Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Elektronske lekcije o stereometriji u osmom razredu osnovne škole kreirane korišćenjem programskog paketa GeoGebra

-master rad-

Mentor:
prof. dr Miroslav Marić

Student:
Mirjana Gluščević

1065/2014

Beograd, 2016.

Članovi komisije:
prof. dr Miroslav Marić, mentor
prof. dr Milan Božić
prof. dr Srđan Vukmirović

Sadržaj

Uvod **3**

1 Programski paket GeoGebra **4**
- 1.1 Algebarski prikaz 5
- 1.2 Grafički prikaz 8
  - 1.2.1 Grafički prikaz u ravni 8
  - 1.2.2 Grafički prikaz u prostoru 19

2 Prizma **23**

3 Piramida **35**

4 Valjak **44**

5 Kupa **49**

6 Lopta **52**

7 Primeri **55**

Zaključak **71**

Uvod

GeoGebra je matematički softverski paket koji povezuje geometriju, algebru i analizu. Procenjuje se da preko 100.000 nastavnika (prema [1]) širom sveta već koristi ovaj softverski paket za kreiranje kako statičnih, tako i interaktivnih materijala koji olakšavaju učenicima savladavanje matematike. Međutim, iz iskustva mnogih nastavnika osnovnih škola u Srbiji, može se zaključiti da naš obrazovni sistem nedovoljno koristi potencijal koji navedeni programski paket poseduje.

Pravac kojim se može krenuti sa ciljem popularizacije programskog paketa GeoGebra kao nastavnog sredstva u školama u Srbiji je korišćenje ovog programskog paketa u svrhu kreiranja elektronskih lekcija iz matematike. Dobar primer kako je to uradjeno može se naći u [2] ili [3]. Svrha kreiranje elektronskih lekcija korišćenjem programskog paketa GeoGebra je u omogućavanju boljeg razumevanja gradiva od strane učenika. Na taj način može se postići i veće interesovanje učenika za samo gradivo, što dalje može doprineti poboljšanju kvaliteta nastave.

Geometrija je tema koja zauzima značajan deo predviđenog programa nastave za osmi razred osnovne škole. U ovom radu biće prikazano kako se softverski paket GeoGebra može koristiti u velikom broju aspekata nastave stereometrije. Rad se sastoji od sedam poglavlja. U prvom predstavljen su alati za rad sa objektima u programskom paketu GeoGebra. U drugom poglavlju definisani su elementi prizme i objašnjen je način računanja površine i zapremine prizme. U trećem poglavlju definisani su elementi piramide, objašnjen je način računanja površine i zapremine, gde je uz poseban aplet omogućena vizuelizacija dobijanja formule za zapreminu piramide. U četvrtom delu objašnjen je nastanak cilindrične površi, definisan je valjak, kao i njegovi elementi i mogući preseci sa ravni. Date su i formule za površinu i zapreminu valjka uz adekvatne aplete koji ih ilustruju. U petom delu objašnjen je nastanak konusne površi, kao i kupe. Definisani su elementi i date formule za računanje površine i zapremine kupe. U šestom delu prikazan je nastanak sfere i lopte, elementi lopte, preseci sfere, odnosno lopte i ravni. Takođe su date formule za računanje površine i zapremine. U sedmom poglavlju predstavljeni su zadaci za sva tri nivoa postignuća, kojima se učenicima približava oblast obrtnih tela. Pri tome, elektronski materijali kreirani za potrebe ovog master rada javno su dostupni na adresi `http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml10056/MRad/index.html` i namenjeni učenicima i nastavnicima kao nastavno sredstvo koje nudi vizuelni prikaz kako teorijskog dela, tako i dela u kojem su prikazani zadaci.

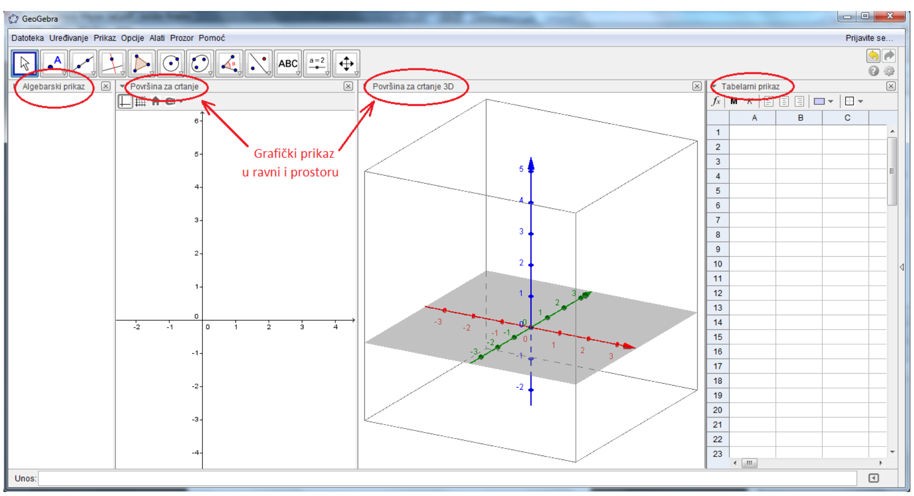
1 Programski paket GeoGebra

GeoGebra je dinamički softverski paket za matematiku dizajniran za učenje i podučavanje matematičkih sadržaja na svim nivoima obrazovanja. Njegov tvorac, Markus Hohenvarter, započeo je projekat 2001. godine na Univerzitetu u Salzburgu, a sa timom programera iz celog sveta i dalje radi na njegovom unapređivanju. Softverski paket GeoGebra dostupan je na mnogim svetskim jezicima. Povezuje geometriju, algebru i analizu. Program omogućava različite prikaze matematičkih objekata čuvajući pritom njihovu dinamičku povezanost. To znači da ako se vrši izmena objekta u jednom od prikaza, njegova reprezentacija u drugim prikazima se automatski prilagođava.

Geogebra ima četiri različita prikaza matematičkih objekata:

1. algebarski prikaz,
2. grafički prikaz:
   (a) u ravni,
   (b) u prostoru,
3. CAS (Computer Algebra System) prikaz,
4. tabelarni prikaz.

Prilikom pokretanja GeoGebra programa, najčešće su vidljivi algebarski i grafički prikaz u ravni. U opciji *Prikaz*, mogu se dodavati ili uklanjati druge vrste prikaza matematičkih objekata. Jedan od mogućih izbora prikazan je na slici 1.

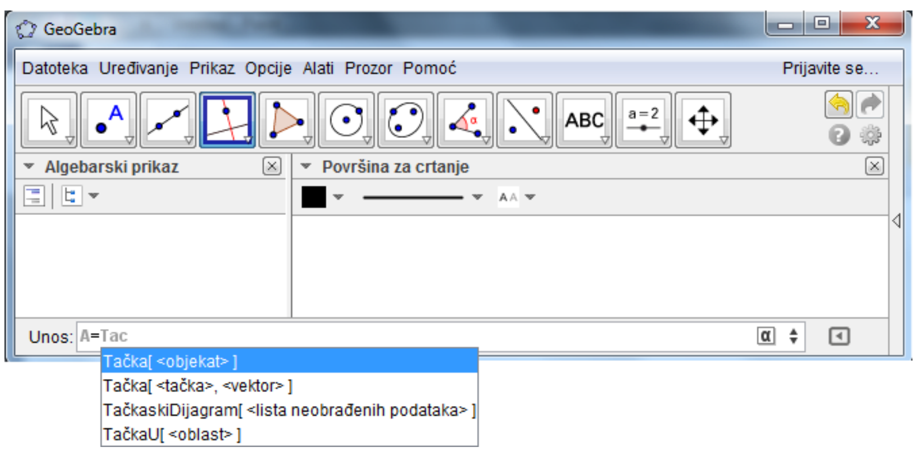


Slika 1: Radno okruženje GeoGebre

Upravo zbog najčešćeg korišćenja algebarskog i geometrijskog prikaza pri radu u GeoGebri, u narednom delu biće predstavljene njihove mogućnosti i povezanost. Biće objašnjeno kako se koristi miš prilikom kreiranja i izmene objekata. Takođe, biće dat opis rada sa svakim od objekata, kroz upoznavanje alata GeoGebra programa.

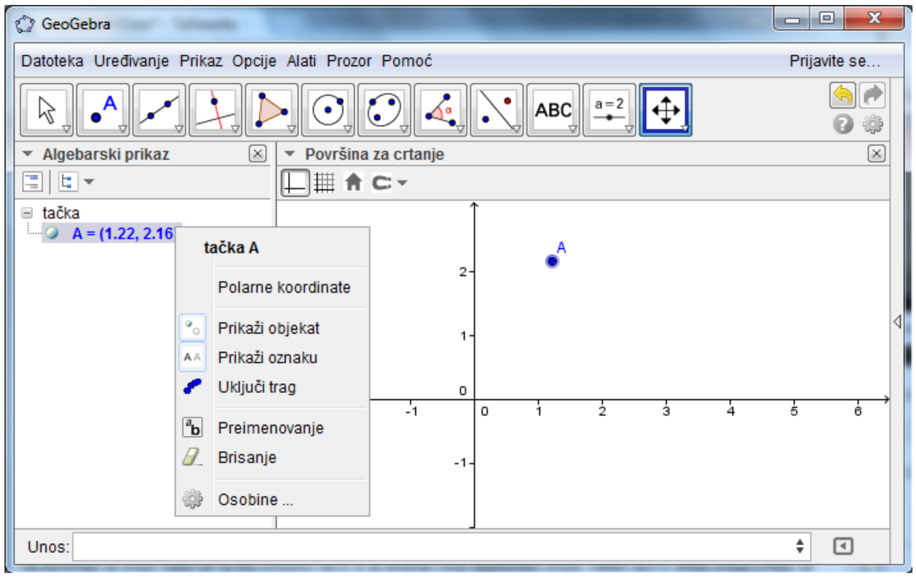
1.1 Algebarski prikaz

Algebarski (brojčani) prikaz nalazi se obično na levoj strani GeoGebra prozora. Unošenje jednačina i druga algebarska zadavanja se vrše preko polja za unos koje se nalazi na dnu prozora. Upotrebom ovakvog načina unosa objekata moguće je brzo i jednostavno kreirati i neke komplikovane konstrukcije. U GeoGebri moguće je raditi sa brojevima, vektorima, uglovima, tačkama, dužima, pravama, krivama drugog reda, itd. Sve ove objekte moguće je uneti preko koordinata i jednačina. Nakon završetka zadavanja komande u polje za unos, treba pritisnuti Enter, nakon čega će se algebarski unos pojaviti u algebarskom prikazu, a njegova grafička reprezentacija u grafičkom prikazu. Prilikom unosa algebarskog izraza u polje za unos GeoGebra nudi moguće funkcije za kreiranje željenog objekta. Na slici 2 prikazano je kreiranje tačke A u polju za unos, kao i lista ponuđenih funkcija na osnovu otkucanog dela komande.



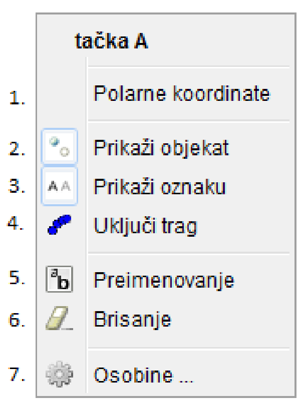
Slika 2: Algebarski unos tačke

Osobine kreiranog objekta mogu se menjati u algebarskom prikazu. Klikom desnim tasterom miša na algebarski prikaz objekta čije osobine treba izmeniti, pojavljuje se padajuća lista osobina tog objekta, što je prikazano na slici 3.



Slika 3: Menjanje osobina objekta u algebarskom prikazu

U zavisnosti od tipa objekta čije osobine se menjaju, razlikuju se i dostupne opcije.



Slika 4: Osobine objekta

Na slici 4 prikazane su osobine tačke:

1. Izbor prikaza Dekartovih ili polarnih koordinata.
2. U zavisnosti da li je opcija označena ili ne, objekat će biti prikazan, odnosno neće biti prikazan u grafičkom prikazu.
3. U zavisnosti da li je opcija označena ili ne, oznaka objekta će biti prikazana, odnosno neće biti prikazana u grafičkom prikazu.
4. U zavisnosti da li je opcija označena ili ne, biće prikazan, odnosno neće biti prikazan trag prilikom pomeranja objekta u grafičkom prikazu.
5. Opcija omogućava promenu imena objekta.
6. Opcija omogućava brisanje objekta.
7. Opcija omogućava pristup dodatnim osobinama objekta.

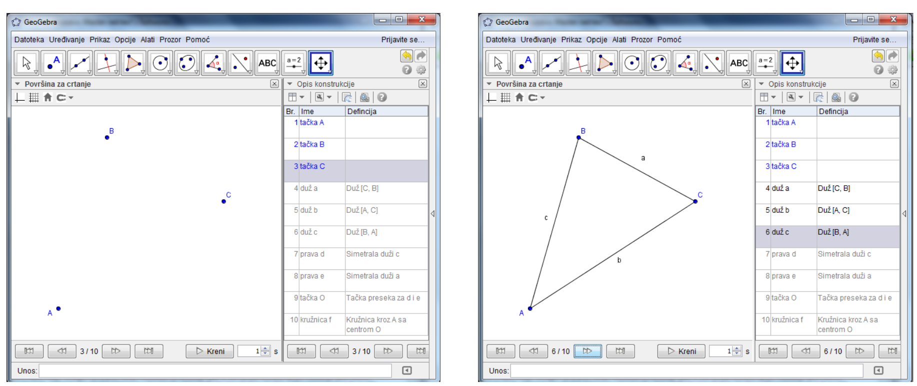
U okviru algebarskog prikaza, matematički objekti mogu biti organizovani po:

1. zavisnosti,
2. tipu objekta,
3. sloju,
4. redosledu konstrukcije.

