиција представљала коинциденцију. У том би случају из једнакости $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E} \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ па би изометрија $\mathcal{I}$ поседовала више инваријантних тачака што је супротно претпоставци. Па према 2. , изометријска трансформација $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ представља осну рефлексију $\mathcal{S}_q$ којој оса $q$ садржи инваријантне тачке $A, X$. Из релације $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$.

*4.* Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ непоседује инваријантне тачке

У овом случају изометријска трансформација $\mathcal{I}$ може се представити као композиција састављена из две или три осне рефлексије. Да бисмо ово доказали обележимо са $X$ произвољну тачку равни $E^2$, са $X'$ њену одговарајућу тачку и са $p$ медијатрису дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ представља изометријску трансформацију равни $E^2$ са инваријантном тачком $X$. Та композиција не може да има три неколинеарне инваријантне тачке, јер би она тада представљала коинциденцију. У том би случају $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{E} \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, па би изометрија $\mathcal{I}$ имала инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Ако би композиција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$ поседовала највише две инваријантне линеарно независне тачке, она би према случају 2. Представљала неку осну рефлексију $\mathcal{S}_q$ којој оса $q$ садржи поменуте инваријантне тачке. У том случају би $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. Јасно је при томе да праве $p$ и $q$ немају заједничких тачака, јер би у противном изометријска трансформација $\mathcal{I}$ имала заједничких тачака, што је супротно претпоставци. Најзад, ако је $X$ једина инваријатна тачка композиције $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}$, према случају 3. та композиција представља производ двеју осних рефлексија, обележимо их са $\mathcal{S}_q$ и $\mathcal{S}_r$. Па је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \implies \mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. ■

**Дефиниција2.2.3:** Сваку композицију коначног броја осних рефлексија еуклидске равни $E^2$ којом је представљена нека изометријска трансформација $\mathcal{I}$ те равни називамо осторефлексивном или симетријском репрезентацијом те изометрије. Симетријску репрезентацију изометрије $\mathcal{I}$ равни $E^2$ састављену из најмањег могућег броја осних рефлексија називамо минималном или оптималном симетријском репрезентацијом те изометрије.

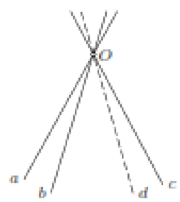
# 2.3. Праменови правих у равни $E^2$

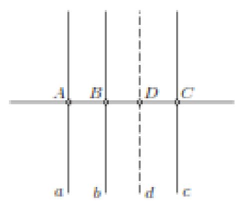
**Дефиниција2.3.1:** Скуп $\mathcal{X}$ свих правих равни $E^2$ које се секу у једној тачки $O$ називамо праменом конкуретних правих са средиштем $O$ и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_O$. Скуп $\mathcal{X}$ свих правих равни $E^2$ које су паралелне са неком правом $s \subset E^2$, и према томе међу собом, називамо праменом паралелних правих и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_s$.

Иако су праменови правих у равни $E^2$ дефинисани независно од појма изометријске трансформације, они се могу довести у тесну везу са тим трансформацијама, посебно са осним рефлексијама.

**Теорема2.3.1:** Ако три праве $a, b, c$ равни $E^2$ припадају неком прамену $\mathcal{X}$, тада композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ којој оса $d$ такође припада прамену $\mathcal{X}$.

Доказ:




1. Претпоставимо најпре да је $\mathcal{X}$ прамен конкурентних правих (прва слика).
Нека је $O$ његово средиште. С обзиром да тачка $O$ припада свакој од правих $a, b, c$, имамо да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(O) = O$. На тај начин, индиректна изометријска трансформација $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ равни $E^2$ поседује инваријантну тачку $O$, па према томе представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$. При томе је $O \in d$, и према томе $d \in \mathcal{X}$.
2. Претпоставимо сад да је $\mathcal{X}$ прамен парараллелних правих (друга слика).
Нека је $s$ произвољна права која припада равни $E^2$, а управна је на правама $a, b, c$. Из релације $s \perp a, b, c$ следи да свака од осних рефлексија $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ преводи праву $s$ у ту исту праву мењајући њену орјентацију. Стога композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ такође преводи праву $s$ у ту исту праву, мењајући њену орјентацију. Отуда следи да на правој $s$ постоји инваријантна тачка $D$. На тај начин, индиректна изометријска трансформација $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ равни $E^2$ поседује инваријантну тачку $D$, па према томе представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$. При томе је $D \in d$ и $d \perp s$, па је $d \in \mathcal{X}$.

■

**Теорема2.3.2:** Ако композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ састављена из трију осних рефлексија равни $E^2$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$, тада осе $a, b, c, d$ тих осних рефлексија припадају једном прамену.

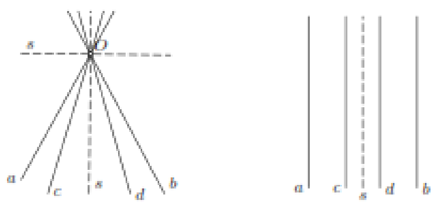
Доказ: 1. Претпоставимо најпре да се праве $a$ и $b$ секу у некој тачки $O$.
Из релације $a \cap b = O$ следи да је $O$ једина инваријантна тачка композиције $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Будући да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, тј. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$, биће $O$ једина инваријантна тачка и композиције $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$. Стога се праве $c$ и $d$ такође секу у тачки $O$. Па праве $a, b, c, d$ припадају једном прамену.

2. Претпоставимо сад да су праве $a$ и $b$ међу собом паралелне.
Ако обележимо са $s$ било коју праву равни $E^2$ управну на правама $a$ и $b$, имамо да је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a(s)=s$. Будући да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$, тј. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a=\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d$, биће и $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d(s)=s$. Стога је $c, d \perp s$, те све праве $a, b, c, d$ припадају једном прамену. ∎

**Дефиниција2.3.2:** Каже се да је у равни $E^2$ пар правих $c$ и $d$ изогонално спрегнут или симетрично распоређен са паром правих $a$ и $b$ ако је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$ тј. $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_b$.

Изогоналне праве $a, b, c$ равни $E^2$ припадају једном прамену правих.

**Теорема2.3.3:** Нека су $a, b, c, d$ четири праве неког прамена $\mathcal{X} \subset E^2$. Да би парови правих $a, b, c, d$ били изогонално спрегнути међу собом, потребно је и довољно да се осе симетрије правих $a$ и $b$ поклапају са осама правих $c$ и $d$.




Доказ: Покажимо прво да је услов потребан.
У том циљу претпоставимо да су парови правих $a, b$ и $c, d$ изогонално спрегнути, тј. да је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_d$.
Нека је $s$ оса правих $a$ и $b$. Ако обележимо са $d'$ праву одређену релацијом $\mathcal{S}_s(c) = d'$, имамо да је $d = d'$. Из уведених претпоставки следи да је

$$\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b \text{ и } \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c.$$

Применом ових једнакости налазимо да је

$$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'}) = \mathcal{S}_{d'}.$$

Из једнакости $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'}$ следи да је $d = d'$ . Стога је $\mathcal{S}_s(c) = d$, па је права $s$ оса симетрије правих $c$ и $d$.
Обратно, претпоставимо сад да се осе симетрије правих $a$ и $b$ поклапају са осама симетрије правих $c$ и $d$.
У том случају важе релације $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_b$ и $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c$. Применом ових једнакости имамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_d &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a) \\ &= \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_a \circ (\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d) = \mathcal{S}_d.\end{aligned}$$

∎

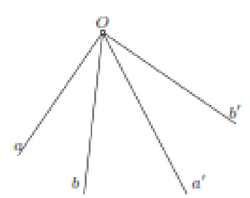
# 2.4. Централна ротација равни $E^2$

Израчунавање сложенијих врста изометријских трансформација еуклидске равни $E^2$ можемо приступити разматрањем специфичних видова њихових минималних симетријских репрезентација. Придржавајући се тог начела установићу поступно све постојеће врсте изометријских трансформација еуклидске равни $E^2$ и извести њихова најважнија својства. Од тих врста разматраћу прво централне ротације.

**Дефиниција2.4.1:** Нека су $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ две осне рефлексије еуклидске равни $E^2$ којима се осе $p$ и $q$ секу у некој тачки $O$. Средишњим обртајем или централном ротацијом равни $E^2$ око тачке $O$ за угао $\omega$ називамо трансформацију $\mathcal{R}_{O,\omega}$ одређену релацијом $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ $(\mathrm{O} = p \cap q,\ \omega = 2\measuredangle(p,q)$ ). Тачку $O$ називамо средиштем или центром, а орјентисани угао $\omega$ називамо углом централне ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$.

Централна ротација равни $E^2$ представља директну изометријску трансформацију јер је композиција две осне рефлексије (које су индиректне изометријске трансформације).
Централна ротација равни $E^2$ поседује само једну инваријантну тачку, то је средиште те централне ротације.

**Теорема2.4.1:** Две централне ротације $\mathcal{R}_{O,\omega}$ и $\mathcal{R}_{O',\omega'}$ исте равни $E^2$ међу собом су једнаке ако и само ако су тачке $O$ и $O'$ истоветне, а углови $\omega$ и $\omega'$ подударни и истомерни.




Доказ: Обележимо са $a, b$ и $a', b'$ праве помоћу којих су дефинисане поменуте централне ротације; то су праве које задовољавају релације

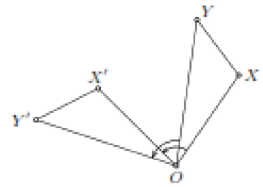
$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \ \text{ и } \ \mathcal{R}_{O',\omega'} = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}.$$

Ако претпоставимо да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$ имамо да је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$, тј.

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'} \qquad (*)$$

Из релације $(*)$ следи да праве $a, b, a', b'$ припадају једном прамену, па се тачка $\mathrm{O} = a \cap b$ поклапа са тачком $\mathrm{O}' = a' \cap b'$. Сем тога, из релације $(*)$ следи да су праве $a$ и $b'$ изогонално спрегнуте са правама $a'$ и $b$ , па су орјентисани углови $(a, b)$ и $(a', b')$, према томе и углови $\omega$ и $\omega'$ подударни и истосмерни.
Оратно, ако претпоставимо да су тачке $\mathrm{O}$ и $\mathrm{O}'$ истоветне, а углови $\omega$ и $\omega'$ подударни и истосмерни, биће праве $a, b, a', b'$ конкурентне, а орјентисани углови $(a, b)$ и $(a', b')$ подударни и истосмерни. Стога су праве $a$ и $b'$ изогонално спрегнуте са правама $a'$ и $b$, па је $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{a'} = \mathcal{S}_{b'}$, тј. $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{b'} \circ \mathcal{S}_{a'}$ и према томе $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$. ■

**Теорема2.4.2:** У централној ротацији $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни $E^2$ тачкама $X, Y \neq O$ одговарају тачке $X'$ и $Y'$ такве да су истосмерни углови $XOX'$ и $YOY'$ међу собом подударни.




Доказ: Нека је $X_1$ тачка равни $E^2$ таква да је орјентисани угао $XOX_1'$ подударан и истосмеран са углом $\omega$ и $OX \cong OX_1'$. Ако тај угао обележимо са $\omega'$, према теореми2.4.1 имамо да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega'}$. Због тога је $X_1' = \mathcal{R}_{O,\omega'}(X) = \mathcal{R}_{O,\omega}(X) = X'$. На тај начин, истосмерни углови $\omega$ и $XOX'$ међу собом су подударни. Истим поступком доказује се да су и истосмерни углови $YOY'$ и $\omega'$ међу собом подударни. Па су истосмерни и углови $XOX'$ и $YOY'$ међу собом подударни. ■

Из теореме2.4.1 и теореме2.4.2 следи да је централна ротација равни $E^2$ једнозначно одређена центром $O$ и још једним паром одговарајућих тачака.
Ако у централној ротацији $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни $E^2$ тачкама $A, B, C, \ldots$ различитим од тачке $O$ одговарају респективно $A', B', C', \ldots$ и ако углове $AOA', BOB', COC', \ldots$ истосмерне са углом $\omega$ обележимо редом са $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$, биће

$$\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{R}_{O,\omega_1} = \mathcal{R}_{O,\omega_2} = \mathcal{R}_{O,\omega_3} = \cdots$$

**Теорема2.4.3:** Ако директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ поседује јединствену инваријантну тачку $O$, она представља централну ротацију.

Доказ: Обележимо са $P$ и $P'$ две различите тачке равни $E^2$ такве да је $\mathcal{I}(P) = P'$, са $p$ праву одређену тачкама $O$ и $P$, а са $q$ медијатрису дужи $PP'$. Из релације $OP \cong OP'$ следи да је $O \in q$ па је $\mathrm{O} = p \cap q$. С обзиром да је $\mathcal{I}$ директна а $\mathcal{S}_q$ индиректна изометријска трансформација, биће композиција $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација. Она поседује две разне инваријантне тачке $O$ и $P$, па представља осну рефлексију $\mathcal{S}_p$. Па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Из ове једнакости и релације $\mathrm{O} = p \cap q$, следи да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ представља централну ротацију. ■

**Теорема2.4.4:** Скуп $\mathcal{R}_O$ који се састоји из идентичне трансформације и свих централних ротација равни $E^2$, које имају заједнички центар $O$, представља групу.

Доказ: Обележимо са $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{O,\beta}$ било које две централне ротације из скупа $\mathcal{R}_O$, а са $p$ произвољну праву која садржи тачку $O$ и припада равни $E^2$ и са $m, n$ праве одређене релацијама $\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m$ и $\mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p$. Множењем одговарајућих страна ових једнакости налазимо да је $\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$.
С обзиром да праве $m$ и $n$ поседују заједничку тачку $O$, оне су истоветне или се секу у тој тачки, па је $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E}$ или $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{R}_{O,\gamma}$ где је $\gamma = 2\measuredangle(m, n)$. Овим смо доказали да у сваком случају важи релација $\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} \in \mathcal{R}_O$.
Ако обележимо са $\mathcal{R}_{O,\omega}$ било коју централну ротацију из скупа $\mathcal{R}_O$ и са $p, q$ праве равни $E^2$ такве да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, биће

$$\mathcal{R}_{O,\omega}^{-1} = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{R}_{O,-\omega} \in \mathcal{R}_O.$$

С обзиром да трансформације из скупа $\mathcal{R}_O$ представљају елементе групе $G(\mathcal{J})$ свих изометријских трансформација равни $E^2$, из доказаних својства следује да скуп $\mathcal{R}_O$ представља такође групу. ■

**Дефиниција2.4.2:** Групу која се састоји из идентичне трансформације и свих централних ротација равни $E^2$ које имају заједнички центар $O$, називамо групом централних ротација те равни око тачке $O$, и симболички обележавамо са $G(\mathcal{R}_O)$.

**Теорема2.4.5:** Група $G(\mathcal{R}_O)$ централних ротација равни $E^2$ око тачке $O$ је комутативна; другим речима, за сваке две централне ротације $\mathcal{R}_{O,\beta}$ и $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ из групе $G(\mathcal{R}_O)$ важи релација $\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}$.

Доказ: Обележимо са $p$ произвољну праву која припада равни $E^2$ и садржи тачку $O$ и са $m, n$ праве равни $E^2$ такве да је $\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m$ и $\mathcal{R}_{O,\beta} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p$.
Множењем одговарајућих страна ових једнакости, налазимо да је

$$\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m,$$
$$\mathcal{R}_{\mathrm{O},\alpha} \circ \mathcal{R}_{\mathrm{O},\beta} = \mathcal{S}_\mathrm{p} \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} \circ \mathcal{S}_\mathrm{n} \circ \mathcal{S}_\mathrm{p}$$

С обзиром да праве $p, m, n$ у равни $E^2$ садрже исту тачку $O$, оне припадају једном прамену правих, па композиција $\mathcal{S}_\mathrm{p} \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} \circ \mathcal{S}_\mathrm{n}$ представља неку осну рефлексију, дакле инволуциону трансформацију. Па квадрат те композиције представља коинциденцију, наиме биће

$$\mathcal{S}_\mathrm{p} \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} \circ \mathcal{S}_\mathrm{n} \circ \mathcal{S}_\mathrm{p} \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} \circ \mathcal{S}_\mathrm{n} = \mathcal{E} \text{ тј. } \mathcal{S}_\mathrm{p} \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} \circ \mathcal{S}_\mathrm{n} \circ \mathcal{S}_\mathrm{p} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m.$$

Из ове и претходних једнакости налазимо да је $\mathcal{R}_{O,\beta} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{R}_{O,\beta}$. ■

**Теорема2.4.6:** Ако је $\mathcal{R}_{O,\omega}$ централна ротација и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација еуклидске равни $E^2$, затим $O'$ тачка која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара тачки $O$ и $\omega'$ угао који у тој изометрији одговара углу $\omega$, тада важи релација

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{O',\omega'}.$$

Доказ: Ако обележимо са $m$ и $n$ праве равни $E^2$ такве да је $\mathcal{R}_{O,\omega} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$, тада се праве $m$ и $n$ секу у тачки $O$ под углом $\measuredangle(m,n) = \frac{1}{2}\omega$. Ако затим обележимо са $m'$и $n'$ праве које у изометрији $\mathcal{J}$ одговарају респективно правама $m$ и $n$, тада се праве $m'$и $n'$ секу у тачки $O'$ под углом $\measuredangle(m',n') = \frac{1}{2}\omega'$. Применом теореме2.4.5 налазимо да је

$\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{O,\omega} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{J}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{J}^{-1} = (\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{J}^{-1}) \circ$
$(\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{J}^{-1}) = \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'} = \mathcal{R}_{O',\omega'}$. ■

**Теорема2.4.7:** Две централне ротације $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta}$ равни $E^2$ су комутативне трансформације ако и само ако се средишта $A$ и $B$ тих ротација поклапају; другим речима, имамо да је $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} \Leftrightarrow A = B$.

Доказ: Претпоставимо најпре да је $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ тј.
$\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$.
Ако у централној ротацији $\mathcal{R}_{B,\beta}$ тачки $A$ одговара нека тачка $A'$, а углу $\alpha$ одговара неки угао $\alpha'$, према теореми2.4.6 имамо да је $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$.

Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Па су тачке $A$ и $A'$ исте, а углови $\alpha$ и $\alpha'$ подударни и истосмерни.
Обратно тврђење на један начин већ смо доказали приликом извођења теореме2.4.5. Оно се може доказати и на следећи начин.
Претпоставимо да је $A = B$. Ако у осној ротацији $\mathcal{R}_{B,\beta}$ тачки $A$ одговара нека тачка $A'$, а углу $\alpha$ одговара неки угао $\alpha'$, биће тачке $A$ и $A'$ исте а углови $\alpha$ и $\alpha'$ подударни и истосмерни, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A',\alpha'}$. Према теореми2.4.6 $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$ тј. $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$. ■

Централна ротација омогућује да у равни $E^2$ установимо специфичну релацију подударности геометријских ликова; то је релација обртне подударности ликова.
Каже се да је у равни $E^2$ лик $\Phi$ обртно подударан са ликом $\Phi'$ ако постоји централна ротација $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни $E^2$ таква да је $\mathcal{R}_{O,\omega}(\Phi) = \Phi'$.
Посебно је значајан случај када је $\Phi = \Phi'$. Он доводи до појма тзв. централне симетрије реда $n$.

**Дефиниција2.4.3:** Каже се да у равни $E^2$ лик $\Phi$ располаже централном симетријом реда $n$ ако постоји централна ротација $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}$ те равни таква да је $\mathcal{R}_{O,\frac{4R}{n}}(\Phi) = \Phi'$, где је $O$ тачка равни $E^2$, $R$ орјентисани прав угао и $n$ цео позитиван број или рационалан број облика $\frac{p}{q}$ при чему су $p$ и $q$ узајамно прости бројеви. Тачку $O$ називамо средиштем централне симетрије реда $n$.

У теорији симетрија равних ликова посебно је значајна централна симетрија реда $n$.

# 2.5. Централна рефлексија равни $E^2$

Централне ротације равни $E^2$ у општем случају нису инволуционе трансформације. Оне су инволуционе само у случају када су им углови ротације опружени. Такве централне ротације називамо централним симетријама или централним рефлексијама равни $E^2$.

**Дефиниција2.5.1:** Централном рефлексијом $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ називамо композицију двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ равни $E^2$ којима су осе p и q управне међу собом у тачки $O$. На тај начин, биће: $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ ( $p \cap q = \mathrm{O}$ ). Тачку $O$ називамо центром или средиштем централне рефлексије $\mathcal{S}_O$.

Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ представља централну ротацију те равни око тачке $O$ за опружен угао.
Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ представља директну изометријску трансформацију равни $E^2$ са јединственом инваријантном тачком $O$. Сваку другу тачку $X \in E^2$ она преводи у тачку $X' \in E^2$ такву да је тачка $O$ средиште дужи $XX'$.
Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ једнозначно је одређена тачком $O$.

**Теорема2.5.1:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ је инволуциона трансформација.

Доказ: Ако обележимо са $p$ и $q$ две праве које припадају равни $E^2$ и које су управне међу собом у тачки $O$, имамо да је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, па је

$$\mathcal{S}_O^2 = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q) = \mathcal{E}.$$

Стога је централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ инволуциона трансформација. ■

**Теорема2.5.2:** У централној рефлексији $\mathcal{S}_O$ равни $E^2$ правој $x$ која садржи тачку $O$ одговара та иста права, правој $x$ која не садржи тачку $O$ одговара права $x$' таква да је $x \cap x' = \emptyset$.

