Математички факултет

Универзитет у Београду

Електронски курс о обртним телима за трећи разред средње школе

-мастер рад-

Ментор:

доц. др Мирослав Марић

Студент:

Данијела Максимовић 1097/2012

Београд, 2015.

САДРЖАЈ

Предговор

Настава математике је активан процес у коме учествује неколико чинилаца. Вредност образовања зависи од свих актера: наставних програма, уџбеника, наставника, ученика и начина извођења наставе.

У овом раду биће представљен електронски наставни материјал о обртним телима. Материјал детаљно обрађује сва обртна тела: ваљак, купу, зарубљену купу и лопту. Свака област је употпуњена примерима и задацима са решењима. Све то ће бити пропраћено са сликама и анимацијама креираним у програмском пакету Геогебра у циљу интерактивног представљања ове наставне теме.

Сврха овог рада је да прикаже могућност чешћег коришћења интерактивних материјала у редовној настави математике средње школе и да истакне предност повезивања образовног процеса са информационим технологијама. Овај наставни материјал је намењен и ученицима и наставницима као додатно наставно средство које нуди визуелни приказ како теоријског дела, тако и практичног дела са задацима. Оваква настава ученицима отвара још једну могућност, а то је да поред папира, оловке, шестара и лењира могу користити компјутер као помоћно средство при учењу математике.

Књиге [3] и [6] су коришћене као главни извор приликом формулисања основних појмова и дефиниција, а збирке [1,5,6] као главни извор навођења задатака.

Посебну захвалност дугујем мом ментору, доц. др Мирославу Марићу на свим саветима, сугестијама, помоћи и зато што је увек имао разумевања.

1. УВОДНА РАЗМАТРАЊА

Тема рада су обртна тела која у свом саставу садрже кружнице и њихове делове, из тог разлога потребно је да се у овом делу обраде обим кружнице, површина круга, површина сфере, Кавалијеријев принцип.

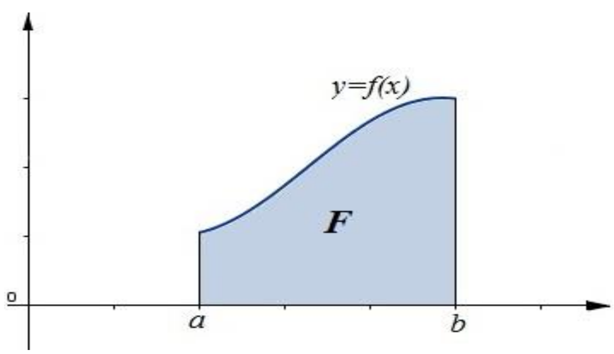
Користиће се методе интегралног рачуна којег изучавају ученици математичке гимназије, природно-математичког смера и општег смера гимназије. Ове методе користе се да се ученицима објасне обим кружнице, површина круга и површина сфере, међутим доказ могу да разумеју тек у 4. разреду. Наведена тврђења се могу извести применом дефиниције граничне вредности низа. Више о применама одређеног интеграла може се пронаћи у [2].

1.1 ПОВРШИНА РАВНИХ ФИГУРА

Формула за површину круга је позната ученицима седмог разреда. Међутим, тек у четвртој години средње школе ученици стичу знања помоћу којих би је извели.

Нека је у равни задат координатни систем xOy и нека је на исечку $[a, b]$ осе Ox дата функција $f(x)$ непрекидна и ненегативна на $[a, b]$ ($f(x) \geq 0$ за све $x \in [a, b]$). Онда фигура F у тој равни, ограничена одсечком $[a, b]$, правим $x = a$ и $x = b$ и делом графика функције $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$, кредставља криволинијски трапез (слика 1.). Ова фигура има површину $P(F)$:

$$P(F) = \int_a^b f(x)dx.$$



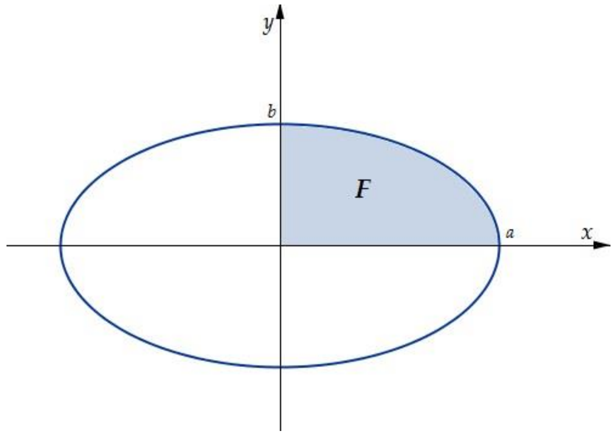
Слика 1. Криволинијски трапез

Пример 1.1. Израчунати површину фигуре у равни ограничене елипсом и полуосама a и b.

Решење: Нека је у равни елипсе дат координатни систем xOy тако да једначина елипсе буде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

(слика 2.) „горња“ половина елипсе има једначину: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.



Слика 2. Елипса

Због симетрије фигура може се израчунати површина једне њене четвртине F' (на слици 2. је осенчена):

$$P(F) = 4P(F') = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Користећи се заменом $x = a\sin t$ добија се:

$$\begin{aligned} &x = a\sin t \\ &dx = a\cos t\, dt \\ &x = 0, \qquad t = 0 \\ &x = a, \qquad t = \pi/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin t^2} \cdot a\cos t\, dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= 4ab\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \\ &= ab\pi. \end{aligned}$$

Ако је, специјално, $a = b = r$, одавде се добија позната *формула површине круга К* полупречника r,

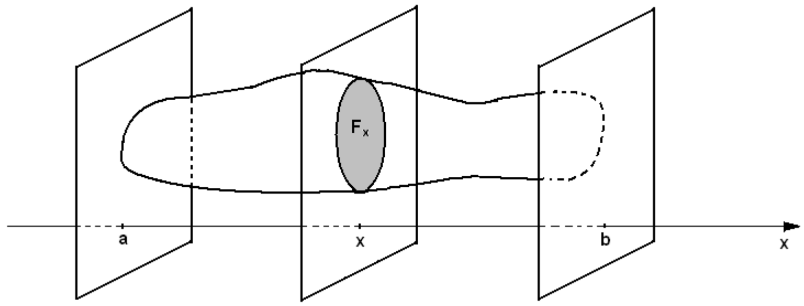
$$P(K) = r^2\pi.$$

1.2 Запремина обртних тела (Кавалијеријев принцип)

Приликом доказивања запремине обртних тела позива се Кавалијеријев принцип. У овом делу биће предочено његово извођење.

У простору је дата оса Ox и ограничена фигура Φ (слика 3.) која има својства:

1. Равни π_x нормалне на осу Ox секу је по равним фигурама које имају површину и при томе је тело Φ смештено између равни π_a и π_b, $a < b$;
2. Површина пресека F_x тела Φ са равни π_x једнака је $S(x)$ позната непрекидна функција координате x.



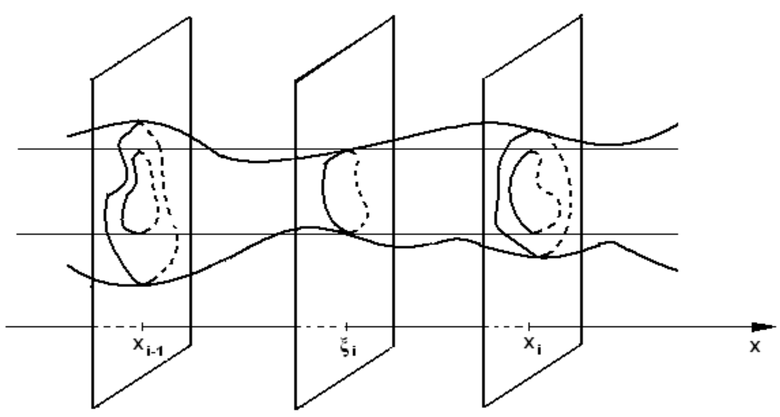
Слика 3. Ограничена фигура Φ

Претпоставља се, даље, да је познат појам запремине цилиндра и да се зна да цилиндар, чија основа има површину B и висина му је H, има запремину:

$$V = B \cdot H.$$

Нека је $\Pi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, подела одсечака $[a, b]$. Уочити „појас“ P_i тела Φ одређен равнима $\pi_{x_{i-1}}$ и π_{x_i} и изабрати $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ (слика 4.). Нека је C_i цилиндар чије су основе подударне са фигуром F_{ε_i} по којој раван π_{ε_i} сече Φ, основе му припдају равнима $\pi_{x_{i-1}}$ и π_{x_i}, а изводнице су паралелне са осом Ox. Запремина $V(C_i)$ тог цилиндра једнака је $(B = S(\varepsilon_i), H = x_i - x_{i-1})$

$$V(C_i) = S(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$



Слика 4. „Појас“ тела Φ

Формира се сума:

$$\sum_{i=1}^{n} S(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Сагласно нашим интуитивним представама о запремини, може се дефинисати да тело Φ има запремину и да је она једнака $V(\Phi)$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да се за све поделе Π за које је $d(\Pi) < \delta$ и за сваки избор ε тачака $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$ важи:

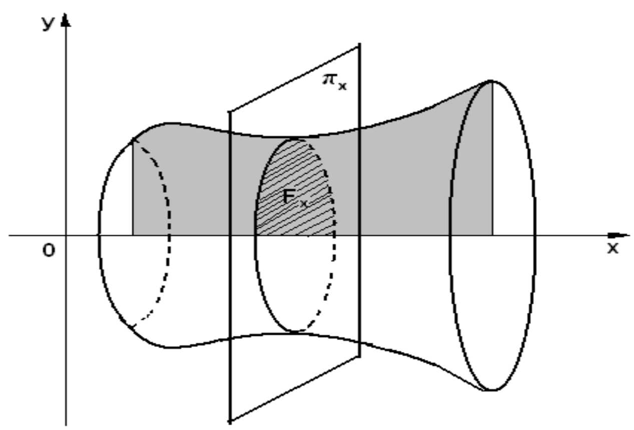
$$\left|\sum_{i=1}^{n} S(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}) - V(\Phi)\right| < \varepsilon.$$

Но, посматрана сума је интегрална сума за функцију $S(x)$ на одсечку $[a,b]$ при подели Π и избору ε тачака. Због претпоставке да је $S(x)$ непрекидна функција на $[a,b]$, такав број $V(\Phi)$ постоји и важи:

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x)dx.$$

Из ове формуле следи, очигледно, нама познати **Кавалијеријев принцип**:

Ако две фигуре имају исту функцију $S(x)$, њихове запремине су једнаке.



Слика 5. Криволинијски трапез ротира око осе Ox

Нека је сада у равни xOy дат криволинијски трапез F, одређен функцијом $f(x)$, $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, и нека тело Φ настаје обртањем фигуре F око осе Ox, (слика 5.). Добија се ротационо тело за које је површина $S(x)$ пресека са равни π_x у ствари површина круга пречника $f(x)$. Дакле,

$$S(x) = \pi(f(x))^2.$$

Стога у овом случају:

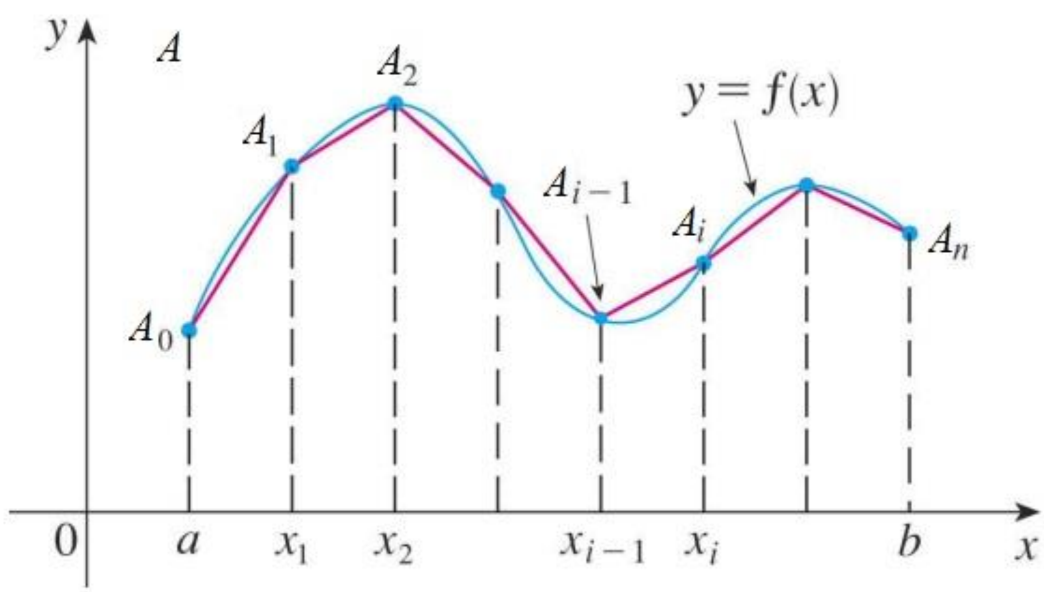
$$V(\Phi) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

1.3 ДУЖИНА ЛУКА КРИВЕ (РЕТИФИКАЦИЈА)

Дужина лука криве је гранична вредност којој тежи дужина у криву (у лук криве) уписаних изломљених линија кад се број њихових праволинијских сегмената неограничено повећава тако да дужина највећег сегмента тежи нули. Ако је ова гранична вредност коначна, за криву (њен лук) се каже да се може ректифицирати.

Нека крива L у равни xOy представља график функције $f(x)$, $x \in [a, b]$, при $f(x)$ непрекидно диферецијабилна на $[a, b]$. Посматрати поделу $\Pi = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, одсечака $[a, b]$ и конструисати полигоналну линију P_L са теменима $A_0\big(x_0, f(x_0)\big), A_1\big(x_1, f(x_1)\big), \dots, A_n\big(x_n, f(x_n)\big)$. Она је уписана у криву L и дужина те полигоналне линије једнака је:

$$s(P_L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$



Слика 6. Полигонална линија

Функција $f(x)$ на сваком од одсечака $[x_{i-1}, x_i]$ испуњава услове Лагранжове теореме, па постоје тачке $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, такве да је:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}),$$

па је:

$$s(P_L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(\varepsilon_i)(x_i - x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \big(f'(\varepsilon_i)\big)^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Ово је интегрална сума за функцију $\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}$ на одсечку $[a, b]$ при подели Π и избору ε тачака $\varepsilon \in [x_{i-1}, x_i]$.

Сагласно нашим интинуитивним представама може се дефинисати да лук криве L има дужину, једнаку $s(L)$, ако постоји лимес ове интегралне суме када $d(\Pi) \to 0$. Према претпоставци $f'(x)$ је непрекидна на $[a,b]$, па је непрекидна и функција $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ на $[a,b]$, те постоји:

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(\varepsilon_i)\right)^2}(x_i - x_{i-1})$$

и он је једнак:

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

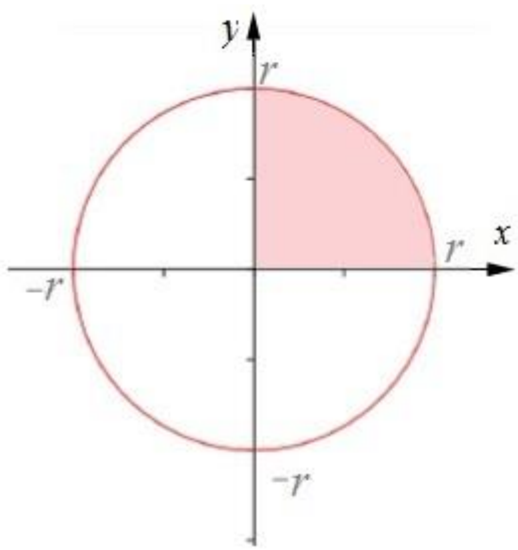
Дакле, крива L има дужину лука:

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Често се, узимајући у обзир да је $y = f(x)$, пише:

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Пример 1.3. Извести формулу за обим кружнице полупречника r (слика 7.).



Слика 7. Кружница са центром у координатном почетку

Решење: Нека је у равни кружнице дат координатни систем xOy тако да је координатни почетак центар дате кружнице. Једначина кружнице ће бити:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

па „горња" половина кружнице има једначину:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Због симетрије фигуре може се израчунати површина једне њене четвртине:

$$O(F) = 4O(F') = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)'^2} dx$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{r^2 - x^2} \cdot 4x^2} dx = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r\int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot arc\sin\frac{x}{r}\Bigg|_0^r$$

$$= 4r \cdot arc\sin 1 = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2r\pi.$$

1.4 ПОВРШИНА ОБРТНИХ ТЕЛА

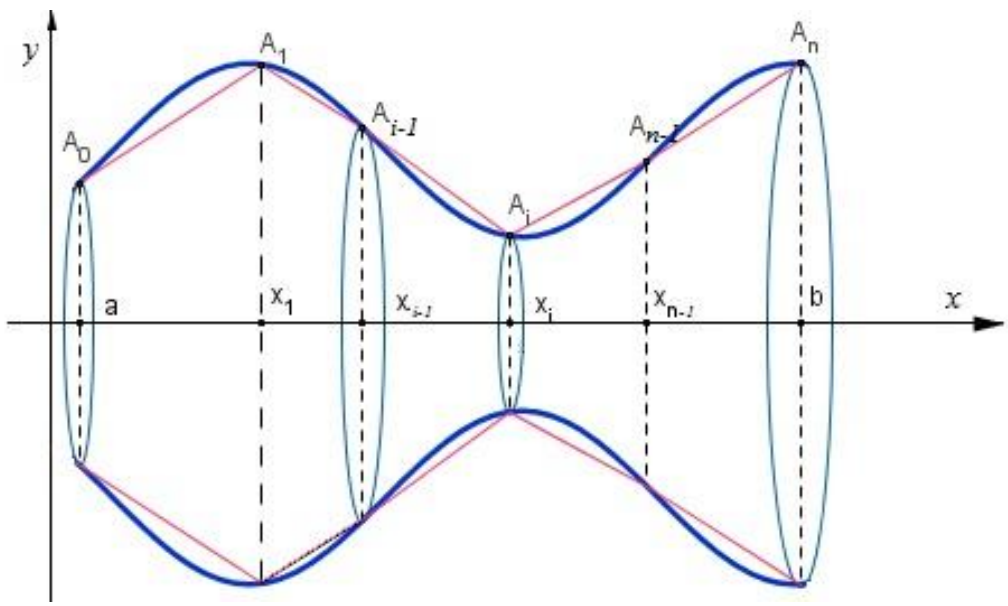
Ротационо тело Φ настаје обртањем криволинијског трапеза F око осе Ox. Трапез F је одређен функцијом $f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$. Поставити овај пут задатак да се одреди површина омотача тела Φ.

Претпоставити да је познато да се површина омотача зарубљене купе чије основе имају полупречнике r_1 и r_2, а чија изводница има дужину s, израчунава по обрасцу:

$$S = \pi(r_1 + r_2)s.$$

Доказ ове површине је дат у поглављу 4.

Нека је функција $f(x)$, $x \in [a, b]$, непрекидно диференцијабилна и нека је у криву L која је њен график уписана полигонална линија P_L као приликом дефинисања дужине лука. Претпоставити да се и та полигонална линија обрће заједно са целим криволинијским трапезом. Добија се, поред тела Φ, још једно ротационо тело Φ_1 чији је омотач састављен од неколико омотача зарубљених купа (слика 8.).



