УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ,

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

ЈЕДАН ПРИСТУП ТЕМИ „ГЕОМЕТРИЈСКА ТЕЛА У ВИШИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ“

СМЕР: ПРОФЕСОР МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА

Ментор: проф. др Александар Липковски

Студент: Маја Јањић 1072/2013

Београд, 2015.

Предговор

Мастер рад пред вама јесте покушај да се неке геометријске теме присутне у вишим разредима основне школе што боље савладају. Из личног искуства и рада са ученицима од петог до осмог разреда, осетила сам потребу да тема мог рада буде посвећена геометрији, посебно геометријским телима. На самом почетку рада можете прочитати пар корисних савета како и на који начин бити креативан и заинтересовати ученике за предмет који се априори сматра тешким и досадним.

Упознаћете се са историјатом геометријских тела, њиховим постојањем у природи, а кроз читав рад ће се помињати и најзначајнији математичари свих времена као и њихови доприноси математици. Биће речи о полиедрима (посебно Платоновим телима), као и о ротационим телима. Захваљујући напретку савремене технологије, геометрију је много лакше објаснити и приказати ученицима. Овај приступ подразумева да сваку обраду теме прате визуелни прикази рађени у програму Геогебра као и видео снимци, који ће помоћи ученицима да сваку лекцију из геометрије савладају без потешкоћа и учине час занимљивијим. Овакав специјалан приступ геометрији даје могућност ученицима да заволе математику и да је добро савладају. На самом крају рада можете прочитати пар занимљивих причица које су добродошле на крају сваког часа са ученицима да „зачине“ час и да натерају ученике да читав дан размишљају и међусобно разговарају о математици и њеним чарима. Све направљене материјале који би пратили овај рад искористила бих у даљем раду са децом. Желела бих да ми он послужи као студија уз помоћ које бих боље и ефикасније примењивала геометрију у својој наставној пракси.

Овим радом бих исказала захвалност својој породици који су ми пружали материјалну и моралну подршку да се он оствари. Наравно, посебна захвалност се односи на мог ментора проф. др Александра Липковског са којим сам имала одличну сарадњу.

У Београду, септембар 2015. Маја Јањић

1. Увод

„Међу људима једнаких умних способности, који раде под истим условима, у предности су они који знају геометрију.“

Блез Паскал, француски математичар, физичар и филозоф.

Колевке геометрије Египат, Месопотамија и Грчка

Геометријом су се људи почели бавити још у најранијој историји. У почетку је то било уочавање карактеристичних облика као што су круг или квадрат. На цртежима у пећинама наилазимо на интересовање људи из првобитних заједница за симетрију ликова. У даљем свом развоју човек долази и до разних својстава геометријских фигура. Углавном је то било због практичних потреба као на пример мерење површине земљишта, одакле и потиче назив геометрије. Први записи о геометрији нађени су у древном Египту и Вавилонији (некадашње краљевство Месопотамије) у периоду до око шестог века старе ере.

Египћани су развили индуктиван метод закључивања од појединачног ка општем (на пример приметили су да један троугао има три угла, па су нацртали други троугао и приметили исто, и тако даље док нису закључили да сви троуглови имају по три угла). Пословична изрека, „Египат је дар Нила“, довољно је позната. Без блатњавих жутих вода те реке што су хиљадама година натапале земљу, не би се развила тако богата цивилизација старог Египта. Но, после великих поплава Нила, сваке би се године границе земљишних поседа избрисале и требало их је поново одредити, ваљало је, дакле, премеравати земљишта. Изградња величанствених храмова, пирамида, кипова, такође је захтевала одређена открића из геометрије. Јавила се потреба за мерењем дужине и запремине предмета. Јединице мерења нису биле прецизне, најчешће су биле изведене из димензија човечјег тела: као на пример палац, стопа или лакат

Месопотамија, подручје између Еуфрата и Тигра на Арабиском полуострву, данас средишњи део Ирака, била је колевка неколико најстаријих култура. Геометрија Месопотамије вероватно је већ око 2000. године пре нове ере располагала правилима за израчунавање површине правоугаоника, правоуглог и једнакокраког троугла (а можда и општег). Обим круга, у старије време, рачунало се с апроксимацијом 3 за број π, а касније су Вавилонци (народи Месопотамије) употребљавали много бољу апроксимацију $\pi = 3{,}125$. За Питагорину теорему су знали али највероватније не и доказ.

Геометријско знање је, по мишљењу грчких историчара, пренесено из Египта и Вавилоније у Грчку. Почетком шестог века старе ере грчки филозофи су се почели упознавати са египатском и вавилонском мудрошћу. Од тада настаје други период развоја геометрије, период систематског излагања геометрије као науке, када се све тврдње доказују. У периоду од Талеса до Еуклида, у античкој Грчкој од шестог до трећег века старе ере геометрија је заснивана на тада откривеној дедуктивној методи закључивања. Наредних два миленијума су 13 књига Еуклидових „*Елемената*“ биле основни уџбеник геометрије у земљама арапског Истока, у средњој Азији, у Индији и Европи.

2. Креативност у настави математике

У данашњем свету све бржег и бржег технолошког развоја и напретка, веома је битно да охрабрујемо и подстичемо ученике да развијају своје креативно мишљење. Апсолутно је незамислив напредак у било којој области или сфери савременог друштва без креативности. Међутим, математика као школски предмет и даље се у веома малој мери повезује са самом креативношћу, без обзира на чињеницу да креативност представља суштински део математике као науке. Едукатори широм света се слажу око тога да креативност мора постати битан део сваког математичког курикулума. Потребно је да наставници буду оспособљени да стварају и примењују окружења погодна за учење и задатке који подстичу развој математичке креативности. Ученике треба изложити математичким проблемима који ће бити пуни изазова, повезани са реалним светом.

– **Математика у реалном свету и свакодневном животу**

Наставници често говоре ученицима да је један од разлога зашто уче математику и то што се математика користи у свакој сфери људског живота. Ипак, у већини случајева, мали број наставника обезбеђује окружење за учење које иде у прилог овом тврђењу. Добра стратегија је подстицати ученике да пишу писмене саставе или извештаје о томе како се математика користи у свакодневном животу. На пример наставници могу ученицима поставити следећа питања као теме. Где све можеш да видиш математику на делу када идеш од школе до куће? Како и када све користиш математику ван школе? Наведи занимања у којима се користи математика. Како и када све користимо математику у спорту? На овај начин се стимулише и подстиче интересовање за математику. Са друге стране, питања овог типа нам дају увид у то колико су ученици научили и какво је њихово функционално знање.

– **Математика у другим предметима**

Кад год је то могуће, треба истакнути и користити везу математике и осталих школских предмета. На тај начин ученици ће схватити важност учења математике. Математика се може користити и у истраживачким задацима у оквиру других предмета. На пример ученици могу добити задатак да истраже неку тему из неке области. За бележење резултата користиће бројеве, табеле, цртаће дијаграме, односно користиће математику као алат.

– **Примена рачунара у математици**

Побољшање квалитета наставе, а самим тим и образовања, тежња је која је све више присутна у нашем школству. Један од начина побољшања наставе је свакако и употреба рачунара. Због тога је улога наставника у савременој настави битно промењена. Она изискује различите способности и компетенције, методичка и дидактичка знања и умења, а једно од њих је и информатичка писменост. Треба нагласити да се улога наставника не може заменити ни најсавременијом машином, али уз примену рачунара у настави, та улога наставника постаје квалитетнија и богатија. О неопходности примене рачунара у настави не треба ни расправљати, јер она омогућава: прилагођавање рада индивидуалним карактеристикама ученика, вишесмерну комуникацију, промену карактера учења и његов шири смисао, подстицање критичког, стваралачког, логичког и аналитичког мишљења ученика, развијање упорности и истрајности, подстицање истраживачког духа и радозналости, подстицање унутрашње мотивације за рад и остваривање бољих резултата у учењу и многе друге. Један од важнијих задатака пред школом је припрема ученика за информатичко друштво у коме ће живети, па је примена рачунара, нарочито у разредној настави значајно друштвено и педагошко питање. Познато је да је припрема наставника за наставни час један од основних дидактичко – методичких захтева. Наставу применом рачунара је немогуће реализовати без претходне добре припреме. Припремање наставе уз помоћ рачунара се може вршити на више начина: припремањем наставних листића, табела, цртежа, анимација, избором музике, фотографија и слично. Поред наведених наставних садржаја, наставник мора да планира и координацију разноликих, али истовремених активности ученика, прилагодити наставу индивидуалним, али и заједничким потребама ученика, као и динамику наставног часа. Презентације су нешто што ученици врло лепо прихватају, као и разне видео записе који прате наставну јединицу. Презентације могу бити израђене и од стране самих ученика најчешће у PowerPoint програму. На овај начин се код ученика развија креативност, мотивација, позитиван такмичарски дух и способност самосталног излагања неке теме. Наиме, наставник може бити прави стручњак и од наизглед предмета који је тежак, сувопаран и досадан (како ученици воле да кажу), учини математику занимљивом, а час динамичним.

3. Историјат геометриских тела

3.1 Полиедри

Правилни полиедри су познати од давнина. Украсни модели који се могу наћи међу исклесаним каменим лоптама датирају од доба касног неолита Шкотске. Треба узети у обзир да се њима није придавала већа пажња него мање симетричним објектима, као и да неких правилних полиедара уопште није било у то време. Коцкице за игру су старе колико и сама цивилизација и у облицима су баш тих правилних полиедара.

Слика: Коцкице за игру

Стари Грци су се доста посветили проучавању правилних полиедара. Неки извори говоре да их је открио Питагора, док други, ипак, указују да је он знао само за тетраедар, хексаедар (коцку) и додекаедар, а да се откриће октаедра и икосаедра везује за Теетета, Платоновог савременика и ученика. У сваком случају, Теетет[1] је математички описао свих пет облика и верује се да је он заслужан за постављање првог доказа да не постоје други правилни полиедри осим ових пет. Конструкције правилних полиедара које се могу наћи у тринаестој књизи *Елемената* највероватније потичу од Теетета, најзначајнијег математичара из Платоновог круга. Стога се може рећи да је откриће правилних тела настало у оквирима Платонове Академије, па ће због тога, ови полиедри бити названи Платоновим телима. Правилни полиедри, познати под називом Платонова тела, описана су у Платоновом Тимају у ком је повезао сваки од четири елемента: ватру, воду, земљу и ваздух са по једним правилним полиедром. И то редом ватру са тетраедром, воду са икосаедром, земљу са коцком (хексаедром) и ваздух са октаедром, док је сматрао да је додекаедар Бог искористио за распоређивање сазвежђа на небу. Еуклид[2] је поставио математички опис сваког полиедра у XIII књизи „*Елемената*“. Могли бисмо рећи да под просторном фигуром Еуклид подразумева геометријски лик у простору који је обухваћен равнима. Он даје прве примере просторних

[1] Теетет Атињанин (око 415 – 369. године старе ере) био је најпре Сократов следбеник, а потом ученик Теодора, чувеног математичара из Кирене, код кога је и Платон учио математику. Теетет је први писао о Платоновим телима.

[2] Еуклид је написао „*Елементе*“ око 300. године старе ере. Еуклидови *Елементи* су најчувенија, најчитанија и најутицајнија расправа из геометрије свих времена. Састоје се из тринаест књига. Иако нема много књига које се са *Елементима* могу поредити по утицају на историју цивилизације, о њеном аутору се веома мало зна. Вероватно је учио у Атини, у Платоновој Академији. У Александрији (Египат) основао је чувену математичку школу.

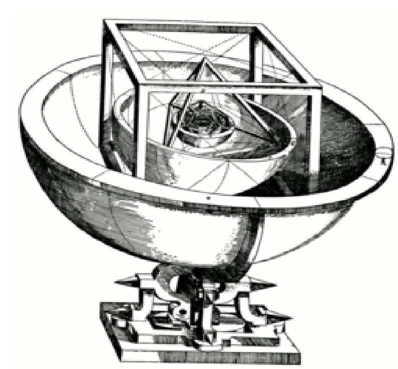
фигура дефинишући: пирамиду, призму, коцку, октаедар, икосаедар и додекаедар назвавши их све просторним фигурама. Он дефинише и сферу, конус и цилиндар у XI књизи, али њих назива само фигурама.

За време ренесансе уметници су постали заинтересовани за перспективу и полиедри су постали изазов и за уметнике и за цртаче. Прве комплетне илустрације свих пет Платонових тела дао је Леонардо да Винчи.

Слика: Да Винчијеви цртежи Платонових тела

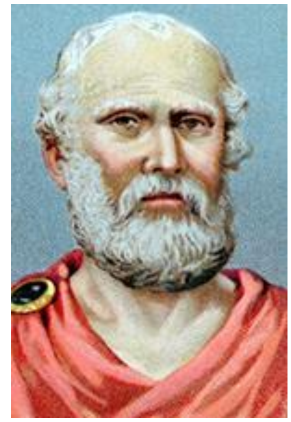
Полиедрима се бавио и Кеплер који је Платонова тела искористио да покаже соларни систем до тада познатих планета. У 16-том веку, немачки астроном, Јоханес Кеплер, покушао је да нађе однос између шест, тада познатих, планета и пет Платонових тела. У књизи „Тајна космоса“, коју је издао 1596. године, Кеплер је приказао модел соларног система. У њему је пет тела постављено једно у другом и одвојено низовима уписаних и описаних сфера. Кеплер је тад претпоставио да се однос удаљености између шест планета може објаснити преко Платонових тела спојених сфером која представља сатурнов прстен.

Свака од шест сфера односила се на по једну од планета система: Меркур, Венеру, Земљу, Марс, Јупитер и Сатурн. Тела су била распоређена са октаедром у средини, око ког се налази икосаедар, затим додекаедар, затим тетраедар и на крају коцка. Касније је Кеплерова идеја била одбачена, али су из његовог истраживања произашла три закона орбиталне динамике, од којих је први да су орбите планета елипсоидне а не кружне, што је променило ток развитка физике и астрономије.



Слика: Кеплеров модел соларног система

3.2 Платон



Слика: Платон

Платон из Атине рођен је око 427, а умро 347. године старе ере. Пореклом је из атинског племства. Као двадесетогодишњак придружио се кругу Сократових следбеника. Путовао је у Египат и јужну Италију. После боравка на Сицилији 387. године, по угледу на питагорејско братство, у Атини је основао своју филозофску школу – *Академију*. Платонова Академија одржавала се непрекидно све до 529. године нове ере када ју је Јустинијан[3] насилно затворио. На улазу у Академију, стајао је натпис:

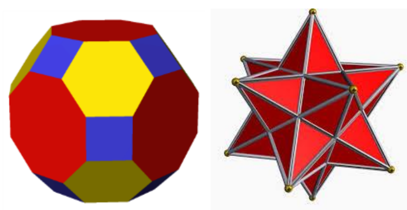
„Нека нико ко не познаје геометрију не улази овде“.

Филозофски утицаји на Платона долазили су од Питагоре, Хераклита, Сократа...Уз Аристотела, Платон је најутицајнији од свих филозофа антике, средњег века, па све до савременог доба. Од њих двојице Платон је имао већи утицај на каснија времена, пре свега због његовог утицаја на самог Аристотела који му је био ученик, а и на хришћанство. Није могуће у целости одредити Платонов значај за математику његовог времена, ипак обим и карактер математичких истраживања у четвртом веку старе ере можемо свести на његов утицај. За Платоновог живота математика се живо развијала и достигла врхунац у делима Теетета ученика Платонове Академије који се бавио правилним полиедрима испитујући њихова заједничка својства. Платон описује правилне полиедре ослањајући се на Теететова геометријска истраживања и у свом делу Тимај помиње правилне полиедре. Платон овим телима не даје имена већ их просто назива „облицима“ и описује њихова геометријска својства. Он не конструише правилне полиедре, нити доказује њихову егзистенцију и јединственост, већ их само описује и то користећи троуглове. Један од правилних полиедара, тетраедар описан је на следећи начин: *„ А таква четири једнакостранична троугла саставе се тако да по три његова површинска угла чине један просторни угао (рогаљ), чија величина непосредно превазилази величину највећег тупог површинсаког угла. Пошто су довршена четири таква рогља, састављен је први просторни облик који може делити на једнаке и сличне делове сваку сферу у коју је уписан“.*

[3] Јустинијан познат као последњи римски и први византијски цар, император Источног римског царства (од 527— 565. године) и православни теолог. Настојао да обнови моћ, величину и организацију Римског царства која је била распарчана унутрашњим трзавицама и упадима варвара, народа који су продрли на територију Западног римског царства. Укинуо је све нехришћанске филозофске школе у Атини 529. године, укључујући и Платонову Академију.

Данас у уџбеницима полиедри се дефинишу на следећи начин:
полиедар је део простора који је ограничен многоугловима, при чему важе следећи услови:

- свака страница било ког многоугла је страница још једног њему суседног многоугла,
- свака два суседна многоугла припадају различитим равнима и
- свака два несуседна многоугла се могу повезати низом многоуглова, таквим да су узастопни чланови суседни многоуглови.



Слика: Конвексан и неконвексан полиедар

Није тешко видети да полиедри приказани на претходним сликама задовољавају сва три поменута услова. Поменимо и то да је полиедар са леве стране конвексан, док је са десне стране приказан један неконвексан полиедар.

Префикс *поли* – води порекло од грчке речи *полис* и значи много (и учествује у великом броју сложеница: полином, полигон, поликлиника, полиглота и тако даље).

3.3 Ојлерова формула

Швајцарски математичар Леонард Ојлер (1707 – 1783. године) убраја се у најзначајније математичаре свих времена. Ојлер је дошао до великих открића у потпуно различитим областима како математике тако и физике, астрономије, музике. Процењује се да би се Ојлеровим радовима могло испунити око 80 књига великог формата. Велики број математичких термина носи његово име. Формулу која повезује број темена (T), ивица (I) и страна (S) конвексног полиедра

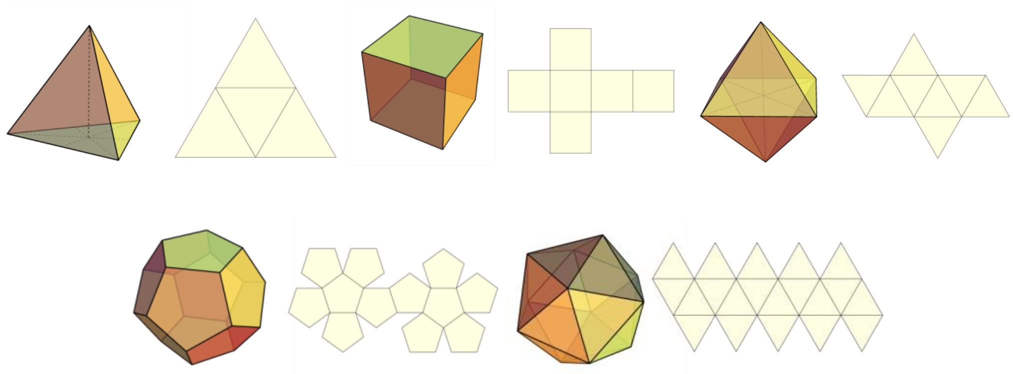
$$T - I + S = 2$$

Слика: Леонард Ојлер

извео је Ојлер, па је она данас и позната као Ојлерова формула. Наведена формула важи за било који конвексан полиедар.

3.4 Платонова тела

Правилни полиедри су конвексни полиедри чије су све стране правилни и међусобно подударни многоуглови и код којих из сваког темена полази исти број ивица. Занимљиво је да постоји само пет полиедара који задовољавају поменуте услове, још их зовемо Платонова тела.



Слика: Тетраедар, хексаедар (коцка), октаедар, додекаедар, икосаедар

Њима су се бавили и Питагорејци који су били чак и очарани, а највише пажње изазивала је чињеница да правилних полигона има бесконачно много, а оваквих правилних тела само пет. Платонова тела су: **правилни тетраедар, правилни хексаедар, правилни октаедар, правилни додекаедар и правилни икосаедар**.

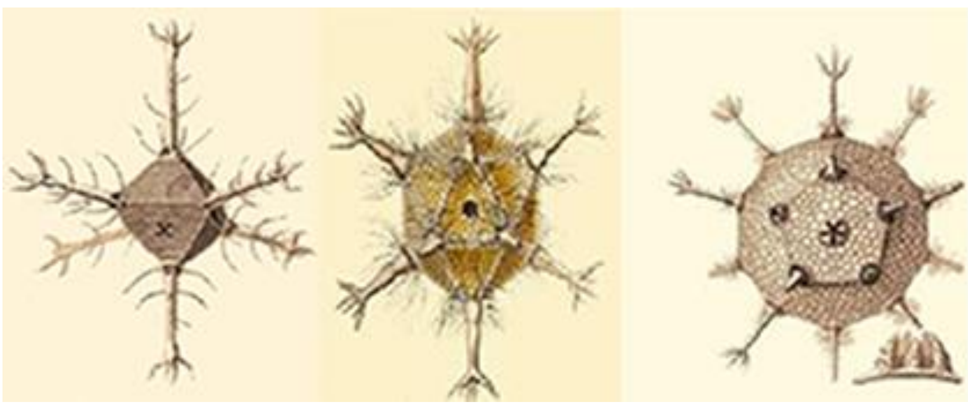
Ако сваки полиедар означимо са $\{p, q\}$, истичући да су све пљосни овог полиедра p –углови, по q код сваког темена, онда ће се правилни тетраедар, правилни хексаедар, правилни октаедар, правилни додекаедар и правилни икосаедар редом обележавати $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 3\}$, $\{3, 5\}$. Ако претпоставимо да су пљосни правилног полиедра $\{p, q\}$ конвексне полигонске површи и да су ми сви рогљеви такође конвексни, тада ће сваки унутрашњи угао пљосни таквог полиедра бити $(p-2)\pi/p$ па, будући да је код полиедра коме суседне пљосни не припадају једној равни, сума q таквих углова мања од 2π, биће $q(p-2)\pi/p < 2\pi$, тј. $(p-2)(q-2) < 4$. Дакле, $p-2$ и $q-2$ су природни бројеви чији је производ мањи од 4 па су тиме одређене једине могућности: $1 \cdot 1$, $1 \cdot 2$, $2 \cdot 1$, $1 \cdot 3$, $3 \cdot 1$. Одатле следи да постоји највише пет конвексних правилних полиедара.