Algebarski prikaz po zavisnosti kreirane matematičke objekte grupiše kao nezavisne i zavisne objekte. Nezavisan objekat je objekat koji je napravljen bez korišćenja bilo kojeg postojećeg objekta, dok je objekat napravljen korišćenjem bar jednog postojećeg objekta zavisan objekat.

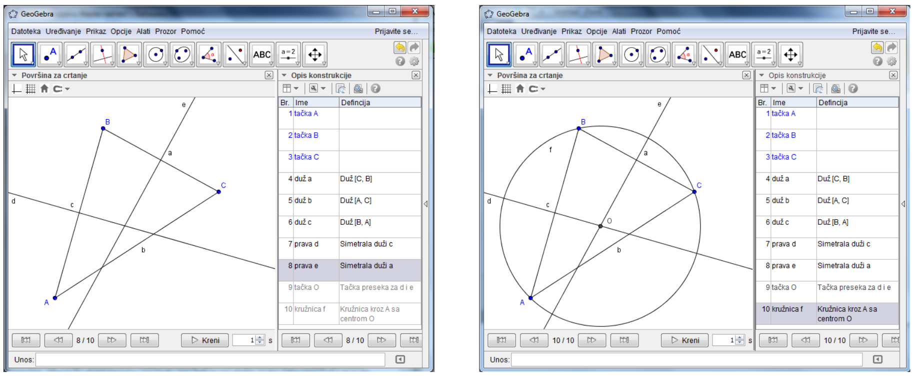
Algebarski prikaz po tipu objekta grupiše kreirane objekte po njihovom tipu. Npr. sve tačke grupiše u jednom delu, sve duži u drugom, trouglove posebno, itd. Ova vrsta prikaza se zbog svoje preglednosti i praktičnosti najčešće koristi.

Prikaz po redosledu konstrukcije korisno je koristiti prilikom demonstriranja postupka nastajanja apleta. Međutim, ako je bitno staviti akcenat na redosled zadavanja komandi prilikom rada, pogodnije je koristiti opis konstrukcije. On se može uključiti u delu *Prikaz*. Omogućava praćenje redosleda zadavanja komandi tako što korake predstavlja po redosledu (pod rednim brojevima), prikazuje ime objekta kreiranog u tom koraku, kao i definiciju objekta. Ovakav prikaz omogućava da se ista konstrukcija izvede nekoliko puta, korišćenjem dugmića za prethodni, odnosno sledeći korak. Takođe, podešavanjem izgleda radne površine, može se izabrati da se vidi traka za korake konstrukcije na dnu prozora. Ona ima jedan dodatak u odnosu na klasičan prikaz opisa konstrukcije, a to je dugme *Kreni*. Klikom na njega konstrukcija se prikazuje po redosledu nastanka, smenjivanjem komandi u zadatom vremenskom intervalu. Taj vremenski interval je moguće promeniti. Prikaz konstrukcije se, po potrebi, može i pauzirati. Na slikama 5 i 6 prikazan je redosled konstrukcije na primeru konstruisanja opisane kružnice trougla.



Slika 5: Opis konstrukcije opisane kružnice trougla

Konstrukcija trougla čija opisana kružnica se traži prikazana je na slici 5. Koraci 1, 2 i 3 opisa predstavljaju konstrukciju temena trougla, a 4, 5 i 6 stranica trougla.



Slika 6: Opis konstrukcije opisane kružnice trougla

Na slici 6 predstavljena je koracima 7 i 8 konstrukcija simetrala dveju stranica trougla, korakom 9 konstrukcija centra opisane kružnice trougla i poslednjim korakom 10, konstrukcija tražene kružnice.

Koracima je moguće zameniti redosled, a moguće je i naknadno ubaciti neki međukorak u konstrukciji.

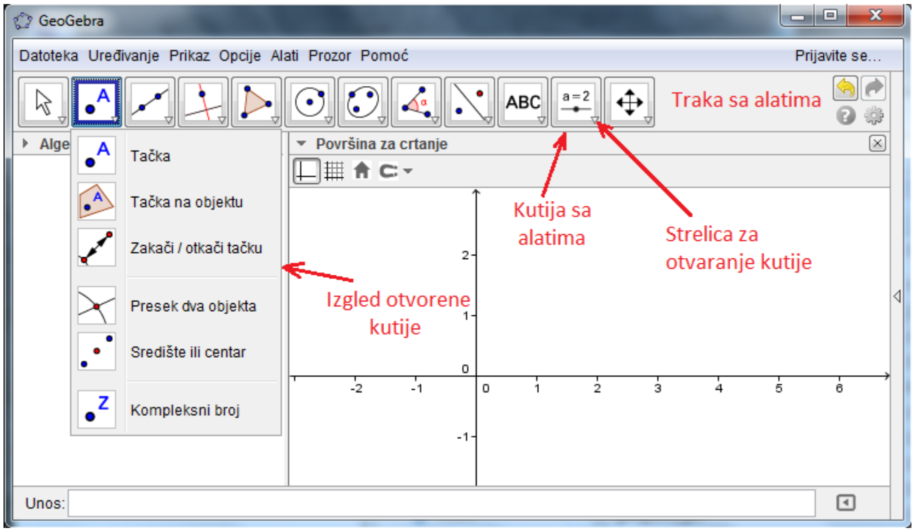
1.2 Grafički prikaz

Grafički prikaz je pogodan za pravljenje geometrijskih konstrukcija. Na traci sa alatima nalaze se ikone koje predstavljaju kutiju sa alatima za konstrukciju objekata sličnog tipa. Da bi se videli svi alati dostupni u jednoj kutiji, neophodno je kliknuti na strelicu u donjem desnom uglu njene ikone.

Korisno je uočiti da svi objekti koji se naprave u grafičkom prikazu imaju i svoju algebarsku reprezentaciju u algebarskom prikazu. Zanimljivo je da se objekti u grafičkom prikazu mogu pomerati tako što se prevlače pomoću miša. Prilikom pomeranja određenog objekta, pomeraju se i svi objekti koji od njega zavise. Na taj način dobija se na dinamičnosti prikaza. Istovremeno, njihova algebarska reprezentacija se dinamički ažurira.

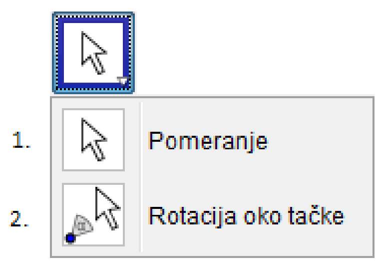
1.2.1 Grafički prikaz u ravni

Grafički prikaz u ravni uvek prikazuje grafičku reprezentaciju ravanskih objekata kreiranih u GeoGebri. Na slici 7 prikazan je izlged GeoGebra prozora sa grafičkim prikazom u ravni uz vidljivost koordinatnog sistema, a moguć je i prikaz mreže. Alati za rad sa objektima razlikuju se u grafičkom prikazu u ravni i grafičkom prikazu u prostoru, a smešteni su u okviru trake sa alatima.



Slika 7: Grafički prikaz u ravni

Na traci sa alatima nalazi se dvanaest ikona koje predstavljaju kutije sa alatima za konstrukciju objekata sličnog tipa. Da bi se videli svi alati dostupni u jednoj kutiji, neophodno je kliknuti na strelicu u donjem desnom uglu njene ikone. Korisniku je ostavljena mogućnost da sam kreira alat koji mu je potreban izborom izlaznih i ulaznih objekata, kao i imena i ikone novog alata. Na narednim slikama biće prikazan izgled svake od postojećih kutija.

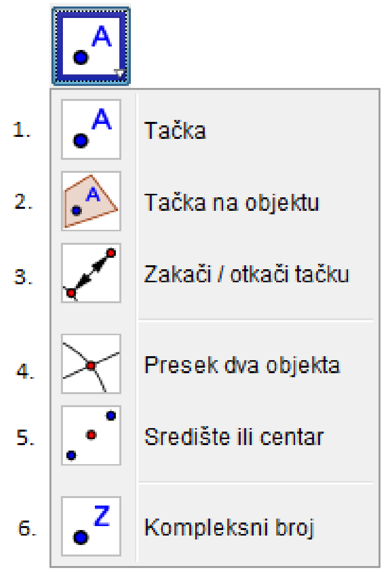


Slika 8: Alati za pomeranje objekata

Na slici 8 prikazani su *alati za pomeranje objekata*:

1. Levim klikom miša na željeni objekat vrši se selekcija tog objekta, dok se pomeranjem miša uz levi klik vrši pomeranje objekta.

2. Za rotaciju oko tačke, neophodno je prvo izabrati centar rotacije, a zatim pomerati objekat na željeni način.



Slika 9: Alati za rad sa tačkama

Na slici 9 prikazani su *alati za rad sa tačkama*:

1. Nova tačka kreira se klikom na površinu za crtanje. Klikom na pravu, funkciju ili krivu kreira se tačka na tom objektu.

2. Nova tačka kreira se klikom unutar postojećeg objekta ili na njegovu granicu.

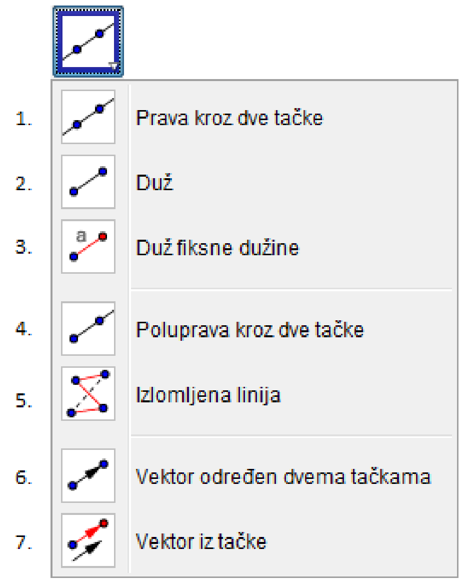
3. Klikom na tačku, pa na objekat, tačka se može zakačiti/otkačiti.

4. Presečne tačke dva objekta mogu se dobiti na dva načina:

   - izborom dva objekta (tada se dobijaju sve presečne tačke ta dva objekta),
   - klikom direktno na presek (tada se dobija samo jedna presečna tačka).

5. Klikom na dve tačke dobija se središte duži određene tim tačkama. Klikom na duž dobija se središte te duži. Klikom na konusni presek dobija se njegov centar.

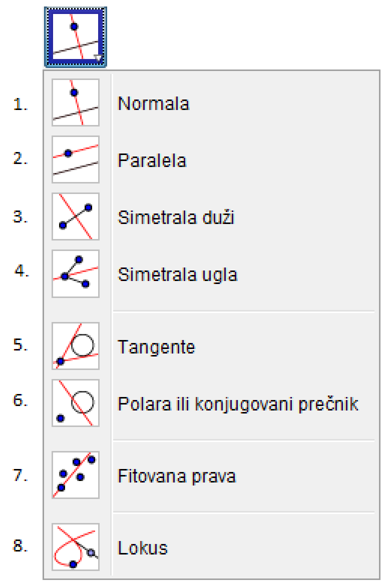
6. Klikom na grafički prikaz dobija se objekat tipa kompleksan broj.



Slika 10: Alati za rad sa linijama

Na slici 10 prikazani su *alati za rad sa linijama*:

1. Izborom dveju tačaka dobija se prava određena tim tačkama.
2. Izborom dveju tačaka dobija se duž određena tim tačkama.
3. Izborom početne tačke, otvara se prozor u koji se unosi dužina duži. Dobija se duž paralelna x osi.
4. Izborom početne tačke poluprave, a zatim i druge tačke kroz koju poluprava prolazi dobija se poluprava.
5. Izborom svih temena, a zatim klikom na početno teme dobija se izlomljena linija.
6. Izborom početne i krajnje tačke dobija se vektor.
7. Izborom tačke A i vektora v, dobija se vektor čija je početna tačka A, a krajnja $A + v$.



Slika 11: Alati za rad sa specijalnim linijama

Na slici 11 prikazani su *alati za rad sa specijalnim linijama*:

1. Izborom tačke A i prave a dobija se prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravu a.

2. Izborom tačke A i prave a dobija se prava koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj a.

3. Izborom dveju tačaka dobija se simetrala duži određene tim tačkama. Izborom duži dobija se simetrala te duži.

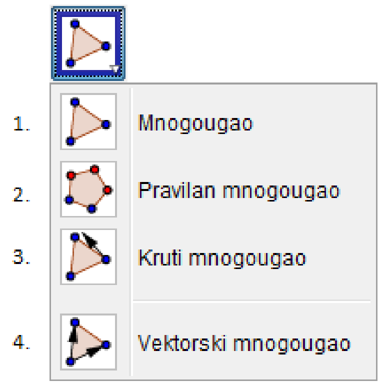
4. Izborom tačaka A, B i C dobija se simetrala ugla $\sphericalangle ABC$. Izborom dve prave dobijaju se simetrale uglova koje one određuju.

5. Izborom tačke A i konusnog preseka dobijaju se sve tangente konusnog preseka koje sadrže tačku A. Izborom prave a i konusnog preseka dobijaju se sve tangente konusnog preseka paralelne pravoj a.

6. Izborom tačke i konusnog preseka dobija se polara. Izborom prave i konusnog preseka dobija se konjugovana prava koja sadrži konjugovani prečnik.

