Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

Цео и разломљени део реалног броја и њихове примене на разбијања скупа природних бројева

Студент: Ивана Лечић
Ментор: др Ђорђе Кртинић
Чланови комисије: др Милош Арсеновић, др Миљан Кнежевић

Београд,
2016.

Садржај

I

Увод

Невероватна комбинација тешко схватљиве природе и опште познате, бар елементарне, примене једног апстрактног појма већ хиљадама година чини број увек интересантном темом за проучавање. Остављајући по страни покушаје дефинисања појма броја, који су прича за себе, само проучавање његових особина је комплексна игра чији се крај не види. У њој равноправно могу учествовати скоро сви којима су познате основне особине и операције, а ако при томе имају и идеју, онда су добри резултати увек могући. Оно што је најинтересантније јесте да већина решења проблема који се тичу бројева изгледају једноставно, али до њих најчешће није лако стићи.

Овај рад има за циљ да представи велики број идеја које ће бити од помоћи свима који се често, са намером или не, сусрећу са задацима за чије је решавање потребно детаљније познавање особина бројева и њихових међусобних односа.

Рад је пре свега намењен надареним ученицима средњих школа, који воле математику и припремају се за национална и међународна такмичења. Међутим, она садржи и основне појмове, тврђења и једноставније задатке, тако да могу да је користе и читаоци који се први пут срећу са теоријом бројева. Сматра се да може бити од велике користи и професорима који припремају ученике како средњих, тако и основних школа за математичка такмичења. Велики број задатака је преузет са разних националних и међународних такмичења.

Имајући у виду да су бројеви главни извор настанка многих математичких теорија верујемо да овај рад може бити користан студентима у разним курсевима, на пример у заснивању математичке анализе, затим у рачунарству и дискретној математици, наравно у алгебри итд.

II

Реалан број

Један од најважнијих појмова у математици је појам реалног броја. Историјски развој појма реалног броја иде од природних, преко целих и рационалних до ирационалних бројева.

1 Аксиоме скупа реалних бројева

Користећи све резултате о својствима реалних бројева до којих су дошли математичари, могуће је теорију реалних бројева засновати аксиоматски, тј. поћи од основних појмова и полазних тврђења (аксиома), а затим дефинисати нове појмове и изводити разна својства на основу полазних и већ доказаних тврђења.

Дефиниција: *Скуп реалних бројева је непразан скуп* $\mathbb{R}$ *у коме су дефинисане две бинарне операције: сабирање* $(+)$ *и множење* $(\cdot)$ *и бинарна релација* $\leqslant$ *(мање или једнако), тако да су испуњена следећа својства:*

1. својства сабирања:
   (а) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$,
   (б) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x + y) + z = x + (y + z)$,
   (в) постоји елемент $0 \in \mathbb{R}$, такав да је $x + 0 = x$ за све $x \in \mathbb{R}$,
   (г) за сваки елемент $x \in \mathbb{R}$ постоји елемент $-x \in \mathbb{R}$, тако да је $x + (-x) = 0$;

2. својства множења:

   (а) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$,

   (б) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

   (в) постоји елемент $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тако да је $x \cdot 1 = x$ за све $x \in \mathbb{R}$,

   (г) за сваки елемент $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ постоји елемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, тако да је $x \cdot x^{-1} = 1$,

   (д) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

3. својства релације $\leqslant$;

   (а) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leqslant x$,

   (б) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y)$,

   (в) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$,

   (г) за свака два елемента $(\forall x, y \in \mathbb{R})$ важи $x \leqslant y$,

   (д) ако је $x \leqslant y$ и z произвољан елемент из $\mathbb{R}$ важи $x + z \leqslant y + z$,

   (ђ) ако је $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, онда је и $0 \leqslant x \cdot y$;

4. ако су A и B непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, такви да је $x \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$, тада постоји елемент $z \in \mathbb{R}$, такав да је $x \leqslant z \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$.

С обзиром на наведена својства, каже се да је скуп реалних бројева потпуно уређено поље. Сва остала својства реалних бројева могу се извести из наведених аксиома. Дефинишу се операције одузимања и дељења а оно што је нама посебно интересантно јесте особина о густини скупа.

Тврђење: *Скуп реалних бројева је свуда густ, тј. између свака два реална броја x и y постоји бесконачно много реалних бројева.*

Доказ. Нека је $x, y \in \mathbb{R}$ и нека је $x < y$. На основу аксиоме

ако је $x \leqslant y$ и z произвољан елемент из $\mathbb{R}$ важи $x + z \leqslant y + z$

следи да је $x + x < x + y$ и $x + y < y + y$, тј. $2x < x + y$ и $x + y < 2y$, односно $2x < x + y < 2y$.

На основу тврђења

$$(x > 0) \Rightarrow (x^{-1} > 0) \qquad (x \leqslant y \wedge z \geqslant 0) \Rightarrow xz \leqslant yz,$$

даље следи да је $2^{-1}(2x) < 2^{-1}(x+y) < 2^{-1}(2y)$, тј. $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. На тај начин смо добили да је број $z = \dfrac{x+y}{2}$ између бројева x и y, тј. $x < z < y$. на исти начин се добијају бројеви z_1 и z_2 тако да је $x < z_1 < z < z_2 < y$. Овај поступак се може наставити и по својој природи је такав да му нема краја, што управо и значи да између реалних бројева x и y постоји бесконачно много реалних бројева.

2 Бројеви

У овом делу показаћемо како се у оквиру аксиоматски уведеног скупа $\mathbb{R}$ реалних бројева могу увести уобичајни подскупови природних, целих, рационалних и ирационалних бројева.

2.1 Природни бројеви

Интуитивно, природни бројеви представљају скуп који се добија полазећи од јединичног елемента скупа $\mathbb{R}$, додавањем те јединице неограничено много пута самој себи. Да бисмо ту конструкцију прецизирали, уводи се појам индуктивног скупа.

Дефиниција: *Подскуп* A *скупа* $\mathbb{R}$ *назива се индуктивним ако важи:*

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x + 1 \in A).$$

Дефиниција: *Скуп* $\mathbb{N}$ *природних бројева јесте најмањи индуктивни подскуп скупа* $\mathbb{R}$ *који садржи 1.*

Теорема: *Ако подскуп* A *скупа* $\mathbb{N}$ *има следеће особине:*

1. $1 \in A$,

2. $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x + 1 \in A)$

тада се A поклапа са скупом $\mathbb{N}$. ■
Ова теорема представља основ за принцип математичке индукције, која се везује искњучиво за природне бројеве.

2.2 Цели бројеви

У скупу $\mathbb{N}$ одузимање није увек могуће тј. разлика два природна броја не мора бити природан број. Због тога уводимо 0 и негативне природне бројеве: $-1, -2, -3....$

Означимо са $-\mathbb{N}$ скуп свих супротних елемената природних бројева: $-\mathbb{N} = \{-n | n \in \mathbb{N}\}$.

Дефиниција: *Под скупом целих бројева подразумевамо скуп* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$.

2.3 Рационални и ирационални бројеви

Дефиниција: *Под рационалним бројем подразумева се сваки број облика* $p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. *Скуп свих рационалних бројева означава се са* $\mathbb{Q}$.

За орерисање са рационалним бројевима важе позната правила рачунања са разломцима. Посебно, важи $pk/qk = p/q, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, због чега се као представник свих бројева облика p/q узима онај код кога су p и q узајамно прости $(p, q) = 1$. Важи:

Став: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ *је уређено поље.*

Дакле, скуп $\mathbb{Q}$ задовољава аксиоме (1.а)-(3.ђ). Међутим, $\mathbb{Q}$ не задовољава аксиому непрекидности (4) и у томе је основна разлика између поља $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. У скупу $\mathbb{R}$ морају постојати бројеви који нису рационални. Такве бројеве називамо ирационалним, а њихово откриће преписује се Питагори или његовим ученицима. Скуп свих ирационалних бројева означавамо са $\mathbb{I}$.

Теорема: *Нека је $f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_{n-1}x + c_n$ полином са целобројним коефицијентима и реалан број α корен тог полинома. Тада, или је α цео број или је ирационалан.*

Доказ. Пошто је 0 цео број, посматраћемо само случај $\alpha \neq 0$. Претпоставимо да је α рационалан број, тј. $\alpha = p/q, p \in Z, q \in N, (p,q) = 1$. Замењујући $\alpha = p/q$ у једначину $f(x) = 0$ добијамо

$$\frac{p^n}{q^n} + c_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + c_{n-1}\frac{p}{q} + c_n = 0$$

односно

$$p^n = -q(c_1 p^{n-1} + ... + c_n q^{n-1}).$$

Одатле следи $q|p^n$. Међутим, због $(p,q) = 1$ важи $(p^n, q) = 1$, па је $q|p^n$ могуће само за $q = 1$ тј. $\alpha = p/q = p$ је цео број. ■

Теорема: *Ако је $\alpha \in \mathbb{Q}$, онда постоји реалан број $c > 0$, такав да је за сваки рационалан број $\frac{a}{b} \neq \alpha$ испуњава једнакост*

$$|\alpha - \frac{a}{b}| \geqslant \frac{c}{b}$$

Доказ. Нека је $\alpha = p/q, q \geqslant 1$. Ако је a/b произвољан рационалан број, $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, онда је $pb - aq \neq 0$, па је цео број $|pb - aq| \geqslant 1$. Због тога је

$$|\alpha - \frac{a}{b}| = |\frac{p}{q} - \frac{a}{b}| = \frac{|pb - aq|}{bq} \geqslant \frac{1}{bq} = \frac{1/q}{b}$$

Дакле, за c се може узети $1/q$. ■

3 Последица аксиоме непрекидности

За Архимедово[1] својство уређеног поља $\mathbb{R}$ може се показати да оно не следи из алгебарских аксиома, већ је за његово извођење неопходна аксиома непрекидности.