Име	Тетраедар	хексаедар	октаедар	додекаедар	Икосаедар
Број страна	4	6	8	12	20
Број ивица	6	12	12	30	30
Број темена	4	8	6	20	12

3.4 Правилни полиедри око нас

Како се правилни поледри сматрају савршеним телима природа је уредила да се могу наћи у животињском свету и људском телу, да се многа хемијска једињења и минерали могу наћи у облику правилних полиедара, а да ли због своје симетрије или због неке друге особине која их чини угодним људском оку Платонова тела одувек су била интересантна уметницима и архитектама.

3.4.1 Платонова тела у живим организмима

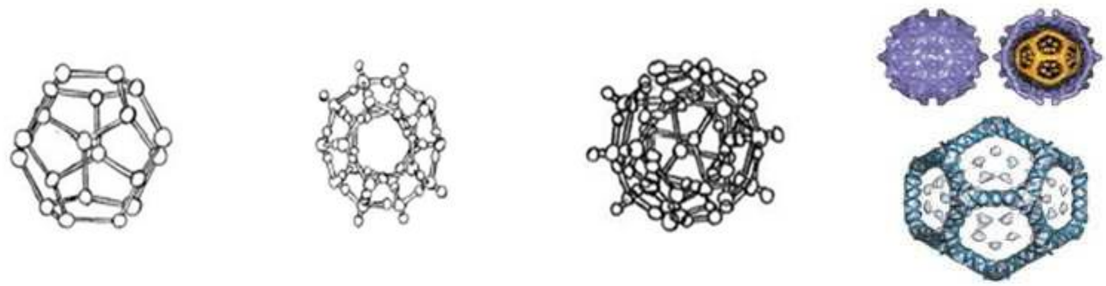


Слика: Скелети једноћелиских организама

Неки од правилних полиедара се препознају у скелетима Радиоларија. Радиоларије су бројна група морских једноћелиских протиста са минералном љуштуром. Неки од правилних полиедара се препознају у њиховим скелетима: *Circoporus octahedrus* （октаедар）, *Circogonia icosahedra* （икосаедар）, *Lithocumbus geometricus* （хексаедар）, *Circorrhegma dodecahedra (*додекаедар） и *Protozoa Callimitra agnesae* （тетраедар）.

Протозое су једноћелиски организми, распрострањени у морима, копненим водама и влажној земљи а многе живе на или у телима других организама.

Скелет Радиоларија из протеклих геолошких периода је доста добро сачуван и зато се и њихове љуштуре употребљавају за одређивање старости појединих слојева. Многи познати вируси својом структуром подсећају на правилне полиедре. На пример вирус ХИВ – а инкапсулиран је у правилни икосаедар, док је вирус *Pariacoto Virus (Pav)* са додекаедарским кавезним обосмерним РНА. Икосаедар које је и сам Платон повезао са водом најзаступљенији је облик структурног увећања воде са ниским садржајем честица. У непрекидном низу икосаедарских структурних увећања налазе се додекаедри.



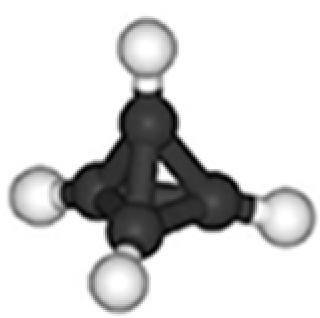
Слика: *Pariacoto Virus*

Вода има тенденцију да се групише у додекаедре а затим у икосаедарске кластере. Груписање молекула може да буде различито, што изазива особене карактеристике. Када молекули воде формирају додекаедар, то значи да вода може да ускладишти до сто пута више енергије, у њој могу да се стварају протеинске форме, и да функционишу органеле. Како вода у свом молекулском облику не може да пролази кроз аквапоринске канале (поре на ћелиској мембрани), структурирање у додекаедре и икосаедре омогућава њен пролазак кроз раније поменуте канале, чиме се омогућава нормално функционисање ћелија.

3.4.2 Платонова тела у хемији

Угљоводоници који представљају молекуларне презентације правилних полиедара називају се Платонови угљоводоници. Код њих су темена замењена атомима угљеника, а ивице хемиским везама.

Тетраедран је Платонов угљоводоник, хемијске формуле C_4H_4 и тетраедарске структуре. Превелики угаони напон спречава овај молекул да настане природно.



Слика: Тетраедран

Кубан (C_8H_8) је синтетички угљоводонични молекул који се састоји од осам угљеникових атома распоређених у угловима коцке са по једним атомом водоника везаним за сваки атом угљеника. Кубан је кристална супстанца и представља угљоводоник са највећом густином, што додатно доприноси његовој способности да садржи велике количине енергије. Из тог разлога тражи се начин његове употребе у медицини. Пре његове синтезе, истраживачи су веровали да га је немогуће синтетисати због угла од 90°, јер би при томе угљеникови атоми били под превеликим притиском и самим тим би једињење било нестабилно. Изненађујуће, насупрот томе, кубан је кинетички врло стабилан због недостатка начина да се распадне. Кубан и његови деривати имају важне особине. Због напетих веза, деривати кубана поседују велику реактивност што их чини веома корисним горивима велике густине и експлозивима великог енергетског садржаја.

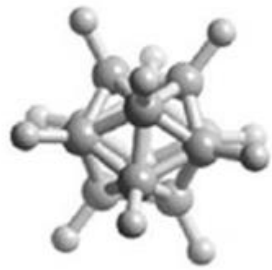
Слика: Кубан

Додекаедран ($C_{20}H_{20}$) је хемијско једињење које садржи 20 атома угљеника синтетисано да би се доказало да је синтеза оваквог молекула могућа. У овом молекулу свако теме је атом угљеника који везује три суседна атома угљеника. Сваки угљеников атом је такође везан за по један водоников атом.

Слика: Додекаедран

Са порастом броја угљеникових атома у мрежи, геометрија се коначно приближава сфери. Ово је најзад постигнуто код фулерена (који су класа алотропа угљеника који се састоје од графенских слојева смотаних у тубе или сфере), иако он сам није правилан полиедар. Бакминстер фуларен C_{60} има облик засеченог икосаедра, Архимедовог тела. Архимедова тела се могу посматрати као тела настала засецањем Платонових тела или даљим засецањем тако добијених тела.

Икосаедарска структура је пронађена код боровог једињења $B_{12}H_{12}^{2-}$. За ово се знало много година пре проналска молекула C_{60}.



Слика: Алотропска модификација бора

Алотропске модификације угљеника су графит, фуларен и дијамант. Угљеникови атоми у дијаманту заузимају тетраедарску структуру. Дијамант је безбојна, кристална супстанца са великим индексом преламања светлости и он је најтврђи минерал у природи. Три од пет правилних полиедара се могу наћи у природи као кристали:

тетраедар као кристал натријум антимонсулфида ($Na_3SbS_4 \cdot 9H_2O$)

хексаедар као кристал натријум хлорида ($NaCl$)

октаедар као кристал калијумхлор сулфата ($K_2Cr(SO_4)_4 \cdot 24H_2O$).

3.4.3 Платонова тела у уметности и архитектури

Правилни полиедри су кроз готово читаву историју приказивани као уметнички мотиви. Људи су увек имали интересовања за њих, тако да њихове облике препознајемо на многим сликама, коришћени су као играчке или као делови употребних предмета и самог дизајна у ширем смислу. Готово ниједна друштвена игра се не може замислити без коцкица, које су најчешће облика правилног хексаедра, мада могу бити облика било ког од Платонових тела.

Слика: Варијанте Рубикове коцке

У многим музејима приказиване су коцке периода разних династија. Многи су били опседнути њима да ли због њихових математичких особина или зато што су им једноставно привлачиле пажњу.
У Шкотској и Ирској пронађена је група камења која подсећа на Платонова тела и потичу из периода касног неолита и раног бронзаног доба.

Слика: Група камења која подсећа на Платонова тела

У Француској је облик додекаедра искоришћен као контејнер за одлагање комуналног отпада и рециклаже. Форме инспирисане правилним полиедрима се налазе у архитектури и модерном дизајну. У архитектури 70-тих и 80-тих година развио се нови принцип градње. Покушало се са применама коцки и додекаедара као стамбених јединица. У Холандији се овај дизајн показао као успешан те се овакви станови воде као луксузни и изузетно је пријатно боравити у њима.

Слика: На тротоару, Француска

Слика: Ротердам

Слика: Последња вечера, Салвадор Дали

Занимљиво је како су правилним полиедрима често били заокупљени уметници. Познати су цртежи полиедара Леонарда да Винчија као и слика Салвадора Далија „*Последња вечера*" коју је сместио у простор правилног додекаедра. Торањ музеја савремене уметности Наги у Мито Ибараки у Јапану, сачињен је од тетраедара који се међусобно ослањају на једну заједничку страну тетраедра. На овако генерисаној конструкцији темена тетраедра образују четири завојне линије.

Слика: Музеј Наги, Јапан

4. Питагора, Талес и њихове теореме

4.1 Питагорина теорема

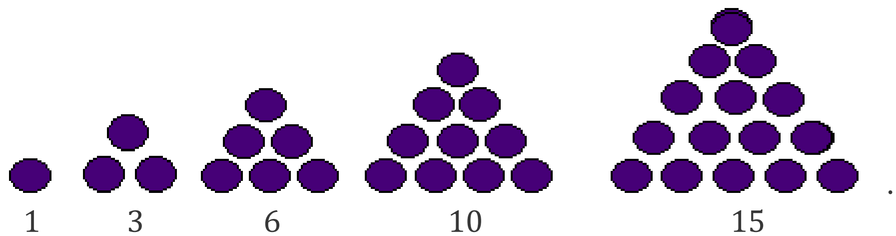
Слика: Питагора

Питагорина теорема је дубок и вишесмислен став геометрије који до нас допире из далеке прошлости. Још од античких времена она је основ пре свега геометријског, а потом и сваког другог образовања. Еуклид, који је поменут на почетку рада, ову теорему смешта на самом крају прве књиге *Елемената*. Како се свака од тринаест књига овог дела завршава неким од веома значајних ставова геометрије онога времена, крунисањем прве књиге *Елемената* Питагориним ставом Еуклид је ову теорему поставио на прво место у геометрији.

Питагора са Самоса (Грчка), један је од најутицајнијих људи грчке интелектуалне историје, рођен средином шестог века старе ере. Још су древни Вавилонци и Кинези открили везу између дужина катета и хипотенузе, али само за неке правоугле троуглове. На пример знали су да је 5 јединица мере дужина хипотенузе правоуглог троугла чије су катете 3 и 4 јединице мере. Такође, било им је познато да једнакост $3^2 + 4^2 = 5^2$ није пука случајност карактеристична само за овај правоугли троугао, већ да аналогну једнакост задовољавају дужине страница и неких других правоуглих троуглова. На пример, правоуглих троуглова чије су странице два, три и тако даље пута дуже од страница поменутог троугла. Оно што нису знали јесте чињеница да поменуту једнакост задовољавају дужине страница било ког правоуглог троугла. Питагора је доста путовао, а најзначајнија путовања су боравци у Вавилону и Египту. Са Самоса се сели у јужну Италију у град Кротон где оснива своју школу. Тај „питагорејски начин живота“ обухватао је посебан начин одевања и исхране, обавезу међусобног помагања и заједништва, рад на математици, музици и астрономији. Једна приповест казује како је питагорејац Хипас избачен из питагорејског братства, јер је непосвећенима одао неку своју математичку истину. Питагорејци су целе бројеве замишљали као камичке или тачке које су распоређивали у одређене геометријске облике. Установили су да неке бројеве могу да добију тако што ће поставити камичке у два реда по два, три по три и тако даље, при чему свака слика представља квадрат. Питагорејци су ове слике саздане од камичака називали „**квадратни бројеви**“,одакле потиче наш данашњи назив „**квадрати**“ за бројеве $4, 9, 16$ и тако даље. Такође су установили да се други бројеви могу добити тако што ће се број камичака повећавати за по један у сваком реду, чиме настаје слика троугла саздана од $3, 6, 10$ и тако даље камичака. Особине квадратних и троугаоних бројева очаравале су Питагорејце. Тако је, на пример, други квадратни број 4, једнак збиру прва два непарна броја,

$1+3$. Трећи 9, једнак је збиру прва три непарна броја $1+3+5$, (ово важи и за први квадрат $1=1$) и тако даље. Док су квадратни бројеви једнаки збиру наизменичних непарних бројева, Питагорејци су уочили да на исти начин троугаони бројеви представљају збирове свих наизменичних бројева, како парних тако и непарних.

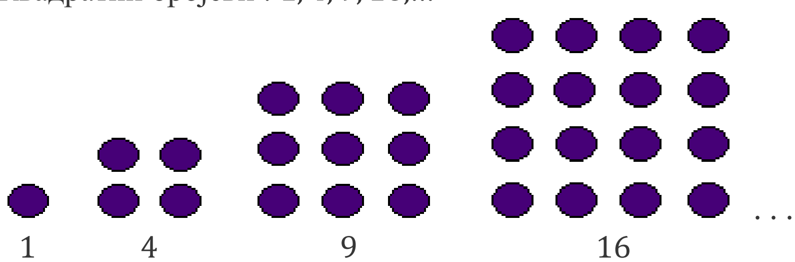
Троугаони бројеви : 1, 3, 6, 10, 15…



$1 = 1$
$3 = 1+2$
$6 = 1+2+3$
$\dots$

Ако би камичке поређали тако да у први ред ставе један камичак, у други два, у трећи три, а у четврти четири, добили би троугаону схему која се састоји од 10 камичака. Ову фигуру су звали *тетрактрис* и за њих је она имала митски значај. Ако би наставили ређање камичака у троугаону схему и поређали n редова са n камичака у последњем реду, онда би овом троуглу могли да додају њему подударни, централно симетрични троугао такав да ова два троугла чине паралелограм са n врста и $n+1$ колона. Одавде су лако могли да закључе да је:
$\mathbf{1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$.

Квадратни бројеви : 1, 4, 9, 16,...



$1 = 1 = 1^2$
$1+3 = 4 = 2^2$
$1+3+5 = 9 = 3^2$
$1+3+5+7 = 16 = 4^2$
$\dots$

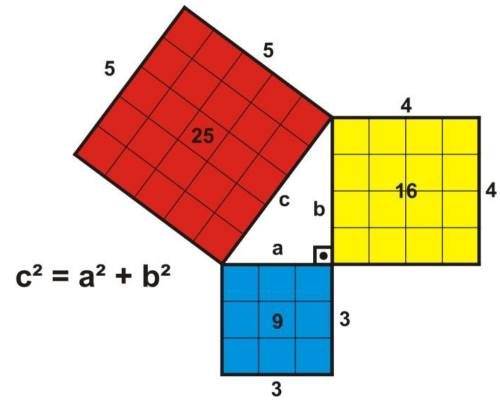
Ако бисмо камичке ређали у облику квадрата тако да се свака његова ивица састоји из n камичака, тада бисмо могли да издвојимо један камичак у једном темену, да приметимо да су њему суседна следећа три камичка у правоуглој схеми – облику који су Грци називали *гномоном*. Трима камичцима овог гномона суседни су пет камичака новог гномона и тако даље, док на крају не преостане $2n-1$ камичака у последњем гномону. Како нам скуп камичака у свим гномонима исцрпљује све камичке квадрата,
закључујемо да је $\mathbf{1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2}$.

Слично, ако би каменчиће распоредили у облику правоугаоника са n врста и $n+1$ колона и ако издвојимо један камичак у углу и један њему суседни камичак из исте врсте, тада би се гномон њима суседних камичака састојао из 4 камичка, следећи гномон би имао 6 и тако даље. Последњи гномон би имао $2n$ камичака,
па се одавде може закључити да је $\mathbf{2+4+\ldots+2n=n\cdot(n+1)}$. Као филозоф сматрао је да је суштина свих ствари број, бројеве је делио на лепе, ружне, мушке, женске и тако даље. Иако није ништа написао, њему се преписује да је утврдио да је збир унутрашњих углова троугла једнак збиру двају правих углова, да је умео да докаже да важи четрдесет седми став прве књиге Еуклидових *Елемената* данас познат као Питагорина теорема. Након Питагорине смрти Питагорејска школа је још дуго била на окупу.

Теорема

Површина квадрата над хипотенузом правоуглог троугла једнака је збиру површина квадрата над катетама тог троугла.

У зависности од тога шта у овој формулацији називамо квадратом, а шта подразумевамо под једнакошћу квадрата, ову теорему можемо разумети на три начина: геометријска једнакост, мерење дужи или мерење површина. Ако се под квадратом подразумева квадратна површ онда се претходно тврђење односи на геометријску једнакост (разложиву или допунску).

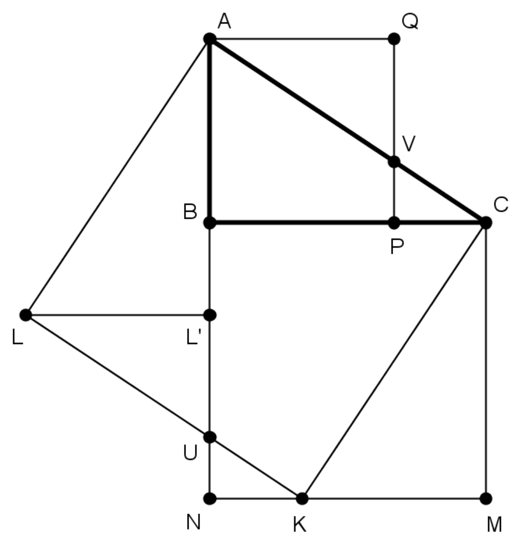


Слика: Питагорина теорема

Ученици ову теорему памте и у виду стихова: *„Питагорину теорему, то зна свако дете, квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над обе катете“.*

Доказ (помоћу разложиве једнакости)[4]

Ако је ABC троугао са правим углом код темена B, можемо претпоставити да је $AB \leq BC$. Ако су затим, ACKL, BCMN и ABPQ квадрати који се редом налазе са оних страна правих AC, BC и AB са којих су, редом, тачке B, K и C, тада, ако са L' обележимо подножје управне из тачке L на правој AN, а са U и V тачке у којима се секу парови правих KL и BN, PQ и CA, биће троуглови $AL'L$ и CMK, $LL'U$ и AQV, VPC и UNK, међусобно транслаторно подударни. Одатле следи да је квадратна површ ACKL, разложиво једнака унији квадратних површи BCMN и ABPQ.



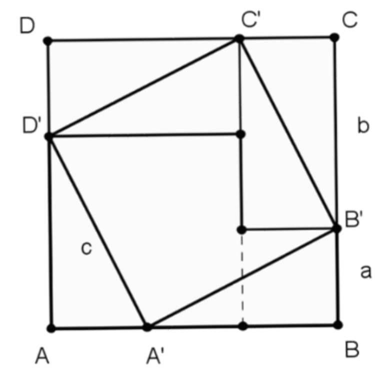
Слика: Доказ теореме помоћу разложиве једнакости

[4] Поједностављено, понекад лакше разумљивим негеометријским језиком, можемо рећи да, ако је квадрат којем је ивица хипотенуза неког правоуглог троугла, начињен од папира, тада се он може маказама исећи на коначно много делова, тако да се квадрати којима су ивице катете тог правоуглог троугла могу њима покрити без остатка.

Доказ (помоћу допунске једнакости)[5]

Питагорина теорема се најчешће у уџбеницима доказује на овај начин.

Нека је ABCD квадрат чије су ивице једнаке збиру катета a и b правоуглог троугла којем је хипотенуза c, а A', B', C', D', редом, тачке ивица AB, BC, CD, DA такве да је A'B'C'D' квадрат ивице c. Јасно, квадратна површ ABCD је унија квадратне површи A'B'C'D' и четирију троугаоних површи којима су ивице a, b, c. Међутим, површ ABCD је унија двеју квадратних површи ивица a и b које припадају дужи AB и двеју правоугаоних површи којима су дијагонале B'C' и C'D'. Како су те две правоугаоне површи унија четирију троугаоних површи којима су ивице a, b, c, квадратна површ A'B'C'D' ивице c биће допунски једнака унији двеју квадратних површи којима су ивице a и b.

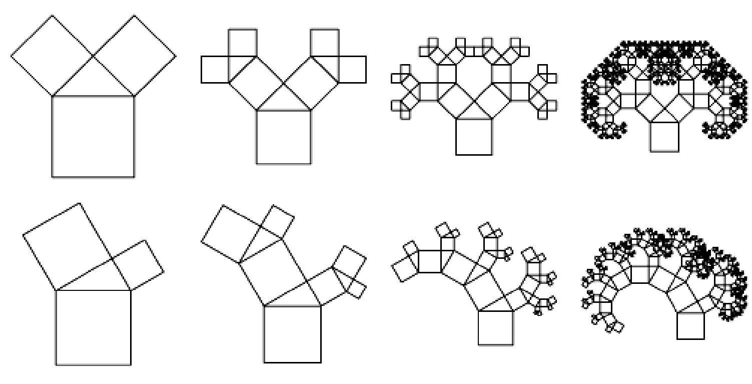


Слика: Доказ теореме помоћу допунске једнакости

4.1.1 Занимљивости везане за Питагору

* Легенда каже да је, пошто је открио чувену теорему, Питагора приредио свечаност жртвовања стотину волова, тада заступљену у Грчкој. Од тада кажу да волови не воле математику.