7. Izborom grupe tačaka dobija se fitovana prava koja im odgovara.

8. Izborom tačke lokusa, a zatim i tačke na objektu dobija se lokus.



Slika 12: Alati za rad sa mnogouglovima

Na slici 12 prikazani su *alati za rad sa mnogouglovima*:

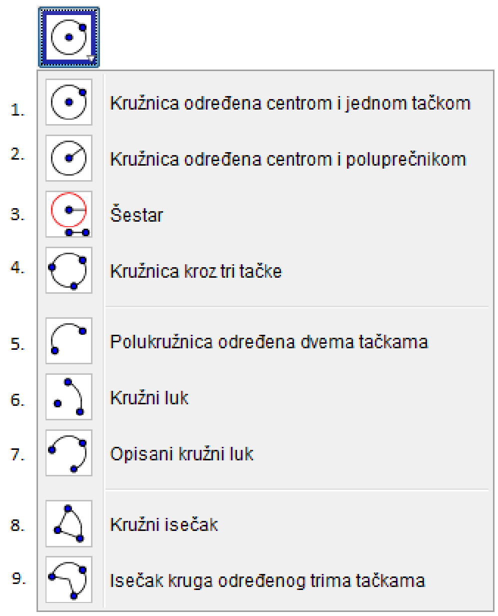
1. Izborom tačaka koje će biti temena mnogougla, a zatim opet početnog temena dobija se mnogougao.
2. Izborom dveju tačaka pojavljuje se prozor u koji se unosi broj temena pravilnog mnogougla.
3. Izborom tačaka koje će biti temena mnogougla, a zatim opet početnog temena dobija se mnogougao koji zadržava oblik ako se pomeraju temena.
4. Izborom tačaka koje će biti temena mnogougla, a zatim opet početnog temena dobija se mnogougao koji zadržava oblik ako se pomera prva tačka, dok se druge mogu slobodno pomerati.

Na slici 13 prikazani su *alati za rad sa kružnicama i lukovima*:

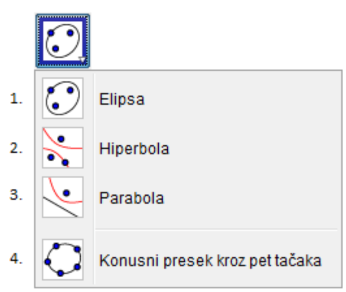
1. Izborom tačke koja će biti centar kružnice i tačke na kružnici, dobija se kružnica.
2. Izborom tačke koja će biti centar kružnice, pojavljuje se prozor u koji se unosi dužina poluprečnika, nakon čega se dobija kružnica.
3. Izborom duži ili dveju tačaka, a zatim i centra kružnice, dobija se kružnica.
4. Izborom tri tačke, dobija se kružnica koja ih sadrži.
5. Izborom dveju tačaka, dobija se polukružnica određena tim tačkama.
6. Kružni luk se dobija izborom centra i početne i krajnje tačke kružnog luka.
7. Kružni luk se dobija izborom početne tačke, zatim tačke koja pripada luku i konačno, izborom krajnje tačke.

8. Kružni isečak se dobija izborom centra i početne i krajnje tačke kružnog luka.

9. Kružni luk se dobija izborom tri tačke koje ga određuju.



Slika 13: Alati za rad sa kružnicama i lukovima



Slika 14: Alati za rad sa konusnim presecima

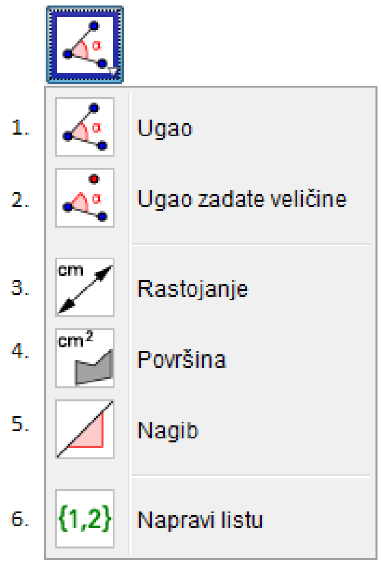
Na slici 14 prikazani su *alati za rad sa konusnim presecima*:

1. Izborom tri tačke, dobija se elipsa, čije su žiže prve dve tačke, a treća tačka pripada toj elipsi.

2. Izborom tri tačke, dobija se hiperbola, čije su žiže prve dve tačke, a treća tačka pripada toj hiperboli.

3. Izborom tačke i direktrise, dobija se parabola.

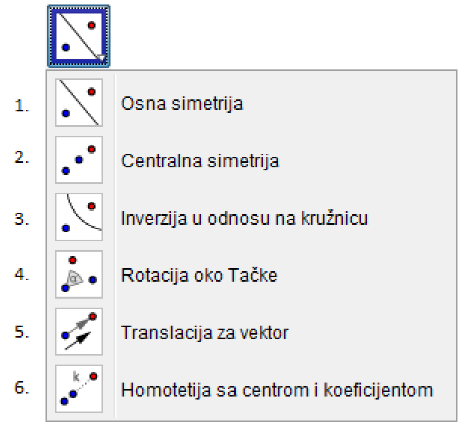
4. Izborom pet tačaka, dobija se konusni presek njima određen.



Slika 15: Alati za rad sa uglovima i merenje

Na slici 15 prikazani su *alati za rad sa uglovima i merenje*:

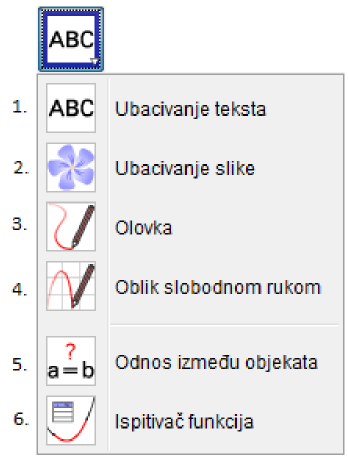
1. Izborom tri tačke ili dve duži, dobija se ugao njima određen.
2. Izborom tačke na kraku ugla i temena ugla, pojavljuje se prozor u koji se unosi mera ugla, nakon čega se dobija ugao.
3. Izborom dveju tačaka, dobija se dinamički tekst koji ispisuje njihovo rastojanje. Izborom duži, dobija se dinamički tekst koji ispisuje dužinu te duži. Izborom mnogougla ili kružnice, dobija se dinamički tekst koji ispisuje obim.
4. Izborom poligona, kružnice ili konusnog preseka, dobija se dinamički tekst koji ispisuje površinu.
5. Izborom prave, dobija se dinamički tekst koji ispisuje nagib te prave.
6. Izborom elemenata liste, dobija se lista. Primenom operacija na liste, kao rezultat se dobija nova lista.



Slika 16: Alati za rad sa transformacijama

Na slici 16 prikazani su *alati za rad sa transformacijama*:

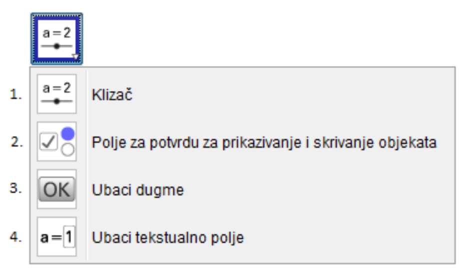
1. Izborom objekta čija simetrična slika se traži, a zatim prave koja će biti osa simetrije, dobija se željena simetrična slika.
2. Izborom objekta čija simetrična slika se traži, a zatim tačke koja će biti centar simetrije, dobija se željena simetrična slika.
3. Izborom tačke čija inverzna slika se traži, a zatim i kružnice u odnosu na koju se vrši inverzija, dobija se željena inverzna slika.
4. Izborom objekta koji se rotira, centra rotacije, a zatim i ugla rotacije, dobija se željeni objekat.
5. Izborom objekta koji se translira, a zatim i vektora translacije, dobija se željeni objekat.
6. Izborom objekta koji se preslikava homotetijom, zatim centra homotetije i, konačno, unosom koeficijenta homotetije, dobija se željeni objekat.



Slika 17: Specijalni alati za rad sa objektima

Na slici 17 prikazani su *specijalni alati za rad sa objektima*:

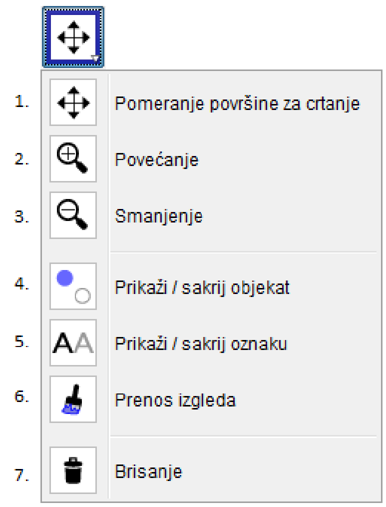
1. Klikom na površinu za crtanje pojavljuje se polje u kome se kuca tekst.
2. Klikom na površinu za crtanje pojavljuje se prozor za odabir slike koja se ubacuje na površinu za crtanje.
3. Crtanje u grafičkom prikazu. Za kraj izabrati drugi alat ili Esc.
4. Skiciranje funkcije ili geometrijskog objekta.
5. Izborom dva objekta, dobija se informacija o njihovom odnosu.
6. Izborom funkcije, dobijaju se informacije o njenim osobinama.



Slika 18: Specijalni alati

Na slici 18 prikazani su *specijalni alati*:

1. Klikom na površinu za crtanje postavlja se klizač sa izabranim svojstvima.
2. Klikom na površinu za crtanje postavlja se polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekta.
3. Klikom na površinu za crtanje postavlja se dugme sa izabranim svojstvima.
4. Klikom na površinu za crtanje postavlja se tekstualno polje.



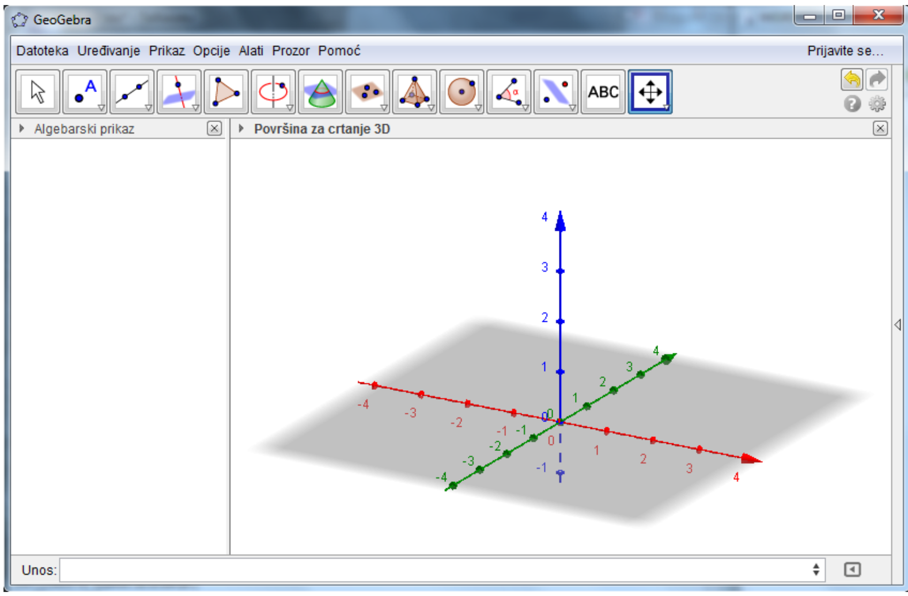
Slika 19: Alati za rad sa površinom za crtanje

Na slici 19 prikazani su *alati za rad sa površinom za crtanje*:

1. Pomeranje površine za crtanje ili koordinatne ose vrši se uz pomoć miša.
2. Izborom ove opcije i klikom na površinu za crtanje povećava se prikaz.
3. Izborom ove opcije i klikom na površinu za crtanje smanjuje se prikaz.
4. Izborom ove opcije i objekata koje treba sakriti, a zatim promenom alata, potvrđuju se izmene.
5. Izborom ove opcije i objekta prikazuje se/skriva se njegova oznaka.
6. Izborom ove opcije i jednog objekta, željeni izgled se prenosi na naredni selektovan objekat.
7. Izborom ove opcije, a potom i objekta, vrši se brisanje.

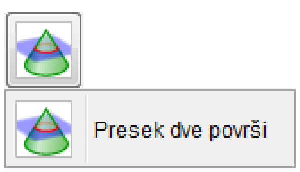
1.2.2 Grafički prikaz u prostoru

Grafički prikaz u prostoru omogućava kreiranje geometrijskih tela i rad sa njima. Izgled prozora je sličan kao kod prikaza u ravni, s tim što sadrži nove kutije sa alatima koji omogućavaju, na primer, rotaciju oko prave. I kod grafičkog prikaza u prostoru moguće je praćenje opisa konstrukcije.



Slika 20: Grafički prikaz u prostoru

Neke od kutija sa alatima su iste ili slične kao kod ravanskog prikaza, tako da će ovaj put biti izostavljene. Biće predstavljeni alati za prikazivanje stereometrije.



Slika 21: Alat za presek površi

Na slici 21 prikazan je *alat za presek površi* koji pravi krivu presekom dve površi.

Na slici 22 prikazani su *alati za rad sa ravnima*:

1. Izborom tri nekolinearne tačke, dobija se ravan njima određena.
2. Izborom ili kreiranjem tri tačke ili tačke i prave ili dve prave ili mnogougla, dobija se ravan.
3. Izborom tačke i prave, dobija se ravan koja sadrži izabranu tačku i normalna je na izabranu pravu.
4. Izborom tačke i ravni, dobija se ravan koja sadrži izabranu tačku i paralelna je izabranoj ravni.

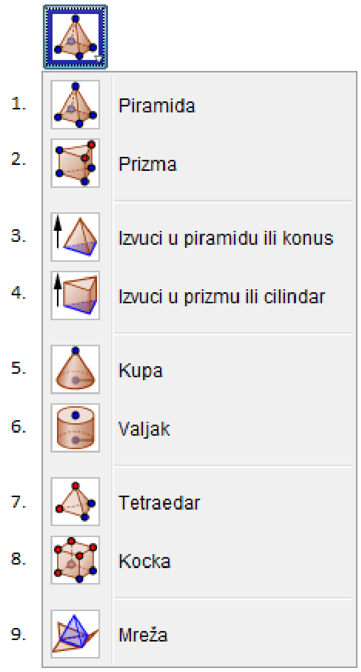
Slika 22: Alati za rad sa ravnima

Na slici 23 prikazani su *alati za rad sa telima*:

1. Izborom ili kreiranjem mnogougla za bazu i tačke za vrh, dobija se piramida.
2. Izborom ili kreiranjem mnogougla za donju bazu i prve tačke za gornju, dobija se prizma.
3. Izborom ili prevlačenjem mnogougla ili kružnice za bazu i unosom visine, dobija se centrirana piramida, odnosno konus.
4. Izborom ili kreiranjem mnogougla ili kružnice za bazu i unosom visine, dobija se prizma, odnosno cilindar.
5. Izborom ili kreiranjem dveju tačaka od kojih je prva centar baze, a druga vrh i unosom dužine poluprečnika baze, dobija se kupa.
6. Izborom ili kreiranjem dveju tačaka koje su centri baza i unosom poluprečnika, dobija se valjak.
7. Izborom ravni, a zatim i dveju tačaka, dobija se tetraedar.