Слика 8. Криволинијски трапез ротира

Како i-та од поменутих зарубљених купа има полупречнике основа $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, а изводницу

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2},$$

где је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$, то је укупна површина тела Φ_1 једнака:

$$S(\Phi_1) = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})] \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f(x_i))^2}.$$

На основу Лагранжове теореме о средњој вредности, постоје тачке $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, такве да је:

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\varepsilon_i).$$

С друге стране, како је функција f непрекидна на сваком од одсечака $[x_i - x_{i-1}]$, то постоје тачке $\mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, такве да је:

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} = f(\mu_i),$$

тј. $f(x_i) + f(x_{i-1}) = 2f(\mu_i)$. Зато се површина омотача тела Φ_1 може представити као:

$$S(\Phi_1) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i) \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \Delta f'^2(\varepsilon_i)(\Delta x_i)^2}$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\mu_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Ако је подела П довољно „фина“, тачке ε_i и μ_i, које обе припадају сегменту $[x_{i-1}, x_i]$, мало се разликују, па се због непрекидности функције f и вредности $f(\varepsilon_i)$ и $f(\mu_i)$ мало разликују. Зато се може узети да је:

$$S(\Phi_1) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \cdot \Delta x_i.$$

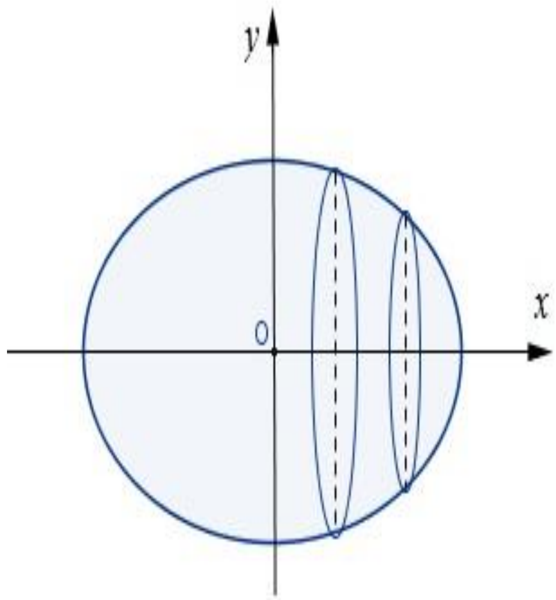
Последњи израз је, међутим, интегрална сума интеграла:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \Delta f'^2(x)} dx,$$

Који постоји јер је функција fнепрекидно диференцијабилна. Зато ће се, по дефиницији, узети да је **површина омотача ротационог тела Ф**,

$$S(\Phi) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \Delta f'^2(x)} dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Пример 1.4. Одредити површину сферног појаса полупречника r и висине h који настаје ротацијом x-осе лука полукруга $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a \le x \le b$, где је $|a|, |b| \le r$, $b - a = h$ (слика 9.).



Слика 9. Сферни појас

Решење: Због $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ је

$$y' = -\frac{x}{y = \sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad \sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad y\sqrt{1 + y'^2} = r,$$

па је тражена површина:

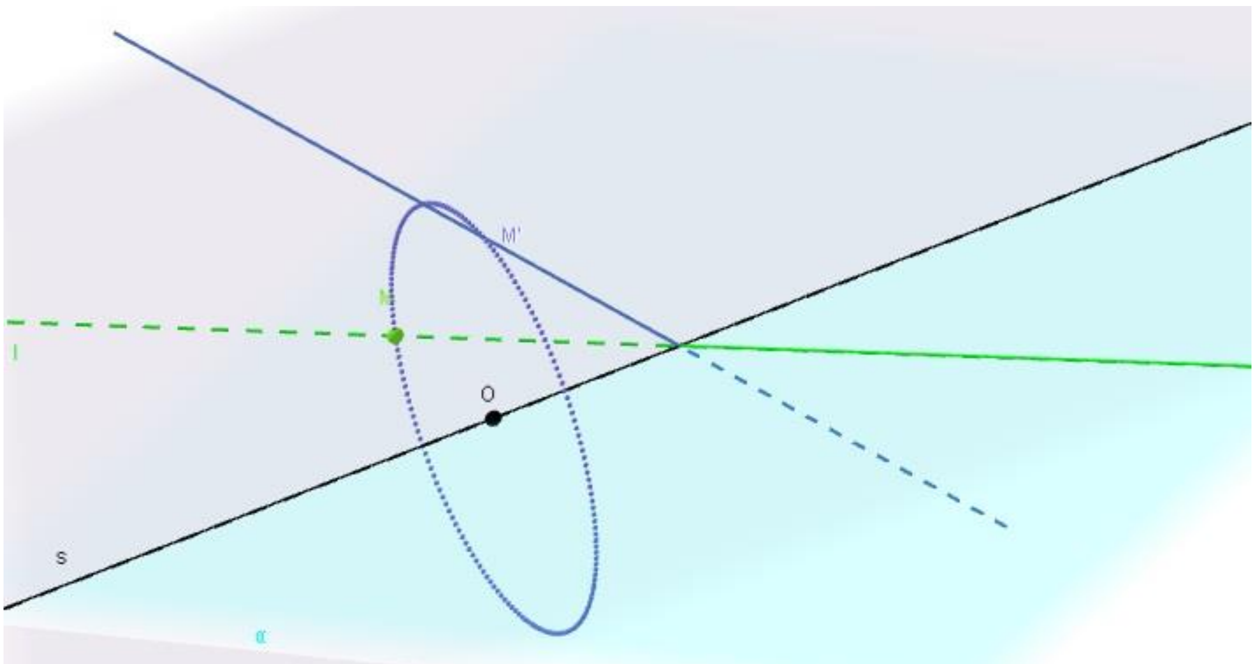
$$S = 2\pi \int_a^b r\, dx = 2\pi r(b - a) = 2\pi r h.$$

Треба приметити резултат не зависи непосредно од вредности граница a и b, већ само од њихове разлике $b - a = h$. Специјално, за $a = -r$, $b = r$, тј. $h = 2r$, добија се површина целе сфере $S = 4\pi r^2$.

2. Обртна тела

Обртна или ротациона површ је површ коју образује једна линија l (права, крива, изломљена) која се ротира око једне сталне праве s за пун угао $(360°)$. Линија која изводи кретање назива се *изводница* или *генератриса*, а стална права *оса* ротације.

Нека је s произвољна права и α раван која је садржи и нека је l произвољна линија равни α. Ако се раван α обрће око праве s за пун угао, тада свака тачка $\mathrm{M} \in l$ описује кружну линију која припада равни нормалној на праву s, а чији је центар у тачки $\mathrm{O} \in s$. Унија свих таквих кружних линија, добијених обртањем свих тачака линије l, образује **обртну (или ротациону) површ** (слика 10.).

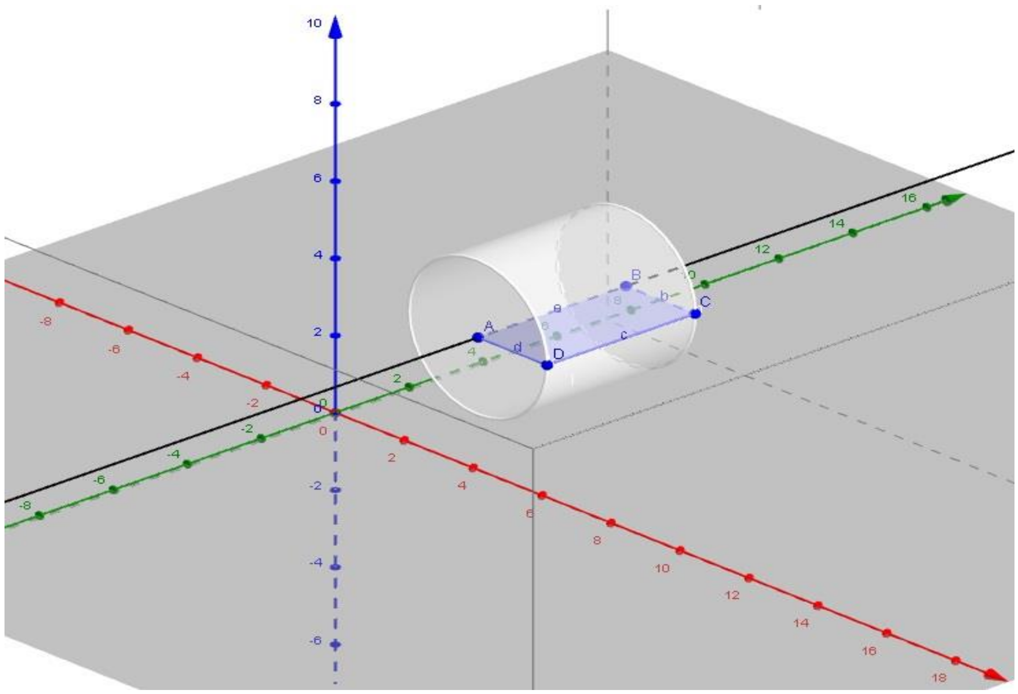


Слика 10. Ротациона површ

Каже се да је обртна површ добијена обртањем линије l око осе s. Ако се за линију l узме права која са правом s нема заједничких тачака (тј. паралелна јој је), добијена обртна површ је права кружна цилиндрична површ, која се такође назива и *обртна цилиндрична површ.* Ако се за линију l узме права која сече праву s, добијена обртна површ је права кружна конусна површ која се такође назива и *обртна конусна површ*.

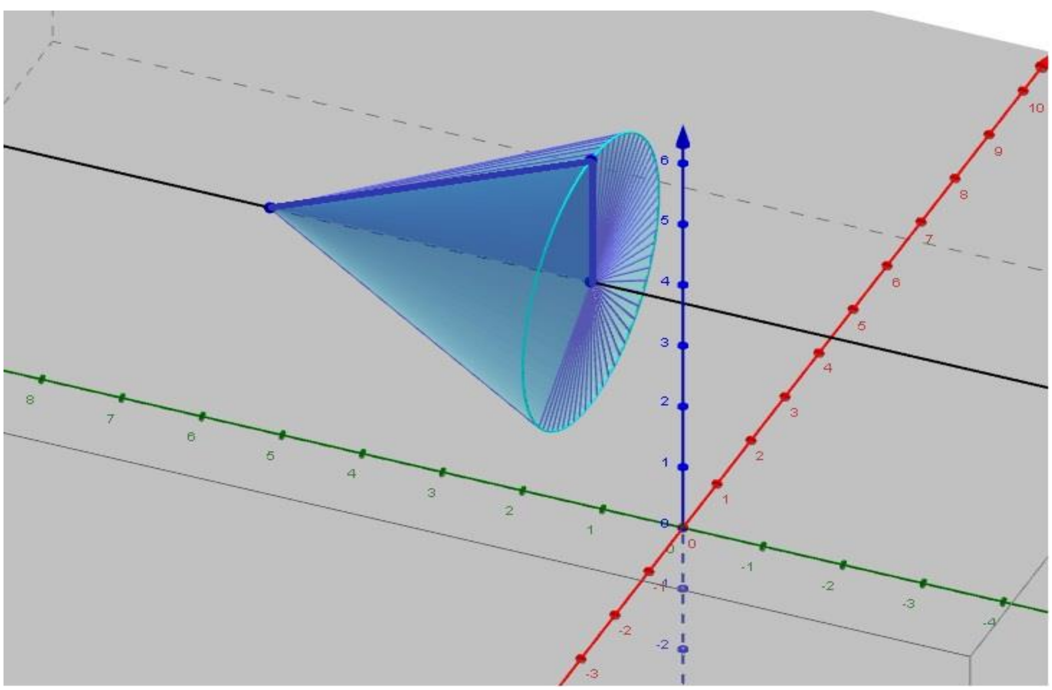
Тело ограничено једном обртном површи, или делом обртне површи и равнима нормалним на осу ротације, назива се **обртно** или **ротационо тело**.

Прав ваљак је обртно тело које настаје ротацијом правоугаоника око осе која садржи једну његову страницу (слика 11.).



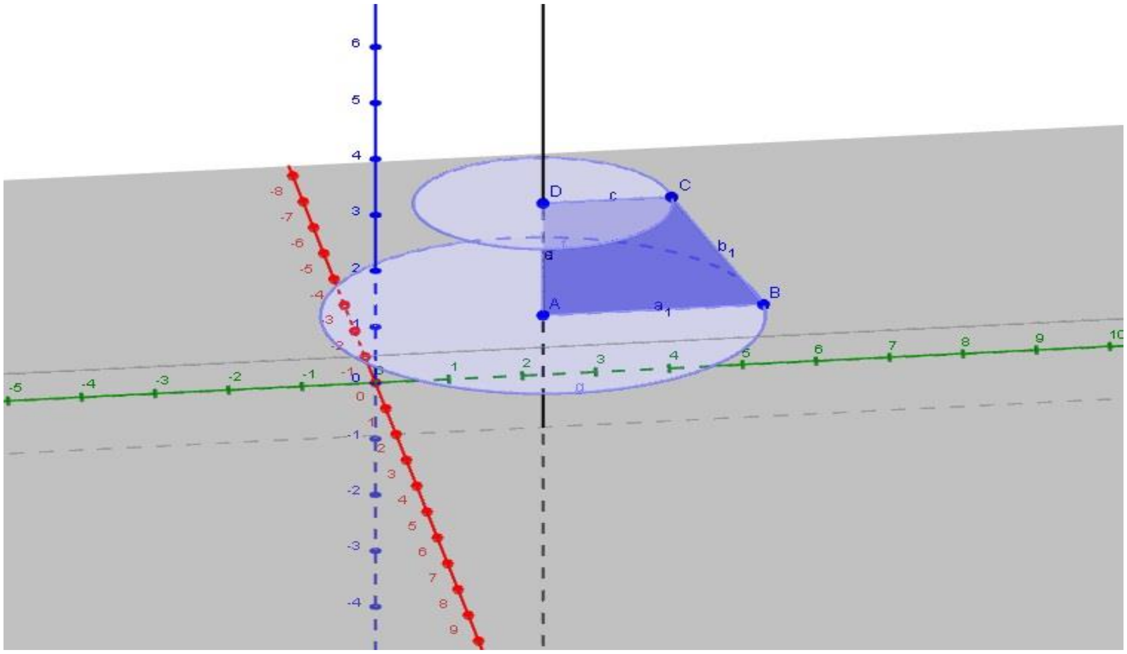
Слика 11. Правоугаоник ротира око осе која садржи једну његову страницу

Права купа је обртно тело које настаје ротацијом правоуглог троугла око осе која садржи једну његову катету (слика 12.).



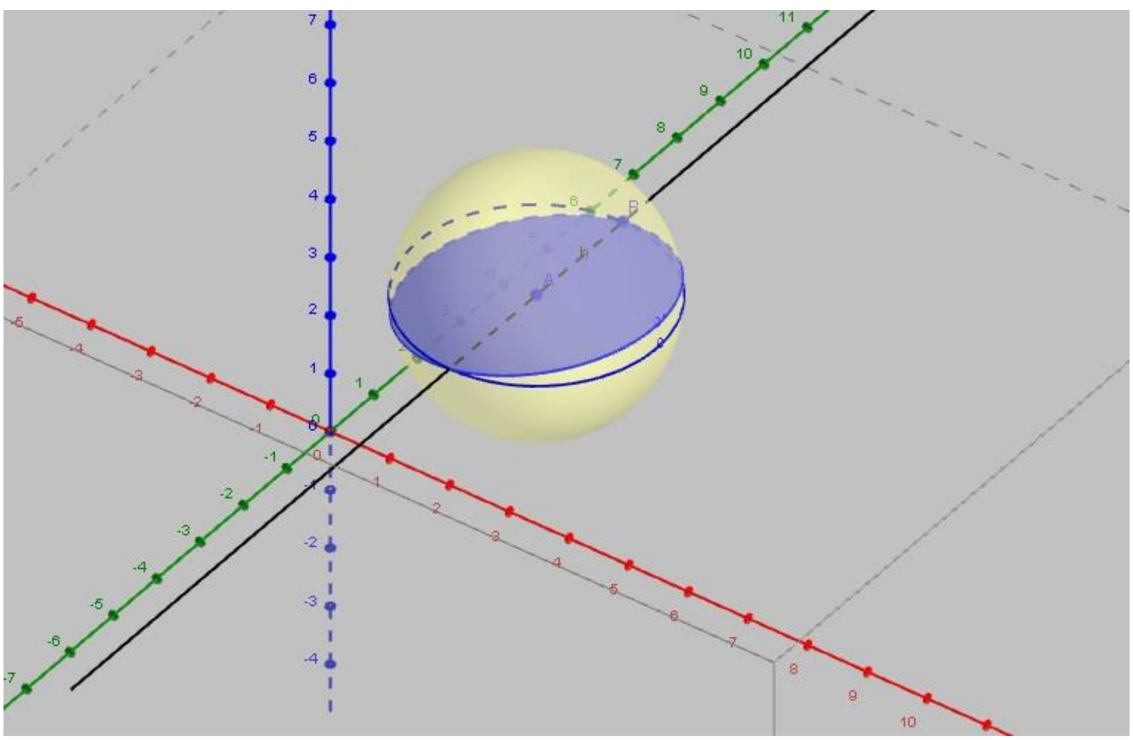
Слика 12. Правоугли троугао ротира око осе која садржи једну његову катету

Зарубљена купа се може добити ротацијом правоуглог трапеза око његовог краћег крака (слика 13.).



Слика 13. Правоугли трапез ротира око осе која садржи његов краћи крак

Лопта је обртно тело које настаје обртањем круга око осе која садржи његов пречник (слика 14.). Треба приметити да тачка овде не ротира за пун круг, него за пола круга.



Слика 14. Круг ротира око осе која садржи његов пречник

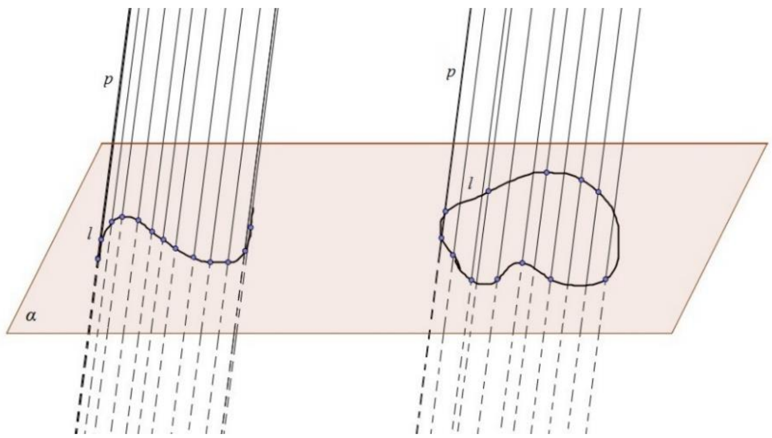
3. ВАЉАК

3.1 ЦИЛИНДРИЧНА ПОВРШ

Површ образована кретањем праве која остаје стално паралелна свом првобитном положају, назива се цилиндрична површ.

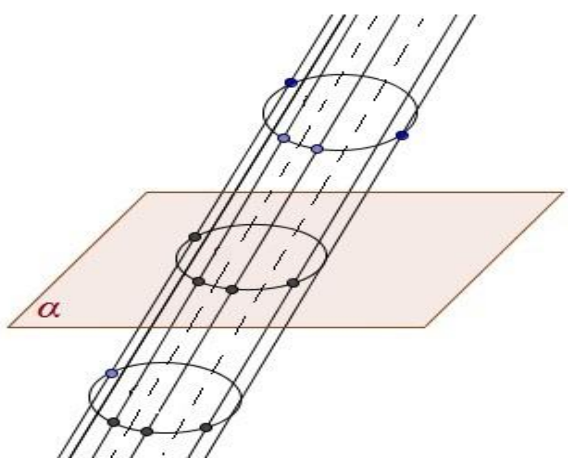
Нека је l произвољна линија равни α и нека је p права која продире ту раван. Скуп тачака свих правих које секу линију l и паралелне су са правом p је *цилиндрична површ* (слика 15.). Линија l је *водиља* (директриса), а праве које секу l и паралелне су са p су *изводнице* (генератрисе) цилиндричне површи.

Ако је водиља l проста линија (тј. не сече саму себе), и одговарајућа цилиндрична површ је *проста*; иначе је *сложена*. Цилиндрична површ је *отворена* ако је водиља отворена линија (слика 15. десно); иначе је *затворена* (слика 15. лево).



Слика 15. Отворена и затворена цилиндрична површ

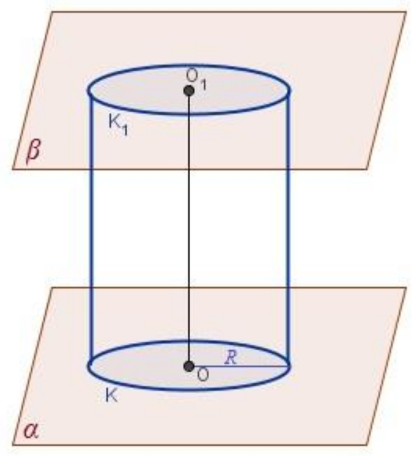
Ако је водиља кружне цилиндричне површи кружна линија, тада се за цилиндричну површ каже да је *кружна* (слика 16.). Све равни паралелне са равни водиље кружне цилиндричне површи секу ту површ по подударним кружним линијама.