* Питагорино дрво. Уз коришћење Питагорине теореме конструисањем квадрата над катетама и хипотенузом могу се добити разни геометријски облици – **фрактали**.

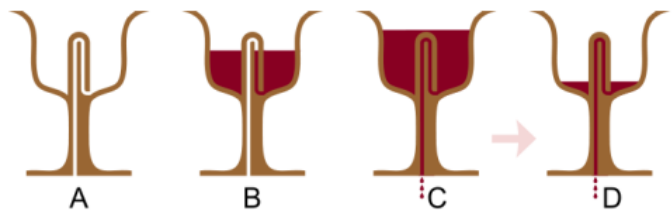


Слика: Питагорино дрво

[5] Допунска једнакост представља разлагање ликова на међусобно подударне и допуњавање подударним ликовима.

Фрактал је појам којим означавамо геометријски лик који можемо да поделимо на бесконачан број делова, при чему ће сваки од њих бити исти или сличан почетном лику.

* Братству и његовом оснивачу приписују се поједини изуми научне вредности попут **чаше умерености** која ради по хидрауличким принципима. Користила се као дисциплинска мера и показатељ да је умереност битна. А умереност је у античко доба била једна од **четири темељне врлине**, поред разборитости, праведности и храбрости. Чашу умерености је изумео Питагора са Самоса као дисциплинску меру за себе и своје ученике, питагорејце. Осмишљена је тако да особи дозвољава да вино сипа до предодређене количине, која је назначена испупчењем на унутрашњости чаше. Ако се пиће сипа тако да не прекрије избочину, особа га може пити у миру. Ако, пак, похлепно напуни пуну чашу, механизам унутар ње просуће кроз рупу на сталку сву количину вина на корисникова крила — корисник ће бити постиђен због похлепе, а вино протраћено. На тај начин би требало да научи да је најбоља умереност у пићу.



Слика: Питагорина чаша

Питагорејска чаша изгледа као било који други суд за пијење, с тим што има избочину у средини унутрашњости. На дну избочине чаше умерености налази се отвор која је посебном отвореном цеви повезана за други отвор, овог пута на самом дну сталка чаше. Сама цевчица је савијена, а извија се скоро па до врха избочине. Док се чаша пуни, течност се издиже не само у видљивом делу из којег се пије, већ и у једном краку цеви, све до врха испупчења, а према **Закону спојених судова** како га је формулисао *француски математичар, физичар и филозоф* **Блез Паскал**, све док ниво течности не премаши ниво коморе (у овом случају висину избочења), чаша ће функционисати као и све остале. Међутим, уколико до тога дође, течност ће полако почети да истиче из чаше у спољашњи простор. Хидростатички притисак ће напослетку довести до истицања свег садржаја чаше кроз рупу на дну сталка.

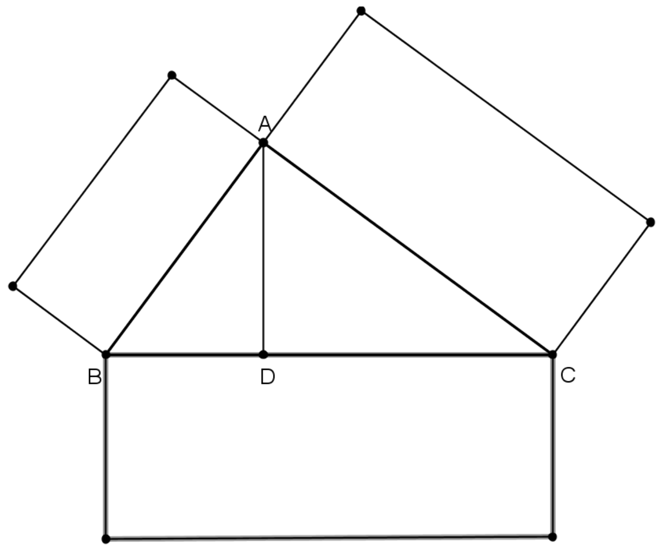
Данас се на Самосу могу купити туристичке верзије чаша, обично са натписом следеће садржине: *Предање каже да је Питагора, приликом надгледања радова на водоводном систему на Самосу око 530. године пре нове ере., ограничавао количину вина коју су радници пили измисливши „чашу умерености“. Када вино превагне над избочином, чаша се у потпуности испразни, а похлепни буду кажњени.*

Значај Питагорине теореме је превазишао област геометрије, тако да има примену у свим научним дисциплинама. Њеним правилним формулисањем Питагора је уцртао нову путању развоја геометрије, па и целокупне математике. Ширина примене је омогућена тиме што већину геометријских тела и фигура можемо поделити на правоугле троуглове и тиме олакшати израчунавање обима, површине или неких других елемената. Смернице које је

Питагора, заједно са својим следбеницима Питагорејцима дао пре две хиљаде година и даље су актуелне упркос мноштву нових открића током векова. Његова генијалност да види ствари испред свог времена је и даље инспирација научницима да проучавају његову широку заоставштину.

4.1.2 Уопштење Питагорине теореме

Ученици углавном Питагорину теорему везују само за квадрате који су конструисани над катетама и хипотенузом правоуглог троугла. Ако квадрате у формулацији Питагорине теореме заменимо било каквим међусобно сличним ликовима, теорема ће опет важити. У тридесет првом ставу шесте књиге *Елемената* Еуклид на следећи начин дефинише уопштење ове теореме.



Слика: *Елементи*, VI.31

Код правоуглих троуглова слика конструисана на страни наспрам правог угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних слика над странама које образују прав угао.

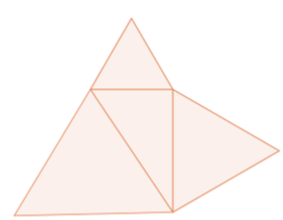
Нека је ABC правоугли троугао са правим углом BAC. Тврдим да је слика конструисана над BC једнака збиру сличних и слично конструисаних слика над BA и над AC. Повуцимо нормалу AD. Труглови ABD и ADC су слични троуглу ABC, а и међу собом. Како је ABC сличан ABD следи да је

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}^2} \text{ тј. } \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{CB}^2}{\mathrm{BA}^2} = \frac{\mathrm{P(CB)}}{\mathrm{P(BA)}},$$

где су $\mathrm{P(CB)}$ и $\mathrm{P(BA)}$ површине фигура над ивицама CB и BA. Слично, $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{P(BC)}}{\mathrm{P(CA)}}$, па је $\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BD} + \mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{P(BC)}}{\mathrm{P(BA)} + \mathrm{P(CA)}}$. Како је BD + CD = BC, биће

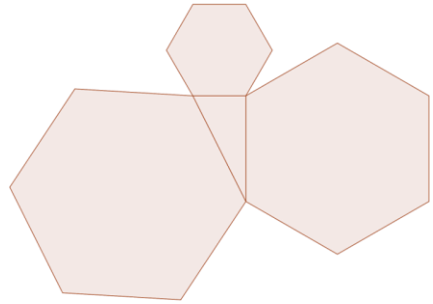
$$\mathrm{P(BC)} = \mathrm{P(BA)} + \mathrm{P(CA)}.$$

Задатак 1. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су једнакостранични троуглови. Испитај



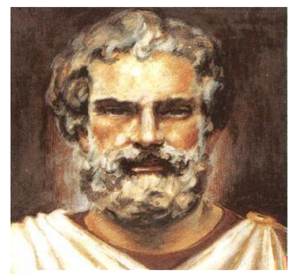
да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Задатак 2. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су правилни шестоуглови. Испитај да ли је збир површина шестоуглова над катетама једнак површини шестоугла над хипотенузом.



4.2 Талесова теорема

Талес је рођен у Милету, грчкој колонији на обали Мале Азије око 624. године пре нове ере. Умро је у 78. години. О значају Талеса за Грчку, па тиме и светску културу најбоље говори чињеница да је сврстан у „седам мудраца“ – седам утемељивача грчке цивилизације. Многи га сматрају оцем грчке математике.



Слика: Талес

4.2.1 Мерење висине пирамиде

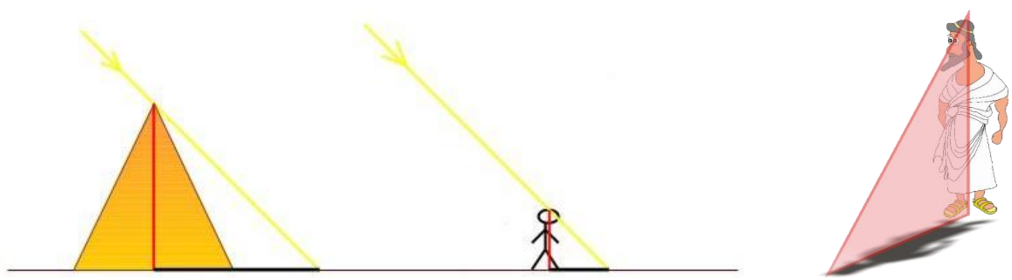
Једна од античких легенди о раним грчким мислиоцима казује како је Талес задивио египатског фараона Амазиса, или у неким изворима свештенике тиме што је успео да израчуна висину велике пирамиде у Гизи. Најстарије предање које је до нас доспело, а односи се на Талесово мерење висине пирамиде, потиче од Аристотеловог ученика Хијеронима. Он прича да је Талес измерио висину пирамида по њиховој сенци, посматрајући тренутак када је његова сенка била исте дужине као његово тело.

Слика: Кеопсова пирамида у Гизи

Слика: Дошао је у Египат да би измерио оно што се сматрало неизмерљивим

...И тако он стоји у песку поред велике пирамиде. Један од свештеника га смешећи запита, колико је висока пирамида? Талес мало размишља па одговори да он неће висину ценити од ока, него ће је измерити и то без неког нарочитог прибора. Затим је легао у песак и одмерио своју дужину тела.

-„Шта ли то смера?“- питају свештеници, а он већ одговара: - „Једноставно, стаћу на један крај ове измерене дужине свог тела и чекаћу док моја сенка не буде тачно онолико дуга колико је и дужина мог тела“.
У истом тренутку мораће и дужина сенке пирамиде бити онолико корака колико је пирамида висока".

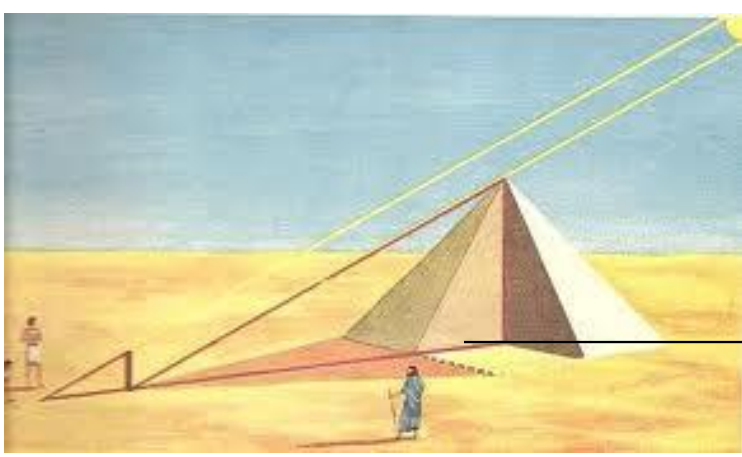


висина пирамиде = дужина сенке пирамиде

Талесова висина = дужина Талесове сенке

Слика: Како је Талес измерио висину пирамиде помоћу сенке

И док је свештеник изненађен једноставношћу решења још размишљао...Талес наставља:
- „А ако хоћете, да измерим ову висину у било које доба дана, тада ћу забости овај штап у песак...и ако његова сенка на пример износи половину дужине штапа тада ће морати и сенка пирамиде да буде тачно половина њене висине. Ви сте познати да мерења изводите врло тачно, па онда треба само дужину штапа упоредити са дужином сенке; да би добили висину пирамиде - треба помножити дужину сенке пирамиде са добијеним бројем“.



Део сенке пирамиде који је унутар ње, износи половину странице основе пирамиде

Слика: Мерење висине у било које доба дана

висина пирамиде : дужина сенке пирамиде = висина штапа : дужина сенке штапа

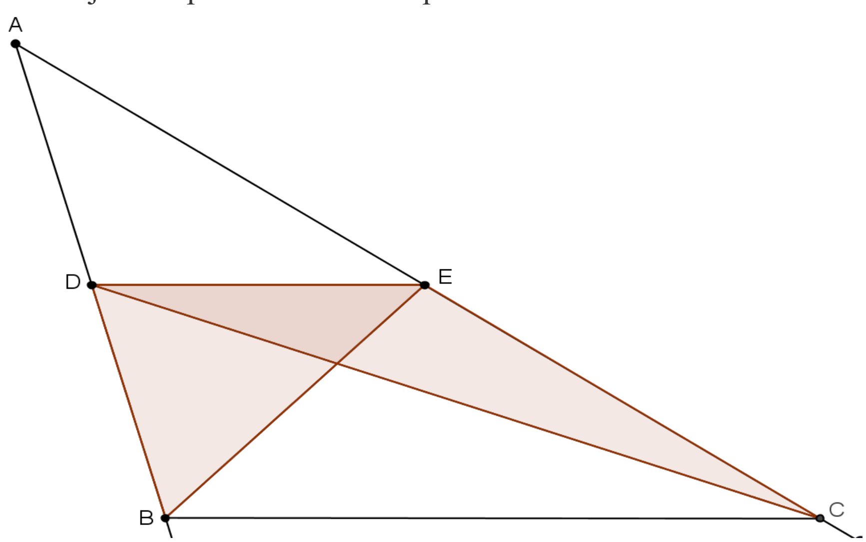
Тако је Талес победио великог противника!!!

Ипак, мало је вероватно да сами Египћани нису умели да израчунају висину пирамида, будући да је вештина њихових градитеља морала почивати и на многим геометријским знањима. Овој тврдњи у прилог иду и сачувани писани документи из којих се види да су Египћани умели да користе висину пирамиде при рачунању њене запремине.

Теорема

Основни став сличности који најчешће називамо Талесовом теоремом има дугу и занимљиву повест која, слично Питагорином ставу о правоуглим троугловима, има врло значајно место у математици.

- Ако је у троуглу повучена нека права паралелно једној од страна, та права сече остале стране пропорционално; и ако су стране троугла пресечене пропорционално, права што спаја пресечне тачке паралелна је преосталој страни троугла.
  Нека је у троуглу ABC повучена права DE паралелно BC, једној од страна троугла. Тврдимо да је BD према DA као CE према EA.
- Еуклид га **доказује** на веома једноставан начин.
  Повуку се BE, CD. Троугао BDE је једнак троуглу CDE јер они имају исте основице DE, а између истих су паралелних DE, BC. А троугао ADE је нешто друго. Како су сад једнаке величине према истој величини у истој размери, и троугао BDE је према троуглу ADE као троугао CDE према троуглу ADE. Али троугао BDE је према троуглу ADE као BD према DA, пошто имају исту висину, нормалу спуштену из E на AB, и односе се као основице. Из истих разлога троугао CDE је према троуглу ADE као CE према EA. И тако је BD према DA као CE према EA.



Слика: Доказ Талесове теореме (*Елементи*, VI. 2)

Важи и обрнуто тврђење, које се слично доказује.

Краће записано, из претпоставке да су праве BC и DE паралелне Еуклид изводи да је

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{P(BDE)}}{\mathrm{P(ADE)}} = \frac{\mathrm{P(CED)}}{\mathrm{P(AED)}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}},$$

зато што се површине двају троуглова који имају исту висину односе, једна према другој, као основице тих троуглова, атроуглови са истом основицом и висином имају исту површину.

Обратно, ако се претпостави да је $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}$,

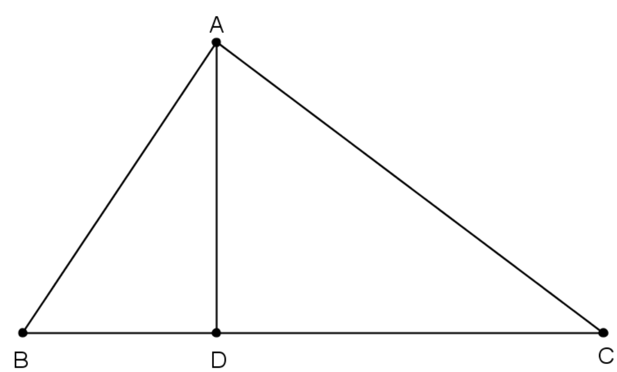
биће и $\frac{\mathrm{P(BDE)}}{\mathrm{P(ADE)}} = \frac{\mathrm{P(CED)}}{\mathrm{P(AED)}}$,

па троуглови BDE и CED који имају заједничку ивицу DE, имају исту и висину, тј. праве BC и DE су паралелне.

4.2.2 Примена сличности за доказивање Питагорине теореме

Ако се у формулацији Питагорине теореме под квадратом подразумева квадрат мере дужи, дакле број, онда ту теорему можемо разумети на следећи начин.

Ако је угао A троугла ABC прав, тада је $AB^2 + AC^2 = BC^2$,



Слика: Доказ Питагорине теореме помоћу сличности где су AB, AC и BC, редом, обележене мере двеју катета и хипотенузе троугла ABC.

У сврху доказа овог става обележимо са D подножје управне из A на правој BC. Тада је

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBA \quad \text{и} \quad \Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC\ ,$$

а одавде следи да су задовољене следеће две релације:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}\ .$$

Стога је

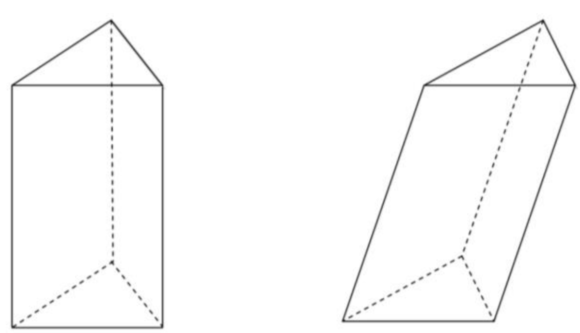
$$AB^2 = BC \cdot BD \quad \text{и} \quad AC^2 = BC \cdot CD,$$

а из ових двеју једнакости следи да је

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC \cdot (\,BD + CD) = BC^2.$$

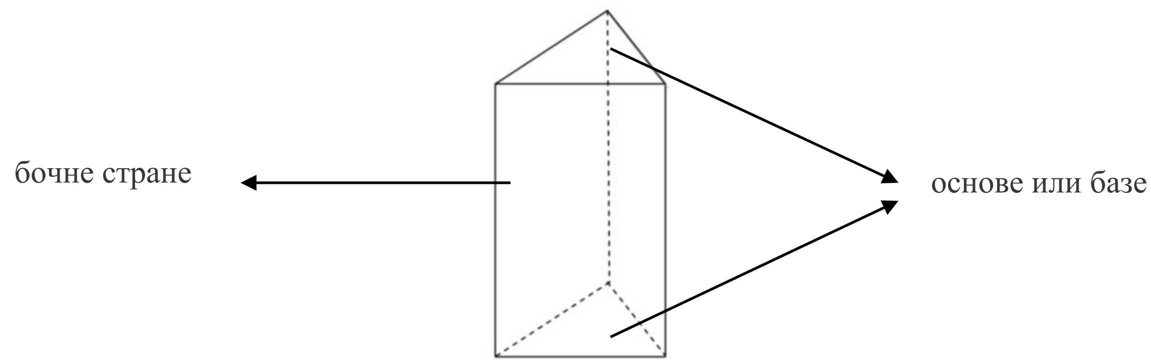
5. Призма

Претпоставимо да се два подударна многоугла налазе у паралелним равнима и да је сваки од њих ортогонална пројекција оног другог на одговарајућу раван. Слободније речено, претпостављамо да се многоуглови могу преклопити кретањем у правцу пројектујућих зрака. Специјално, свака страница једног многоугла се ортогонално пројектује у одговарајућу страницу другог. Очигледно, крајње тачке парова одговарајућих страница ова два многоугла образују један правоугаоник. Тело ограничено паром датих многоуглова и правоугаоницима одређеним паровима одговарајућих страница многоуглова назива се **права призма** (права у смислу да није коса, усправна). Пошто ћемо се бавити искључиво овом врстом призми, често ћемо реч „права“ изостављати.



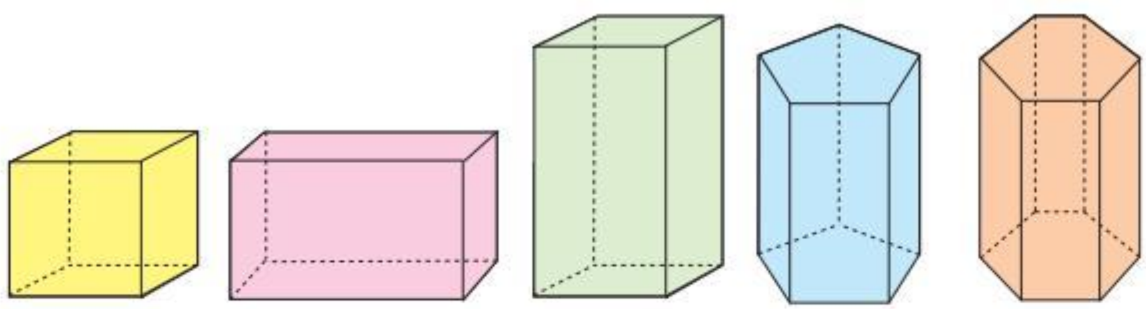
Слика: Права и коса призма

Подударни и паралелни многоуглови називају се **основе** или **базе** призме. Сваки правоугаоник који образује пар одговарајућих страница многоуглова са пројектујућим зрацима назива се **бочна страна** призме.