8. Izborom ravni, a zatim i dveju tačaka, dobija se kocka.

9. Izborom poliedra, dobija se njegova mreža.

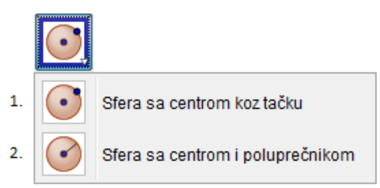


Slika 23: Alati za rad sa telima

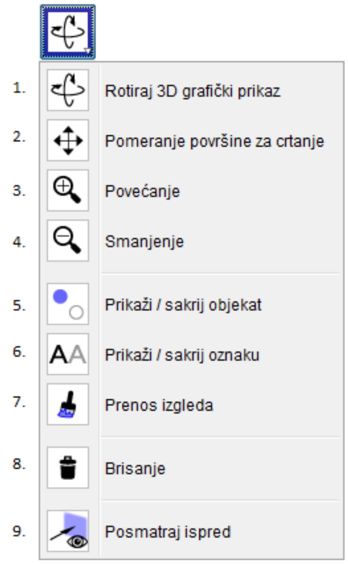
Na slici 24 prikazani su *alati za rad sa sferama*:

1. Izborom tačke za centar sfere, a zatim i tačke na sferi, dobija se željena sfera.

2. Izborom tačke za centar sfere i unosom poluprečnika, dobija se željena sfera.



Slika 24: Alati za rad sa sferama



Slika 25: Alati za rad sa površinom za crtanje

Na slici 25 prikazani su *alati za rad sa površinom za crtanje* koji su slični kao kod ravanskog prikaza, tako da će biti objašnjeni alati koji se prvi put pojavljuju:

1. Povlačenjem 3D grafičkog prikaza, kreirani objekti se mogu gledati iz svih uglova.

9. Izborom objekta, dobija se pogled ispred izabranog objekta.

2 Prizma

Sadržaj obrađen u poglavlju Prizma realizuje se u nastavnom programu za osmi razred osnovne škole i prethodi izučavanju ostalih geometrijskih tela. U ovom poglavlju predstavljeni su elementi prizme, površina i zapremina. Za matematički deo izlaganja korišćena je literatura [4] i [5].

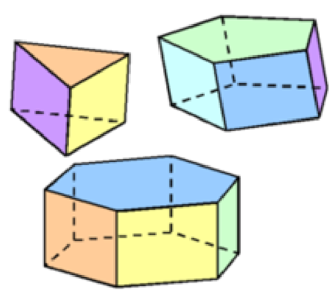
Da bi se definisao pojam prizme, treba se prvo podsetiti pojmova mnogougla i poliedra, koji se obrađuju u sedmom razredu osnovne škole. *Mnogougao* je unija zatvorene izlomljene linije bez samopreseka i unutrašnje oblasti koju ona ograničava. Mnogougao sa n strana naziva se *n-tougao*. *Poliedar* je telo ograničeno sa konačno mnogo mnogouglova.

Kada su poznati pojmovi mnogougla i poliedra, može se definisati prizma.

Prizma je poliedar čiju površ čine dva podudarna n-tougla koji se nalaze u različitim paralelnim ravnima i n paralelograma.

Pri tome, dve n-tougaone strane prizme, koje se nalaze u paralelnim ravnima, nazivaju se *osnovama* prizme, a svaki od n paralelograma naziva se *bočnom stranom* prizme. Sve bočne strane prizme čine njen *omotač*. Rastojanje ravni osnova prizme naziva se *visina* prizme.

Svaka prizma duguje naziv broju strana svojih osnova. Tako je *trostrana* prizma ona čije su osnove trouglovi, *četvorostrana* za osnove ima četvorouglove, itd. Generalno, *n-tostranom* prizmom naziva se ona prizma čije su osnove n-touglovi. Na slici 26 mogu se videti neke vrste prizmi.



Slika 26: Prizme

Prizme se mogu razlikovati i na osnovu položaja koji njihove bočne strane zauzimaju u odnosu na osnove. Prizma čije su bočne strane normalne na ravni osnova, naziva se *pravom prizmom.* U suprotnom, prizma je *kosa.* Ako je prizma prava, a osnove su joj pravilni mnogouglovi naziva se *pravilnom.*

U daljem radu, od interesa će biti samo prave prizme i to trostrana, četvorostrana i šestostrana.

Površina prizme

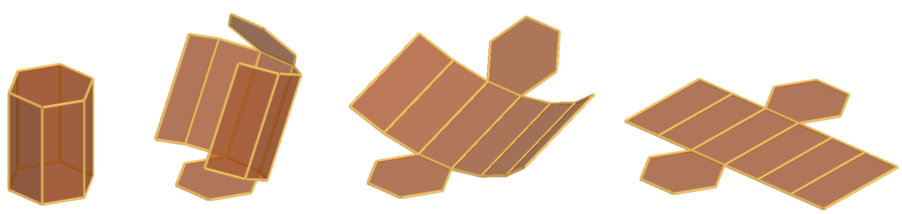
Prizma je telo ograničeno sa dva podudarna n-tougla i n paralelograma. Prema tome, formula za površinu P prizme je:

$$P = 2B + M, \tag{1}$$

gde je B površina jedne osnove, a M površina omotača te prizme.

Jedan od dobrih načina da se proveri tačnost prethodne formule jeste da se posmatra *mreža prizme*. Figura koju čine obe osnove i sve bočne strane prizme naziva se *mreža prizme*.

Na GeoGebra apletima kreiranim za elektronsku lekciju *Prizma* predstavljene su pravilne prizme, koje se pomeranjem klizača razvijaju u svoju mrežu. Vraćanjem klizača u prvobitan položaj, mreža se sklapa u prizmu. Vizuelizacija procesa transformacije tela iz prostora u ravan značajna je za razumevanje dobijanja formule po kojoj se računa površina prizme. Dobijanje mreže pravilne šestostrane prizme predstavljeno je na slici 27.



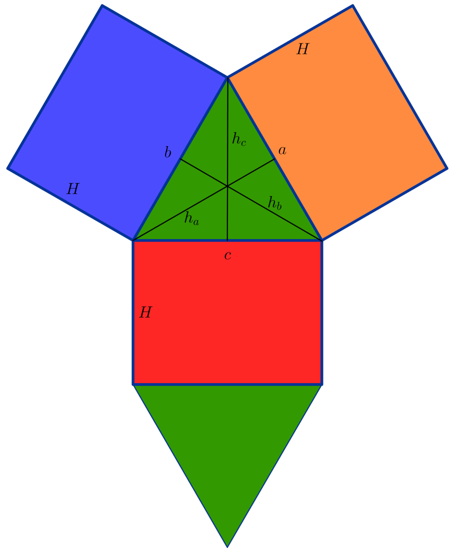
Slika 27: Primer dobijanja mreže pravilne šestostrane prizme

Može se videti kako opšta formula (1) izgleda u konkretnim slučajevima:

- Ako je osnova prizme trougao, baza se računa po formuli:

$$B = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c,$$

gde su a, b i c stranice trougla osnove, a h_a, h_b i h_c njima odgovarajuće visine. Slika 28 prikazuje mrežu prizme čija je osnova trougao.



Slika 28: Mreža prizme čija je osnova trougao

Sa druge strane, omotač čine tri pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga odgovarajućoj stranici trougla, pa je:

$$M = a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H.$$

Konačno, dobija se da je površina prizme:

$$\begin{aligned} P &= a \cdot h_a + a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H \\ &= b \cdot h_b + a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H \\ &= c \cdot h_c + a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H. \end{aligned}$$

- Ako je osnova prizme pravougli trougao, formula za bazu je:

$$B = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} c \cdot h_c,$$

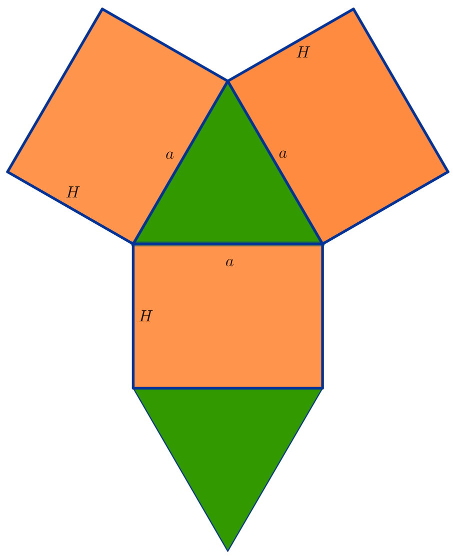
gde su a i b katete trougla osnove, c hipotenuza i h_c njoj odgovarajuća visina. I u ovom slučaju omotač čine tri pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga odgovarajućoj stranici trougla, pa je:

$$M = a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H.$$

Konačno, dobija se da je površina prizme:

$$\begin{aligned} P &= a \cdot b + a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H \\ &= c \cdot h_c + a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H. \end{aligned}$$

- Ako je osnova prizme jednakostranični trougao, baza se može izračunati po formuli:
$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$
gde je a stranica trougla osnove. Na slici 29 prikazana je mreža prizme čija je osnova jednakostranični trougao.



Slika 29: Mreža prizme čija je osnova jednakostranični trougao

Omotač čine tri podudarna pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga stranici trougla, pa je:
$$M = 3a \cdot H.$$
Dobija se da je površina prizme:
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot H.$$

- Ako je osnova prizme kvadrat, baza se računa po formuli:
$$B = a^2,$$
gde je a stranica kvadrata osnove. Omotač čine četiri podudarna pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga stranici kvadrata, pa je:
$$M = 4a \cdot H.$$

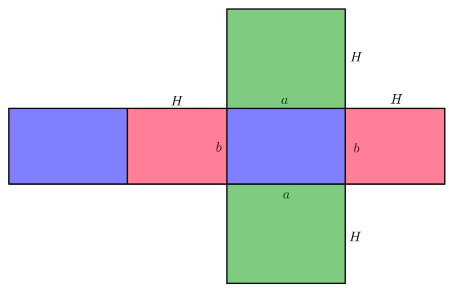
Odatle se dobija da je površina prizme:

$$P = 2a^2 + 4a \cdot H.$$

- Ako je osnova prizme pravougaonik, formula za bazu je:

$$B = a \cdot b,$$

gde su a i b stranice pravougaonika osnove. Na slici 30 prikazana je mreža prizme čija je osnova pravougaonik na kojoj su označeni elementi potrebni za računanje površine.



Slika 30: Mreža prizme čija je osnova pravougaonik

Omotač čine dva para međusobno podudarnih pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga odgovarajućoj stranici pravougaonika, pa je:

$$M = 2a \cdot H + 2b \cdot H.$$

Dobija se da je površina prizme:

$$P = 2a \cdot b + 2a \cdot H + 2b \cdot H.$$

- Ako je osnova prizme paralelogram, baza se računa po formuli:

$$B = a \cdot h_a = b \cdot h_b,$$

gde su a i b stranice paralelograma osnove, a h_a i h_b njima odgovarajuće visine. Sa druge strane, omotač čine dva para međusobno podudarnih pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga odgovarajućoj stranici pravougaonika, pa je:

$$M = 2a \cdot H + 2b \cdot H.$$

Dobija se da je površina prizme:

$$\begin{aligned} P &= 2a \cdot h_a + 2a \cdot H + 2b \cdot H \\ &= 2b \cdot h_b + 2a \cdot H + 2b \cdot H. \end{aligned}$$

- Ako je osnova prizme romb, formula za bazu je:

$$B = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2},$$

gde je a stranica, h visina, a d_1 i d_2 dijagonale romba osnove. Omotač čine četiri podudarna pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga stranici romba, pa je:

$$M = 4a \cdot H.$$

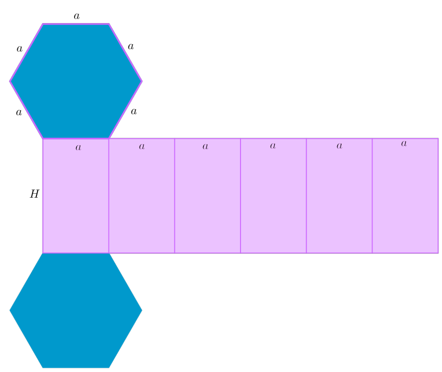
Dobija se da je površina prizme:

$$\begin{aligned} P &= 2a \cdot h + 4a \cdot H \\ &= d_1 \cdot d_2 + 4a \cdot H. \end{aligned}$$

- Ako je osnova prizme pravilni šestougao, formula za bazu je:

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

gde je a stranica pravilnog šestougla osnove. Slika 31 prikazuje mrežu prizme čija je osnova pravilni šestougao.