Доказ: 1. Претпоставимо прво да права $x$ садржи тачку $O$.
Ако обележимо са $y$ праву равни $E^2$ такву да је $O \in y \perp x$, биће $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_x$, па је

$$\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_x(x) = \mathcal{S}_y(x) = x.$$

2. Претпоставимо да права $x$ не садржи тачку $O$.
Ако обележимо са $p$ и $q$ две праве равни $E^2$ такве да је $O \in p \perp x$ и $O \in q \perp p$, биће $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{S}_O(x) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(x) = \mathcal{S}_q(x) = x'$.
С обзиром да су праве $q$ и $x$ равни $E^2$ управне на правој $p$ у две различите тачке, праве $x$ и $x'$ су дисјунктне. Одатле следи да су праве $x$ и $x'$ са различитих страна праве $q$, па је $x \cap x' = \emptyset$. ■

**Теорем2.5.3:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_O$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ равни $E^2$ су две комутативне трансформације ако и само ако тачка $O$ припада правој $p$, наиме биће $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p \;\Leftrightarrow\; O \in p$.

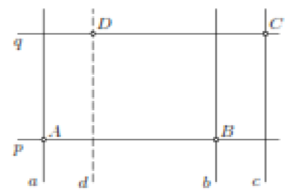
Доказ: Претпоставимо најпре да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$ тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O \quad (*)$
Ако обележимо са $O'$ тачку одређену релацијом $\mathcal{S}_p(O) = O'$, према закону трансмутације централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ имамо да је

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{O'} \quad (**)$$

Из једнакости $(*)$ и $(**)$ следи да је $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{O'}$, и према томе да је $O = O'$, што је могуће само у случају када је тачка $O$ на правој $p$.
Обратно, претпоставимо сад да је $O \in p$.
Из пве релације следи да је $\mathcal{S}_p(O) = O$, па према закону трансмутације централне рефлексије $\mathcal{S}_O$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ имамо да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_O$ тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$.

■

**Теорема2.5.4:** Композиција три централне рефлексије равни $E^2$ представља такође централну рефлексију те равни.




Доказ: Нека су дате три централне рефлексије $\mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B, \mathcal{S}_C$ еуклидске равни $E^2$. При томе, ако је $A$=$B$ или $B$=$C$, тада непосредно закључујемо да композиција $\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$ представља такође централну рефлексију.
Размотримо случај када је $A \neq B$ и $B \neq C$.
Нека је $p$ права одређена тачкама $A$ и $B$, а $q$ права таква да је $C \in q$ и $p \parallel q$. Ако затим обележимо са $a, b, c$ праве које садрже респективно тачке $A, B, C$ а управне су на правој $p$, биће $c \perp q$, па је

$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_c) \circ (\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p) \circ (\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_q \circ (\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a)$$

С обзиром да су праве $a, b, c$ равни $E^2$ управне на правој $p$, оне припадају једном прамену паралелних правих, па композиција $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ којој оса $d$ такође припада том прамену правих. Из чега следи да је $d \perp p$. Из те релације и $p \parallel q$ следи да је $d \perp q$. Ако обележимо са $D$ тачку у којој се секу међу собом управне праве $d$ и $q$, налазимо да је $\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_D$.

■

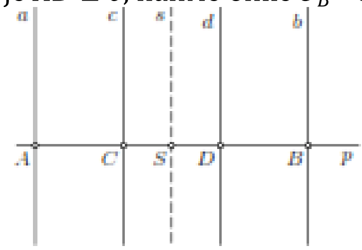
**Теорема2.5.5:** Композиција непарног број централних рефлексија еуклидске равни $E^2$ представља такође централну рефлексију те равни.

Доказ: Нека је дат непаран број централних рефлексија $\mathcal{S}_{O_1}, \cdots, \mathcal{S}_{O_n}$ еуклидске равни $E^2$. Ако је $n = 3$, тврђење је доказано Теоремом 2.5.4.
Ако је $n > 3$, тада применом Теореме 2.5.4 налазимо да је

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_1} &= \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_4} \circ \mathcal{S}_{O_3^*} \\ &= \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{O_6} \circ \mathcal{S}_{O_5^*} \\ &= \cdots = \mathcal{S}_{O_n} \circ \mathcal{S}_{O_{n-1}} \circ \mathcal{S}_{O_{n-2}^*} = \mathcal{S}_{O_n^*}. \end{aligned}$$

■

**Теорема2.5.6:** Ако су $\mathcal{S}_A$ и $\mathcal{S}_B$ две разне централне рефлексије равни $E^2$ и $\mathcal{S}_c$ осна рефлексија те исте равни, тада композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ ако и само ако је $AB \perp c$, наиме биће $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d \Leftrightarrow AB \perp c$ .




Доказ: Претпоставимо прво да композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$. Ако обележимо са $p$ праву одређену тачкама $A$ и $B$ и са $a, b$ праве равни $E^2$ управне на правој $p$ у тачкама $A$ и $B$, биће $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p$=$\mathcal{S}_d$.
Из последње једнакости и става о трансмутацији осне рефлексије неком изометријском трансформацијом, налазимо да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_p$= $\mathcal{S}_{d'}$, где је $d' = \mathcal{S}_p(d)$.
Због тога праве $a, b, c$ припадају једном прамену. Из релације $a \neq b$ и $a, b \perp p$ следи да је то прамен паралелних правих, па је и $c \perp p$, тј. $AB \perp c$.
Обрнуто, претпоставимо да је права $p$ која садржи тачке $A$ и $B$ управна на правој $c$. Ако обележимо са $a$ и $b$ праве равни $E^2$ управне на правој $p$ у тачкама $A$ и $B$, тада праве $a, b, c$ припадају једном прамену правих, те композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$, којој оса $d$ такође припада том прамену. Зато је

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_d.$$

■

**Теорема2.5.7:** Ако су $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$ осне рефлексије равни $E^2$ и $\mathcal{S}_C$ централна рефлексија те исте равни, тада композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a$ представља неку централну рефлексију $\mathcal{S}_D$ ако и само ако су праве $a$ и $b$ међу собом паралелне, наиме биће $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_D \Leftrightarrow a \parallel b$.

Доказ: Претпоставимо прво да композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a$ представља неку централну рефлексију $\mathcal{S}_D$. У том случају имамо $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_D$ тј. $\mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_b'$,
па је према Теореми 2.5.6 свака од правих $a$ и $b$ управна на правој $CD$, и према томе $a \parallel b$.
Обратно, претпоставимо сад да је $a \parallel b$. Ако обележимо са $p$ праву која задовољава релације $C \in p$ и $p \perp a$, биће и $p \perp b$. Нека је $c$ права која припада равни $E^2$ и која је у тачки $C$ управна на правој $p$. У том случају праве $a, b, c$ припадају једном прамену правих, па композиција $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ којој оса такође припада том прамену правих. Због тога је и $d \perp p$. Ако обележимо са $D$ пресечну тачку правих $d$ и $p$, биће

$$\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_D.$$

■

**Дефиниција2.5.2:** Каже се да је у равни $E^2$ пар правих $c$ и $d$ изотомички спрегнут или симетрично распоређен са паром тачака $A$ и $B$ , и обратно, да је пар тачака $A$ и $B$ изотомички спрегнут или симетрично распоређен са паром правих $c$ и $d$ ако је

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d, \text{ тј. } \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_B.$$

**Теорема2.5.8:** Нека су $A$ и $B$ две разне тачке и $c$ и $d$ две праве у равни $E^2$ такве да је $AB \perp c, d$. Да би пар тачака био изометрички спрегнут са паром правих $c, d$ потребно је и довољно да медијатриса дужи $AB$ буде оса симетрија правих $c$ и $d$.

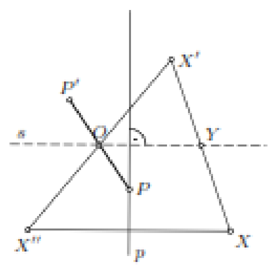
Доказ: Покажимо прво да је услов потребан.
Претпоставимо да су пар тачака $A, B$ и пар правих $c, d$ изотомички спрегнути тј. да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d$. Нека је $s$ медијатриса дужи $AB$. Ако обележимо са $d'$ праву одређену релацијом $\mathcal{S}_s(c) = d'$ , биће $d = d'$. Заиста из уведених претпоставки следи да је $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_B$ и $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_c$.
Применом ових једнакости имамо да је
$\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_A$=$(\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_{d'}) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A$=$(\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A$=$\mathcal{S}_{d'}$.
Из једнакости $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}_{d'}$ следи да је $d = d'$. Због тога је $\mathcal{S}_s(c) = d$, па је права $s$ оса симетрије правих $c$ и $d$.

Обратно, претпоставимо да је медијатриса $s$ дужи $AB$ оса симетрије правих $c$ и $d$.
При томе је $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_B$ и $\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s$=$\mathcal{S}_c$.
Применом ових једнакости налазимо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_A &= (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_A = (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_d) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A \\ &= (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_s) \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_d.\end{aligned}$$

■

**Теорема2.5.9:** Средишта дужи које спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ равни $E^2$ припадају једној правој.




Доказ: Нека је $P \in E^2$, $P' \in \mathcal{I}(P)$ и $O$ средиште дужи $PP'$. С обзиром да је $\mathcal{I}$ индиректна и $\mathcal{S}_O$ директна изометријска трансформација равни $E^2$, композиција $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ представља индиректну изометријску трансформацију те равни. У тој индиректној изометријској трансформацији тачка $P$ је инваријантна, те према познатој теореми представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_p$ при чему је $P \in p$. Нека је $s$ права равни $E^2$ одређена релацијама $O \in s$ и $s \perp p$ . Ако обележимо са $X$ било коју тачку равни $E^2$, различиту од тачке $P$, и са $X'$ тачку такву да је $\mathcal{I}(X) = X'$ , биће средиште $Y$ дужи $XX'$ на правој $s$. Заиста, ставимо ли да је $\mathcal{S}_O(X') = X''$, биће $\mathcal{S}_p(X) = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}(X) = X''$, па је права $p$ медијатриса дужи $XX''$, и при томе управна на правој $OY$ која је одређена средиштима страница $X'X''$ и $X'X$ троугла $XX'X''$. Због тога су праве $s$ и $OY$ истоветне, па је Y $\in s$.

■

**Дефиниција2.5.3:** Праву $s$ која садржи средишта дужи одређених одговарајућим тачкама индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ равни $E^2$ називамо осом те индиректне изометријске трансформације.

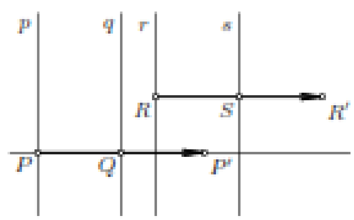
# 2.6. Транслација равни $E^2$

Сем централних ротација постоји још једна врста изометријских трансформација равни $E^2$ које се могу представити као композиција двеју осних рефлексија; то су тзв. транслације равни $E^2$.

**Дефиниција2.6.1:** Нека су $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ две осне рефлексије простора $E^2$ којима су осе $p$ и $q$ управне на неку праву $s$ у двема разним тачкама $P$ и $Q$, и нека је $P' = \mathcal{S}_q(P)$. Померањем или транслацијом равни $E^2$ по правој $s$ за орјентисану дуж $PP' \subset s$ називамо трансформацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} : E^2 \longrightarrow E^2$ одређену релацијом $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.

С обзиром да је осна рефлексија равни $E^2$ индиректна изометријска трансформација, композиција састављена од две осне рефлексије, па према томе и транслација равни $E^2$, представља директну изометријску трансформацију. Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ нема инваријантних тачака, али поседује бесконачно много инваријантних правих (то су праве паралелне са $PP'$).

**Теорема2.6.1:** Две транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$ исте равни $E^2$ међу собом су једнаке ако и само ако су дужи $PP'$ и $RR'$ међу собом подударне и истосмерне.



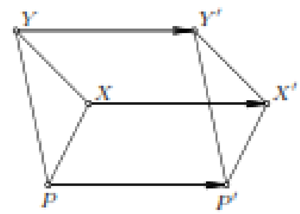

Доказ: Нека су $Q$ и $S$ средишта дужи $PP'$ и $RR'$. Ако обележимо са $p$ и $q$ праве које су у тачкама $P$ и $Q$ управне на правој $PQ$, а $r$ и $s$ праве које су у тачкама $R$ и $S$ управне на правој $RS$, биће $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r$ .
Ако претпоставимо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$ , имамо да је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r$ па је

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s \qquad (*)$$

Из ове релације следује да праве $p, q, r, s$ припадају једном прамену, обележимо га са $\mathcal{X}$. С обзиром да је $p \neq q$ и $p \parallel q$, $\mathcal{X}$ је прамен паралелних правих. Из релације (*) такође следи да су праве $p$ и $s$ изогонално спрегнуте са правама $q$ и $r$. Одатле следи да су дужи $PQ$ и $RS$, према томе и дужи $PP'$ и $RR'$ међу собом подударне и истосмерне.
Обратно, ако претпоставимо да су дужи $PP'$ и $RR'$ међу собом подударне и истосмерне, биће праве $p, q, r, s$ међу собом паралелне, а оса симетрије правих $p$ и $s$ истоветна са осом симетрије правих $q$ и $r$. Због тога је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_s$ , тј. $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_r$ и према томе $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{RR'}}$ .

■

**Теорема2.6.2:** Ако у транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ тачкама $X$ и $Y$ одговарају тачке $X'$ и $Y'$, тада су дужи $XX'$ и $YY'$ међу собом подударне и истосмерне.




Доказ: Установимо најпре да су дужи $PP'$ и $XX'$ међу собом подударне и истосмерне. Ако обележимо са $X'_1$ тачку такву да су дужи $PP'$ и $XX'_1$ подударне и истосмерне, према Теореми2.6.1 имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XX'_1}}$. Користећи ову једнакост налазимо да је $X'_1 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{XX'_1}}(X) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$.

Због тога су дужи $PP'$ и $XX'$ подударне и истосмерне. Истим поступком се доказује да су и дужи $XX'$ и $YY'$ подударне и истосмерне.

■

Из претходних теорема следи да је транслација равни $E^2$ једнозначно одређена било којим паром одговарајућих тачака.

**Теорема2.6.3:** Ако директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ нема инваријатних тачака, она представља транслацију те равни.

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ директна изометријска трансформација равни $E^2$, она се може представити као композиција две осне рефлексије те равни; нека је нпр.

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \qquad (1).$$

По претпоставци трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па је $p \cap q = \emptyset$. Ако обележимо са $P$ било коју тачку праве $p$ и са $P'$ тачку такву да је $\mathcal{S}_q(P) = P'$ биће

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \qquad (2)$$

Из једнакости (1) и (2) следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$.

■

**Теорема2.6.4:** Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља транслацију те равни ако и само ако се може представити као композиција двеју разних централних рефлексија те исте равни.

Доказ: Претпоставимо најпре да изометријска трасформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ те равни.

Ако обележимо са $Q$ средиште дужи $PP'$, са $s$ праву одређену тачкама $P$ и $P'$, а са $p$ и $q$ праве које су у тачкама $P$ и $Q$ управне на правој $s$, имамо да је

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Обратно, претпоставимо сад да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља композицију двеју разних централних рефлексија; нека је нпр. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$.

Ако обележимо са $s$ праву одређену тачкама $P$ и $Q$, а са $p$ и $q$ праве које су у тачкама $P$ и $Q$ управне на правој $s$ и са $P'$ тачку такву да је $\mathcal{S}_q(P) = P'$, биће

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$$

■

**Теорема2.6.5:** Композиција две централне ротације равни $E^2$ представља централну ротацију, транслацију или коинциденцију.


Доказ: Нека су $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta}$ две централне ротације равни $E^2$ . Ако је $A = B$ , према раније доказаној теореми композиција $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}$ представља централну ротацију или коинциденцију. Размотримо случај када је $A \neq B$.
Обележимо са $c$ праву одређену тачкама $A$ и $B$, а са $a$ и $b$ праве одређене релацијама $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$. Множењем одговарајућих страна налазимо да је $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a$ .
У зависности од тога да ли се праве $a$ и $b$ секу у некој тачки $C$ или су међу собом паралелне, разматрана композиција представља централну ротацију са средиштем $C$ и углом $\gamma = 2\measuredangle(a,b)$ или неку транслацију за неку орјентисану дуж $MN$, наиме биће $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{C,\gamma}$ или $\mathcal{R}_{B,\beta} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$.

■

**Теорема2.6.6:** Скуп $\mathcal{T}$ који се састоји из идентичке трансформације и свих транслација равни $E^2$ представља подгрупу групе $G(\mathcal{J}^+)$ свих директних изометријских трансформација те исте равни.

Доказ: Нека су $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ било које две транслације из скупа $\mathcal{T}$. Ако је $E$ тачка која у транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ одговара тачки $B$, према познатој теореми имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$.
Ако затим обележимо са $M$ и $N$ средишта дужи $AB$ и $BE$, и са $M'$ тачку такву да је $\mathcal{S}_N(M) = M'$, биће

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} \in \mathcal{T}.$$

На тај начин, композиција сваке две трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из тог скупа.
Ако је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ произвољна трансформација из скупа $\mathcal{T}$ и $R$ средиште дужи $PQ$, имамо да је $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{PQ}} = (\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_R)^{-1} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q = \mathcal{T}_{\overrightarrow{QP}} \in \mathcal{T}$ .
Због тога инверзна трансформација било које трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из тог скупа.
С обзиром да трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља елементе из групе $G(\mathcal{J}^+)$, из доказаних својстава следи да скуп $\mathcal{T}$ представља подгрупу те групе.

■

**Дефиниција2.6.2:** Групу установљену предходном теоремом називамо **групом транслација** равни $E^2$, и симболички обележавамо са $G(\mathcal{T})$.

**Теорема2.6.7:** Група транслација $G(\mathcal{T})$ равни $E^2$ је комутативна; другим речима, за сваке две транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ равни $E^2$ важи релација

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} .$$

Доказ: Нека је $E$ тачка која у транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ равни $E^2$ одговара тачки $B$. Према раније изведеној теореми имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ако обележимо са $M$ и $N$ средиште дужи $AB$ и $BE$, применом теореме2.6.4 налазимо да је

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M,$$

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B .$$

Према раније доказаној теореми, композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N$ представља централну рефлексију, дакле инволуциону трансформацију. Стога квадрат те композиције представља инволуцију, наиме биће

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N = \mathcal{E}, \text{ тј. } \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M .$$

Из ове и претходне две једнакости следи да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ .

■

**Теорема2.6.8:** Ако је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ транслација и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација еуклидске равни $E^2$ , затим $M'$ и $N'$ тачке које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, тада важи релација

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} .$$

Доказ: Ако обележимо са $m$ праву која је у тачки $M$ управна на праву $MN$ и са $n$ медијатрису дужи $MN$, биће $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ .

Ако затим обележимо са $m'$ и $n'$ праве које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају респективно правама $m$ и $n$, биће права $m'$ у тачки $M'$ управна на праву $M'N'$, а права $n'$ медијатриса дужи $M'N'$, па је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} = \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'}$.

Применом теореме2.1.5 налазимо да је

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ (\mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m) \circ \mathcal{I}^{-1}$$
$$= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_n \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_m \circ \mathcal{I}^{-1}) = \mathcal{S}_{n'} \circ \mathcal{S}_{m'} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

■

**Теорема2.6.9:** Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ еуклидске равни $E^2$ су две комутативне трансформације ако и само ако је права $MN$ паралелна са правом $p$, наиме биће $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p \iff MN \parallel p$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p$ тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ .

Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у осној рефлексији $\mathcal{S}_p$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, према претходној теореми имамо да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$.

Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$, па су орјентисане дужи $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ подударне и истосмерне, што је могуће само у случају када је $MN \parallel p$.

Обратно, претпоставимо да је $MN \parallel p$.

Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у осној рефлексији $\mathcal{S}_p$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, биће орјентисане дужи $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ подударне и истосмерне, па је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$. Па применом претходне теореме имамо да је

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_p.$$

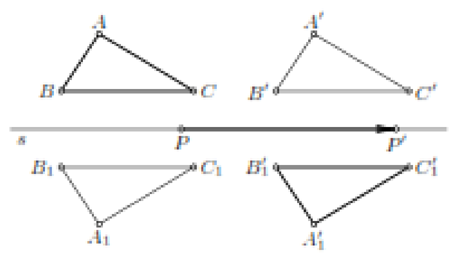
■

# 2.7. Клизајућа рефлексија равни $E^2$

Проучавањем изометријских трансформација равни $E^2$ којима се минимална симетријска репрезентација састоји из три осних рефлексија предходи увођење нарочите врсте изометријских трансформација; то су тзв. Клизајуће рефлексије.

**Дефиниција2.7.1:** Клизајућом или транслаторном рефлексијом $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ називамо композицију састављену из транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и осне рефлексије $\mathcal{S}_{PP'}$, те исте равни тј. $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ . Праву $s$ одређену тачкама $P$ и $P'$ називамо осом клизајуће рефлексије $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ .

Клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ је једнозначно одређена паром одговарајућих тачака $P$ и $P'$. Она представља индиректну изометријску трансформацију као композиција директне и индиректнр изометријске трансформације.
Будући да транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_{PP'}$ помоћу којих је дефинисана клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ имају заједничку осу $PP'$, према теореми2.6.9 те две трансформације су комутативне па је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'}$.




Због тога приликом извођења конструкције лика који у клизајућој рефлексији равни $E^2$ одговара неком лику $\Phi \subset E^2$ није важно да ли се прво изводи транслација па осна рефлексија или обратно.

**Теорема2.7.1:** Клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ нема инваријантних тачака; она поседује јединствену инваријантну праву, то је оса $PP'$ те рефлексије.

