Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад

Математика у Месопотамији

Студент:
Јована Лазовић

Ментор:
Проф. др Зоран Лучић

Април, 2016.

Садржај

1 Сажетак

Тема овог рада јесте математика у Месопотамији и начин решавања математичких проблема из области аритметике, алгебре, геометрије и теорије бројева током другог и трећег миленијума пре нове ере. Рад је подељен у 8 поглавља.

У поглављу **2** дат је кратак садржај рада и постављена су кључна питања у вези са вавилонском математиком на која ће се наћи одговор надаље у раду.

У поглављу **3** је детаљно описан хексагезимални бројевни систем који су користили Вавилоњани, као и начин представљања целих бројева и разломака у овом систему. Осим тога, описан је и начин настанка поменутог бројевног система са основом 60.

У поглављу **4** су описане технике рачунања којих су се придржавали Вавилоњани и примена нумеричких таблица. Дати су примери таблица множења, потом инверзних и мешовитих, као и таблица квадрата и кубова бројева.

У поглављу **5** је описана такозвана реторичка алгебра уз детаљно објашњених девет примера који су преузети из старовавилонских текстова. Примери илуструју решавање квадратних и кубних једначина и система једначина. У поглављу су кратко поменути и геометријски докази појединих алгебарских формула.

У поглављу **6** је описана геометрија у Месопотамији, уз наведене обрасце за израчунавање површина и запремина геометријских тела и равних фигура, као и претпоставке на који начин су Вавилоњани дошли до њих. Након тога, дат је пример који показује коришћење Питагорине теореме.

У поглављу **7** се посебно показује спретност Вавилоњана у примени бројева за изградњу две фамилије низова. Осим тога, даје се детаљно тумачење старовавилонског текста „Плимптон 322”, на основу којег је откривено да су Вавилоњани знали за мноштво такозваних Питагориних тројки.

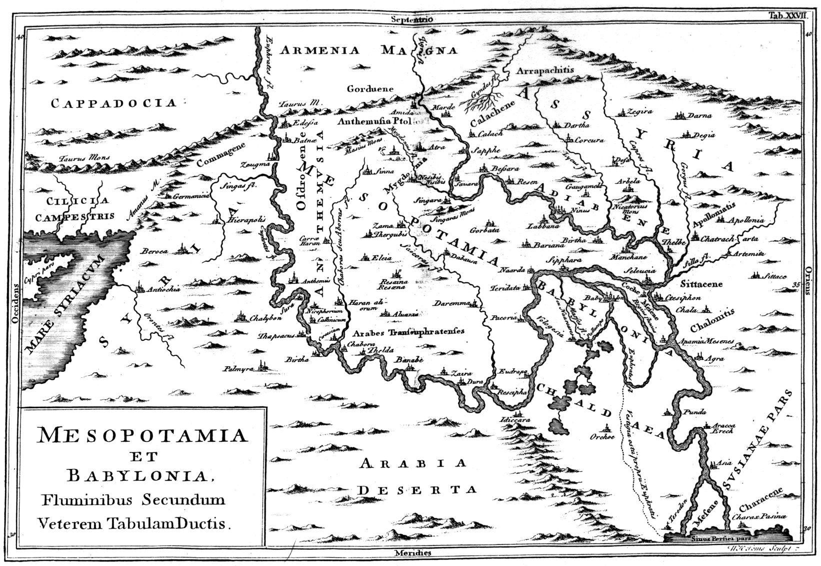
У поглављу **8** дат је кратак осврт на то колико су цивилизације ве-

ковима заиста задржале вавилонски дух размишљања и да ли се такав начин расуђивања нешто битно разликује од данашњег. Разматрано је још шта нам је ова изванредна цивилизација оставила у аманет из области математике, а шта смо, ипак, решили да променимо.

2 Увод

Најстарија позната урбана и писмена култура у свету развијена је у равници између двеју река, Еуфрата и Тигра, у држави Месопотамији (што би дословно преведено са грчког језика значило ,,земља између двеју река") почетком четвртог миленијума пре нове ере. Овде су пронађена најстарија археолошка открића и трагови градова, па је Месопотамија са правом названа ,,колевком човечанства".

Од првих почетака култура Месопотамије поседује знатна знања из различитих области, као што су астрономија, филозофија, религија, пољопривреда, сточарство, наводњавање... Међутим, величанствен допринос ове цивилизације развоју математичког резоновања, чија се снага огледа у рачунању и аритметици, као и у геометрији, подстакао је израду овог рада.



Слика 1: Месопотамија и Вавилон

У поглављима која предстоје биће прилично детаљно описана математика старе Месопотамије, она која је записана клинастим писмом, без обзира на то потиче ли од Сумераца, Вавилоњана, Асираца, Акађана или којег другог народа који је у појединим раздобљима обитавао на деловима тог подручја. Због историјског значаја који је постигао град Вавилон, термини ,,Вавилоњани" и ,,вавилонска математика" користиће се у овом раду врло често да означе све наведене народе Месопотамије и њихова достигнућа у различитим математичким областима.

Да би се разумела висока нумеричка техника, међу почетним поглављима рада биће објашњен настанак клинастог писма и нумеричких ознака које су битне за даље разматрање, као и начин на који је изграђен хексагезимални бројевни систем са основом шездесет, којим су се Вавилоњани вековима служили. Посебна пажња биће посвећена начину записивања бројева пропраћена илустрацијама, таблицама и одговарајућим примерима. Осим величања оваквог начина записивања бројева и навођења свих његових предности, биће дат и критички осврт у виду проналажења недостатака у поменутом бројевном систему.

Надаље, пажња ће бити посвећена добро изграђеној алгебри која се развила из аритметике, у време када је у Вавилонији владао цар Хамураби. Египћани су у то време били у стању да решавају само једноставније линеарне једначине, док су Вавилоњани потпуно владали техником решавања квадратних једначина. Они су решавали линеарне и квадратне једначине са две непознате, као и задатке који се своде на кубне и биквадратне једначине. У тим задацима налазе се само одређене вредности коефицијената, али се на основу метода који су примењивали вавилонски математичари може закључити да су знали и за општа правила.

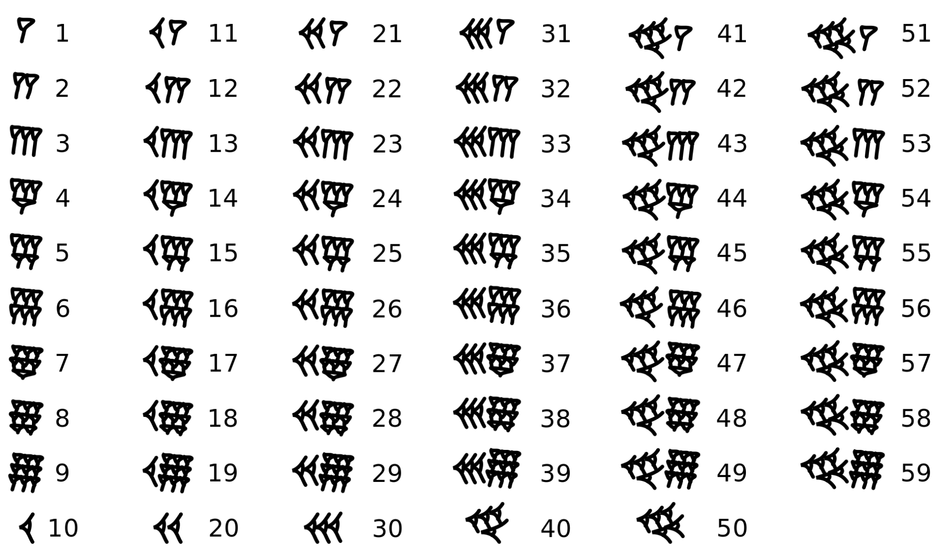
Аритметичко-алгебарски карактер вавилонске математике, који је био нарочито наглашен, долазио је до изражаја и у геометрији. И овде, као и у Египту, геометрија се развијала на основу практичних задатака мерења, а геометријска форма задатака обично је био само повод да се постави алгебарско питање. У раду се, на пример, може пронаћи задатак који се односи на површину квадрата, а заправо се своди на нетривијалан алгебарски проблем. У вавилонској геометрији су још биле познате формуле за израчунавање површина једноставнијих равних фигура и запремина тела. Такозвана Питагорина теорема је, такође, била позната, и то не само примењена на конкретне случајеве, већ и у општем облику, а прича о томе ће заузети посебно место у раду.

Оно што посебно изненађује јесте чињеница да су Вавилоњани баратали појмовима којима нису могли овладати ни најумнији људи старог доба. То је појам коначног збира бесконачног броја сабирака. Општи облици таквих збирова су концизно изражавали својства геометријских ликова једне, двеју и трију димензија. Наиме, две фамилије низова које су биле познате Вавилоњанима око 2000. године п.н.е. илуструју то веома уверљиво. Једна од њих обухвата троугаоне и тетраедарске бројеве, друга квадратне и пирамидалне бројеве. На који начин су их користили и за шта су им служили такви низови биће детаљно објашњено у раду.

3 Хексагезимални бројевни систем

Семитски Вавилоњани су хексагезимални (сексагезимални или шездесетични) бројевни систем наследили од својих претходника Сумераца. Сумерци, изванредна културна група, која је и измислила клинасто писмо, владали су јужном Месопотамијом током трећег миленијума пре нове ере. Њихови најстарији текстови датирају из прве династије Ура, која је цветала око 3000. године п.н.е.

Сумерска цивилизација била је надвладана од стране семитског народа, Акађана, који су насељавали далеки север. Временом су Семити постајали доминантнији и око 1792. године п.н.е. Хамураби, велики законодавац и владар прве вавилонске династије, могао је себе да назове краљем Сумераца.