Slika 31: Mreža prizme čija je osnova pravilni šestougao

Omotač čini šest podudarnih pravougaonika čija je jedna stranica jednaka visini H prizme, a druga stranici osnove, pa je:

$$M = 6a \cdot H.$$

Dobija se da je površina prizme:

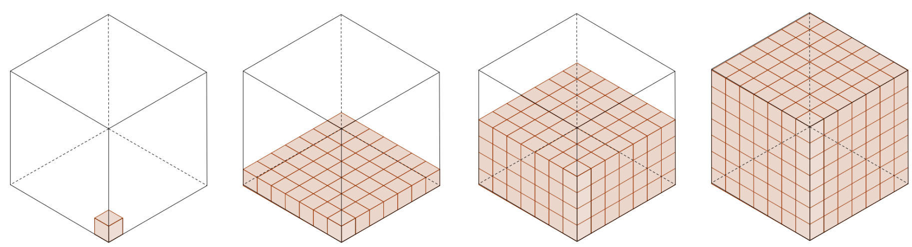
$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6a \cdot H.$$

Zapremina prizme

Neformalno, pod zapreminom tela podrazumeva se broj koji opisuje koliko prostora to telo zauzima. Formalnije, zapremina se može definisati kao pozitivan broj koji ima osobine:

1. Podudarna tela imaju jednake zapremine.
2. Zapremina disjunktne unije dva tela jednaka je zbiru zapremina ta dva tela.

Najčešće se uz prethodne dve osobine za zapreminu zahteva da bude normirana. Pod normiranošću podrazumevamo postojanje *jedinice za merenje zapremine*, tj. nekog tela za koje je poznato da ima zapreminu 1. Obično se za jedinicu za merenje zapremine uzima kocka čija je ivica dužine 1. Značaj takvog odabira jedinice mere je da se ona može iskoristiti za lako izračunavanje zapremine nekih tela. Klasično objašnjavanje odabira jedinice mere većini učenika na uzrastu osmog razreda neće privući pažnju. Zbog toga je kreiran GeoGebra aplet na kom je predstavljeno popunjavanje kocke, čija je stranica dužine 7, jediničnim kockama. Na apletu se nalaze tri klizača, čijim se pomeranjem vidi na koji način se postepeno popunjava data kocka. Popunjavanje prizme jediničnim kockama predstavljeno je na slici 32.



Slika 32: Kreiranje prizme jediničnim kockama

U slučaju prizme, zapremina V se može izračunati po formuli:

$$V = B \cdot H, \tag{2}$$

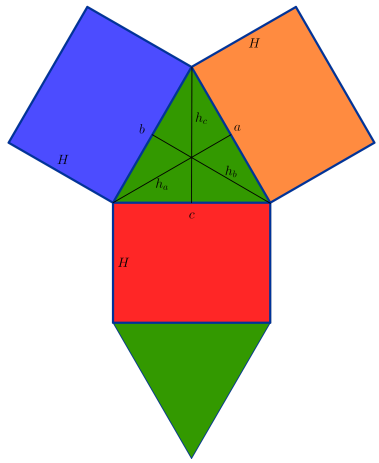
gde je B površina baze, a H visina prizme.

U specifičnim slučajevima prizmi opšta formula (2) dobija odgovarajući konkretan oblik:

- Ako je osnova prizme trougao:

$$V = \frac{1}{2}a \cdot h_a \cdot H = \frac{1}{2}b \cdot h_b \cdot H = \frac{1}{2}c \cdot h_c \cdot H.$$

Na slici 33 prikazana je mreža prave prizme čija je osnova trougao stranica a, b i c . Odgovarajuće visine su h_a, h_b i h_c, a visina prizme je H.



Slika 33: Mreža prizme čija je osnova trougao

- Ako je osnova prizme pravougli trougao:

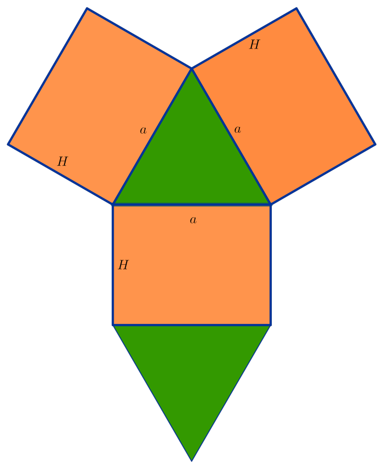
$$V = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot H = \frac{1}{2}c \cdot h_c \cdot H,$$

  gde su a i b katete, c hipotenuza, h_c visina koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla osnove, a H visina prizme.

- Ako je osnova prizme jednakostranični trougao:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

  Na slici 34 prikazana je mreža prave prizme čija je osnova jednakostranični trougao stranice a, a visina prizme je H.



Slika 34: Mreža prizme čija je osnova jednakostranični trougao

- Ako je osnova prizme kvadrat:

$$V = a^2 \cdot H,$$

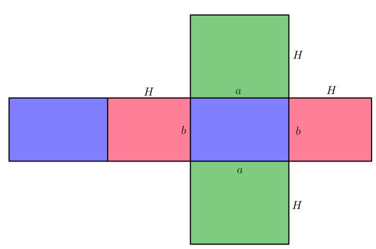
gde je a stranica kvadrata, a H visina prizme. Specijalno, ako je stranica kvadrata osnove jednaka visini prizme, ta prizma je kocka, a zapremina V računa se po formuli

$$V = a^3.$$

- Ako je osnova prizme pravougaonik:

$$V = a \cdot b \cdot H.$$

Na slici 35 prikazana je mreža prave prizme čija je osnova pravougaonik stranica a i b, a visina prizme je H.



Slika 35: Mreža prizme čija je osnova pravougaonik

- Ako je osnova prizme paralelogram:

$$V = a \cdot h_a \cdot H = b \cdot h_b \cdot H,$$

gde su a i b stranice paralelograma, a h_a i h_b odgovarajuće visine, pri čemu je H visina prizme.

- Ako je osnova prizme romb:

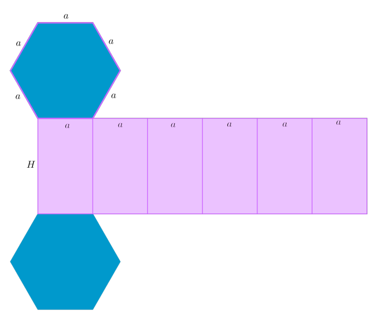
$$V = a \cdot h \cdot H = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot H,$$

gde je a stranica romba, h visina koja joj odgovara, d_1 i d_2 dijagonale romba, a H visina prizme.

- Ako je osnova prizme pravilni šestougao:

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H.$$

Na slici 36 prikazana je mreža prave prizme čija je osnova pravilan šestougao stranice a. Visina prizme je H.

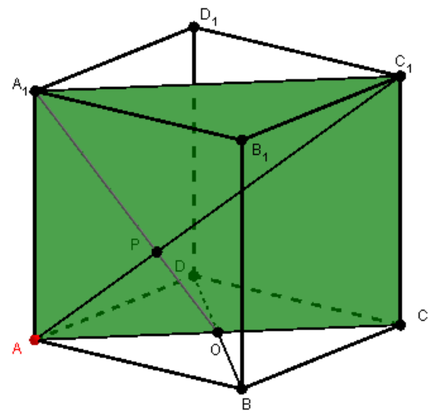


Slika 36: Mreža prizme čija je osnova šestougao

Jedan od karakterističnih zadataka u ovoj oblasti je sledeći zadatak.

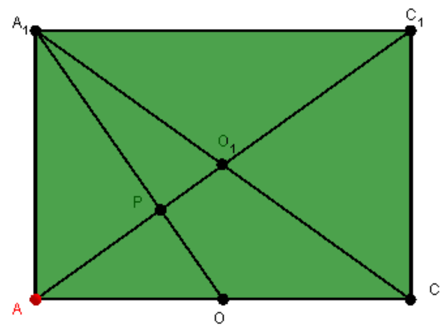
Zadatak 1. *Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Duž koja spaja centar O osnove $ABCD$ sa temenom A_1 seče dijagonalu kocke AC_1 u tački P. Ako je $OP = \frac{1}{\sqrt{2}}cm$, kolika je površina i zapremina kocke?*

Rešenje. Prilikom rešavanja ovog zadatka, važno je nacrtati odgovarajuću sliku. Međutim, za većinu učenika je teško da prostornu figuru pregledno predstave u ravni. Upravo zbog toga je kreiran GeoGebra aplet za elektronsku lekciju *Prizma*, koji ilustruje zadatak. U apletu je moguća rotacija kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pomeranjem temena A, što omogućava uočavanje položaja tačke P, koja je nalazi unutar kocke. Na slici 37 predstavljena je data kocka.



Slika 37: Kocka

Važno je povezati poznate i nepoznate podatke. Da bi se odredila površina, kao i zapremina kocke, potrebno je odrediti dužinu a stranice kocke. Zadatak se može rešiti na više načina. Jedna od mogućnosti je da se uoči dijagonalni presek ACC_1A_1, jer je u zadatku data tačka P, kao presek duži A_1O i AC_1. S obzirom da se seku, one određuju jednu ravan, čiji je presek sa kockom pravougaonik ACC_1A_1. Neka je presek dijagonala tačka O_1. Stranice pomenutog pravougaonika, koji je prikazan na slici 38, su $AA_1 = a$ i $AC = a\sqrt{2}$.



Slika 38: Dijagonalni presek kocke

Ideja je da se dalje posmatra trougao ACA_1. Tačka O je središte stranice AC, a tačka O_1 je središte stranice CA_1, pa su duži A_1O i AO_1 težišne duži trougla ACA_1, koje se seku upravo u tački P. Dakle, tačka P je težište trougla. Težište trougla deli težišnu duž u odnosu $2:1$, na osnovu čega se dobija jednakost:

$$A_1P : PO = 2 : 1.$$

Zamenom vrednosti date u zadatku, dobija se da je:

$$A_1O = \frac{3}{\sqrt{2}} cm.$$

Dalje, na osnovu Pitagorine teoreme, iz pravouglog trougla AOA_1 sledi da je:

$$AO^2 + AA_1^2 = A_1O^2,$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

odakle se dobija:

$$a = \sqrt{3} cm.$$

Konačno, površina P kocke je:

$$P = 6a^2 = 6 \cdot (\sqrt{3})^2 = 6 \cdot 3 = 18 cm^2,$$

a zapremina V je:

$$V = a^3 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3} cm^3.$$

Zadatak se može rešiti i primenom sličnosti na trouglove AOP i A_1C_1P. $\triangle$

U prethodnom zadatku prikazan je jedan od mogućih preseka ravni i prizme. Međutim, presek ravni i prizme, u zavisnosti od toga koja prizma je u pitanju i od položaja ravni, može biti prazan skup, tačka, duž, trougao, četvorougao, itd. To se može videti na apletima koji se nalaze u zanimljivostima elektronske lekcije *Prizma* (više se može videti na [6]). Upravo ova raznovrsnost preseka prizme i ravni omogućava kreiranje različitih zadataka na svim nivoima postignuća.

3 Piramida

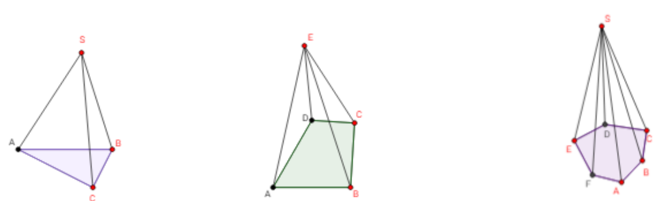
Sadržaj obrađen u poglavlju Piramida realizuje se u nastavnom programu za osmi razred osnovne škole. U ovom poglavlju predstavljeni su elementi piramide, površina i zapremina. Pitagorina teorema je osnova za uočavanje veza između elemenata piramide, što je neophodno za rešavanje većine zadataka.

Da bi se definisao pojam piramide, treba se prvo podsetiti pojmova mnogougla i poliedra. *Mnogougao* je unija zatvorene izlomljene linije bez samopreseka i unutrašnje oblasti koju ona ograničava. Mnogougao sa n strana naziva se *n-tougao*. *Poliedar* je telo ograničeno sa konačno mnogo mnogouglova.

Piramida je poliedar čiju površ čine jedan n-tougao i n trouglova koji imaju jedno zajedničko teme.

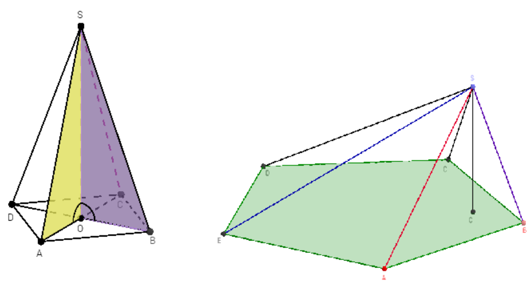
Pri tome, n-tougaona strana piramide naziva se *osnovom*, a trouglovi sa zajedničkim temenom *bočnim stranama* piramide. Sve bočne strane piramide čine njen *omotač*. Zajedničko teme svih bočnih strana je *vrh* piramide. Rastojanje vrha od osnove piramide naziva se *visina* piramide, a visina bočne strane iz vrha piramide naziva se *bočna visina* piramide.

Kao kod prizme, piramida dobija naziv prema broju strana svoje osnove. Tako je *trostrana* piramida ona čija je osnova trougao, *četvorostrana* za osnovu ima četvorougao, a, uopšteno, *n-tostranom* piramidom naziva se ona piramida čija je osnova n-tougao. Neke vrste piramida mogu se videti na slici 39.



Slika 39: Trostrana, četvorostrana i šestostrana piramida

Ako je osnova piramide pravilan mnogougao, onda je ta piramida *pravilna*. Ako je podnožje visine pravilne piramide istovremeno i centar kružnice opisane oko osnove, onda se naziva *pravom piramidom*. Ako to nije slučaj, piramida je *kosa*. Na slici 40 mogu se videti prava i kosa piramida.



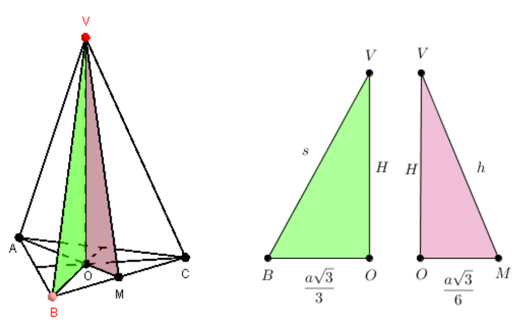
Slika 40: Prava i kosa piramida

Dakle, osnova prave piramide može biti samo mnogougao oko kog se može opisati kružnica. Jedna zanimljiva posledica ovoga je da su, kod prave piramide, sve bočne ivice jednake. Ta posledica dovodi do još jednog zaključka - omotač prave piramide čine isključivo jednakokraki trouglovi.