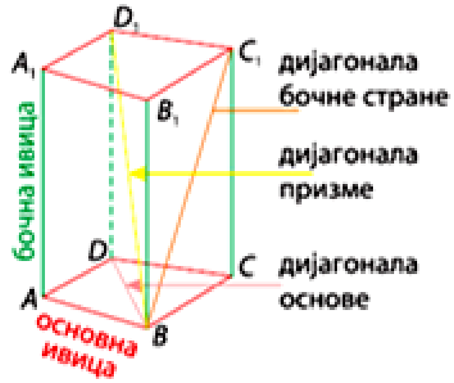
Слика: Тространа призма

На претходној слици приказана је призма коју образују два (подударна) троугла и три правоугаоника. Наравно, основе призме могу бити и четвороуглови, петоуглови, шестоуглови и тако даље.



Слика: Разне призме

Призме означавамо тако што најпре наведемо темена једне основе, а затим и темена друге основе. На пример, призму са слике означавамо $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Странице многоуглова који су основе призме називају се **основне ивице**. Остале ивице призме су бочне ивице. Дужина бочних ивица назива се **висина призме**. Дијагонала призме је свака дуж која спаја два темена призме и не припада нити једној страни те призме. Дијагонале бочних страна и дијагонале основа нису дијагонале призме.



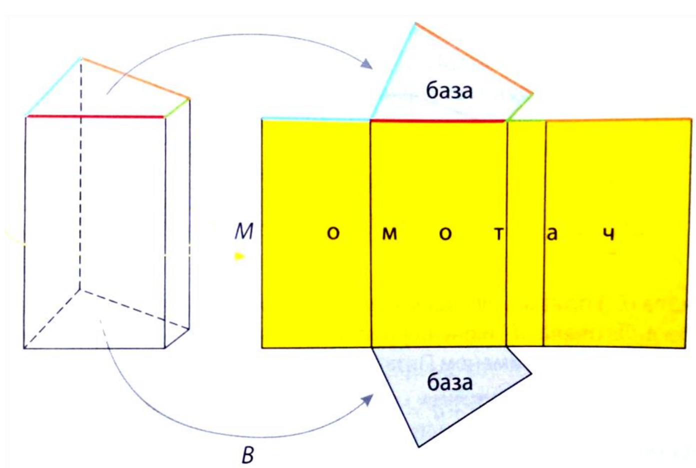
Слика: Четворострана призма

Будући да број темена многоугла који је основа призме у потпуности одређује број темена читаве призме, као и број ивица и број страна, призме чије су основе n – тоуглови називамо n – тостране призме (читај: „ентостране призме“). Основе тространих призми су троуглови, четвоространих четвороуглови итд.

Посебну пажњу ћемо посветити призмама чије су основе **правилни многоуглови**. То значи да је основа оваквих призми многоугао са свим једнаким страницама. Код тространих то је једнакостранични троугао, код четвоространих квадрат и тако даље.

5.1 Површина призме

Површина полиедра представља збир површина многоуглова који га ограничавају. На овај начин можемо израчунати и површину специјалног полиедра којим се сада бавимо –призме.



Слика: Мрежа четворостране призме

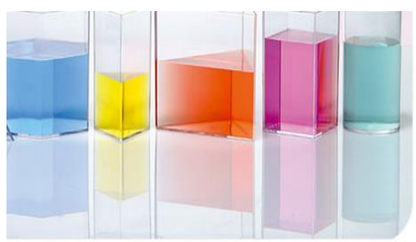
За израчунавање површине призме (као и било ког другог полиедра) веома је корисно представити њену површ одговарајућом мрежом. На претходној слици је приказана мрежа једне четворостране призме. Чине је две базе и омотач.

- Ако са B означимо површину једне основе, а са M површину омотача, онда се површина P те призме израчунава по формули

$$\mathbf{P = 2B + M}.$$

5.2 Запремина призме

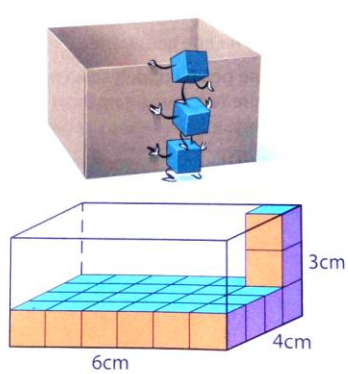
Ученици често мешају појам запремине и површине неког тела. Када говоримо о површини неког тела најједноставније речено подразумевамо све оно што би морали да офарбамо, док запремина тела подразумева величину простора које то тело заузима или количина воде која стаје у то тело.



Слика: Запремина призме

Пример 1.

Одредимо запремину призме (квадра) са слике. Пошто овај квадар можемо „испунити“ коцкама странице 1cm, да бисмо одредили његову запремину, довољно је наћи број ових коцки потребан за његово испуњавање.



Слика: Запремина квадра

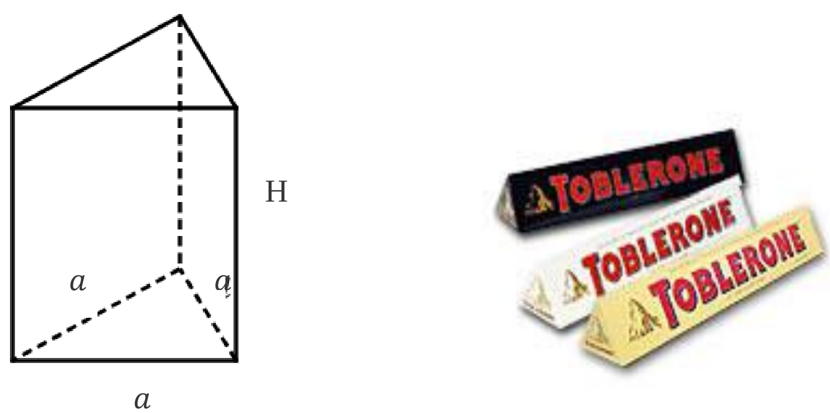
Најједноставније ћемо одредити број кубних центиметара којим се квадар може испунити ако најпре одредимо колико коцки има у најнижем слоју, а затим одредимо број слојева. Тако у првом слоју их има $6 \cdot 4 = 24$. Број слојева је 3. Дакле, у дати квадар се може сместити 72 кубна центиметра, то јест запремина овог квадра је 72 cm^3.

- Ако са B означимо површину једне основе, а са H висину призме, онда се запремина V те призме израчунава по формули

$$\mathbf{V = B \cdot H}.$$

5.3 Правилна тространа призма

Правилна тространа призма је призма код које су базе једнакостранични троуглови а омотач чине три подударна правоугаоника.



Слика: Правилна тространа призма

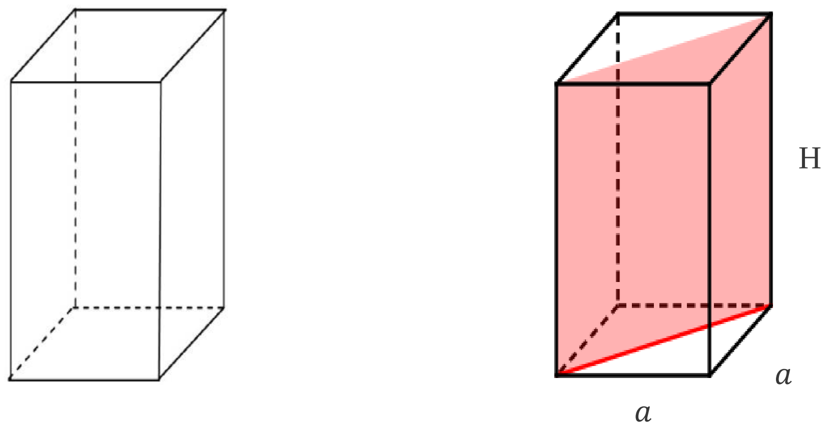
Површина правилне тростране призме: $\mathbf{P = 2B + M = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH}$.

Запремина правилне тростране призме: $\mathbf{V = B \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}$.

Нема дијагоналних пресека.

5.4 Правилна четворострана призма

Правилна четворострана призма је призма код које су базе квадрати а омотач чине четири подударна правоугаоника.



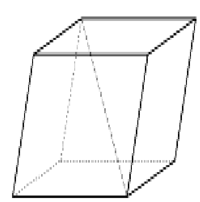
Слика: Правилна четворострана призма и њен дијагонални пресек

Површина правилне четворостране призме: $\mathbf{P = 2B + M = 2a^2 + 4aH}$.

Запремина правилне четворостране призме: $\mathbf{V = B \cdot H = a^2 \cdot H}$.

Дијагонални пресек правилне четворостране призме је правоугаоник.

Четворострана призма чије су основе паралелограми назива се **паралелепипед**.

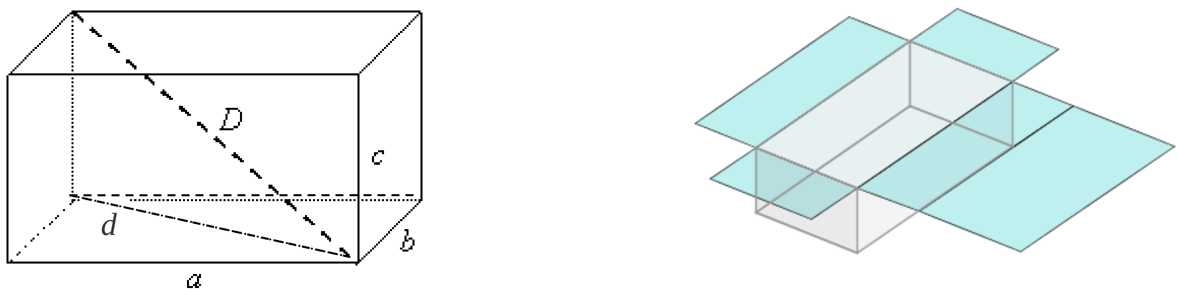


Слика: Паралелепипед

Паралелепипед чије су основе правоугаоници назива се **квадар**. **Коцка** је специјалан случај квадра.

5.4.1 Квадар

Квадар је четворострана призма ограничен са шест страна – то су три пара међусобно подударних и паралелних правоугаоника.



Слика: Квадар

a, b, c су дужина, ширина и висина квадра, а D је дијагонала квадра.

$\mathrm{D}^2 = d^2 + c^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{d^2} + c^2$, дакле $\mathbf{D} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \mathbf{c}^2}$.

Површина квадра као и сваке призме рачуна се по формули $\mathbf{P} = \mathbf{2B} + \mathbf{M}$, како су базе два подударна правоугаоника са страницама a и b, а омотач чине два пара подударних правоугаоника један са страницама a и c, а други са страницама b и c, стога добијамо готову формулу за рачунање површине квадра $\mathbf{P} = \mathbf{2}\boldsymbol{ab} + \mathbf{2}\boldsymbol{ac} + \mathbf{2}\boldsymbol{bc}$.

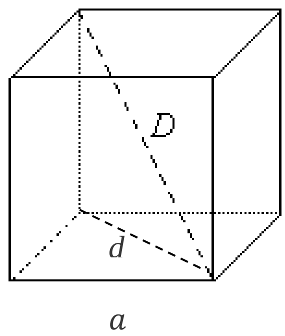
Запремину квадра рачунамо по формули $\mathbf{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.

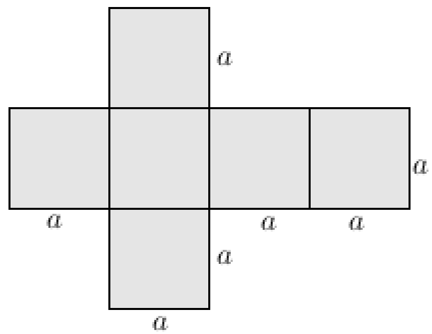
Кутија са чајним врећицама је модел квадра. Отворимо је и разрежимо по неким ивицама, на овај начин добијамо мрежу квадра.

Слика: Модел и мрежа квадра

5.4.2 Коцка (хексаедар) – једно од пет Платонових тела

Коцка је квадар чије су све ивице једнаке. Стране коцке су међусобно подударни квадрати.





Слика: Коцка и мрежа коцке

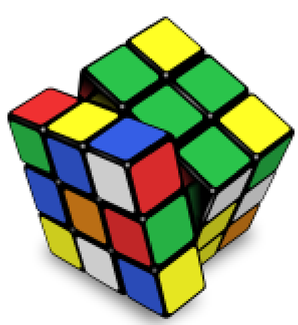
Дијагонала коцке: $D^2 = d^2 + a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ => $\mathbf{D = a\sqrt{3}.}$

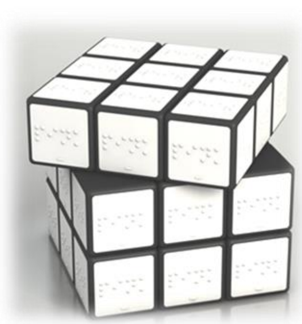
Површина коцке: $\mathbf{P = 2B + M = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2}$.

Запремина коцке: $\mathbf{V = B \cdot H = a \cdot a \cdot a = a^3}$.

Рубикова коцка је механичка играчка коју је 1974. године изумео мађарски проналазач и професор архитектуре Ерне Рубик (мађ. *Rubik Ernő*).

Коцка је састављена од 54 мањих пластичних квадрата који се врте око средишњег језгра. Свака од шест страна које чине коцку у решеном облику је различите боје. Сматра се једном од најпродаванијих играчка у свету, јер је до 2005. године продата у више од 300 милиона примерака. Сличан изум професора Ернеа јесте и Рубикова змија.





Слика: Стандардна Рубикова коцка 3x3x3 и Рубикова коцка за слепе

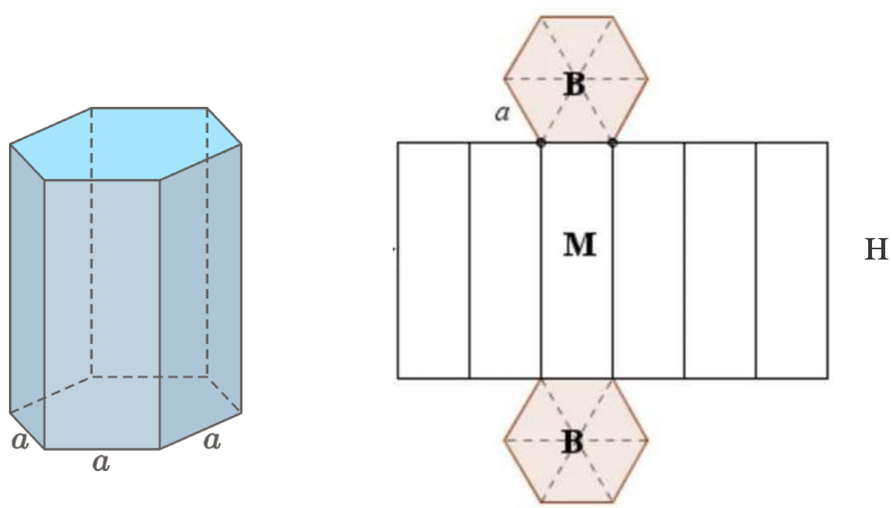
Оргинална Рубикова коцка је димензија 3x3x3, и има 8 угаоних коцкица и 12 ивица. Ова брилијантна слагалица има тачно 43.252.003.274.489.856.000 различитих положаја тј. комбинација. Коцка крије јако пуно интересантне математике, алгоритама, логике, док за већину решавање Рубикове коцке и даље остаје мистерија. Са толиким бројем комбинација, магична коцка је одмах заокупила пажњу светских математичара, који су годинама тражили мањи број потеза за решавање коцке из било које позиције. Амерички научник информатике Данијел Кункле је направио компјутерски програм који доказује да се свака Рубикова коцка, без обзира на положај свих њених боја може решити у највише 26 потеза и тиме оборио дотадашње решење. Коначно, екипа научника је открила да свака могућа комбинација Рубикове коцке може бити решена у 20 или мање потеза.

Постоји много верзија коцке, неке инспирисане уметношћу, неке посебним потребама људи. Дизајнер Константин је направио Рубикову коцку за слепе са Брајевим писмом.

Честа грешка! Колико пута сте ушли у књижару и тражили свеску на коцкице. Да ли је то исправно? Размислите!

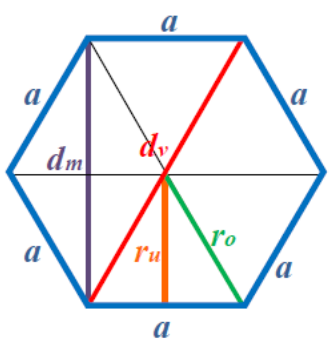
5.5 Правилна шестострана призма

Правилна шестострана призма је призма код које су базе правилни шестоуглови а омотач чине шест подударних правоугаоника.



Слика: Правилна шестострана призма

База – правилан шестоугао (шест једнакостраничних троуглова)



$r_o = a$	Полупречник описане кружнице
$r_u = \dfrac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$	Полупречник уписане кружнице
$d_v = 2 \cdot a$	Велика дијагонала
$d_m = 2 \cdot r_u$	Мала дијагонала
$P = 6 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$	Површина шестоугла

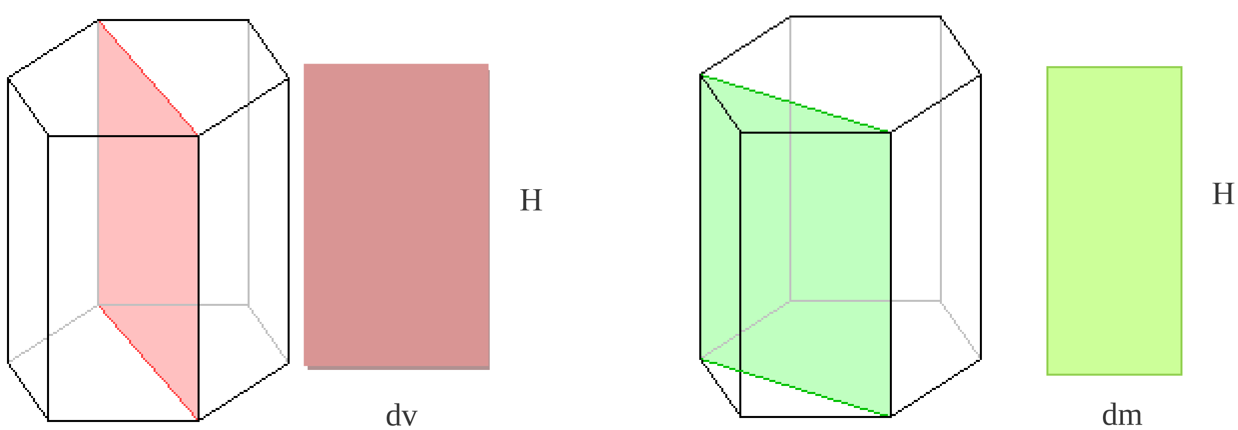
Површина правилне шестостране призме:

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{B} + \mathrm{M} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6a\mathrm{H} = 3a^2\sqrt{3} + 6a\mathrm{H}.$$

Запремина правилне шестостране призме:

$$\mathrm{V} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{H} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \mathrm{H}.$$

Дијагонални пресек правилне шестостране призме је правоугаоник. Постоје два дијагонална пресека већи и мањи.



Слика: Дијагонални пресеци правилне шестостране призме

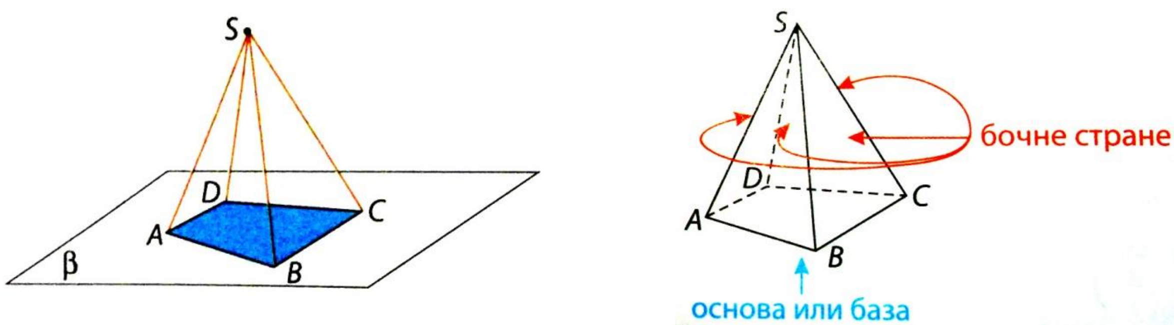
5.6 Призме око нас

Окружени смо телима који имају облик призме. Коцкице леда, кров од куће, туш кабина, акваријум, зграде, кутијице за накит и тако даље.

Слика: Призме у свакодневном животу

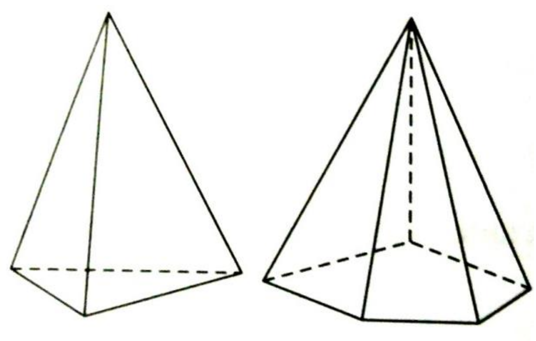
6. Пирамида

Претпоставимо да се у равни α налази неки многоугао и да је дата тачка S која не припада овој равни.



Слика: Пирамида

Тело ограничено датим многоуглом и троугловима које образују његове странице са уоченом тачком S назива се пирамида. Многоугао је основа или база пирамиде, а сваки троугао који образује странице многоугла са тачком S назива се бочна страна пирамиде. Тачка S се назива врх пирамиде.