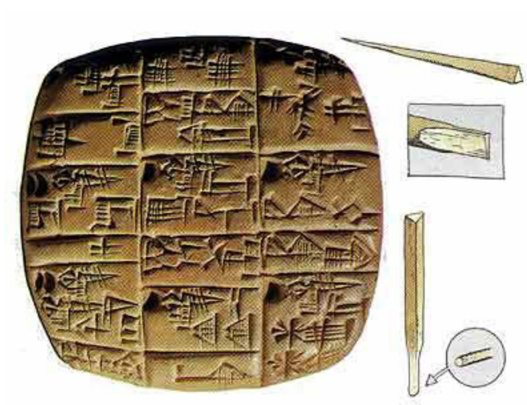


Слика 2: Бројеви од 1 до 59 исписани клинастим писмом

Хексагезимални систем наслеђен од Сумераца представља позициони бројевни систем са основом 60. Ако се бројеви пишу у позиционом систему са основом 60, јасно је да треба имати ознаке за бројеве до 59 (као што у нашем декадном систему треба имати ознаке за бројеве до 9).

Међутим, Вавилоњани нису били толико неспретни да би измишљали шездесет различитих знакова (од 0 до 59), већ су поступили другачије. Сваки од тих бројева исписали би само помоћу две врсте знакова: једног усправног, уског отиска клина за сваку јединицу и једног тупог отиска клина са два краја за сваку десетицу (слика 2). Оба знака настала су притиском гвозденог клина на свежу глинену плочу. Верује се да су касније гвоздени клинови замењени клиновима од трске ради лакшег коришћења (слика 3).

На тај начин, симбол $\prec\prec\prec\ \substack{\Upsilon\Upsilon\Upsilon\\ \Upsilon\Upsilon}$ представља број 35, а симбол $\Upsilon\Upsilon$ представља број 2.



Слика 3: Глинена плочица и клин за писање

Другим речима, они су поједине бројеве хексагезималног система исписивали адитивно у декадном систему. Објаснимо то мало ближе на једном примеру. На слици видимо низ отисака клинова, уских вертикалних и тупих хоризонталних (слика 4).

Слика 4: Клинастим писмом исписан број 424000

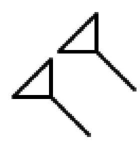
Последњи скуп (слева на десно) таквих отисака садржи четири тупа отиска; дакле, представља број 40 и даје толико јединица. Лево уз њега је скуп од четири тупа и шест оштрих отисака, односно ознака за број 46. Међутим, с обзиром на позицију тог скупа, он представља 46 шездесетица, то јест број $46 \cdot 60 = 2760$. Следећи скуп симбола ка лево састоји се од пет тупих и седам оштрих отисака и представља број 57. Но, с обзиром на позицију тог скупа, он заправо представља $57 \cdot 60^2 = 205200$. Коначно, последњи, тј. први скуп слева садржи само један оштар отисак. Но, опет, с обзиром на своју позицију, представља број $1 \cdot 60^3 = 216000$. Нацртани низ ознака означава, дакле, број $40 + 2760 + 205200 + 216000 = 424000$. Не треба учинити грешку и помислити да је такво представљање битно ,,неспретније"од нашег. Вавилоњани су радили са хексагезималним системом и њима је запис приказан на слици био исто тако читак и сугестиван као нама запис броја 424000.

На основу претходног примера видимо да вредност симбола зависи, као и у нашем савременом систему, од позиције симбола у броју; већи степени броја 60 смештени су на почетку, мањи на крају записа броја. Отуда назив позициони систем бројева.

По договору, хексагезималне бројеве нећемо записивати као што је то пракса у декадном систему, већ ћемо различите степене броја 60 раздвајати запетама. На пример, са $1, 24$ означаваћемо број $1 \cdot 60 + 24$, односно 84, док 424000 из претходног примера можемо записати као $1, 57, 46, 40$.

У време када је први пут употребљен хексагезимални систем, па и доста касније, означавање бројева имало је значајни недостатак - није постојала посебна ознака за нулу. То је могло довести до неспоразума јер се, на пример, низ од три оштра отиска клина и два тупа могао читати као $3 \cdot 60 + 20$, но, могао се у начелу читати и као $3 \cdot 60^2 + 20$ или $3 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60$ итд. Тек се из контекста читавог рачуна видело које је читање исправно (када видимо број 2000 на мајици у излогу, знамо да не кошта 2000 пара), али у теорији тај проблем може бити врло непријатан. Та чињеница је тим пре тачна јер нам запис не дозвољава да разликујемо $3, 0, 20$ и $3, 20$. Касније су Вавилоњани тај недостатак донекле ублажили тиме што би на месту између група отисака, где би требало да стоји нула, оставили већи размак. Тек много касније, у време персијске епохе (6. век п.н.е.), заменили су га посебним знаком за нулу (слика 5). Такозвано ,,откриће нуле" дошло је као логичка последица увођења позиционог система, али на њега се морало чекати све док се техника рачунања није довољно усавршила.

Ваљало би нагласити да порекло наше нуле није у Месопотамији, већ у старој Индији. То што су се баш Индијци досетили потреби посебног знака за "ништа" можда је у вези са њиховом филозофијом у којој "ништа", иако у много ширем и дубљем значењу, има изузетно значајну улогу.



Слика 5: Посебан знак за нулу употребљен тек у 6. веку п.н.е.

Занимљиво је и ово: уз математичко адитивно писање бројева, Вавилоњани су употребљавали и посебан знак за реч ,,лал", са значењем ,,одузети", који је имао сличну улогу као, на пример, код римских бројева стављање знака за мањи број испред знака за већи. Наиме, ако би се тај знак нашао између два тупа и једног оштрог отиска, скуп таквих ознака би значио ,,двадесет минус један", тј. деветнаест. Очигледно, било је лакше и брже написати број 19 на такав начин, помоћу укупно пет отисака клина, него чисто адитивно, с једним тупим и девет оштрих. Но, на пример, број 16 се није писао као $20 - 4$, него чисто адитивно, што је и разумљиво, јер се користи мање отисака. Околности су, посве, аналогне као код римских бројева, где се, на пример, пише IV, не IIII, али се не пише IIV, него III.

3.1 Хексагезимални разломци

Вавилоњани су и разломке писали у хексагезималном запису. Наиме, како су се групе клинастих симбола множиле бројем 60, тако су се истима и делиле. Тако је симбол за јединицу могао да има вредност $1 \cdot 60^0$, $1 \cdot 60^1$, $1 \cdot 60^2$ и слично, али је такође могао значити $1 \cdot 60^{-1}$, односно $\frac{1}{60}$ или $1 \cdot 60^{-2}$, тј. $\frac{1}{60^2}$. Разломци $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ и $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ су се онда представљали симболима за 30, 20 и 12, респективно. По договору, у запису ћемо користити тачку-зарез (;) у сврху данашњег децималног зареза, на пример

$$1,3;30 = 1 \cdot 60^1 + 3 \cdot 60^0 + 30 \cdot 60^{-1} = 63\frac{1}{2}$$

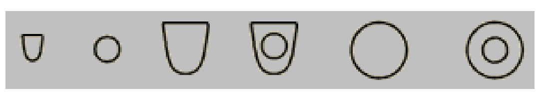
или

$$1;3,30 = 1 \cdot 60^0 + 3 \cdot 60^{-1} + 30 \cdot 60^{-2} = 1 + \frac{3}{60} + \frac{3}{60^2} = 1\frac{7}{120}.$$

Интересантно је нагласити да је грчки астроном Птоломеј за своје прорачуне користио симбол 0 за нулу и тиме комплетирао хексагезимални позициони систем. У овом смислу постао је готово еквивалентан нашем декадном систему. Тачно је да је Птоломеј целе бројеве писао у декадном, а само разломке у хексагезималном систему, али је то мање важно јер једва да су му били потребни велики цели бројеви.

3.2 Како је настао хексагезимални систем

Сумерци првобитно нису имали систематичан позициони систем за све степене броја 60 и његове умношке. Поседовали су следеће симболе (слика 6):



Слика 6: Симболи за бројеве 1, 10, 60, 600, 3600 и 36000, редом (рани сумерски период, 3000 год. п.н.е)

Симболи за 1, 10 и 60 направљени су мањим цилиндричним крајем клина; за јединицу клин се држао косо, док се за израду симбола броја 10 држао усправно. Симбол за број 600 је комбинација симбола за 10 и 60. Бројевни систем се завршавао симболом за 36000, који се добијао као комбинација симбола за 10 и 3600. Тек касније симболи су личили на клинове и настали су утискивањем оштрих шила у глину (слика 7).

Симбол за 60 био је исти као за јединицу, али незнатно већи. Очигледно се на 60 гледало као на неку ,,већу јединицу". Чињеница да су 1 и 60 представљени истим симболом основни је принцип позиционог записа.

Слика 7: Симболи за бројеве 1, 10, 60, 600, 3600 и 36000, редом (касни сумерски период, 2000 год. п.н.е)

Ово нас води на размишљање о томе шта је довело до тога да се баш 60 одабере за основу система и зашто се број 60 представљао као ,,велика јединица". Можда величина основе није велики проблем, колико је то принцип у записивању бројева хексагезималног система, како код целих, тако и код разломака. Постоје оправдани разлози за претпоставку да је број 60 изабран за основу система јер се може изразити помоћу степена три проста фактора 2, 3 и 5, односно јер има чак десет правих делилаца: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 и 30.

Са приличном се сигурношћу може тврдити да је главни разлог што су Вавилоњани прихватили хексагезимални систем био у њиховим врло развијеним астрономским мотрењима. Година има близу 360 дана; то је 6 пута 60. И кружницу је лако поделити на шест једнаких делова, па ако сваки од њих поделимо на шездесет (како бисмо ми то рекли) степени, тиме ће кружница бити подељена на онолико делова колико има дана у години. Овој теорији би могло бити приговорено да је чудно што су се тако вешти посматрачи неба задовољили грубом апроксимацијом године од 360 дана, која заправо има 365 и једну четвртину дана. Међутим, овај приговор и нема неку тежину ако се зна да је још за време краљевства Ур (друга половина 3. миленијума п.н.е.) вавилонски календар делио годину на 12 месеци по 30 дана; потребне корекције уводиле су се уклапањем тринаестог месеца у ,,преступним" годинама. Остаје, дакле, готово сигурно да је астрономија та због које се у Месопотамији развио хексагезимални систем.