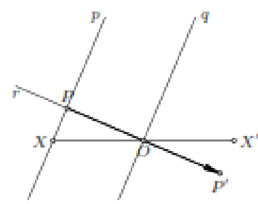
**Доказ:** Први део теореме докажимо индиректним поступком.
Ако претпоставимо да клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ поседује неку инваријантну тачку $X$ имамо да је $\mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X$. Ставимо ли да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$, биће $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$. С обзиром да транслација $\mathcal{S}_{PP'}$ равни $E^2$ нема инваријантних тачака биће $X \neq X'$. Из релација $\mathcal{S}_{PP'}(X') = X$ и $X \neq X'$ следи да су $X$ и $X'$ са разних страна праве $PP'$ што је немогуће јер из релације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(X) = X'$ следи да је $XX' \parallel PP'$. Због тога клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ равни $E^2$ нема инваријантних тачака.
Будући да је права $s$ на којој се налазе тачке $P$ и $P'$ инваријантна у свакој од тих трансформација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и $\mathcal{S}_{PP'}$, права $s$ је инваријантна и у клизајућој рефлексији $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$.

Индиректним поступком докажимо да је $s$ јединствена инваријантна права трансформације $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$.

Ако би трансформације $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ сем праве $s$ поседовала још неку инваријантну праву $t$, важила би релација $\mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}(t) = t$. Нека је $T$ тачка таква да је $T \in t$ и $T \notin s$, затим $T'$ тачка одређена релацијом $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}(T) = T'$. При томе су тачке $T$ и $T'$ са разних страна праве $s$, па права $t$ сече праву $s$ у некој тачки $S$. С обзиром да су у клизајућој рефлексији $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}$ праве $s$ и $t$ инваријантне, инваријантна је и њихова пресечна тачка $S$, што је према првом делу ове теореме немогуће.

■

**Теорема2.7.2:** Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ нема инваријантних тачака, она представља клизајућу рефлексију.

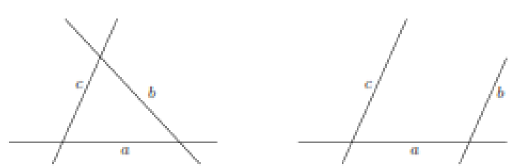



Доказ: Нека је $X$ произвољна тачка равни $E^2$ и $X'$ њена одговарајућа тачка. С обзиром да изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, имамо да је $X \neq X'$. Ако обележимо са $O$ средиште дужи $XX'$, биће $X$ инваријантна тачка композиције $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$. Будући да је $\mathcal{I}$ индиректна и $\mathcal{S}_O$ директна изометријска трансформација равни $E^2$, композиција $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ представља индиректну изометријску трансформацију те равни. Због тога она представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_p$ којој оса $p$ садржи неку инваријантну тачку $X$. Из једнакости $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ налазимо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p$. По претпоставци, изометрија $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, па $O \notin p$. Ако обележимо са $r$ праву која припада равни $E^2$, садржи тачку $O$, а управна је на правој $p$, са $q$ праву која припада равни $E^2$ и управна је на правој $r$ у тачки $O$, а са $P$ и $P'$ тачке одређене релацијама $p \cap r = P$ и $\mathcal{S}_q(P) = P'$, имамо да је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}}.$$

■

**Теорема2.7.3:** Композиција састављена од три осних рефлексија неке равни $E^2$, којима осе не припадају истом прамену правих, представља клизајућу рефлексију те равни.




Доказ: Нека су $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ три осне рефлексије исте равни $E^2$ којима осе $a, b, c$, не припадају једном прамену правих. Композиција $\mathcal{I} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ састављена од тих осних рефлексија представља индиректну изометријску трансформацију која нема инваријантних тачака. Заиста, ако би индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседовала инваријантну тачку $O$, према теореми2.1.3 она би представљала неку осну рефлексију, па би праве $a, b, c$ припадале једном прамену правих, што је супротно претпоставци. С обзиром да је $\mathcal{I}$ индиректна изометријска трансформација равни $E^2$ без инваријантних тачака, према претходној теореми она представља клизајућу рефлексију те равни.

■

**Теорема2.7.4:** Ако су $P$ и $P'$ две разне тачке равни $E^2$ и $s$ права те исте равни, тада је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P \iff \mathcal{S}_s(P) = P'$ .

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P$ .

Ако обележимо са $s'$ медијатрису дужи $PP'$ и са $p$ праву која припада равни $E^2$ и задовољава релације $P \in p$ и $p \perp PP'$, имамо да је

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_{s'} \circ \mathcal{S}_P.$$

Због тога је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_{s'}$ , па је $s = s'$ , и према томе $\mathcal{S}_s(P) = P'$.

Обратно, нека је $\mathcal{S}_s(P) = P'$.

Ако обележимо са $p$ праву која припада равни $E^2$ и која је у тачки $P$ управна на правој $PP'$, имамо да је

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PP'} = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_P.$$

■

# 2.8. Класификација изометријских трансформација еуклидске равни $E^2$

У претходним поглављима разматрали смо више различитих врста изометријских трансформација еуклидске равни $E^2$. Природно се поставља питање да ли су њима обухваћене све постојеће врсте изометријских трансформација те равни. Одговор на то питање даћу у наредне две теореме којима се изводе класификације респективно директних и индиректних изометријских трансформација поменуте равни.

**Теорема2.8.1:** Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља коинциденцију, транслацију или централну ротацију.

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ директна изометријска трансформација равни $E^2$, према раније наведеној теореми она се може представити у облику композиције двеју осних рефлексија. Нека је нпр. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ .
У зависности на међусобан положај оса $m$ и $n$ те две осне рефлексије равни $E^2$, разликујемо три могућности:

1. Ако су осе $m$ и $n$ истоветне. Тада из инволутивности осне рефлексије равни $E^2$ непосредно закључујемо да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља коинциденцију, тј. да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E}$ .
2. Ако су осе $m$ и $n$ две разне међу собом паралелне праве. Тада композиција $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ представља неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ равни $E^2$, где је нпр. $M \in m$ и $M^{'} = \mathcal{S}_n(M)$. У том случају имамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ .
3. Ако се осе $m$ и $n$ осних рефлексија $\mathcal{S}_m$ и $\mathcal{S}_n$ секу у некој тачки $O$. Тада композиција $\mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$ представља централну ротацију $\mathcal{R}_{O,\omega}$ равни $E^2$, где је $\omega$ орјентисани угао између што га чини уређени пар правих $m$ и $n$. У том случају имамо $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{R}_{O,\omega}$ .

■

**Теорема2.8.2:** Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ представља осну или клизајућу рефлексију те равни.

Доказ: Према томе да ли изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ поседује или не поседује инваријантних тачака, разликујемо два случаја:

1. Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ поседује инваријантне тачке. Тада по теореми2.1.4 она представља осну рефлексију те равни.
2. Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ равни $E^2$ не поседује инваријантне тачке. Тада по теореми2.7.3 она представља клизајућу рефлексију те равни.

■

Изометријске трансформације еуклидске равни $E^2$

↙ ↘

Директне изометријске трансформације | Индиректне изометријске трансформације

↙ ↓ ↘ | ↙ ↘

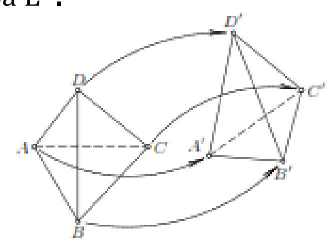
Коинциденција | Транслација | Централна ротација | Осна рефлексија | Клизајућа рефлексија

# 3.Врсте изометријских трансформација простора $E^3$

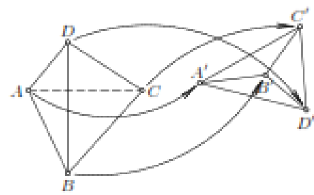
## 3.1. Директне и индиректне изометријских трансформација простора $E^3$

Постоје две врсте изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$**:**

1. **Директне** изометријске трансформације које не мењају орјентацију простора $\mathrm{E}^3$**.**
2. **Индиректне** изометријске трансформације које мењају орјентацију простора $\mathrm{E}^3$**.**




Директна изометријска трансформација




Индиректна изометријска трансформација

Да бисмо установили да ли је нека изометријска трансформација простора $\mathrm{E}^3$ директна или индиректна, довољно је установити да ли неке две одговарајуће четворке некомпланарних тачака одређују истосмерне или супротносмерне тетраедре.

Јасно је да идентична трансформација простора $\mathrm{E}^3$ представља директну изометријску трансформацију .
Позивајући се на теорему1.6 непосредно се установљује да је директна (индиректна) изометријска трансформација простора $\mathrm{E}^3$ једнозначно одређена ако су задата три пара одговарајућих неколинеарних тачака. Као специјалан случај тог тврђења налазимо да је директна изометријска трансформација простора $\mathrm{E}^3$ са три неколинеарне инваријантне тачке представља коинциденцију.
Композиција састављена из двеју директних или двеју индиректних изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$ увек представља директну изометријску трансформацију тог простора. Композиција састављена из једне директне и једне индиректне трансформације простора $\mathrm{E}^3$ увек представља индиректну изометријску трансформацију тог простора.
Скуп свих директних изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$ представља некомутативну подгрупу групе $G(\mathcal{J})$ свих изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$**.** Ту подгрупу називамо групом директних изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$ и симболички обележавамо са $G(\mathcal{J}^+)$.

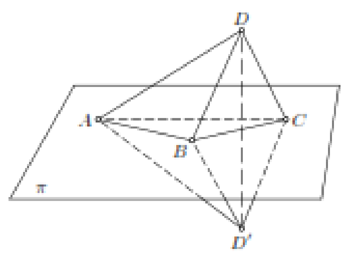
# 3.2. Раванска рефлексија простора $E^3$

Разврставању изометријских трансформација простора $\mathrm{E}^3$ можемо приступити и на други начин; нпр. по томе које су то неидентичне изометријске трансформације које поседују три неколинеарне инваријантне тачке, односно две, једну или нула инваријантних тачака.
Неидентичке изометријске трансформације простора $\mathrm{E}^3$ које поседују по три неколинеарне инваријантне тачке, и према томе по једну раван којој су све тачке инваријантне назваћемо **раванским рефлексијама**.

**Дефиниција3.2.1:** Раванском рефлексијом или раванском симетријом простора $\mathrm{E}^3$ са основом $\pi \subset \mathrm{E}^3$ називамо неидентичну изометријску трансформацију $\mathcal{S}_\pi$: $\mathrm{E}^3 \to \mathrm{E}^3$ којој је свака тачка равни $\pi$ инваријантна.

Из ове дефиниције и теореме доказане у првом поглављу непосредно закључујемо да раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора $\mathrm{E}^3$ ван равни $\pi$ нема инваријантних тачака.
Раванска рефлексија је једнозначно одређена својом основом $\pi$ или пак једним паром одговарајућих неистоветних тачака.

**Теорема3.2.1:** Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора $\mathrm{E}^3$ је индиректна изометријска трансформација.




Доказ: Ако обележимо са $A, B, C$ три неколинеарне тачке равни $\pi$, са $D$ било коју тачку ван равни $\pi$ и са $D'$ тачку такву да је $D' = \mathcal{S}_\pi(D)$, биће $D \neq D'$ и $\pi$ медијална раван дужи $DD'$. Због тога су тачке $D$ и $D'$ са разних страна равни $\pi$ па су одговарајући тетраедри $ABCD$ и $ABCD'$ супротносмерни, и према томе раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ индиректна трансформација.

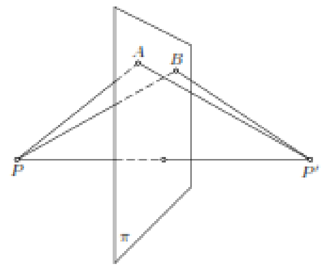
■

**Теорема3.2.2:** Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора $\mathrm{E}^3$ је инволуциона трансформација.

Доказ: Обележимо са $X$ произвољну тачку простора $\mathrm{E}^3$, и са $X', X''$ тачке такве да је $\mathcal{S}_\pi(X) = X'$ и $\mathcal{S}_\pi(X') = X''$.
Ако је $X \in \pi$, тада је $X = X'$ и $X' = X''$, па је $X = X''$. Ако $X \notin \pi$, тада је $X \neq X'$ и $X' \neq X''$, па је основа $\pi$ раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ медијална раван сваке од дужи $XX'$ и $X'X''$, па је $X = X''$. Овим смо доказали да у сваком случају важи релација $\mathcal{S}_\pi^2 = \varepsilon$, па је раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ инволуциона трансформација.

■

**Теорема3.2.3:** Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $\mathrm{E}^3$ поседује две разне инваријантне тачке $A$ и $B$, она представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\pi$ простора $\mathrm{E}^3$ којој основа $\pi$ садржи обе тачке $A$ и $B$.




Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ индиректна и $\mathcal{E}$ директна изометријска трансформација, биће $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Због тога у простору $\mathrm{E}^3$ постоји тачка $P$ таква да је $\mathcal{I}(P) = P'$ и $P \neq P'$. При томе је $(P, A) \cong (P', A)$ и $(P, B) \cong (P', B)$, па се свака од тачака $A$ и $B$ налази у медијалној равни $\pi$ дужи $PP'$. Будући да су $\mathcal{S}_\pi$ и $\mathcal{I}$ индиректне изометријске трансформације, композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију простора $\mathrm{E}^3$. Та трансформација поседује три инваријантне неколинеарне тачке $A, B, P$, па према теореми3.2.1, она представља коинциденцију. Због тога је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, и према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$ .

■

**Теорема3.2.4:** Ако је $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија простора $\mathrm{E}^3$ и $p$ права која се налази у том простору, а не припада равни $\pi$, тада је $\mathcal{S}_\pi(p) = p \iff p \perp \pi$.

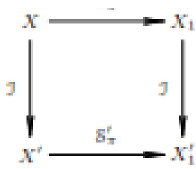
Доказ: Ако је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$, тада је $\pi \cap p \neq \emptyset$. Заиста ако би важила релација $\pi \cap p = \emptyset$, тада би истоветне праве $\mathcal{S}_\pi$ и $p$ биле са разних страна равни $\pi$ што је немогуће. Због тога је $\pi \cap p \neq \emptyset$. Из те релације и релације $p \notin \pi$ следи да права $p$ продире раван $\pi$ у некој тачки $O$. Ако је $P$ тачка праве $p$ различита од $O$ и $P'$ њена одговарајућа тачка у раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$ , имамо да је $P \neq P'$ и $P' \in p$ , па је $\pi$ медијална раван дужи $PP'$ и према томе $p \perp \pi$.
Обратно, ако је $p \perp \pi$ у некој тачки $O$, тада је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$ .
Заиста, ако је $P$ тачка праве $p$ различита од $O$ и $P'$ њена одговарајућа тачка у раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$ , имамо да је $P \neq P'$, па је $\pi$ медијална раван дужи $PP'$ те је $p \perp \pi$. Због тога је $P' \in p$, дакле и $\mathcal{S}_\pi(p) = p$ .

■

**Теорема3.2.5:** Ако су $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ две раванске рефлексије простора $\mathrm{E}^3$ са разним основама $\alpha$ и $\beta$, а $X$ тачка тог простора, тада је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X \iff X \in \alpha \cap \beta$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(X) = X$.
Ако обележимо са $X'$ тачку такву да је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X'$ биће $\mathcal{S}_\beta(X') = X$. Индиректним поступком докажимо да је $X' = X$. Ако би важила релација $X \neq X'$, тада би постојале две разне медијалне равни $\alpha$ и $\beta$ дужи $XX'$ што је немогуће. Због тога је $X = X'$, па је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ и $\mathcal{S}_\beta(X) = X$. Из ових једнакости следи да је $X \in \alpha$ и $X \in \beta$, па је $X \in \alpha \cap \beta$.
Обратно, ако претпоставимо да је задовољена релација $X \in \alpha \cap \beta$, тада је $X \in \alpha$ и $X \in \beta$, па је $\mathcal{S}_\alpha(X) = X$ и $\mathcal{S}_\beta(X) = X$. ■

**Теорема3.2.6:** Ако је $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија простора $\mathrm{E}^3$ и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација тог простора, затим $\pi'$ раван која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара равни $\pi$, тада важи релација $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}$ .




Доказ: Према дефиницији раванске рефлексије, за сваку тачку $X' \in \pi'$ која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара некој тачки $X \in \pi$ имамо да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = \mathcal{J}^{-1}(X')$. Ако обе стране ове једнакости помножимо са лева са изометријом $\mathcal{J}$, добијамо да је

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = \mathcal{J} \circ \mathcal{J}^{-1}(X') = \mathcal{E}(X') = X'$$

На тај начин, композиција $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1}$ преводи сваку тачку равни $\pi'$ у ту исту тачку. С обзиром да та композиција представља индиректну, дакле неидентичну, изометријску трансформацију простора $\mathrm{E}^3$ којој је свака тачка равни $\pi'$ инваријантна, она представља раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi'}$ , наиме биће

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'} .$$

■

**Теорема3.2.7:** Две раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ простора $\mathrm{E}^3$**,** са разним основама $\alpha$ и $\beta$, су комутативне трансформације ако и само ако је $\alpha \perp \beta$, наиме биће

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \iff \alpha \perp \beta .$$

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$ , тј.

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \qquad (*)$$

Ако обележимо са $\alpha'$ раван одређену релацијом $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha'$ , према закону трансмутације раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\beta$, налазимо да је

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_{\alpha'} \qquad (**)$$

Из једнакости (*) и (**) следи да је $\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_{\alpha'}$ , па је $\alpha = \alpha'$, тј. $\alpha = \mathcal{S}_\beta(\alpha)$. Отуда и из релације $\alpha \neq \beta$ закључујемо да је $\alpha \perp \beta$ .
Обратно, претпоставимо да је $\alpha \perp \beta$ .
Из ове релације следи да је $\mathcal{S}_\beta(\alpha) = \alpha$, па према закону трансмутације раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\beta$, налазимо да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha$ , тј.

$$\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$$

■

## 3.3. Представљање изометријских трансформација простора $E^3$ помоћу раванских рефлексија

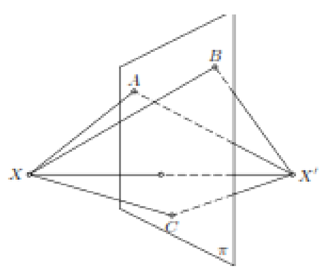
У овом одељку биће представљено својство изометријских трансформација еуклидског простора $\mathrm{E}^3$ према којем се свака изометријска трансформација тог простора може представити у облику композиција коначног броја раванских рефлексија.

Показаћу да минималан број раванских рефлексија помоћу којих се може представити било која унапред задата изометријска трансформација простора $\mathrm{E}^3$ није већи од четири. Што нам омогућује да помоћу раванских рефлексија изградимо и целу теорију изометријска трансформација еуклидског простора $\mathrm{E}^3$**.**

**Теорема3.3.1:** Свака изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $\mathrm{E}^3$ може се представити као композиција коначног броја раванских рефлексија, минималан број раванских рефлексија заступљених у таквој композицији није већи од четири.

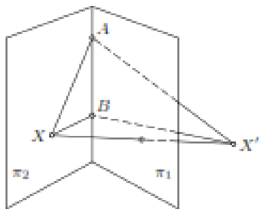
Доказ: Према максималном броју инваријантних линеарно независних тачака изометријске трансформације $\mathcal{I}$, разликујемо следећих пет случаја:

1) **Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ може да поседује четири некомпланарне инваријантне тачке.**
   Обележимо их са $A, B, C, D$. Према познатој теореми, таква изометријска трансформација представља коинциденцију, па с обзиром на инволутивност било које раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ простора $\mathrm{E}^3$ имамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi$.
2) **Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује највише три инваријантне линеарно независне тачке.**



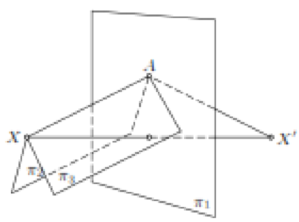

Обележимо их са $A, B, C$ . Те тачке су неколинеарне, па одређују неку раван $\pi$. С обзиром да ван равни $\pi$ изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инвааријантних тачака, имамо да је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Стога постоји тачка $X \in \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе важе релације $(A,X) \cong (A,X')$, $(B,X) \cong (B,X')$, $(C,X) \cong (C,X')$, па је $\pi$ медијална раван дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I}$ представља изометријску трансформацију која има четири некомпланарне инваријантне тачке $A, B, C, X$ па је према 1) $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, па према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_\pi$.

3) **Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује највише две инваријантне линеарно независне тачке.**




Обележимо их са $A, B$. Те тачке су различите па одређују неку праву $p$. С обзиром да ван праве $p$ изометријска трансформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака, имамо да је је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$. Стога - постоји тачка $X \in \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе важе релације $(A, X) \cong (A, X')$, $(B, X) \cong (B, X')$, па је свака од тачака $A$ и $B$ садржана у медијалној равни $\pi_1$ дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља изометријску трансформацију која има три инваријантне неколинеарне тачке $A, B, X$. Те тачке одређују неку раван $\pi_2$. Ван те равни композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ нема инваријантних тачака јер би у противном важила релација $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, те би изометрија $\mathcal{I}$ поседовала три инваријантне неколинеарне тачке, што је супротно претпоставци. Због тога према 2) имамо да је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$, па је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$.

**4) Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ поседује јединствену инваријантну тачку.**




Обележимо је са $A$. С обзиром да је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, постоји тачка $X \in \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. При томе важи $(A, X) \cong (A, X')$, па је тачка $A$ у медијалној равни $\pi_1$ дужи $XX'$. Ван праве $AX$ композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ нема инваријантних тачака. Заиста, ако би та композиција поседовала четири некомпланарне инваријантне тачке, важила би релација $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, па би изометрија $\mathcal{I}$ поседовала више инваријантних тачака, што је супротно претпоставци.
Ако би поменута композиција поседовала највише три инваријантне линеарно независне тачке, она би према 2) представљала неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi_2}$ па би из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ следила релација $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$. Како је $\mathcal{I}(A) = A$, тј. $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}(A) = A$, према раније доказаној теореми имамо да је $A = \pi_1 \cap \pi_2$. Будући да равни $\pi_1$ и $\pi_2$ поседују заједничку тачку $A$, оне поседују најмање још једну заједничку тачку $B$. У том случају имамо да је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}(B) = B$, тј. $\mathcal{I}(B) = B$ па би изометрија $\mathcal{I}$ сем тачке $A$ поседовала још инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Овим је доказано да ван праве $AX$ композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ нема инваријантних тачака. Због тога према 3) изометријска трансформација $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља композицију двеју раванских рефлексија $\mathcal{S}_{\pi_2}$ и $\mathcal{S}_{\pi_3}$ којима се основе $\pi_2$ и $\pi_3$ секу по правој $AX$. Из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$.