Теорема: *За произвољне позитивне реалне бројеве* a, b *постоји (и јединствено је одређен) природан број* n*, такав да је* $(n-1)a \leqslant b < na$.

Доказ. Претпоставимо да број $n \in \mathbb{N}$, такав да је $b < na$, не постоји. Тада важи $na \leqslant b$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је скуп $A = \{na | n \in \mathbb{N}\}$ ограничен одозго. На основу теореме о супремуму постоји $\sup A = c$. Како је $a > 0$, то је $c - a < c$, што показује да број $c - a$ не може бити мајоранта скупа A. Дакле, постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $n_0 a > c - a$. Но, онда је $(n_0 + 1)a > c$, што је контрадикција са $c = \sup A$.

Дакле, мора постојати број $n \in \mathbb{N}$ за који је $b < na$. Међу свим таквим бројевима n постоји најмањи - очигледно је да он задовољава $(n-1)a \leqslant b < na$. Јединственост тог броја је јасна. ■

Лако је видети да наведено тврђење остаје на снази и ако дозволимо да $b \in \mathbb{R}$ буде произвољног знака, с тим да број n у том случају бирамо из $\mathbb{Z}$ уместо из $\mathbb{N}$. У том случају за $a = 1$ добијамо једноставну чињеницу

$$(\forall b \in \mathbb{R})(\exists! n \in \mathbb{Z}) n - 1 \leqslant b < n.$$

Такав број $n - 1$ зваћемо целим делом броја b и означићемо са $[b]$. Ево неколико важних последица Архимедовог својства.

Последица:

1. За сваки позитиван број ε постоји природан број n, такав да је $0 < 1/n < \varepsilon$.

2. Ако је x ненегативан реалан број и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $x < 1/n$ онда је $x = 0$.

[1]Архимед (287.-212.пне.) грчки физичар, астроном и математичар

Последица: Ма какви били реални бројеви a и b за које је $a < b$, постоји рационалан број x, такав да је $a < x < b$.

Због својства рационалних бројева израженог овом последицом каже се да је скуп $\mathbb{Q}$ густ у скупу $\mathbb{R}$.

4 Децимална репрезентација броја

Сваки позитиван реалан број α може се на јединствен начин приказати у децималном запису

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...,$$

где је a_0 ненегативан цео број, $a_1, a_2, ...$ су цифре, тј. елементи скупа $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ и нису сви a_n почев од неког једнаки 9. Уочимо међу свим таквим записима оне који су периодични, тј. оне код којих се почев од извесног места, једна цифра или група цифара периодично понавља.

Теорема: *Реалан број α је рационалан ако и само ако је његов децимални запис почевши од неког места периодичан.*

Доказ. Посматрајмо рационалан број $\alpha = p/q$. При дељењу природних бројева природним бројем q могу се појавити остаци $0, 1, 2, ..., q-1$. Ако се на неком кораку при дељењу са p и q појави остатак 0, онда се поступак дељења завршава и број α има коначан децимални запис. Ако се при дељењу са p и q остатак 0 не појави, онда се након извесног броја корака, и то највише након q корака, мора поновити остатак који се добија. Самим тим доћи ће до понављања одређеног броја цифара и овим ће се поступком добити бесконачан периодичан децимални запис броја α.

Обратно, посматрајмо реалан број α који има периодичан децимални запис

$$\alpha = A_0, a_1 a_2 ... a_t (a_{t+1} a_{t+2} ... a_{t+s}).$$

Онда је

$$\alpha(10^{t+s} - 10^t) = (10^s - 1)(10^t a_0 + \overline{a_1 a_2 ... a_t}) + \overline{a_{t+1} a_{t+2} ... a_{t+s}},$$

одакле добијамо

$$\alpha = {}_0 + \frac{1}{10^t}\overline{a_1a_2...a_t} + \frac{1}{10^t(10^s-1)}\overline{a_{t+1}a_{t+2}...a_{t+s}}$$

што значи да је α рационалан број. $\blacksquare$

Занимљиво је испитати када се дати рационалан број представља у облику коначног децималног броја, када у облику просто-перодичног, а када у облику мешовито-периодичног броја, код кога је $t > 0$. Следећа теорема даје одговор на то питање.

Теорема: *Нека је $\alpha = p/q$ рацоналан број, $(p,q) = 1$.*

1. *Број α има коначан децимални запис ако и само ако је $q = 2^a \cdot 5^b, (a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.*

2. *Број α има бесконачан просто-периодичан запис ако и само ако је $(q, 10) = 1, q > 1$.*

Доказ.

1. Претпоставимо најпре да број α има коначан децимални запис

   $$\frac{p}{q} = a_0, a_1a_2...a_n$$

   што значи да је

   $$\frac{p}{q} = a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + ... + a_n \cdot 10^{-n}.$$

   Свођењем на заједнички именилац добијамо да је $\frac{p}{q} = \frac{c}{10^n}$, одакле, после евентуалног скраћивања, добијамо да је $q = 2^a \cdot 5^b$.
   Нека је, обратно, $q = 2^a \cdot 5^b$. Проширивањем разломка $\frac{p}{2^a \cdot 5^b}$ са 5^{a-b} или 2^{b-a} добијамо

   $$\frac{p}{q} = \frac{r}{10^m}$$

где су r и m природни бројеви. Природан број r има свој декадни запис

$$r = \overline{c_k c_{k-1} ... c_1 c_0} = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + c_1 \cdot 10 + c_0,$$

па добијамо да је

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{10^m} = c_k \cdot 10^{k-m} + c_{k-1} \cdot 10^{k-1-m} + ... + c_1 \cdot 10^{1-m} + c_0 10^{-m}$$

што значи да је број p/q записује у децималном запису помоћу истих цифара као и број r и, евентуално, извесног броја нула испред њих, у случају да је $k < m$. Дакле, број p/q има коначан децимални запис.

2. Овај део тврђења доказаћемо на основу следеће теореме у којој се одређује дужина периоде просто-периодичног децималног броја.

Теорема: *Нека је $(q, 10) = 1, 1 \leqslant p < q, (p, q) = 1$. Тада број p/q има бесконачан просто-периодичан децимални запис са s цифара у периоди, где је s поредак броја 10.*

Доказ. Нека је s поредак броја 10 тј. $10^s \equiv 1 \pmod q$. Дељење $10p$ са q даје $10p = qc_1 + r_1$, где $0 \leqslant r_1 < q$ и $(r_1, q) = (10p, q) = 1$; специјално, $r_1 \neq 0$ тј. $1 \leqslant r_1 < q$, па пар r_1, q задовољава исте услове као p, q и поступак се може наставити. Добија се

$$10p = qc_1 + r_1, 10r_1 = qc_2 + r_2, ..., 10r_{s-1} = qc_s + r_s, ...$$

где је $1 \leqslant r_i < q, 0 \leqslant c_i = \dfrac{10r_{i-1} - r_i}{q}$. Одатле је

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + \frac{r_1}{10q} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 q} = ... = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + ... + \frac{c_s}{10^s} + \frac{r_s}{10^s q}$$

Следи $p \cdot 10^s = (...)q + r_s$ и $r_s \equiv p \cdot 10^s \equiv p \pmod q$, тј. $r_s = p$. На тај начин добијамо

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + ... + \frac{c_s}{10^s} + \frac{c_1}{10^{s+1}} + ... + \frac{c_s}{10^{2s}} + ... = 0,(c_1 ... . c_s).$$

При том је добијена дужина периоде s најмања могућа, јер би $p/q = 0,(c_1 ... . c_s)$ имало за последицу

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{10} + ... + \frac{c_t}{10^t} + \frac{1}{10^t}\frac{p}{q},$$

односно $p \cdot 10^t = (...)q + p \equiv p \pmod q$, што би, због $(p,q) = 1$ повлачило $10^t \equiv 1 \pmod q$, па би због тога што је s поредак броја 10, следило $s \leqslant t$.■

III

Цео део реалног броја

Нека су a и $b \neq 0$ цели бројеви. Претпоставимо да b не дели a. На основу теореме о дељењу са остатком постоје једнозначно одређени бројеви q и r такви да је:

$$a = bq + r, \qquad 0 < r <\mid b \mid,$$

одатле је за $b > 0$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}, \qquad 0 < \frac{r}{b} < 1. \tag{1}$$

За $b < 0$ заменити b са $-b$, па тако имамо предходни случај. Према томе $\dfrac{a}{b}$ је реалан број једнак збиру целог броја q и правог разломка $\frac{r}{b}$. Из релације (1) добијамо да је:

$$q < \frac{a}{b} < q + 1,$$

одакле видимо да је q највећи цео број који није већи од броја $\frac{a}{b}$. Број q се назива **цео део** реалног броја $\frac{a}{b}$ и означава се $[\frac{a}{b}]$.

Још општије: цео део реалног броја x је највећи цео број који није већи од x. Обележава се са $[x]$. Из дефиниције следи да је:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1,$$

а ako је x цео број, тада и само тада је $[x] = x$. Из дефиниције целог дела реалног броја следи релација

$$x = [x] + \{x\}, \qquad 0 \leqslant \{x\} < 1.$$

Број $\{x\}$ се назива **разломљени део** реалног броја X.