Слика 16. Кружна цилиндрична површ

3.2 Дефиниција ваљка

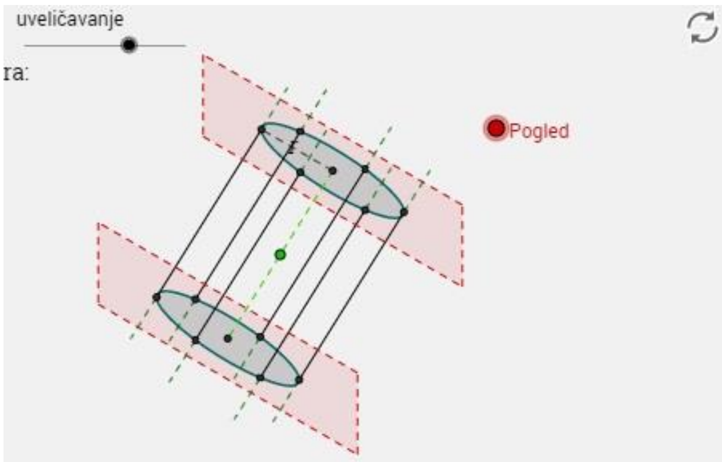
Део простора ограничен кружном цилиндричном површи и двема подударним кружним површима (које настају када се цилиндрична површ пресече са две паралелне равни) назива се **ваљак** (слика 17.). Кружне површи су *основе* ваљка, а део цилиндричне површи између основа је *омотач* ваљка.



Слика 17. Ваљак

Изводнице цилиндричне површи које припадају омотачу ваљка зову се *изводнице* ваљка. Оне су паралелне и једнаке. Растојање између основа ваљка назива се *висина* ваљка, а дуж која спаја средишта основа ваљка назива се *оса* ваљка. Ако је оса ваљка нормална на равни основа, ваљак је *прав*, иначе је *кос*.

Дефиниција 3.1. Прав кружни ваљак (цилиндар) је фигура ограничена делом кружне цилиндричне површи између равни α и β и кружним површима K и K_1. Те кружне површи називају се *основама*, права OO_1 је оса, дуж OO_1 *висина*, а R *полупречник* основе ваљка.



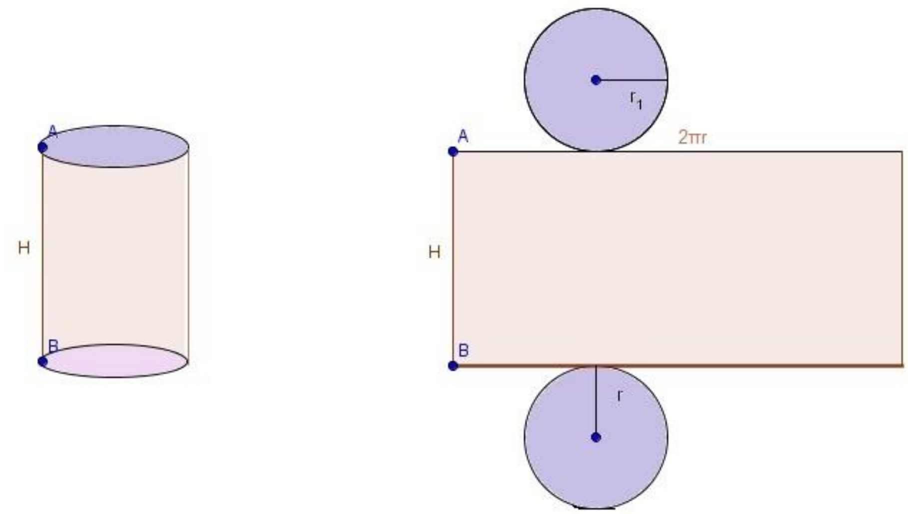
Слика 18. Ваљак из различитих перспектива

3.3 ПОВРШИНА ОМОТАЧА ВАЉКА

Ако је R полупречник основе, а H висина ваљка, површина омотача ваљка је $\boldsymbol{M = 2\pi RH}$.

Омотач ваљка се може "развити" у равни исецањем по дужи AB (слика 19.).

Добија се правоугаоник страница $2\pi R$ и H.



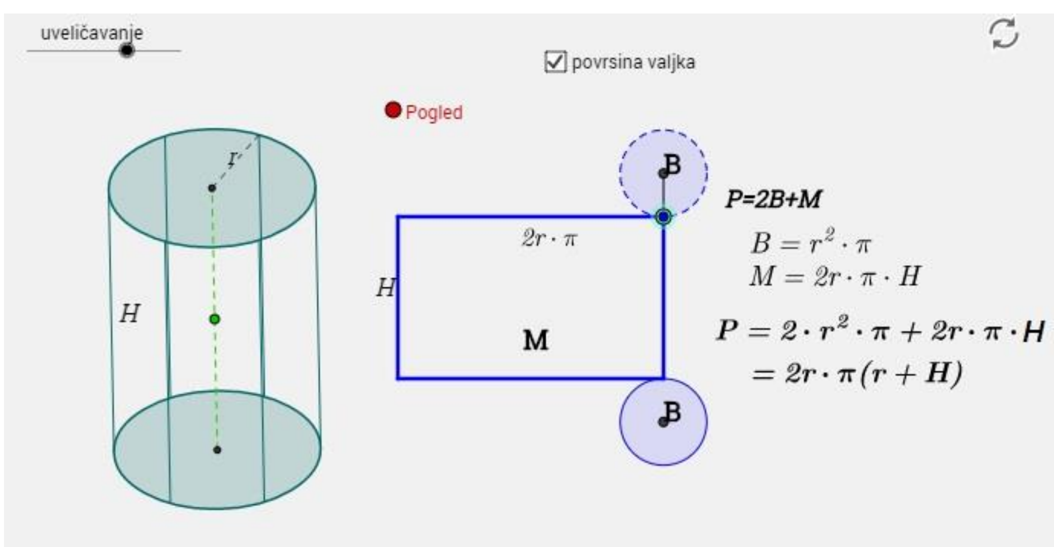
Слика 19. Мрежа ваљка

3.4 ПОВРШИНА ВАЉКА

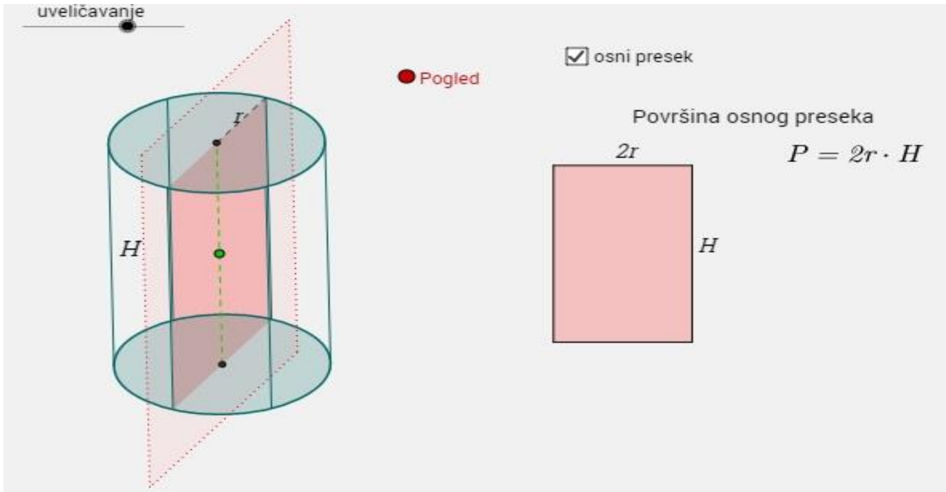
Ако је R полупречник основе, а H висина ваљка, површина ваљка је $\boldsymbol{P = 2\pi R(R+H)}$.

<u>Доказ</u>: Површину ваљка добијамо сабирањем површина обе основе и омотача ваљка.

$$P = 2B + M = 2R^2\pi + 2R\pi = 2\pi R(R+H).$$



Слика 20. Ваљак и површина ваљка



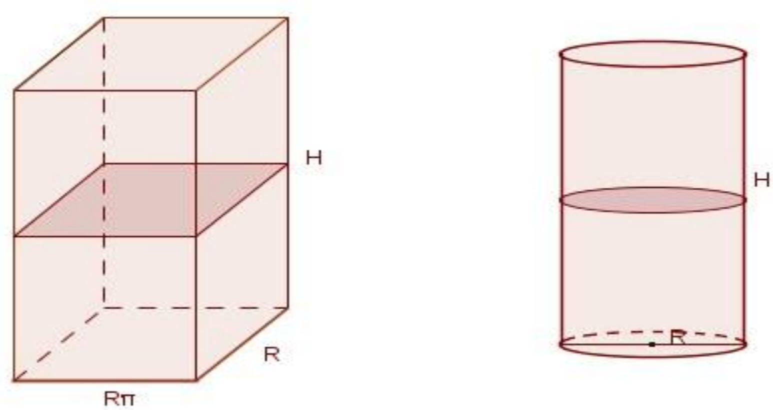
Слика 21. Осни пресек ваљка

3.5 Запремина ваљка

Ако је R полупречник основе, а H висина ваљка, тада је његова запремина $\boldsymbol{V = R^2 \pi H}$.

<u>Доказ</u>: Приликом извођења доказа користи се Кавалијеријев принцип, приликом чега се запремина квадра узима као интуитивно јасна.

Нека је у равни основе датог ваљка постављена основа правоуглог паралелопипеда чије су основне ивице $a = R$ и $b = R\pi$ и висина H. Ако се ове две фигуре пресеку било којом равни паралелном равни основе добијају се пресеци једнаких површина $R^2\pi$ (Слика 22.).



Слика 22. Паралелопипед и ваљак

На основу Кавалијеријевог принципа и запремине ових тела су једнаке.

Дакле, $V = R\pi \cdot R \cdot H = R^2\pi H$.

Напомена: Ова формула важи и за случај косог ваљка.

3.6 ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

У овом делу приказани су задаци који се сврставају у основни и средњи ниво знања помоћу којих се ученици уводе у област обртних тела. Још сличних задатака може се наћи у збиркама [3] и [5].

Задатак 3.1. За колико се мора повећати висина правог кружног ваљка, тако да површина омотача новог ваљка буде једнака површини датог ваљка.

Решење:

Нека је H_1 висина новог ваљка.

По услову задатка има да је $M_1 = P$

$$2\pi RH_1 = 2\pi R(R+H) \ \ /: 2\pi R$$

$$H_1 = R + H.$$

Висина се повећа за дужину полупречника.

Задатак 3.2. Наћи површину и запремину ваљка ако је збир дужина пречника и висине ваљка $27cm$, а површина дијагоналног пресека $180cm^2$.

Решење:

$$2R + H = 27cm,$$

$$Pp = 180cm^2.$$

Из површине дијагоналног пресека добија се:

$$Pp = 2RH$$

$$180 = (27 - H) \cdot H$$

$$H^2 - 27H + 180 = 0$$

$$H_1 = 15cm, \qquad H_2 = 12cm.$$

Из услова задатка $2R + H = 27cm$ следи:

$$R_1 = 6cm, \qquad R_2 = 7.5cm.$$

Заменом добијених вредности у формуле за површину и запремину добија се:

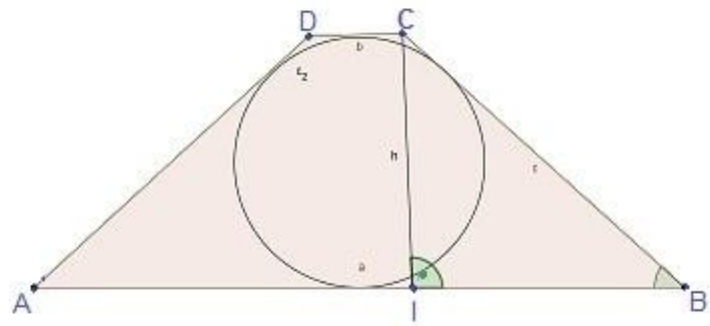
$$P_1 = 252\pi cm^2, \qquad P_2 = 202.5\pi cm^2.$$

$$V_1 = 540\pi cm^3, \qquad V_2 = 675\pi cm^3.$$

Задатак 3.3. У праву призму која за основу има трапез површине 50cm^2, са оштрим углом $30°$, уписан је ваљак. Наћи површину и запремину ваљка чија је висина једнака краку трапеза.

Решење:

$Pt = 50cm^2$,
$\propto = 30^{\circ}$,
$H = c$.



Слика 23. Попречни пресек призме и ваљка

Са слике 23. се види да је $\Delta IBC(90^{\circ}, 60^{\circ}, 30^{\circ})$ половина једнакостраничног троугла одакле следи: $c = 2 \cdot h$.

Трапез је тангентни па је збир наспрамних страница једнак:

$$a + b = 2c$$
$$Pt = \frac{a+b}{2} \cdot h$$
$$50 = \frac{2c}{2} \cdot h$$
$$50 = c \cdot h$$
$$50 = 2 \cdot h \cdot h$$
$$50 = 2 \cdot h^2$$
$$h = 5\ cm$$
$$c = 10cm\ .$$

По услову задатка: $H = c = 10cm$.

Пречник основе ваљка је једнак висини базе призме:

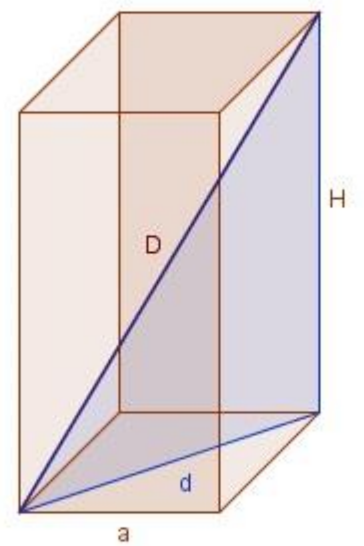
$$2R = h$$
$$R = \frac{5}{2} = 2.5cm.$$

$$P = 2R\pi(R + H) = 62.5\pi cm^2.$$
$$V = R^2\pi H = 62.5\pi cm^3.$$

Задатак 3.4. У правилну четворострану призму запремине $128cm^3$ и дијагонале дужине $4\sqrt{6}\ cm$ уписан је кружни ваљак. Наћи површину и полупречник основе ваљка.

Решење:

$Vp = 128cm^3$,
$D = 4\sqrt{6}cm$.



Слика 24. Четворострана призма

Применом Питагорине теореме (на плави троугао са слике 24.):

$D^2 = H^2 + d^2$
$d = a\sqrt{2}$
$D^2 = H^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$
$D^2 = H^2 + 2a^2$

Изразити страницу призме преко висине:
$a^2 = \dfrac{D^2 - H^2}{2}$
$a^2 = \dfrac{96 - H^2}{2}$.

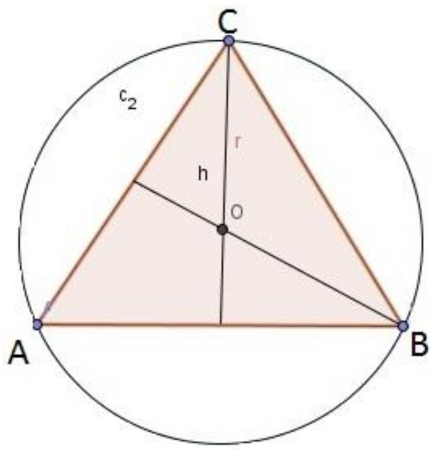
Из запремине се добија:

$Vp = a^2 H$
$128 = \frac{96 - H^2}{2} \cdot H$
$H^3 - 96H + 256 = 0$
$H^3 - 64H - 32H + 256 = 0$

$H_1 = 8cm$, $\quad R_1 = 2cm$.
$H_2 = 4\left(\sqrt{3} - 1\right)cm$, $\quad R_2 = 2\sqrt{\sqrt{3} + 1}\ cm$.

Задатак 3.5. Правилна тространа призма уписана је у ваљак. Полупречник основе ваљка је $r = 6cm$, а дијагонала осног пресека ваљка је $d = 13cm$. Израчунати површину и запремину призме.

Решење:



$r = 6cm,$

$d = 13cm.$

Применом Питагорине теореме на осни пресек ваљка добија се висина ваљка:

$d^2 = (2r)^2 + H^2$

$H = 5cm.$

Слика 25. Попречни пресек тростране призме и ваљка описаног око ње

У једнакостраничном ΔABC полупречник описаног круга је две трећине висине:

$$r = \frac{2}{3}h \Rightarrow h = \frac{3}{2}r$$

$$h = 9cm.$$

Применом Питагорине теореме на једнакостранични троугао може се изразити висина преко странице:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$9 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 6\sqrt{3}cm.$$

$$Pp = 2B + M = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH = 117\sqrt{3}cm^2.$$

$$Vp = B \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 135\sqrt{3}cm^3.$$

Задатак 3.6. У тространу призму чије су основне ивице $= 13cm$, $b = 14cm$ и $c = 15cm$, уписан је и око ње описан ваљак. Наћи однос запремина та два ваљка.

Решење:

$a = 13cm$,

$b = 14cm$,

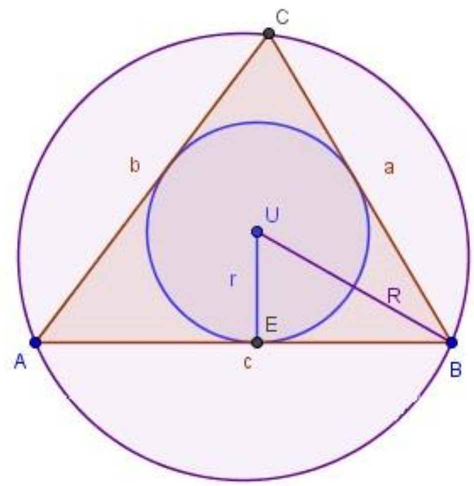
$c = 15cm$.

Наћи однос $Vo : Vu$.

R −полупречник описане кружнице,

r − полупречник уписане кружнице,

H −висина призме и оба ваљка.



Слика 26. Попречни пресек уписаног и описаног ваљка око тростране призме

Израчунати површину троугла преко Хероновe формуле:

$$P_B = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 21cm.$$

Површина троугла преко полупречника уписане кружнице:

$P_B = r \cdot s$

$84 = r \cdot 21$

$r = 4cm.$

Површина троугла преко полупречника описане кружнице:

$P_B = \frac{abc}{4R}$

$84 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4R}$

$R = \frac{65}{8} cm.$

$$Vo : Vu = \frac{R^2 \cancel{\pi \cdot H}}{r^2 \cancel{\pi \cdot H}} = \frac{R^2}{r^2} = \left(\frac{65}{8}\right)^2 : 4^2 = 65^2 : 4^2.$$

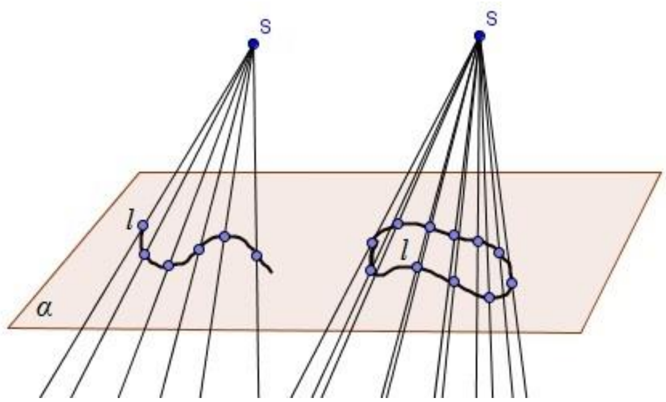
4. Купа

4.1 Конусна површ

Ако се права креће тако да стално пролази кроз једну исту тачку, онда се настала површ назива конусна површ.

Нека је l произвољна линија равни α и нека је S тачка која не припада тој равни. Скуп тачака свих правих које садрже тачку S и секу линију l је *конусна површ* (слика 27.). Линија l је *водиља* (директриса) конусне површи, а праве које садрже тачку S и секу водиљу су *изводнице* (генератрисе). Тачка S је *врх* конусне површи.

Просте, отворене и затворене конусне површи дефинишу се аналогно простим, отвореним и затвореним цилиндричним површима. Специјално ако је водиља конусне површи кружна линија, таква конусна површ је *кружна*.



Слика 27. Конусна површ

4.2 Дефиниција купе

Круг (одређен водиљом кружне конусне површи) и део конусне површи који се налази између те водиље и врха ограничавају део простора који се назива *кружна купа* или само **купа**.

Тај круг је *основа* купе, а конусна површ између врха и основе је *омотач* купе. Изводнице конусне површи које припадају омотачу купе називају се *изводницама* купе. Растојање између врха и равни основе купе је *висина* купе, а дуж која спаја врх са средиштем основе је *оса* купе. Купа је *права* ако је оса нормална на раван основе; иначе је *коса.* Оса праве купе је уједно и њена висина (слика 26.).