Без обзира на начин постанка, хексагезимални систем и позициони бројевни систем постали су трајна својина човечанства. Наша савремена подела часа на 60 минута, односно 3600 секунди, потиче од Сумераца, исто као и наша подела круга на 60 степени, степена на 60 минута и минута на 60 секунди.

Након заокружене целине о хексагезималном систему и претпоставке да је декадни бројевни систем настао и развио се због бројања и рачунања на прсте руку, можемо још само да се запитамо: да ли би нам за практичне потребе писања била погоднија нека друга основа уместо броја 10? Можда она не би смела бити премала, јер би тада за исписивање и релативно малих бројева требало и превише цифара. Пример за то је бинарни систем са основом 2 у ком се, на пример, број 1024 записује као јединица и иза ње десет нула. Са друге стране, можда би основа 12 била боља од основе 10, јер је 12 дељиво са 2, 3, 4 и 6 (а 10 само са 2 и 5), па би то у практичном рачунању имало значајних предности. Ипак, декадни бројевни систем је толико раширен и има толику традицију да нема изгледа да се стварно и замени.

За израду овог поглавља коришћена је литература [2], [3] и [5].

4 Аритметика у Месопотамији

4.1 Технике рачунања старих Сумераца

Највећи број текстова древних Сумераца, на основу којих је и откривен њихов бројевни систем, који датира из времена владара Шулги (око 2000 година п.н.е.), биле су таблице инверзних бројева и таблице множења. Таблице са писмом су се појављивале одвојено или у комбинацији са наведеним. Једна од основних таблица старих Вавилоњана била је таблица за хексагезимални „један пута један" (производи од $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$). Када узмемо у обзир да су рачунали у систему са основом 60, тај мали „један пута један" и није био тако мален. Наиме, нама је за множење и дељење у декадном систему довољно да знамо умношке бројева до девет пута девет, а то није тешко научити напамет. Међутим, требало је да онда Вавилоњани знају све умношке бројева до $59 \cdot 59$, свега њих 1770 (ако знамо да је $A \cdot B = B \cdot A$), а то би било превише тешко научити напамет. Зато су Вавилоњани и употребљавали таблице.

Слика 8: Пример школске таблице „један пута један"из 18. века п.н.е.

Сачуване глинене плочице са клинастим писмом показале су нам, међутим, да се Вавилоњани нипошто нису задовољавали таблицама за мали ,,један пута један". Употребљавали су, рецимо, оне у којима су били исписани умношци само једног броја. Таква су следећа два примера у табели 1 (очигледно, ,,а-ра" значи ,,пута"):

7 а-ра 1	7	16, 40 а-ра 1	16, 40
7 а-ра 2	14	16, 40 а-ра 2	33, 20
7 а-ра 3	21	16, 40 а-ра 3	50
. . .		. . .	
7 а-ра 19	2, 13	16, 40 а-ра 19	5, 16, 40
7 а-ра 20	2, 20	16, 40 а-ра 20	5, 33, 20
7 а-ра 30	3, 30	16, 40 а-ра 30	8, 20
7 а-ра 40	4, 40	16, 40 а-ра 40	11, 6, 40
7 а-ра 50	5, 50	16, 40 а-ра 50	13, 53, 20

Табела 1: Умнош ци бројева 7 и $16, 40$

Често се дешавало да се неколико оваквих малих табли комбиновало са таблицама инверзних бројева и таблицама квадрата, у форми великих табли. Да бисмо разумели уређење такозваних ,,комбинованих таблица", требало би прво да обратимо пажњу на једну са инверзним бројевима.

Следи један пример такве таблице из доба Селеукида[1], вероватно уређене од стране астронома. Једна од њих је уређена на следећи начин:

$$1 : 1 = 1$$

$$1 : 1, 0, 16, 53, 53, 20 = 59, 43, 10, 50, 52, 48$$

$$1 : 1, 0, 40, 53, 20 = 59, 19, 34, 13, 7, 30$$

$$1 : 1, 0, 45 = 59, 15, 33, 20$$

$$1 : 1, 1, 2, 6, 33, 45 = 58, 58, 56, 38, 24.$$

[1]Селеукидско царство (323 - 60. год. п.н.е.) је једно од три велика хеленистичка царства створена после смрти Александра Македонског

На овај начин таблица се наставља на седам страна у Нојгебауеровим[2] преводима математичких текстова на клинастом писму, све до

$$1 : 3 = 20.$$

Старије таблице инверзних бројева нису толико обимне. Оне обично садрже реципрочне вредности бројева између 1 и 81, а који садрже само факторе 2, 3 и 5 и који, стога, могу бити записани као коначни хексагезимални разломци као у табели 2.

$1 : 2 = 30$	$1 : 16 = 3, 45$	$1 : 45 = 1, 20$
$1 : 3 = 20$	$1 : 18 = 3, 20$	$1 : 48 = 1, 15$
$1 : 4 = 15$	$1 : 20 = 3$	$1 : 50 = 1, 12$
$1 : 5 = 12$	$1 : 24 = 2, 30$	$1 : 54 = 1, 6, 40$
$1 : 6 = 10$	$1 : 25 = 2, 24$	$1 : 1 = 1$
$1 : 8 = 7, 30$	$1 : 27 = 2, 13, 20$	$1 : 1, 4 = 56, 15$
$1 : 9 = 6, 40$	$1 : 30 = 2$	$1 : 1, 12 = 50$
$1 : 10 = 6$	$1 : 32 = 1, 52, 30$	$1 : 1, 15 = 48$
$1 : 12 = 5$	$1 : 36 = 1, 40$	$1 : 1, 20 = 45$
$1 : 15 = 4$	$1 : 40 = 1, 30$	$1 : 1, 21 = 44, 26, 40$

Табела 2: Таблица инверзних бројева

Одговарајуће таблице множења не садрже само умношке бројева 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, као што се и очекује у обичним таблицама множења, већ и умношке неколико других бројева који се записују помоћу две или три цифре. Таква је, на пример, таблица дата табелом 3.

Шта одређује избор ових бројева? Многи од њих се већ јављају у претходној таблици инверза, а други су, осим броја 7, инверзи неких простих бројева. Ако обратимо пажњу на организацију ових бројева и постепено смањење њихових вредности, приметићемо да је такав заправо и редослед реципрочних бројева у таблици инверза. Стога видимо да таблице множења не дају само резултате производа $a \cdot b$, већи производа облика $a \cdot b^{-1}$, тј. дељења $a : b$.

Проблем може бити дефинисан на следећи начин: комбиноване таблице инверзних бројева и умножака користиле су се за множење бро-

[2] Otto Eduard Neugebauer, (1899-1990), аустријско-амерички математичар и историчар

50	24	12	6, 40	2, 30
48	22, 30	10	6	2, 24
45	20	9	5	2, 24
44, 26, 40	18	8, 20	4, 30	2
40	16, 40	8	4	1, 40
36	16	7, 30	3, 45	1, 30
30	15	7, 12	3, 20	1, 20
25	12, 30	7	3	1, 15

Табела 3: Таблица умножака неких бројева

јева, али и да представе обичне разломке као хексагезималне. На пример, да бисмо написали $\frac{3}{8}$ у хексагезималном запису, најпре из таблице инверза треба да уочимо да је $\frac{1}{8} = 0; 7, 30$, а потом из таблице множења уочимо да тај резултат помножен са 3 даје $0; 22, 30$.

Математички текстови у потпуности потврђују ову констатацију. Кад год је у оваквим текстовима извршено дељење $a : b$, увек је дато упутство (не као уопштена формула, већ увек за конкретне бројевне вредности): израчунај реципрочну вредност b^{-1} и помножи је са a.

Чини се, дакле, да су сумерско-вавилонске таблице уређене на веома користан начин. Темељна употреба позиционог записа довела је до тога да се вешто избегну све недоумице око разломака; четири рачунске операције могле су да се изврше брзо и без много размишљања.

Кад год дељење није могло да се изврши без остатка, користила се апроксимација. Један древни вавилонски текст даје апроксимативне вредности за реципрочне вредности свих бројева од 40 или 50 до 80 на следећи начин:

$$1 : 59 = 1, 1, 1$$

$$1 : 1 \ = 1$$

$$1 : 1, 1 = 59, 0, 59$$

$$1 : 1, 2 = 58, 3, 52$$

$$\ldots$$

4.2 Квадрати, квадратни и кубни корени

Осим поменутих таблица, Вавилоњани су имали таблице за квадрат и куб броја, те и за други и трећи корен. Нађене су и њихове таблице за вредности $n^3 + n^2$ у распону од $n = 1$ до $n = 30$, помоћу којих су, на пример, могли решавати кубне једначине облика $n^3 + n^2 = a$, за познато a и непознато n. О решавањима кубних једначина биће више речи у поглављу о алгебри у Месопотамији.

Из кратке таблице квадрата бројева која допуњује многе таблице множења

$$\begin{array}{rl} 1 \text{ а-ра } 1 & 1 \\ 2 \text{ а-ра } 2 & 4 \\ \ldots & \\ 59 \text{ а-ра } 59 & 58,1 \end{array}$$

може се, наравно, одмах извести таблица квадратних корена:

$$\begin{array}{rcl} 1\text{-е} & 1 & \text{иб-си (тј. од 1 је 1 корен)} \\ 4\text{-е} & 2 & \text{иб-си} \\ & \ldots & \\ 58,1\text{-е} & 59 & \text{иб-си} . \end{array}$$

У вавилонској математици ове таблице су коришћене приликом решавања квадратних једначина. На сличан начин, таблица кубних корена

$$\begin{array}{rcll} 1\text{-е} & 1 & \text{ба-си} & \\ 8\text{-е} & 2 & \text{ба-си} & \\ 27\text{-е} & 3 & \text{ба-си} & \text{итд.} \end{array}$$

коришћена је при решавању чистих кубних једначина облика

$$x^3 = a.$$

Реч „ба-си" не значи само кубни корен, већ и корен једначине. Заиста, постоје таблице коришћене за решавање једначина облика

$$x^2(x+1) = a$$

у којима се ова реч користи на следећи начин:

2-е	1	ба-си (тј. 1 је корен једначине за $a = 2$)
12-е	2	ба-си
36-е	3	ба-си итд.