Теорема: *Нека су x и y реални бројеви, а m цео број. Тада је:*

1. $[x] \leqslant x < [x] + 1, \quad x - 1 < [x] \leqslant x, \quad 0 \leqslant x - [x] < 1;$
2. $[x + m] = [x] + m;$
3. $[x] + [y] \leqslant +y] \leqslant [x] + [y] + 1,$
   или, пошто су $[x] + [y], [x + y], [x] + [y] + 1$ *цели,*
   $$[x + y] = [x] + [y] \vee [x + y] = [x] + [y] + 1;$$
4. $[x - y] \leqslant [x] - [y] \leqslant [x - y] + 1;$
5. $[x][y] \leqslant [xy] \leqslant [x][y] + [x] + [y]$, ако су $x, y \geqslant 0;$
6. $[\frac{[x]}{m}] = [\frac{x}{m}], m > 0$
7. $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$, ако је $x \geqslant 0$.

Доказ.

1. Сваки део тврђења под (1) је алгебарски записана дефиниција броја $[x]$.
2. Нека је $x = [x] + \{x\}$. Пошто је $x + m = [x] + \{x\} + m$, $0 \leqslant \{x\} < 1$, а $[x] + m$ је цео број, следи да је $[x + m] = [x] + m$.
3. Пођимо од израза $[x + y] = [x + \{x\} + y = \{y\}]$ и применимо својство целог дела које смо доказали под (1):
   $$[[x] + [y] + \{x\} + \{y\}] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}].$$

Тада је $[x+y] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}]$. Како је $0 \leqslant [\{x\} + \{y\}] < 2$, тада је цео број $[\{x\} + \{y\}]$ једнак 0 или 1. Стога је

$$[x+y] = [x] + [y] \vee [x+y] = [x] + [y] + 1,$$

чиме смо доказали да је

$$[x] + [y] \leqslant +y] < [x] + [y] + 1.$$

4. Из $[x] = [(x-y) + y]$ и (3) следи доказ.

5. Из (1) следи:

$$[x][y] \leqslant xy < ([x]+1)([y]+1).$$

Онда је

$$[x][y] \leqslant [xy] < ([x]+1)([y]+1),$$

тј.

$$[x][y] \leqslant [xy] \leqslant ([x]+1)([y]+1) - 1.$$

6. На основу теореме о дељењу са остатком за целе бројеве $[x]$ и $m \neq 0$ постоје цели бројеви q и r такви да је

$$[x] = mq + r, 0 \leqslant r < m.$$

Како је $[x] = x - \{x\}$ тада је $x = mq + r + \{x\}$, па је

$$\frac{x}{m} = q + \frac{r + \{x\}}{m}.$$

Из услова које задовољавају бројеви r и $\{x\}$ такође је

$$0 \leqslant \frac{r + \{x\}}{m} < 1,$$

одакле следи:

$$\left[\frac{x}{m}\right] = q.$$

Kako је

$$\frac{[x]}{m} = q + \frac{r}{m}, \text{ где је } 0 \leqslant \frac{r}{m} < 1$$

тада је

$$\left[\frac{[x]}{m}\right] = q.$$

Сада из једнакости следи тражена једнакост.

7. Како је $x \geqslant 0$, то x може да се напише у облику $x = n^2 + r + \{x\}$; n и r су негативни цели бројеви, $0 \leqslant r \leqslant 2n$. Онда је

$$[\sqrt{[x]}] = n + \phi + [\sqrt{n^2 + r} - n] = n$$

где је $\phi = \{n\}$ и

$$[\sqrt{x}] = n + [\sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n] = n,$$

јер је $0 \leqslant \sqrt{n^2 + r} - n < 1$ и $0 \leqslant \sqrt{n^2 + r + \{x\}} - n < 1$.

Последица:(1) Ако је $a > 0$ цео број и $[ax] = b$, тада је:

$$[x] = \left[\frac{b}{a}\right];$$

(2) За сваки реалан број важи једна од једнакости

$$[x] + [-x] = 0 \qquad \vee \qquad [x] + [-x] = -1,$$

према томе да ли је x цео број или не;
(3) За реалне бројеве $x_1, x_2, ..., x_n$ важи једнакост

$$[x_1] + [x_2] + ... + [x_n] \leqslant [x_1 + x_2 + ... + x_n] = [x_1] + [x_2] + ... + [x_n] + n - 1.$$

Доказ.

(1) Како је $[ax] = b$ и a цео број ратличит од нуле, тада је према својству (3) које смо доказали у предходној теореми:

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{[ax]}{a}\right] = \left[\frac{ax}{a}\right] = [x].$$

(2) Заменом $y = -x$ у (2) предходне теореме одмах добијамо да је $[x] + [-x] = [x + (-x)] = 0$ или $[x] + [-x] + 1 = [x + (-x)] = 0$, већ према томе да ли је x цео број или не.

(3) Доказ се изводи индукцијом. За $n = 2$ једнакост важи на основу неједнакости (2) доказаној у предходној теореми. Претпоставимо да је тврђење тачно за $n = m$, тј. нека је

$$[x_1] + [x_2] + ... + [x_m] \leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_m]$$
$$\leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_m] + m - 1.$$

Како је

$$[x_1] + [x_2] + ... + [x_m] + [x_{m+1}] \leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_{m+1}]$$
$$\leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_m] + [x_{m+1}] + 1,$$

сабирањем последњих двеју двоструких неједнакости имамо да је

$$[x_1] + [x_2] + ... + [x_{m+1}] \leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_{m+1}]$$

$$\leqslant [x_1] + [x_2] + ... + [x_{m+1}] + m,$$

што је и требало доказати.

З а д а ц и:

У претходном делу рада смо дефинисали цео и разломљени део реалног броја и доказали неке његове особине. Овај део рада има за циљ да на практичним примерима покаже примену тих особина и представи неке од задатака који се јављају у градиву за средњу школу као и на такмичењима.

1. Доказати:

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$$

Решење: Разликујемо два случаја:

Први случај: Ако је $0 \leqslant \{x\} < \dfrac{1}{2}$, тада је

$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + \{x\} + \dfrac{1}{2}\right] = [x]$

$[2x] = \Big[2([x] + \{x\})\Big] = 2[x]$

па је $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2[x] - [x]$;

Други случај: Ако је $\frac{1}{2} \leqslant \{x\} < 1$, тада је $[x] = \left[[x] + \alpha + \frac{1}{2}\right]$, где је $\alpha = \{x\} - \frac{1}{2}$ и $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, па је
$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + \alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[[x] + 1 + \alpha\right] = [x] + 1$
и
$[2x] = \left[2\Big([x] + \alpha + \frac{1}{2}\Big)\right] = [2[x] + 1 + 2\alpha] = 2[x] + 1$
одавде следи да је $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$.

2. Доказати:

$$[2x + 2y] \geqslant [x] + [y] + [x + y]$$

Решење:
$[x]+[y]+[x+y] \geqslant [x+y]+[x+y] = 2[x+y] \geqslant [2(x+y)] = [2x+2y]$ ■

3. Нека су x, y, z произвољни реални бројеви. Доказати да је

$$x + [y + z] = y + [x + z] = z + [x + y]$$

ако и само ако је

$$\{x\} = \{y\} = \{z\}.$$

Решење: Није тешко доказати да једнакости $x+[y+z] = y+[x+z] = z + [x + y]$ важе ако и само ако је испуњено

$$(*) \qquad \{x\} + [\{y\} + \{z\}] = \{y\} + [\{x\} + \{z\}] = \{z\} + [\{x\} + \{y\}].$$

Очигледно, ако је $\{x\} = \{y\} = \{z\}$, важи и $(*)$. С друге стране, ако важи $(*)$, имамо да је, на пример,

$$\{x\} - \{y\} = [\{x\} + \{z\}] - [\{y\} - \{z\}] \in \mathbb{Z}$$

па пошто $\{x\}, \{y\} \in [0, 1)$, биће $\{x\} = \{y\}$. Слично се доказује да је $\{y\} = \{z\}$, па је тиме доказано $\{x\} = \{y\} = \{z\}$.

4. Одредити колико има бројева не већих од 1000 који су дељиви бар једним од бројева $2, 3, 5$ или 7.