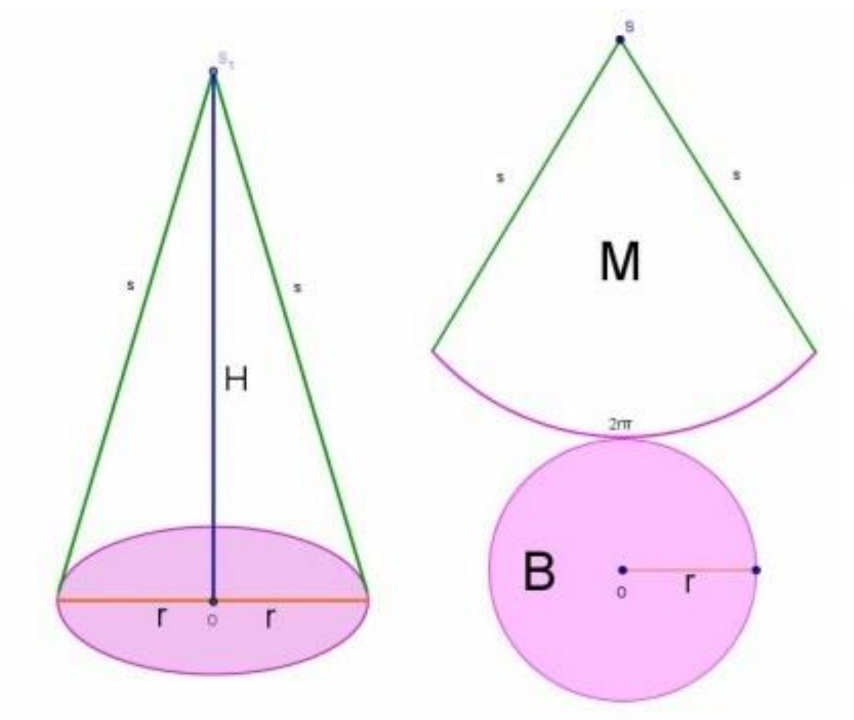
Дефиниција 4.1. Права кружна купа (конус) је фигура ограничена делом конусне површи између тачке S и равни круга и кружном површи k. Кружна површ k је *основа* купе, права OS је *оса* купе, дужи ограничене тачком S и тачкама круга, *изводнице*, дуж SO *висина*, а R *полупречник* основе купе.

4.3 ПОВРШИНА ОМОТАЧА КУПЕ

Ако је R полупречник основе, а s изводница купе, површина омотача купе је $\boldsymbol{M = \pi R s}$.

<u>Доказ</u>: Слично као и омотач ваљка, омотач купе се може "развити" у раван "исецањем" по једној изводници. Добија се кружни исечак (слика 28.) полупречника s при чему је дужина одговарајућег кружног лука једнака обиму основе купе а $l = 2R\pi$.

Дакле, $M = \frac{1}{2} \cdot l \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2R\pi \cdot s = R\pi s$.



Слика 28. Купа и мрежа купе

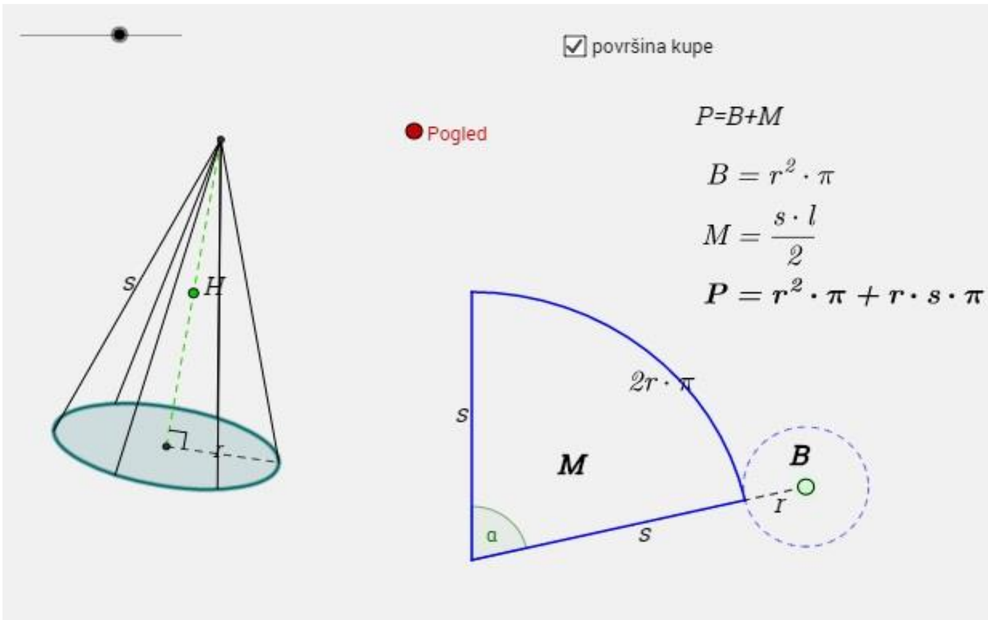
4.4 Површина купе

Ако је R полупречник основе, а s изводница купе, површина купе је

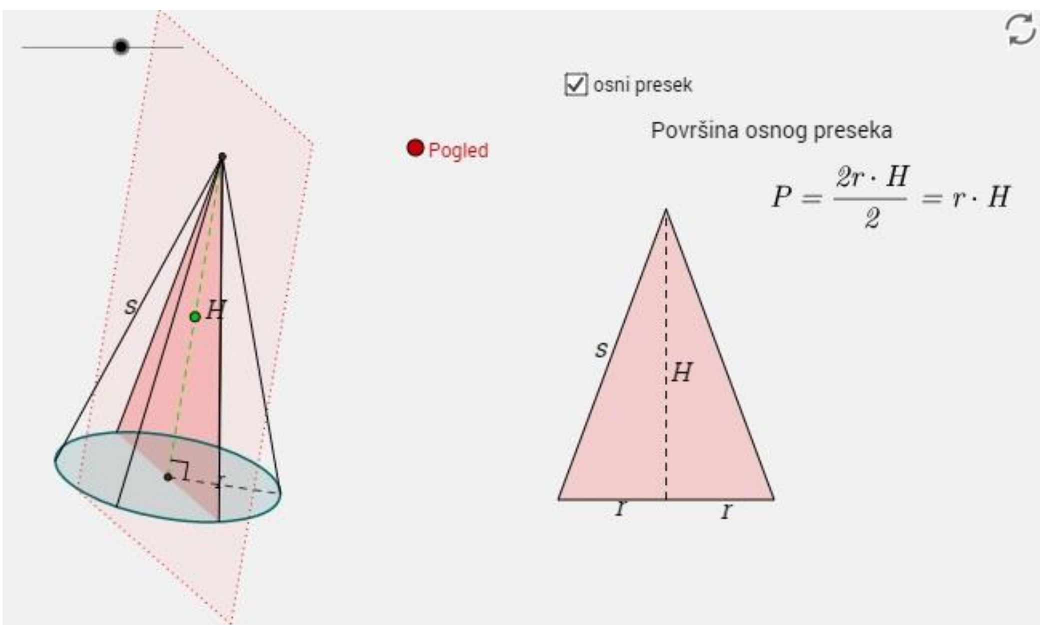
$$\boldsymbol{P = \pi R(R + s)}.$$

<u>Доказ</u>: Површину купе добијамо сабирањем површине основе и омотача купе.

$$P = B + M = R^2\pi + R\pi s = \pi R(R + s).$$



Слика 29. Купа и површина купе



Слика 30. Осни пресек купе

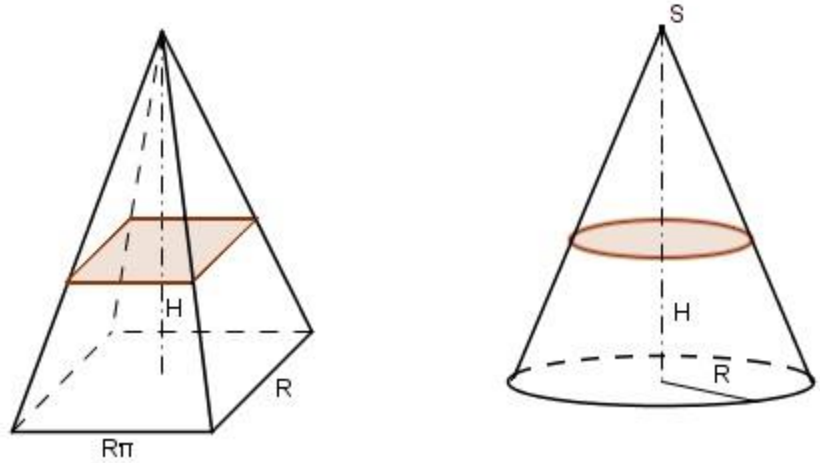
4.5 ЗАПРЕМИНА КУПЕ

Ако је R полупречник основе, а H висина купе, тада је њена запремина

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} R^2 \pi H}.$$

Доказ: Нека је у равни основе дате купе постављена основа четворостране пирамиде и при чему је та основа правоугаоник са страницама $a = R$ и $b = R\pi$ и висина пирамиде је једнака H. Ако се ове две фигуре пресеку неком равни паралелно њиховим основама добиће се фигуре једнаких површина (слика 31.).

Наиме, површина пресека се односи према површини основе као квадрат растојања врха од пресека према квадрату висине.



Слика 31. Четворострана пирамида и купа

Како су основе ових фигура једнаке и висине једнаке, то су једнаке и површине фигура у пресеку. По Кавалијеријевом принципу запремина купе је једнака запремини пирамиде. Запремина пирамиде је $\frac{1}{3}BH$, где је B база чије су странице $a = R$ и $b = R\pi$ и H висина пирамиде. Дакле, $V = \frac{1}{3} R\pi \cdot R \cdot H = \frac{1}{3} R^2 \pi H$.

Напомена: Ова формула важи и за случај косе кружне купе.

4.6 ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

У овом делу приказани су задаци помоћу којих се ученици уводе у област купе који се сврставају у средњи ниво знања. Још сличних задатака може се наћи у збиркама [1], [3] и [5].

Задатак 4.1. Однос полупречника основе и висине купе је $3:4$. Ако је површина омотача купе $M = 60\pi\ cm^2$, израчунати запремину купе.

Решење:

$r: H = 3:4$ одакле следи $r = 3k,\ H = 4k$
$M = 60\pi cm^2$.

Прво се по Питагориној теореми рачуна изводница:

$$s^2 = r^2 + H^2$$

$$s^2 = (3k)^2 + (4k)^2$$
$$s = 5k.$$

Из формуле за површину омотача пирамиде се добија k.

$$M = sr\pi$$
$$60\pi = 5k \cdot 3k \cdot \pi /: \pi$$
$$60 = 15k^2$$
$$k^2 = 4$$
$$k = \sqrt{4} = 2.$$

$r = 3 \cdot 2 = 6cm.$
$H = 4 \cdot 2 = 8cm.$

Добијене величине се замене у формулу:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$$
$$V = \frac{1}{3} 6^2 \cdot \pi \cdot 8 = 96\pi cm^3.$$

Задатак 4.2. Запремина купе је $\frac{8}{3}\pi\ cm^3$. Израчунати висину купе ако је површина омотача три пута већа од површине њене основе.

Решење:

$V = \frac{8}{3}\pi cm^3$
$M = 3B$

Из формула за површину омотача и базе и услова задатка изрази се изводница преко полупречника:

$$M = sr\pi,\ \ B = r^2\pi$$
$$sr\pi = 3 \cdot r^2\pi / \quad :\pi$$
$$sr = 3r^2 /:\pi$$
$$s = 3r.$$

Применом Питагорине теореме изрази се висина преко полупречника:

$$H^2 = s^2 - r^2$$
$$H^2 = (3r)^2 - r^2$$
$$H^2 = 9r^2 - r^2$$
$$H^2 = 8r^2$$
$$H = 2\sqrt{2}r.$$

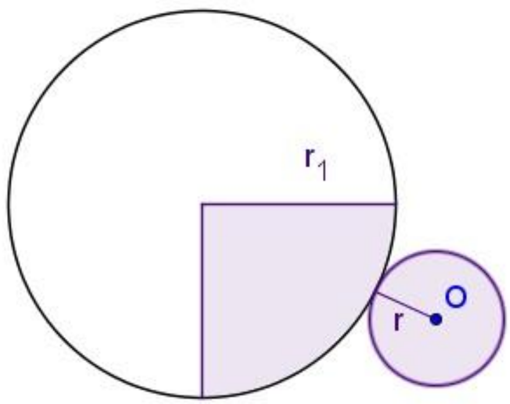
Заменом добијеног односа у запремину купе се добија полупречник:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H$$
$$\frac{8}{3}\pi = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot 2\sqrt{2}r \Big/ \cdot \frac{3}{\pi}$$
$$r^3 = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$
$$r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ \text{ јер је } 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$H = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4cm.$$

Задатак 4.3. Када се омотач купе развије у равни, добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{3}cm$. Израчунати висину купе ако је површина омотача три пута већа од површине њене основе.

Решење:

$r_1 = 4\sqrt{3}cm,$
$M = 3 \cdot B.$



$$M = \frac{1}{4}P_{kruga} = \frac{1}{4}{r_1}^2\pi$$
$$M = \frac{1}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\pi = 12\pi cm.$$

Из услова задатка:

$$M = 3 \cdot B$$
$$12\pi = 3r^2\pi \quad /:\pi$$
$$12 = 3r^2$$
$$r = 2cm.$$

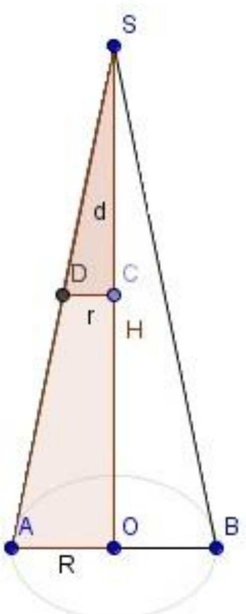
Слика 32. Омотач купе

Изводница је уствари полупречник круга од ког је настао омотач.

$$s = r_1 = 4\sqrt{3}cm.$$

$$H^2 = s^2 - r^2$$
$$H^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2^2$$
$$H^2 = 48 - 4 = 44$$
$$H = \sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}cm.$$

Задатак 4.4. Купа је пресечена са равни, паралелно основи, на одстојању d од врха. Наћи површину пресека ако је полупречник основе R, а висина H.



Слика 33. Осни пресек купе

Решење:

Одмах се види да је пресек круг, тако да треба наћи полупречник тог круга (r). Са слике 33. се види:

$$\Delta AOS \approx \Delta DCS$$

$$H : d = R : r$$

$$H \cdot r = d \cdot R$$

$$r = \frac{d \cdot R}{H}$$

$$P_{preseka} = r^2 \pi$$

$$P_{preseka} = \left(\frac{d \cdot R}{H}\right)^2 \pi$$

$$P_{preseka} = \frac{d^2 \cdot R^2}{H^2} \pi.$$

Задатак 4.5. Права кружна купа је описана око правилне четворостране пирамиде. Висина пирамиде је $7cm$, а запремина $70cm^3$. Израчунати изводницу купе.

Решење:

$Hp = 7cm,$

$Vp = 70cm^3.$

$$Vp = \frac{1}{3} BH$$

$$Vp = \frac{1}{3} a^2 H$$

$$a = \sqrt{30} cm.$$

Применом Питагорине теореме на основу четворостране пирамиде (квадрат чија је страница a, а дијагонала R-пречник основе купе)

$$R = a\sqrt{2}$$
$$R = \sqrt{30} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{15} cm$$
$$r = \sqrt{15} cm$$
$$Hk = Hp = 7cm.$$

Из Питагорине теореме примењене на купу:

$$s^2 = r^2 + H^2$$
$$s = 8cm.$$

Задатак 4.6. Основа пирамиде је ромб са дијагоналама дужине $10cm$ и $24cm$, а висина пирамиде је дужине $15cm$. У ову пирамиду уписана је купа. Одредити разлику запремина пирамиде и купе.

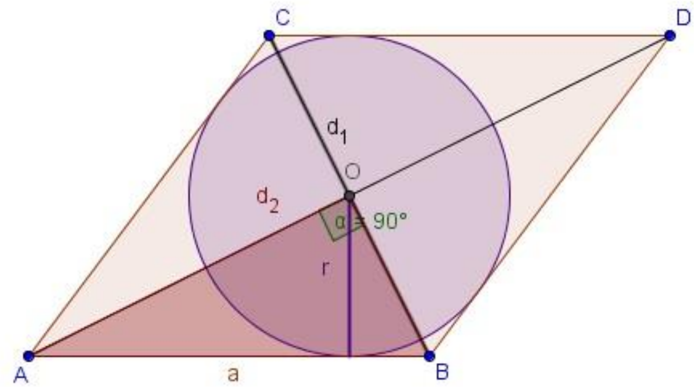
Решење:

$d_1 = 10cm,$

$d_2 = 24cm,$

$Hp = 15cm.$

Треба одредити разлику запремина $Vp - Vk$.



Слика 34. Попречни пресек пирамиде чија је основа ромб

Применом Питагорине теореме на правоугли ΔABO се добија:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$a = 13cm.$$

$P_{romba} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 120cm^2.$

$P_{romba} = a \cdot h \Longrightarrow h = \frac{120}{13}cm.$

Са слике 29. види се да је:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{60}{13}cm.$$

$$Hp = Hk = 15cm.$$

Заменом добијених вредности добијају се запремине пирамиде и купе:

$$Vp = \frac{1}{3}BH = 600cm^3.$$
$$Vk = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H \approx 334.44cm^3.$$
$$Vp - Vk \approx 265.56cm^3.$$

Задатак 4.7. Највећи угао између изводница купе је $120°$. Показати да је површина омотача купе једнака површини омотача ваљка који има исту основу и висину као и купа.

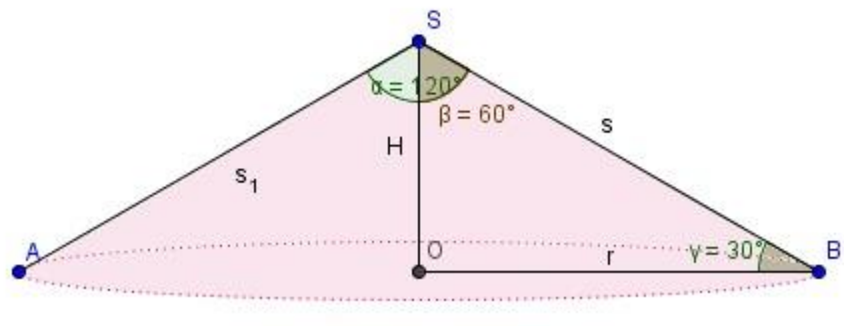
Решење:

$\alpha = 120°$

$Hk = Hv = H$

$Bk = Bv \implies r_k = r_v = r$

Треба доказати: $Mk = Mv$



Слика 35. Осни пресек купе

ΔOBS је карактеристични троугао (јер су му углови $90°, 30°, 60°$), па важи:

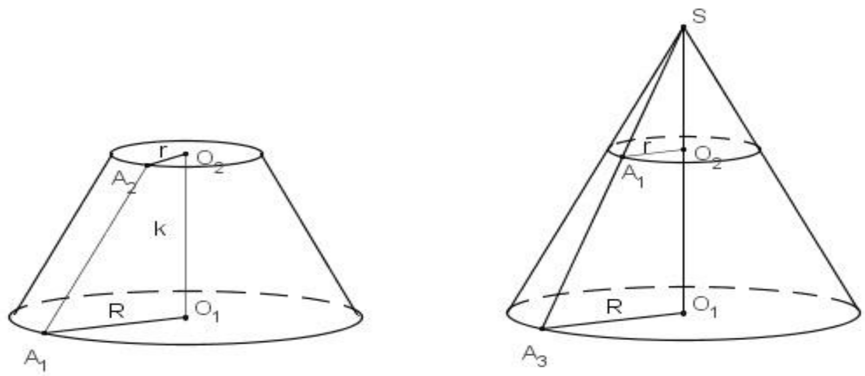
$$s = 2H$$

$$Mv = 2r\pi \cdot H$$

$$Mk = r\pi s = r\pi \cdot 2H = 2r\pi H = Mv.$$

5. ЗАРУБЉЕНА КУПА

Када се права кружна купа пресече једном равни паралелном равни основе, та раван сече конусну површ по кругу $k_1(O_2, r)$ и дели купу на два дела. Један део је такође купа, а други се назива **зарубљена кружна купа** (слика 36.).