И више од тога, та иста реч пронађена је на одређеним таблицама, праћена речју ,,1-лал", односно ,,минус", са значењем корен једначине

$$x^2(x-1) = a.$$

Вавилонски математичари су морали у тегобном процесу израчунавања таблица квадрата запазити да само неки цели бројеви имају квадратне корене који су и сами цели. Стога су имали више врста апроксимација за ирационалне бројеве. Да би израчунали квадратни корен броја који није потпуни квадрат користили су приближне вредности. Један пример од великог интереса је апроксимација квадратног корена броја 2

$$\sqrt{2} = 1\frac{5}{12}.$$

Метод којим је она добијена често је био коришћен и код Грка: претпоставимо да је a прва апроксимација $\sqrt{2}$. Онда, ако је a превише мало, $\frac{2}{a}$ ће бити превелико, и обратно. Боља апроксимација од ове је она добијена аритметичком средином

$$\frac{a + \frac{2}{a}}{2}.$$

На пример, ако је $a = 1\frac{1}{2}$, онда је $\frac{2}{a} = \frac{4}{3}$, па је боља апроксимација

$$\frac{1\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{2} = 1\frac{5}{12} = 1;25.$$

Ова приближна вредност се често помиње у вавилонским текстовима. Понављање овог процеса даје, као аритметичку средину бројева $a = 1;25$ и $\frac{2}{a} = 1;24,42,21...$, веома блиску апроксимацију

$$\sqrt{2} = 1;24,51,10$$

тј. $1,4142155...$

У вавилонској математици налазимо још у једном примеру како се израчунава квадратни корен броја уз помоћ уопштене формуле за апроксимацију

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

По том обрасцу, на пример, имамо да је

$$\sqrt{1700} = \sqrt{1600 + 100} = \sqrt{40^2 + 100} \approx 40 + \frac{100}{80} = 41\frac{1}{4}.$$

Заиста,

$$\left(41\frac{1}{4}\right)^2 = \left(41 + \frac{1}{4}\right)^2 = 41^2 + \frac{41}{2} + \frac{1}{16} = 1701\frac{9}{16},$$

што је приближно вредности 1700.

За израду овог поглавља коришћена је литература [1], [2], [3] и [5]

5 Алгебра у Месопотамији

Следећа група текстова писаних клинастим писмом припада периоду прве вавилонске династије, када је у Вавилонији владао цар Хамураби и када је семитско становништво покорило староседеоце Сумерце. Из тих текстова се сазнаје да се аритметика развила у добро изграђену алгебру, која се сматра врхунцем вавилонске математике. Вавилоњани су у време Хамурабија потпуно владали техником решавања квадратних једначина. Они су решавали линеарне и квадратне једначине са две непознате, као и задатке који се своде на кубне и биквадратне једначине. У тим задацима се налазе само одређене нумеричке вредности коефицијената, али се на основу метода које су примењивали вавилонски математичари може закључити да су знали и за општа правила.

Изгледа да је најбоље разматрати конкретне примере и задатке из старовавилонских текстова на клинастом писму како бисмо разумели алгебру којом су се Вавилоњани бавили. Једино што знамо о томе како су размишљале наше колеге математичари из периода Хамурабија, јесу ствари које можемо ископати са глинених плочица.

Сви примери и њихова тумачења који ће бити наведени преузети су из књиге [2], а огроман опус превода таквих текстова може се наћи у „Математичким текстовима на клинастом писму"[3], О. Нојгебауера.

Пример 1. *Дужина. Ширина. Помножио сам дужину и ширину и добио површину. Потом сам површини додао вишак дужине преко ширине: 3,3. Штавише, дужини сам додао ширину: 27. Нађи дужину, ширину и површину.*

Дато: 27, 3,3, збир

Резултат: дужина 15, ширина 12, површина 3,0

Прати следећи поступак:

$$27 + 3,\ 3 = 3{,}30$$
$$2 + 27 = 29\ .$$

Узми половину од 29, односно 14;30.

[3] O.Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte (Quellen und Studien, A3, Berlin, 1935)

14;30 · 14;30 = 3,30;15
3,30;15 - 3,30 = 0;15 .

Квадратни корен из 0; 15 је 0;30.

14;30 + 0;30 =15 dužina
14;30 - 0;30 = 14 širina.

Од 14 одузми 2 који су додати на 27. Добићеш праву ширину: 12.

15 · 12 = 3, 0 површиа,
15 - 12 = 3,
3,0 + 3 = 3,3.

Тумачење

Проблем се у првој линији текста уводи представљањем две непознате, дужине и ширине. Такви симболи променљивих аналогни су нашим алгебарским симболима x и y. Дакле, без икаквог проблема можемо представити проблем помоћу две алгебарске једначине:

$$xy + x - y = 183 \tag{1}$$

$$x + y = 27 \ .$$

Дакле, дужина ($x = 15$) и ширина ($y = 12$) заиста задовољавају једначине (1).

Међутим, аутор овог математичког проблема најпре за ширину добија вредност 14, што указује на чињеницу да је свесно увео нову променљиву y' на место праве ширине y, у жељи да поједностави проблем:

$$y' = y + 2,$$

то јест

$$y = y' - 2.$$

Ова смена заиста поједностављује проблем. Систем једначина с променљивама x и y' би у том случају гласио

$$xy' = 183 + 27 = 210 \tag{2}$$

$$x + y' = 27 + 2 = 29.$$

Прва од једначина у систему (2) добијена је сабирањем једначина система (1). Заиста, сабирањем левих страна добија се $xy+x-y+x+y = xy+2x = x(y+2) = xy'$.

Последње две једнакости јасно указују на део текста

$$27 + 3,\ 3 = 3,\ 30$$
$$2 + 27 = 29\ ,$$

након којег брзо и следи решење задатог система. Такав поступак решавања садржи метод који се изнова и изнова појављивао у математичким текстовима тога доба. У савременом алгебарском запису проблем би био записан на следећи начин:

Решење система једначина

$$xy' = P \tag{3}$$
$$x + y' = a$$

је

$$x = \frac{1}{2}a + \omega \tag{4}$$
$$y' = \frac{1}{2}a - \omega,$$

где је $\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - P}$.

Уз малу проверу може се видети да оно што су Вавилоњани, корак по корак, радили у овом проблему, заиста одговара формулама (4). Међутим, они нису користили готове формуле, већ су само давали примере, један за другим, како би описали један исти метод у рачунању изнова и изнова.

Пример 2.

Други старовавилонски текст, пак, садржи систем аналоган систему (3), с тим што друга једнакост представља разлику, а не збир променљивих:

$$xy' = P \tag{5}$$

$$x - y' = d\ .$$

Решење је дато следећим једнакостима:

$$x = \omega + \frac{1}{2}d \tag{6}$$

$$y' = \omega - \frac{1}{2}d,$$

где је $\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + P}$.

Како су Вавилоњани дошли до овог решења можемо само да нагађамо, али можемо рећи шта сигурно нису радили: нису користили арапски метод замене једне једначине система у другу. Арабљани су ишли на то да сваки алгебарски проблем сведу на једну једначину са једном непознатом. У даљем тексту ћемо видети да су и Вавилоњани на неки начин знали како да елиминишу једну променљиву, али у претходна два примера они то никако нису радили. Да јесу, y би налазили из $a - x$ или $x - d$, након налажења x, решавањем квадратне једначине.

Диофант[4] је често решавао проблеме на исти начин. Штавише, његове методе су имале много више сличности са вавилонском алгебром, него са оном којом су се бавили класични грчки ствараоци. Када би Диофант желео да израчуна вредности променљивих x и y, уколико је дат збир a или разлика d, проблем би свео на следеће једнакости:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a + z \\ \\ y = \frac{1}{2}a - z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = z + \frac{1}{2}d \\ \\ y = z - \frac{1}{2}d \end{cases}$$

где је са z изражавао све услове које задовољавају x и y.

Пример 3. *По буру*[5]*. Пожњео сам 4 гура*[6] *житарица. Са другог поља пожњео сам 3 гура житарица. Принос с првог поља био је за 8,20*

[4]Диофант из Александрије (живео око 250. год. н. е), грчки математичар

[5]јединица за површину

[6]јединица за запремину

већи него са другог. Површине оба поља заједно износе 30,0. Колико су велика била поља?

Тумачење

За потпуно разумевање рачуна који следи, треба нагласити да је збир површина $(30,0)$ дат у сарима (1 сар = 10 метара квадратних), а принос се мерио јединицом која се звала сила. Дакле, односи су били следећи:

$$1 \text{ бур} = 30,0 \text{ сари}$$
$$1 \text{ гур} = 5,0 \text{ сила.}$$

Са првог поља принос је био 4 гура = $20,0$ сила по 1 буру = $30,0$ сари, а са другог 3 гура = $15,0$ сила по $30,0$ сари. Непознате су нам површине (изражене у сарима), x и y. Дакле, требало би да решимо две једначине са две непознате:

$$\frac{20,0}{30,0}x - \frac{15,0}{30,0}y = 8,20$$

$$x + y = 30,0 \ .$$

Вавилоњани су у потпуности били способни да реше другу једначину по x, замене у прву, коју потом реше по y. Исто би урадили у задацима у којима је дата разлика $x - y$ уместо збира $x + y$. Међутим, у проблему који је овде презентован, до решења су долазили другим путем. Најпре су читаву површину поља поделили на два једнака дела:

Подели 30,0, површину оба поља, на два дела од по 15,0.