Решење: Означићемо са A_k скуп природних бројева не већих од n који су дељиви са k. Њих има $\left[\frac{n}{k}\right]$. У пресеку $A_i \cap A_j$ се налазе тачно они бројеви који су дељиви и са i и са j, па је зато тај пресек једнак скупу $A_{NZS(i,j)}$. Када применимо формулу укључења и искључења добијамо да природних бројева не већих од 1000 који су дељиви бар једним од бројева $2, 3, 5$ или 7 има:

$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5|$
$-|A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7|$
$+|A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] +$
$\left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] - \left[\frac{1000}{6}\right] - \left[\frac{1000}{10}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] - \left[\frac{1000}{14}\right] - \left[\frac{1000}{21}\right]$
$-\left[\frac{1000}{35}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] + \left[\frac{1000}{42}\right] + \left[\frac{1000}{70}\right] + \left[\frac{1000}{105}\right] - \left[\frac{1000}{210}\right] = 500 + 333$
$+200 + 142 - 166 - 100 - 66 - 71 - 47 - 28 + 33 + 23 + 14 + 9 - 4 = 772.$

5. Реши једначину $x^2 - 2[x] + \{x\} = 0$

Решење: Ако претпоставимо да дата једначина има решења и да је x једно њено решење, пошто је $\{x\} \geqslant 0$ и $x^2 \geqslant 0$, имамо да је $[x] \geqslant 0$. Нека је $[x] = k$ и $\{x\} = \alpha$. Тада је $(k+\alpha)^2 - 2k + \alpha = 0$, tj. $\alpha^2 + (2k+1)\alpha + k^2 - 2k = 0$.
Из последње једначине и чињенице да је $\alpha \geqslant 0$ добијамо да је

$$\alpha = \frac{-(2k+1) + \sqrt{(2k+1)^2 - 4(k^2 - 2k)}}{2},$$

тј.

$$\alpha = \frac{-(2k+1) + \sqrt{12k+1}}{2} \qquad \bigwedge \qquad 12k + 1 \geq (2k+1)^2.$$

У скупу целих бројева $k \in \mathbb{Z}$ неједначина $12k + 1 \geqslant (2k+1)^2$, тј. $4k(k-2) \leqslant 0$, има три решења; $k \in \{0, 1, 2\}$.
Ако је $k = 0$, једначина постаје $\alpha^2 + \alpha = 0$, па је због $\alpha \in [0, 1), \alpha = 0$. Дакле, $x = k + \alpha$.
Ако је $k = 1$, једначина постаје $\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0$, па је опет због $\alpha \in [0, 1), \alpha = \dfrac{-3 + \sqrt{13}}{2}$. Дакле,

$$x = 1 + \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}.$$

Размотримо и последњи случај, тј. када је $k = 2$. Из $\alpha^2 + 5\alpha = 0$ и $\alpha \in [0, 1)$, добијамо да је $\alpha = 0$ па је $x = 2$. Дакле решења дате једначине су $0, \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

6. Реши једначину $\{x\} + \{2x\} + \{3x\} = x$.

Решење: Нека је x решење дате једначине, $k = [x]$ и $\alpha = \{x\}$. Постоје следеће могућности:
I могућност: ако је $\alpha \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$, тада је $6\alpha = k + \alpha$, tj. $5\alpha = k$; пошто је $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{3}$, биће $0 \leqslant k < \dfrac{5}{3}$ тј. $k = 0$ или $k = 1$, па је у овом случају $x = k + \alpha = 0$ или $x = k + \alpha = 1\frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$;
II могућност: ако је $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha + 3\alpha - 1 = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k + 1$; пошто је $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{3}$, биће $\dfrac{2}{3} \leqslant k < \dfrac{2}{3}$, тј. $k = 1$ па је $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{2}{5} = 1\dfrac{2}{5}$;
III могућност: ако је $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha - 1 + 3\alpha = k + \alpha$, тј. $5\alpha = k + 2$; пошто је $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{2}{3}$, биће $\dfrac{1}{2} \leqslant k < \dfrac{4}{3}$, тј. $k = 1$, па је $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{3}{5} = 1\dfrac{3}{5}$.
IV могућност: ако је $\alpha \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right)$, тада је $\alpha + 2\alpha - 1 + 3\alpha - 2 = k + \alpha$,тј. $5\alpha = k + 3$; пошто је $\dfrac{2}{3} \leqslant \alpha < 1$, биће $\dfrac{1}{3} \leqslant k < 2$, тј. $k = 1$, па је $x = k + \alpha = 1 + \dfrac{4}{5} = 1\dfrac{4}{5}$.
Дакле, решења дате једначине су $\left\{0, 1\dfrac{1}{5}, 1\dfrac{2}{5}, 1\dfrac{3}{5}, 1\dfrac{4}{5}\right\}$.

7. Решити једначину $\dfrac{1}{\{x\}} = [x] + 2003$

Решење: Ако је x решење једначине, из $x > 0$ следи да је $[x]+2003 > 0$, тј. $[x] > -2003$. Нека је $[x] = k$ и $\{x\} = \alpha$. Приметимо најпре да је α рационалан број, тј. да је $\alpha = \dfrac{p}{q}$, за неки цео број p и неки природан број $q > 1$ тако да је $\mathbb{NZD}(p, q) = 1$. Дакле имамо:

$$\frac{q}{p} = k + 2003, k, p, q \in \mathbb{Z}, q > 1, \mathbb{NZD}(p, q) = 1.$$

одатле због $q > 1$ добијамо да је

$$p = 1, \qquad q = k + 2003, \qquad k > -2002.$$

Није тешко предпоставити да за свако $k \geqslant -2001$, број $x = k + \dfrac{1}{k+2003}$ задовољава дату једначину, па једначина има бесконачно много решења.

8. Нека су a ,b, $n \in N$, $x \in R$. Доказати:

   (а) ako je $\{x\} = \{8x\}$, тада је $\{26x\} = \{75x\}$;

   (б) бројеви $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$ су различити;

   (в) $\{\sqrt{4n^2+n}\} < \frac{1}{4}$;

   (г) једначина $\{x\} + \{\frac{1}{x}\} = 1$ има бесконачно много решења;

   (д) једначина из (d) нема рационалних решења;

   (ђ) ако је $n > 1$, $(a, n) = 1$ тада је

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{ak+b}{n} \right\} = \frac{1}{2}(n-1);$$

   (е) ako je $n > 1$, $(a, n) = 1$ тада је

   $$\sum_{k \in \Phi} \left\{ \frac{ak}{n} \right\} = \frac{1}{2}\varphi(n),$$

   где је $\Phi = \{k \quad | \quad 1 \leq k \leqslant n, (k, n) = 1\}$;

   (ж) Нека су $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in Q$, такви да за свако природно k важи

   $$\sum_{i=1}^{n} \{k\alpha_i\} < \frac{n}{2}.$$

   Тада је бар један од бројева $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ цео;

   (з) Да ли тврђење (ж) важи ако се $\dfrac{n}{2}$ замени произвољним већим бројем?

Решење:

(а) Уколико је број $x-y$ цео, онда важи да је $\{x\}=\{y\}$. Из једнакости $\{x\}=\{8x\}$ следи да је $7x$ цео број, па је цео број и $49x$. Како је $75x-26x=49x$, по предходном следи да је $\{26x\}=\{75x\}$.

(б) Претпоставимо супротно, тј. $\{10^n\cdot\sqrt{2}\}=\{10^m\cdot\sqrt{2}\}$, за $m\neq n$, даље следи да је број $10^n\cdot\sqrt{2}-10^m\cdot\sqrt{2}=z\in\mathbb{Z}$, па је $\sqrt{2}=\dfrac{z}{10^n-10^m}\in Q$, што је контрадикција.

(в) Приметимо неједнакост $4n^2<4n^2+n<4n^2+n+1$, тј. $2n<\sqrt{4n^2+n}<2n+1$, односно $[\sqrt{4n^2+n}]=2n$. Даље следи $\{\sqrt{4n^2+n}\}=\sqrt{4n^2+n}-2n=\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}+2n<\dfrac{n}{2n+2n}=\dfrac{1}{4}$.

(г) Ако је $x+y\in\mathbb{Z}$ тада је $\{x\}+\{t\}\in\{0,1\}$, и једнак је 0 акко су су бројеви x и y цели. Како за $x>1$ број $\dfrac{1}{x}$ не може бити цео, довољно је показати да функција $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ има бесконачно много целих вредности, што је тачно, јер је $f(1)=2$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

и функција f је непрекидна на $[1,\infty)$.

(д) Јасно је да дата једначина нема целобројних решења. Решења нису ни бројеви облика $\frac{1}{k}, k\in\mathbb{Z}$. Ако једначина има негативно решење, тј. $x<0$, тада је

$$\{-x\}+\{\frac{1}{x}\}=1-\{x\}+1-\{\frac{1}{x}\}=1,$$

тј. и $-x$ је решење. Ако је решење x, тада је решење и $\frac{1}{x}$. Дакле, довољно је показати да нема рациналних решења за $x\geqslant 1$. За $x\geqslant 1$ је и $[x]\geqslant 1$, па је једначина еквилантна са $\{x\}+\dfrac{1}{[x]+\{x\}}=1$, односно $\{x\}^2+\{x\}\cdot([x]-1)-([x]-1)=0$. Како је $0\leqslant\{x\}<1$, једино решење наше једначине је

$$\{x\}=\frac{-([x]-1)+\sqrt{([x]-1)^2++4([x]-1)}}{2}$$

и рационално је акко је $([x]-1)^2+4([x]-1)$ квадрат природног броја, што није случај, јер за $[x]>1$ важи $[x]^2<([x]-1)^2+4([x]-1)<([x]+1)^2$. (за $[x]=1$, следи $x=1$, што није решење).

(ђ) Како је $(a, n) = 1$, следи да бројеви $ak + b \leqslant k \leqslant n - 1$ чине потпун систем остатака по модулу n, па су бројеви $\left\{\dfrac{ak+b}{n}\right\}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$ пермутација бројева $\dfrac{k}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1$, одакле следи

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{\frac{ak+b}{n}\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{2}(n-1).$$

(е) Како је $(a, n) = 1$, следи да бројеви $ak, k \in \Phi$ чине сведен систем остатака по модулу n, па су бројеви $\left\{\dfrac{ak}{n}\right\}, k \in \Phi$ пермутација бројева $\dfrac{k}{n}, \in \Phi$. Ако је $k \in \Phi$, важи и $n - k \in \Phi$, одакле

$$2 \cdot \sum_{k \in \Phi} \left\{\frac{ak}{n}\right\} = \sum_{k \in \Phi} \left(\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}\right) = |\Phi| = \varphi(n).$$

(ж) Нека је $\alpha_1 = \dfrac{p_i}{q_i}$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ и нека је $m = NZS(q_1, q_2, ..., q_n)$. Тада је $m\alpha_i \in \mathbb{Z}$, па је $\{\alpha_i\} + \{(m-1)\alpha_i\} \in \{0, 1\}$ и једнак је нули акко је $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Ако међу датим бројевима нема прородних, следи

$$n > \sum_{i=1}^{n} \{\alpha_i\} + \sum_{i=1}^{n} \{(m-1)\alpha_i\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\{\alpha_i\} + \{(m-1)\alpha_i\}) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

што је контрадикција.