Слика 36. Зарубљена купа и купа

Основа полазне купе $k(O_1, R)$ и круг добијен у пресеку су основе зарубљене купе, дуж $H = O_1O_2$ је *висина*, а део s изводнице полазне купе између равни основа је *изводница* зарубљене купе. Очигледно је да важи $\boldsymbol{s = \sqrt{H^2 + (R - r)^2}}$.

Зарубљена купа може бити и *коса*, ако је таква полазна купа.

5.1 ПОВРШИНА ОМОТАЧА ЗАРУБЉЕНЕ КУПЕ

Ако је R и r полупречници основа, а s изводница зарубљене купе, површина омотача зарубљене купе је $\boldsymbol{M = \pi(R + r)s}$.

<u>Доказ</u>: Нека је S врх полазне купе (слика 36.). Користећи познату формулу за површину омотача купе се добија:

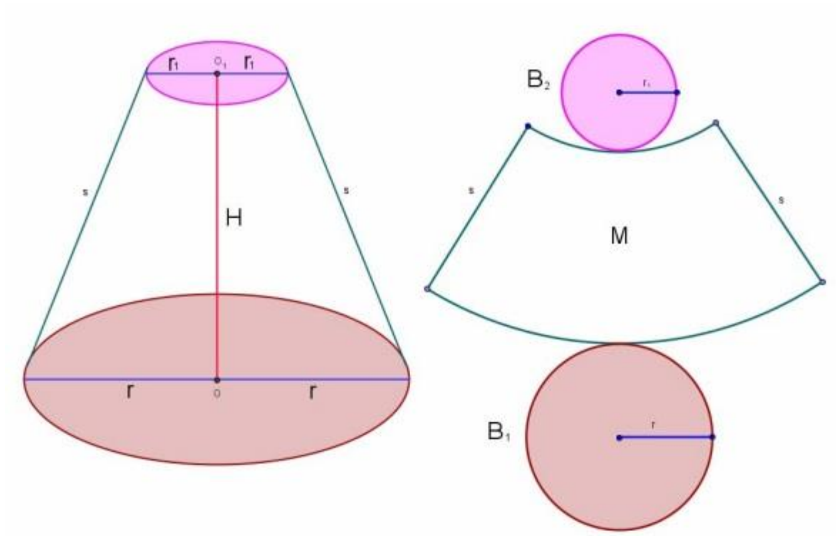
$$\begin{aligned} M &= \pi R \cdot SA_1 - \pi r \cdot SA_2 \\ &= \pi R \cdot SA_1 - \pi r \cdot \frac{r \cdot SA_1}{R} \\ &= \frac{\pi R^2 \cdot SA_1 - \pi r^2 \cdot SA_1}{R} \\ &= \frac{\pi \cdot SA_1}{R}(R^2 - r^2) \\ &= \frac{\pi \cdot SA_1}{R}(R - r)(R + r) \\ &= \pi s(R + r). \end{aligned}$$

При овоме се користи да је $\frac{r}{R}=\frac{SA_2}{SA_1}$ и $\frac{R-r}{R}=\frac{s}{SA_1}$.

5.2 ПОВРШИНА ЗАРУБЉЕНЕ КУПЕ

Ако су R и r полупречници основа, а s изводница зарубљене купе, површина те зарубљене купе је $\boldsymbol{P=\pi(R^2+r^2+s(R+r))}$.

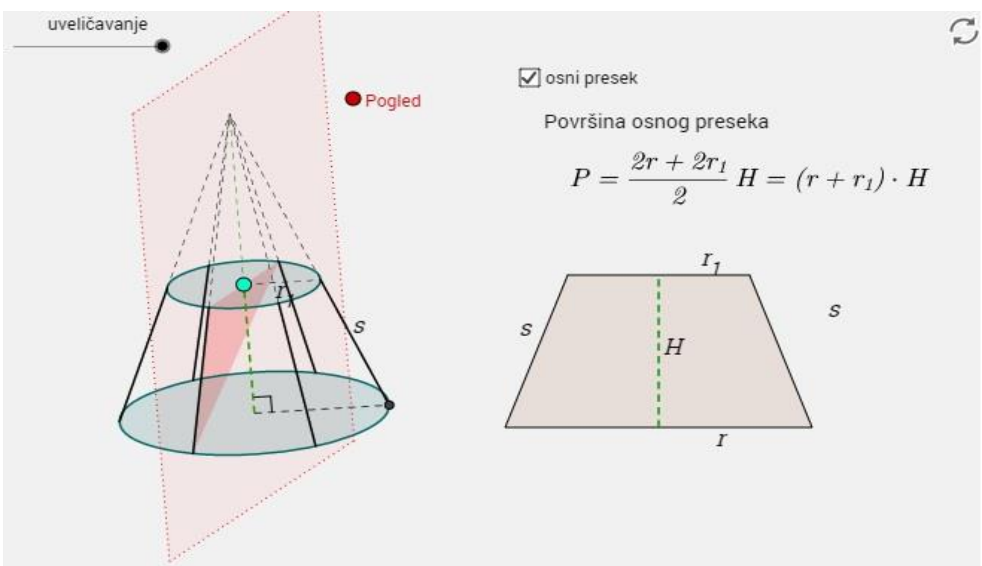
<u>Доказ</u>:



Слика 37. Омотач зарубљене купе

Са слике 37. се види:

$$P=B_1+B_2+M=R^2\pi+r^2\pi+\pi(R+r)s=\pi\big(R^2+r^2+s(R+r)\big).$$

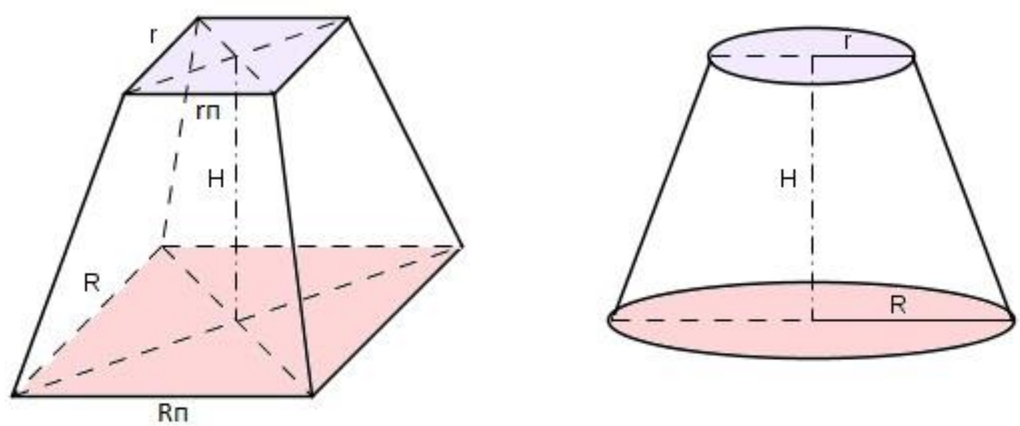


Слика 38. Осни пресек зарубљене купе

5.3 Запремина зарубљене купе

Ако су R и r полупречници основа, а H висина зарубљене купе, тада је њена запремина: $\boldsymbol{V=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2)}$.

<u>Доказ</u>: Треба искористити Кавалијеријев принцип. Поред зарубљене купе посматрати зарубљену пирамиду чије су основе правоугаоници. Доња основа те пирамиде има странице R и $R\pi$, а горња r и $r\pi$, основе зарубљене купе и зарубљене пирамиде припадају истим равнима, а висина им је H (слика 39.).



Слика 39. Зарубљена пирамида и зарубљена купа

Површине пресека ова два тела равнима паралелним основама су једнаке, то следи из закључка одговарајуће теореме за запремину купе. Дакле, и запремине ових тела су једнаке, па је запремина зарубљене купе:

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{3}\left(R\cdot R\pi+\sqrt{R\cdot R\pi\cdot r\cdot r\pi}+r\cdot r\pi\right)\\ &=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2). \end{aligned}$$

Напомена: Јасно је да ова формула важи и за случај косе зарубљене купе.

5.4 ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

У овом делу приказани су задаци помоћу којих ученици повезују област купе са зарубљеном купом, који се сврставају у средњи и напредни ниво знања. Још сличних задатака може се наћи у збиркама [1,3,6].

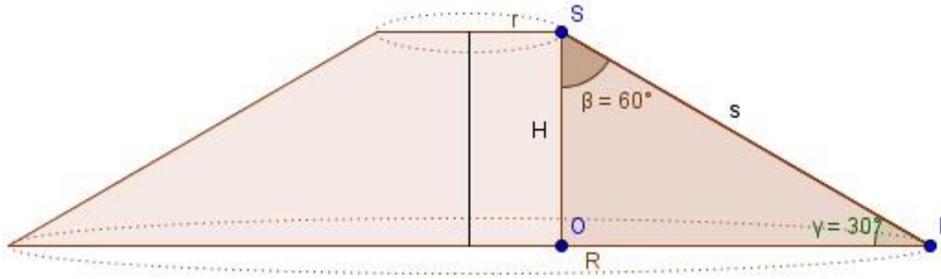
Задатак 5.1. Израчунати површину омотача праве зарубљене купе ако њена изводница гради угао од 30° са равни основе, а осни пресек има површину Q.

Решење:

$Pp = Q$

$\alpha = 30°$

$M = ?$



Слика 40. Осни пресек зарубљене купе

Осни пресек је једнакокраки трапез.

$$Pp = P_{trapeza} = \frac{2R + 2r}{2} \cdot H$$

$$(R + r) \cdot H = Q$$

ΔOBS је карактеристични троугао (јер су му углови $90°, 30°, 60°$), па важи:

$$s = 2 \cdot H$$

$M = \pi(R + r) \cdot s$

$M = \pi \cdot (R + r) \cdot 2H$

$M = 2\pi \cdot \underbrace{(R + r) \cdot H}_{Q}$

$M = 2\pi Q$

Задатак 5.2. Правоугли трапез основица $a = 10cm$ и $b = 2cm$ ротира око мањег крака. Израчунати површину и запремину насталог тела ако је висина трапеза $h = 15cm$.

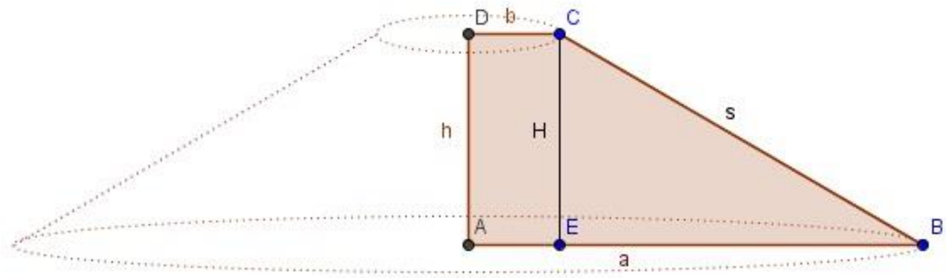
Решење:

$a = 10cm$

$b = 2cm$

$h = 15cm$

$P, V = ?$



$R = a = 10cm$

$r = b = 2cm$

Слика 41. Правоугли трапез који ротира око краћег крака

$H = h = 15cm$

Са слике 41. се види да је:

$$EB = a - b = 8cm$$

Применом Питагорине теореме на ΔECB добија се:

$$s^2 = EB^2 + H^2$$

$$s = 17cm$$

$P = \pi \cdot (R^2 + r^2 + s \cdot (R + r))$

$P = \pi \cdot \left(10^2 + 2^2 + 17 \cdot (10 + 2)\right) = 308\pi cm^2$

$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2)$

$V = \frac{15\pi}{3}(10^2 + 10 \cdot 2 + 2^2) = 620\pi cm^3$

Задатак 5.3. Колика је запремина зарубљене косе купе чији су пречници основа $2R = 36$ и $2r = 15$, најдужа изводница $S = 20$ и најкраћа изводница $s = 13$?

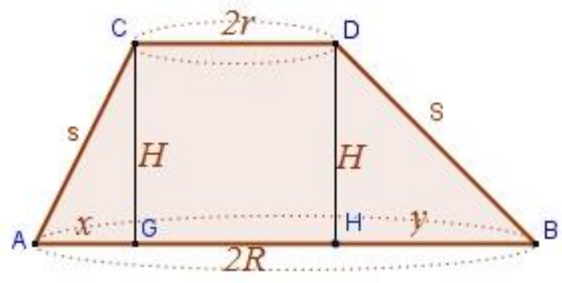
Решење:

$2R = 36 \Rightarrow R = 18$

$2r = 15 \Rightarrow r = 7.5$

$S = 20$

$s = 13$



Слика 42. Осни пресек зарубљене купе

Посматрати осни пресек као на слици и приметити:

$$x + y = 2R - 2r = 21$$

Применом Питагорине теореме на $\Delta AGC, \Delta HBD$, редом се добија:

$$H^2 = s^2 - x^2$$

$$H^2 = S^2 - y^2$$

Једнаке су леве стране па се изједначе десне: $s^2 - x^2 = S^2 - y^2$

$$13^2 - x^2 = 20^2 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 20^2 - 13^2$$

Разлика квадрата:

$$(y - x) \cdot (y + x) = (20 - 13) \cdot (20 + 13)$$

$$(y - x) \cdot 21 = 231$$

$$y - x = 11$$

Формирамо систем од две једначине са две непознате

$$y - x = 11$$

$$x + y = 21$$

$$x = 5, y = 16$$

Из примене Питагорине теореме: $H^2 = s^2 - x^2$ добија се $H = 12$.

$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$

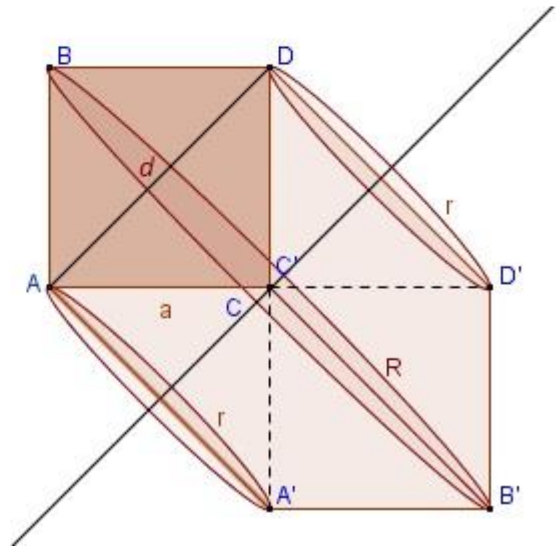
$V = 2061\pi$

Задатак 5.4. Квадрат странице $a = 18cm$ обрће се око праве која се налази у равни квадрата, пролази кроз једно његово теме и паралелна је са дијагоналом која не пролази кроз то теме. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

Решење:

$a = 18cm$

$Pt, Vt = ?$



Слика 43. Квадрат ротира око праве паралелне са дијагоналом

Види се са слике 43.:

- тело је састављено од две зарубљене купе,
- $R = d = a\sqrt{2} = 18\sqrt{2}cm$,
- $r = \frac{d}{2} = 9\sqrt{2}cm$,
- $H = \frac{d}{2} = 9\sqrt{2}cm$,
- $s = a = 18cm$.

Запремина тела је запремина ових зарубљених купа:

$$Vt = 2V_{zk} = 2 \cdot \frac{\pi H}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2)$$

$$Vt = 2\frac{\pi 9\sqrt{2}}{3}\left(\left(18\sqrt{2}\right)^2 + 18\sqrt{2} \cdot 9\sqrt{2} + \left(9\sqrt{2}\right)^2\right) = 6804\sqrt{2}\pi cm^3.$$

Тело се састоји од две идентичне зарубљене купе које се додирују већим базама, самим тим површина тела је површине тих зарубљених купа када им се одузму веће базе:

$$Pt = 2P_{zk} - 2B_1 = 2 \cdot \left(\pi \cdot (R^2 + r^2 + s \cdot (R + r)\right) - R^2\pi)$$

$$Pt = 2\pi \cdot (R^2 + r^2 + s \cdot (R + r) - R^2) = 2\pi \cdot (r^2 + s \cdot (R + r))$$

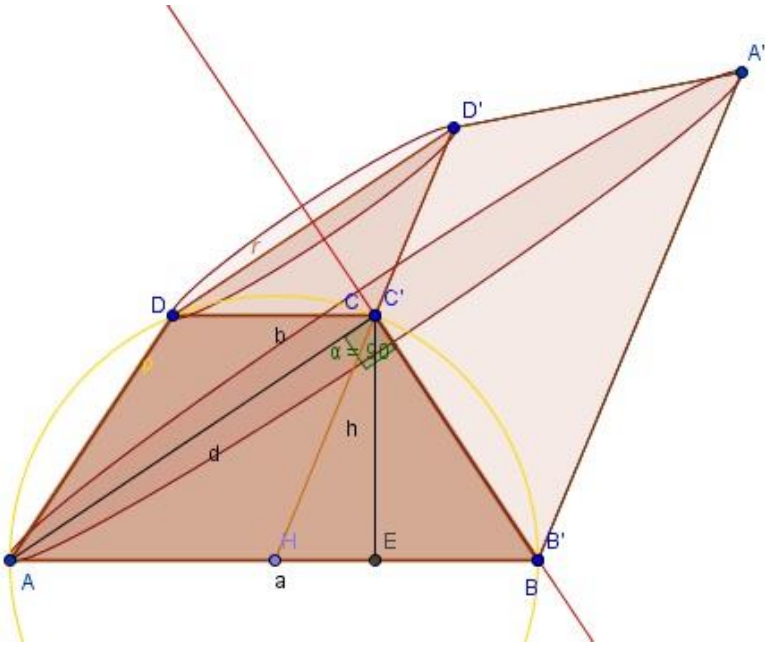
$$Pt = 2\pi \cdot \left(162 + 486\sqrt{2}\right)cm^2.$$

Задатак 5.5. Дијагонале трапеза су нормалне на његове краке. Израчунати површину и запремину тела које настаје ротацијом трапеза око једног крака ако су основице трапеза $3cm$ и $5cm$.

Решење:

$b = 3cm,$

$a = 5cm.$



Слика 44. Трапез ротира око крака

Трапез је једнакокраки јер је тетивни (круг над пречником AB садржи C и D).

$HC = \frac{AB}{2} = 2.5cm.$

$EB = \frac{a-b}{2} = 1cm.$

$HE = 2.5 - 1 = 1.5cm.$

Применом Питагорине теореме на ΔHEC: $h^2 = HC^2 - HE^2$

$$h = 2cm.$$

Полупречник велике купе: $R = d$

Применом Питаорине теореме на ΔAEC:

$R^2 = h^2 + AE^2$

$R = 2\sqrt{5}cm.$

Изводница велике купе: $s_1 = a = 5cm.$

Висина велике купе: $h_1 = CB$

$CB^2 = a^2 - d^2$

$CB = \sqrt{5}cm.$

$M_{vk} = Rs_1\pi = 10\sqrt{5}\pi cm^2.$

$V_{vk} = \frac{1}{3}R^2\pi\, h_1 = \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi cm^3.$

Полупречник мале купе: r

Изводница мале купе: $s_2 = b = 3cm.$

Висина мале купе: h_2

$r^2 = b^2 - {h_2}^2$

$r^2 = d^2 - (h_1 + h_2)^2$

$r^2 = 9 - {h_2}^2$

$r^2 = 20 - \left(\sqrt{5} + h_2\right)^2$

Када се реши систем две једначине са две непознате добија се:

$h_2 = \frac{12}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} cm = 2.4\sqrt{5}cm.$

$r = \frac{9}{5} = 1.8cm.$

$M_{mk} = rs_2\pi = 5.4\pi cm^2.$

$V_{mk} = \frac{1}{3}r^2\pi\, h_2 = \frac{7.776\sqrt{5}}{3}\pi cm^3.$

Зарубљена купа:

$s_{zk} = AD = BC = \sqrt{5}cm.$

$M_{zk} = \pi(R + r)s_{zk} = 22\pi cm^2.$

$V_{zk} = \frac{\pi h_2}{3}(R^2 + Rr + r^2) == \frac{\pi}{3}\left(55.776\sqrt{5} + 43.2\right)cm^3.$

Површина добијеног тела се састоји од површина омотача велике, мале и зарубљене купе.

$$Pt = M_{vk} + M_{zk} + M_{mk} = \left(10\sqrt{5} + 27.4\right)\pi cm^2.$$

Запремина добијеног тела се састоји од запремина велике и зарубљене купе и извађене запремине мале купе.