U nastavku, od interesa će biti pravilne prizme i to trostrana, četvorostrana i šestostrana.

Za izvođenje formula koje predstavljaju vezu između elemenata piramide, potrebno je uočiti karakteristične trouglove koji sadrže te elemente. S obzirom da su u pitanju prave piramide, ti trouglovi su pravougli, pa se primenom Pitagorine teoreme utvrđuju njihovi odnosi. Pomenute trouglove lakše je uočiti posmatranjem tela u prostoru. Zbog toga su kreirani apleti na kojima se pomeranjem crvenog temena osnove izdvojeni trouglovi mogu posmatrati iz različitih uglova, što olakšava uočavanje dužina njihovih stranica. Takođe, može se pomerati i vrh V piramida, čime se menja njihova visina.

Na slici 41 predstavljena trostrana piramida $ABCV$ uz koju su izdvojeni njeni karakteristični trouglovi BOV i MOV.



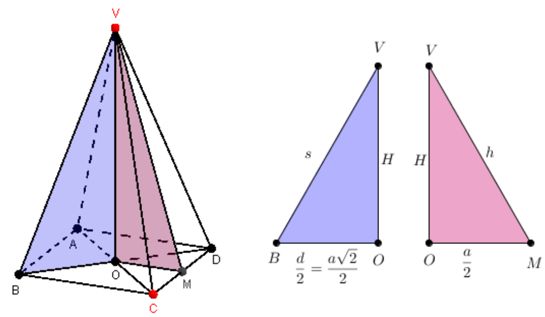
Slika 41: Trostrana piramida

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = s^2$$

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = h^2$$

.

Na slici 42 predstavljena je četvorostrana piramida $ABCDV$ uz koju su izdvojeni njeni karakteristični trouglovi BOV i MOV.



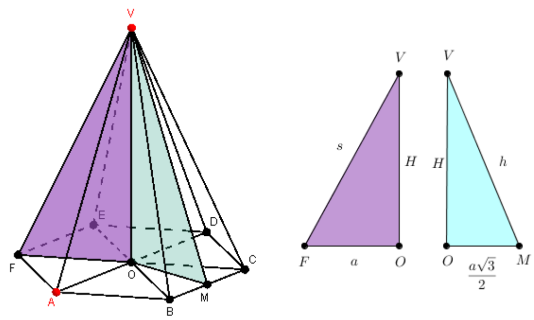
Slika 42: Četvorostrana piramida

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = s^2$$

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$$

.

Na slici 43 predstavljena je šestostrana piramida $ABCDEFV$ uz koju su izdvojeni njeni karakteristični trouglovi FOV i MOV.



Slika 43: Šestostrana piramida

$$H^2 + a^2 = s^2$$
$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2$$

.

Površina piramide

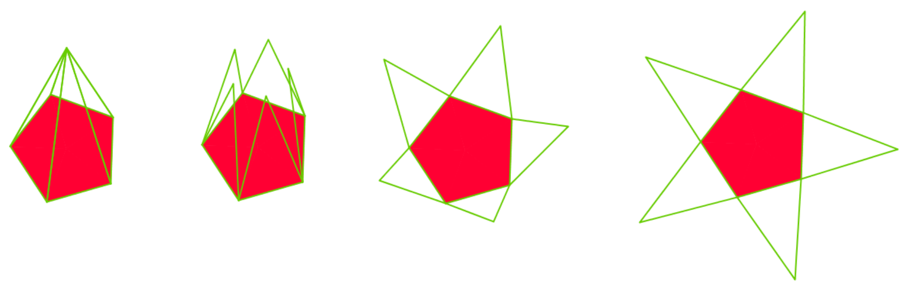
Piramida je definisana kao poliedar čiju površ čini jedan n-tougao i n trouglova sa zajedničkim temenom. Odatle sledi da se površina P piramide može računati po formuli:

$$P = B + M, \tag{3}$$

gde je B površina osnove, a M površina omotača te piramide.

Slično prizmi, piramida ima svoju *mrežu*. Figura koju čine osnova i sve bočne strane piramide naziva se *mreža piramide*.

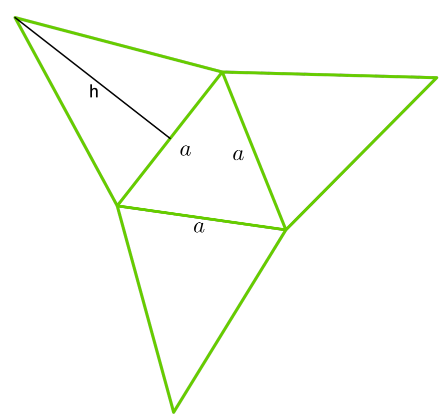
Na jednom od apleta kreiranih za elektronsku lekciju *Piramida* prikazana je mreža prave piramide. Pomeranjem klizača može se menjati veličina baze i broj temena. Takođe, može se pratiti i postupak sklapanja mreže u piramidu, kao i obrnut postupak. Na slici 44 predstavljena je pravilna petostrana piramida.



Slika 44: Primer dobijanja mreže pravilne šestostrane piramide

Može se videti kako opšta formula (3) izgleda u sledećim konkretnim slučajevima:

- Ako je osnova piramide pravilan trougao, površina osnove računa se po formuli:
$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$
gde je a stranica pravilnog trougla osnove. Na slici 45 prikazana je mreža pravilne trostrane piramide sa označenim elementima potrebnim za računanje površine.



Slika 45: Mreža pravilne trostrane piramide

Omotač se sastoji od tri podudarna trougla, kojima je osnovica jednaka stranici pravilnog trougla osnove, a visina h bočna visina piramide, pa je:

$$M = 3\frac{a \cdot h}{2}.$$

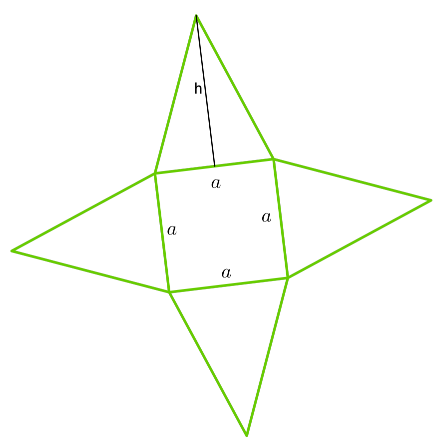
Dakle, površina piramide računa se po formuli:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a \cdot h}{2}.$$

- Ako je osnova piramide pravilan četvorougao, površina osnove je:

$$B = a^2,$$

gde je a stranica pravilnog četvorougla, tj. kvadrata osnove. Na slici 46 prikazana je mreža pravilne četvorostrane piramide na kojoj su označeni elementi potrebni za računanje površine.



Slika 46: Mreža pravilne četvorostrane piramide

Omotač čine četiri podudarna trougla, kojima je osnovica jednaka stranici kvadrata osnove, a visina h bočna visina piramide, pa je:

$$M = 4\frac{a \cdot h}{2} = 2a \cdot h.$$

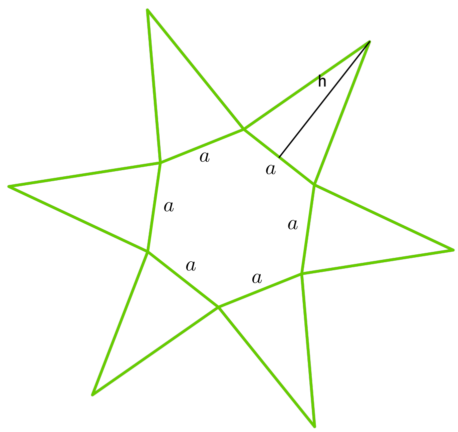
Površina piramide računa se po formuli:

$$P = a^2 + 2a \cdot h.$$

- Ako je osnova piramide pravilan šestougao, površina osnove piramide računa se po formuli:

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

gde je a stranica pravilnog šestougla osnove. Na slici 47 prikazana je mreža pravilne šestostrane piramide na kojoj su obeleženi elementi potrebni za računanje površine.



Slika 47: Mreža pravilne šestostrane piramide

U ovom slučaju, omotač se sastoji od šest podudarnih trouglova, kojima je osnovica jednaka stranici pravilnog šestougla osnove, a visina h bočna visina piramide, pa je:

$$M = 6\frac{a \cdot h}{2} = 3a \cdot h.$$

Konačno, površina piramide računa se po formuli:

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot h.$$

Zapremina piramide

Uvodna priča o zapremini tela koja se odnosila na prizmu važi i ovde, tako da se neće ponavljati, već će se odmah preći na računanje zapremine piramide.

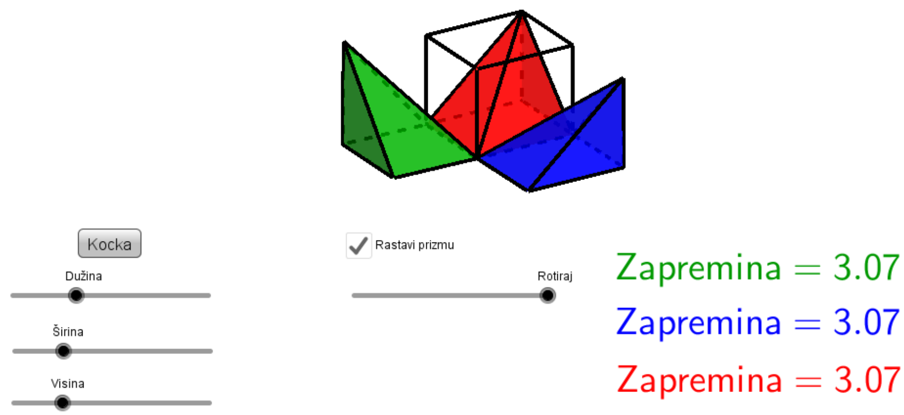
U slučaju piramide, zapremina V se može izračunati po formuli:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H, \tag{4}$$

gde je B površina baze, a H visina piramide.

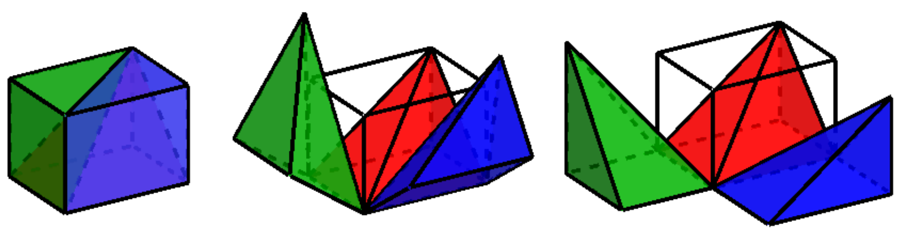
Izvođenje ove formule može se pogledati u [4].

Dobijanje formule za zapreminu piramide preko formule za zapreminu prizme predstavljeno je na slici 48.



Slika 48: Veza zapremine piramide i zapremine prizme

Na apletu su predstavljenje tri piramide istih zapremina obojene crvenom, plavom i zelenom bojom. Pomeranjem klizača *Rotiraj* tri piramide se sklapaju u prizmu čija je zapremina jednaka zbiru zapremina crvene, plave i zelene piramide. S obzirom da te piramide imaju jednake zapremine, sledi da je zapremina jedne jednaka trećini zapremine prizme. Takođe se mogu menjati dimenzije tela pomeranjem klizača, usled čega se menja i zapremina, što se može pratiti na apletu.



Slika 49: Dobijanje zapremine piramide

Kao i u prethodnim razmatranjima, opšta formula (4) u specifičnim slučajevima dobija konkretan oblik. Na osnovu slika 45, 46 i 47 i formula za bazu, može se doći do sledećih formula za zapreminu:

- Ako je osnova piramide pravilan trougao:

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

- Ako je osnova piramide pravilan četvorougao:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H.$$

- Ako je osnova piramide pravilan šestougao:

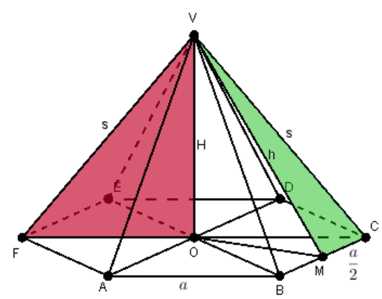
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H.$$

Izračunavanje zapremine tela korišćenjem ovih formula prikazano je u sledećem zadatku.