(з) Ако је $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \dfrac{1}{2}$, следи $\sum_{i=1}^{n} \{k\alpha_i\} \in \{0, \dfrac{n}{2}\}$, тј. $\sum_{i=1}^{n} \{k\alpha_i\} \leqslant \frac{n}{2}$, па тврђење не важи ако се $\dfrac{n}{2}$ повећа.

9. *(Општинско такмичење. Први разред)*
Решити систем једначина:

$$\begin{gathered} x - y = 2001 \\ [x] + [y] = 2003 \end{gathered}$$

Решење: Нека је пар (x, y) решење датог система. Прву једначину датог система можемо записати у облику:
$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2001$
одатле следи $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$ тј. $\{x\} = \{y\}$, због $0 \leqslant \{x\}, \{y\} < 1$, па је:

$$[x] - [y] = 2001$$
$$[x] + [y] = 2003$$

тј. $[x] = 2002$ и $[y] = 1$. Дакле дати систем једначина има бесконачно много решења. Скуп решења је:
$\chi = \{(2002 + \varphi, 1 + \varphi) \mid 0 \leqslant \varphi < 1\}$.

10. *(Општинско такмичење. Први разред)*
Да ли постоји природан број n такав да декадни запис броја $n!$ има облик

$$n! = ...2012\underbrace{0....0}_{k},$$

за неки природан број k.

*Решење:*Докажимо да такав природан број n не постоји. Претпоставимо супротно. Нека је $a \in N$ највећи степен броја 2 који дели $n!$, тј. $2^a|n!, 2^{a+1} \nmid n!$, а b највећи степен броја 5 који дели $n!$, тј. $5^b|n!, 5^{b+1} \nmid n!$. На основу Лежандрове формуле имамо

$$a = [\frac{n}{2^1}] + [\frac{n}{2^2}] + ... \qquad \wedge \qquad b = [\frac{n}{5^1}] + [\frac{n}{5^2}] + ...,$$

где је са $[x]$ означен цео део броја x. Како по услову задатка $10^k|n!$ и $10^{k+1} \nmid n!$ то је $k = \min(a, b) = b$.
Декадни запис броја $\frac{n!}{10^k}$ завршава се низом цифара 2012, те је он дељив са 2^2, а није дељив са 2^3. Отуда мора бити $a - b = 2$. Сада је $2 = a - b \geqslant [\frac{n}{2}] - [\frac{n}{5}] \geqslant \frac{n-1}{2} - \frac{n}{5}$, па је $n \leqslant 8$. Са друге стране, број $n!$ има бар 5 цифара, па је $n \geqslant 8$. Овим смо добили да је $n = 8$. Међутим, како је $8! = 40320$ долазимо до контрадикције.

11. *(Општинско такмичење. Трећи разред)*
Колико решења у скупу природних бројева има једначина

$$[\frac{100n}{199n}] + [\frac{100n}{201n}] = n.$$

Решење: Нека су a и b редом остаци при дељењу $100n$ са 199 и 201. Задата једначина постаје

$$\frac{100n - a}{199} + \frac{100n - b}{201} = n,$$

што се након свођења на заједнички именилац своди на $n = 201a + 199b$.
С друге стране, за све $a = 0, 1, ..., 198$ и $b = 0, 1, ..., 201$,

$$n = 201a + 199b$$

је решење једначине. Заиста, остаци при дељењу

$$100n = 20100a + 19900b$$

са 199 и 201 су редом a и b, па сад лако проверавамо да је

$$[\frac{100n}{199}] + [\frac{100n}{201}] = n.$$

Како се за различите вредности бројева a и b добијају различите вредности за n, решење има онолико колико има парова (a, b), а ових има тачно $199 \cdot 201 = 39999$.

12. *(Општинско такмичење. Трећи разред)*
Наћи све природне бројеве x за које

$$x | [(x-1)\sqrt{x}]$$

Решење: Нека су n и m јединствени природни бројеви такви да је $x = n^2 + m$ и $0 \leqslant m \leqslant 2n$. За $x \leqslant 3$ решења задатка су $x = 1$ и $x = 3$, па можемо предпоставити да је $x > 3$.
Претпоставимо да важи

$$(n-1)x + 1 < (x-1)\sqrt{x},$$

јер је то након квадрирања и срећивања еквивалентно са

$$1 < (2n-3)x(x-1) + mx^2.$$

Са друге стране је

$$(x-1)\sqrt{x} < (n+1)x$$

(јер је $\sqrt{x} < n+1$ и $x-1 < x$), па је

$$n-1 < \frac{[(x-1)\sqrt{x}]}{x} < n+1.$$

Како је по услову задатка $[(x-1)\sqrt{x}]$ дељиво са x, то је

$$[(x-1)\sqrt{x}] = nx,$$

тј.

$$nx \leqslant (x-1)\sqrt{x} < nx+1.$$

Квадрирањем и сређивањем добијамо $0 \leqslant (m-2)x+1 < 2n+1/x$. Лева неједнакост даје $m \geqslant 2$, а десна $(m-2)x \leqslant 2n-1$. Како је $n \geqslant 2$, то је $x \geqslant n^2 > 2n-1$, па је $m=2$. Према томе, сва решења су $x=1$ и $x=n^2+2$ за $n \in N$.

5 График функција $y=[x]$, $\quad y=\{x\}$

У четвртом разреду средње школе обрађује се и функција $[x]$, као пример функције која је део по део линеарна. Наводимо основна својства те функције; њима се можемо користити при решавању задатака који следе. Често се користи ознака $[x] = E(x)$, што потиче од почетног слова функције речи *entier* (цео) и $[x]$ чита као "*цео део од* x".

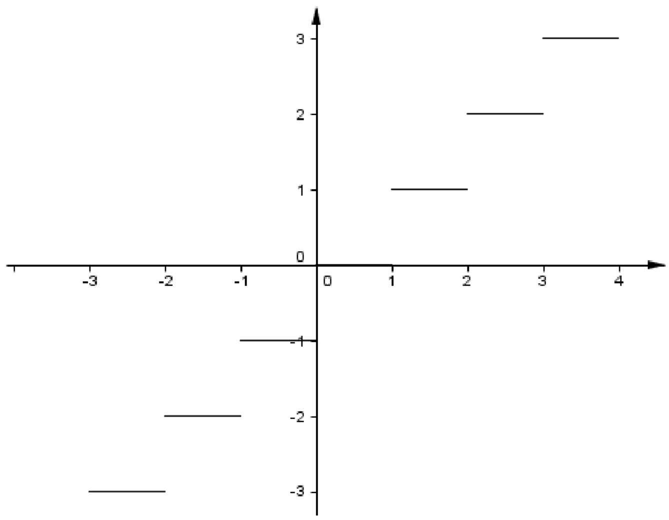
Домен функције $[x]$ је цео скуп $\mathbb{R}$. Она пресликава $\mathbb{R}$ на скуп $\mathbb{Z}$ целих бројева; при томе је сваки цео број k слика бесконачно много реалних бројева за свако $x \in [k, k+1)$ важи $[x] = k$.

На основу дефиниције лако цртамо график функције $y = [x]$. Са графика се једноставно "читају"многа својства функције:

1. функција је растућа, али не строго растућа,

2. непрекидна је за све $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$,

3. у целобројним тачкама има прекиде прве врсте (у њима је непрекидна здесна, има и леви лимес, али се леви и десни лимес разликују за 1).



Слика 1. График функције $y = [x]$

Помоћу функције $[x]$ дефинише се функција $\{x\}$:

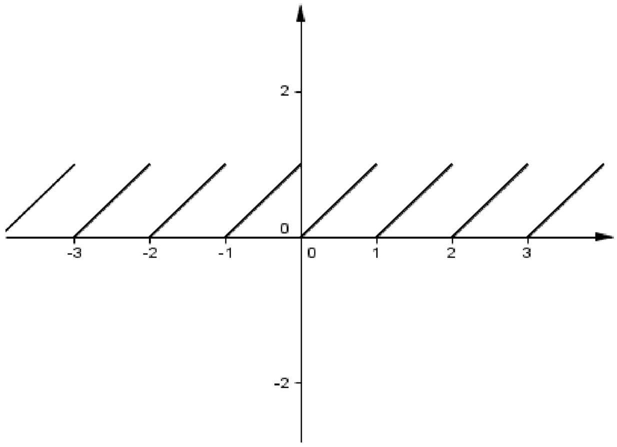
$$\{x\} = x - [x]$$

(читамо "разломљени део од x"). За њу важи:
Домен функције $\{x\}$ је цео скуп $\mathbb{R}$. Она пресликава $\mathbb{R}$ на скуп $[0.1)$.