Потом су рачунали колики би принос са сваког поља од по 15,0 сари могао да буде. Све је богато разрађено у фантастичним детаљима. Реципрочна вредност од $30,0$ је помножена са $20,0$ и добио се ,,погрешан принос са поља" - $0;40$, то јест принос са првог поља по 1 сару. Отуда је принос са поља од 15 сари

$$0;40 \cdot 15,0 = 10,0.$$

,,Запамти ово", наводи се у тексту. На исти начин пронађен је ,,погрешан принос са другог поља" од $0;30$ по 1 сару, то јест

$$0;30 \cdot 15,0 = 7,30.$$

Израчунато је да, ако би свако од поља имало површину од 15 сари, разлика у приносу би била

$$10,0 - 7,30 = 2,30,$$

али је у задатку дато да је разлика $8,20$.

,,Одузми”, наводи се даље у тексту:

$$8,20 - 2,30 = 5,50.$$

Потом се сабирају приноси по 1 сару:

$$0;40 + 0;30 = 1;10.$$

Не знам реципрочну вредност од 1;10. Чиме морам да помножим 1;10 да би добио 5,50? Узми 5,0, јер је 5,0 · 1;50 = 5,50. Одузми 5,0 од површине 15,0 и исто то додај површини другог поља. Добићеш 20,0 као површину првог и 10,0 као површину другог поља. Дакле, решења су 20,0 и 10,0.

Наставник у школи би решење проблема ученицима објаснио на следећи начин:

Ако би свако од поља имало површину $15,0$ сари, разлика у приносу би била $2,30$. Требало би да буде $8,20$. Разлика између те две вредности је $5,50$. За сваку јединицу површине додату једном пољу, а одузету од другог поља, прво ће произвести $0;40$ више, а друго $0;30$ мање приноса, па ће разлика у приносима сваки пут расти за $0;40 + 0;30 = 1;10$. Ово ће бити поновљено пет пута да би се добило тачно $5,50$. Отуда, прво поље мора имати површину $15,0+5,0 = 20,0$, а друго $15,0-5,0 = 10,0$ сари.

Не знамо да ли су Вавилоњани размишљали као данашњи математичари, али у најмању руку знамо да, када би им била дата једначина

$$x + y = 2h,$$

непознате x и y би одређивали као

$$x = h + \omega, \qquad y = h - \omega,$$

а потом би покушавали да израчунају ω.

Ако би, на пример, поред суме био дат и производ, онда би се вредност ω рачунала из једначине

$$xy = (h+\omega)(h-\omega) = h^2 - \omega^2 = P,$$

односно

$$\omega^2 = h^2 - P.$$

На овај начин могли су извести формуле (4), чим им је једнакост

$$(h+\omega)(h-\omega) = h^2 - \omega^2 \tag{7}$$

била позната.

Извођење формула (6) било би аналогно.

Пример 4.

И из других текстова је постало јасно да је специјалан облик једнакости (7) Вавилоњанима био познат. На пример, пронађена је глинена плочица на којој је био објашњен захтев да се изгради насип у облику једнакокраког трапеза познате основице a, нагиба $\beta = \dfrac{a-b}{2h}$ и површине $S = \dfrac{a+b}{2}h$.

Након множења 2β са $2S$ добија се

$$4\beta S = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

што решено по b^2 даје

$$b^2 = a^2 - 4\beta S. \tag{8}$$

На тај начин се из једнакости (8) израчунава основица b. Слично би било да је позната дужина b. Основицу a би рачунали из једнакости

$$a^2 = b^2 + 4\beta S.$$

Дакле, све би ово било нерешиво да Вавилоњани нису знали за специјални производ дат једнакошћу (7).

Пример 5.

Формуле

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{9}$$

и

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{10}$$

мора да су, такође, биле познате Вавилоњанима.

Један стари вавилонски текст садржи следећи проблем:

Сабрао сам површине два своја квадрата: 25,25. Страница другог квадрата је $\frac{2}{3}$ странице првог плус 5.

Речено је следеће:

$$x^2 + y^2 = 25,25 \tag{11}$$
$$y = \frac{2}{3}x + 5\ .$$

Да би се вредност y из друге једначине система (11) заменила у прву, мора се искористити формула (9):

$$(0;40x+5)^2 = 0;40^2x^2 + 2\cdot 0;40\cdot 5x + 5^2.$$

Ово води до квадратне једначине облика

$$ax^2 + 2bx = c, \tag{12}$$

у којој је

$$a = 1 + 0;40^2 = 1;26,40, \qquad b = 5\cdot 0;40 = 6;40, \qquad c = 25,25 - 5^2 = 25,0.$$

У тексту се прво израчунавају коефицијенти a, b и c, а потом се решава квадратна једначина (12) коришћењем исправне формуле

$$x = a^{-1}(\sqrt{ac+b^2} - b),$$

након чега се најзад израчунава и $y = \frac{2}{3}x + 5$.

Овај пример нам говори да су Вавилоњани врло успешно користили метод замене и елиминације у решавању система једначина, као и формулу за квадрат бинома.

5.1 Квадратне и кубне једначине

Можда би било погрешно закључити да су рани вавилонски математичари разматрали оно што бисмо ми данас назвали општим решењем квадратне једначине. Да бисмо осетили дух њиховог времена, разликоваћемо неколико типова једначина илустрованих следећим примерима:

(1) $x^2 + 6 = 5x$, два решења, оба позитивна;

(2) $x^2 - x = 14,30$, два решења, једно позитивно, друго негативно;

(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, два решења, оба негативна;

(4) $x^2 + 3x + 4 = 0$, без реалних решења.

Ако би се Вавилоњанин нашао пред оваквим проблемима, примери (3) и (4) били би му подједнако мистериозни. Међутим, остале типове квадратних једначина би решавао или описно или помоћу таблица. Било би могуће решити једначину (1) табелишући $x^2 + N$ за позитивне целе бројеве x и N као у табели 4.

$x\backslash N$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8	9	10
3	10	11	12	13	14	15
4	17	18	19	20	21	22
5	26	27	28	29	30	31

Табела 4: Таблица бројева облика $x^2 + N$

Из табеле 4 видимо да је $x^2 + 6 = 5x$ ако је $x = 2$ или $x = 3$.

Решење једначине (2) пронађено је, пак, на једној таблици у виду навођења правила како решити дату једначину:

Узми 1 (коефицијент уз x). Подели 1 на два дела. Производ 0;30 · 0;30 = 0;15, додај на 14,30. Квадратни корен из 14,30;15 је 29;30. На 29;30 додај 0;30. 30 је (страница) квадрата.

Дакле, питамо се како су Вавилоњани могли да дођу до решења квадратне једначине облика

$$x^2 \pm ax = b.$$

Можемо веровати да су до решења долазили као што су то радили Арабљани или како ми то данас радимо, тако што се лева страна једнакости допуњује до потпуног квадрата:

$$\left(x \pm \frac{1}{2}a\right)^2 = b + \left(\frac{1}{2}a\right)^2.$$

Друга могућност, можда мање вероватна, била би увођење нове променљиве $y = x \pm a$ која би квадратну једначину свела на производ

$$x \cdot y = x(x \pm a) = b$$

што се решава као систем (5).

Преостала могућност за решавање је читање из таблица које су давале решења само за одређене типове квадратних једначина.

Таблице збирова кубова и квадрата целих бројева (на пример, $3^3 + 2^2 = 31$) биле су помоћно средство за налажење позитивног решења проблема који бисмо ми изразили као кубну једначину типа $x^3 + 5x^2 = 72$. Постоји, међутим, веровање да су неки математичари могли решавати општији случај који илуструје једначина $x^3 + 5x^2 + 10x = 102$. Процедуру решавања опште кубне једначине ($x^3 + ax^2 + bx + c = 0$) можемо реконструисати на следећи начин, служећи се својим симболима. Најпре, заменимо x са $X + d$ и применимо правило

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Имаћемо

$$(X+d)^3 + a(X+d)^2 + b(X+d) + c = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$X^3 + 3X^2d + 3Xd^2 + d^3 + aX^2 + 2aXd + ad^2 + bX + bd + c = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$X^3 + (3d+a)X^2 + (3d^2 + 2ad + b)X + (d^3 + ad^2 + bd + c) = 0.$$

Можемо анулирати члан који садржи X ако ставимо да је

$$3d^2 + 2ad + b = 0,$$

тако да је

$$d = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Пошто нађемо тражену вредност d, можемо израчунати $3d + a = A$ и $d^3 + ad^2 + bd + c = -B$. Одатле имамо

$$X^3 + AX^2 = B.$$

Таблица бројева $X^3 + AX^2$ за различите вредности A и X даје тражено решење, ако оно постоји.

Између 2000. године п.н.е. и 1500. године н.е. није учињен никакав напредак у решавању кубне једначине, а када се појавило формално решење у 16. веку наше ере, подсећало је на фундаментални корак вавилонске процедуре. Модерно решење је компликованије и захтева да се општа кубна једначина сведе на једначину без члана који садржи X или X^2. Баш тај корак свођења једне кубне једначине на другу заслужује коментар, пошто даје корисно упуство за графичка решавања.

У претходном аргументу изабрана је таква вредност d да се кубна једначина трансформише у облик који не садржи члан X. Уместо тога, могло се елиминисати X^2 стављајући да је $3d + a = 0$, тако да је $d = \frac{-a}{3}$. Једначина се тада своди на облик

$$X^3 + pX = B,$$

где је $p = 3d^2 + 2ad + b$ и $-B = d^3 + ad^2 + bd + c$.

За графичко решавање, најбоље је свести једначину на тај облик, тако да је $X^3 = B - pX$. Ако тада скицирамо $y_1 = X^3$ и $y_2 = B - pX$, пресеци ($y_1 = y_2$) ће дати добру апроксимацију реалних корена.

Пример 6.

Старовавилонски текстови такође садрже системе од три и више једначина, као што је на пример

$$x^2 + y^2 + z^2 = 23, 20$$

$$x - y = 10$$

$$y - z = 10.$$

Метод решавања је следећи: x и y се изразе у функцији од z, а потом се квадратна једначина добија за z. Такве елиминације су биле мачји кашаљ за старе алгебристе.

У неким другим случајевима, нису коришћене елиминације. Ево једног система

$$x^2 + y^2 = S = 21,40 \tag{13}$$

$$x + y = a = 50$$

чија су решења дата у облику

$$x = \frac{1}{2}a + \omega$$

$$y = \frac{1}{2}a - \omega \ ,$$

где је $\omega = \sqrt{\frac{1}{2}S - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$.