**5) Изометријска транформација $\mathcal{I}$ нема инваријантних тачака.**

Утом случају изометрија $\mathcal{I}$ може се представити као композиција састављена из две, три или четири раванске рефлексије.
Обележимо са $X$ произвољну тачку простора $\mathrm{E}^3$, са $X'$ њену одговарајућу тачку и са $\pi_1$ медијалну раван дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља изометријску трансформацију простора $\mathrm{E}^3$, која поседује инваријантну тачку $X$. Та композиција не може имати четири некомпланарне тачке, јер

би тада важила релација $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, па би изометрија $\mathcal{I}$ имала инваријантних тачака, што је супротно претпоставци.
Ако би композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседовала највише три инваријантне линеарно независне тачке, она би према 2) представљала неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi_2}$ па би из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ следила релација $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$. При томе би важила релација $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, јер би у противном свака заједничка тачка равни $\pi_1$и $\pi_2$ била инваријантна тачка изометрије $\mathcal{I}$, што је супротно претпоставци.
Ако би композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседовала највише две инваријантне линеарно независне тачке, она би према 3) представљала композицију двеју раванских рефлексија $\mathcal{S}_{\pi_2}$ и $\mathcal{S}_{\pi_3}$ којима се основе $\pi_2$ и $\pi_3$ секу по правој $x$ која је одређена поменутим инваријантним тачкама. Из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. При томе, права $x$ не продире раван $\pi_1$, јер би тада продорна тачка представљала заједничку тачку равни $\pi_1, \pi_2$ и $\pi_3$ и према томе инваријантну тачку изометрије $\mathcal{I}$, што је супротно претпоставци.
Ако би композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседовала једино инваријантну тачку $X$, она би се према случају 4) могла представити као композиција трију раванских рефлексија, обележимо их са $\mathcal{S}_{\pi_2}, \mathcal{S}_{\pi_3}, \mathcal{S}_{\pi_4}$ . Из једнакости
$\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}$ .

■

**Дефиниција3.3.1:** Сваку композицију коначног броја раванских рефлексија еуклидског простора $\mathrm{E}^3$ којом је представљена нека изометријска трансформација $\mathcal{I}$ тог простора називамо раванскорефлексивном или симетријском репрезентацијом те изометрије. Симетријску репрезентацију изомерије $\mathcal{I}$ простора $\mathrm{E}^3$ састављену из најмањег могућег броја раванских рефлексија називамо минималном или оптималном симетријском репрезентацијом. Број раванских рефлексија из којих се састоји минимална симетријска репрезентација изометрије $\mathcal{I}$ називамо редом те изометрије.

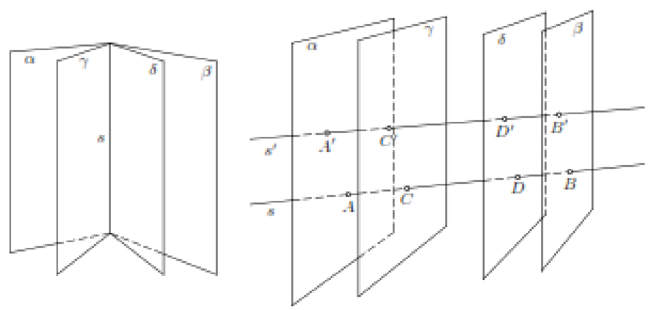
# 3.4. Праменови равни у простору $E^3$

С обзиром на узајамни положај равни, у геометрији простора $\mathrm{E}^3$ разликујемо равни које се секу по једној правој и равни које су међу собом паралелне. Тим узајамним положајима одговарају два прамена равни; то је прамен коаксијалних и прамен паралелних равни.

**Дефиниција3.4.1:** Скуп $\mathcal{X}$ свих равни простора $\mathrm{E}^3$ које се секу по једној правој $s$ називамо праменом коаксијалних равни са осом $s$ и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_s$. Скуп $\mathcal{X}$ свих равни простора $\mathrm{E}^3$ које су паралелне са неком равни $\sigma$, и према томе међу собом, називамо праменом паралелних равни и симболички обележавамо са $\mathcal{X}_\sigma$.

Прамен $\mathcal{X}_s$ је једнозначно одређен осом $s$, а прамен $\mathcal{X}_\sigma$ је једнозначно одређен било којом својом равни $\sigma$.

**Теорема3.4.1:** Ако три равни $\alpha, \beta, \gamma$ простора $\mathrm{E}^3$ припадају неком прамену $\mathcal{X}$, тада композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\delta$ којој основа $\delta$ такође припада прамену $\mathcal{X}$.




Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{X}$ прамен коаксијалних равни.
Нека је $s$ његова оса. С обзиром да права $s$ припада свакој од равни $\alpha, \beta, \gamma$, свака тачка праве $s$ инваријантна је у композицији $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. На тај начин, индиректна изометријска трансформација $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ поседује две разне инваријатне тачке, па представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\delta$. При томе је $s \subset \delta$ и према томе $\delta \in \mathcal{X}$.
Претпоставимо сад да је $\mathcal{X}$ прамен паралелних равни.
Нека су $s$ и $s'$ две разне праве управне на равнима $\alpha, \beta, \gamma$. С обзиром да свака раванска рефлексија $\mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta, \mathcal{S}_\gamma$ преводи сваку од правих $s$ и $s'$ у ту исту праву, мењајући њену орјентацију, и композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ такође преводи сваку од правих $s$ и $s'$ у ту исту праву, мењајући њену орјентацију. Због тога композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ поседује на свакој од правих $s$ и $s'$ по једну инваријантну тачку. Будући да та композиција предсавља индиректну изометријску трансформацију простора $\mathrm{E}^3$ са две разне инваријантне тачке она представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\delta$. При томе је $\delta \perp s$ и према томе $\delta \in \mathcal{X}$. ■

**Теорема3.4.2:** Ако композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ састављена из трију раванских рефлексија простора $\mathrm{E}^3$ представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_\delta$, тада основе $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ тих раванских рефлексија припадају једном прамену.

Доказ: Претпоставимо најпре да се равни $\alpha$ и $\beta$ секу по некој правој $s$.
Према познатој теореми, у композицији $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ свака тачка праве $s$ је инваријантна. Будући да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta$, тј. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$ , и у композицији $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$ биће свака тачка праве $s$ инваријантна. Због тога се и равни $\gamma$ и $\delta$ секу по правој $s$, те све равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ припадају једном прамену.
Претпоставимо сад да је $\alpha \parallel \beta$. Ако обележимо са $s$ неку праву управну на равнима $\alpha$ и $\beta$, имамо да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(s) = s$. Будући да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\delta$ , тј. $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$, биће и $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta(s) = s$. Стога је $\gamma, \delta \perp s$, те све равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ припадају једном прамену.

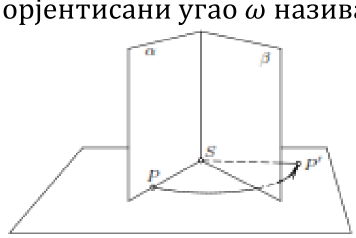
■

# 3.5. Осна ротација у простору $E^3$

**Дефиниција3.5.1:** Нека су $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ две раванске рефлексије еуклидског простора $\mathrm{E}^3$ којима се основе $\alpha$ и $\beta$ секу по некој правој $s$. Осним обртањем или осном ротацијом простора $\mathrm{E}^3$ око праве $s$ за угао $\omega$ називамо трансформацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ одређену релацијом

$$\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \quad (s = \alpha \cap \beta\ , \omega = 2\measuredangle(\alpha, \beta)).$$

Праву $s$ називамо осом, а орјентисани угао $\omega$ називамо углом ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$ .




С обзиром да је раванска рефлексија простора $\mathrm{E}^3$ индиректна изометријска трансформација, композиција двеју раванских рефлексија, према томе и осна ротација простора $\mathrm{E}^3$ , представља директну изометријску трансформацију.

**Теорема3.5.1:**(Даламбер, 1743) Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $\mathrm{E}^3$**,** која поседује најмање једну инваријантну тачку $O$ , представља коинциденцију или неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ којој оса $s$ садржи тачку $O$.

Доказ: Ако је $\mathcal{I} = \mathcal{E}$, тврђење следи непосредно.
Размотримо случај када је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$.
У том случају постоји тачка $P \in \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{I}(P)= P'$ и $P \neq P'$ . Нека је $\pi_1$ медијална раван дужи $PP'$. С обзиром да у изометријској трансформацији $\mathcal{I}$ тачкама $O$ и $P$ одговарају респективно тачке $O$ и $P'$, важи релација $OP \cong OP'$, па је тачка $O$ у медијалној равни $\pi_1$ дужи $PP'$. Због тога композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседује две разне инваријантне тачке $O$ и $P$. Будући да је $\mathcal{I}$ директна, а раванска рефлексија $\mathcal{S}_{\pi_1}$ индиректна изометријска трансформација, композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ је индиректна изометријска трансформација. На тај начин, индиректна изометријска трансформација $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседује две разне тачке $O$ и $P$, па према раније доказаној теореми представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi_2}$ којој основа $\pi_2$ садржи тачке $O$ и $P$. Због тога је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$, и према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$. Из релације $P \notin \pi_1$ и $P \in \pi_2$ следи да је $\pi_1 \neq \pi_2$. С обзиром да две различите равни $\pi_1$ и $\pi_2$ имају заједничку тачку $O$, оне се секу по некој правој $s$ која садржи тачку $O$. Због тога композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$, тј. Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ простора $\mathrm{E}^3$**.**

■

**Теорема3.5.2:** Скуп $\mathcal{R}_s$ који се састоји из идентичне трансформације и свих осних ротација простора $\mathrm{E}^{\mathbf{3}}$, које имају заједничку осу $s$, представља групу.

Доказ: Обележимо са $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{s,\beta}$ било које две осне ротације из скупа $\mathcal{R}_s$, а са $\pi$ произвољну раван која садржи праву $s$ и са $\mu, \nu$ равни одређене релацијама $\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$ . Користећи ове једнакости, налазимо да је $\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ .
С обзиром да равни $\mu$ и $\nu$ секу раван $\pi$ по правој $s$, равни $\mu$ и $\nu$ имају заједничку праву $s$, према томе оне су истоветне или се секу по правој $s$. Ако је $\mu = \nu$, тада је $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{E}$; ако је $\mu \cap \nu = s$, композиција $\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\gamma}$ . Овим смо доказали да у сваком случају важи релација $\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} \in \mathcal{R}_s$.
Ако обележимо са $\mathcal{R}_{s,\omega}$ било коју осну ротацију из скупа $\mathcal{R}_s$ и са $\mu, \nu$ равни простора $E^3$ такве да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$, биће

$$\mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = (\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu)^{-1} = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_{s,-\omega} \in \mathcal{R}_s .$$

С обзиром да трансформације из скупа $\mathcal{R}_s$ представљају елементе групе $G(\mathcal{J})$ свих изометријских трансформација простора $E^3$, из доказаних својстава следи да скуп $\mathcal{R}_s$ представља такође групу.

■

**Дефиницијај3.5.2:** Групу која се састоји из идентичне трансформације и свих осних ротација простора $E^3$, које имају заједничку осу $s$, називамо групом осних ротација простора $E^3$ око праве $s$, и симболички обележавамо са $G(\mathcal{R}_s)$.

**Теорема3.5.3:** Група $G(\mathcal{R}_s)$ осних ротација простора $E^3$ око праве $s$ је комутативна. Другим речима, за сваке две осне ротације $\mathcal{R}_{s,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{s,\beta}$ из скупа $\mathcal{R}_s$ важи релација $\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}$ .

Доказ: Обележимо са $\pi$ произвољну раван која садржи праву $s$ и са $\mu, \nu$ равни простора $E^3$ такве да је $\mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu$ и $\mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$ . Корестиће ове једнакости, налазимо да је

$$\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu , \quad \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi$$

С обзиром да равни $\mu$ и $\nu$ секу раван $\pi$ по истој правој $s$, равни $\pi, \mu$ припадају коаксалном прамену равни $\mathcal{X}_s$ , па композиција $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu$ представља неку раванску рефлексију дакле инволуциону трансформацију простора $E^3$. Због тога квадрат те композиције представља коинциденцију, наиме биће $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu = \mathcal{E}$ тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ .
Из ове и претходних једнакости налазимо да је $\mathcal{R}_{s,\beta} \circ \mathcal{R}_{s,\alpha} = \mathcal{R}_{s,\alpha} \circ \mathcal{R}_{s,\beta}$ .

■

**Теорема3.5.4:** Ако је $\mathcal{R}_{s,\omega}$ осна ротација и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација еуклидског простора $E^3$, затим $s'$ права која у изометрији $\mathcal{J}$ одговара правој $s$ и $\omega'$ угао који у изометрији $\mathcal{J}$ одговара углу $\omega$, тада је $\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$ .

Доказ: Ако обележимо са $\mu, \nu$ равни простора $E^3$ такве да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu$ , тада се равни $\mu$ и $\nu$ секу по правој $s$ под углом $\measuredangle(\mu, \nu) = \frac{1}{2}\omega$. Ако затим обележимо са $\mu'$ и $\nu'$ равни које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају респективно равнима $\mu$ и $\nu$, тада се равни $\mu'$ и $\nu'$ секу по правој $s'$ под углом $\measuredangle(\mu', \nu') = \frac{1}{2}\omega'$ , те применом теореме3.2.6 налазимо да је

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ \left(\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mu\right) \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I} \circ \left(\mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{I}^{-1} \circ \mathcal{S}_\mu\right) \circ \mathcal{I}^{-1}$$
$$= (\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{I}^{-1}) \circ \left(\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{I}^{-1}\right) = \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{R}_{s',\omega'} .$$

■

**Теорема3.5.5:** Осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ еуклидског простора $E^3$ су две комутативне трансформације ако и само ако је права $s$ управна на равни $\pi$ , наиме биће $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \iff s \perp \pi$ .

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi$ тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega}$. Ако обележимо са $s'$ праву која у раванској рефлексији одговара правој $s$ и са $\omega'$ угао који у тој истој рефлексији одговара углу $\omega$, применом теореме3.5.4 налазимо да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Због тога су осе $s$ и $s'$ истоветне, а орјентисани углови $\omega$ и $\omega'$ подударни и истосмерни, што је могуће само у случају ако је $s \perp \pi$ .
Обратно, претпоставимо да је $s \perp \pi$ . Ако обележимо са $s'$ праву која у раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$ одговара правој $s$ и са $\omega'$ угао који у тој истој рефлексији одговара углу $\omega$, биће праве $s$ и $s'$ истоветне, а орјентисани углови $\omega$ и $\omega'$ подударни и истосмерни, па је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s',\omega'}$. Због тога је применом теореме3.5.4

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s',\omega'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi.$$

■

**Теорема3.5.6:** Две осне ротације $\mathcal{R}_{a,\alpha}$ и $\mathcal{R}_{b,\beta}$ еуклидског простора $E^3$, којима углови $\alpha$ и $\beta$ нису опружени, представљају комутативне трансформације ако и само ако се осе тих ротација поклапају; другим речима, биће $\mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \iff a = b$ .

Доказ: Претпоставимо прво да је

$$\mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} = \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{a,\alpha} \text{ тј. } \mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a,\alpha}.$$

Ако у осној ротацији $\mathcal{R}_{b,\beta}$ правој $a$ одговара нека права $a'$, а углу $\alpha$ известан угао $\alpha'$ , према ппознатој теореми имамо да је $\mathcal{R}_{a,\alpha} \circ \mathcal{R}_{b,\beta} \circ \mathcal{R}_{b,\beta}^{-1} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}$ . Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{R}_{a,\alpha} = \mathcal{R}_{a',\alpha'}$ . Због тога су праве $a$ и $a'$ истоветне а углови $\alpha$ и $\alpha'$ подударни и истосмерни, што је могуће само у случају да је $a = b$ .
Обратно тврђење смо већ показали приликом извођења теореме3.5.3 .

■

# 3.6. Осна рефлексија простора $E^3$

Осне ротације простора $E^3$ у општем случају нису инволуционе трансформације. Оне су инволуционе само када су им углови ротације опружени. Такве осне ротације називамо осним рефлексијама.

**Дефиниција3.6.1:** Осном рефлексијом $\mathcal{S}_s$ простора $E^3$ називамо композицију две раванске рефлексије $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ простора $E^3$ којима основе $\alpha$ и $\beta$ задовољавају релацију $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \cap \beta = s$. На тај начин имамо да је:

$$\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \quad (\alpha \cap \beta = s).$$

Праву $s$ називамо осом осне рефлексије $\mathcal{S}_s$.

Из дефиниције непосредно следи да осна рефлексија представља осну ротацију којој је угао ротације једнак 180°. Она представља директну изометријску трансформацију простора $E^3$ којој су инваријантне једино тачке осе $s$.

**Теорема3.6.1:** Осна рефлексија $\mathcal{S}_s$ простора $E^3$ је инволуциона трансформација.

Доказ: Ако обележимо са $\alpha$ и $\beta$ две равни простора $E^3$ које задовољавају релације $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \cap \beta = s$ биће $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Користећи релацију $\alpha \perp \beta$, налазимо да је

$$\mathcal{S}_s^2 = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha) \circ (\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta) = \mathcal{E}$$

■

**Теорема3.6.2:** Раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ простора $E^3$, којима оса $p$ не припада основи $\pi$, представљају две комутативне трансформације ако и само ако је права $p$ управна на раван $\pi$, наиме биће

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi \iff p \perp \pi .$$

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$ тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p$ (*)
Ако обележимо са $p'$ праву одређену релацијом $\mathcal{S}_\pi(p) = p'$, према закону за трансмутацију осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ имамо да је

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{p'} \qquad (**)$$

Из једнакости (*) и (**) следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p'}$, и према томе да је $p = p'$. С обзиром да права $p$ не припада равни $\pi$ једнакост $p = p'$ важи само у случају када је $p \perp \pi$.
Обратно, претпоставимо да је $p \perp \pi$.
Из те релације следи да је $\mathcal{S}_\pi(p) = p$, па према закону за трансмутацију осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ имамо да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p$ тј.

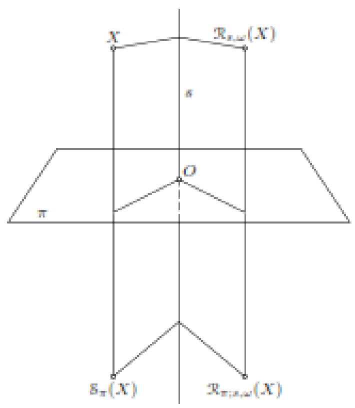
$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$$

■

# 3.7. Оснoротациона рефлексија простора $E^3$

У овом одељку проучаваћемо индиректне изометријске трансформације које поседују само по једну инваријантну тачку. Њиховом проучавању претходи увођење нове врсте индиректних изометријских трансформација; то су тзв. оснoротационе рефлексије простора $E^3$.

**Дефиниција3.7.1:** Композиција састављена из једне осне ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$ и једне раванске рефлексије простора $E^3$, при чему је $s \perp \pi$, називамо оснoротационом или само ротационом рефлексијом простора $E^3$ коју симболички обележавамо са $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$. На тај начин имамо да је $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{S}_\pi$ .
Раван $\pi$ називамо основом, праву $s$ називамо осом, тачку $O = s \cap \pi$ називамо средиштем или центром, а орјентисани угао $\omega$ називамо углом оснoротационе рефлексије $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$.




Из дефиниције непосредно следи да је оснoротациона рефлексија $\mathcal{R}_{\pi;\, s,\omega}$ простора $E^3$ једнозначно одређена основом $\pi$, осом $s$ и орјентисаним углом $\omega$. Тачка $O = s \cap \pi$ је инваријантна тачка, ако угао $\omega$ није опружен, оса $s$ је јединствена инваријантна права, а основа $\pi$ је јединствена инваријантна раван.

**Теорема3.7.1:** Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{J}$ простора $E^3$ која има јединствену тачку $O$ представља оснoротациону рефлексију са средиштем $O$.

Доказ: Нека је $X \in \mathrm{E}^3$ таква да је $\mathcal{J}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Из релације $(O, X) \cong (O, X')$ следи да тачка $O$ припада медијалној равни $\pi_1$ дужи $XX'$. Композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{J}$ представља директну изометријску трансформацију са двема разним инваријантним тачкама $O$ и $X$, па према теореми3.5.1 (Даламберовој) представља коинциденцију или неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ којој оса $s$ садржи тачке $O$ и $X$. Не може представљати коинциденцију, јер би у том случају из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{J} = \mathcal{E}$ следила релација $\mathcal{J} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, па би трансформација $\mathcal{J}$ сем тачке $O$ имала још

инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Због тога је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ , и према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$ .
С обзиром да права $s$ садржи тачку $O$ која се налази у равни $\pi_1$ и тачку $X$ која се налази ван равни $\pi_1$, права $s$ продире раван $\pi_1$ у тачки $O$. Ако је $s \perp \pi_1$ , обележимо са $\pi_2$ раван која садржи праву $s$ а управна је на раван $\pi_1$ и са $\pi_3$ раван такву да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. С обзиром да су равни $\pi_1$ и $\pi_2$ управне међу собом, оне се секу по некој правој $s_1$. Ако је $\delta_1$ раван која садржи праву $s_1$ а управна је на раван $\pi_3$ , затим са $\delta_2$ раван таква да је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{S}_{\delta_2}$ , композиција $\mathcal{S}_{\delta_2} \circ \mathcal{S}_{\delta_3}$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{t,\theta}$ којој је оса $t$ управна на равни $\delta_1$ па је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{S}_{\delta_2} \circ \mathcal{S}_{\delta_3} = \mathcal{S}_{\delta_1} \circ \mathcal{R}_{t,\theta} = \mathcal{R}_{\delta_1;\, t,\theta} .$$

■

**Теорема3.7.2:** Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ може се представити као композиција двеју осних рефлексија тог простора.