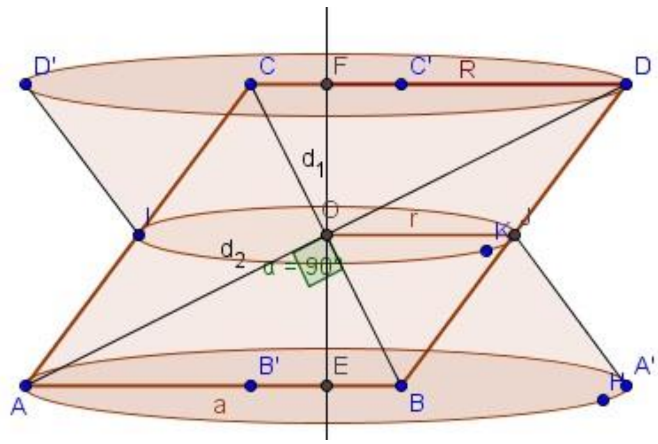
$$Vt = V_{vk} + V_{zk} - V_{mk} \approx \left(\frac{68\sqrt{5}}{3} + 14.4\right)\pi cm^3.$$

Задатак 5.6. Ромб чије су дијагонале $7cm$ и $24cm$ ротира око висине која пролази кроз центар ромба. Израчунати површину и запремину тако насталог обртног тела.

Решење:

$d_1 = 7cm,$

$d_2 = 24cm.$



Слика 45. Ромб ротира око висине

Овако добијено тело се састоји од две једнаке зарубљене купе спојене на мањој основи.

Применом Питагорине теореме на ΔABO:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$a = 12.5cm.$$

$Pr = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 84cm^2.$

$Pr = a \cdot h \implies h = 6.72cm.$

Са слике 39. се види:

$r = \frac{a}{2} = 6.25cm,$

$H = \frac{h}{2} = 3.36cm,$

$s = \frac{a}{2} = 6.25cm.$

Применом Питагорине теореме на ΔFDO:

$$R^2 = \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - H^2$$

$$R = 11.52cm.$$

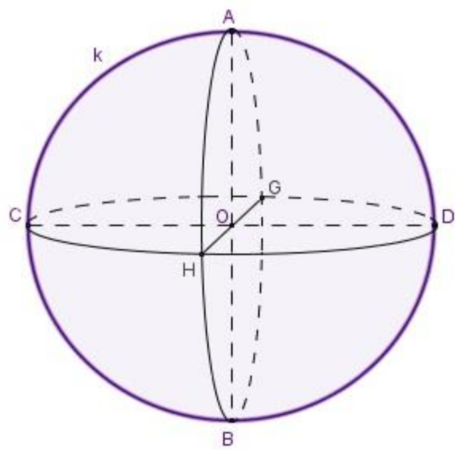
$$Pt = 2 \cdot (B_1 + M) = 2 \cdot (R^2\pi + \pi(R + r)s) = 487.55\pi cm^2.$$

$$Vt = 2 \cdot V_{zk} = 2 \cdot \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) \approx 546\pi cm^3.$$

6. ЛОПТА

Лопта је геометријско тело ограничено сфером. Може се дефинисати као скуп тачака простора које се од задате тачке O налазе на удаљености мањој или једнакој од задате дужине r.

Нека је дата права s и тачка H која јој не припада. Нека је α раван која садржи тачку H и нормална је на s. У равни α посматрати кружну линију k са центром $O = s \cap \alpha$ и полупречником OH. Каже се да је *кружна линија* k добијена ротацијом тачке H око осе s за пун угао.



Слика 46. Лопта

Обртањем кружне линије k око осе која садржи њен пречник добија се обртна површ која се назива **сфера**.

Како су све тачке кружне линије једнако удаљене од њеног средишта, то су и све тачке сфере једнако удаљене од те тачке. Стога се сфера може дефинисати и као скуп свих тачака у простору које се налазе на једнаком растојању од једне утврђене тачке. Та утврђена тачка је *центар* сфере.

Дефиниција 6.1. Сфера је површ која се састоји од свих тачака у простору једнако удаљених од дате тачке O. Тачка O се назива центар сфере, а одстојање било које тачке сфере од O је полупречник сфере. Тело ограничено сфером назива се лопта.

Дуж која спаја две тачке сфере је њена *тетива*. Тетива која пролази кроз центар сфере назива се *пречник* сфере и њена дужина једнака је двострукој дужини полупречника.

Сфера дели простор на два дела - на своју унутрашњу област,коју сачињавају све оне тачке чија су растојања мања од полупречника сфере, и на своју спољашњост,коју сачињавају све оне тачке чија су растојања од центра већа од полупречника сфера.

Сфера, заједно са својом унутрашњом области, сачињава **лопту**. Центар, полупречник, пречник и тетива лопте су центар, полупречник, пречник и тетива одговарајуће сфере (којом је лопта ограничена).

Велики круг лопте (сфере) је круг који се добија пресеком лопте са равни која пролази кроз њен центар. Полупречник великог круга лопте је једнак полупречнику лопте. Кроз сваке две тачке лопте које нису крајеви њеног пречника пролази само један велики круг лопте. Било која два велика круга лопте секу се у двема дијаметрално супротним тачкама лопте.

6.1 Површина сфере

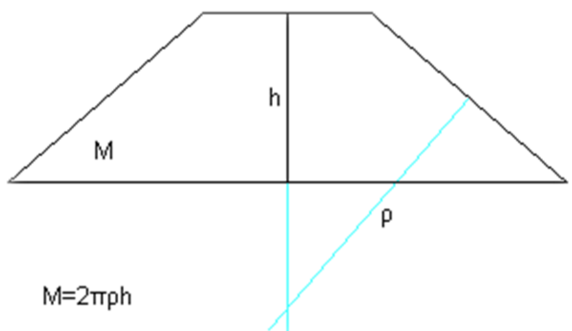
Површина сфере једнака је четворострукој површини њеног великог круга, односно:

$$\boldsymbol{P = 4R^2\pi.}$$

<u>**Доказ**</u>**:** Овај доказ је дат у првом поглављу овог рада.

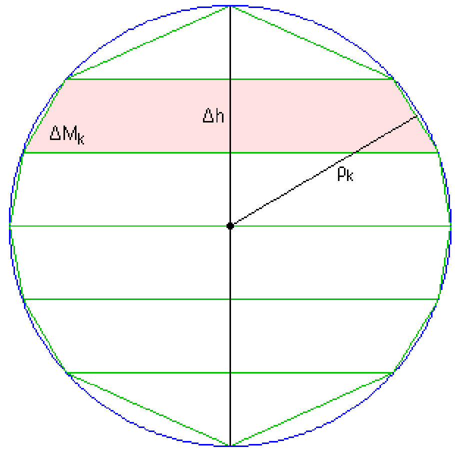
<u>**Извођење формуле**</u>:

Прво је потребно доказати лему: Нека је h висина праве зарубљене купе, а ρ дужина дужи нормалне на изводницу од средишта изводнице до пресека са осом купе. Површина омотача те зарубљене купе је $M = 2\pi\rho h$.



Слика 47. Осни пресек зарубљене купе

Сада лопту исецкати по хоризонтали на мноштво парчића, при чему ако су ти парчићи врло танки, може се сваки од њих апроксимирати зарубљеном купом (заправо, крајња горња и крајња доња купа неће бити зарубљене већ пуне, али видеће се касније зашто се тај детаљ може занемарити). Нека је лопта исецкана на n зарубљених купа, тако да висине свих зарубљених купа буду једнаке и износе Δh:



Слика 48. Лопта издељена на n зарубљених купа

Површина омотача k-те зарубљене купе биће $\Delta M_k = 2\pi\rho_k\Delta h$. Површина сфере ће бити приближно једнака збиру површина омотача свих ових зарубљених купа.

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi\rho_k\Delta h.$$

Што су те купе тање, тј. што је n веће, биће и апроксимација тачнија. У граничном случају, када су купе бесконачно танке а има их бесконачно много, сума површина њихових омотача ће бити једнака површини сфере. Тада сума, заправо, прелази у интеграл, Δh прелази у dh, а ρ_k прелази у R, где R означава полупречник сфере:

$$P = \int_{-R}^{R} 2\pi R dh$$

Као границе интеграљења узете су $-R$ и R, јер се посматра растојање сваке од зарубљених купа у односу на центар сфере. Могло се посматрати и растојање сваке од зарубљених купа у односу на доњу тачку сфере, тада би границе ишле од 0 до $2R$. Такође могло се ставити и границе од 0 да R, рачунајући растојање купа од центра сфере, при чему би добили површину једне полусфере, након чега би резултат помножен био са 2. Реултат би у сва три случаја био исти.

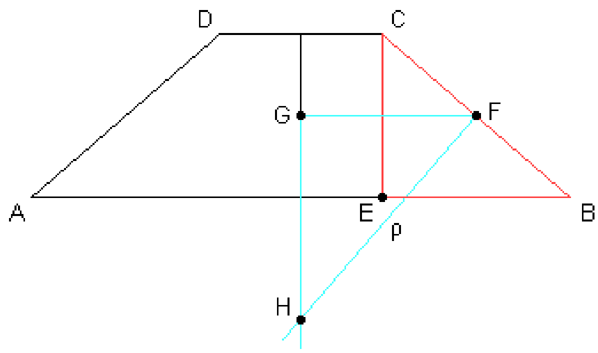
Пошто су у овом случају ове купе бесконачно мале висине. А самим тим и бесконачно мале површине омотача, то исто важи и за крајњу доњу и крајњу доњу пуну купу, тако да оне немају утицаја на добијени резултат. Због тога су их могле бити занемарене.

Остало је још да се израчуна интеграл:

$$P = \int_{-R}^{R} 2\pi R dh = 2\pi R \int_{-R}^{R} dh = 2\pi Rh\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R \cdot R - 2\pi R(-R) = 2\pi R^2 + 2\pi R^2 = 4\pi R^2.$$

<u>Доказ леме</u>:

Посматрати попречни пресек зарубљене купе, који представља, заправо, једнакокраки трапез. Обележити његова темена са $A, B, C,$ и D. Из темена C спустити висину на доњу страницу и подножје те висине обележити са E. Средину изводнице купе, тј. средину крака овог једнакокраког трапеза, обележити са F и из ње повући нормалу на уздужну осу купе. Пресек те нормале са уздужном осом купе обележити са G. Из тачке F повући праву нормалну изводницу и њен пресек са уздужном осом купе обележити са H.



Слика 49. Попречни пресек зарубљене купе

Тада ће бити $\measuredangle EBC = \measuredangle GHF$ и $\measuredangle BCE = \measuredangle HFG$, јер су то парови углова са нормалним крацима. Такође, биће и $\measuredangle BEC = \measuredangle HGF = 90^{\circ}$.

Из тога следи да су троуглови ΔBEC и ΔHGF слични, што значи да су им странице међусобно прпорционалне:

$$\Delta BEC \sim \Delta HGF$$

$$EC : GF = BC : HF$$

Како је $EC = h,\ GF = \frac{R+r}{2},\ BC = S,\ HF = \rho$, следи:

$$h : \frac{R+r}{2} = S : \rho$$

$$(R+r)\cdot S = 2\rho h$$

Помножити обе стране са π:

$$\pi(R+r)S = 2\pi\rho h$$

$$M = 2\pi\rho h.$$

6.2 Запремина лопте

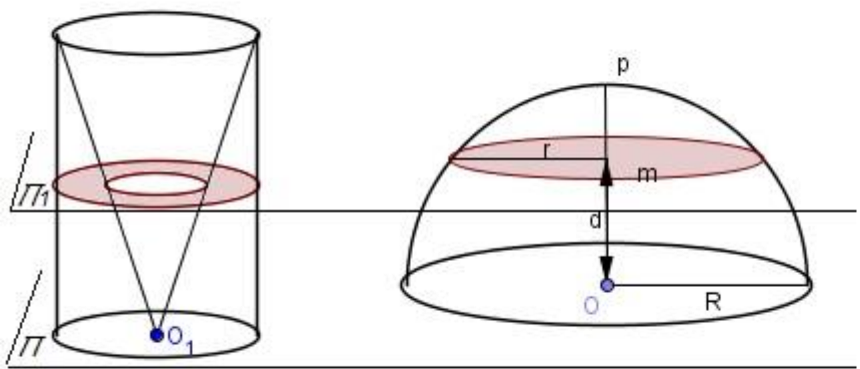
Запремина лопте је једнака трећини производа површине и полупречника, односно:

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

<u>Доказ</u>:

Нека раван π садржи центар O лопте. Уочити прав кружни ваљак полупречника основе R и висине R, чија је једна основа (са центром O_1) у равни π (слика 50.). Нека је, затим, постављена права кружна купа са врхом у O_1 и основом која се поклапа са другом основом поменутог ваљка. Ако се тело добијено од ваљка из кога је издвојена купа и полулопта пресеку једном равни паралелно са π на висини d, одговарајући пресеци имаће површине:

$P_1 = \rho^2\pi = (R^2 - d^2)\pi$ и $P_2 = R^2\pi - d^2\pi = (R^2 - d^2)\pi$.



Слика 50. Ваљак и полулопта

На основу Кавалијеријевог принципа и запремине ових тела су једнаке, па је запремина полулопте дата са :

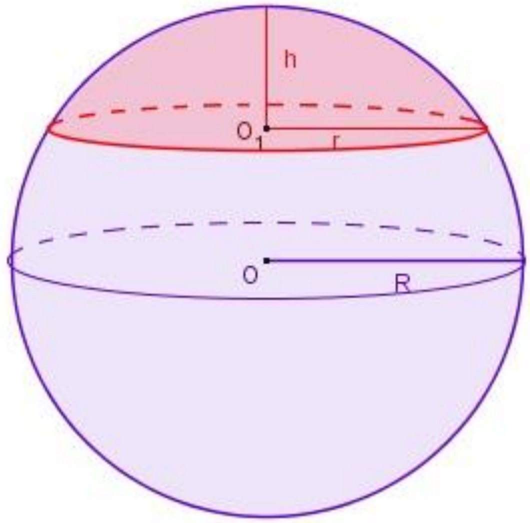
$$V_1 = R^2\pi \cdot R - \frac{1}{3}R^2\pi \cdot R = \frac{2}{3}R^3\pi$$

а запремина лопте је :

$$V = 2V_1 = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

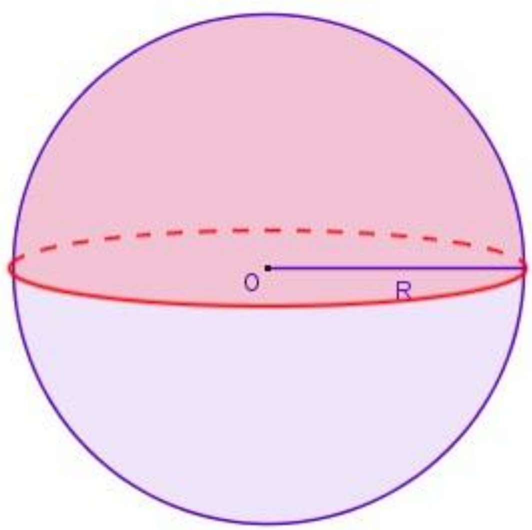
6.3 Делови лопте

Пресек сфере и неке равни α је кружна линија k, скуп тачака дела сфере, који се налази са једне стране равни α, заједно са тачкама линије k, назива ***сферна калота*** (слика 51.). Висина калоте је дуж која спаја центар линије k са најудаљенијом тачком калоте од равни α.



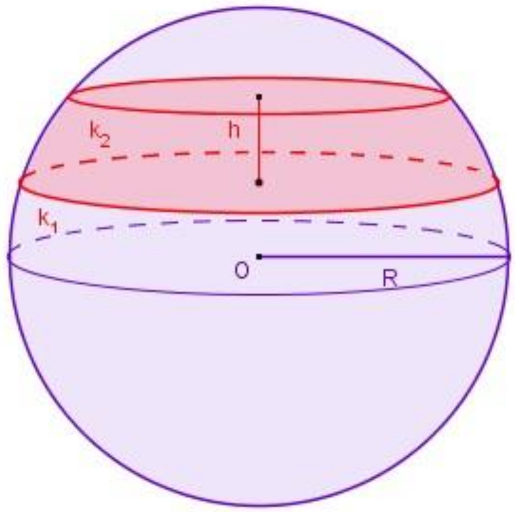
Слика 51. Сферна калота (поклопац)

Ако се сфера пресече са равни која садржи њен центар, добијају се две ***полусфере*** (слика 42.), а пресек је ***велика кружна линија*** чији је полупречник једнак полупречнику сфере. Слично важи и за лопту (с тим што је сада пресек велики круг ограничен великом кружном линијом).



Слика 52. Полусфера

Ако две паралелне равни α_1 и α_2 , секу сферу по кружним линијама k_1 и k_2, скуп свих тачака дела сфере између α_1 и α_2, заједно са тачкама линија k_1 и k_2, назива ***сферни појас*** **(**слика 53.**)**. Висина појаса је дуж која спаја средишта линија k_1 и k_2.



Слика 53. Сферни појас

6.3.1 Површина калоте и појаса

Површина калоте висине h и полупречника сфере R је:

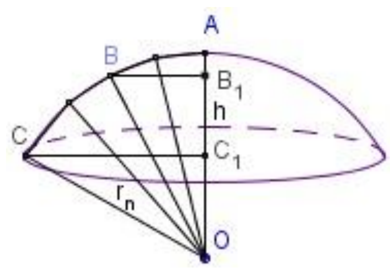
$$\boldsymbol{P = 2\pi R h.}$$

<u>Доказ</u>: Површина калоте се одређује обртањем правилне изломљене линије, уписане у круг, око пречника тог круга. Нека се нпр. обрће део изломљене линије ABC. На тај начин настају бочне површи M_1 и M_2 купе и зарубљене купе (слика 54.).

$M_1 = AB_1 \cdot 2\pi r_n$

$M_2 = B_1C_1 \cdot 2\pi r_n$

$M = M_1 + M_2 = (AB_1 + B_1C_1) \cdot 2\pi r_n = 2\pi r_n h$

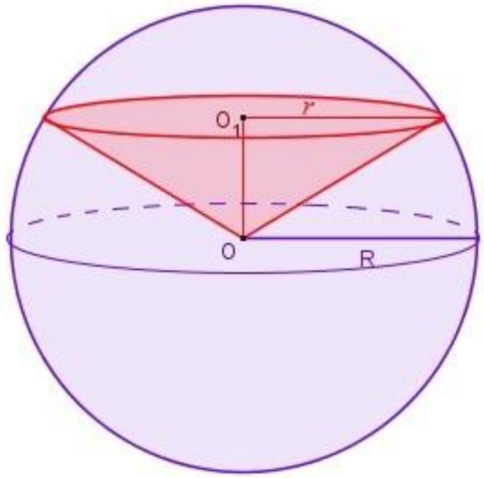


Слика 54. Изломљена линија уписана у круг

Ако број страна правилне изломљене линије, уписане у луку AC, неограничено расте, онда из последње једнакости непосредно следи:

$$P = 2r\pi h.$$

Лоптин одсечак је тело ограничено сферном калотом и њеном основом (одговарајућом кружном површи). Лоптин одсечак и кружна купа са врхом у центру лопте и основом која је основа одсечка, назива се ***лоптин исечак*** (слика 55.).



Слика 55. Лоптин исечак

6.3.2 Запремина одсечка лопте

Запремина одсечка лопте, полупречника R, чија је висина h је:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h).$$

Доказ:

Претпоставити да је дати одсечак као на слици 50. изнад равни π_1.

На истој слици овом одсечку одговара део ваљка из кога је издвојена зарубљена купа висине h, а чији су полупречници основе R и $R - h$. По Кавалијеријевом принципу запремине ових тела су једнаке.