Сличну идеју смо имали раније, у примеру 2, где је био дат збир $x + y = a$, а x и y се рачунало као $\frac{1}{2}a \pm$ грешка. Грешка се потом налазила из другог услова којег задовољавају x и y.

Уколико би друга једначина система (13) била замењена разликом $x - y = d$, решење би било потпуно аналогно и било би дато једнакостима

$$x = \omega + \frac{1}{2}d$$

$$y = \omega - \frac{1}{2}d \ ,$$

где је $\omega = \sqrt{\frac{1}{2}S - \left(\frac{1}{2}d\right)^2}$.

Пример 7.

Понекад је пут до самог решења Вавилоњанима био далеко од лаког. Погледајмо проблем пронађен на једној од плочица:

$$\frac{1}{3}(x+y) - 0;1(x-y)^2 = 15 \tag{14}$$

$$xy = 10,0\ .$$

Нојгебауер је прво мислио да се систем (14) може свести на кубну једначину по x или y. Међутим, ако пођемо од идеје да су непознате једнаке половини суме $\pm$ грешка, то јест ако имамо да је

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

онда се систем (14) своди на

$$0;40u - 0;40v^2 = 15$$

$$u^2 - v^2 = 10,0.$$

Из овог система се може елиминисати v^2, након чега остаје квадратна једначина по u.

Пример 8.

Чак ни ,,чисте" кубне једначине нису плашиле Вавилоњане. Погледајмо сада пример новијег датума (по мишљењу Нојгебауера) у односу на претходно наведене. Проблем се састоји из кубне једначине

$$12x^3 = 1;30$$

и решен је коришћењем таблице кубова у којој је пронађено да је кубни корен од $\frac{1}{12} \cdot 1;30 = 0;7,30$ заправо $0;30$. Дакле, коришћење таблица кубова било им је подједнако једноставно као и коришћење таблица квадрата.

Следећи проблем нас води, пак, до кубне једначине која садржи и квадратни члан
$$x^2(12x+1) = 1;45.$$

Множењем обе стране са 12^2 аутор текста добија

$$(12x)^2(12x+1) = 4,12,$$

а одавде, без имало тешкоће, добија да је $12x = 6$. Одакле му тај резултат? Из таблице, наравно.

Ово нам тек постаје јасно ако знамо да су Вавилоњани правили таблице бројева облика $n^2(n+1)$ из којих су читали вредност n. Дакле, уз помоћ таблица, Вавилоњани су били у стању да реше мешовите кубне једначине облика

$$x^2(\mu x + 1) = V$$

исто тако добро као и ,,чисте" квадратне и кубне једначине.

5.2 Геометријски докази алгебарских формула

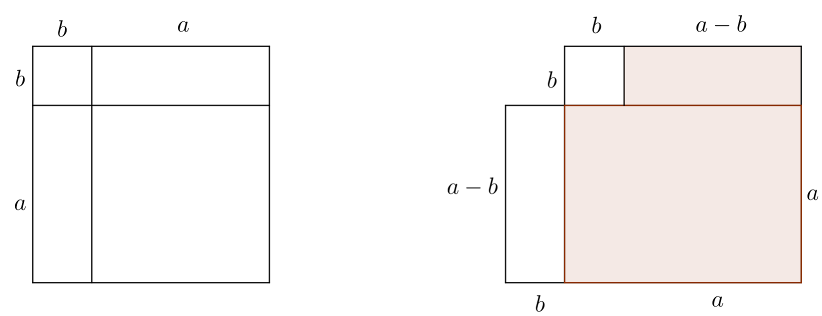
Како су Вавилоњани долазили до формула као што су

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,?$$

Можемо да претпоставимо да су користили скице налик онима које су нађене код Еуклида или код неких арапских математичара, попут фигура на слици 9.



Слика 9: Геометријски докази формула $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (лево) и $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (десно)

Скоро је сигурно да су производ два броја интерпретирали као површину правоугаоника, а квадрат броја као површину квадрата. Ово је постало јасно из њихове сопствене терминологије. Међутим, морамо бити опрезни са терминологијом у геометрији. Размишљања старих Вавилоњана су била првенствено алгебарског типа. Истина је да су непознате величине представљали дужима и површинама, али су увек мислили баш на бројеве. Ово је показано још у првом примеру овог рада, у ком су површина xy и дуж $x - y$ сабрани, геометријски неосновано. Вавилоњани, чак, нису оклевали ни да множе две површине.

Чак и у проблемима који су формулисани на геометријски начин, питање на које Вавилоњани траже одговор се увек сведе на то да се нешто израчуна, а не да се конструише или докаже. Може се рећи да је алгебарско језгро увек видљиво кроз геометријски екстеријер. Нека нас у то увери следећи пример.

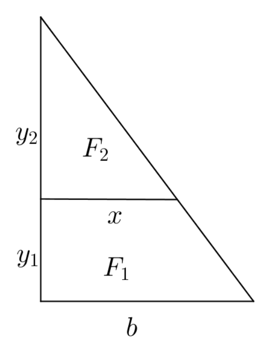
Пример 9.

У једном старовавилонском тексту пронађен је следећи проблем:

Троугао, чија је основица b дата и износи 30, подељен је на два дела правом која је паралелна основици, то јест на трапез висине y_1 и троугао висине y_2. Дато је да је

$$F_1 - F_2 = \Delta = 7,0$$

$$y_1 - y_2 = \delta = 20.$$



Дакле, имамо три непознате: дуж x и висине y_1 и y_2. Између њих постоје следеће релације:

$$\frac{1}{2}y_1(x+b) - \frac{1}{2}y_2x = \Delta \tag{15}$$

и још

$$y_2 - y_1 = \delta. \tag{16}$$

Штавише, са скице уочавамо и релацију

$$y_2 : y_1 = x : (b-x) \tag{17}$$

Најпре рачунамо x:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta}{\delta}+b\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2\right]} - \frac{\Delta}{\delta}, \tag{18}$$

а потом налазимо y_1 и y_2 из

$$y_1 = (b-x)\frac{\Delta}{\frac{1}{2}b^2 - x^2} \tag{19}$$

и

$$y_2 = y_1 + \delta.$$

Све ове формуле су тачне. На пример, формула (19) је добијена решавањем једначине (17) по y_2, а потом заменом исте у (15) која је најзад решена по y_1. Када се и једначина (16) убаци у игру добија се квадратна једначина која решена по x даје једнакост (18).

Најпре ваља нагласити да нам претходни пример говори да су Вавилоњани знали за пропорцију, без које решење овог проблема не би било могуће. И више од тога, овакво сјајно решење препознато је као велики успех, посебно ако се узме у обзир да им је недостајао наш алгебарски запис, који знатно све олакшава.

Јасно је да је у овом типу математичког текста алгебра главна брига, али и најтежа. Геометрија је овде врло једноставна; ништа није неопходно осим површина троугла и трапеза и пропорционалности које се односе на паралелне праве.

Не би било згорег поменути да је у једном тексту пронађена изванредна формула за дужину дужи x која је паралелна основицама a и b трапеза, а која га дели на два трапеза једнаких површина, то јест била им је позната формула

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

За величину x можемо још рећи да представља квадратну средину дужина основица трапеза.

Још једно достигнуће вавилонске вербалне алгебре вредно је помена. У текстовима на клинастом писму има и задатака сложеног интересног рачуна. Свештеници-математичари имали су и о томе упутство за своје ученике. На пример, поставља се питање за које време ће се удвостручити неки износ новца који је дат у зајам уз 20 процената (годишње). Тај задатак се своди на једначину

$$\left(1\frac{1}{5}\right)^x = 2,$$

за протекло време x.

Ово се данас решава тако што се најпре уочи да је $3 < x < 4$, а затим се примењује линеарна интерполација. У нашој симболици то би изгледало овако:

$$\frac{4-x}{4-3} = \frac{1,2^4 - 2}{1,2^4 - 1,2^3},$$

што даје за x вредност приближно $3,79$.

Нема сумње да су постојале таблице конструисане за решавање оваквих проблема.

За израду овог поглавља коришћена је литература [2], [3] и [4].

6 Геометрија у Месопотамији

Аритметичко-алгебарски карактер вавилонске математике, који је био нарочито наглашен, долазио је до изражаја и у геометрији. И овде, као и у Египту, геометрија се развијала на основу практичних задатака мерења, а геометријска форма задатака обично је била само повод да се постави алгебарско питање. Девети пример у поглављу о алгебри показује како се задатак који се односи на површине троугла и трапеза и пропорционалне величине своди на нетривијални алгебарски проблем. Приде, тај пример не представља изузетак и много их је сличних пронађено на глиненим плочицама.

6.1 Запремине и површине

Већ је поменуто како су Вавилоњани били у стању да израчунају површину троугла и трапеза.

Површину круга полупречника r рачунали су формулом $3r^2$, а обим формулом $6r$. Дакле, користили су апроксимацију 3 за број π. Египћани су свакако користили ближу вредност броја π од Вавилоњана, но, како се то наводи у књизи [3], касније су Вавилоњани употребљавали и много бољу оцену $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$, са грешком од око 0.5% .

Запремине призми и ваљка рачунали су без грешке, као производ базе и висине.

6.2 Зарубљене купе и пирамиде

У једном старовавилонском тексту запремина зарубљене купе рачунала се коришћењем погрешне формуле:

$$\frac{1}{2}\ \text{висине} \times \text{збир површина основа}\ .$$

Исти текст се бавио зарубљеном пирамидом, чија је висина дата, а основе су квадрати страница дужина $a = 10$ и $b = 7$. Први корак у решавању сводио се на израз

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1,12;15$$

и још је дато да је $a-b=3$. Одавде, неким израчунавањима која нису потпуно јасна, стиже се до нечитког броја $\ldots,45$, који се можда може интерпретирати као $0;45$.

Испоставља се да $0;45$ представља вредност израза $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (по Нојгебауеру), односно $\frac{1}{4}\cdot(a-b)$ (по Тјуру-Донжину [7]).