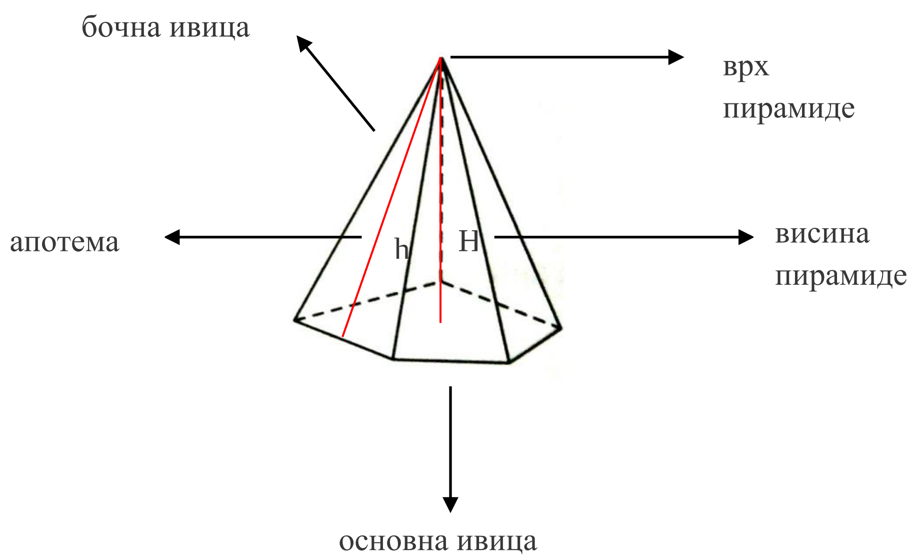


Слика: Тространа и петострана пирамида

Пирамиде означавамо тако што најпре наведемо теме, а затим темена многоугла који одређује базу. На пример, пирамиду на првој слици означавамо са SABCD.

Пирамида чија је основа n-тоугао назива се n-тострана пирамида.

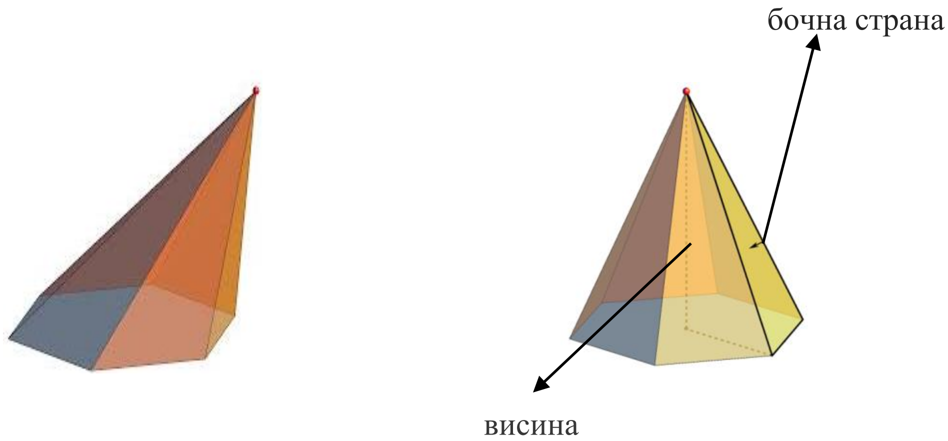
Странице основе пирамиде називају се основне ивице. Остале ивице су бочне ивице. Растојање врха пирамиде од равни основе назива се висина пирамиде.



Слика: Петострана пирамида

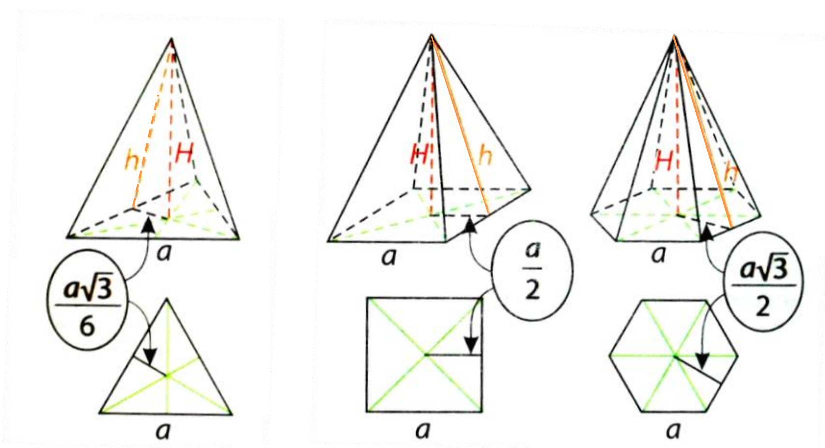
Висина бочне стране пирамиде назива се **апотема** и обележава се са h, а висина пирамиде са H.

Пирамида је права ако се пројекција врха пирамиде на основу поклапа са тежиштем основе, а **коса** ако то не важи.



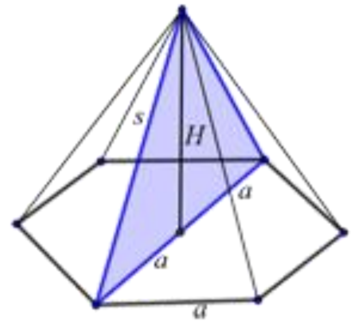
Слика: Коса и права пирамида

Пирамида је правилна ако је њена основа правилан многоугао и ако је ортогонална пројекција врха на раван основе центар тог многоугла. Бочне стране правилне пирамиде су међусобно подударни једнакокраки троуглови. Правилна тространа пирамида као основу има једнакостраничан троугао, правилна четворострана квадрат а правилна шестострана, правилан шестоугао.



Слика: Правилна тространа, правилна четворострана и правилна шестострана пирамида

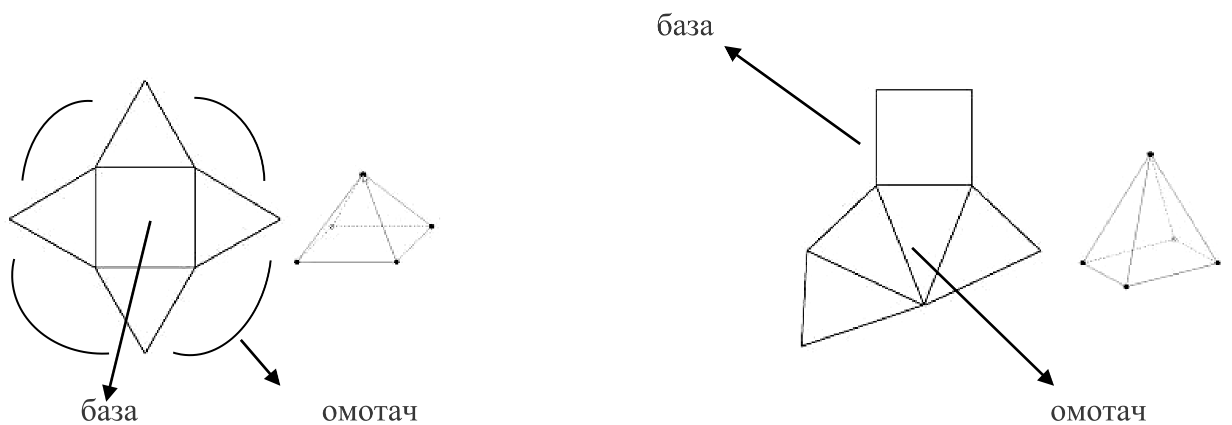
Дијагонални пресек пирамиде је пресек пирамиде који садржи две несуседне бочне ивице пирамиде. На пример код правилне шестостране пирамиде имамо два таква пресека већи и мањи. У оба случаја ради се о једнакокраком троуглу, једина разлика је у основици. Код већег дијагоналног пресека основица је дужа дијагонала базе $(2a)$, а код мањег дијагоналног пресека основицу чине две висине једнакостраничних троуглова у бази.



Слика: Већи дијагонални пресек правилне шестостране пирамиде

6.1 Површина пирамиде

Свака пирамида је ограничена многоуглом који називамо основом или базом те пирамиде и троугловима којих има онолико колико страница има основа. Унија свих бочних страна пирамиде представља њен омотач.



Слика: Два начина на која можемо формирати мрежу правилне четворостране пирамиде

Ако са B означимо површину основе, а са M површину омотача пирамиде, онда се површина P те пирамиде израчунава по формули

$$\mathbf{P = B + M}.$$

6.2 Запремина пирамиде

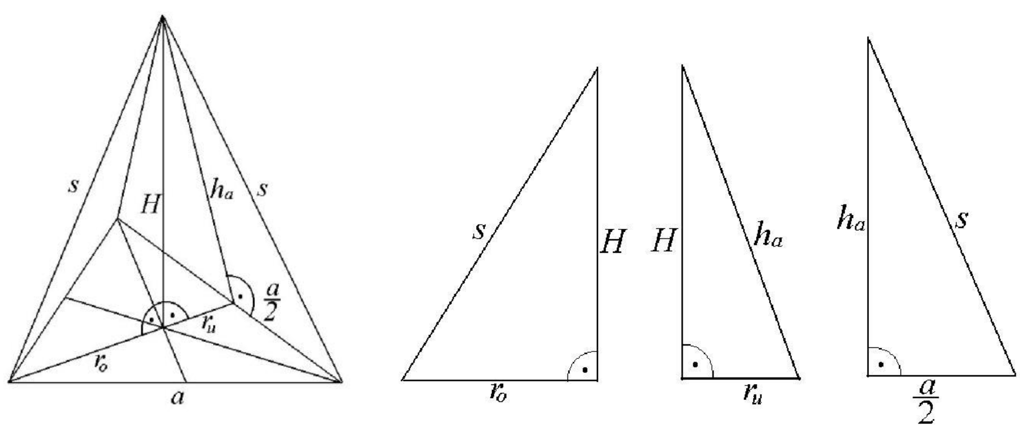
Још су древни народи експериментисањем открили да је запремина пирамиде једнака трећини запремине призме чија је висина једнака висини пирамиде и чије су основе подударне основи пирамиде. Касније је та формула и строго математички доказана. Доказ се ради у средњој школи.

Слика: Пресипање песка из суда облика пирамиде у суд облика призме

Запремина V пирамиде висине H и основе чија је површина B је $\mathbf{V = \frac{1}{3}\, B \cdot H}$.

6.3 Правилна тространа пирамида

Правилна тространа пирамида је пирамида код које је база једнакостраничан троугао, а омотач чине три подударна једнакокрака троугла.



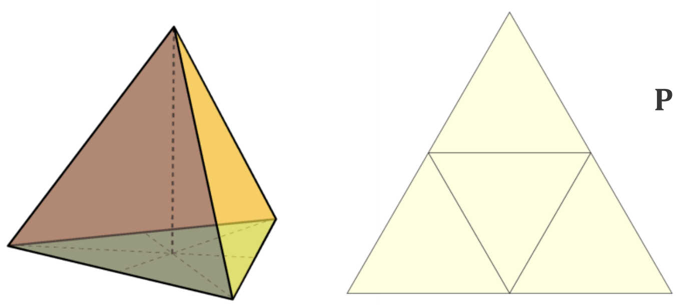
Слика: Правилна тространа пирамида и њени карактеристични троуглови

Површина правилне тростране пирамиде: $\mathbf{P = B +\ \ M} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \dfrac{ah}{2}$.

Запремина правилне тростране пирамиде: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{3}\,\mathbf{B \cdot H} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \mathbf{H} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \mathbf{H}$.

Нема дијагоналних пресека, јер троугао који је база нема дијагонала.

Правилна тространа једнакоивична пирамида или **тетраедар** је геометријско тело ограничено са четири једнакостранична троугла. Спада у једно од пет Платонових тела.

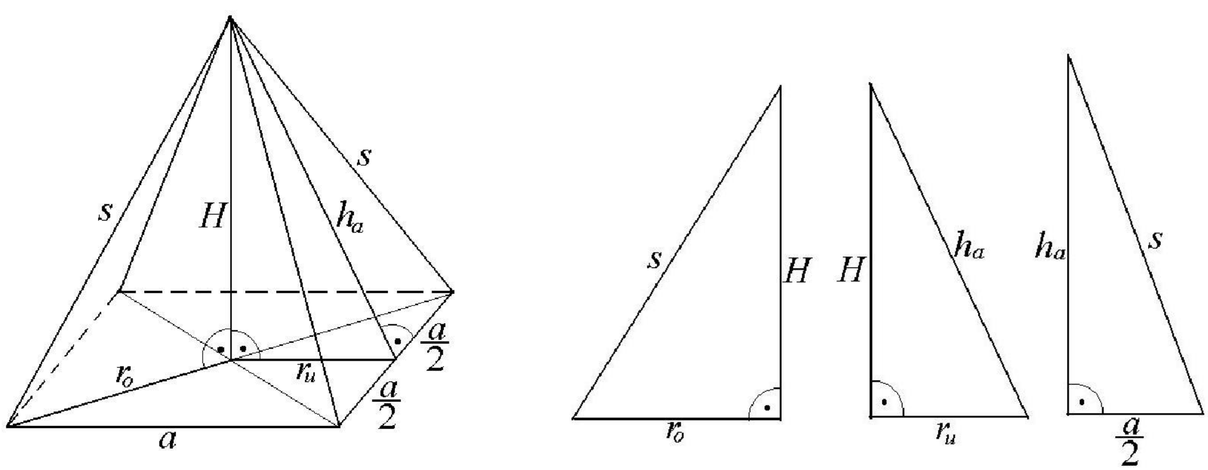


$$\mathbf{P} = \cancel{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = a^2\sqrt{3}$$

Слика: Тетраедар и његова мрежа

6.4 Правилна четворострана пирамида

Правилна четворострана пирамида је пирамида код које је база квадрат, а омотач чине четири подударна једнакокрака троугла.

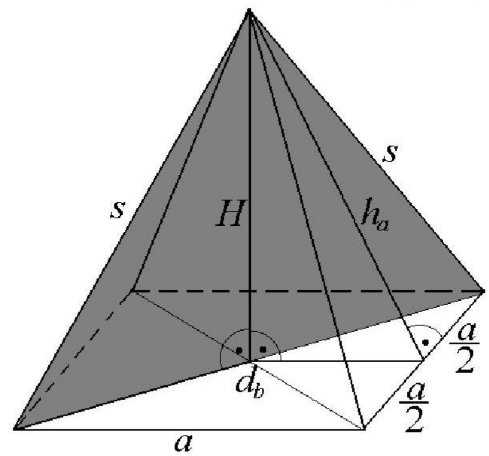


Слика: Правилна четворострана пирамида и њени карактеристични троуглови

Површина правилне четворостране пирамиде: $\mathbf{P = B + M} = \boldsymbol{a^2} + \mathbf{4} \cdot \frac{\boldsymbol{ah}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a^2} + \mathbf{2}\boldsymbol{ah}$.

Запремина правилне четворостране пирамиде: $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{B \cdot H} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{a^2} \cdot \mathbf{H}$.

Дијагонални пресек:

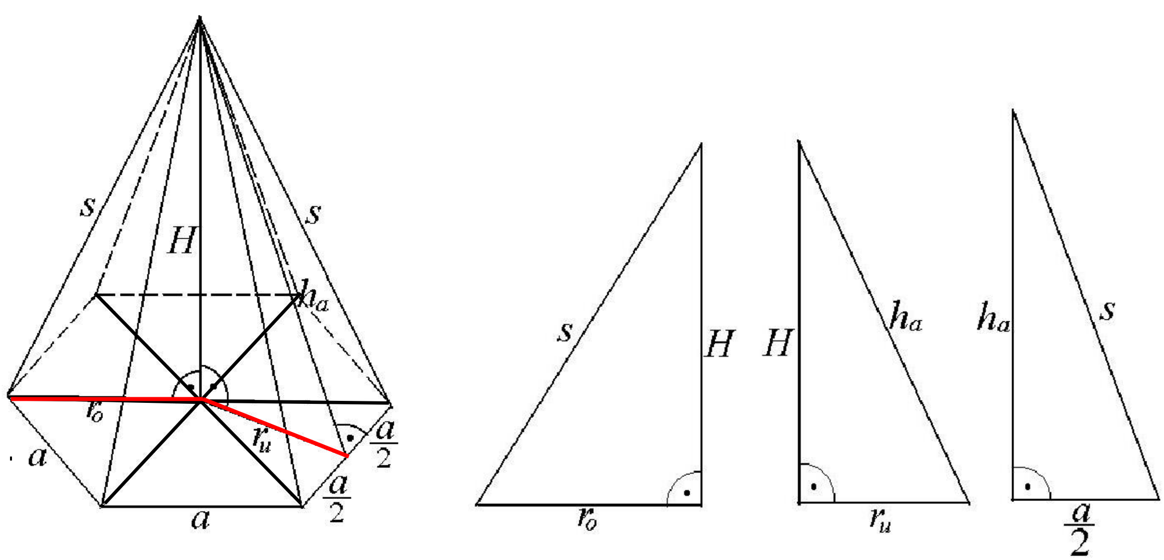


$\mathrm{Pdp} = \frac{d_b \cdot \mathrm{H}}{2}$

Слика: Дијагонални пресек правилне четворостране пирамиде

6.5 Правилна шестостране пирамида

Правилна шестострана пирамида је пирамида код које је база правилан шестоугао, а омотач чине шест подударних једнакокрокраких троуглова.

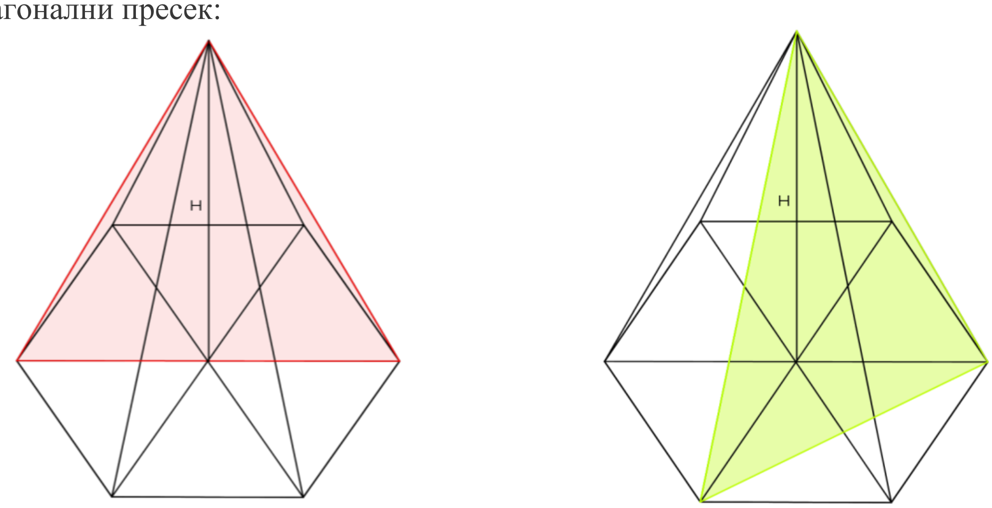


Слика: Правилна шестострана пирамида и њени карактеристични троуглови

Површина правилне шестостране пирамиде: $\mathbf{P = B + M = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{ah}{2}}$.

Запремина правилне шестостране пирамиде: $\mathbf{V = \frac{1}{3}\ B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}$.

Дијагонални пресек:



$$Pdp = \frac{\cancel{2}a \cdot \mathrm{H}}{\cancel{2}} = a \cdot \mathrm{H}.$$

Слика: Већи и мањи дијагонални пресека правилне шестостране пирамиде

6.6 Пирамиде око нас

"*Време пркоси свему, али пирамиде пркосе времену" (арап. пословица).*

Египатске пирамиде, од којих су неке међу највећим грађевинама које је људска рука икад изградила, чине један од најмоћнијих и најдуговечнијих симбола староегипатске цивилизације. Служиле су као гробнице египатским фараонима.

Кеопсова пирамида је највећа и најстарија од три пирамиде код Гизе и уједно највећа пирамида на свету. Често је називају једноставно: „Велика пирамида“. Пирамида је изграђена као гробница египатског фараона Кеопса око 2560. године пре нове ере. Ради се о правилној четвоространој

Слика: Кеопсова пирамида

пирамиди која је висока је 138,75 метара, дужине 225 метара и обухвата површину од 5,3 хектара. На њој је радило 100.000 људи, двадесет година по три месеца годишње.

Током историје, пирамиде у Гизи су изазивале велику пажњу, што описује и Наполеонова изрека приликом освајања Египта 1789 године: „Војници! Са врха ових пирамида посматра нас 40 векова!“ Велика Кеопсова пирамида назива се светским чудом.

7. Ротациона тела

7.1 Круг

Круг је једна од најзначајнијих и најинтересантнијих геометријских фигура. Конструисање осталих фигура не може се замислити без кругова.

7.1.1 Обим круга. Број π

Окружени многим предметима (моделима) кружног облика, људи су одавно почели трагати за везом између обима и пречника (полупречника кружнице). Тако је доста давно уочено, а касније и строго доказано, следеће тврђење. **Однос обима круга и његовог пречника је сталан (константан).** Број који представља овај однос обележава се малим грчким словом π.

Задатак 1. Упиши у дату табелу резултате мерења пречника и обима неколико предмета кружног облика које можеш наћи у свом окружењу. За сваки изабрани предмет обим подели са пречником.

Слика: Предмети кружног облика

Пречник 2r				
Обим O				
π =O/2r ≈				

Упореди последњу врсту своје табеле са резултатима осталих ученика.

Будући да су у последњим врстама табеле из претходног задатка вероватно уписани бројеви 3; 3,1; 3,14; 3,15; 3,2 или неки бројеви доста блиски овим, можда ћеш посумњати у исправност тврђења.

Као одговор на евентуалну сумњу истичемо да на количник $\frac{O}{2r}$ утиче:

- прецизност мерења пречника и обима неког кружног предмета (није лако прецизно измерити пречник обода чаше нити њен обим),
- прави облик предмета који меримо (предмети који су наизглед кружног облика, углавном нису „савршени кругови“).