На основу дефиниције лако цртамо и график функције $y = \{x\}$. Са графика једноставно "читамо"даља својства функције:

1. за све $x \in \mathbb{R}$ је $0 \leqslant \{x\} < 1$;
2. има бесконачно много нула за све $x \in \mathbb{Z}$ је $\{x\} = 0$;
3. непрекидна је за свако $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$;
4. у свим целобројним тачкама има прекиде прве врсте (у њима је функција непрекидна здесна,има и леви лимес, али се леви и десни лимес разликују за по 1);

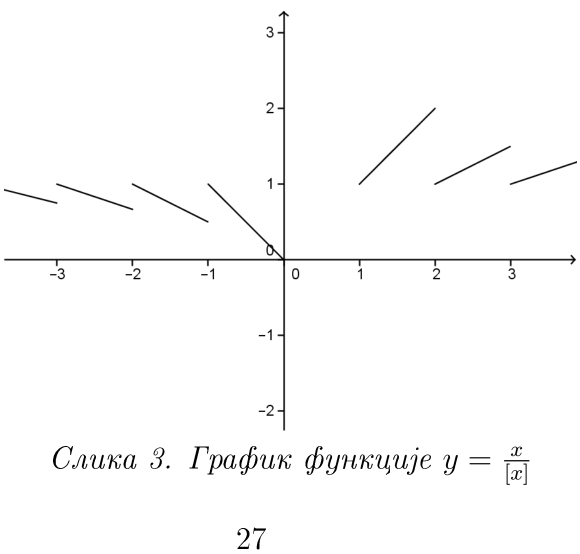
5. периодична је и основни период јој је 1.



Слика 2. График функције $y = \{x\}$

З а д а ц и:

1. Графички представити функцију $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$ и анализирати њена својства?
   Решење: Функција није дефинисана у интервалу $0 \leqslant x < 1$. Нема нулу функције. Функција је позитивна за свако $x \in D_f$. График се састоји од полузатворених одсечака. Они припадају правама које пролазе кроз координатни почетак. Крајеви одсечака (у којима су они затворени) припадају правој $f(x) = 1$. Рестрикција функције $f(x)$ на интервалу $(k, k+1)$ је права $f(x) = \dfrac{x}{k}$. Следи график:

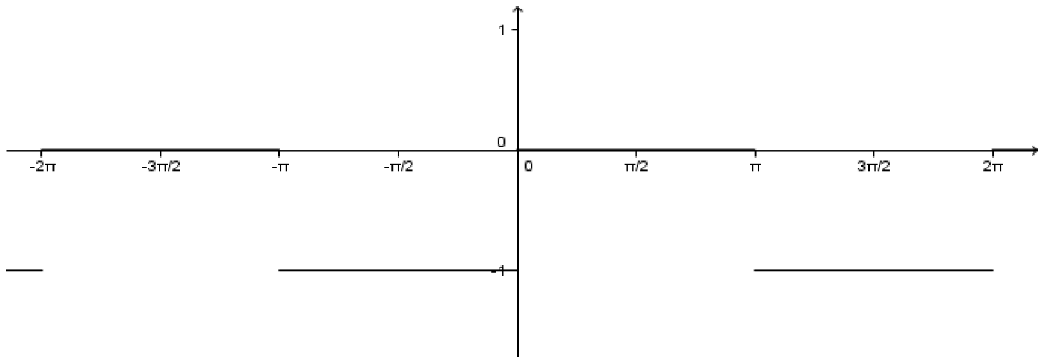


Слика 3. График функције $y = \frac{x}{[x]}$

2. Нацртати график функције $f(x) = [\sin x]$.
   Решење: Користећи се чињеницом да је:

$$[\sin x] = \begin{cases} 0, & x \in [2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \\ 1, & x \in \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi), \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in (\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi) \end{cases}$$

   добијамо график функције $y = f(x)$ на следећој слици:



Слика 4. График функције $y = [\sin x]$

IV

Теореме о апроксимацијама

У овој глави ћемо разматрати о апроксимирању реалних бројева рационалним. Наравно, као што је добро познато, сваки реалан број се може произвољно добро апроксимирати рационалним; међутим, ако се при том за бројеве којима се врши апроксимација захтевају неки додатни услови, на пример, ограничава им се на одређени начин именилац, тада се захтевана тачност не може увек постићи. У овом поглављу ми ћемо доказати класичне теореме Дирихлеа[2], Кронекера[3] и Бетија[4] и приказати неке занимљиве примене истих.

6 Дирихлеова теорема о апроксимацији

Један од интригантнијих проблема 19-тог века, био је апроксимација реалних бројева рационалним, пре свега апроксимација (и брзина) апроксимације ирационалних бројева. Рационалне бројеве је могуће апроксимирати коначним апроксимацијама, док је код ирационалних бројева ситуација другчија, што ћемо и показати. Следи једна од основних теорема о апроксимацији.

У 1842. Дирихле је доказао:
Теорема: *Неко је α ирационалан број. Тада постоји бесконачно много рационалних бројева $\frac{p}{q}$ таквих да важи:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}, \qquad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Закључујемо да се ирационални бројеви могу "боље"апроксимирати рационалним бројевима него сами рационални бројеви.
Пратећи оригиналан доказ теореме Дирихлеов принцип која гласи: *Ако $n+1$ објекат хоћемо да распоредимо у n кутија, онда најмање једна кутија садржи 2 објекта;* ово лако можемо да докажемо користећи аргумент контрадикције или индукцијом.

Доказ. Нека ја Q позитиван цео број. Бројеви:

$$0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, ..., \{Q\alpha\}$$

дефинишу $Q+1$ тачака распоређених у Q дисјунктних интервала

$$\left[\frac{j-1}{Q}, \frac{j}{Q}\right), \qquad j = 1, ..., Q.$$

[2]Јохан Петер Густав Лежен Дирихле (1805 - 1859) немачки математичар

[3]Леополд Кронекер (1823 - 1891) немачки математичар и логичар

[4]Семјуел Бети (1881 - 1970) амерички математичар

По Дирихлеовом принципу постоји најмање један интервал који садржи најмање два броја $\{k\alpha\} \geqslant \{t\alpha\}$, тако да $0 \leqslant k, t \leqslant Q$ и $k \neq t$. Даље следи:

$$\begin{aligned}\{k\alpha\} - \{t\alpha\} &= k\alpha - [k\alpha] - t\alpha + [t\alpha] \\ &= \{(k-t)\alpha\} + \underbrace{[(k-t)\alpha] + [t\alpha] - [k\alpha]}_{\in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Означимо $q = k - t$, тада добијамо:

$$\{q\alpha\} = \{k\alpha\} - \{t\alpha\} < \frac{1}{Q}$$

са $p := [q\alpha]$ следи да:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|q\alpha - p|}{q} = \frac{\{q\alpha\}}{q} < \frac{1}{qQ}.$$

Претпоставимо сада да је, специјално, α ирационалан број. Докажимо сада да у том случају имениоци q разломака који апроксимирају број α у Дирихлеовој теореми могу бити произвољно велики, ако дозволимо да број Q расте. Заиста претпоставимо супротно да постоји коначно много решења $\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_n}{q_n}$. За $\alpha \notin Q$ важи

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{1}{Q}, \qquad j = 1, ..., n,$$

што је контрадикција.
Коначно претпоставимо да је α рационалан, кажемо $\alpha = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$.
Ако је $\alpha = \frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, онда важи:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|q\alpha - bp|}{bq} \geqslant \frac{1}{bQ},$$

и укључије $q < b$. Ова једнакост за довољно велико Q противречи неједнакости Дирихлеове теореме.
Приметимо даље да из једнакости теореме следи да је, због $0 < q \leqslant Q$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

чиме смо доказали теорему.

Напомена: На пример, за $\alpha - \pi$ и $n - 150$, сигурно постоји разломак p/q чији је именилац q мањи од 150 и $|\pi - p/q| < 1/150q$. У петом веку

је кинески математичар Зу Чонгзи[5] апроксимирао π са 335/113. Овај разломак апроксимира број π са тачношћу већом од 10^{-6}. Приметимо да Дирихлеова теорема процењује ову разлику са $|\pi - 355/113| < 1/16950 < 0.0000589971$.
Следећи разломак који прецизније апроксимира π је 52163/16604, који још увек даје тачност на 6 децималних места. Седам децималних места броја π даје 86953/27678, а осам 102928/32763.

7 Кронекерова теорема о апроксимацији

За сваки дати реалан број α можемо наћи цео број q тако да се $q\alpha$ разликује од целог броја довољно мало. Кронекерова теорема о апроксимацији из 1891. нам описује баш такав случај.

Теорема: *Ако је α ирационалан, $\eta \in \mathbb{R}$ произвољан, онда за неко $N \in \mathbb{N}$ постоји $Q \in \mathbb{N}$ тако да је $Q > N$ и $P \in \mathbb{Z}$ тако да је*

$$\left|Q\alpha - P - \eta\right| < \frac{3}{Q}.$$

Доказ. Користећи Дирихлеову теорему о апроксимацији где су цели бројеви $q > 2N$ и p такав да важи:

$$\left|q\alpha - p\right| < \frac{1}{q}.$$

Претпоставимо да је m цео број за који важи:

$$\left|q\eta - m\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Можемо записати $m = px - qy$, где су x и y цели бројеви и $|x| \leqslant \frac{1}{2}q$. Докле год је

$$q(x\alpha - y - \eta) = x(q\alpha - p) - (q\eta - m),$$

тражимо

$$|q(x\alpha - y - \eta)| < \frac{1}{2}q \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1.$$

[5]Зу Чонгзи (429–500) кинески математичар и астроном

Подесимо $Q = q + x$ и $P = p + y$ добијамо

$$N < \frac{1}{2}q \leqslant Q \leqslant \frac{3}{2}q,$$

према томе

$$\left|Q\alpha - P - \eta\right| \leqslant |x\alpha - y - \eta| + |q\alpha - p| < \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{2}{q} \leqslant \frac{3}{Q}.$$

Ово је тражена неједначина дате теореме.