Доказ: Ако је $\mathcal{I} = \mathcal{E}$, тада због инволутивности осне рефлексије за сваку праву $p \subset E^3$ имамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p$ . Ако је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, тада постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$. Нека је $\pi_1$ медијална раван дужи $XX'$. Како је $\mathcal{I}$ директна и $\mathcal{S}_{\pi_1}$ индиректна изометријска трансформација простора $E^3$, композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља индиректну изометријску трансформацију тог простора. Из релације $\mathcal{I}(X) = X'$ и $\mathcal{S}_{\pi_1}(X') = X$ следи да је у композицији $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ тачка $X$ инваријантна. Ако композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ поседује сем тачке $X$ још неку инваријантну тачку Y, према теореми 3.2.3 она представља неку раванску рефлексију $\mathcal{S}_{\pi_2}$. У том случају, из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2}$ следи да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}$ . Ако обележимо са $\pi$ раван управну на обема равнима $\pi_1$ и $\pi_2$, а са m и n праве којима она сече те равни, биће $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \left(\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi}\right) \circ \left(\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi_2}\right) = \mathcal{S}_{\mathrm{m}} \circ \mathcal{S}_{\mathrm{n}}$.
Ако композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ сем тачке $X$ нема других инваријантних тачака, према претходној теореми, она представља неку осноротациону рефлексију $\mathcal{R}_{\pi_4;s,\omega}$ којој је средиште тачка $X$. Обележимо са $\pi_2$ раван која садржи праву $s$ и која је управна на равни $\pi_1$, а са $\pi_3$ раван такву да је $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$. У том случају, биће $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}$ тј. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} \circ \mathcal{S}_{\pi_4}$ . Из релација $\pi_1 \perp \pi_2$, $\pi_3 \perp \pi_4$ и једнакости $\pi_1 \cap \pi_2 = m, \pi_3 \cap \pi_4 = \mathrm{n}$ налазимо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\mathrm{m}} \circ \mathcal{S}_{\mathrm{n}}$.

■

# 3.8. Централна рефлексија простора $E^3$

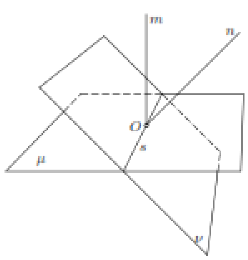
Осноротациона рефлексија простора $E^3$ у општем случају није инволуциона трансформација; она је инволуциона једино у случају када је угао ротације опружен. Такву осноротациону рефлексију зваћемо **централном рефлексијом** простора $E^3$. Због своје инволутивности она располаже низом специфичних својстава која представљају предмет разматрања овог одељка.

**Дефиниција3.8.1:** Централном рефлексијом $\mathcal{S}_0$ простора $E^3$ називамо композицију једне осне рефлексије $\mathcal{S}_\mathrm{s}$ и једне раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ простора $E^3$, при чему је $\mathrm{s} \perp \pi$ у тачки $O$. На тај начин, ако је права s управна на раван $\pi$ у тачки $O$, биће $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mathrm{s} = \mathcal{S}_\mathrm{s} \circ \mathcal{S}_\pi$ .
Тачку $O$ називамо центром или средиштем централне рефлексије $\mathcal{S}_0$.

Из дефиниције непосредно следи да централна рефлексија простора $E^3$ представља осноротациону рефлексију којој је угао ротације 180°. Као таква, она представља индиректну изометријску трансформацију простора $E^3$ која има само једну инваријантну тачку, то је средиште $O$ те централне рефлексије. Свакој другој тачки $X \in E^3$ одговара тачка $X' \in E^3$ таква да је тачка $O$ средиште дужи $XX'$.

**Теорема 3.8.1:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_0$ простора $E^3$ једнозначно је одређена својим средиштем $O$.

Доказ: Да бисмо извели доказ овог тврђења довољно је доказати да за сваке две праве m и n које се секу у тачки $O$ и равни $\mu$ *и* $\nu$ које су у тачки $O$ управне на правама m и n важи релација $\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mathrm{n}$ .




Ако обележимо са $\pi$ раван одређену правама m и n, а са $s$ праву по којој се секу равни $\mu$ *и* $\nu$, биће $\mathrm{s} \perp \pi$. Ако затим обележимо са $\mu'$ *и* $\nu'$ равни одређене паровима правих m, $s$ и n, $s$ имамо да је

$$\mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_\mathrm{m} = \mathcal{S}_\mu \circ \mathcal{S}_{\mu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\mathrm{s} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\mathrm{n}$$

■

**Теорема 3.8.2:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_0$ простора $E^3$ је инволуциона трансформација.

Доказ: Ако обележимо са $\pi$ раван која садржи тачку $O$ и са $s$ праву која је тачки $O$ управна на раван $\pi$, биће $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mathrm{s}$ па је

$$\mathcal{S}_0^2 = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s) = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_s) = \mathcal{E} .$$

■

**Теорема 3.8.3:** У централној рефлексији $\mathcal{S}_0$ простора $E^3$ правој $x$ која садржи тачку O одговара та иста права, правој $x$ која не садржи тачку O одговара права $x'$ таква да је $x \parallel x'$ и $x \cap x' = \emptyset$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $O \in x$.
Ако обележимо са $\pi$ раван која је тачки $O$ управна на праву $x$, имамо да је $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_x$, па је $\mathcal{S}_0(x) = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_\pi(x) = x$.
Претпоставимо сад да $O \notin x$.
Ако обележимо са $\pi$ раван одређену релацијама $O \in \pi$ и $\pi \perp x$, и са $p$ праву која је у тачки $O$ управна на раван $\pi$, биће $\mathcal{S}_0(x) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_p(x) = x'$ .
Будући да у осној рефлексији $\mathcal{S}_p$ правој $x$ која sадовољава релације $x' \parallel p$ и $x' \cap p = \emptyset$, имамо да је $x \parallel x'$ и $x \cap x' = \emptyset$.

■

**Теорема 3.8.4:** У централној рефлексији $\mathcal{S}_0$ простора $E^3$ равни $\pi$ која садржи тачку $O$ одговара та иста раван, равни $\pi$ која не садржи тачку $O$ одговара раван $\pi'$ таква да је $\pi \parallel \pi'$ и $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $O \in \pi$.
Ако обележимо са p праву која је у тачки $O$ управна на раван $\pi$, биће $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi$ па је $\mathcal{S}_0(\pi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_\pi(\pi) = \mathcal{S}_\pi(\pi) = x$.
Претпоставимо сад да $O \notin \pi$.
Ако обележимо са $p$ праву одређену релацијама $O \in p$ и $p \perp \pi$, и са $\delta$ раван која је у тачки $O$ управна на праву $p$, биће $\mathcal{S}_0(\pi) = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_p(\pi) = \mathcal{S}_\delta(\pi) = \pi'$ .
Из релације $\mathcal{S}_\delta(\pi) = \pi'$ и $\pi \cap \delta = \emptyset$ следи да су равни $\pi$ и $\pi'$ са разних страна равни $\delta$, па је $\pi \parallel \pi'$ и $\pi \cap \pi' = \emptyset$.

■

**Теорема 3.8.5:** Ако је $\mathcal{S}_0$ централна рефлексија и $\mathcal{J}$ било која изометријска трансформација простора $E^3$, затим $O'$ тачка таква да је $\mathcal{J}(O) = O'$, тада је

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{S}_{O'} .$$

*Доказ:* Обележимо са $p$ произвољну праву која садржи тачку $O$ и са $\pi$ раван која је у тачки $O$ управна на правој $p$. Ако у трансформацији $\mathcal{J}$ правој $p$ одговара права $p'$, а равни $\pi$ одговара раван $\pi'$, биће $p' \perp \pi'$ у некој тачки $O'$. Због тога је

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}^{-1} = (\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{J}^{-1}) \circ \left(\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}^{-1}\right) = \mathcal{S}_{\pi'} \circ \mathcal{S}_{p'} = \mathcal{S}_{O'}$$

■

**Теорема 3.8.6:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_0$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ простора $E^3$ су две комутативне трансформације ако и смо ако тачка $O$ припада равни $\pi$, наиме биће $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi \quad (*)$
тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_0$.
Ако обележимо са $O'$ тачку одређену релацијом $\mathcal{S}_\pi(O) = O'$, према закону трансмутације централне рефлексије $\mathcal{S}_0$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ имамо да је

$$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{O'} \qquad (**)$$

Из једнакости $(*)$ и $(**)$ следи да је $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{O'}$ , и према томе је $O = O'$, што је могуће само у случају када се тачка $O$ налази у равни $\pi$.

Обратно, претпоставимо сад да је $O \in \pi$.

Из ове релације следи да је $\mathcal{S}_\pi(O) = O$, па према закону за трансмутацију централне рефлексије $\mathcal{S}_0$ раванском рефлексијом $\mathcal{S}_\pi$ налазимо да је
$\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_0$ тј. $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_\pi$ .

■

**Теорема 3.8.7:** Централна рефлексија $\mathcal{S}_0$ и осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ простора $E^3$ су две комутативне трансформације ако и смо ако тачка $O$ припада правој $p$, наиме биће $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow O \in p$.

Доказ: : Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p$ $(*)$
тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_0$.
Ако обележимо са $O'$ тачку одређену релацијом $\mathcal{S}_p(O) = O'$, према закону трансмутације централне рефлексије $\mathcal{S}_0$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ имамо да је

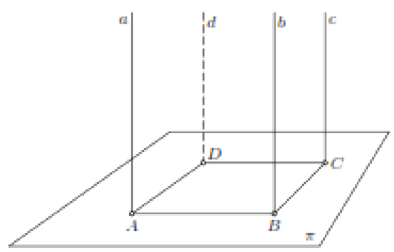
$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{O'} \qquad (**)$$

Из једнакости $(*)$ и $(**)$ следи да је $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{O'}$ , и према томе је $O = O'$, што је могуће само у случају када се тачка $O$ налази на правој $p$.

Обратно, претпоставимо сад да је $O \in p$.
Из ове релације следи да је $\mathcal{S}_p(O) = O$, па према закону за трансмутацију централне рефлексије $\mathcal{S}_0$ осном рефлексијом $\mathcal{S}_p$ налазимо да је
$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_0$ тј. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0 \circ \mathcal{S}_p$ .

■

**Теорема 3.8.8:** Композиција трију централних рефлексија простора $E^3$ представља такође централну рефлексију тог простора.




Доказ: Нека су дате три централне рефлексије $\mathcal{S}_\mathrm{A}$, $\mathcal{S}_\mathrm{B}$, $\mathcal{S}_\mathrm{C}$ еуклидског простора $E^3$.
Ако је при томе A=B или B=C, тада непосредно следи да композиција $\mathcal{S}_\mathrm{C} \circ \mathcal{S}_\mathrm{B} \circ \mathcal{S}_\mathrm{A}$ представља такође централну рефлексију.
Размотримо случај када је $A \neq B$ или $B \neq C$.
Ако обележимо са $\pi$ раван која садржи тачке A, $B$, $C$ и са $a, b, c$ праве које су у тим тачкама управне на равни $\pi$, налазимо да је

$$\mathcal{S}_\mathrm{C} \circ \mathcal{S}_\mathrm{B} \circ \mathcal{S}_\mathrm{A} = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_c) \circ (\mathcal{S}_\mathrm{b} \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a) = \mathcal{S}_\pi \circ (\mathcal{S}_\mathrm{c} \circ \mathcal{S}_\mathrm{b} \circ \mathcal{S}_\mathrm{a})$$

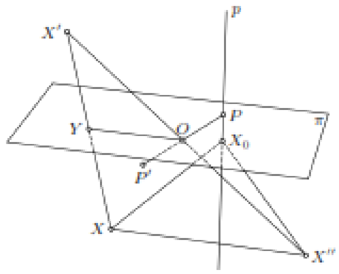
С обзиром да су праве $a, b, c$ управне на равни $\pi$, према раније доказаној теореми, композиција $\mathcal{S}_\mathrm{c} \circ \mathcal{S}_\mathrm{b} \circ \mathcal{S}_\mathrm{a}$ представља неку осну рефлексију $\mathcal{S}_d$ којој је оса $d$ управна на равни $\pi$. Ако продорну тачку те осе са равни $\pi$ означимо са D, биће

$$\mathcal{S}_\mathrm{C} \circ \mathcal{S}_\mathrm{B} \circ \mathcal{S}_\mathrm{A} = \mathcal{S}_\pi \circ (\mathcal{S}_\mathrm{c} \circ \mathcal{S}_\mathrm{b} \circ \mathcal{S}_\mathrm{a}) = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_D.$$

■

**Теорема 3.8.9:** Средишта дужи које спајају одговарајуће тачке индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ простора $E^3$ припадају једној равни.

Доказ: Нека је $P \in E^3$, $P^{'} = \mathcal{I}(P)$ и $O$ средиште дужи $PP'$.




С обзиром да су $\mathcal{I}$ и $\mathcal{S}_O$ индиректне изометријске трансформације простора $E^3$, композиција $\mathcal{S}_O \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију. У тој директној изометријској трансформацији тачка $P$ је инваријантна, па према Даламберовој теореми представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{p,\omega}$ при чему је $P \in p$.

Нека је $\pi$ раван одређена релацијама $O \in \pi$ и $\pi \perp p$. Ако обележимо са $X$ било коју тачку простора $E^3$, различиту од тачке $P$, и са $X'$ тачку такву да је $\mathcal{I}(X) = X'$,биће средиште Y дужи $X X'$ у равни $\pi$. Заиста, ставимо ли да је $\mathcal{S}_O(X') = X''$ биће $\mathcal{R}_{p,\omega}(X) = X''$. Због тога медијална раван $\delta$ дужи $X X''$ садржи праву $p$. Права одређена средиштима O и Y дужи X'X'' и X'X паралелна је са дужи XX'', и према томе управна на раван $\delta$, дакле и на правој $p \subset \delta$. Одатле следи релација $Y \in \pi$.

■

**Дефиниција3.8.2:** Раван $\pi$ којој припадају средишта дужи одређених одговарајућим тачкама индиректне изометријске трансформације $\mathcal{I}$ простора $E^3$ називамо основом те изометријске трансформације.

# 3.9. Транслација простора $E^3$

Сем осних ротација постоји још једна врста изометијских трансформација простора $E^3$ које се могу предствити као композиција двеју раванских рефлексија; то су тзв. транслације простора $E^3$.

**Дефиниција3.9.1:** Нека су $\mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_\beta$ две раванске рефлексије простора $E^3$ којима су основе $\alpha$ и $\beta$ управне на некој правој $s$ у двема разним тачкама $A$ и $B$ и нека је $A'$=$\mathcal{S}_\beta$(A). Паралелним померањем или транслацијом по правој $s$ за орјентисану дуж $PP' \subset s$ називамо трансформацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} : E^3 \longrightarrow E^3$, одређену релацијом $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ .

Из дефиниције можемо извести пар својства којима располажу транслације простора $E^3$. С обзиром да је раванска рефлексија простора $E^3$ индиректна изометријска трансформација, композиција двеју раванских рефлексија, према томе и транслација тог простора, представља директну изометријску трансформацију. Будући да је $\alpha \cap \beta = \emptyset$, композиција $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, према томе и транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ , простора $E^3$ нема инваријантних тачака. Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ простора $E^3$ преводи сваку праву $x \parallel PP'$ у ту исту праву, не мењајући њену орјентацију.

**Теорема3.9.1:** Изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ представља транслацију тог простора акко се може представити као композиција двеју разних централних рефлексија тог истог простора.

Доказ: Претпоставимо најпре да изометријска трансформација простора $E^3$ представља неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ тог простора.

Ако обележимо са Q средиште дужи PP', са s праву одређену тачкама P и P', а са $\alpha$ и $\beta$ равни управне на правој s у тачкама P и Q, применом теореме 3.6.1 налазимо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$.

Обратно, претпоставимо сада да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ представља композицију двеју разних централних рефлексија; нека је нпр.

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Ако обележимо са s праву одређену тачкама P и Q, са $\alpha$ и $\beta$ равни које су у тачкама P и Q управне на правој s и са P' тачку такву да је $\mathcal{S}_\beta(P) = P'$, применом теореме 3.6.1 налазимо да је $\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = (\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_s) \circ (\mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\alpha) = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ .

■

**Теорема3.9.2:** Скуп $\mathcal{T}$ који се састоји из идентичне трансформације и свих транслација простора $E^3$ представља подгрупу групе $\mathcal{G}(\mathcal{I}^+)$ свих директних изометријских трансформација тог истог простора.

Доказ: Обележимо са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ било које две транслације из скупа $\mathcal{T}$. Ако је Е тачка која у транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ одговара тачки В, имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$ . Ако су М и N средишта дужи АВ и ВЕ, а М' тачка симетрична тачки М у односу на тачку N, биће

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} \epsilon\, \mathcal{T}.$$

На тај начин композиција сваке две трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из скупа $\mathcal{T}$.

Ако је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}$ произвољна трансформација из скупа $\mathcal{T}$ и R средиште дужи PQ, имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}^{-1} = (\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_R)^{-1} = \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q = \mathcal{T}_{\overrightarrow{QP}} \in \mathcal{T}$ .

Због тога инверзна трансформација било које трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља такође трансформацију из тог скупа.

С обзиром да трансформације из скупа $\mathcal{T}$ представља елементе из групе $G(\mathcal{I}^+)$, из доказаних својстава следи да скуп $\mathcal{T}$ представља подгрупу те групе.

■

**Дефиниција3.9.2:** Групу установљену овом теоремом називамо **групом транслација** простора $E^3$ и симболички обележавамо са $G(\mathcal{T})$.

**Теорема3.9.3:** Групу транслација $G(\mathcal{T})$ простора $E^3$ је комутативна; другим речима, за сваке две транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ простора $E^3$ важи релација

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}.$$

Доказ: Нека је $E$ тачка која у транслацији $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ равни $E^3$ одговара тачки $B$. Према раније изведеној теореми имамо да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}}$. Ако обележимо са $M$ и $N$ средиште дужи $AB$ и $BE$, применом теореме3.9.1 налазимо да је

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M,$$

$$\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BE}} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B .$$

Према раније доказаној теореми, композиција $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N$ представља централну рефлексију, дакле инволуциону трансформацију. Стога квадрат те композиције представља коинциденцију, наиме биће

$$\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N = \mathcal{E}, \text{ тј. } \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_M \circ \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_M .$$

Из ове и претходне две једнакости следи да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}}$ .

■

**Теорема3.9.4:** Ако је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ транслација и $\mathcal{I}$ било која изометријска трансформација простора $E^3$ , затим $M'$ и $N'$ тачке које у изометрији $\mathcal{I}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, тада важи релација

$$\mathcal{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} .$$

Доказ: Ако обележимо са $\mu$ раван која је у тачки $M$ управна на праву $MN$ и са $\upsilon$ медијалну раван дужи $MN$, биће $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\mu$ .

Ако затим обележимо са $\mu'$ и $\upsilon'$ равни које у изометрији $\mathcal{J}$ одговарају респективно равнима $\mu$ и $\upsilon$, биће раван $\mu'$ у тачки $M'$ управна на праву $M'N'$, а раван $\upsilon'$ медијална раван дужи $M'N'$, па је

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J} \circ \left(\mathcal{S}_{\upsilon} \circ \mathcal{S}_{\mu}\right) \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J} \circ \left(\mathcal{S}_{\nu} \circ \mathcal{J}^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{S}_{\mu}\right) \circ \mathcal{J}^{-1}$$
$$= (\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_{\nu} \circ \mathcal{J}^{-1}) \circ \left(\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_{\mu} \circ \mathcal{J}^{-1}\right) = \mathcal{S}_{\nu'} \circ \mathcal{S}_{\mu'} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

■

**Теорема3.9.5 :** Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ и раванска рефлексија $\mathcal{S}_{\pi}$ простора $E^3$ су две комутативне трансформације ако и само ако је права $MN$ паралелна са равни $\pi$, наиме биће $\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi} \iff MN \parallel \pi$.

Доказ: Претпоставимо прво да је $\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi}$ тј. $\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ .
Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у раванској рефлексији $\mathcal{S}_{\pi}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, према претходној теореми имамо да је

$$\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}.$$

Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$, па је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$ , што је могуће само у случају када је $MN \parallel \pi$.
Обратно, претпоставимо да је $MN \parallel \pi$.
Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у раванској рефлексији $\mathcal{S}_{\pi}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, биће орјентисане дужи $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ подударне и истосмерне, па је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$. Па применом претходне теореме имамо да је

$$\mathcal{S}_{p} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{S}_{p} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}} \circ \mathcal{S}_{\pi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{S}_{\pi}.$$

■

**Теорема3.9.5 :** Транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ и осна ротација $\mathcal{R}_{s,\omega}$ простора $E^3$ су две комутативне трансформације ако и само ако су праве s и MN међу собом паралелне, наиме биће $\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \iff MN \parallel s$ .