Zadatak 2. *Pravilna šestostrana piramida ima osnovicu $a = 2dm$, a bočna ivica je nagnuta prema ravni osnove pod uglom od $45°$. Izračunaj zapreminu i površinu piramide.*

Rešenje. Prema uslovu, $\measuredangle OFS = 45°$, pa je pravougli trougao FOV jednakokraki. Sledi da je $H = OF = a = 2dm$ i $s = VF = 2\sqrt{2}dm$. Zapremina je:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{3}dm^3.$$



Slika 50: Pravilna šestostrana piramida

Za površinu je potrebna bočna visina h, koja se nalazi iz pravouglog trougla MCV, kao i nepoznata kateta:

$$h^2 = CV^2 - MC^2 = s^2 - (\frac{a}{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 - 1^2 = 8 - 1 = 7.$$

Dakle, $h = \sqrt{7}dm$, pa je površina:

$$P = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{3 \cdot 2^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} = 6(\sqrt{3} + \sqrt{7})dm^2.$$

$\triangle$

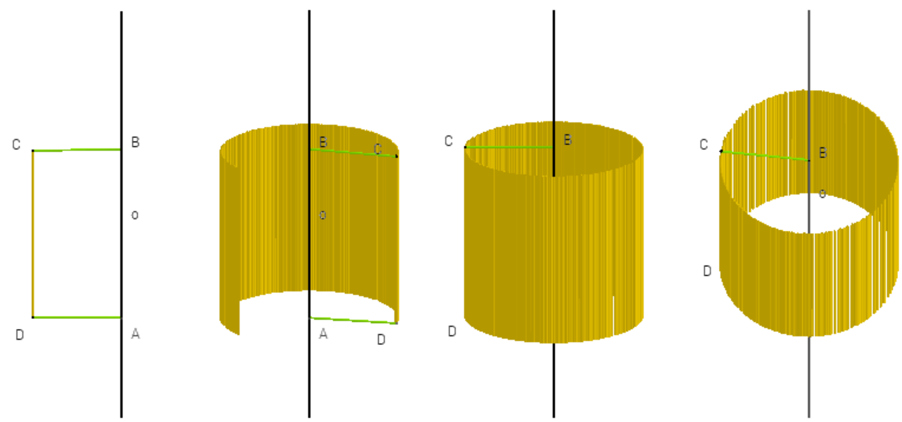
Na apletu kreiranom u GeoGebri za prikaz zadatka 2 šestostrana piramida se može posmatrati iz različitih uglova, što olakšava uočavanje veza između datih i potrebnih elemenata.

4 Valjak

U osmom razredu osnovne škole realizuje se sadržaj obrađen u poglavlju Valjak. U ovom poglavlju predstavljen je nastanak valjka, elementi valjka, površina i zapremina.

Kod valjkastih tela postoji karakteristični deo površi koji se naziva *cilindrična* ili *valjkasta površ*. Prvo će biti objašnjeno kako nastaje cilindrična površ.

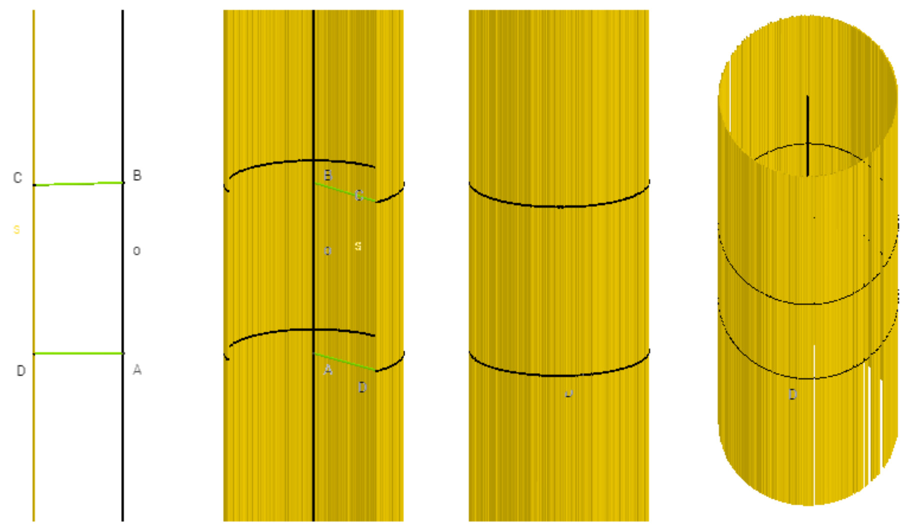
Može se posmatrati neki pravougaonik $ABCD$. Neka je o prava određena tačkama A i B. Kada pravougaonik $ABCD$ rotira oko prave o, dobija se utisak da se formirala neka cev, po kojoj klizi duž CD. Zapravo, duž CD opisuje deo cilindrične površi. Pomeranjem tačke D na GeoGebra apletu može se videti nastajanje dela cilindrične površi rotacijom pravougaonika oko prave o. Takođe, klikom na belu površinu i pomeranjem miša, može se posmatrati iz različitih uglova. Na slici 51 je predstavljen deo mogućnosti apleta kreiranog korišćenjem GeoGebre.



Slika 51: Nastajanje dela cilindrične površi rotacijom pravougaonika oko prave

Na sličan način nastaje i cela cilindrična površ. Jedina razlika je u tome što umesto duži CD treba posmatrati rotaciju prave s koja je određena tom duži. Rotacijom takve prave s oko već pomenute prave n, nastaje *kružna cilindrična površ*. Naziva se *kružnom*, jer svaka tačka prave s pri ovoj rotaciji opisuje kružnicu oko prave n. Na primer, tačka C opisuje kružnicu sa centrom B i poluprečnikom BC, a tačka D kružnicu sa centrom A i poluprečnikom AD. Ovi krugovi su normalni na pravu n. Treba se prisetiti da su krugovi simetrični u odnosu na svoj centar. Zbog toga je cilindrična površ simetrična u odnosu na pravu n, pa prava n predstavlja *osu simetrije* cilindrične površi. Prava s, koja svojim kretanjem opisuje cilindričnu površ, naziva se *izvodnicom* te površi.

Pomeranjem tačke D na GeoGebra apletu može se videti nastajanje cilindrične površi rotacijom prave s oko prave o. Takođe, klikom na belu površinu i pomeranjem miša, može se posmatrati iz različitih uglova. Na slici 52 predstavljen je deo mogućnosti apleta.

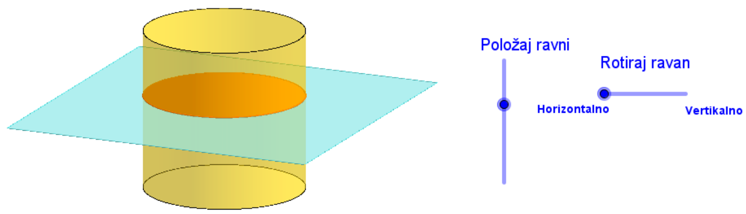


Slika 52: Nastajanje cilindrične površi rotacijom prave oko prave

Telo ograničeno delom cilindrične površi i sa dva kruga naziva se valjak.

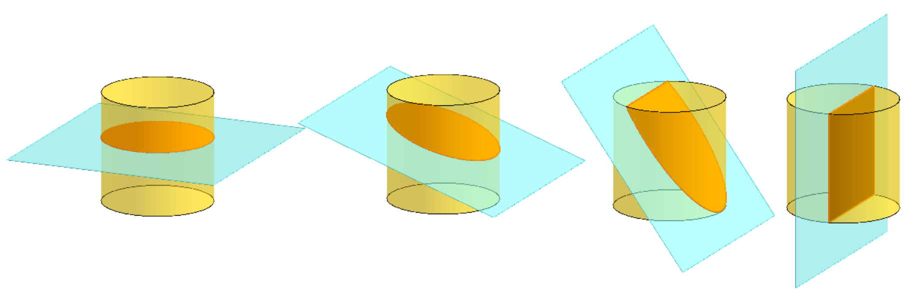
Deo cilindrične površi koji pripada valjku naziva se *omotačem*, a međusobno paralelni krugovi koji ga zatvaraju *osnovama* valjka. Osnove valjka pripadaju ravnima normalim na osu cilindrične površi. Duž koja spaja centre osnova naziva se *osom* valjka. Rastojanje između osnova je *visina* valjka.

Važno je uočiti preseke ravni i valjka. U tu svrhu kreiran je GeoGebra aplet uz koji se olakšava vizuelizacija njihovih međusobnih položaja, kao i preseka koji pritom nastaju. Na apletu je predstavljen valjak i ravan kojoj se pomeranjem klizača *Položaj ravni* i *Rotiraj ravan* može menjati položaj u prostoru. Na slici 53 prikazani su neki preseci ravni i valjka.



Slika 53: Preseci ravni i valjka

Rotacijom ravni menja se ugao koji ravan gradi sa osnovom valjka, prilikom čega dolazi do formiranja različitih preseka. Neki od njih su prikazani na slici 54.



Slika 54: Preseci ravni i valjka

Svaka ravan koja je paralelna osnovi, tj. normalna na osu valjka, seče valjak po krugu podudarnom osnovi. Preseci koji nastaju na taj način nazivaju se *paralelni* ili *poprečni preseci*. Treba uočiti i preseke koje obrazuju ravni normalne na ravan osnove. Oni se nazivaju *normalnim* ili *uzdužnim presecima*. Od normalnih preseka najbitniji su oni koji sadrže osu, tj. *osni preseci*. Svi osni preseci jednog valjka su međusobno podudarni. Ako je osni presek kvadrat, onda se govori o *ravnostranom valjku*, kod koga je visina jednaka prečniku osnove.

Površina valjka

Valjak je telo ograničeno sa dva podudarna kruga i delom cilindrične površi. Zbog toga je formula za površinu P valjka:

$$P = 2B + M, \qquad (5)$$

gde je B površina jedna osnove, a M površina omotača tog valjka.

Da bi se proverila tačnost formule, može se posmatrati *mreža valjka* koju čine oba kruga osnove i pravougaonik koji je predstavljao omotač.

Na GeoGebra apletu kreiranom za elektronsku lekciju *Valjak* prikazana je mreža valjka. Pomeranjem klizača može se pratiti i postupak razvijanja valjka u mrežu, kao i obrnut postupak. Na slici 55 prikazano je razvijanje valjka u mrežu.

Slika 55: Primer dobijanja mreže valjka

S obzirom da se zna šta je osnova valjka, kao i šta je omotač valjka, može se transformisati formula (5).

Osnova valjka je krug, pa je:

$$B = r^2\pi,$$

gde je r poluprečnik osnove valjka.

Omotač valjka je pravougaonik čija je jedna stranica jednaka obimu osnove, a druga visini H valjka, pa je:

$$M = 2r\pi H.$$

Konačno, za površinu valjka važi formula:

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H \quad \text{ili} \quad P = 2r\pi(r + H).$$

Zapremina valjka

Na osnovu definicije valjka, zapremina V tog tela računa se po formuli:

$$V = B \cdot H,$$

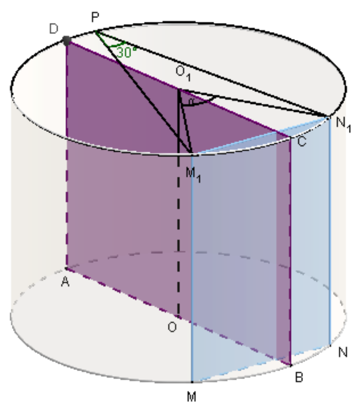
koja važi i za prizmu.

Da bi se pokazala tačnost prethodnog tvrđenja, može da se uporedi valjak koji ima osnovu površine B i visinu H sa kvadrom koji, takođe, ima osnovu površine B i visinu H. Za ova dva tela, svaki poprečni presek podudaran je osnovi, pa, prema *Kavaljerijevom principu*[1], ona imaju jednake zapremine, a za kvadar znamo da ima zapreminu $V = B \cdot H$.

Budući da je osnova valjka krug površine $B = r^2\pi$, zapremina valjka računa se po formuli:

$$V = r^2\pi H.$$

Zadatak 3. *Normalni presek MNM_1N_1 valjka ima površinu $15cm^2$. Tetivi M_1N_1 odgovara periferijski ugao $30°$. Izračunaj površinu osnog preseka.*



Slika 56: Valjak

Rešenje. Ako je periferijski ugao nad tetivom M_1N_1 od $30°$, $\measuredangle M_1PN_1 = 30°$, onda je centralni ugao $\measuredangle M_1O_1N_1 = 2 \cdot 30° = 60°$. Sledi da je trougao $O_1M_1N_1$ jednakostraničan, pa je $M_1N_1 = r$. Onda je površina datog normalnog preseka: $M_1N_1 \cdot H = 15cm^2$, odnosno $r \cdot H = 15cm^2$. Površina P osnog preseka je:

$$P = 2r \cdot H = 2 \cdot 15cm^2 = 30cm^2.$$

△

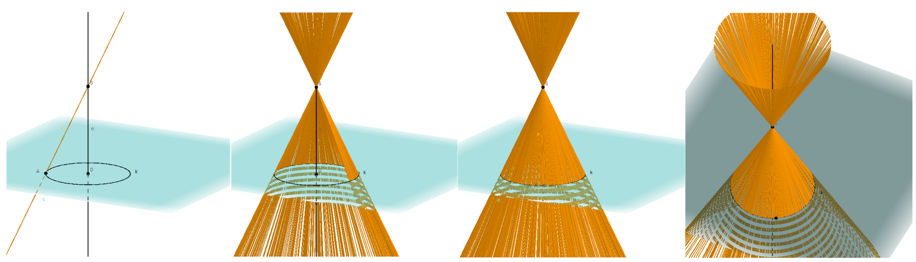
[1]Kavaljerijev princip tvrdi da dva tela imaju jednake zapremine ako im svi odgovarajući preseci paralelni sa osnovom, koji su jednako udaljeni od osnova imaju jednake površine.

5 Kupa

Sadržaj obrađen u poglavlju Kupa realizuje se u nastavnom programu za osmi razred osnovne škole. U ovom poglavlju predstavljen je nastanak kupe, elementi kupe, površina i zapremina.

Da bi se uveo pojam kupe, potrebno je upoznati se sa pojmom konusne površi. Konusnu površ opisuje jedna prava koju nazivamo *izvodnica* konusne površi.

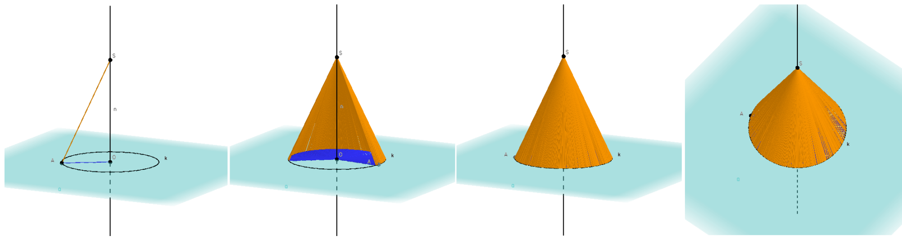
U ravni α može se posmatrati krug k kroz čiji centar O je postavljena prava n, normalna na ravan α. Dalje, na pravoj n, van ravni α, treba izabrati tačku S, a potom, kroz S i neku tačku A na kružnoj liniji, povući pravu s. Zatim se prava s kreće tako da stalno sadrži tačku S, obilazeći po krugu. Pomeranjem tačke A na GeoGebra apletu se može videti opisani nastanak konusne površi. Pomeranjem radne površine može se posmatrati iz različitih uglova. Slika 57 to ukratko predstavlja.