Кронекерова теорема о апроксимацији даје информације о тополошким својствима скупова. Почињемо са густим скуповима. За низ реалних бројева α_n кажемо да је густ скуп у интервалу $[a, b)$ ако за било коју отворену околину ϵ било које тачке $[a, b)$, постоји $\alpha_n \in \epsilon$. На основу Кронекерове теореме о апроксимацији, низ, дефинисан са $\alpha_n = \{n\alpha\}$ чини густ скуп у $[0, 1)$ ако и само ако је α ирационалан број. Ово даје још једну карактеризацију ирационалних бројева.

8 Бетијева теорема

Теорема: *Позитиван ирационалан број r генерише Бетијев скуп:*

$$\mathcal{B}_r = [r], [2r], [3r], ... = ([nr])_{n\geqslant 1}$$

Ако је $r > 1$, онда је $s = \dfrac{r}{r-1}$ такође позитиван ирационалан број. Они задовољавају:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$$

и скупови

$$\mathcal{B}_r = ([nr])_{n\geqslant 1}$$

$$\mathcal{B}_s = ([ns])_{n \geqslant 1}$$

формирају пар комплементарних Бетијевих скупова, тј. формирају разлагање скупа $\mathbb{N}$ *на дисјунктне подскупове. Општи Бетијеви скупови имају форму:*

$$\mathcal{B}_r = \{[r+p], [2r+p], [3r+p], ...([nr+p])_{n \geqslant 1}\}$$

где је p реалан број. За $p = 1$ *комплементарни Бетијеви скупови могу бити пронађени ако ставимо* $t = \dfrac{1}{r}$ *тако да*

$$\mathcal{B}_r = ([n(r+1)])_{n \geqslant 1}$$

$$\mathcal{B}_t = ([n(t+1)])_{n \geqslant 1}$$

формирају пар комплементарних Бетијевих скупова.

Доказ. Да би смо доказали теорему, најпре претпоставимо супротно, да постоје природни бројеви $j > 0$, k и m, такви да:

$$j = [k \cdot r] = [m \cdot s].$$

Из дефиниције целог дела реалног броја следи

$$j \leqslant k \cdot r < j + 1 \qquad \wedge \qquad j \leqslant m \cdot s < j + 1.$$

Како су r и s ирационални бројеви, даље следи

$$j < k \cdot r < j + 1 \qquad \wedge \qquad j < m \cdot s < j + 1.$$

Дељењем са r односно s горње неједнакости добијамо

$$\frac{j}{r} < k < \frac{j+1}{r} \qquad \wedge \qquad \frac{j}{s} < m < \frac{j+1}{s}$$

Сабирањем двеју неједнакости и коришћењем чињенице $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$ добијамо

$$j < k + m < j + 1$$

што је контрадикција, јер не може природан број да се нађе између два узастопна природна броја. Овим смо доказали да су скупови

$$\mathcal{B}_r = ([nr])_{n\geqslant 1}$$

$$\mathcal{B}_s = ([ns])_{n\geqslant 1}$$

међусобно дисјунктни.

Треба још доказати да сваки природан број мора припадати једном од Бетијевих скупова. Претпоставимо супротно да постоји природан бројеви $j > 0$ тако да не припада ни једном од скупова $\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_s$, тј. да важи

$$k \cdot r < j \qquad \wedge \qquad j+1 \leqslant (k+1)\cdot r$$

што следи из чињенице $[kr] \neq j$ и $[(k+1)r] \neq j$.
Аналогно важи

$$m \cdot s < j \qquad \wedge \qquad j+1 \leqslant (m+1)\cdot r$$

Како су r и s ирационални бројеви, даље следи

$$k{\cdot}r < j \qquad \wedge \qquad j{+}1 < (k{+}1){\cdot}r \qquad \wedge \qquad m{\cdot}s < j \qquad \wedge \qquad j{+}1 < (m{+}1).$$

Дељењем са r односно s горњих неједнакости, даље следи

$$k < \frac{j}{r} \qquad \wedge \qquad \frac{j+1}{r} < k+1 \qquad \wedge \qquad m < \frac{j}{s} \qquad \wedge \qquad \frac{j+1}{s} < m+1$$

Сабирањем одговарајућих неједнакости и коришћењем чињенице $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ добијамо

$$k+m < j \qquad \wedge \qquad j+1 < k+m+2$$

тј.

$$k+m < j < k+m+1$$

што је контрадикција. Овим смо потпуно доказали теорему.

Закључак: сваки позитиван цео број (што је свака позиција у скупу) је претстављен у форми $[nr]$ или у форми $[ns]$, али не у обе. Обрнута тврдња је такође тачна: Ако су p и q реални бројеви такви да важи да је позитиван цео број садржан у горе наведеним скуповима, онда су p и q ирационални и сума њихових реципрочних вредности је 1.

Примери:

- За $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $s = r + 1$ важи да је скуп $([nr])$
  - {1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, ...}
    и дисјунктни скуп $([ns])$ је
  - {2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47,...}
- За $r = \sqrt{2}$ и $s = 2 + \sqrt{2}$ скупови су:
  - {1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24,...}
  - {3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, 51, 54, 58,...}
- За $r = \pi$ и $s = \dfrac{\pi}{(\pi - 1)}$ скупови су:
  - {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 47, 50, 53,...}
  - {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 26,...}

Примећујемо да сваки број из првог низа не може бити садржан у другом и обрнуто.

На самом крају дајемо низ задатака за чије решавање је потребно сво градиво које смо обрадили у овом раду. Ту ће се наћи задаци који су били на разним математичким такмичењима и олимпијадама, као и задаци који су у своје време представљали отворене математичке проблеме. Задаци су тешки и често сложени, тако да их препоручујемо оним ученицима који имају амбиције, и желе да науче нешто више. За решавање сваког задатка потребна је добра идеја, као и познавање техничких рутина, тј. свих потребних теориских знања и њихова примена. Надамо се да ће сваки читалац наћи нешто по свом укусу.

З а д а ц и:

1. Доказати:

   (а) Ако је x ирационалан број, тада је скуп $X_n = \{\{nx\}|n \in \mathbb{N}\}$ свуда густ у $[0,1]$;

   (б) Неку су $a, b \in \mathbb{N}, a \neq 10^k$, за свако $k \in \mathbb{N}$. Тада постоји $l \in \mathbb{N}$ такво да је a^l почиње са b у децималном запису.

Решење:

(а) Довољно је доказати да за дато фиксирано $q \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{N}$ тако да је $0 < p < q$, да ће за неко n, X_n припасти интервалу $\left(\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right)$. Тако фиксирано q одређује поделу интервала $(0,1)$ на $\left[0, \frac{1}{q}\right), \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right), \ldots$ дужине $\frac{1}{q}$. Постоје n, n' тако да $X_n, X_{n'}$ припадају истом интервалу. то значи да $\{(n'-n)x\}$ мање од $\frac{1}{q}$.
Ако издвојимо подниз $X_{km}, m = (n'-n)$ датог низа, тај подниз ће пролазити кроз интервале док не упадне у $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right]$.
Узимамо такво q довољно велико да $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right] \subset r \pm \epsilon$.

(б) Да a^l почиње са b, што значи

$$\exists j \in \mathbb{N}, \quad b10^j \leqslant a^l \leqslant (b+1)10^j \quad |\log$$

$$j + \log b \leqslant l \log a \leqslant j + \log(b+1)$$

$\Rightarrow \log a$ је ирационалан број јер је $a \neq 10^k$.
$\Rightarrow \Big(\{\log b\}, \{\log(b+1)\}\Big) \subset [0,1]$, по Кронекеру
$(\{l\alpha\} \in \mathbb{N}$ је густ у $[0,1])$ па $\exists l$ тако да

$$\{l\alpha\} \in \Big(\{\log b\}, \{\log(b+1)\}\Big).$$

Са друге стране $[l\alpha] \in \mathbb{N}$ и интервал $\Big([\log b], [\log(b+1)]\Big)$

можемо проширити $\left([\log b]+j,[\log(b+1)]+j\right)$ тако да садржи $[l\alpha]$.

2. Доказати да скуп $\{[n\sqrt{2}] \quad |n \in \mathbb{N}\}$ садржи бесконачно много елемената који су природни степени броја 2.

Решење:

По Кронекеру постоји бесконачно много n, тако да је $\{2^n\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\}$. Изаберемо такво n. Ако је $m = [2^n\sqrt{2}]$, следи $2_n\sqrt{2}-1 < m < 2_n\sqrt{2}-\frac{1}{2}$, па је $2^{n+1} < (m+1)\sqrt{2} < 2^{n+1}+1$ илити $[(m+1)\sqrt{2}] = 2^{n+1}$.

3. Доказати да скуп $\{[n\sqrt{2}] \quad |n \in \mathbb{N}\}$ садржи бесконачно много елемената који су потпуни квадрати.

Решење:

Нека су низови $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ дефинисани са $a_1 = b_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2b_n, b_{n+1} = 4a_n + 3b_n$. Тада важи $(\forall n), 2a_n^2 - b_n^2 = 1$. Јасно је да важи $2a_1^2 - b_1^2 = 1$. Нека је тврђење тачно за n. Тада је

$$2a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = 2(3a_n+2b_n)^2 + (4a_n+3b_n)^2 = 2a_n^2 - b_n^2 = 1.$$

Тиме је тврђење доказано индукцијом и следи да горња једначина има бесконачно много решења. Даље следи $2(a_nb_n)^2 = b_n^4 + b_n^2$, одакле је $b_n^2 < \sqrt{2}(a_nb_n) < b_n + 1$, односно $[a_nb_n\sqrt{2}] = b_n^2$. Овим је доказано тврђење задатка.