Доказ: Претпоставимо најпре да је

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} \text{ тј. } \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$$

Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у осној ротацији $\mathcal{R}_{s,\omega}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, према познатој теореми имамо да је $\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$.
Из ове и претходне једнакости следи да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$, па су орјентисане дужи $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ једнаке и истоветне, што је могуће само ако је $MN \parallel s$ .
Обратно, претпоставимо сад да је $MN \parallel s$ .
Ако обележимо са $M'$ и $N'$ тачке које у осној ротацији $\mathcal{R}_{s,\omega}$ одговарају респективно тачкама $M$ и $N$, биће орјентисане дужи $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{M'N'}$ међу собом подударне и истосмерне, па је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M'N'}}$. Стога применом познате теореме налазимо да је

$$\mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}^{-1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{M^{'}N^{'}}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$$

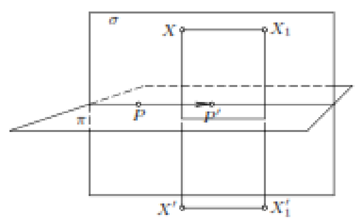
■

# 3.10. Клизајућа рефлексија простора $E^3$

У претходним излагањима проучаване су само индиректне изометријске трансформације простора $E^3$ које поседују једну или више инваријантних тачака. Проучавању индиректних изометријских трансформација простора $E^3$ које уопште немају инваријантних тачака претходи увођење специфичне врсте изометријских трансформација тог простора; то су тзв. **клизајуће рефлексије** простора $E^3$.

**Дефиниција3.10.1: Клизајућом** или **транслаторном рефлексијом** $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ простора $E^3$ називамо композицијом састављену из транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и раванске рефлексије $\mathcal{S}_\pi$ којој основа $\pi$ садржи праву PP'. С обзиром на релацију $PP' \subset \pi$ можемо писати да је $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$

Раван $\pi$ називамо основом, орјентисану праву PP' називамо осом, а орјентисану дуж PP' називамо транслационом дужи клизајуће рефлексије $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$.




Из дефиниције следи да је клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ простора $E^3$ једнозначно одређена ако је задата основа $\pi$ и транслациона дуж PP'. С обзиром да је транслација простора $E^3$ директна, а раванска рефлексија индиректна изометријска трансформација, онда је и клизајућа рефлексија, као композиција претходних, индиректна изометријска трансформација.
Клизајућа рефлексија $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ нема инваријантних тачака, али поседује бесконачно много инваријантних правих (то су праве које припадају равни $\pi$ а паралелне су са осом PP'); поседује само две инваријатне равни (то је основа $\pi$ и тзв. противоснова $\sigma$ која садржи праву PP' а управна је на раван $\pi$).

**Теорема3.10.1 :** Ако индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ нема инваријантних тачака, она представља клизајућу рефлексију.

Доказ: Нека је X произвољна тачка простора $E^3$ и $X' = \mathcal{I}(X)$. Ако обележимо са $\pi_1$ медијалну раван дужи $XX'$, тада композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију са инваријантном тачком X. Према Даламберовој теореми таква трансформација представља коинциденцију или осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ којој оса $s$ садржи тачку X. Не може представљати коинциденцију, јер би из релације $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$ следила релација $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$ те би изометрија $\mathcal{I}$ имала инваријантних тачака, што је супротно претпоставци. Стога је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ , и према томе $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$ .

При томе је $s \cap \pi_1 = \emptyset$, јер би у противном изометрија $\mathcal{I}$ поседовала инваријантних тачака, што је претпоставком искључено. Обележимо са $\pi_2$ и $\pi_3$ равни одређене релацијама $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ и $\pi_2 \perp \pi_3$, а са $\pi_1'$ и $\pi_2'$ равни одређене релацијама $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'}$ и $\pi_1' \perp \pi_3$. При томе је $\pi_2', \pi_3 \perp \pi_1'$ и $\pi_2' \cap \pi_3 = \emptyset$, те композиције $\mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3'}$ представљају неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ којој је оса PP' паралелна са равни $\pi_1'$. Због тога је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3'} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{G}_{\pi_1';\overrightarrow{PP'}} .$$

■

**Теорема3.10.2 :** Ако је $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}}$ клизајућа рефлексија простора $E^3$ и $q$ права која је у средишту Q дужи PP' управна на раван $\pi$ , тада је $\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q$.

Доказ: Користећи дефиницију клизајуће рефлексије простора $E^3$, налазимо да је

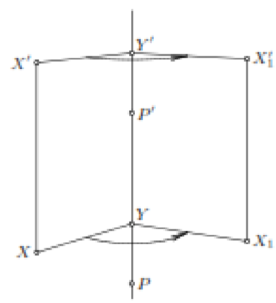
$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_P ;$$

$$\mathcal{G}_{\pi;\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_{P'} \circ \mathcal{S}_q .$$

■

# 3.11. Завојно кретање простора $E^3$

У претходним излагањима разматране су три врсте директних изометријских трансформација простора $E^3$ (коинциденција, осна ротација и транслација). Минимална симетријска репрезентација сваке од њих састојала се из само двеју раванских рефлексија. Директне изометријске трансформације простора $E^3$ којима се минималне симетријске репрезентације састоје из четири раванске рефлексије до сада нису разматране. Проучавању таквих изометријских трансформација претходи увођење специфичних врста изометрија тзв. **завојних кретања** простора $E^3$.




**Дефиниција3.11.1:** Завојним или хеликоидним кретањем $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ простора $E^3$ називамо композицију састављену из транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ и осне ротације $\mathcal{R}_{PP',\omega}$ тог простора. На тај начин имамо да је $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega} = \mathcal{R}_{PP',\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{R}_{PP',\omega}$ .
Орјентисану праву PP' називамо осом, а орјентисану дуж PP' називамо транслационом дужи, а орјентисани угао $\omega$ називамо углом завојног кретања $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$. Специјално, ако је угао $\omega$ опружен, завојно кретање називамо завојним полуобртањем.

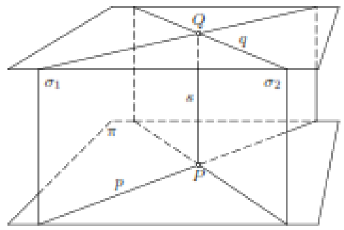
Из дефиниције непосредно следује да је завојно кретање $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ простора $E^3$ једнозначно одређено транслационом дужи PP' и углом $\omega$. Будући да су транслација и осна ротација простора $E^3$ директне изометријске трансформације, и њихова композиција, према томе и завојно кретање представља директну изометријску трансформацију простора $E^3$.

**Теорема3.11.1:** Завојно кретање $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ простора $E^3$ може се представити као композиција двеју осних рефлексија тог простора; осе тих рефлексија међу собом су мимоилазне.

Доказ: Ако обележимо са праву одређену тачкама P и P', а са $\pi_1, \pi_2$ и $\sigma_1, \sigma_2$ равни такве да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ и $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1}$ биће $\pi_1, \pi_2 \perp$ s и $\sigma_1 \cap \sigma_2 =$ s, па је $\sigma_1 \perp \pi_1$ и $\sigma_2 \perp \pi_2$ . Ставимо ли да је $\sigma_1 \cap \pi_1 = s_1$ и $\sigma_2 \cap \pi_2 = s_2$, налазимо да је

$$\mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{S}_{s_2} \circ \mathcal{S}_{s_1} \ \blacksquare$$

**Теорема3.11.2:** Композиција $\mathcal{I}$ састављена из двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_p$ и $\mathcal{S}_q$ простора $E^3$, којима су осе $p$ и $q$ мимоилазне, представља завојно кретање.




Доказ: С обзиром да су праве $p$ и $q$ мимоилазне постоји јединствена права s која их сече под правим углом. Нека је $P = p \cap s$ и $Q = q \cap s$. Ако обележимо са $\pi_1$ и $\pi_2$ равни управне на правој s у тачкама $P$ и $Q$, а са $\sigma_1$ и $\sigma_2$ равни од којих је прва одређена правама $p$ и $s$, а друга одређена правама $q$ и $s$, имамо да је $\sigma_1 \cap \pi_1 = p$ ,$\sigma_2 \cap \pi_2 = q$, и $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \mathrm{s}$ и $\sigma_1, \sigma_2 \perp \pi_1, \pi_2$ . Стога је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$$

Будући да су равни $\pi_1$ и $\pi_2$ управне на правој $s$ у двема разним тачкама $P$ и $Q$, композиција $\mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ представља транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ где је $P' = \mathcal{S}_{\pi_2}(P)$. Како је $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \mathrm{s}$, имамо да је $\mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ , где је $\omega$ орјентисани угао одређен равнима $\sigma_1$ и $\sigma_2$. При том се оса транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ поклапа са осом осне ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$ па је $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{PP'},\omega}$ .

■

# 3.12. Класификација изометријских трансформација простора $E^3$

У претходним поглављима разматрали смо више различитих врста изометријских трансформација простора $E^3$. Природно се поставља питање да ли су њима обухваћене све постојеће врсте изометријских трансформација тог простора. Одговор на то питање даћу у наредне две теореме којима се изводе класификације респективно директних и индиректних изометријских трансформација.

**Теорема3.12.1: (М. Шал, 1830)** Свака директна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ представља коинциденцију, транслацију, осну ротацију или завојно кретање.

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ директна изометријска трансформација простора $E^3$, према раније доказаној теореми она се може представити у облику композиције двеју осних симетрија тог простора: нека је нпр. $\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m$.
У зависности од тога какав је узајамни положај оса m и nтих симетрија, разликујемо следеће четири могућности

1. Ако су осе $m$ и $n$ истоветне. Тада из инволутивности осне рефлексије простора $E^3$ непосредно закључујемо да изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ представља коинциденцију, тј. да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_m \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{E}$ .

2. Ако су осе $m$ и $n$ две разне међу собом паралелне праве, оне су компланарне тј. садржане у некој равни $\pi$. Обележимо са $\mu$ и $\nu$ равни одређене релацијама $m \subset \mu \perp \pi$ и $n \subset \upsilon \perp \pi$. Будући да равни $\mu$ и $\nu$ управне на равни секу раван $\pi$ по правама $m$ и $n$, биће
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = (\mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu) = \mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\mu$$
Како су равни $\mu$ и $\nu$ управне на раван $\pi$, а праве $m = \mu \cap \pi$ и $n = \upsilon \cap \pi$ међу собом различите и паралелне, биће $\mu$ и $\nu$ две разне међу собом паралелне равни, те композиција $\mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\mu$ представља неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ простора $E^3$, наиме биће $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ .

3. Ако су осе $m$ и $n$ осних рефлексија $\mathcal{S}_m$ и $\mathcal{S}_n$ секу у некој тачки S, оне одређују неку раван $\pi$. Обележимо са $\mu$ и $\nu$ равни одређене релацијама $m \subset \mu \perp \pi$ и $n \subset \upsilon \perp \pi$. Будући да равни $\mu$ и $\nu$ иуправне на равни $\pi$ секу раван по правама $m$ и $n$, биће
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = (\mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\pi) \circ (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\mu) = \mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\mu$$
Како равни $\mu$ и $\nu$ секу раван $\pi$ по двема разним правама $m$ и $n$, оне су различите међу собом. Тачка S припада свакој од правих $m$ и $n$ које се налазе респективно у равнима $\mu$ и $\nu$, па је $S \in \mu$ и $S \in \upsilon$. На тај начин, две разне равни $\mu$ и $\nu$ имају заједничку тачку $S$, према томе секу се по некој правој s која садржи тачку $S$. Стога композиција $\mathcal{S}_\upsilon \circ \mathcal{S}_\mu$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ простора $E^3$, наиме биће $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ .

4. Претпоставимо сада да су праве $m$ и $n$ мимоилазне. Према познатој теореми, постоји јединствена права s која сече мимоилазне праве $m$ и $n$ под правим угловима. Нека је $M = s \cap m$ и $N = s \cap n$ . Ако обележимо са $\pi_1$ и $\pi_2$ равни управне на правој $s$ у тачкама $M$ и $N$, а са $\sigma_1$ и $\sigma_2$ равни од којих је прва одређена правама $m$ и $s$, а друга одређена правама $n$ и $s$, имамо да је $\sigma_1 \cap \pi_1 = m$ ,$\sigma_2 \cap \pi_2 = n$, и $\sigma_1 \cap \sigma_2 =$ s и $\sigma_1, \sigma_2 \perp \pi_1, \pi_2$ . Стога је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_n \circ \mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_1} = \mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$$

Будући да су равни $\pi_1$ и $\pi_2$ управне на правој $s$ у двема разним тачкама $M$ и $N$, композиција $\mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_1}$ представља транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ где је $M' = \mathcal{S}_{\pi_2}(M)$. Како је $\sigma_1 \cap \sigma_2 =$ s, имамо да је $\mathcal{S}_{\sigma_2} \circ \mathcal{S}_{\sigma_1} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ , где је $\omega$ орјентисани угао одређен равнима $\sigma_1$ и $\sigma_2$. При томе се оса $MM'$ транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}}$ поклапа са осом s осне ротације $\mathcal{R}_{s,\omega}$, те композиција тих двеју трансформација у било којем реду представља завојно кретање $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$ , наиме биће $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MM'}} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{MM'},\omega}$ .

■

**Теорема3.12.2:** Свака индиректна изометријска трансформација $\mathcal{I}$ простора $E^3$ представља раванску, осноротациону или клизајућу рефлексију.

Доказ: С обзиром да је $\mathcal{I}$ индиректна и $\mathcal{E}$ директна изометријска трансформација, имамо да је $\mathcal{I} \neq \mathcal{E}$, те постоји тачка $X \in E^3$ таква да је $\mathcal{I}(X) = X'$ и $X \neq X'$.
Ако обележимо са $\pi_1$ медијалну раван дужи $XX'$, тада композиција $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I}$ представља директну изометријску трансформацију са инваријантном тачком $X$. Према раније доказаној Даламберовој теореми, таква трансформација представља коинциденцију $\mathcal{E}$ или неку осну ротацију $\mathcal{R}_{s,\omega}$ којој оса $s$ садржи инваријантну тачку $X$.
Ако је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{E}$, непосредно закључујемо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1}$, тј. да изометријска трансформација представља раванску рефлексију.
Ако је $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{I} = \mathcal{R}_{s,\omega}$ , имамо да је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega}$. Обележимо са $\pi_2$ и $\pi_3$ равни одређене релацијама $\mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ и $\pi_2 \perp \pi_1$, а са $\pi_1'$ и $\pi_2'$ равни одређене релацијама $\mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'}$ и $\pi_1' \perp \pi_3$. У том случају налазимо да је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{R}_{s,\omega} = \mathcal{S}_{\pi_1} \circ \mathcal{S}_{\pi_2} \circ \mathcal{S}_{\pi_3} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$$

Раван $\pi_2'$ и $\pi_3$ различите су међу собом и управне на раван $\pi_1'$ , те композиција $\mathcal{S}_{\pi_2'} \circ \mathcal{S}_{\pi_3}$ представља неку осну ротацију $\mathcal{R}_{t,\theta}$ којој је оса $t$ управна на равни $\pi_1'$ или неку транслацију $\mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}}$ којој је оса $MN$ паралелна са равни $\pi_1'$. Стога је

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{R}_{t,\theta} = \mathcal{R}_{\pi_1';t,\theta} \quad \text{или}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\pi_1'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{MN}} = \mathcal{G}_{\pi_3';\overrightarrow{MN}}$$

■

Изометријске трансформације еуклидске простора $E^3$

↙ ↘

| Директне изометријске трансформације | Индиректне изометријске трансформације |
|---|---|
| ↙ ↓ ↘ ↘ | ↙ ↓ ↘ |
| Коинци-денција, Трансла-ција, Осне ротације, Завојна кретања | Раванска рефлексија, Осноротациона рефлексија, Клизајућа рефлексија |

Осне симетрије реда n сврстане су у овој класификацији међу осне ротације. Осноротационе симетрије реда n (међу којима су налази и централна рефлексија простора) сврстане су у овој класификацији међу осноротационе рефлексије простора.

# 3.13. Симетрије ликова у простору $E^3$

Изометријске трансформације простора $E^3$ омогућују да у том простору изградимо геометријску теорију симетрија.

**Дефиниција3.13.1:** Симетријом лика Ф у простору $E^3$ називамо сваку изометријску трансформацију $\mathcal{I}$ у простору такву да је $\mathcal{I}(\Phi) = \Phi$.

Скуп свих симетрија лика $\Phi \subset E^3$ образује групу. Ту групу називамо **групом симетрија** лика Ф и симболички обележавамо са $G(\mathcal{I}_\Phi)$ . Број елемената групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$ називамо редом те групе.
Идентична трансформација као специфична изометрија простора $E^3$ представља симетрију сваког лика Ф у том простору.
Ако је ред групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$ једнак јединици, лик Ф називамо **асиметричним**; ако је ред групе већи од један, лик Ф називамо **симетрични**.
С обзиром на орјентацију, разликујемо директне симетрије које не мењају орјентацију простора и индиректне које мењају његову орјентацију.
Скуп директних симетрија неког лика $\Phi \subset E^3$ представља подгрупу групе $G(\mathcal{I}_\Phi)$; ту подгрупу називамо **групом директних симетрија** лика Ф, и симболички је означавамо са $G(\mathcal{I}_\Phi^+)$.
С обзиром да разликујемо седам врста изометријских трансформација простора $E^3$, разликујемо и седам врста симетрија ликова у том простору, то су: коинциденција, раванска симетрија, осна симетрија реда n, осноротациона симетрија реда n, транслациона симетрија, клизајућа симетрија, завојна симетрија.

**Теорема3.13.1:** Укупан број симетрија правилног полиедра Ф у простору $E^3$ једнак је двоструком броју његових ивичних углова односно четвороструком броју његових ивица. Једну половину тих симетрија чине директне, а другу половину чине индиректне изометријске трансформације.

Доказ: Ако обележимо са A,B,C и A',B',C' две тројке узастопних темена једне исте или двеју разних пљосни полиедра Ф и са O средиште тог полиедра, биће четворке тачака O,A,B,C и O,A',B',C' некомпланарне. Шта више важе релације

$$(O, A, B, C) \cong (O, A', B', C') \text{ и } (O, A, B, C) \cong (O, C', B', A')$$

Стога постоје две изометријске трансформације простора $E^3$, обележимо их са $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, од којих преводи тачке O, A, B, C респективно у тачке O, A', B', C', а друга преводи тачке O, A, B, C респективно у тачке O, C', B', A'.
Будући да су тетраедри OA'B'C' и OC'B'A' супротно орјентисани, једна од изометријских трансформација $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ је директна а друга индиректна. Није тешко доказати да свака од изометријских трансформација $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ представља симетрију полиедра Ф тј. да је $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$ и $\mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi$ .
Заиста у трансформацији $\mathcal{I}_1$ пљосни (ABC…H) одговара пљосан (A'B'C'…H'). Истим расуђивањем закључујемо да у изометрији $\mathcal{I}_1$ наредним суседним пљоснама одговарају наредне суседне пљосни. Настављајући овај поступак, налазимо да је $\mathcal{I}_1(\Phi) = \Phi$. На исти начин добијама да је $\mathcal{I}_2(\Phi) = \Phi$ . Овим смо доказали да у

сваком ивичном углу полиедра Ф одговарају две разне симетрије тог полиедра од којих је једна директна а друга индиректна. Стога је укупан број свих симетрија полиедра Ф једнак двоструком броју његових ивичних углова, односно четвороструком броју његових ивица. Сем тога, једну половину тих симетрија чине директне а другу половину чине индиректне изометријске трансформације.

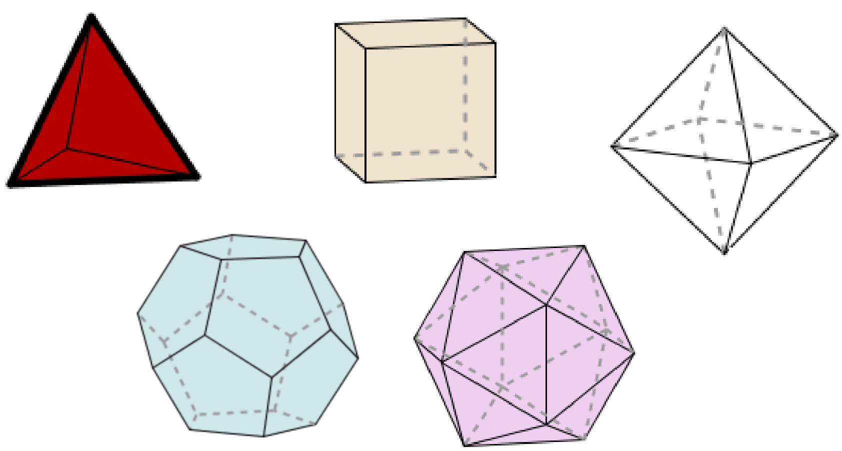
■

Ако правилан полиедар Ф има $t$ темена, $i$ ивица, $p$ пљосни и ако свака пљосан има $m$ страница а сваки рогаљ $n$ ивица, из доказане теореме непосредно закључујемо да се ред групе $G_{\mathcal{J}}(\Phi)$ симетрија и ред групе $G_{\mathcal{J}^+}(\Phi)$ ротација тог правилног полиедра могу изразити следећим једнакостима:

$$\text{ред } G_{\mathcal{J}}(\Phi)=2 \text{ ред } G_{\mathcal{J}^+}(\Phi) = 2mp = 2nt = 4i\,.$$

Изведена својства омогућују да с обзиром на постојеће врсте правилних полиедара сачинимо следећу табелу

| | **Врста полиедра Ф** | **ред $G_{\mathcal{J}}(\Phi)$** | **ред $G_{\mathcal{J}^+}(\Phi)$** |
|---|---|---|---|
| ***1*** | Правилан тетраедар | 24 | 12 |
| ***2*** | Правилан хексаедар | 48 | 24 |
| ***3*** | Правилан октаедар | 48 | 24 |
| ***4*** | Правилан додекаедар | 120 | 60 |
| ***5*** | Правилан икосаедар | 120 | 60 |



Овим смо само установили колики је ред групе симетрија и ред групе ротација сваког од постојећих пет врста правилних полиедара. Природно је поставити питање којим врстама симетрија располажу групе.