Израчунати запремину другог тела:

$$\begin{aligned} V &= R^2\pi h - \frac{h\pi}{3}\left(R^2 + R(R-h) + (R-h)^2\right) \\ &= R^2\pi h - \frac{h\pi}{3}\left(3R^2 - 3Rh + h^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h). \end{aligned}$$

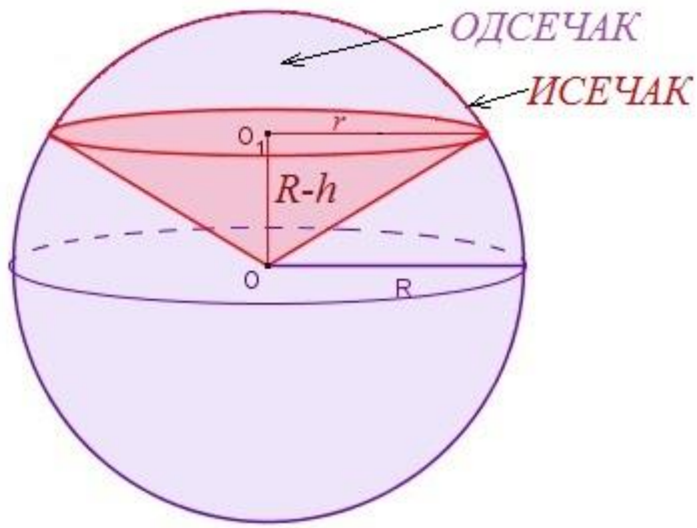
То ће истовремено бити и запремина лоптиног одсечка.

6.3.3 Запремина исечка лопте

Ако је R полупречник лопте и h висина њеног одсечка, тада је запремина одговарајућег лоптиног исечка:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

<u>Доказ</u>: Запремина исечка ће бити једнака збиру запремина одговарајућег одсечка и купе, чији је полупречник основе $\sqrt{R^2 - (R-h)^2}$, а висина $R - h$ (Слика 56.).



Слика 56. Лоптин одсечак и исечак

Дакле,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) + \frac{\pi}{3}(R-h)(R^2 - (R-h)^2)$$
$$= h\pi\left(Rh - \frac{1}{3}h^2 + \frac{2}{3}R^2 - Rh + \frac{1}{3}h^2\right) = \frac{2}{3}hR^2\pi.$$

6.4 Узајамни положај лопте и других тела

У просторној геометрији сфера и лопта преузимају, на неки начин, улоге које у у планиметрији имали кружна линија и круг. Због тога се посебно треба задржати на неким проблемима у вези са сфером уписаном у полиедар или описаном око полиедра.

<u>Лопта и полиедри</u>

За полиедар чија сва темена припадају сфери каже се да је уписан у сферу, а за сферу да је описана око полиедра. Полиедар чије све стране додирују сферу је описан око сфере, а сфера је у њега уписана.

За сферу важи следећи општи резултат: Ако се у полиедар може уписати сфера, њен центар се налази у тачки пресека симетралних равни свих троуглова диедра датог полиедра.

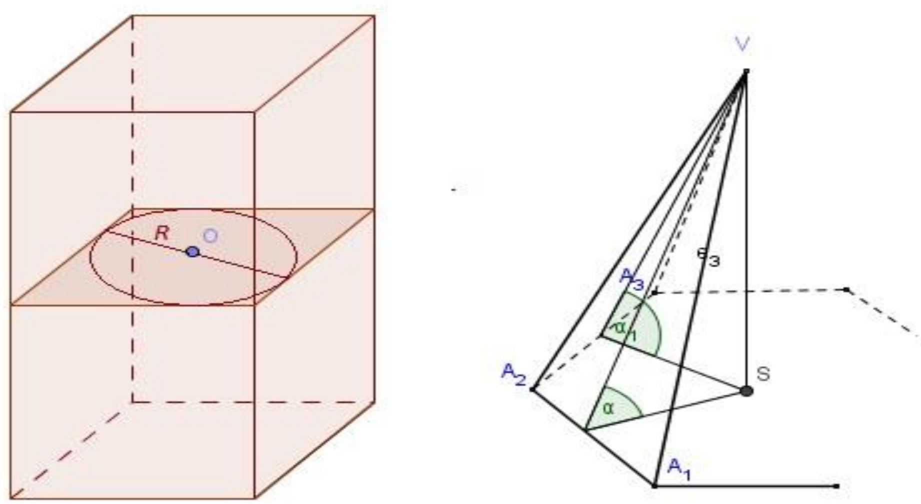
Ако је у полиедар уписана сфера тада је центар те сфере једнако удаљен од свих страна диедра, што значу да припада симетралним равнима углова диедра.

Да би се у призму могла уписати сфера потребно је и довољно да се у њен нормални пресек може уписати круг чији је пречник једнак висини призме (слика 57. десно).

Да би се у пирамиду могла уписати сфера довољно је да нагибни углови бочних страна према основи пирамиде буду једнаки (слика 57. лево). Ако се око полиедра може описати сфера, тада њен центар лежи у тачки пресека симетралних равни свих ивица полиедра.

Ако је око неког полиедра описана сфера са центром у тачки О, тада је тачка О једнако удаљена од свих темена полиедра. Она због тога припада симетралним равнима свих ивица полиедра.

За пирамиду и сферу описану око ње важи следеће тврђење: Да би се око пирамиде могла описати сфера довољно је да се око њене основе може описати круг.

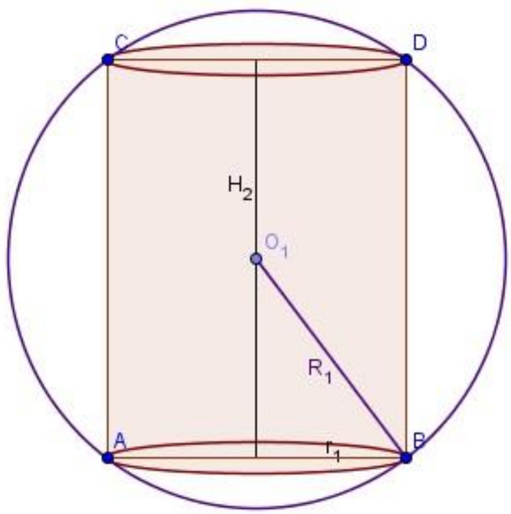


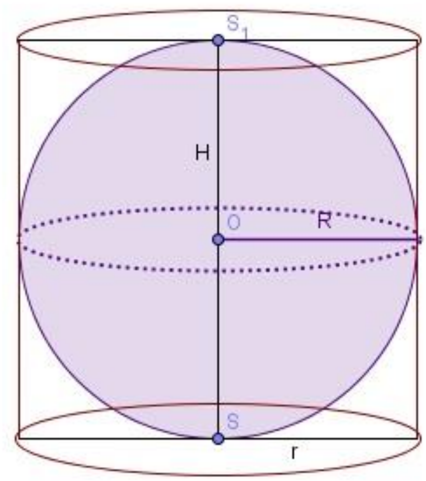
Слика 57. Лопта уписана у призму и описана око пирамиде

Лопта и обртна тела

Лопта је уписана у прав ваљак ако основе и све изводнице ваљка додирују лопту. То је могуће ако је пречник основе ваљка једнак висини ваљка (слика 58. десно). Лопта је уписана у праву купу ако основа и све изводнице купе додирују лопту. То је увек могуће.

Лопта је описана око ваљка ако су основа ваљка пресеци лопте. Око сваког правог ваљка може се описати лопта (слика 58. лево).





Слика 58. Лопта описана око ваљка и лопта уписана у ваљак

6.5 ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

У овом делу приказани су задаци помоћу којих ученици повезују сва обртна тела. Још сличних задатака може се наћи у збиркама [2,3,4].

Задатак 6.1. Површина лопте описане око праве правилне четворостране призме основне ивице $a = 4$ је $P = 36\pi$. Израчунати површину дијагоналног пресека.

Решење:

$a = 4,$

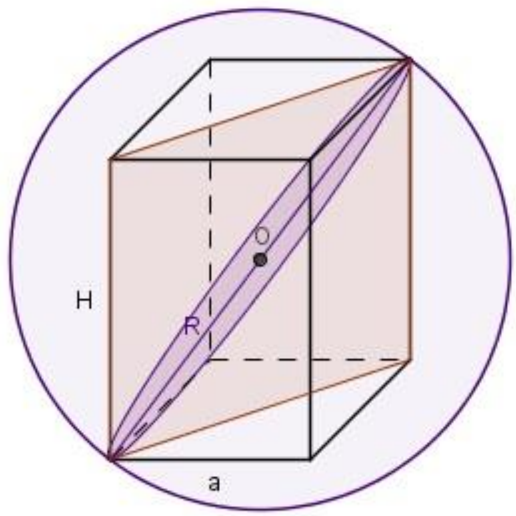
$Pl = 36\pi.$

Из површине лопте добија се полупречник:

$Pl = 4R^2\pi$

$36\pi = 4R^2\pi$

$R = 3.$



Слика 59. Лопта описана око призме

$d = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

Применом Питагорине теореме на дијагонални пресек:

$H^2 = (2R)^2 - d^2$

$H^2 = 6^2 - (4\sqrt{2})^2$

$H = 2.$

Дијагонални пресек је правоугаоник: $P_{dp} = d \cdot H$

$$P_{dp} = 4\sqrt{2} \cdot 2$$

$$P_{dp} = 8\sqrt{2}.$$

Задатак 6.2. У праву купу чија изводница има дужину $15cm$ и чији је полупречник основе $9cm$, уписана је лопта. Наћи запремину лопте.

Решење:

$s = 15cm$

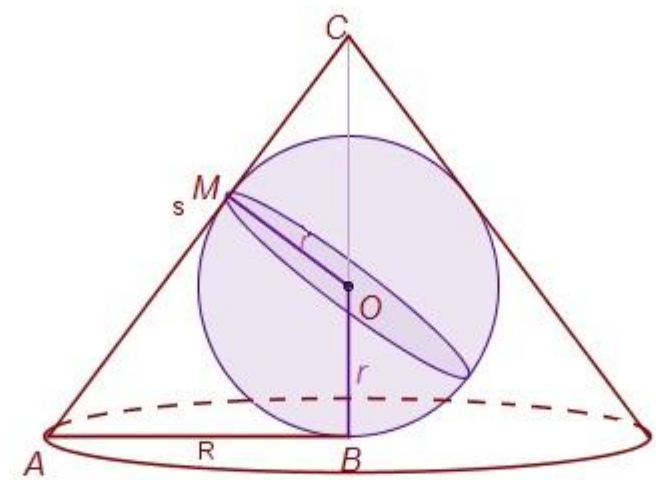
$R = 9cm$

Примена Питагорине теореме на ΔABC:

$H^2 = s^2 - R^2$

$H^2 = 15^2 - 9^2$

$H = 12cm.$



Слика 60. Лопта уписана у купу

Из сличности троуглова $\Delta ABC \sim \Delta MOC$ (оба имају прав угао и уагао код темена C је заједнички):

$$R : r = (H - R) : s$$

$$R : 9 = (12 - R) : 15$$

$$R = \frac{9}{2} = 4.5cm.$$

$$Vl = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

$$Vl = \frac{243\pi}{2} cm^3.$$

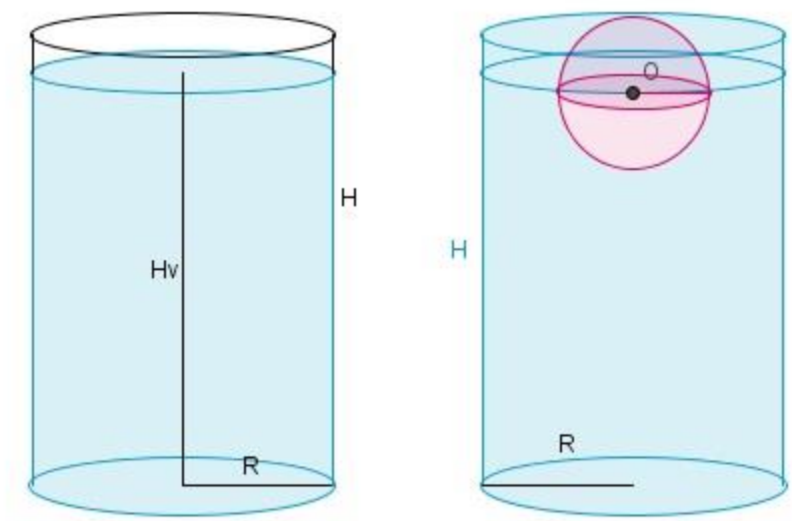
Задатак 6.3. Посуда облика ваљка, полупречника основе $r = 5cm$, испуњена је водом до $\frac{11}{12}$ њене висине. Ако се у ту посуду потопи лопта полупречника $r_l = 2.5cm$, ниво воде достиже тачно врх те посуде. Колика је њена висина H?

Решење:

$R = 5cm$

$Hv = \frac{11}{12}H$

$R_l = 2.5cm$



Слика 61. Ваљак и лопта

Познато нам је да тело потопљено у воду избаци онолико воде колика је његова запремина. Што значи да је запремина лопте 12 пута мања од запремине ваљка, тј.

$$V_v = 12 \cdot V_l$$

$$V_l = \frac{4}{3}{R_l}^3\pi$$

$$V_l = \frac{62.5}{3}\pi cm^3.$$

Израчунати запремину ваљка, па из ње израчунати висину.

$V_v = 12 \cdot \frac{62.5}{3}\pi = 250\pi cm^3.$

$V_v = R^2\pi \cdot H$

$250\pi = 5^2\pi \cdot H$

$H = 10cm.$

Задатак 6.4. Око лопте описана је права зарубљена купа. Може ли површина омотача купе бити једнака површини купе?

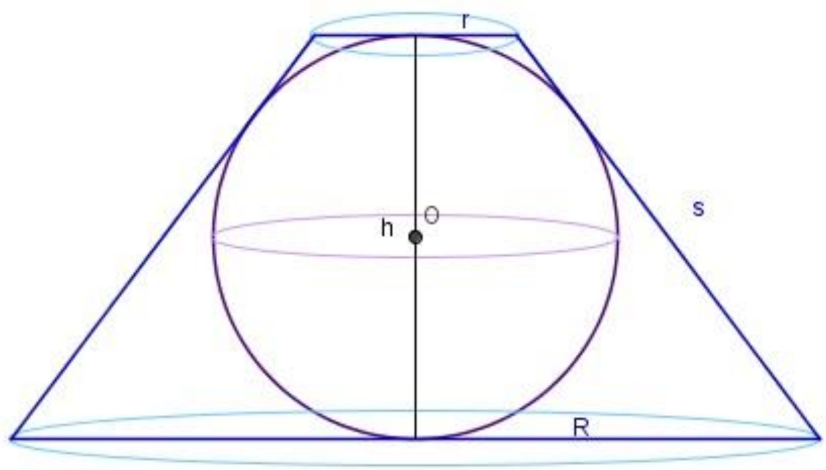
Решење:

Нека су полупречници основа зарубљене купе R, r, и нека је изводница s

$$M_{zk} = P_l \cdots ?$$

Посматрати осни пресек.

Осни пресек зарубљене купе је једнакокраки трапез.



Слика 62. Осни пресек лопте и з. купе описане око ње

Трапез је тангентни (јер је свака страница трапеза тангентна дуж круга), па важи:

Збир наспрамних страница је међусобно једнак:

$$2R + 2r = s + s$$

$$2 \cdot (R + r) = 2s$$

$$s = R + r$$

Омотач зарубљене купе: $M_{zk} = \pi \cdot (R + r) \cdot s$

$$M_{zk} = \pi \cdot (R + r) \cdot (R + r)$$

$$M_{zk} = (R + r)^2 \pi$$

Полупречник лопте је пола висине зарубљене купе (слика 59.) $R_l = \frac{h}{2}$

$$P_l = 4 \cdot R^2 \pi$$

$$P_l = 4 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot \pi$$

$$P_l = h^2 \pi$$

Види се да је $R + r > h$

$$\Longrightarrow (R + r)^2 \pi > h^2 \pi$$

$$\Longrightarrow M_{zk} > P_l.$$

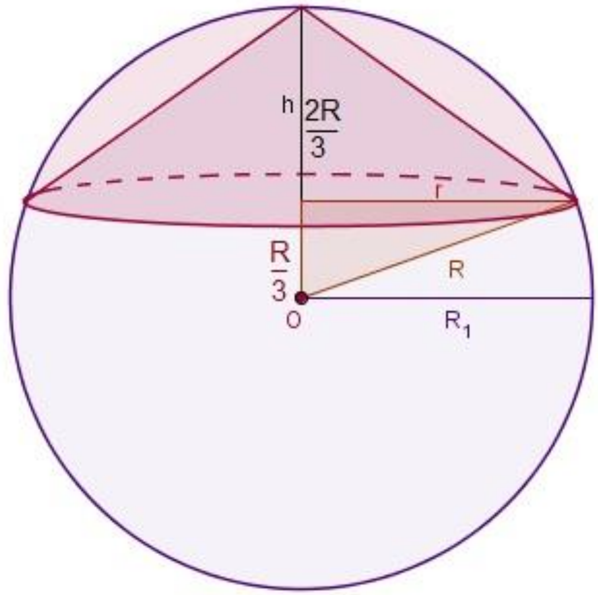
Задатак 6.5. Висина одсечка лопте је једнака трећини пречника лопте. У осечак је уписана купа. Наћи однос запремина одсечка и купе.

Решење:

$h = \frac{1}{3} \cdot 2R = \frac{2}{3}R$

Наћи однос $Vo : Vk$.

$h_o = H_k$



Представити запремину осечка преко полупречника:

$Vo = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$

$Vo = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \left(3R - \frac{2}{3}R\right)$

$Vo = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}R\right)^2 \cdot \frac{7}{3}R$

$Vo = \frac{28}{81}R^3\pi.$

Слика 63. Лоптин одсечак

Применом Питагорине теореме на правоугли троугао (видети на слици 60.):

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{1}{3}R\right)^2$$

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R.$$

Представити запремину купе преко полупречника:

$Vk = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_k$

$Vk = \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)^2 \pi \cdot \frac{2}{3}R$

$Vk = \frac{16}{81}R^3\pi.$

$$Vo : Vk = \frac{\frac{28}{\cancel{81}}\cancel{R^3\pi}}{\frac{16}{\cancel{81}}\cancel{R^3\pi}} = \frac{28}{16} = 7 : 4.$$

Задатак 6.6. Торус је тело настало обртањем круга око праве која не сече тај круг (аутомобилска гума је пример торуса). Доказати да је запремина торуса једнака производу површине круга који се обрће и дужине пута који при томе пређе центар круга.

Решење:

Нека торус настаје обртањем круга k са центром O и полупречником b око праве p на одстојању $OP = a$.

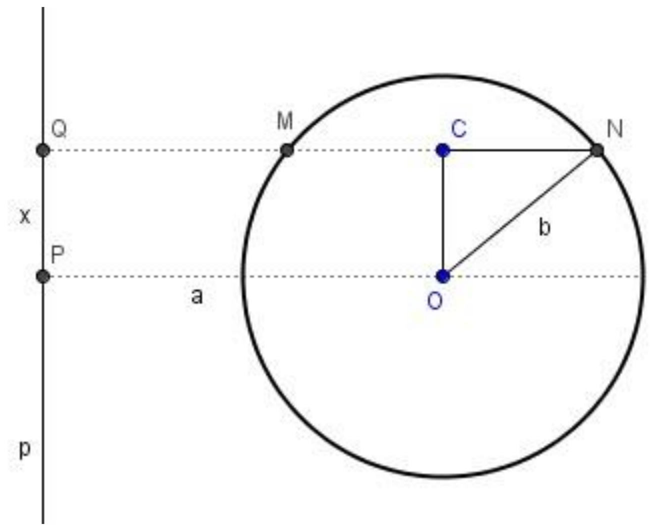
Пресек торуса и равни нормалне на p на одстојању x од P је кружни прстен између кругова QN и QM.

$$QN = a + CN$$

$$CN^2 = b^2 - x^2$$

$$CN = \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$QN = a + \sqrt{b^2 - x^2}$$



Слика 64. Пресек торуса и равни нормалне на осу

Аналогно:

$$QM = a - CM$$

$$CM = CN = \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$QM = a - \sqrt{b^2 - x^2}$$

Површина прстена:

$$Pp = (QN^2 - QM^2)\pi = ((a + \sqrt{b^2 - x^2})^2 - \left(a - \sqrt{b^2 - x^2}\right)^2)\pi = 4a\pi\sqrt{b^2 - x^2}.$$

Пресек исте површине са том равни има и ваљак коме је основа круг k, а висина једнака $2a\pi$ (правоугаоник страница $2a\pi$ и $MN = 2\sqrt{b^2 - x^2}$).

На основу Кавалијеријевог принципа запремине торуса и ваљка су једнаке, па је запремина торуса:

$$Vt = Vv = b^2\pi \cdot 2a\pi = 2ab^2\pi^2.$$

7. Израчунавање запремине обртних тела применом Симпсонове формуле

Симпсонова квадратурна формула је једна од најстаријих формула за нумеричку интеграцију.