4. Нека су m и n изајамно прости бројеви, $m, n \geq 2$. Доказати да за скупове $A = \left[\dfrac{k(m+n)}{m}\right], 1 \leqslant k \leqslant m-1$ и $B = \left[\dfrac{k(m+n)}{n}\right], 1 \leqslant k \leqslant n-1$ важи $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{1, 2, ..., m+n-2\}$.

Решење:

Како важи $\dfrac{m+n}{m} > 1, \dfrac{m+n}{n} > 1$, следи

$$1 \leqslant \left[\frac{m+n}{m}\right] < \left[\frac{(m-1)(m+n)}{m}\right] = [m+n-\frac{m+n}{m}] < m+n-1$$

и

$$1 \leqslant [\frac{m+n}{n}] < [\frac{(n-1)(m+n)}{n}] = [m+n-\frac{m+n}{n}] < m+n-1$$

па је $A \cup B = \{1, 2, ..., m+n-2\}$. Како је $|A|+|B| = m+n-2$, довољно је доказати да је $A \cap B = \emptyset$. У супротном би постојао природан број x, такав да важи $x \leqslant \frac{k(m+n)}{n} < x+1$, $x \leqslant \frac{l(m+n)}{m} < x+1$, за неко $k, l \in \mathbb{N}$. Дељењем предходних неједнакости са $\frac{m+n}{m}$ и $\frac{m+n}{n}$, редом, и сабирањем, добија се $x \leqslant k+l < x+1$, па како је $k = l \in N$, следи $k+l = x$. Дакле, важи $\frac{mx}{m+n} < k$ и $x-k \geqslant \frac{nx}{m+n} = x - \frac{mx}{m+n}$, одакле је $k = \frac{mx}{m+n}$, тј. $kn = m(x-k)$, што је немогуће, јер су m и n узајамно прости.

5. Нека су p и q узајамно прости природни бројеви. Наћи све $c, d \in R$, тако да за скупове $A = \left[\frac{np}{q}\right] | n \in \mathbb{N}$ и $B = \left[cn+d\right] | n \in \mathbb{N}$ важи $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$.

Решење:

Мора бити $p > q$. Иначе је $\frac{p}{q} < 1$, па је $0 = \left[\frac{p}{q}\right] \in A$, што је контрадикција. Предпоставимо да постоје тражени c и d. Тада важи $|A \cap \{1, 2, ..., kp\}| = kp$, јер је $\left[\frac{np}{q}\right]$ растућа функција по n и $\left[\frac{kq \cdot p}{q}\right] = kp$. Следи да је $|B \cap 1, 2, ..., kp| = k(p-q)$. Како је $\frac{p}{q} > 1$, важи $kp-1 \notin A$, тј. $kp-1 \in B$, па се добија $\left[ck(p-q)+d\right] = kp-1$, односно $kp-1 \leqslant ck(p-q)+d < kp$, што је еквивалентно са $p - \frac{1}{k} \leqslant c(p-q) + \frac{d}{k} < p$. Када k тежи бесконачно, други члан у последњој неједнакости тежи ка $c(p-q)$, а први и трећи ка p, па по леми о два полицајца, важи $c = \frac{p}{p-q}$. Из горње везе, за $k = 1$, следи $-1 \leq d < 0$. Нека је $d = -\frac{1}{p-q}$ и нека $m \in A \cap B$. Тада

важи $m \leqslant \dfrac{kp}{q} < m+1$, $m \leqslant \dfrac{lp-1}{p-q} < m+1$, што је еквивалентно са $\dfrac{q}{p}m \leqslant k < (m+1)\dfrac{q}{p} \wedge \dfrac{(p-q)}{p}m \leqslant l - \dfrac{p-q}{p} < (m+1)\dfrac{p-q}{p}$, одкле се сабирањем добија $m \leqslant k+l-\dfrac{p-q}{p} < m+1$, па како је $0 < \dfrac{p-q}{p} < 1$, $k+l, m, m+1 \in \mathbb{N}$, следи $k+l = m+1$. То значи да важи $\dfrac{kp}{q} < m+1 \wedge \dfrac{(m+1-k)p-1}{p-q} < m+1$, односно $q(m+1)-1 < kp < q(m+1)$, тј. цео број kp се налази између два узастопна цела броја, што је контрадикција. Следи да пар $(c,d) = (\dfrac{p}{p-q}), (-\dfrac{1}{p-q})$ задовољава тражену особину.
Како је $(p,q) = 1$, следи $(p, p-q) = 1$, па постоји $l \in N, 1 \leqslant l \leqslant p-q-1$, такво да важи $lp \equiv 1(mod(p-q))$ па је $\dfrac{lp}{p-q} + d = \dfrac{lp-1}{p-q} + (d + \dfrac{1}{p-q})$. Тада је $\dfrac{lp-1}{p-q}$ цео број. Како је $-1 \leqslant d < 1$ и $\dfrac{p}{p-q} > 1 + \dfrac{1}{p-q}$, следи $\dfrac{lp-1}{p-q} - 1 \in A$, па мора бити $d \leqslant -\dfrac{1}{p-q}$. Како је $\dfrac{np}{p-q} \geqslant \dfrac{1}{p-q}$ за $n \in \{1,2,...,p-q-1\}$, следи да је тражени услов испуњен акко $c = \dfrac{p}{p-q}, d \in [-\dfrac{1}{p-q}, 0)$.

6. Нека је $f(x) = [n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}]$. Доказати да скупове $A = \{f(x) | n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ важи $A \cap B = \varnothing$ празан скуп , $A \cup B = \mathbb{N}$.

Решење:

Функција f је растућа. Нека је $k \notin A$. Тада постоји $n \in \mathbb{N}$, тако да важи $n+\sqrt{n}+\dfrac{1}{2} < k$ и $k+1 \leqslant n+1+\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}$, одакле се добија

$$\sqrt{n} < (k-n) - \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{n+1}.$$

Ако је $l = k-n$, следи $n < l^2 - l + \dfrac{1}{4} \leqslant n+1$, па како је $l^2 - l \in \mathbb{N}$, следи $n = l^2 - l$ и $k = n + l = l^2$.
Обрнуто, ако је $k = l^2$, тада за $n = l^2 - l$ важи

$$n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} = l^2 - l + \sqrt{l^2 - l} + \frac{1}{2} =$$

$$l^2 - l + \sqrt{(l-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} < l^2 - l + l - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = l^2$$

и

$$n + 1 + \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} =$$

$$l^2 - l + 1\sqrt{l^2 - l + 1} + \frac{1}{2} =$$

$$l^2 - l + 1 + \sqrt{(l-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} > l^2 - l + 1 + l - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = l^2 + 1,$$

па $k = l^2 \notin A$.
Овим је добијено тврђење задатка.

7. Нека је $f(n) = [n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2}]$. Доказати да за скупове $A = \{f(n)|n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{n^2|n \in \mathbb{N}\}$ важи $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{N}$.

Решење:

Функција f је растућа. Нека $k \notin \mathbb{N}$. Тада постоји $n \in \mathbb{N}$, такво да важи $n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2} < k$ и $k + 1 \leqslant n + 1 + \sqrt{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{2}$, одакле се добија $\sqrt{n} < \sqrt{3}(k-n) - \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sqrt{n+1}$. Ако је $l = k - n$, следи $n < 3l^2 - 3l + \frac{3}{4} \leqslant n + 1$, па како је $3l^2 - 3l \in \mathbb{N}$, следи $n = 3l^2 - 3l$ и $k = n + l = 3l^2 - 2l$.
Обрнуто, ако је $k = 3l^2 - 2l$, тада за $n = 3l^2 - 3l$ важи $n + \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 3l + \sqrt{\frac{3l^2 - 3l}{3}} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 3l + \sqrt{(l - \frac{1}{2}^2) - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} < 3l^2 - 3l + l - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 2l$ и $n + 1 + \sqrt{\frac{n+1}{3}} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 3l + 1 + \sqrt{\frac{3l^2 - 3l + 1}{3}} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 3l + 1 + \sqrt{(l - \frac{1}{2}^2) + \frac{1}{12}} + \frac{1}{2} > 3l^2 - 3l + 1 + l - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3l^2 - 2l + 1$,
па $k = 3l^2 - 2l \notin A$.
Овим је добијено тврђење задатка.

Литература

[1] В.Мићић, З.Каделбург, Д.Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Друштво математичара Србије, Београд 2013.

[2] *Математика, Општа енциклопедија LaRousse*, Вук Караџић, Београд 1973.

[3] Ж.Ивановић, С.Огњановић, *Математика, Збирка задатака и тестова за 4. разред гимназија и техничких школа*, Круг, Београд 2010.

[4] Д.Аднађевић, З.Каделбург, *Математичка анализа*, Математички факултет, Београд 2004.

[5] Л. Хогбен,*Стварање математике*,Вук Караџић, Београд 1972.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence

[7] Д. Георгијевић, М. Обрадовић, *Математика за 1. разред средње школе*, Завод за уџбенике, Београд 1994.

[8] J.Стеудинг, *Диофантова анализа*, Универзитет у Франкфурту, 2002/03.

[9] http://www.dms.rs/DMS/html/takmicenja/matematika/srednje.html

[10] https://personal.pmf.uns.ac.rs/nenad.teofanov/wp-content/uploads/sites/17/2015/03/drugo-pred.pdf

[11] В.Балтић, Д.Светановић, М.Милошевић *Дискретна математика*, Београд 2004.