Ако се $0;45$ дода на $1,12;15$, добија се $1,13$. Овај резултат помножен је висином која износи 18. Испоставља се да је множење погрешно: уместо производа $21,54$, у тексту се наводи $22,30$. Заокругљивање попут овог неретко се јављало у вавилонским математичким текстовима.

Дакле, прва могућност формуле за израчунавање запремине зарубљене пирамиде, по Нојгебауеру, дата је интерпретацијом

$$V=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]\cdot h,$$

што јесте тачна формула за израчунавање запремине овог тела.

Друга могућност, по Тјуру-Донжину, дата је формулом

$$V=\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{a-b}{4}\right]\cdot h.$$

Међутим, постоји замерка на Нојгебауеров рачун и прву формулу. Наиме, текст који претходи броју 45 садржи свега пар нечитких симбола, што је премало за рачунање израза $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Сумња у прву формулу долази и из чињенице да се у сличним текстовима користила формула

$$V=\frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot h \tag{20}$$

која је свакако погрешна.

[7] Franois Thureau-Dangin, (1872-1944), francuski arheolog

Потешкоће нестају ако претпоставимо да је $0;45$ грешка у рачуну и требало би је заменити са

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2;15.$$

То би значило да је читав посао заснован на формули

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right] \cdot h,$$

која је заправо погрешна, али и еквивалентна формули (20) .

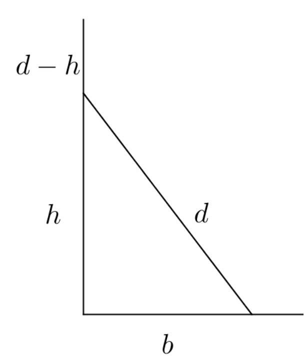
6.3 Питагорина теорема

Један старовавилонси текст садржи следећи задатак:

Греда дужине 0;30 стоји наслоњена на зид. Горњи крај је склизнуо за дужину 0;6. За колико се померио доњи крај?

Проблем се своди на разматрање правоуглог троугла, чија је дужина хипотенузе позната, $d = 0;30$ и једна катета $0;30 - 0;6 = 0;24$. Друга катета је израчуната онако како треба, коришћењем Питагорине теореме:

$$b = \sqrt{d^2 - h^2}.$$



Веродостојност Питагорине теореме, коју су Вавилоњани сачували током периода дугог 1500 година, приказана је у тексту из времена Селеукида, у којем се међу многобројним другим малим проблемима о дужини, ширини и дијаоналама правоугаоника налази и следећи проблем:

Трска је наслоњена на зид. Ако се врх трске спусти за дужину 3, доњи део се удаљи од зида за дужину 9. Колико је дугачка трска? Колико је висок зид?

Скица би била потпуно иста као за претходни проблем. Овога пута је дато да је $b = 9$ и $d - h = 3$, а h и d се траже. Решења су

$$d = \frac{\frac{1}{2}(9^2 + 3^2)}{3} = 15,$$

$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = 12.$$

Пронађени су чак и проблеми са истим текстом, а у којима је дато d и h или $d+h$ и b или, пак, $d+h$ и $d+b$ итд. Најкомпликованији проблем је онај у којем је дато $d + h + b$ и dh. Као и увек, највећи проблем у овим задацима је алгебарски запис, а једино геометријско правило које се изнова и изнова користи је Питагорина теорема.

Још једна глинена таблица, из периода око 1800 година п.н.е, сведочи о томе да су Ввилоњани заиста користили теорему, касније названу Питагорином. Ова позната таблица (слика 10) једна је од неколицине на којој је искључиво нека геометријска фигура. Можемо је сматрати графичким сведоком чињенице да су Вавилоњани поседовали прецизан начин израчунавања квадратних корена. На глиненој плочици писар је нацртао квадрат са својим дијагоналама.

Према Питагориној теореми, дужина дијагонале је заправо дужина странице помножена квадратним кореном броја 2. Апроксимација броја $\sqrt{2}$ и дужина дијагонале исписане су дуж дијагонале датог квадрата, то јест исписани су бројеви $1; 24, 51, 10 = 1, 414213562$ и $42; 25, 35 = 42, 426389$. На страници квадрата са слике утиснут је број 30.

Слика 10: Глинена плочица на којој је израчуната дијагонала квадрата странице 30

Можда бисмо још могли да се запитамо да ли су Вавилоњани знали за такозване ,,Питагорине тројке” и колико различитих вредности су узимали за однос између висине, ширине и дијагонале правоугаоника. Међу текстовима се налазе размере као што су $3 : 4 : 5$, $5 : 12 : 13$, $8 : 15 : 17$, $20 : 21 : 29$, а које се односе на поменуте три дужине. Одговор на то како су стизали до ових вредности чека нас у следећем поглављу.

За израду овог поглавља коришћена је литература [2] и [3].

7 Теорија бројева у Месопотамији

Вавилоњани нису били само виртоузи у алгебри и аритметици, већ су далеко догурали и у израчунавању својстава неких бројева. На крају свог ,,Математичког текста на клинастом писму" Нојгебауер је изразио наду да бисмо тек могли сазнати битне ствари о вавилонској елементарној теорији бројева. Он наводи да ће многе ствари које нам је грчка традиција донела под ,,питагорејским" именом бити назване вавилонским. Ова претпоставка потврђена је касније проналаском текста ,,Плимптон 322", о којем ће бити речи у даљем раду. Хајде прво да видимо шта нам то старовавилонски текстови откривају о тадашњој теорији бројева.

7.1 Прогресије

Разматрајући математичке текстове које су састављали Вавилоњани, долазило се до појмова којима нису могли овладати ни најумнији људи старог доба. Један од њих је, посебно, појам коначног збира бесконачног броја савирака.

Наиме, две фамилије низова су биле познате Вавилоњанима око 2000. године п.н.е. и најбоље илуструју везу између вавилонске алгебре и египатске геометрије. Једна од њих обухвата троугаоне (1, 3, 6, 10, 15, ...) и тетраедарске (1, 4, 10, 20, 35, ...) бројеве. Друга фамилија низова обухвата квадратне (1, 4, 9, 16, 25, ...) и пирамидалне (1, 5, 14, 30, 55, ...) бројеве.

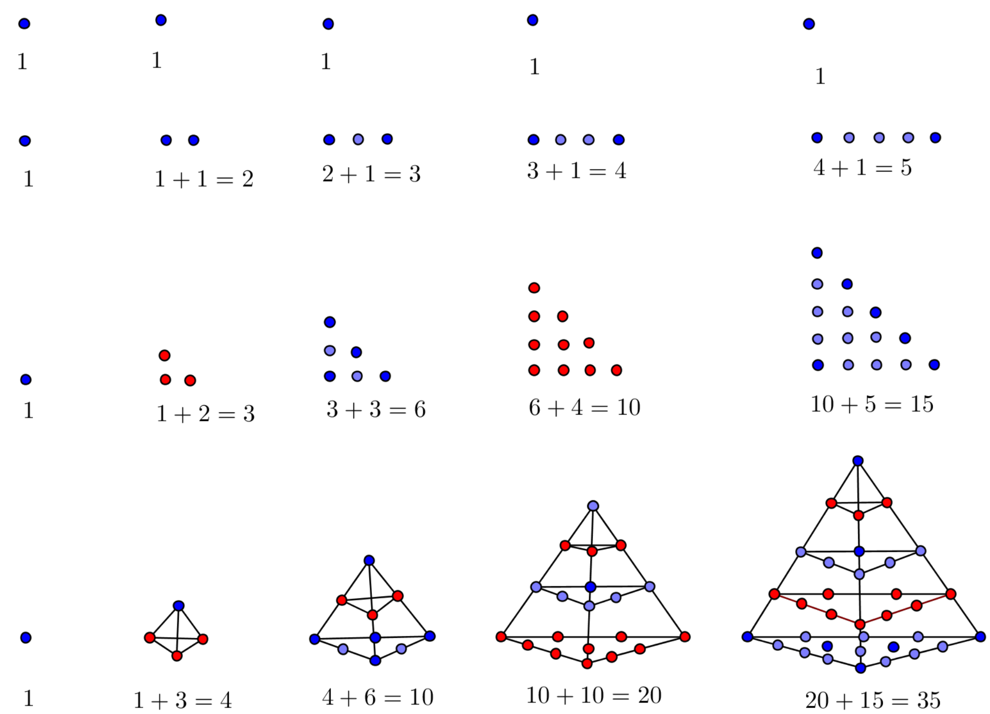
Овакви бројеви дају нам прост пример продирања геометријске терминологије у алгебарски контекст. Следеће низове можемо визуализовати, респективно, као тачке (нула димензија), линије (једна димензија), троуглове (две димензије) и тетраедре (три димензије):

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28\ldots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84\ldots
\end{array}$$

Ови низови су изграђени на следећи начин:

1	1	1	1	1	1 ...
1	$(1+1)=2$	$(2+1)=3$	$(3+1)=4$	$(4+1)=5$	$(5+1)=6$ ...
1	$(1+2)=3$	$(3+3)=6$	$(6+4)=10$	$(10+5)=15$	$(15+6)=21$ ...
1	$(1+3)=4$	$(4+6)=10$	$(10+10)=20$	$(20+15)=35$	$(35+21)=56$ ...

r-ти члан сваког од низа добија се додавањем његовог претходника (односно $(r-1)$-вог члана) r-том члану претходног низа, што се сликовито може приказати као на слици 11.



Слика 11: Изграђивање фамилије низова која укључује троугаоне и тетраедарске бројеве

Уколико се овај процес настави, добиће се такозвани ,,вишедимензионални" фигурални бројеви:

1	5	15	35	70	126...
1	6	21	56	126	252 ...
1	7	28	84	210	462...