Запремина тела добијеног ротацијом криве $y = f(x)$ око $x -$ осе у интервалу $[a, b]$ израчунава се помоћу интеграла:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Ако је подинтегрална функција полином степена не већег од 3 грешка апроксимције посматраног интеграла помоћу Симпсонове формуле једнака је нули. У том случају важи:

$$V = \pi \frac{b-a}{6} \left(f(a)^2 + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + f(b)^2 \right)$$

7.1 Запремина купе

Купа је тело настало ротацијом дела праве:

$$f(x) = R\left(1 - \frac{x}{H}\right)$$

од 0 до H. Овде је $a = 0,\ b = H$ и добија се:

$$V = \pi \frac{H}{6} \left(R^2 + 4\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 0 \right) = \frac{1}{3} R^2 \pi H.$$

7.2 Запремина зарубљене купе

Зарубљена купа је тело настало ротацијом дела праве:

$$f(x) = \frac{r - R}{H} x + R$$

од 0 до H. Овде је $a = 0,\ b = H$ и добија се:

$$V = \pi \frac{H}{6} \left(R^2 + 4\left(\frac{r+R}{2}\right)^2 + r^2 \right) = \frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2)\pi H.$$

7.3 ЗАПРЕМИНА ЛОПТЕ

Лопта је тело настало ротацијом полукруга:

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

од $-R$ до R. Овде је $a = -R,\ b = R$ и добија се:

$$V = \pi \frac{2R}{6}\left(0 + 4\left(\sqrt{R^2}\right)^2 + 0\right) = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

7.4 ЗАПРЕМИНА БАЧВЕ

Бачва се добија ротацијом параболе око осе x у интервалу од $-\frac{H}{2}$ до $\frac{H}{2}$, где је H висина бачве.

Дат је полином одређен тачкама:

$$\left(\frac{-H}{2}, r\right), (0, R), \left(\frac{H}{2}, r\right),$$

тј. полином:

$$p_2(x) = \frac{4x^2(r-R)}{H^2} + R$$

Који ротира од $-\frac{H}{2}$ до $\frac{H}{2}$. Овде је $a = -\frac{H}{2},\ b = \frac{H}{2}$ и добија се:

$$V = \pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} p_2(x)^2\,dx = \frac{1}{15} H\,\pi(3r^2 + 4rR + 8R^2).$$

Према Симпсоновој формули је:

$$V = \pi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} p_2(x)^2\,dx = \pi\left(p_2\left(-\frac{H}{2}\right)^2 + 4p_2(0)^2 + p_2\left(\frac{H}{2}\right)^2\right) + \pi R,$$

где је

$$R = -\frac{\frac{d^4}{dx^4}p_2(x)^2}{90}\left(\frac{H}{2}\right)^5 = -\frac{384(r-R)^2}{90h^4}\left(\frac{H}{2}\right)^5 = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + 2R^2),$$

са грешком:

$$V - V^* = -\frac{2}{15} H\pi(r - R)^2.$$

Формула:

$$V^* = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + 2R^2)$$

се у литератури често наводи као формула за израчунавање запремине бачве.

7.5 Запремина ваљка

Ако се у формули за запремину бачве узме $r = R$ добија се ротационо тело ваљак и његова запремина:

$$V = \pi R^2 H.$$

Очигледно, грешка је у овом случају једнака нули.

7.6 Симпсоново правило или призмоидална формула

Нека је T неко геометријско тело, нека су α и β две паралелне равни које га секу и нека је Ф онај део тела Т који се налази између равни α и β. Површ $\alpha \cap T$ зове се горњи пресек, а површ $\beta \cap T$ доњи пресек тела Ф. Нека је, даље, δ раван паралелна равнима α и β, која се налази између њих и на једнаком растојању од њих. Површ $\delta \cap T$ (или $\delta \cap \Phi$) зове се средњи пресек тела Ф.

За запремину $V(\Phi)$ тела Ф важи следећа **приближна формула**:

$$V(\Phi) = \frac{1}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)H.$$

где су B_1, B_2и B_3површине горњег, средњег и доњег пресека тела Ф, а H је висина тог тела (тј. растојање између равни α и β).

Ова формула се често примењује у пракси приликом израчунавања (приближних) запремина стабала, буради, стогова итд. Веома је интересантно (скоро невероватно) да подесно интерпретирана ова формула даје **потпуно тачан** резултат запремине свих оних тела које смо детаљније разматрали: ваљка, купе, зарубљене купе и лопте, као и призме, пирамиде и зарубљене пирамиде.

На пример, у случају призме или ваљка, раван α је раван горње, а раван β раван доње основе и сви пресеци (горњи, средњи и доњи) имају исту површину B. Стога је запремина призме или ваљка, по Симпсоновој формули:

$$V = \frac{1}{6}(B + 4B + B)H = BH.$$

У случају пирамиде или купе, раван β је раван основе, а раван α пролази кроз врх. Ако је површина основе B, онда је површина средњег пресека $B_2 = \frac{1}{4}B$, а површина горње основе $B_1 = 0$ и за запремину се добија:

$$V = \frac{1}{6}\left(0 + 4 \cdot \frac{1}{4}B + B\right)H = \frac{1}{3}BH.$$

У случају зарубљене купе, раван β је раван доње основе, а раван α је раван горње основе. Тада раван δ сече зарубљену купу и тај пресек је круг полупречника $\frac{R+r}{2}$. Површине пресека су $B_1 = r^2\pi,\ B_2 = (\frac{R+r}{2})^2,\ B_3 = R^2\pi,$ а висина је H. Запремина се добија:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6}\left(r^2\pi + 4 \cdot \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + R^2\pi\right) \cdot H \\ &= \frac{1}{6}\pi H(2r^2\pi + 2Rr + 2R^2\pi) \\ &= \frac{\pi H}{3}(r^2\pi + Rr + R^2\pi). \end{aligned}$$

Ако је L лопта полупречника r, узети да су α и β равни између којих се та лопта налази. Тада раван δ сече лопту L по великом кругу. Стога је $B_1 = B_3 = 0,\ B_2 = \pi r^2$, а висина H је пречник, тј. $2r$. Дакле:

$$V(L) = \frac{1}{6}(0 + 4 \cdot \pi r^2 + 0) \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

8. 3D могућности Геогебре

Програм Геогебра је математички софтвер који повезује геометрију и алгебру. Развио га је Маркус Хоенвартер (Markus Hohenwarter) са Универзитета у Салцбургу за поучавање математике у школама. Геогебра је бесплатна и доступна на више од 45 језика.

Геогебра је свестран и моћан алат. Са овом новом верзијом, обрађени су неки недостаци ранијих верзија, јер сада располаже са 3D графиконима, а ту су и не-Јава излаз могућности, тако да се могу видети програми, и интеракције са њима, на таблет уређајима, десктоп и лаптоп рачунарима.

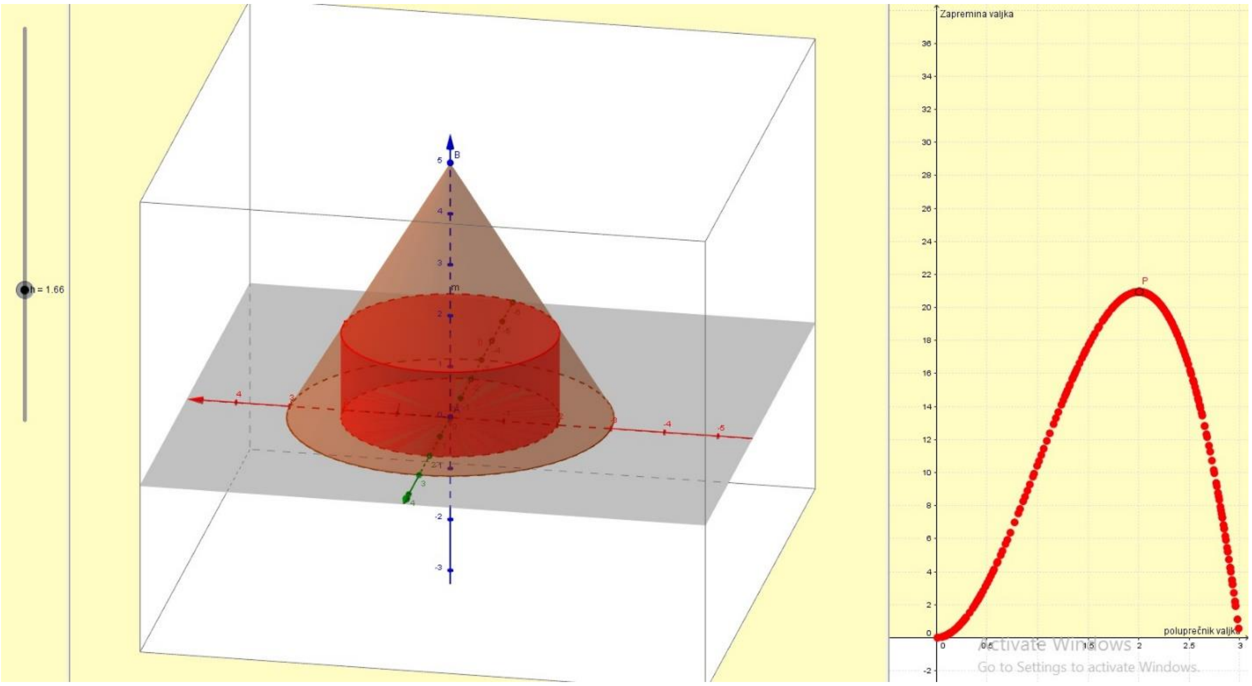
Динамичко јединство геометрије и алгебре у Геогебри пружа ученицима бољу визуализацију наставе, омогућава им експерименталан прилаз математици и наравно веће учешће у раду на часу. Поред тога што се у ученицима буди већа мотивација и што им градиво на овај начин постаје занимљивије, јер су изашли из стандардних оквира предавања, на овај начин ученици савладавају градиво експериментишући и сами могу откривањем лако доћи до решења.

Геогебра, као спој геометрије и алгебре омогућава унос података на оба начина, тј. објекте можемо нацртати уз помоћ већ постојећих функција, али исто тако можемо их и алгебарски задати. То је такође предност овог програма, јер за сваки нацртан објекат веома лако можемо прочитати његове координате и једначине. Овај програм поред тога што је веома једноставан и лак за савладавање, веома је користан и ученицима и наставницима. Наставници могу да га користе као динамички пројектор и да на тај начин целом одељењу презентују градиво, могу га користити да генеришу различите задатке, тј. мењајући параметре у задатку може се добити мноштво задатака који се разликују, а исте су тежине, и на тај начин се могу добити прецизнији подаци о увојеном знању, али и развити самосталан рад код ученика. Такође, пружа могућности самосталног истраживања и проверавања тачности, чиме побољшава мотивацију за рад код ученика и доприноси бржем и трајнијем усвајању знања.

3D Геогебра је веома погодан програм за креирање анимација којима можемо илустровати ученицима разне положаје и односе датих објеката. Овај програм доста можемо користити у просторној геометрији, стереометрији, можемо конструисати полиедре, обртна тела, конусне пресеке и њихове узајамне положаје. Могућност брзог и прецизног графичког приказа функција доприноси бољем разумевању наставних садржаја, даје могућност цртања већег броја графика у кратком временском периоду.

Пример 8.1. Одредити максималну запремину ваљка уписаног у купу.

У трећем разреду средње школе ученици нису савладали примену извода на одређивање минимума и максимума функције, да би решили овај задатак.
Помоћу Геогебре могуће је креирати промену запремине ваљка уписаног у купу. Стога, очитавањем вредности са графика може се лако одредити однос висине и полупречника ваљка и купе.



Слика 65. Ваљак уписан у купу и зависност запремине ваљка уписаног у купу у односу на полупречник ваљка.

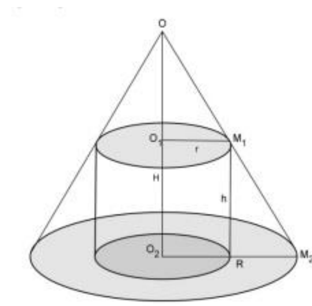
Ученицима је представљено детаљно упутство како би могли самостално да креирају ову зависност и да тако увиде решење.

Са графика се види да ваљак има максималну запремину када је висина ваљка једнака трећини висине купе, а да је полупречник ваљка једнак две трећине полупречника купе.

Овде ће бити претстављено решење применом извода:

Нека је R-полупречник купе, H-висина купе, r-полупречник ваљка, h-висина ваљка.

$$x = R - r \implies r = R - x$$



Слика 66. Ваљак уписан у купу

Из сличности $\Delta OO_1M_1 \sim \Delta OO_2M_2$:

$$H:R = h:x \implies h = \frac{H \cdot x}{R}$$

Добијене односе заменити у запремину ваљка:

$$V(x) = \pi \cdot (R-x)^2 \cdot \frac{H \cdot x}{R}$$

Први извод по x:

$$V'(x) = \pi \cdot \frac{H}{R} \cdot (R-x) \cdot (R-3x)$$

Први извод изједначити са нулом: $V'(x) = 0$, одакле се добија:

$$x = R, \qquad x = \frac{R}{3}.$$

$x = R$ није решење јер би у том случају било $r = 0$, што је минимум.

$$x = \frac{R}{3} \implies r = R - \frac{R}{3} = \frac{2}{3}R.$$

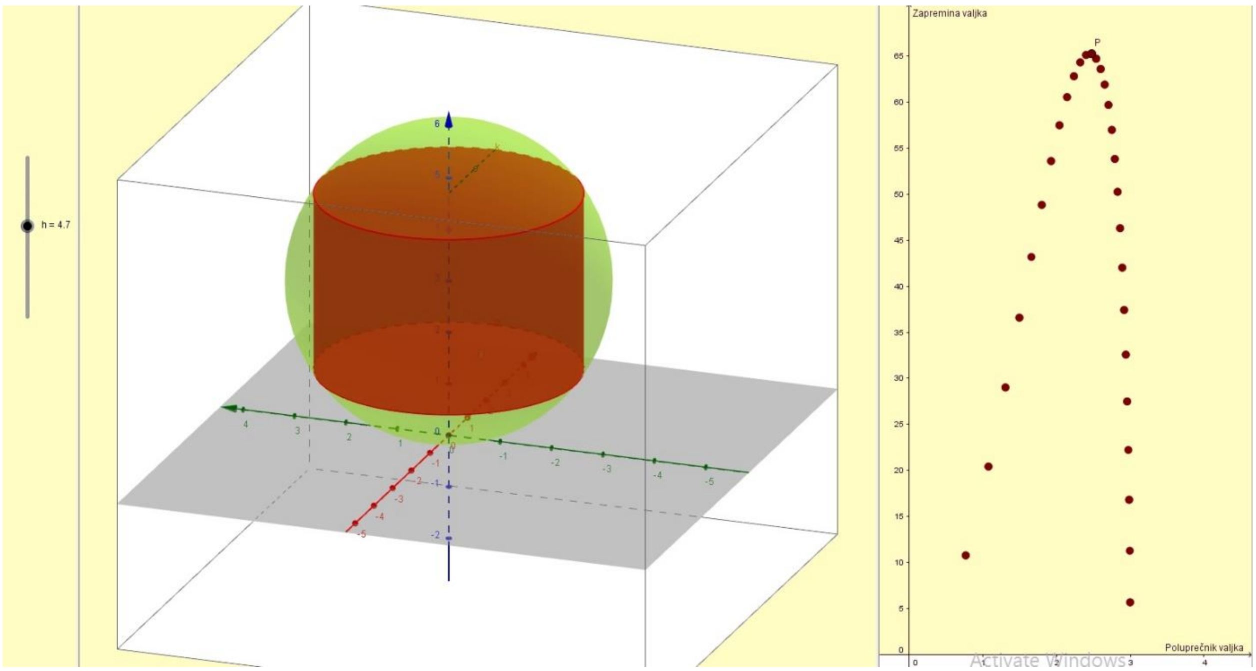
$$h = \frac{H \cdot (R-r)}{R} = \frac{1}{3}H.$$

Што потврђује закључак гледања са графика.

Пример 8.2. Одредити максималну запремину ваљка уписаног у лопту полупречника $R = 3cm$.

Такође, за решавање овог примера потребно је познавање извода који се изучавају у четвртом разреду.

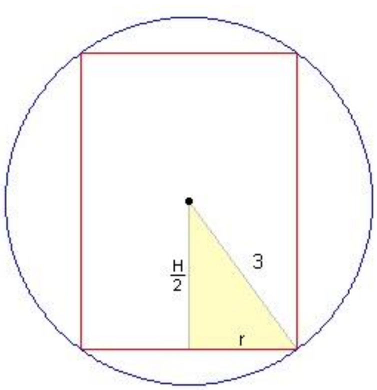
Помоћу Геогебре могуће је, на сличан начин као у претходном примеру, креирати промену запремине ваљка уписаног у лопту. Стога, очитавањем вредности са графика може се лако одредити однос висине и полупречника ваљка и лопте.



Слика 67. Ваљак уписан у лопту и зависност запремине ваљка уписаног у лопту у односу на полупречник ваљка.

Са графика прочитамо да ваљак има максималну запремину $V = 65{,}26cm^3$.

И овде ће бити претстављено решење применом извода:



На основу слике 65. може се полупречник основе ваљка r изразити преко висине ваљка H.

$$r = \sqrt{9 - \frac{H^2}{4}}, \qquad r > 0, \qquad 9 - \frac{H^2}{4} \geq 0.$$

Слика 68. Ваљак уписан у лопту

Када се добијен однос замени у запремину ваљка, добија се запремина изражена преко висине:

$$V(H) = \left(9 - \frac{H^2}{4}\right)\pi \cdot H = 9\pi H - \frac{1}{4}H^3\pi.$$

Први извод по H:

$$V'(H) = 3\pi\left(3 - \frac{1}{4}H^2\right).$$

Први извод изједначити са нулом, $V'(H) = 0$, одакле се добија:

$$H = \sqrt{12} \approx 3.46cm.$$

$$r = \sqrt{6} \approx 2.45cm.$$

$$V = r^2\pi \cdot H = 65,26cm^3.$$

Што, такође, потврђује закључак гледања са графика.

9. Закључак

Овим радом приказан је један нов приступ настави математике. Овај приступ подразумева коришћење рачунара у настави, тачније програмског пакета ГеоГебра. Представљен је интерактивни материјал у коме су обрађена обртна тела и све области које су повезане са њима, а обрађују се у средњој школи.

Овакав вид наставе изискује мотивисаног професора и професора који је спреман да се перманентно усавршава како би ишао у корак са технологијама које се стално развијају. Реално гледајући, професори губе огромну количину енергије и времена да предавање испишу или нацртају на обичној табли. То време уопште није занемарљиво и на тај начин се губи суштина, јер нема довољно времена за додатна појашњења нечег несхваћеног на часу. Уколико професор има интерактивни приказ наставног садржаја, добија драгоцено време на располагању за рад са ученицима. Активним разговорима са ученицима добија преко потребну интеракцију.

Од ученика се очекује да буду активни, њима ће визуелним приказом појединих делова бити објашњени појмови и суштинско разумевање садржаја. Тродимензионалне слике, брз приказ геометријских тела, све то у различитим бојама више привлаче пажњу и лакше остају у сећању оних који ту наставу прате.

Овај материјал ће бити користан из следећих разлога:

- сваки наставник ће моћи да нађе и искористи неку идеју да би унапредио свој рад,
- сви примери, илустрације и анимације могу послужити не само као узор, већ се могу непосредно применити у процесу наставе математике,
- повећава се мотивисаност ученика,
- побољшава се разумевање, откривање и усвајање математичких појмова, појава и законитости.

.

10. Литература

[1] Владимир Стојановић, Нинослав Ћирић, Математископ 5, Збирка решених задатака за трећи разред средњих школа, Математископ, Београд, 1999.

[2] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, Анализа са алгебром, Уџбеник са збирком задатака за 4. разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2008.

[3] Јован Кечкић, Математика са збирком задатака за трећи разред средње школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2006.

[4] Новица Блажић, Неда Бокан, Зоран Лучић, Зоран Ракић, Аналитичка геометрија, Математички факултет Београд , 2003.

[5] Срђан Огњановић, Живорад Ивановић, Математика 3, Збирка задатака и тестова за трећи разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2009.

[6] Срђан Огњановић, Живорад Ивановић, Стереометрија, Уџбеник са збирком задатака за II разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 2009.

[7] Сајт Природно-математичког факултета у Новом Саду, Департман за математику и информатику, http://www.dmi.uns.ac.rs/, Нови Сад, 2012.

[8] Сајт ГеоГебре, www.geogebra.org