С друге стране, количници $\frac{O}{2r}$ веома блиски један другом, то јест да је број π мало већи од броја три.

Дуго су математичари покушавали да прецизно одреде број π. Тешкоће су произилазиле из чињенице да се однос обима круга и његовог пречника не може представити као однос два природна броја, односно као рационалан број. Испоставља се да је π ирационалан број, па је његов децимални запис бесконачан и непериодичан.

Иако је данас познат велики број децимала броја π,

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950...$$

за практичне потребе узима се само неколико првих децимала иза децималне запете. Најчешће се узима $3,14$, што ћемо и чинити.

Обим круга једнак је производу његовог пречника и броја π.

$$O = \mathbf{2r\pi}.$$

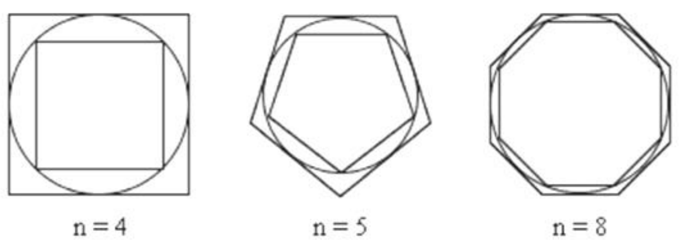
7.1.2 Кратак историјат броја π

Слика: број π

Господин π има дуг реп. Господин π има бесконачно дуг реп. Кад су га питагорејци први пут упознали, још у Старој Грчкој, схватили су да имају посла са бројем који је изван сваког дотадашњег поимања. Први записи о овом броју стари су око 3650. година и налазе се на папирусу који је писао писар Ахмес али он није био и аутор овог математичког списа. У Ахмесовом папирусу Египћани су за број π израчунали приближну вредност са грешком на другој децимали $3,1605$. У исто време у Месопотамији, користили су да је $\pi = 3,125$. У односу на претходне две приближне вредности, Кинези и Јевреји су користили веома грубу процену $\pi = 3$.

Први математичар који се најозбиљније почео бавити израчунавањем тачне вредности броја π био је славни Архимед. Познат као Архимед из Сиракузе (Грчка). Живео је у периоду од $287-212$. године пре нове ере. Погинуо је од мача римског војника у родном граду Сиракузи, која је две године одолевала Римљанима, захваљујући справама и машинама које је Архимед конструисао. Последње речи су му биле: *„ Не дирајте моје кругове“*. Према његовој жељи на надгробној плочи су му урезана два геометријска тела лопта и ваљак. Архимед је заслужан за прве две децимале броја π.

Архимед је осмислио методу описивања и уписивања правилног многоугла у и око круга. (метода исцрпљивања)



Слика: Архимедов поступак проналска прве две децимале броја π

Користио је чињеницу да са повећањем броја страница многоугла, обим многоугла тежи обиму круга. Понављајући овај поступак повећавања броја страница многоуглова који су уписани и описани око круга, Архимед је стигавши до 96-угла, дошао до веома прецизне процене за број

$$\pi \approx \frac{22}{7}, \text{ што значи } \pi \approx 3,1428571.$$

Исту идеју су користили и кинески математичари који су око 450. године нове ере израчунали првих седам децимала броја π. Овај подвиг није достигнут наредних 1000 година $\pi \approx 3,1415926 \ldots$ 1424. године (1000 година након Кинеза), Персијанац Ал Каши је наставио Архимедову методу, израчунао 16 децимала броја π. Лудолф ван Селен око 1600. године, Немац, професор математике 34 године свог живота провео је рачунајући 35 децималу броја

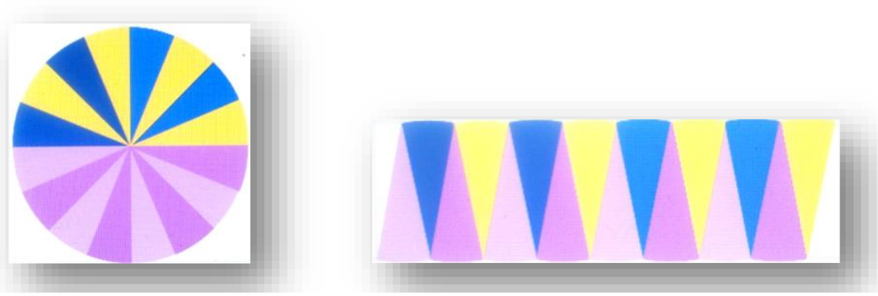
π. У његову част овај број се често зове Лудолфов број. Поносан на своје достигнуће захтевао је да се ове децимале урежу на његов надгробни споменик. После овога почела је ера проналажења бесконачних формула којима су се бавили бројни математичари: Вијет, Валис, Брукнер и други. И убрзо је почела ера израчунавања децимала броја π уз помоћ компјутера. На сајту www.joyofpi.com налази се списак од $10\ 000$ децимала броја π (уколико вам некада у животу буду требале). На истом сајту можете наћи разне занимљивости о овом броју. Наиме, π је један од најпознатијих ирационалних бројева. Такви бројеви се не могу представити као разломак, а иза децималне запете садрже бесконачно много цифара. Број π није само ирационалан, мистериозан је на још један начин – он је трансцедентан. То значи да не постоји алгебарска једначина за коју би π био решење. Међу цифрама броја π, редом почевши од неког места, може се наћи било који коначни низ: ваш датум рођења, матични број, број телефона, све се то налази негде у броју π. Ако бисмо Мај месец математике кодирали са 052012 приметили бисмо да се овај код такође налази у овом броју – на 1362638. децималном месту. Ознака за број π потиче од грчке речи *perimetros* - мерити около. Широм света се 3. месеца, 14. дана слави дан „Пи“.

7.1.3 Површина круга

Ако круг изделимо на известан број делова, а затим те делове уклопимо као на слици, од круга добијамо нешто што нас подсећа на паралелограм.


Слика: Делимо круг на осам делова које уклапамо у виду паралелограма

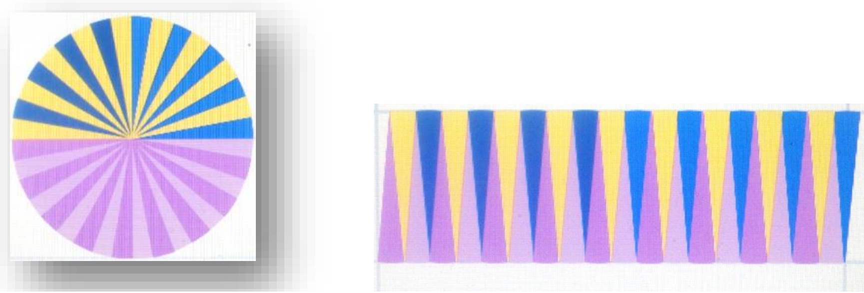
Настављамо са овим поступком, делимо круг на још ситније делове које уклапамо на исти начин, и добијамо фигуру која све више подсећа на паралелограм.



Слика: Делимо круг на шеснаест делова које уклапамо у виду паралелограма

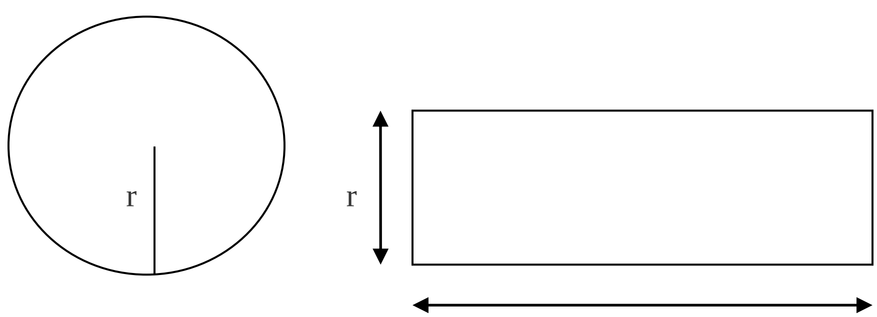
Настављамо са овим поступком...добијена фигура све више подсећа на паралелограм.

Ако се не зауставимо него и даље наставимо делити круг на све мањи и мањи број делова, на крају ће наша фигура бити приближно блиска изгледу фигуре правоугаоника.



Слика: Делимо круг на тридесет шест делова које уклапамо у виду паралелограма

То значи да површину правоугаоника можемо изједначити са површином круга и тако ћемо добити жељени образац за рачунање површине круга.



$$\frac{2r\pi}{2} = r\pi$$

Слика: Круг и правоугаоник, изједначавање површина

Полупречник круга је уједно и краћа страница правоугаоника, док је полуобим дужа страница правоугаоника.

P правоугаоника = P круга

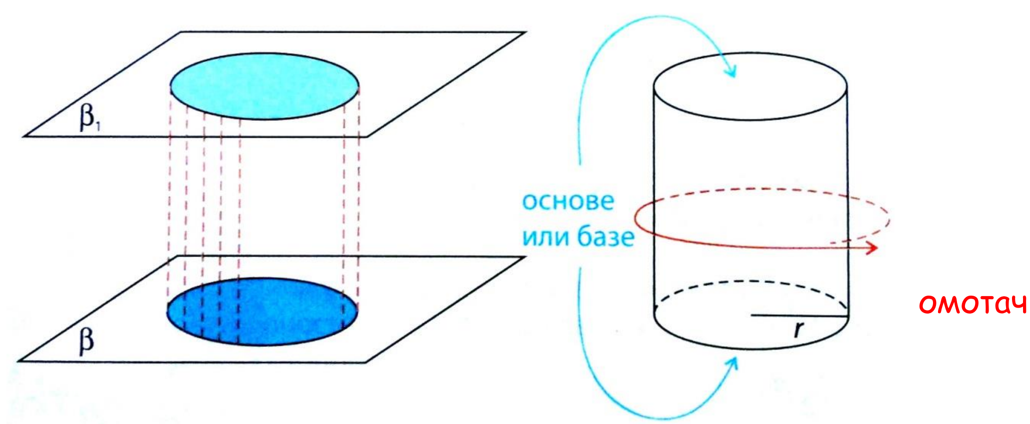
P правоугаоника = rπ $\cdot$ r = r$^2\pi$ => P круга = r$^2\pi$

Површина круга једнака је производу квадрата његовог полупречника и броја π.

$$\mathbf{P = r^2\pi}$$

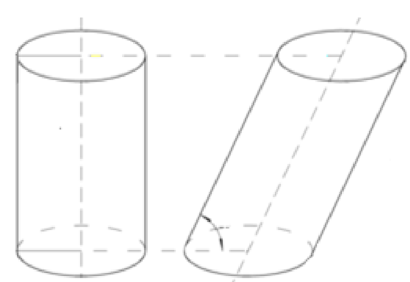
7.2 Ваљак

Претпоставимо да се два подударна круга налазе у паралелним равнима и да је сваки од њих тогонална пројекција оног другог на одговарајућу раван. Слободније речено, претпоставимо да се кругови могу преклопити кретањем у правцу пројектујућих зрака. Површ коју образују пројектујући зраци тачака датих кружница назива се **цилиндрична површ**.



Слика: Прав ваљак

Геометријско тело ограничено овим круговима и делом цилиндричне површи између њих назива се **прав ваљак** (бавићемо се само таквим ваљцима). Кругови су **основе** или **базе** ваљка. Део цилиндричне површи између равни основа назива се **омотач** ваљка. Растојање између равни основа назива се **висина** ваљка.

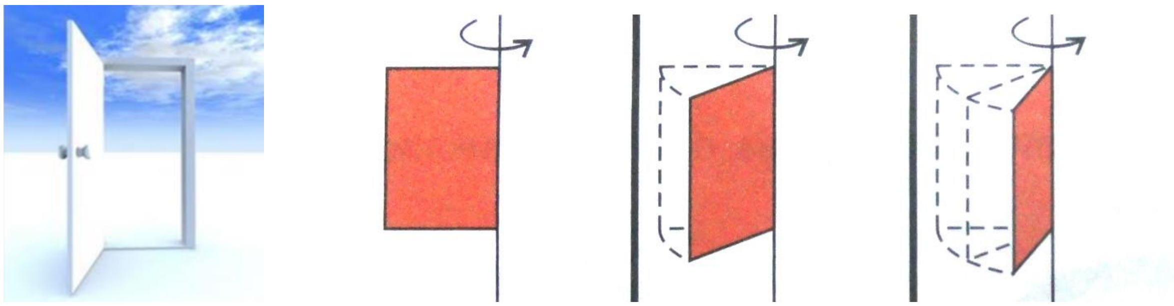


Слика: Прав и коси ваљак

Како је настао ваљак?

Ваљак је пример геометријског тела које није полиедар. Он спада у такозвана **обла тела**. Ротацијом правоугаоника око једне његове странице настаје ваљак. Зато се каже да ваљак представља и једно **ротационо тело**.

Неко је отворио врата, а онда је дунуо јак ветар и врата су се окренула за 360°.



Слика: Ротација правоугаоника око једне његове странице

Страница око које ротира правоугаоник представља висину добијеног ваљка. Друга страница правоугаоника је полупречник основе тог ваљка.

Осни пресек ваљка

Како исећи чоколадне ролнице по дужини? Коју фигуру добијамо?

Слика: Осни пресек ваљка

Ако ваљак пресечемо са равни која садржи центре његових основа добијамо **осни пресек ваљка**. Права која садржи центре основа ваљка назива се **оса ваљка**. У многим језицима за ваљак се користи реч изведена од грчке речи *kylindros*, која изворно значи *котрљати*. У нашем језику користи се реч цилиндар. Поред поменутог значења, цилиндром се називају и разни предмети у облику ваљка, као што је, на пример, комора у моторима са унутрашњим сагоревањем или пак високи мушки шешир.

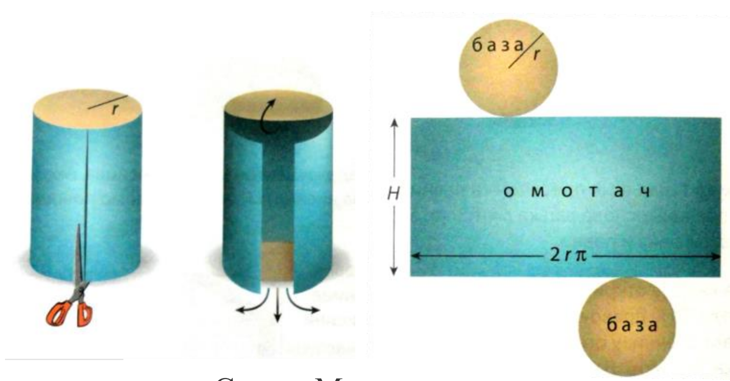
Слика: Цилиндар у свакодневном животу

Погледајмо где још можемо срести предмете у облику ваљка.

Слика: Ваљак око нас

7.2.1 Површина ваљка

Да бисмо открили формулу за израчунавање површине ваљка, потребно је да откријемо како изгледа мрежа ваљка. Мрежа ваљка садржи два подударна круга, који представљају базе ваљка и треба још „развити" омотач ваљка. Није тешко закључити да омотач ваљка представља правоугаоник.



Слика: Мрежа ваљка

Дужина једне странице правоугаоника који представља омотач једнака је висини ваљка, док је дужина друге једнака обиму основе.

Нека је r полупречник основе ваљка, а H његова висина. Ако је B површина основе овог ваљка, а M површина омотача, онда је $\mathrm{B} = \mathrm{r}^2\pi$, $\mathrm{M} = 2\mathrm{r}\pi\mathrm{H}$. Дакле, површина ваљка је

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{B} + \mathrm{M} = 2\mathrm{r}^2\pi + 2\mathrm{r}\pi\mathrm{H} \ = 2\mathrm{r}\pi(\mathrm{r} + \mathrm{H}).$$

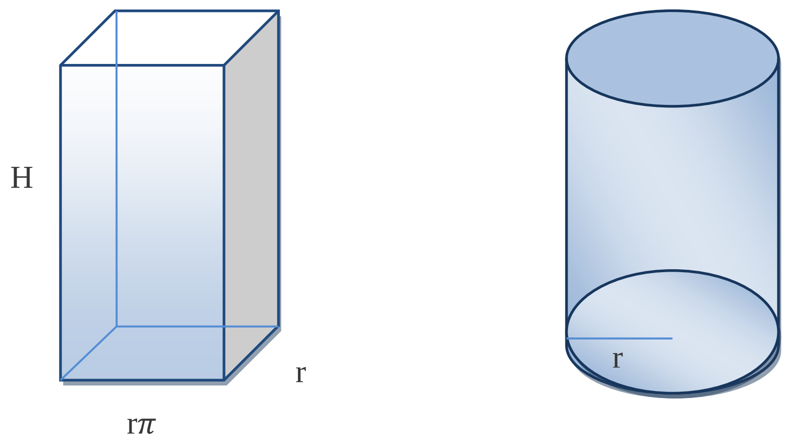
- **Површина ваљка полупречника основе r и висине H израчунава се по формули**

$$\mathbf{P} = \mathbf{2r}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r} + \mathbf{H}).$$

7.2.2 Запремина ваљка

Општа формула за израчунавање запремине призме примењује се и за израчунавање запремине ваљка. Ако је B површина једне основе, а H висина ваљка, онда се запремина тог ваљка рачуна по формули $V = B \cdot H$.

Пробајте да изведете следећи експеримент. Узмите посуде, нека једна буде у облику квадра (дакле призма) а друга у облику ваљка. Нека посуде буду такве да им базе буду истих површина и нека имају исте висине. Сипајте воду у посуду у облику квадра, а затим из ове посуде преспите воду у посуду у облику ваљка. Шта уочавате?



Слика: Квадар и ваљак истих база и висина

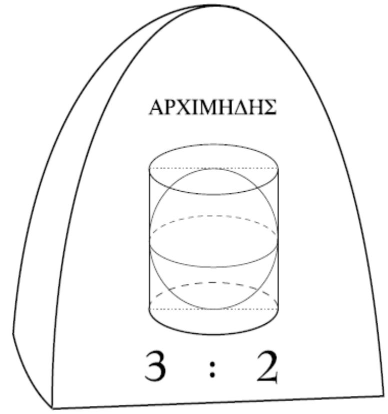
$$V_{призме} = B \cdot H = r \cdot r\pi \cdot H = r^2\pi \cdot H = V_{ваљка}$$

- **Запремина ваљка полупречника r и висине H израчунава се по формули**

$$\mathbf{V = r^2\pi H.}$$

7.2.3 Архимед и ваљак

Поред призме и пирамиде ученици осмог разреда ће се упознати и са такозваним ротационим телима. Сећате се Архимеда, поменут је у овом раду у вези са открићем броја π. Од својих резултата највише се поносио израчунавањем површине и запремине лопте и ваљка, и зато су му, по његовој жељи, пријатељи и сродници на надгробни споменик уклесали ваљак са лоптом.

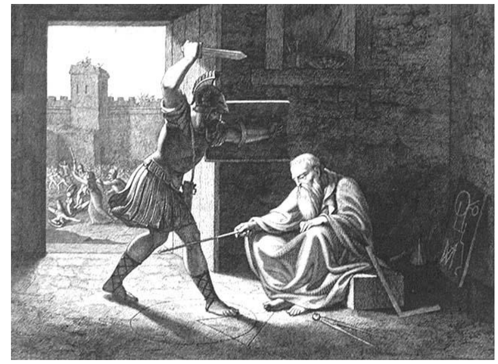


Слика: Архимед $287 - 212$. године пре нове ере

Слика: Надгробни споменик

Током свог богатог истраживачког живота Архимед је имао доста радова. За разлику од тадашњих мислилаца који су се бавили науком у апстрактном смислу, Архимед је преферирао практичне радове. Бавио се не само математиком, већ и астрономијом и физиком. Његов допринос науци је огроман, неколико примера су: број π, запремина и површина лопте, закон полуге, закон о телима потопљеним у течност, катапулт и други. Велики број његових изума је нашао примену у скоро свему. Једно од његових најинтересантнијих изума који су нашли своју примену као оружје у тадашњој војсци Сиракузе, било је „Архимедови топлотни зраци“. То је био уређај на коме се налазило једно шестострано и друго, мање, четворострано огледало, која су одбијала сунчеву светлост у једно централно жариште. Архимед је дошао до сазнања о жаришту конкавних огледала и знао је да може да се користи за концентрисање сунчеве енергије и тако изненади непријатељ. Помоћу тог уређаја успешно су спаљивали непријатељске бродове. Своју примену је нашао у II Пунском рату против Римљана. Мит говори да је домет био једнак домету испаљене стреле (неких 50-так метара).

Крај Архимедовог живота био је неочекиван. Занет неким геометријским проблемом, Архимед није ни приметио да су Римаљани продрли у град. Док је цртао фигуре у прашини римски војник се зауставио поред њега и захтевао да пође са њим. Архимед му је одговорио: „Не дирај моје кругове!“. Војник се толико разбеснео да је извукао мач и убио га. II Пунски рат завршио се поразом Сиракужана, римљани су након вишегодишњих напада успели да освоје Сиракузу, Архимедов завичај.