Методом пробе, лако можемо доћи до прихватљивих формула:

$$1 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}, \quad 3 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}, \quad 6 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}, \quad 10 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}, \quad \dots$$

$$1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 20 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \quad , \dots$$

Приметимо да се n-ти члан првог низа израчунава формулом $\frac{n(n+1)}{2 \cdot 1}$, а n-ти члан другог низа формулом $\frac{n(n+1)(n+2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Са друге стране, ове формуле представљају суме првих n чланова неких природних бројева, које су, уз објашњење, дате испод:

Линије: $\sum_{r=1}^{n} 1 = n$; (Сабери чланове низа чији су чланови јединице, од вредности 1 до вредности n, закључно);

Троуглови: $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1}$; (Сабери чланове низа природних бројева, од вредности 1 до вредности n, закључно);

Тетраедри: $\sum_{r=1}^{n} \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$; (Сабери чланове низа троугаоних бројева, од вредности 1 до вредности n, закључно).

Слично се и формула за оно што бисмо могли назвати четвородимензионалним низом (1, 5, 15, 35, итд.) покорава истом закону, будући да је n-ти члан низа

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Читава ова прича се односила на прву од две фамилије низова, које су биле познате Вавилоњанима. Сличне примедбе се односе и на другу фамилију. Ниже су дати следећи низови: једнодимензионални низ је низ непарних бројева, дводимензионални је низ квадрата природних бројева, а тродимензионални низ се може представити као низ пирамида са квадратном базом, будући да је то низ збирова квадрата.

1	3	5	7	9	11 ...
1	4	9	16	25	36 ...
1	5	14	30	55	91 ...

Методом пробе и грешке лако је установити следећу правилност за елементе тродимензионалног низа:

$$1 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 5 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 14 = \frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 30 = \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \quad 55 = \frac{11 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}, \ldots$$

Приметимо да се n-ти члан низа ових бројева рачуна формулом

$$\frac{n(n+1)(2n+2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

која заправо представља суму првих n квадрата, односно

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

По себи се разуме да таблице са клинастим писмом не наводе ово правило у облику у којем је овде наведено. Њихов текст би гласио отприлике овако:

Да се добије укупна површина свих квадрата бројева од 1 до неког другог, најпре помножи тај последњи број следећим бројем, па њихов производ помножи бројем који је за један већи од двоструке вредности поменутог броја, па подели резултат са 6.

На сличан начин би и правило за добијање n-тог троугаоног броја било вербално и гласило би:

Да се добије троугаони број чије место у низу одговара одређеном природном броју, помножи овај број следећим бројем и подели са 2.

Дакле, сумирање низова било је мачији кашаљ за Вавилоњане. У једном од математичких текстова пронађена је сума геометријске прогресије чији је количник 2:

$$1 + 2 + ... + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1).$$

У истом тексту рачунала се сума квадрата бројева од 1 до 10 на мало другачији начин од претходно наведеног:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = (1 \cdot \frac{1}{3} + n \cdot \frac{2}{3})(1 + 2 + ... + n).$$

7.2 Плимптон 322: Правоугли троугао са целобројним страницама

Долазимо сада до већ најављеног изванредног старовавилонског текста ,,Плимптон 322" (слика 12), откривеног и публикованог од стране Нојгебауера у свом ,,Математичком тексту на клинастом писму" (1945).

Овај текст представља велику табелу са неколико колона, а неке од њих представљене су у табели 5. Последња колона не садржи ништа до бројеве од 1 до 15. Две колоне пре те се односе, према ознакама у заглављу, на ,,ширину" и ,,дијагоналу". Проучавајући таблицу дошло се до закључка да ови бројеви задовољавају релацију

$$d^2 - b^2 = h^2,$$

у којој је h увек цео број, чији су фактори само 2, 3 и 5.

Како су Вавилоњани долазили до ових бројева и како су их одређивали? Колоне које претходе слабо осветљавају ово питање, јер садрже вредности квадрата $\frac{d^2}{h^2}$ које постепено опадају од скоро 2 до нешто преко $\frac{4}{3}$. Одузимајућу 1 добијамо

$$\frac{d^2}{h^2} - 1 = \frac{d^2 - h^2}{h^2} = \frac{b^2}{h^2}.$$

Слика 12: Оригинална глинена плочица названа Плимптон 322

Прихватљива је чињеница да колоне пре поменуте садрже односе

$$\beta = \frac{b}{h} \text{ и } \delta = \frac{d}{h} \ .$$

За h је најпре узимана вредност 1. Међутим, проблем би тада настао у конструкцији правоуглог троугла чије су странице 1, β и δ рационални бројеви такви да задовољавају релацију

$$\delta^2 - \beta^2 = 1.$$

Овај услов може бити написан и у облику

$$(\delta - \beta)(\delta + \beta) = 1,$$

а то значи да су збир $\delta + \beta$ и разлика $\delta - \beta$ реципрочни бројеви. Стављајући да је

$$\delta + \beta = \alpha = \frac{p}{q},$$

h	b	d	број
2, 0	1,59	2,49	1
57,36	56, 7	1,20,25	2
1,20, 0	1,16,41	1,50,49	3
3,45, 0	3,31,49	5, 9, 1	4
1,12	1, 5	1, 37	5
6, 0	5,19	8, 1	6
45, 0	38,11	59, 1	7
16, 0	13,19	20,49	8
10, 0	8, 1	12,49	9
1,48, 0	1,22,41	2,16, 1	10
1, 0	45	1,15	11
40, 0	27,59	48,49	12
4, 0	2,41	4,49	13
45, 0	29,31	53,49	14
1,30	56	1,46	15

Табела 5: Неколико редова таблице Плимптон 322

добијамо да је

$$\delta - \beta = \alpha^{-1} = \frac{q}{p},$$

па је

$$\delta = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq},$$

$$\beta = \frac{\alpha - \alpha^{-1}}{2} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

Ако сада ставимо да је

$$h = 2pq,$$

тако да се добију цели бројеви, одмах добијамо да је

$$b = p^2 - q^2, \qquad d = p^2 + q^2.$$

Ове формуле за израчунавање целих дужина страница правоуглог троугла често су коришћене од стране Диофанта.

Начин на који су изведене формуле за β и δ типичан је за Вавилоњане. Своди се на проблем конструкције правоуглог троугла, чија је једна катета дужине 1, а збир дужина друге две странице је $\beta + \delta = \alpha$. Ако је, на пример, $2pq = 4$, добија се да је $h = 4$, $b = 3$ и $d = 5$.

Нојгебауер наглашава да бројеви α и α^{-1} нису тек тако узети из табеле реципрочних бројева, већ су, вероватно, дати у облику

$$\alpha = p \cdot q^{-1}, \qquad \alpha^{-1} = q \cdot p^{-1},$$

где су p и q узајамно прости бројеви, а који су, заједно са својим инверзима p^{-1} и q^{-1} преузети из таблице инверза.

За израду овог поглавља коришћена је литература [4] и [6].

8 Закључак

Када се осврнемо на то шта се миленијумима стварало и развијало у Месопотамији из области математике, остаје нам да се запитамо колико су касније цивилизације заиста задржале вавилонски дух размишљања и да ли се такав начин расуђивања нешто битно разликује од данашњег. Несумњиво, прва ствар коју су нам оставили у аманет јесте позициони запис бројева. И данас, као и код старих Вавилоњана, једна те иста цифра може означавати различите бројеве, на основу позиције коју заузима у броју. Међутим, због бројања и рачунања на прсте руку, за потребе писања смо се ипак одлучили за несто другачији бројевни систем од хексагезималног. С друге стране, у потпуности смо задржали концепт поделе дана, сата и минута, који се, ето, очувао више од 4000 година.

Због начина записивања у глинене плоче, имамо бољи увид у писану заоставштину Месопотамије, него што је то случај са древним Египтом, Кином или Индијом, на пример. До сада је откривено преко пола милиона очуваних таблица, мада од тога само око 500 њих са математичким записима. Оне су нам омогућиле да се уверимо да су математичари Месопотамије били изванредно умесне рачунџије и алгебристи широког интереса, али да су добро баратали и геометријом. Очигледно, геометрија је ту имала ипак секундарну улогу, углавном као база за нове алгебарске проблеме. Одсуство апстракције је нарочито, како у целокупној математици Месопотамије, тако и у геометрији. На пример, иако данашња подела угла води порекло од Вавилоњана, они сами нису имали јасан појам мере угла.

Што се тиче алгебре, јасно нам је да нема разграничења између тачног и приближног решења, али то не умањује неке од сјајних резултата до којих су Вавилоњани дошли, као што је, на пример, вредност корена из два.

За разлику од савремене математике, у целокупној математици Месопотамије нема покушаја да се поједини ставови докажу, већ се дају само упутства у виду правила: уради то и то, уради тако и тако. Не знамо како се дошло до теорема, на пример, како су Вавилоњани открили Питагорину теорему. Не постоје формулације било каквих теорема, већ само засебни случајеви, на које примењујемо исте скупове правила. Отуда ни појам доказа није присутан. Стога можемо претпоставити да је метод пробе и грешке био кључан за добијање неких од поменутих правила.

Можемо констатовати да је одсуство дедуктивног мисљења једна од главних одлика тадашње математике, док су многи резултати добијани закључцима по аналогији, па су неретко и били нетачни. Нама, из данашње перспективе, такав начин расуђивања може изгледати на први поглед чудан и незадовољавајући. Међутим, обратимо пажњу на чињеницу да се велики део математике који данас предајемо још увек заснива на принципу уради то и то, уради тако и тако, често без неких нарочитих настојања да дамо иоле строг доказ, посебно у раду са најмлађима. Нажалост, у многим школама се алгебра још увек представља не као дедуктивна наука, већ као скуп правила.

Литература

[1] Радојчић М., Општа математика, Научна књига, Београд, 1950.

[2] Van Der Waerden B. L., Science Awakening, P. Noordhoff LTD - Groningen, Holland, 1954.

[3] Стројк J. Д., Кратак преглед историје математике, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1991.

[4] Хогбен Л., Стварање математике, Вук Караџић, Београд, 1972.

[5] Девиде В., Математика кроз културе и епохе, Школска књига, Загреб, 1979.

[6] Boyer B. C., A History of Mathematics, John Wiley and Sons, New York, 1968.