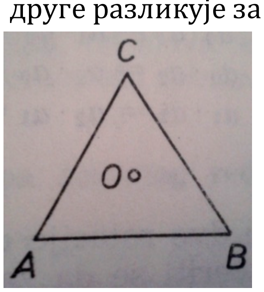
# 4. Групе изометријских трансформација

## 4.1. Кретање правилних полигона у равни

Велику и веома значајну класу разноврсних коначних и бесконачних група чине групе „кретања“ (групе конгруенција) геометријских фигура.

**Дефиниција4.1.1: Кретањем** или конгруетним пресликавањем дате геометријске фигуре Ф назива се такво премештањење фигуре Ф (у простору или равни) којом се фигура Ф преводи у саму себе, тј. та фигура пресликава на саму себе.

Најпростије групе кретања су групе ротација правилних полиедара.
**Пример1**: Посматрајмо све могуће ротације правилног троугла око његовог центра О. При томе ћемо сматрати да се две ротације поклапају ако се једна од друге разликује за цео број обртаја тј. за $2k\pi$, k=0, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ .




Лако се види да се од свих могућих ротација само са трима ротацијама правилан троугао преводи у себе а то су ротације за $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и такозвана нула ротација, при којој сва темена и све странице тог троугла остају на свом месту. Прва ротација преводи теме A у теме B, теме B у теме C, теме C у теме A (та ротација премешта темена A,B,C циклично). Друга ротација преводи теме A у теме C, теме B у теме A, теме C у теме B (та ротација премешта темена A,C,B циклично).

**Дефиниција4.1.2:** Помножити две ротације значи да се те две ротације изводе једна за другом.

На тај начин ротација за $\frac{2\pi}{3}$ помножена самом собом даје ротацију за $\frac{4\pi}{3}$ , а помножена ротацијом за $\frac{4\pi}{3}$ даје ротацију за $2\pi$, тј. нула ротацију. Две ротације за $\frac{4\pi}{3}$ дају ротацију за $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, тј. Њихов производ је ротација за $\frac{2\pi}{3}$.
Ако нула ротацију означимо са $a_0$, ротацију за $\frac{2\pi}{3}$ са $a_1$ и ротацију за $\frac{4\pi}{3}$ са $a_2$ добићемо следеће једнакости:

$$a_0 \cdot a_0 = a_0\,, \qquad a_0 \cdot a_1 = a_1 \cdot a_0 = a_1$$
$$a_1 \cdot a_1 = a_2, \qquad a_0 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_0 = a_2$$
$$a_2 \cdot a_2 = a_1\,, \qquad a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = a_0$$

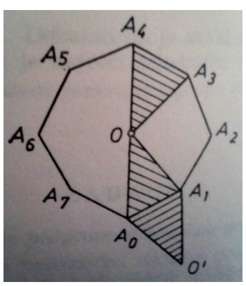
Дакле, за сваке две ротације дефинисан је њихов производ. Лако је уверити се да за то множење важи закон асоцијације, очигледно је да важи и закон комутације.
Затим међу посматраним ротацијама постоји и нула ротација која задовољава услов $a \cdot a_0 = a_0 \cdot a = a$ за произвољну ротацију $a$ .

Свака од ротација има своју инверзну ротацију, која помножена датом ротацијом даје нула ротацију; очигледну нула ротација је инверзна самој себи $a_0^{-1} = a_0$ јер је $a_0 \cdot a_0^{-1} = a_0$, док је $a_1^{-1} = a_2$ и $a_2^{-1} = a_1$ пошто је $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1 = a_0$.
Множење ротација правилног троугла задовољава све побројане аксиоме множења и чини једну групу.
Ово правило множења ротација правилног троугла можемо написати компактније у облику таблице (Питагорина таблица множења)

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_0$ | $a_1$ |

Производ двају елемента у тој таблици налазимо у пресеку врсте којој припада први елемент и колоне којој припада други елемент.

**Пример2**: Нека је дат у равни полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$, нпр. правилан осмоугао $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (сва темена су нумерисана редом у једном смеру, нпр. супротно кретању казаљке на сату). Треба наћи она кретања полигона у његовој равни којима се тај полигон доводи до преклапања са самим собом. При томе кретању свако теме полигона преводи се у теме, свака страница у страницу, а центар полигона у самог себе.




Нека извесно одређено кретање преводи теме $A_0$ у рецимо теме $A_k$ (на слици је k=4). Тада се страница $A_0A_1$ преводи или у страницу $A_kA_{k+1}$ или у страницу $A_kA_{k-1}$ . Међутим ако би се страница $A_0A_1$ превела у страницу $A_kA_{k-1}$, троугао $A_0A_1O$ би се превео у троугао $A_kA_{k-1}O$; овај троугао бисмо могли, померајући га у његовој равни, превести у положај $A_0A_1O'$, а то је симетрична слика троугла $A_0A_1O$ у односу на праву којој припада страница $A_0A_1$, па би се, на тај начин, добили да смо троугао $A_0A_1O$ померајући га у његовој равни, превели у његову осом тетраедра праву која пролази кроз једно теме $A_i$ те немогућности која је једна од основних чињеница геометрије равни.
Према томе, страница $A_0A_1$ мора се превести у страницу $A_kA_{k+1}$. На исти начин страница $A_1A_2$ преводи у $A_{k+1}A_{k+2}$, страница $A_2A_3$ у $A_{k+2}A_{k+3}$, итд. Другачије речено, посматрано кретање је ротација полигона $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ у његовој равни за угао $k \cdot \frac{2\pi}{n}$.
Дакле доказали смо:

1. Свако пресликавање на себе правилног $n$-тоугла у његовој равни јесте ротација тог полигона за угао $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ $(k \in Z)$
2. Таквих пресликавања датог $n$-тоугла има $n$
3. Та пресликавања образују групу.

## 4.2. Кретање правилних полигона у простору

Претходно расуђивање је полазило од битне претпоставке да посматрамо само кретање полигона у његовој равни.
Ако би се посматрало пресликавање $n$-тоугла на себе у простору, тада би се побројаним ротацијама додале још и тзв. рефлексије полигона, то јест ротације за угао $\pi$ око оса симетрије полигона.
Правилан $n$-тоугао има $n$ оса симетрије: ако је $\boldsymbol{n}$ **паран број** тада су осе симетрије $\frac{n}{2}$ правих које пролазе кроз по два супротна темена и $\frac{n}{2}$ правих које пролазе кроз средине супротних страница, а ако је $\boldsymbol{n}$ **непаран број** тада су осе симетрије праве које пролазе кроз средину по једне странице и наспрамно теме полигона.
Доказ да се са $n$ ротација и $n$ осних симетрија правилног $n$-тоугла исцрпљују сва његова кретања у простору којима се тај полигон преводи у себе показаћемо примерима ротације правилне пирамиде, ротацији правилне бипирамиде и ротацијама дужи и ромба.

## 4.3. Општа дефиниција групе кретања дате фигуре у простору или у равни

Нека је у простору или у равни дата фигура Ф. Размотримо сва пресликавања те фигуре на њу саму, тј. сва кретања којима се та фигура преводи у себе.
Као производ $g_1 \cdot g_2$ двају кретања $g_1$ и $g_2$ дефинисаћемо кретање које је резултат узастопно изведених најпре кретања $g_1$ а затим кретања $g_2$. Очигледно, кретање $g_1 \cdot g_2$ је такође превођење фигуре Ф у њу саму, под претпоставком да су и кретања $g_1$ и $g_2$, свако за себе, таква.
Скуп свих таквих кретања фигуре Ф са малочас дефинисаном операцијом множења (или композиције) образује групу.
У ствари, множење кретања задовољава услов асоцијативности. У скупу тих кретања постоји неутрално или идентично кретање. На крају, за свако кретање $g$ постоји њему инверзно кретање $g^{-1}$ (које сваку тачку, из положаја који је заузела после кретања $g$, враћа у полазни положај).

## 4.4. Групе кретања праве и круга

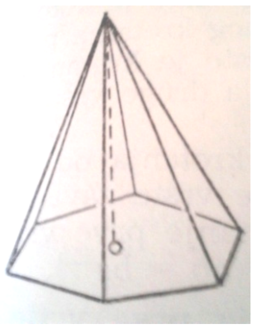
Групе кретања правилних полигона су коначне. У овом поглављу навешћу неколико примера бесконачних група кретања.

**Пример1:** Кретање праве у било којој равни којој та права припада.
Та се група састоји од: клизања праве по себи (кретања прве врсте) и ротација праве у изабраној равни за угао $\pi$ око било које њене тачке (кретање друге врсте).
Група кретања праве је некомутативна.
Да бисмо се у то уверили, довољно је да помножимо два кретања од којих је једно прве а друго друге врсте; резултат те операције измениће се ако се промени поредак множилаца.
Очигледно, сва могућа кретања друге врсте можемо добити множећи сва могућна клизања праве по њој самој и неку произвољну ротацију за угао $\pi$ (тј. за угао $\pi$ око неке одређене, али произвољно изабране тачке те праве).
Клизање праве по себи чини подгрупу свих кретања праве у равни. Та клизања су једина померања праве дужње саме. Сваком клизању праве по себи обострано једнозначно одговара неки реалан број који показује за коју смо дужину и у којем од два могућа смера померили праву дуж ње саме. Одатле са лако закључује да је група свих клизања праве по себи изоморфна групи реалних бројева (са операцијом обичног аритметичког сабирања као операцијом у групи)

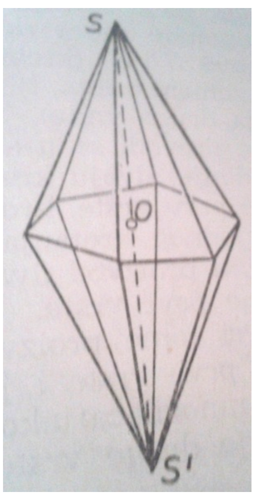
**Пример2:** Посматрајмо групу свих пресликавања круга на себе у његовој равни.
Та се група састоји од свих могућих ротација круга у својој равни око свог центра, при чему се, као и увек, ротације за углове $k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$ сматрају идентичним пресликавањима. Сваком елементу наше групе одговара, на тај начин, по одређени угао $\varphi$. Изражавајући меру тог угла у радијанима, добићемо реалан број $x$. Међутим, како углови који се разликују за $k \cdot 2\pi$ $(k \in Z)$ одређују једну те исту ротацију круга, то ће сваком елементу групе ротација круга одговарати не само дати број $x$ него и сви бројеви облика $x + k \cdot 2\pi$ , где је $k$ произвољан цео број.
Са друге стране, сваком реалном броју $x$ одговара једна једина потпуно одређена ротација круга, и то ротација за угао од $x$ радијана. На тај начин је између ратација круга и реалних бројева успостављена следећа кореcподенција:
Сваком реалном броју $x$ одговара по једна и само једна одређена ротација-ротација за угао $x$, али при том је свака ротација кореспондирана не једном реалном броју већ бесконачном мноштву реалних бројева који се сви разликују један од другог за мултиплум од $2\pi$ (тј. за $k \cdot 2\pi, k \in Z$).

Групе у примеру1 и примеру2 имају следећа својства: све те групе састоје се од кретања фигуре по самој себи. Другим речима, током сваког кретања цела фигура, круг или права, поклапа се са самом собом. Тим својством не одликују се ротације правилних полигона у њиховој равни: тада се завршни положај полигона поклапа са почетним положајем, али међуположаји које полигон заузима у току процеса кретања разликују се и од почетног и од завршног његовог положаја. Исто тако је и са кретањем полиедара.

## 4.5. Групе ротација правилне пирамиде и правилне бипирамиде



Групе ротација правилне $n$-тостране пирамиде око њене осе очигледно је изоморфна групи ротација правилног $n$-тоугла у основи те пирамиде; према томе, та група је циклична група реда $n$.
Лако се можемо уверити да су ротацијама пирамиде (за углове 0, $\frac{2\pi}{n}$, ... , (2n-1)$\frac{2\pi}{n}$) исцрпљена сва кретања којима се пирамида преводи у себе.




Одредимо сад групу кретања којима се правилна $n$-тостране бипирамида преводи у себе. То тело је састављено од правилне $n$-тостране пирамиде и њене симетричне слике у односу на раван основе.
Доказаћу да се група наведених кретања правилне бипирамиде састоји од:

а) Ротација око осе бипирамиде (за углове 0, $\frac{2\pi}{n}$, ... , (2n-1)$\frac{2\pi}{n}$)

б) такозваних осних рефлексија, тј. ротација за угао $\pi$ око сваке од оса симетрије основе бипирамиде (тих оса симетрије има $n$, те кретања друге врсте такође $n$)

Према томе, свих наведених кретања има $2n$.
Да бисмо се уверили да (изузев у случају $n = 4$ ) нема више никаквих других кретања којима се $n$-тострана бипирамида преводи у себе, напомениo, пре свега да у **случају $\boldsymbol{n \neq 4}$** свако такво кретање бипирамиде мора оставити непокретне (инваријантне) врхове $S$ и $S'$ (кретање прве врсте) или да тим тачкама замени места (кретање друге врсте). Таквим кретањима основа пирамиде преводи се у себе. Производ (тј. узастопно извођење) два кретања прве врсте је кретање друге врсте, производ једног кретања прве врсте и једног кретања друге врсте је кретање друге врсте, а производ два кретања друге врсте је кретање прве врсте.
При томе производ два кретања од којих је једно прве врсте и једно друге врсте зависи од поретка множилаца: ако је $a$ кретање прве врсте а $b$ кретање друге врсте, онда је $ab = ba^{-1}$.
Размотримо прво кретање прве врсте. Приликом таквих кретања основа прелази у себе, остајући у својој равни; она врши ротацију за један од углова 0, $\frac{2\pi}{n}$, ... , (n-1)$\frac{2\pi}{n}$ . Према томе и свако кретање прве врсте бипирамиде је ротација бипирамиде око осе $SS'$ за исти угао. То значи да кретања прве врсте бипирамиде, рачунајући и идентично кретање, тј. „мировање“, има тачно $n$.
Нека је дато кретање друге врсте бипирамиде, тј. такво превођење бипирамиде у себе да врхови $S$ и $S'$ узајамно мењају места. Извршимо, после датог кретања друге

врсте, неку одређену осну рефлексију бипирамиде, тј. ротацију бипирамиде за угао $\pi$ око једне одређене осе симетрије основе. Резултат два кретања (друге врсте) је једно кретање прве врсте – ротација бипирамиде око своје осе.
То значи да свако кретање друге врсте бипирамиде прелази, после једне исте осне рефлексије(ротацију за угао $\pi$ око једне одређене осе симетрије основе), у неко кретање прве врсте. Одатле лако долазимо до закључка да свако кретање друге врсте можемо добити изводећи (пре или после неког кретања прве врсте) једну исту осну рефлексију. Одатле закључујемо да је број кретања друге врсте једнак броју кретања прве врсте, дакле $n$.
Дакле доказали смо (у случају $n \neq 4$):
Група кретања $n$-тостране правилне бипирамиде је некомутативна група реда $2n$ која се састоји од $n$ ротација око осе $SS'$ бипирамиде и од $n$ осних рефлексија(тј. ротација за угао $\pi$ око оса симетрије основе бипирамиде); свих $n$ осних ротација добијамо, редом, множењем једне од њих са $n$ ротација бипирамиде око њене осе $SS'$ .
Како се све ротације бипирамиде око њене осе добијају тако што једна ротација, и то ротација за угао $\frac{2\pi}{n}$, множи самом собом, то група свих кретања бипирамиде има систем генератора од два елемента: то су ротације за угао $\frac{2\pi}{n}$ и једна, било која, осна рефлексија.
Случај $\boldsymbol{n = 4}$ је изузетан по томе што је четворострана бипирамида тада октаедар, чија група кретања има не 8 појединих кретања него, као што ћу касније показати, може имати 24 таква кретања. То је отуда што се приликом кретања неких четвоространих бипирамида, наиме правилних октаедара, врх $S$ може превести не само у врх $S'$ него и у било које теме основе. Један од за то неопходних услова- да се у сваком темену састаје исти број страна(а такође и ивица)- очигледно је испуњен код било које правилне четворостране бипирамиде, а код правилног октаедра су, поред тога, у свим теменима сви углови, и сви диедри и сви рогљеви подударни међу собом, све стране су такође подударне и све ивице једнаке.

## 4.6. Групе ротација дужи и ромба

Најмањи број темена које може имати полигон је 3; у извесном смислу се, међутим, дуж може сматрати као „дегенерисани“ полигон или, ако нам то одговара, као „полигон“ са два темена.

Могућност таквог посматрања је, посебно, потврђена тиме што је група кретања којом се, у некој својој равни, дуж преводи у себе циклична група реда 2; та група се састоји од идентичног пресликавања и ротације дужи око њене средине за угао $\pi$.

Слично томе, једнакокраки троугао ће представљати „дегенерисану“ правилну пирамиду и група кретања једнакокраког троугла у простору је такође група реда 2.

Затим, „дегенерисани“ облик бипирамиде биће ромб. Група кретања (тј. ротација) ромба у простору састоји се од четири елемента. То су: идентично пресликавање $a_0$, ротације $a_1$ и $a_2$ око сваке дијагонале за угао $\pi$ и ротација $a_3$ ромба у његовој равни око његовог центра за угао $\pi$ (ова ротација је производ претходних).

Таблица множења за ту групу гласи:

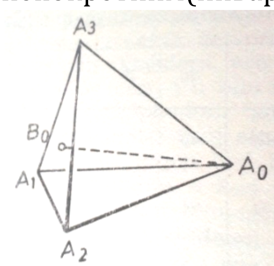
| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_0$ | $a_3$ | $a_2$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_0$ | $a_1$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_0$ |

Ова таблица подудара се са таблицом множења за Клајнову групу реда 4. У то се лако можемо уверити, а још простије ако уместо групе ротација ромба посматрамо изоморфну јој групу пермутација њена четири темена A,B,C,D. Ротацијама $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ одговарају, редом, следеће пермутације темена(за $a_1$ узимамо ротацију око дијагонале CD а за $a_2$ ротацију око дијагонале AB):

$$\binom{ABCD}{ABCD},\binom{ABCD}{BACD},\binom{ABCD}{ABDC},\binom{ABCD}{BADC}$$

## 4.7. Група ротација правилног тетраедра

Да бисмо одредили сва могућа кретања тетраедра $A_0A_1A_2A_3$ размотрићемо најпре она од тих кретања која једно теме, рецимо $A_0$, остављају непокретним(инваријантним).




Таквим кретањима се и троугао $A_1A_2A_3$ преводи у себе обрћући се око свог центра $B_0$ за један од углова 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.

Одакле следи да има тачно три кретања којима се тетраедар $A_0A_1A_2A_3$ преводи у себе тако да теме $A_0$ остаје на свом месту. То су: идентично пресликавање $a_0$(које оставља на месту све елементе тетраедра) и две ротације $a_1$ и $a_2$ око осе $A_0B_0$ за угао$\frac{2\pi}{3}$, односно $\frac{4\pi}{3}$.

Означимо са $x_i$ било које одређено кретање тетраедра које преводи теме $A_0$ у теме $A_i$ $(i = 1,2,3)$. $x_0$ ће означавати идентично пресликавање.

Докажимо да се свако кретање $b$ тетраедра може представити у облику

$$b = a_i \cdot x_k \qquad \textbf{(1)}$$

где су $i = 1,2,3$ и $k = 0,1,2,3$ једнозначно одређени (а то значи да,ако је $b = a_i \cdot x_k$, $b' = a_i \cdot x_{k'}$ и при том важи бар једна од релација $i \neq i'$, $k \neq k'$ , тада мора бити $b \neq b'$)

Нека је, дакле, дато извесно кретање $b$; оно преводи теме $A_0$ у неко одређено теме $A_k$ $(k = 1,2,3)$. Међутим тада кретање $b \cdot x_k^{-1}$ оставља теме $A_0$ на месту и, према томе, постоји неко сасвим одређено $a_i$ такво да је $b \cdot x_k^{-1} = a_i$ и $b = a_i \cdot x_k$ , где су $i$ и $k$ одређени једнозначно. Како и, обрнуто, сваком пару $(i, k)$ одговара, према (1), по неко кретање тетраедра, то постоји обострано једнозначна кореcподенција између свих кретања тетраедра, на једној страни, и свих парова $(i, k)$ где су $i = 1,2,3$ и $k = 0,1,2,3$ на другој страни. Одатле произилази да има тачно 12 кретања којима се тетраедар преводи у себе.

Свако такво кретање тетраедра значи неку пермутацију његових темена тј. неку пермутацију њихових индекса 0,1,2,3. Међутим, број пермутација четири елемента је 24; од њих се, као што ћемо видети, само 12 остварује кретањима тетраедра у простору.

Да видимо која су то кретања и које пермутације.

Ради краћег изражавања, назовимо **теменом осом** тетраедра праву која пролази кроз једно теме $A_i$ и центар $B_i$ наспрамне странице, а **ивичном осом** праву која пролази кроз средине двеју било којих наспрамних ивица.

Свакој теменој оси одговарају по два неидентична кретања тетраедра (ротације око те осе за углове $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$). На тај начин добијамо укупно осам ротација, које представљају следеће пермутације индекса темена:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 0\,2\,3\,1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 0\,3\,1\,2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 2\,1\,3\,0 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 3\,1\,0\,2 \end{pmatrix},$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 1\,3\,2\,0 \end{pmatrix},\ a_6 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 3\,0\,2\,1 \end{pmatrix},\ a_7 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 1\,2\,0\,3 \end{pmatrix},\ a_8 = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3 \\ 2\,0\,1\,3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Око сваке ивичне осе имамо по једну (неидентичну) ротацију за угао $\pi$ , што нам даје још три ротације (јер тетраедар има 3 ивичне осе), које представљају следеће пермутације:

$$a_9 = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 3 \\ 1\ 0\ 3\ 2 \end{pmatrix},\ a_{10} = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 0\ 1 \end{pmatrix},\ a_{11} = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ 3 \\ 3\ 2\ 1\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3)}$$

Ових једанаест ротација заједно са идентичном ротацијом јесу свих дванаест кретања тетраедра. Свака од њих је ротација око једне од седам оса симетрије тетраедра; зато се та група кретања тетраедра и зове **група ротација тетраедра.**
Лако се проверава да су све пермутације (2) и (3) парне; како парних пермутација од четири елемената (4 темена тетраедра) има укупно 12, то се, очигледно, у посматраном случају ради о изоморфној коресподенцији између групе ротација тетраедра и алтернативне групе пермутација четири елемента.