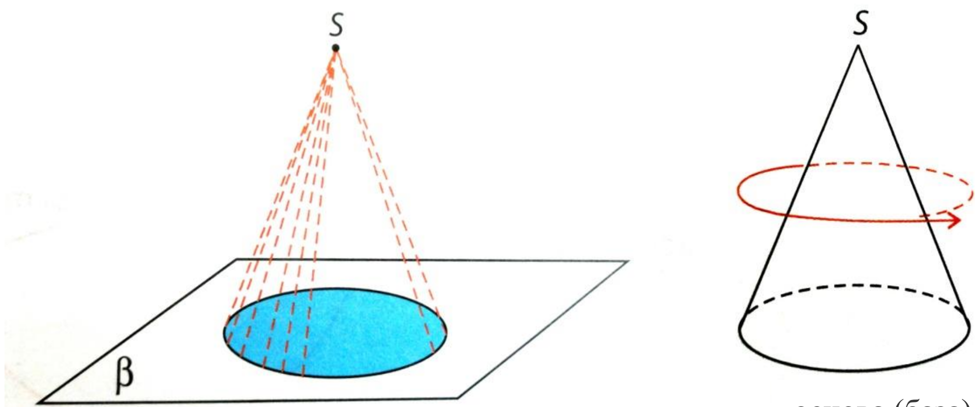
Слика: Архимед и Римљанин

Да ли је ово истина или још једна у низу легенди? Тешко је поверовати да се Архимед могао споразумети с Римљанином јер је он говорио грчки, а војник латински. Сиракужани нису смели одржавати гроб свог великог мислиоца. Њега је 75. године пре нове ере једва пронашао Цицерон. То му је успело захваљујући цртежу лопте и ваљка .

„Одмах сам рекао представницима Сиракузе који су ме пратили да је пред нама без сумње Архимедов споменик“.

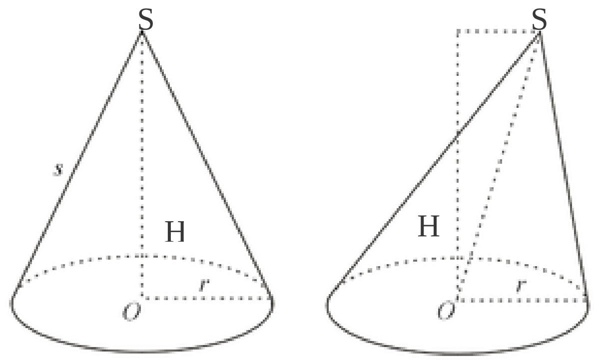
7.3 Купа

Претпоставимо да се у равни β налази круг и да је дата тачка S која не припада овој равни. Површ коју образују праве које садрже тачку S и пролазе кроз тачке кружнице назива се **конусна површ**.



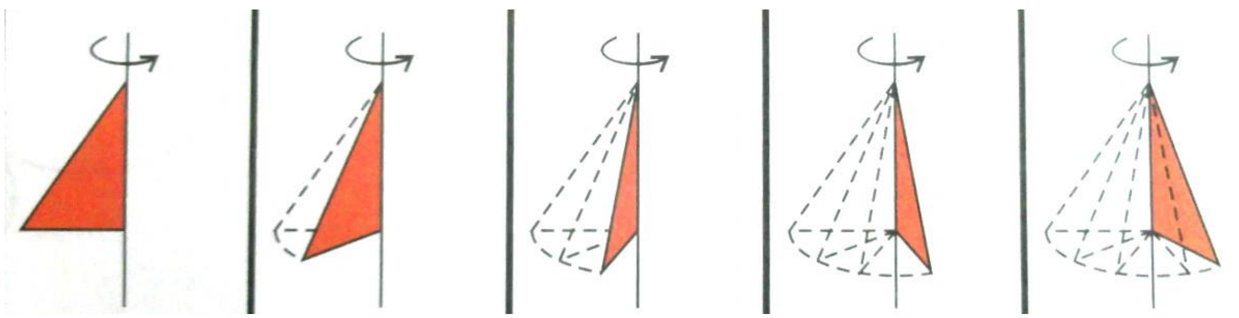
Слика: Купа

Тело ограничено датим кругом и делом конусне површи назива се **купа**. Уколико је ортогонална пројекција тачке S на раван β центар датог круга, онда се одговарајућа купа назива права купа (у супротном је коса). Круг је **основа** или **база** купе. Део конусне површи назива се **омотач купе**. Тачка S је **врх купе**. Дуж која спаја врх купе и тачку на кружници основе назива се **изводница** купе s. Помоћу Питагорине теореме добијамо везу $s^2 = H^2 + r^2$.



Слика: Права и коса купа

Купа је, као и ваљак, једно обло тело. Купа је и ротационо тело, јер се може добити ротацијом правоуглог троугла око једне катете.

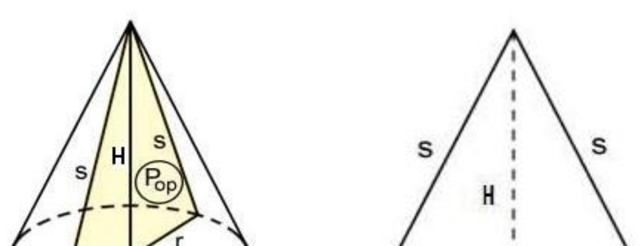


Слика: Ротација правоуглог троугла око катете

Катета око које ротира правоугли троугао представља висину добијене купе. Друга катета правоуглог троугла је полупречник основе те купе.

У многим језицима за купу се користи реч изведена од грчке речи *konos* која значи купа, чуњ. У нашем језику користи се реч конус.

Ако купу пресечемо са равни која садржи њену осу добијамо пресек који се зове **осни пресек** купе.



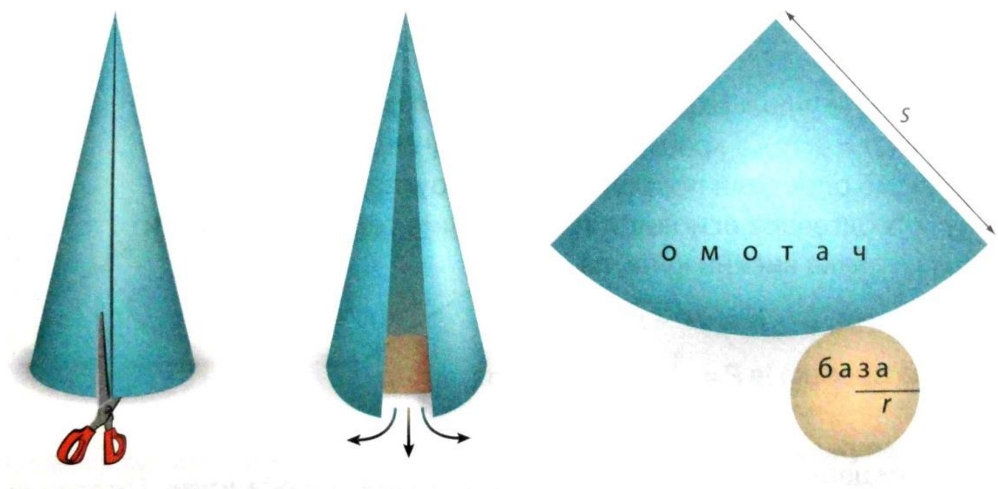
Слика: Осни пресек купе

У животу се свакодневно срећемо са предметима у облику купе нпр. левак, корнет, делови зграда итд.

Слика: Купа у свакодневном животу

7.3.1 Површина купе

Површина купе је збир површина њене основе и површине омотача. Одредимо прво мрежу купе.



Слика: Мрежа купе

Мрежу купе чине круг који је основа или база те купе и кружни исечак који је омотач. Површина базе је површина круга $B = r^2\pi$. Површина исечка Pi = $\frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{2} \cdot \frac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{r}{2} \cdot l$, где ј l дужина кружног лука. Како је код омотача купе изводница s у функцији полуречника онда је M = $\frac{s}{2} \cdot l = \frac{s}{2} \cdot 2r\pi = sr\pi$.

- Површина купе чија је изводница s и полупречник основе r израчунава се по формули

$$\mathbf{P = r\pi(r + s)}.$$

7.3.2 Запремина купе

Купе су сродне пирамидама као што су ваљци сродни призмама. Сходно томе, запремина купе једнака је трећини запремине ваљка, чија је основа подударна основи купе, а висина једнака њеној висини.

Слика: Пресипање течности из посуде облика купе у посуду облика ваљка

- Запремина купе полупречника основе r и висине H израчунава се по формули

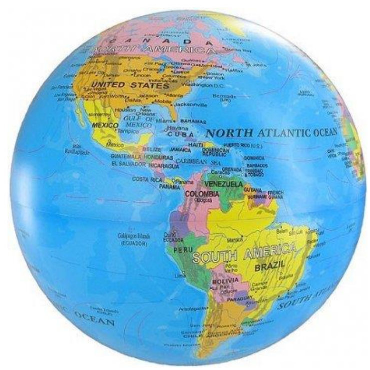
$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\, r^2\pi \cdot H}\,.$$

7.4 Лопта

Последње поглавље (не и мање битно) у уџбенику из математике за осми разред основне школе, упознаје нас са овим геометријским телом. Из личног искуства и разговора са колегама са студија, дошли смо до идентичног закључка, а то је да се овој теми не придаје велики значај. Оно што је већина нас научила у основној школи а тиче се ове теме су две основне формуле за рачунање површине и запремине лопте, а те формуле као да су „пале са неба“. Сећам се да су наши наставници говорили да ћемо о томе учити више у средњој школи, а опет када смо дошли у средњу школу, професори су говорили да смо то учили у основној.

Потрудићу се да мојим ученицима ово геометријско тело приближим на њима занимљив начин и да обрасце које ће користити за рачунање површине и запремине лопте, науче сами да изведу или да их бар разумеју.

Упознаћемо се са геометријским телом које представља приближни облик планете на којој живимо. Иако је данас прецизним мерењима утврђено да наша планета није у облику лопте у математичком смислу, у многим разматрањима се то предпоставља.



Слика: Земља

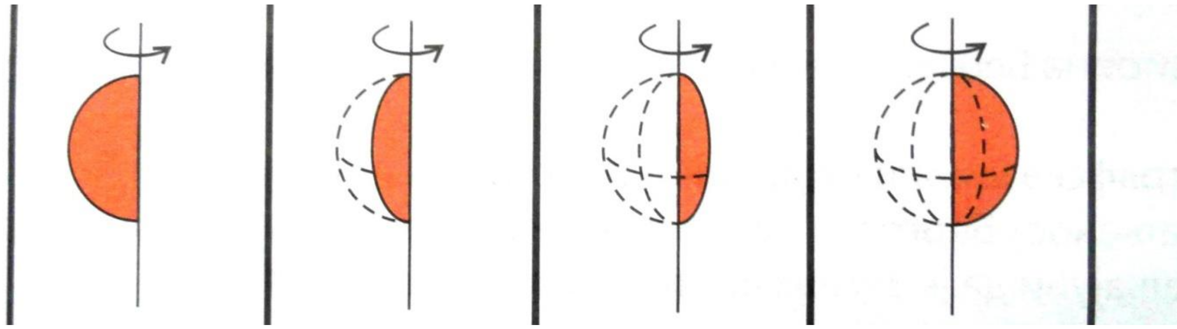
Скуп свих тачака у равни које су једнако удаљене од неке фиксиране тачке те равни назива се кружница. Уколико у овој дефиницији изоставимо ограничење да тачке припадају равни, тј. посматрамо све тачке простора које задовољавају наведену особину, добићемо површ у простору која се назива сфера[6]. Фиксирану тачку називамо центар сфере. Дуж која спаја центар са било којом тачком сфере назива се полупречник сфере. Лопта је тело у простору ограничено сфером. Центар и полупречник сфере су уједно и центар и полупречник лопте коју она одређује.

Лопту са центром O и полупречником r чине све тачке простора које од центра O нису удаљене више од r.

Лопта је ротационо тело. Добија се ротацијом полукруга око пречника.

---

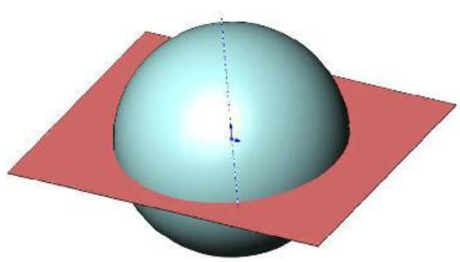
[6] Сфера је реч грчког порекла и поред математичког значења има и друга фигуративна значења која се користе у свакодневном говору. Тако, на пример, сфера значи и круг деловања, рада; област, подручје; друштвени круг и тако даље. Често се може чути и у разним изразима: интересна сфера, јавна сфера и слично.



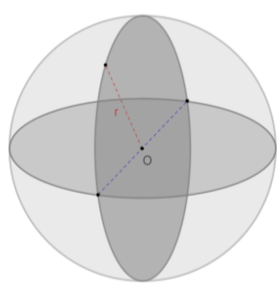
Слика: Ротација полукруга око пречника

- **Велики круг лопте**

Пресек лопте и равни која садржи њен центар је круг који називамо велики круг лопте. Полупречник великог круга лопте једнак је полупречнику лопте.

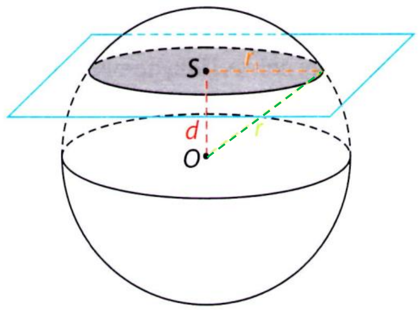


Слика: Пресек лопте и равни која садржи њен центар



Слика: Велики круг лопте

Ако лопту пресечемо са равни на неком растојању d од центра лопте, то изгледа овако.



Слика: Пресек равни и лопте на неком растојању од центра лопте

Полупречник круга r_1 који се налази у пресеку лопте и равни, можемо добити применом Питагорине теореме на правоугли троугао чије су катете d и r.

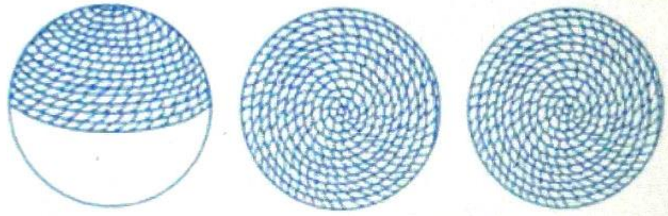
7.4.1 Површина лопте

Површине геометријских тела призме, пирамиде, ваљка и купе је врло једноставно приближити ученицима. Наставник је у могућности да ученицима прикаже мрежу ових тела, и врло често ученици сами изведу обрасце за рачунање површине. Лопта као геометријско тело је нешто проблематичнија да би се на овакав начин објаснила ученицима.

Површина лопте (односно сфере) је четири пута већа од површине њеног великог круга.

$$\mathbf{P = 4r^2}\boldsymbol{\pi}$$

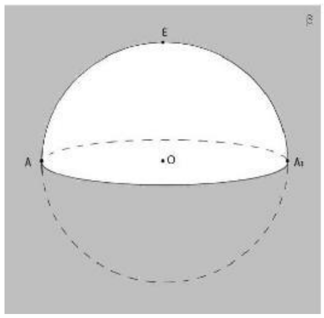
Да се презентовање ове лекције не би завршило само на овој дефиницији, ученицима се може експерименталним путем разјаснити ова тврдња. Канапом се, обавијајући га, прекрије половина лоптине површи (сфере). Тим, истим канапом покрију се два велика круга исте лопте (слика).

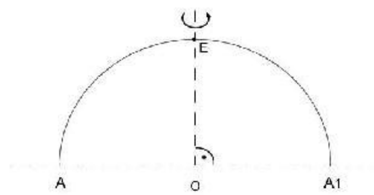


Слика: Намотавање канапа на лопту

За оне који желе више да знају.

Посматрајмо једну од две полулопте и пресецимо је још једном равни, која такође садржи центар лопте и нормална је на раван датог великог круга. Пресек полулопте и равни је нови полукруг. Обележимо са E тачку полукружнице, која има особину да јој се ортогонална пројекција поклапа са центром O дате лопте. Тачке E и O одређују праву која је оса ротације лопте.

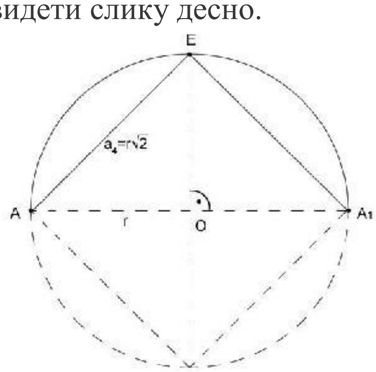


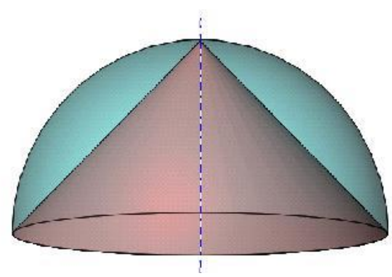


Слика: Пресек полулопте и нове равни је нови полукруг

Упишимо сада у добијени полукруг половину квадрата AEA_1. Страница тог квадрата једнака је, на основу Питагорине теореме $r\sqrt{2}$.

Обртањем полукруга и у њему уписаног дела квадрата око осе OE добија се полулопта и у њу уписана купа (основа купе поклапа се са великим кругом полулопте, а врх купе припада полусфери), видети слику десно.



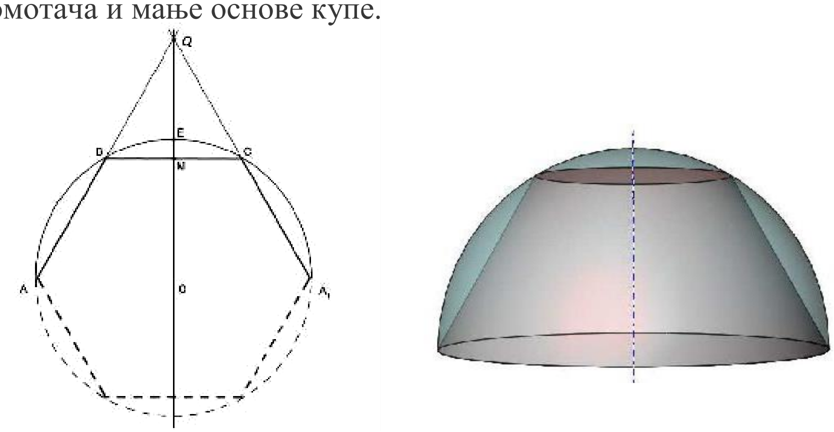


Слика: Купа у полулопти

Израчунајмо површину омотача добијене купе. Према формули $M = r\pi s$, и како је $s = r\sqrt{2}$, добијамо да је $M = r^2\pi\sqrt{2}$. Однос површине омотача купе и површине великог круга лопте износи

$$\frac{M}{B} = \frac{r^2\pi\sqrt{2}}{r^2\pi} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142.$$

У посматрани полукруг упишимо сада део $ABCA_1$ правилног шестоугла, али тако да оса ротације OE полови страницу BC и нормална је на њој. Дужина странице шестоугла је једнака полупречнику лопте r. Ротацијом тог дела шестоугла добија се омотач тела које се зове зарубљена купа, као и једна њена мања основа (видети слику десно). Израчунајмо укупну површину тог омотача и мање основе купе.

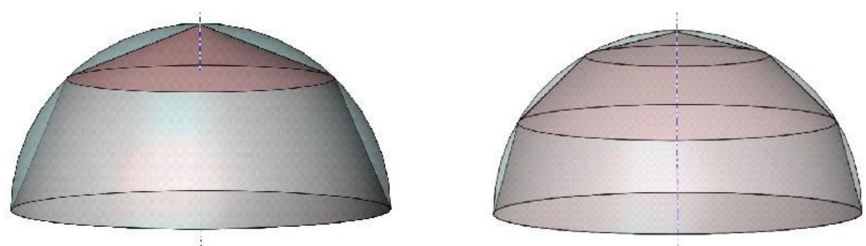


Слика: Зарубљена купа у полулопти

$$\mathrm{M} = \pi \cdot \mathrm{AO} \cdot \mathrm{AQ} - \pi \cdot \mathrm{BM} \cdot \mathrm{BQ} + \pi \cdot \mathrm{BM}^2 = \pi \cdot \mathrm{r} \cdot 2\mathrm{r} - \pi \cdot \frac{\mathrm{r}}{2} \cdot \mathrm{r} + \pi \cdot \left(\frac{\mathrm{r}}{2}\right)^2 = \mathrm{r}^2\pi \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{4}\, \mathrm{r}^2\pi.$$

Ова величина се према површини великог круга лопте односи као $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\mathrm{r}^2\pi}{\mathrm{r}^2\pi} = \frac{7}{4} \approx 1{,}75.$

Настављајући овај поступак, можемо сада да уписујемо у дати велики полукруг лопте правилне многоуглове са $8, 10, 12,$... страница. Наравно, добијене слике, а и изрази за површине обртних тела ће се прилично компликовати. Овде ћемо само пројектовати слике које се добијају када се упишу и ротирају делови правилног осмоугла и дванаестоугла.



Слика: Делови правилног осмоугла и дванаестоугла у полулопти

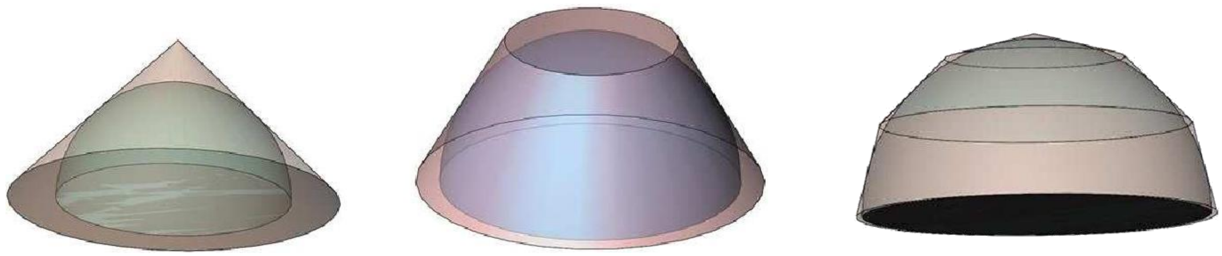
Одговарајући однос са површином великог круга су:

- код осмоугла $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}} \approx 1{,}8478$
- код дванаестоугла $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}} \approx 1{,}9319.$

Како је површина P полулопте, јасно, већа од сваке од површина добијених обртних тела, то мора да важи следећи низ неједнакости

$$1{,}4142 < 1{,}75 < 1{,}8478 < 1{,}9319 < \ldots < \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{B}}$$

Шта ће се догодити ако поновимо сличан поступак, али сада са описаним многоугловима око датог полукруга, и помоћу ротације добијеним телима описаним око полулопте? Посматрајмо одговарајуће слике које се на тај начин добијају обртањем правилног четвороугла (квадрата), шестоугла, осмоугла и дванаестоугла.