Размотримо сад подгрупе групе ротација тетраедра.
Као и свака друга група, и група ротација тетраедра има две такозване несвојствене подгрупе: то је прво цела посматрана група и друга је подгрупа коју чини само неутрални елемент. Нас интересују остале, тзв. својствене подгрупе ротација тетраедра. Тих подгрупа има осам.
Напоменимо, пре свега, да производ ротација за угао $\pi$ око двеју различитих ивичних оса даје ротацију такође за угао $\pi$ око треће ивочне осе (у то се можемо уверити како геометријски тако и непосредним множењем било које две пермутације (3)). Одатле произилази да ротација за угао $\pi$ око све три ивичне осе образују, заједно са идентичном ротацијом, групу реда 4; та група је изоморфна Клајновој групи тј. групи ротације ромба. Означимо ту групу са H. Међу свим подгрупама групе ротације тетраедра она има највиши ред. У њој су садржане три подгрупе реда 2, које се састоје од ротација за углове 0 и $\pi$ око сваке дате ивичне осе. Ове подгрупе означимо са $H_{01}$, $H_{02}$, $H_{03}$. Осим наведених постоје још четири подгрупе реда 3, наиме $H_i$, $i = 0,1,2,3$, од којих се свака састоји од ротација за углове 0, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ око одговарајуће темене осе.
Да бисмо доказали да, осим побројаних подгрупа, у групи ротација тетраедра нема више ниједне друге подгрупе, довољно је да покажемо да било која два од неутралног различита елемента узета из двеју различитих група $H_i$ или узета једна из било које групе $H_i$ а друга из било које групе $H_{0k}$ већ дају системгенератора целе групе ротација тетраедра. За то је довољно уочити било која два од елемената $a_1$, $a_3$, $a_5$, $a_7$, нпр. $a_1$ и $a_3$, и такође један било који од елемената $a_2$, $a_4$, $a_6$, $a_8$ и један било који од елемената $a_9$, $a_{10}$, $a_{11}$. До истог резултата долази се и непосредним израчунавањем. На пример, следеће једнакости доказују да елементи $a_1$ и $a_3$ чине систем генератора групе ротације тетраедра:

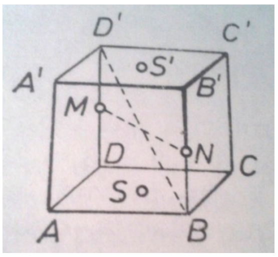
$$a_0 = a_1 \cdot a_1^{-1}, \qquad a_2 = a_1^2, \qquad a_4 = a_3^2, \qquad a_5 = a_3^{-1} \cdot a_1 \cdot a_3,$$
$$a_6 = a_3^{-1} \cdot a_1^2 = a_3, \qquad a_7 = a_1 \cdot a_3 \cdot a_1^{-1}, \qquad a_8 = a_1^2 \cdot a_3,$$
$$a_9 = a_2^{-1} \cdot a_1 \cdot a_3^2, \qquad a_{10} = a_1^{-1} \cdot a_3, \qquad a_{11} = a_3 \cdot a_1$$

Не треба мислити да се сваки елемент само на један начин представља као производ генератора; нпр. $a_7 = a_1 \cdot a_3 \cdot a_1^{-1}$ и у исто време је $a_7 = a_3^{-1} \cdot a_1^{-1} \cdot a_3 \cdot a_1 \cdot a_3$.

Група ротација тетраедра је некомутативна. На пример $a_1 \cdot a_3 = a_{10}$ а $a_3 \cdot a_1 = a_{11}$

## 4.8. Група ротација коцке

Да бисмо утврдили сва кретања коцке, поступићемо исто онако као и у случају тетраедра. Разматраћемо прво само она кретања коцке ABCDA’B’C’D’ којима се једно теме, рецимо A, преводи у себе.




Приликом сваког кретања коцке теме се преводи у теме, ивица у ивицу, страна у страну, а и дијагонала коцке преводи се у дијагоналу. Ако дато кретање оставља тачку A непокретном (инваријантном), тада ће оно оставити непокретном (инваријантном) и дијагоналу AC’, јер постоји само једна дијагонала коцке која полази из темена A. Дакле, посматрано кретање је ротација коцке око дијагонале AC’. Таквих ротација, поред идентичне, има две: за угао $\frac{2\pi}{3}$ и за угао $\frac{4\pi}{3}$. Према томе, постоје само три кретања коцке којима се теме A преводи у себе. Међутим, то теме A можемо подесно изабраном ротацијом превести у свако од осам темена коцке. Отуда, расуђујући као у случају тетраедра лако закључујемо да свих кретања коцке има укупно $3 \cdot 8 = 24$. Одредићемо сада свако од тих кретања.

Приметимо да коцка има следећих 13 оса симетрије: четири дијагонале, три праве које пролазе кроз центре супротних страна, шест правих које пролазе кроз средине супротних ивица коцке тзв. ивичне осе.

Око сваке од четири дијагонале имамо по две неидентичне ротације којима се коцка преводи у себе, тако да имамо укупно 8 ротација око дијагонала.

Око сваке праве која спаја центре супротних страна коцке имамо по три неидентичне ротације. Према томе, таквих ротација има укупно 9.

На крају, имамо по једну неидентичну ротацију (за угао $\pi$) око сваке од шест ивичних оса. Према томе, тих ротација има укупно 6.

Дакле, имамо 8+9+6=23 неидентичне ротације којима се коцка преводи у себе. Ако им се дода још и идентична ротација добија се 24 кретања, а то су сва могућа кретања коцке.

На основу тога закључујемо: Ротација коцке око њених оса симетрије су једина и сва кретања којима се коцка преводи у себе.

Зато се, као и у случају тетраедра, група кретања коцке зове **група ротација коцке**.

**Теорема4.8.1:** Једина ротација коцке којом се свака од њене четири дијагонале преводи у себе јесте идентична ротација.

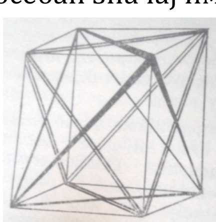
Доказ: Запазимо прво да свака ротација којом се произвољне две дијагонале, рецимо AC’ и DB’, преводе свака у себе преводе и дијагоналну раван ABC’B’ у њу саму. Свака неидентична ротација којом се нека раван преводи у себе има као своју осу или праву у тој равни (тада је угао ротације $\pi$) или праву ортогоналну на ту раван. Међутим, осим ове осе, ротацијом равни за угао $\pi$ око осе која припада тој равни прелазе у саму себе још само праве које су ортогоналне на ту осу. Како правоугаоник ADC’B’ није квадрат, то његове дијагонале, које нису узајамно ортогоналне, не могу прећи у себе приликом ротације око било које осе у равни правоугаоника. Према томе, AC' и DB' могу прећи свака у себе једино приликом ротације коцке око осе ортогоналне на раван ADC'B'. Таква оса је права MN, која спаја средине ивица A'D' и BC тј. ивична оса MN . Једина неидентична ротација коцке око праве MN је ротација за угао $\pi$. То значи да се једино том ротацијом свака од дијагонала AC' и DB' преводи у себе. Међутим, приликом те ротације две друге дијагонале, B D' и C A', узајемно мењају места, тако да не постоји ниједна неидентична ротација ротација којом се све четири дијагонале коцке преводе у себе.

■

Из теореме следи да приликом сваке неидентичне ротације коцке њене четири дијагонале остварују неку неидентичну пермутацију. Одатле следи да приликом две различите ротације $a$ и b дијагонале остварују различите пермутације јер, ако би приликом ратација $a$ и b дошло до једне исте пермутације дијагонала, онда би приликом $a \cdot b^{-1}$ све дијагонале остале свака на свом месту, па би $a \cdot b^{-1}$ била идентична ротација, те би $a$ и b биле две истоветне ротације.
Свим могућим ротацијама коцке(24) одговарају различите пермутације четири дијагонале које настају приликом тих ротација, а као што знамо, број свих пермутација четири елемента је $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$=24.
Између групе свих ротација коцке и групе пермутација њене четири дијагонале постоји обострано једнозначна коресподенција. Како, у овој коресподенцији, производу ротације одговара, очигледно, производ пермутација, то имамо следећу теорему:

**Теорема4.8.2:** Група ротација коцке изоморфна је групи свих пермутација четири елемента.

Међу подгрупама ротације коцке истаћићемо, пре свега, цикличне подгрупе реда 2, 3 и 4, које се састоје редом од ротација око по једне од 13 оса симетрије коцке. Цикличне подгрупе реда 2 има шест (према броју ивичних оса), цикличне подгрупе реда 3 има четири (према броју дијагонала коцке), а цикличних подгрупа реда 4 има три (према броју оса које пролазе кроз центре по две супротне стране).
Посебан значај имају следеће подгрупе:



а) Подгрупа реда 12, која се састоји од ротација којима се (истовремено) сваки од два тетраедра ACB'D' и BDA'C' уписаних у коцку преводи у себе.
Та се подгрупа састоји: од $2 \cdot 4$=8 неидентичних ротација око дијагонала коцке, од 3 ротација за угао $\pi$ око ивичних оса и од идентичне ротације.

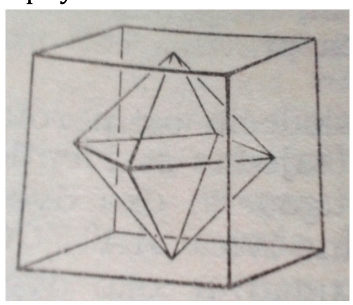
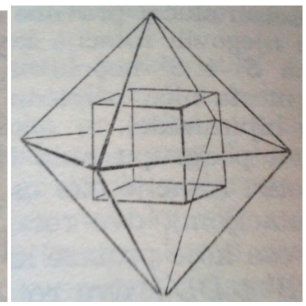
б) Три подгрупе реда 8, изоморфне групи правилне четворостране бипирамиде. Свака од ових подгрупа састоји се од оних ротација коцке којима се једна од правих што спаја центре две супротних страна, рецимо $S$ и $S'$, преводи у себе (октаедар уписан у коцку је посебан случај правилне четворостране бипирамиде; група његових ротација која остварују два његова темена $S$ и $S'$ непокретним или им узајамнозамењује места биће група правилне четворостране бипирамиде).
Ову подгрупу реда 8 чине следећих осам ротација: четири ротације око осе $SS'$ (заједно са идентичном ротацијом), две ротације за угао $\pi$ око две ивичне осе које

пролазе кроз средине ивица AA’ и CC’ односно BB’ и DD’, две ротације за угао $\pi$ око две осе које пролазе кроз центре супротних страна ABB’A’ и CDD’C’ односно ADD’A’ и BCC’B’.

ц) Подгрупа реда 4, која се састоји од идентичне ротације и три ротације за угао $\pi$ око сваке од три осе које пролазе кроз центре супротних страна. Та се група састоји од оних ротација које улазе у сваку од побројаних три подгрупа реда 8. Ова подгрупа реда 4 је комутативна и изоморфна групи ротација ромба (Клајновој групи реда 4).
Осим поменутих постоје још и подгрупе реда 4 које су такође изоморфне групи кретања ромба.

## 4.9. Група кретања октаедра

Група кретања правилног октаедра изоморфна је групи ротација коцке.
Да бисмо то доказали довољно је да опишемо коцку око правилног октаедра или да упишемо коцку у правилан октаедар. Свако кретање октаедра одговара неком кретању коцке и обрнуто.

Ова чињеница је једна од појава **дуалности** која постоји између коцке и октаедра и коју ћу сад дефинисати.

**Дефиниција4.9.1:** За два елемента (теме, ивица, страна) било којег полиедра говоримо да су **инцидентни** ако један од тих два елемената припада оном другом (као његов елемент).

На тај начин, парови инцидентних елемената су: теме и страна којој то теме припада, такође страна и једна њена ивица и, на крају, теме и ивица којој оно припада.

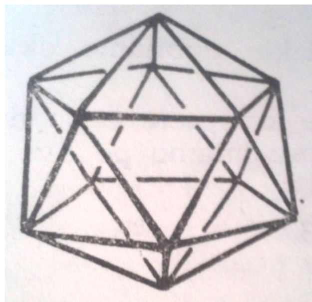
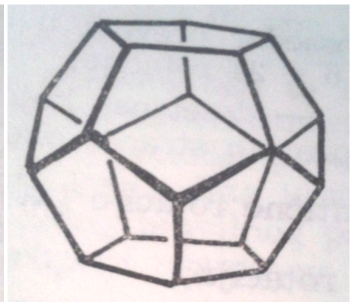
**Дефиниција4.9.2:** Два полиедра називамо **дуалним полиедрима** ако се елементи једног могу довести у обострано једнозначну коресподенцију са елементима другог тако да при том парови инцидентних елемената једног полиедра одговарају паровима инцидентних елемената другог, при чему:

- Темена првог полиедра одговарају странама другог
- Ивице првог полиедра одговарају ивицама другог
- Стране првог полиедра одговарају теменима другог.

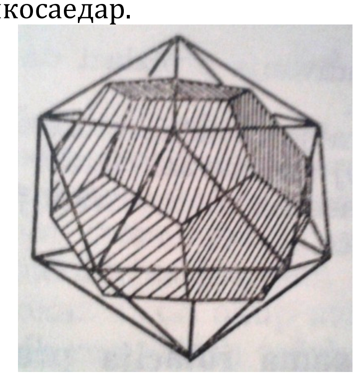
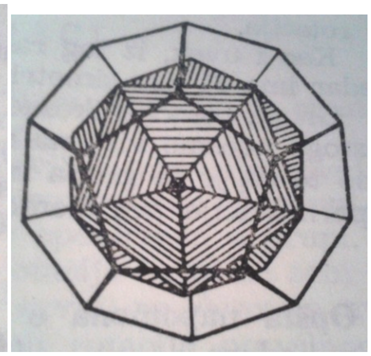
Није тешко приметити да су у том смислу коцка и октаедар узајамно дуални, док је тетраедар дуалан самом себи.

# 4.10. Група ротација икосаедра и додекаедра

Од свих пет правилних полиедара осталоми је да испитам још кретање икосаедра и додекаедра. Ти полиедри су дуални један другом и групе њихових кретања су изоморфне.

Да бисмо се у то уверили, довољно је да упишемо икосаедар у додекаедар или додекаедар у икосаедар.

Зато је довољно да упознамо групу кретања икосаедра. Да бисмо одредили број његових елемената, поступићемо исто као у случају тетраедра и коцке. Прво ћемо посматрати она кретања икосаедра која остављају непокретним (инваријантним) једно било које теме. Таквих кретања има 5 и то су пет ротација око осе која пролази кроз задато теме и њему супротно теме. Како икосаедар има 12 темена, то је број кретања икосаедра $5 \cdot 12 = 60$.
Сва та кретања су ротације икосаедра око његових оса симетрије. Икосаедар има следеће осе симетрије:

- 6 оса које спајају по два супротна темена; око сваке осе имамо по четири неидентичне ротације (за углове $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$) којима се икосаедар преводи у себе. Дакле, добијамо укупно $4 \cdot 6 = 24$ ротације.
- 10 оса које пролазе кроз центре по двеју супротних страна; око сваке осе имамо по две неидентичне ротације (за углове $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$) – укупно 20 ротација.
- 15 ивичних оса (тј. оса које пролазе кроз средине двеју наспрамних ивица); око сваке од тих оса имамо по једну неидентичну ротацију (за угао $\pi$) – укупно15 ротација.

Дакле , укупно имамо 24+20+15=59 неидентичних ротација и једну идентичну ротацију тј. имамо укупно 60 ротација икосаедра.

Одатле следи да икосаедар има 31 осу симетрије.
Група ротација икосаедра је прилично сложена и изоморфна је алтернативној групи пермутација 5 елемената.

## 4.11. Општа напомена о групама ротација правилних полиедара

Групе ротација полигона и полиедара дефинисали смо као групе кретања.
Замислимо сада некаква два примера простора од којих се један налази у другом. Један простор замислићемо као бесконачно чврсто тело и звaћемо га **чврстим простором.** Други простор замислићемо као **празан простор.**
Чврсти простор смештамо у празан простор, у којем он може да се помера. Наш полиедар замишљамо као део чврстог простора, непокретан у овом простору и способан да се помера само заједно с тим простором. Са таквог становишта могу се посматрати ротације целокупног „чврстог“ простора у „празном“ простору (око ових или оних оса), којима се дати полиедар преводи у себе. Како свако раније посматрано кретање полиедра било ротација око ове или оне осе и како можемо замислити да је свака ротацијаполиедра проузрокована ротацијом целог простора око те исте осе, то је група кретања датог полиедра изоморфна групи ротација простора којима се тај полиедар преводи у себе. Обично се ова последња група има у виду када се говори о групи ротација датог правилног полиедра. Често је чак и називају групом правилног полиедра.
Групе правилних пирамида (тј. Коначне цикличне групе), групе правилних бипирамида и групе правилних полиедара јесу једине коначне подгрупе у групи свих кретања простора.

# 5. Веза музике и изометријских трансформација

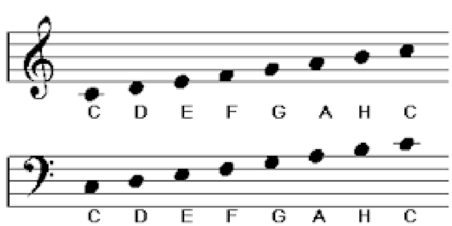
Математика и музика су повезани кроз историју.
Математичари су, као и други људи, осећали афинитет, чак и ако нису били у стању да кажу шта их то тачно веже заједно. Још је Питагора описао хармоничне тонове преко пропорција. И многи други математичари и филозофи су се бавили, али неки се математичари и даље баве, описивањем музичких дела математиком. Постоје композитори који користе неке изометријске трансформације на унапред смишљеном делу композиције како би направили композицију која ће слушаоцима лако „уђи у уво“ .
Неке музичке форме су:

- Троделна песма : АБА
- Песма у форми строфа, рефрен : СРСРСРС... (било који број строфа)
- Сонатна форма: Увод, развој, рекапитулација
- Рондо форма: АБАСАБА
- Варијациона форма: понавља се основни образац али се мења на сваком понављању

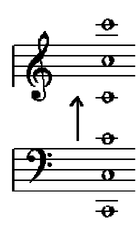
АБА форма нам даје осећај равнотеже дела при слушању и не чини нам се да нам на крају нешто фали у композицији.

Изометријске трансформације композитори могу да примене локално на дело или чак глобално.
Барокна музика не садржи никакве изометријске трансформације.

Симетрије које се најчешће користе у музици су транслација, осна симетрија и ротација.
Превођење из виолинијског кључа(или Г-кључа) у бас кључ(или ф-кључ) је показатељ транслационе симетрије.



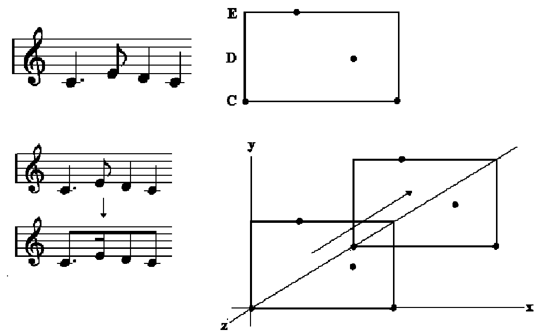

Октаве су саме по себи транслације



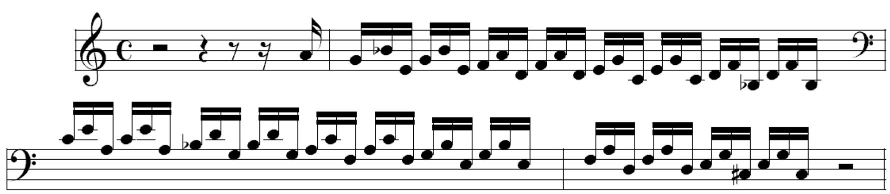
.

У музици се уводи релација еквиваленције тако што два тона сматрамо еквивалентним уколико се разликују за цео број октава.
Две ноте припадају истој класи тонова ако се разликају за цео број октава.

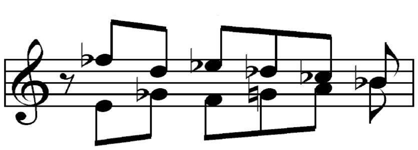
Постоје и транслације у смислу темпа у музици нпр.



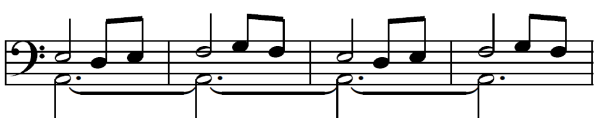

**Примери транслације** на локалном нивоу је нпр. „Токата и фуга у д-молу“ - Ј.С.Бах



**Примери осне симетрије** су на локалном нивоу нпр. „Пети гудачки квартет“ - Бартог Бела



или „Валцер“- Шопен



# Литература


1. П.С. Александров:  Увод у теорију група, Привредна штампа, Београд, 1982.;

2. Драгомир Лопандић:  Геометрија, Научна књига, Београд, 1981.;

3. Н.Божовић, Ж. Мијајловић: Увод у теорију група, Научна књига, Београд, 1983.;

4. Л. Ј. Соломон: Симетрија као композициона одредница, 1973.