Слика: Ротација половине квадрата, половине правилног шестоугла и правилног дванаестоугла

Сличним поступком као у случају уписаних фигура, добијају се следећи изрази за површине описаних фигура $\mathrm{M}_4, \mathrm{M}_6, \mathrm{M}_8, \mathrm{M}_{12}$:

$\mathrm{M}_4 = \mathrm{r}\pi\mathrm{s} = \mathrm{r_к}\pi \cdot 2\mathrm{r_л} = \mathrm{r_л}\sqrt{2} \cdot 2\mathrm{r_л}\,\pi = 2\sqrt{2}\,\mathrm{r_л}^2\,\pi \approx 2{,}8284\mathrm{r_л}^2\,\pi.$

$\mathrm{M}_4 \approx 2{,}8284\mathrm{r}^2\pi,$

$\mathrm{M}_6 \approx 2{,}3333\mathrm{r}^2\pi,$

$\mathrm{M}_8 \approx 2{,}1844\mathrm{r}^2\pi,$

$\mathrm{M}_{12} \approx 2{,}0858\mathrm{r}^2\pi.$

Како су те површине свакако веће од површине полулопте, то закључујемо да мора да важи следећи низ неједнакости:

$$2{,}8284 > 2{,}3333 > 2{,}1844 > 2{,}0858 > \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{B}}\,.$$

Намеће се закључак да је уствари

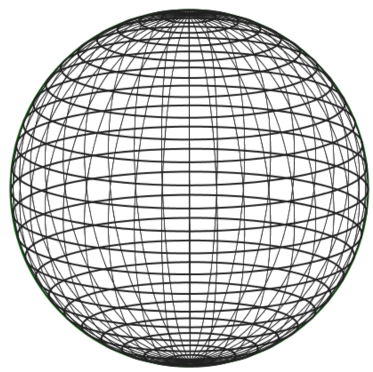
$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{B}} = 2,$$

тј. да се површина полулопте може изразити као $P = 2B = 2r^2\pi$.

Другим речима, површина целе лопте израчунава се по обрасцу **Рлопте = $\mathbf{4r^2\pi}$**.

7.4.2 Запремина лопте

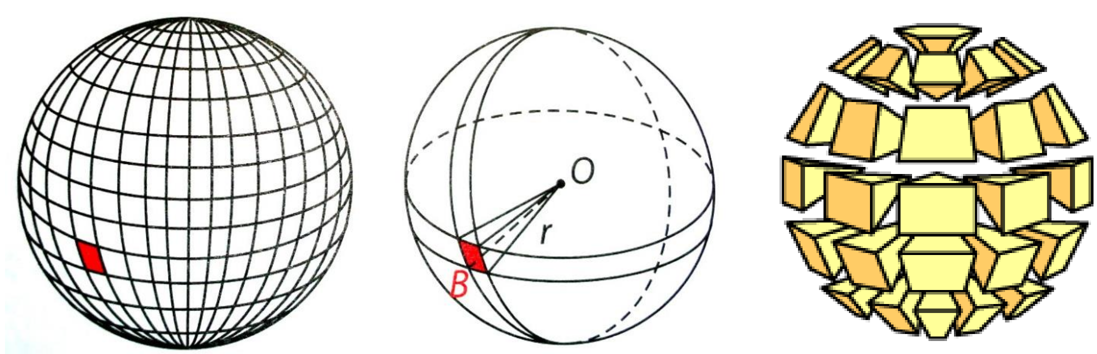
На сличан начин на који смо дошли до формуле за површину круга делећи круг на све мање и мање делове, исти поступак примењујемо и овде тако што сферу делимо кружницама на мале делове, као што је то приказано на наредној слици



Слика: Сфера подељена кружницама на мале делове

Ако су B_1, B_2, … , B_n површине тих делова, онда је њихов збир једнак површини сфере.

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = 4r^2\pi$$



Слика: Лопта издељена на велики број пирамида

Што је већи број делова на које је сфера подељена, то су ти делови „равнији“, па их узимамо као базе пирамида са врхом у центру сфере. Висина пирамиде је једнака полупречнику лопте. Збир запремина ових пирамида даће нам запремину лопте која је ограничена овом сфером.

Запремина једне такве пирамиде $V_1 = \frac{B_1 r}{3}$, а запремина лопте

$$V\ell = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{B_1 r}{3} + \frac{B_2 r}{3} + \dots + \frac{B_n r}{3} = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \dots + B_n) r = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \pi \cdot r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Запремина лопте полупречника r израчунава се по формули

$$\mathbf{V = \frac{4}{3} r^3 \pi}.$$

8. Занимљивости

8.1 О пахуљицама

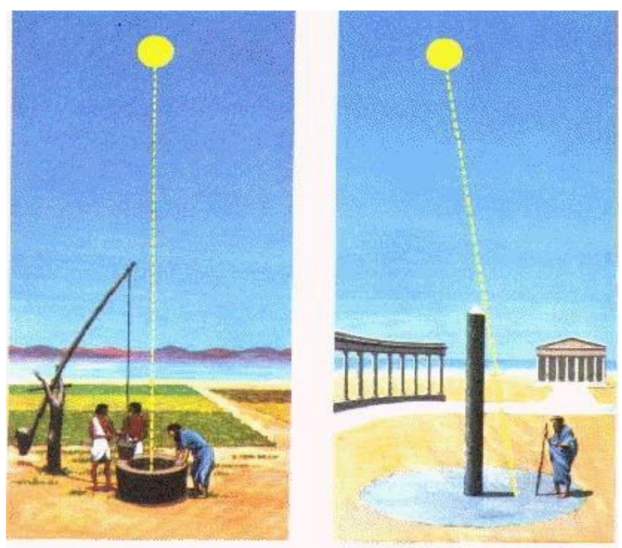
Верујте ми на реч, у свему је математика умешала своје прстиће.

Снежне пахуљице су скупови залеђених ледених кристала који падају кроз атмосферу Земље. Формирање пахуље изгледа овако. Око ситне честице прашине, коју свака пахуља има у свом језгру, кондензују се молекули воде и образују шестострану призму, на коју се касније додају нови слојеви молекула. Пахуље се формирају на температури –3 и –20 ℃ и појављују се у разноврсним облицима и величинама – сложенији облици стварају се како пахуљица пролази кроз подручја различите температуре и влажности. Током путовања, које почиње у облацима, а завршава се на тлу, снежна пахуља преживи доста промена под утицајем ветра, влажности ваздуха, притиска и других природних појава. Свака од њих поседује неописиву лепоту и не постоје две идентичне пахуљице. Запетљане, изузетно разноврсне и прекрасне, пахуљице зачуђују математичаре још од 1611. године кад је Јоханес Кеплер претпоставио да је шестострана структура последица основне кристалне структуре. Површина кристала је врло сложен полутечни слој на који се молекули воде из околне паре могу закачити или откачити. Како год било, многе кристалне структуре имају заједнички математички концепт – полиедар. Многе кристалне структуре нађене у природи долазе у облицима различитих врста полиедара као што су октаедри и тетраедри и тако даље.

8.2 Обим Земље

Уз помоћ савремених научно–техничких достигнућа није тешко измерити величину наше планете. Међутим у време када је први пут израчунат обим Земље, није било ни сателита ни авиона ни било чега што би данашњи научници искористили за тај прорачун. Све што је тадашњим људима стајало на располагању за овај подвиг, били су: Сунце, камила и математика.

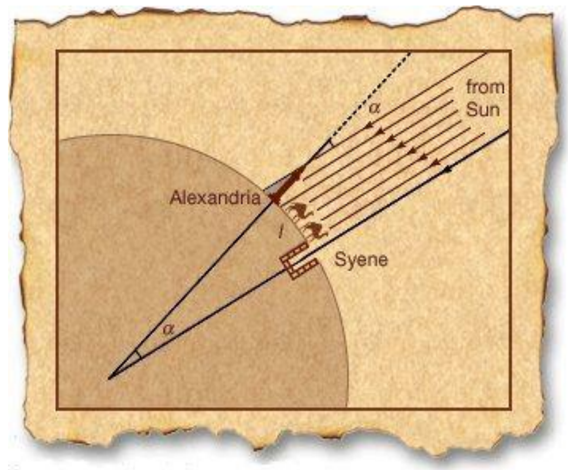
Ератостен из Кирене (276 - 194. године пре нове ере), управник Александријске библиотеке, постао је познат као први човек у историји који је измерио обим Земље (240. године пре нове ере). Ератостен је дошао до свог открића примењујући геометрију. Уочио је да у подне, за време летње дугодневице 21. јуна у граду Сијени (данашњи Асуан, Египат), предмети не бацају сенку. Видео је свој одраз у једном дубоком бунару до чијег дна сунчеви зраци иначе не допиру. За Ератостена је то значило да штап пободен под правим углом у земљу стоји упоредо са сунчевим зрацима. Он је знао да у Александрији (Египат) Сунце увек прави сенку и да је Сијена знатно јужније од Александрије.



Слика: Ератостен и бунар

Такође је знао за тврдње неких грчких филозофа да је Земља округла што му је следећи мисаони експеримент и потврдио. Замислио је полуправу, која полази из средишта Земље и пролази кроз тачку која представља град Сијену, паралелну са дужима које представљају сунчеве зраке; и полуправу која полази из средишта Земље до тачке која представља град Александрију а није паралелна сунчевим зрацима. Она се пресеца са њима под одређеним углом, па се због тога јавља сенка. Ератостен је мерењем утврдио да је тај угао приближно износио 7,2º што је педесети део од 360º тј. пуног угла. На основу тога је закључио да је

Земљин обим педесет пута већи од раздаљине између Сијене и Александрије. Од путника је сазнао да је камилама потребно 50 дана да пређу пут између ова два града и колико једна камила прелази дневно. Рачуном је добио растојање између Сијене и Александрије, оно је износило 5000 стадија. Помноживши 5000 стадија са 50, Ератостен је добио да обим Земље износи 250000 стадија.



Слика: Александрија и Сијена

Сматра се да 1 грчки стадиј износи око 185 метара а египатски око 157.5 метара. Зависно од тога коју јединицу мере је користио, рачунамо да је као вредност обима Земље добио 46250 km или 39375 km (обим Земље по данашњим сазнањима износи око 40 000 km).

8.3 Велики број

Реч коју свако од нас изговори неколико пута сваког дана, коју најчешће „трпе“ наше тастатуре, свакако је Google. Да ли сте се икада запитали зашто баш Google и откуд то име? Број са јединицом и сто нула зове се GOOGOL. Реч GOOGOL измислио је деветогодишњи дечак када га је његов стриц, амерички математичар Edward Kesner, замолио да нађе име броју 10 на 100-ти. Постоји пуно бројева који су већи од броја GOOGOL, али најинтересантнији међу њима јесте GOOGOLPLEX.

10 на GOOGOL назван је GOOGOLPLEX. Касније се погрешним спеловањем речи GOOGOL дошло до назива за претраживач. Ни појам GOOGOLPLEX није остао запостављен, па је то назив Google-овог седишта у Калифорнији.

Googol (10^{100})

10, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000

Слика: Број са 1 и сто нула

Lary Page је оснивач сајта Google, а име је добио баш према овом великом броју јер је желео да његов сајт има могућност да претражује толико страница, једног дана.

8.4 Трик са картама

На крају сваког часа смислите неку занимљивост и учините да ваши ђаци причају о математици међу собом. На тај начин једни од других уче, сарађују и што је најбитније за њих забављају се. Покажите им да математика није ни мало досадна.

Ево једног примера како да завршите свој час.

Узмите шпил од 52 карте. Трик прво објасните некоме ко учествује са вама у његовом спровођењу. За време извођења трика све време сте окренути ка зиду.Задатак вашег асистента (одабрати неког ученика) је следећи. Треба да замисли један број од 10 до 19, затим толико карата да изброји на нову гомилу. Сада имамо две гомиле карата. Након тога са мање гомиле карата (гомиле која садржи број карата од 10 до 19) изброји онолико карата колико износи збир цифара тог броја који је замислио на почетку (нпр. број карата који се на почетку издвојио на малу гомилу је 16, значи сада треба да изброји 7 јер је $1 + 6 = 7$), и тај број карата врати на већу гомилу. Затим треба да погледа доњу карту са мање гомиле, запамти је и покаже остатку одељења, а након тога да врати мању гомилу на већу од горе. Сада ви наступате који сте све време били окренути ка зиду или још боље били у другој просторији. Узмите шпил карата и избројите девет карата од горе. Та девета карта је она коју је ученик запамтио и показао остатку одељења.

Како?

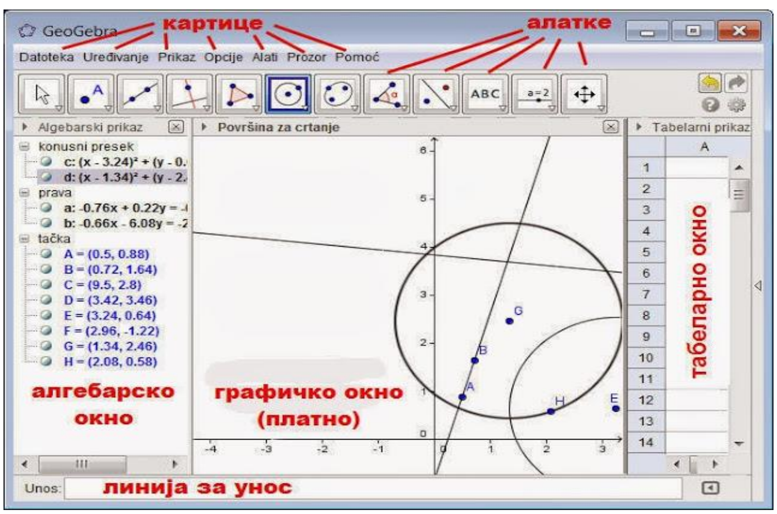
Овај трик крије просто математичко објашњење. Када се од било ког броја од 10 до 19 који се замисли, одузме збир цифара добије се увек исти број тј. број девет. Тако да све што треба да знате је да је то девета карта по реду.

$10 - 1 = 9, \quad 11 - 2 = 9, \quad 12 - 3 = 9, \quad \ldots, \quad 19 - 10 = 9$

Напомена. Трик може да се сроведе и на другачији начин, да се замисли број од 20 до 29 па када се одузме збир цифара увек се добија резултат 18, па би онда тражили осамнаесту карту и тако даље.

9. ГеоГебра

Програм који сам користила у овом раду за импортовање слика и израду анимација је **ГеоГебра.** Ради се о програму за израду динамичких, „живих цртежа“ и веома је користан код учења математике. Програм обједињује геометрију (**geo**metry) и алгебру (al**gebra**). Елегантан је и врло једноставан за коришћење. Аутор програма је аустријски математичар Маркус Хохенвартер (Markus Hohenwarter) са групом програмера. **ГеоГебра** је писан на језику Јава. Неопходно за рад у овом програму је претходна инсталација Јаве (јер без тог програма нећете моћи да отворите динамичке моделе – аплете.). У програму **Геогебра** се врши интерактивна сарадња геометрије, алгебре и аритметике. Можете да правите конструкције помоћу тачака, вектора, линија, конусних исечака, математичких функција, а затим да их динамички мењате помоћу миша. Омогућен је директан унос једначина и манипулације с координатама. Све је урађено с математичком тачношћу и геометријском прецизношћу. **Геогебра** омогућава двојни приказ објеката: сваки алгебарски израз, приказан у алгебарском окну, може да се представи геометријски у геометријском (графичком) окну и обрнуто. Постоји и трећи начин - приказ може бити дат и у облику табеле.



Слика: Прозор ГеоГебре

Програм ГеоГебра је добио више међународних награда и може постати прави помоћник наставницима математике и физике, како у основним, тако и у средњим и вишим школама. Програм се може користити код сваке теме, у којој постоје конструкције или где се може демонстрирати графички метод решавања задатака. Такође, овај програм се може користити за решавање задатака на интерактивној табли, као и у дигиталној учионици, где деца могу да реше задатак на рачунару и да га преко е-поште пошаљу наставнику или објаве у мрежи (локалној или глобалној).

10. Зашто је математика важна?

Питање важности математике се јавља када деца науче да рачунају, сабирају, одузимају, множе и деле, и отуда почињу да верују да знају све што треба да адекватно функционишу у животу. На крају крајева, ако неко разуме како да прати свој новац или исече колач, тако да буде довољно комада за све, шта друго још треба да зна? Деца која још не познају појам математике, обично могу да разумеју објашњење да је потребно да знају како да располажу новцем, гледају на сат, деле ствари, или да знају колико ће неких предмета остати ако се неколико потроши, а за све то је потребно знање математике. Млађа деца такође могу схватити зашто је важно да знају како се мери, колико је нешто високо или тешко, зато деци треба објашњавати значај математике од најранијег доба. Оно што није тако лако објаснити, код нешто старије деце кад математика постане сложенија, је како математички фактори могу бити корисни у њиховим животима, ако не планирају да се баве математиком или сродним наукама. Када математика престане да буде само прост рачун, код деце која нису склона математици, може се појавити сумња у корисност овог предмета. Деци је лако да схвате да постоје радна места и каријере где је знање напредне математике од кључне важности. Такође постоје области где је потребно солидно знање и они то разумеју. Међутим, треба им упорно објашњавати да је у основној школи неопходно да стекну добро основно знање из математике, јер тада још не знају за које занимање ће се определити, и да касније, када пожеле да се баве одређеном професијом може десити да ту жељу не остваре јер немају солидно основно математичко знање. Осим тога, особа која је добро савладала основе математике је научила и да решава проблеме који нису математички. Иста логика која се користи у математици, веома добро се може искористити за логичан приступ сваком другом проблему. Тај приступ је организован и систематичан, и доводи до најбржег и најбољег могућег решења. Веровали или не та логика се може користити и за одлуке као што су, ићи на факултет или не, остати у браку или не. Наш мозак има способност да мисли логички, али прво мора да научи „језик логике“. На пример, наше тело има потенцијал да плеше, али ми морамо прво да научимо кораке плеса да бисмо ту способност искористили, а онда морамо пуно да вежбамо да бисмо добро плесали. Тако је и са логичким размишљањем, које вежбамо вежбајући математику. Свака особа у свету има користи од способности да мисли логичније, без обзира да ли ће или не икада постати математичар. Математика није само предмет у школи или мноштво неповезаних информација. Сви ти делови математике су делови једне огромне слагалице, која нам, када је сложимо, помаже да разумемо како функционишу ствари и у природи и у друштву. Математика нас учи да све има своје узроке и последице и да наизглед неповезани догађаји, када их логички склопимо чине повезану целину. Када је једна моја пријатељица тражила препоруке за избор дечијег лекара, њена мама иначе предавач на медицинском факултету јој је препоручила, уз коментар: „Иди код ње, она је могла да буде и добар математичар!“

11. Закључак

Геометријско знање је широко примењиво. Геометрија доприноси решавању многих проблема свакодневног живота као што су изградња мостова, тунела, зграда, спортских терена, саобраћајних путева и тако даље.

Трогодишње радно искуство у основној школи ме је навело да тема мог мастер рада буде посвећена геометрији. Читав рад је укратко начин на који се трудим да ученицима приближим сваку наставну јединицу, а реакција ученика говори о томе да сам на правом путу да један од омиљених предмета у школи у којој радим буде математика.

Математику треба радити као што се тренира фудбал. Онај који стално тренира остаје у форми и на утакмици постиже одличне резултате. Тако и математику треба вежбати, вежбати и само вежбати!

12. Литература

[1] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика за осми разред основне школе, Klett Београд,* 2012.

[2] Н. Икодиновић, С. Димитријевић, *Математика за седми разред основне школе, Klett Београд,* 2012.

[3] З. Лучић, *Огледи из историје античке геометрије, ЈП Службени гласник,* 2009.

[4] Мики Миклош Мароти, *Мозгонетке, тренирање мозга уз разоноду, Младинска књига Београд,* 2010.

[5] М. Петровић, Љ. Петровић, *Математички времеплов прилози за историју математике, Змај, Нови Сад,* 2006.

[6] Н. Тринајстић са сарадницима, Р. Бошковић институт, *Комлексност Платонових тела, Загреб.*

[7] С.Б. Недовић, *Математичко историјски мозаик поглед у математику антике (са збирком задатака), Архимедес, Београд,* 2004.

[8] https://tajnisvijetmatematike.wordpress.com/2011/11/09/ukratko-o-geogebri/

[9] https://m4t3m4t1k4.wordpress.com/tag/обим-земље/

[10] https://alexpanajotu.wordpress.com/2013/04/25/историја-правилних-полиедара/

[11] https://goranagnjidicmath.wordpress.com/

Садржај

Биографија

Маја Јањић је рођена 2. јула 1989. године у Београду. Основну школу „Бошко Палковљевић Пинки “ у Старој Пазови је завршила 2004. године као носилац Вукове дипломе, а гимназију „Бранко Радичевић“, у Старој Пазови, 2008. године такође као носилац Вукове дипломе. Основне академске студије Математичког факултета Универзитета у Београду уписала је 2008. године. Дипломирала је 31. јануара 2013. године, са просечном оценом 8,61. Мастер академске студије Математичког факултета у Београду је уписала 2013. године.

Школске 2012/2013 започела је радни однос у основној школи „Бошко Палковљевић Пинки“ у Старој Пазови као наставник математике, где и сада ради.