Slika 57: Nastanak konusne površi

Površ, koju pritom opisuje prava s, naziva se *konusna površ* sa vrhom S, osom n i izvodnicom s. Ova površ je neograničena i ima dva dela, simetrična u odnosu na tačku S.

Od neograničene konusne površi može se odseći ograničeni deo između vrha S i kruga k poluprečnika OA. Dodavanjem kruga k zatvara se *konusno telo.* Oblo telo, koje nastaje na ovaj način, naziva se *prava kupa* ili *prav konus.* Pomeranjem tačke A na GeoGebra apletu može se videti nastanak kupe. Takođe, može se posmatrati iz različitih uglova. Na slici 58 je to ukratko predstavljeno.



Slika 58: Nastanak kupe

Prava kupa je oblo telo, koje je ograničeno jednim krugom i delom konusne površi između tog kruga i vrha. Pri tome je osa konusne površi normalna na ravan kruga i prolazi kroz centar kruga.

Krug je *osnova* ili *baza* kupe, a duž SO je *visina* kupe i ona se označava sa H. Deo konusne površi koji ograničava kupu naziva se *omotač* kupe, dok svaka duž koja spaja vrh S sa nekom tačkom na kružnoj liniji predstavlja *izvodnicu* kupe.

Ako se preseče konusna površ nekom ravni, dobija se neki od *konusnih preseka*. Pomenućemo dva najjednostavnija preseka.

Ako se posmatra ravan koja je paralelna osnovi kupe i nalazi se između osnove i vrha kupe, dobija se *paralelni presek*. Paralelni preseci su krugovi i ima ih beskonačno mnogo.

A ako presečna ravan sadrži osu, dobija se *osni presek*, normalan na ravan osnove.

Osni presek kupe je jednakokraki trougao. Kupa čiji je osni presek jednakostranični trougao naziva se ravnostrana kupa.

Na osnovu osobina jednakostraničnog trougla, za ravnostranu kupu važe sledeće relacije:

$$s = 2r \text{ i } H = r\sqrt{3},$$

gde je s izvodnica kupe, H visina, a r poluprečnik osnove.

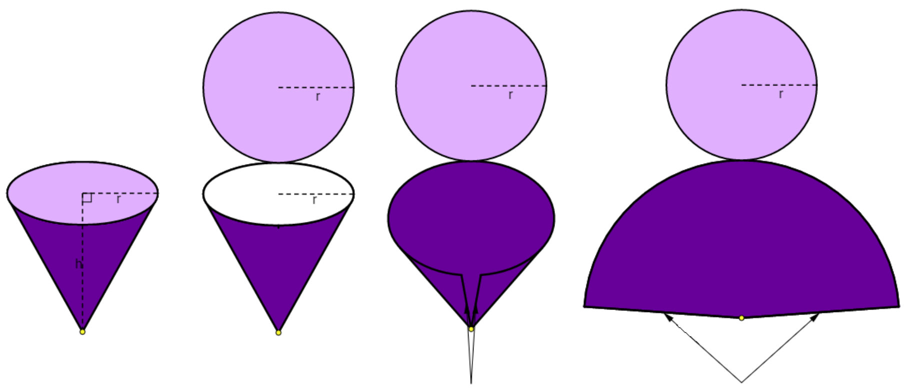
Površina kupe

Kupa je, po definiciji, ograničena jednim krugom i delom konusne površi. Dakle, površina kupe je zbir površina osnove i omotača:

$$P = B + M.$$

Površina osnove računa se po formuli: $B = r^2\pi$.

Da bi se izračunala površina omotača, može se posmatrati mreža kupe. Ona se dobija tako što se raseče kupa po kružnoj liniji osnove, a zatim se omotač raseče po jednoj izvodnici. Na jednom od GeoGebra apleta kreiranih za elektronsku lekciju *Kupa* prikazana je mreža prave kupe. Pomeranjem klizača može se menjati poluprečnik baze i visina kupe. Takođe, može se pratiti i postupak razvijanja kupe u mrežu, kao i obrnut postupak. Na slici 59 prikazano je razvijanje kupe u mrežu.



Slika 59: Razvijanje mreže kupe

Sve izvodnice su jednake, pa će mreža omotača biti kružni isečak sa centrom S i poluprečnikom s. Dužina luka ovog isečka jednaka je obimu osnove. Dakle, s obzirom da luk kružnog isečka $l = 2r\pi$ predstavlja obim osnove, dobija se:

$$M = P_i = \frac{s \cdot l}{2} = \frac{s \cdot 2r\pi}{2},$$

odnosno:

$$M = \pi r s.$$

Konačno, formula za površinu kupe je:

$$P = r^2\pi + \pi r s \quad \text{ili} \quad P = r\pi(r + s).$$

Zapremina kupe

Na osnovu Kavaljerijevog principa, formula za zapreminu kupe je:

$$V = \frac{1}{3}BH,$$

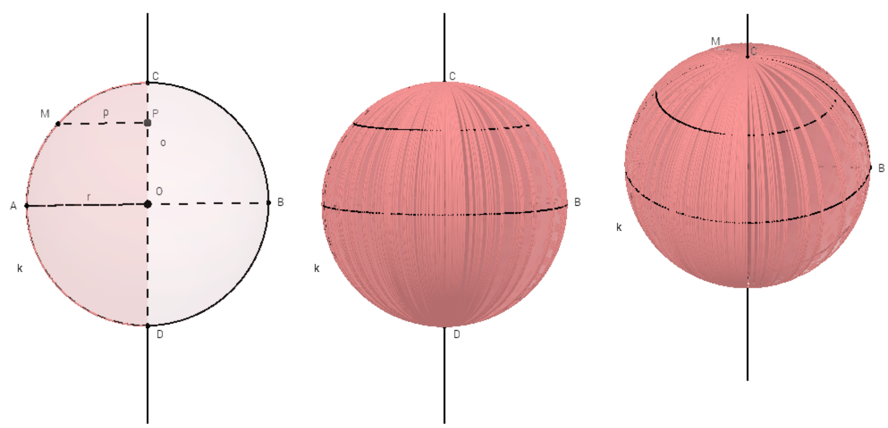
tj. kako je osnova kupe krug poluprečnika r,

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi H.$$

6 Lopta

U osmom razredu osnovne škole realizuje se sadržaj obrađen u poglavlju Lopta. U ovom delu predstavljen je nastanak lopte, elementi lopte, površina i zapremina.

Da bi se objasnilo šta je to lopta i kako ona nastaje, može se krenuti od već poznatih pojmova. Na proizvoljnom krugu $k(O, r)$, mogu se uočiti dva međusobno normalna prečnika AB i CD. Prava o određena prečnikom CD je jedna simetrala kruga k. Ako se zarotira polukrug CAD oko prave o, svaka njegova tačka opisaće kružnicu sa centrom na pravoj o i svaka ta kružnica leži u ravni normalnoj na pravu o. Pomeranjem tačke A na GeoGebra apletu se može videti opisani nastanak sfere. Pomeranjem radne površine može se posmatrati iz različitih uglova. Na slici 60 je to ukratko predstavljeno.



Slika 60: Nastanak sfere

Treba uočiti da tačka A opisuje kružnicu poluprečnika $OA = r$, dok proizvoljna tačka M polukruga CAD opisuje kružnicu poluprečnika $MP = p < r$. Dakle, sve tačke pomenutog polukruga rotacijom oko prave o opisuju kružnice sa centrom na duži CD. Pritom, polukružnica opiše površ koja se naziva *sfera*. Poluprečnik polukruga je i *poluprečnik sfere*, a središte prečnika polukruga je *centar sfere*.

Nije teško dokazati da važe sledeća dva tvrđenja:

- Sve tačke sfere jednako su udaljene od njenog centra.
- Svaka tačka S, takva da je $OS = r$, pripada sferi sa centrom u O i poluprečnikom r.

Na osnovu prethodnog, može se zaključiti:

Sfera sa centrom O i poluprečnikom r je skup svih tačaka S prostora, takvih da je $OS = r$.

Dakle, sfera je zatvorena površ, što znači da deli prostor na dve oblasti od kojih je jedna ograničena, a druga neograničena. Ograničenu oblast nazivamo *unutrašnjost sfere*.

Lopta sa centrom O i poluprečnikom r je skup svih tačaka L prostora, takvih da je $OL \leq r$.

Dakle, lopta je obrtno telo koje predstavlja uniju sfere i unutrašnjosti te sfere.

Krajnje tačke prečnika sfere nazivaju se *dijametralno suprotne*. To su međusobno najudaljenije tačke na sferi.

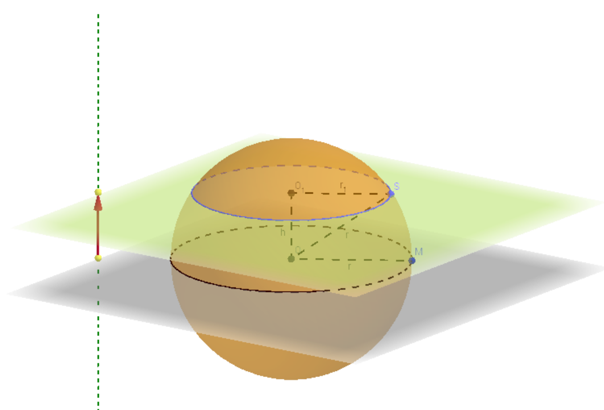
Kao kod prethodnih tela o kojima je bilo reči, može se razmatrati odnos ravni i sfere. Presek ravni i sfere može biti:

- prazan skup,
- tačka,
- kružnica.

Slično, presek ravni i lopte može biti:

- prazan skup,
- tačka,
- krug.

Pomeranjem klizača na GeoGebra apletu kreiranom za elektronsku lekciju *Lopta*, može se videti kružnica koja je presek ravni i sfere, odnosno krug koji je presek ravni i lopte. Na slici 61 je predstavljen jedan slučaj.



Slika 61: Presek ravni i sfere, odnosno ravni i lopte

Ako ravan prolazi kroz centar lopte, onda je poluprečnik presečnog kruga jednak poluprečniku lopte i takav presečni krug se naziva *velikim krugom lopte.* Centar velikog kruga lopte je centar lopte. Lopta ima beskonačno mnogo velikih krugova.

Presečna ravan deli sferu na dva dela koji se nazivaju *kalote.* Kalota koju odseca veliki krug je *polusfera.* Veliki krug deli loptu na dva odsečka koji se nazivaju *polulopte.*

Deo lopte određen kalotom je *loptin odsečak.*

Deo sfere između dve paralelne presečne ravni je *sferni pojas*, a deo lopte određen tim pojasom je *loptin sloj.*

Ravan koja sa sferom ima tačno jednu zajedničku tačku naziva se *dodirna* ili *tangentna ravan.* Takvih ravni ima beskonačno mnogo.

Formula za površinu lopte je:

$$P = 4r^2\pi,$$

gde je r poluprečnik te lopte.

Formula za zapreminu lopte je:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi,$$

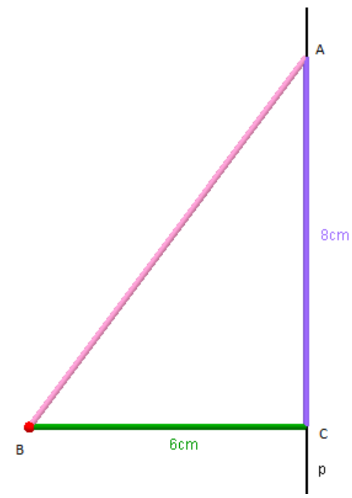
gde je r poluprečnik te lopte.

Formula za zapreminu lopte može se izvesti korišćenjem Kavaljerijevog principa.

7 Primeri

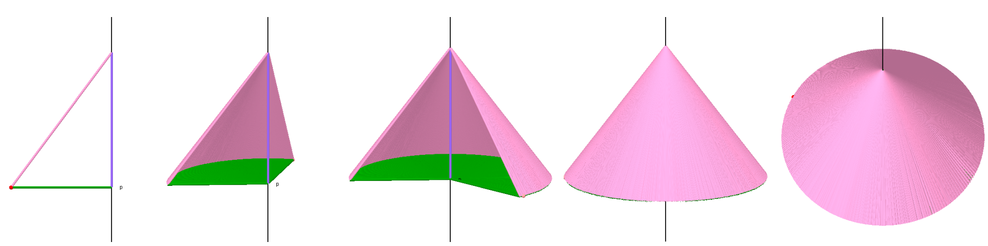
U ovom odeljku može se videti kako se zadaci iz površine i zapremine tela nastalih rotacijama određenih figura mogu rešavati uz pomoć GeoGebra apleta. Predstavljeno je ukupno devet primera za sva tri nivoa postignuća.

Primer 1. *Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom pravouglog trougla ABC ($\sphericalangle C = 90^o$) čije su katete $BC = 6cm$ i $AC = 8cm$ oko prave p koja sadrži katetu AC.*



Slika 62: Rotacija pravouglog trougla

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 63 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 63: Nastanak tela rotacijom pravouglog trougla

Može se uočiti da je telo nastalo na ovaj način kupa, čiji je poluprečnik osnove $BC = 6cm$, izvodnica duž AB, a visina $AC = 8cm$.

Koristeći *Pitagorinu teoremu*[2], izvodnica AB može se izračunati na sledeći način:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100,$$

tj.

$$AB = 10cm.$$

Površina P tela je:

$$P = 6^2\pi + 6 \cdot \pi \cdot 10 = 36\pi + 60\pi = 96\pi.$$

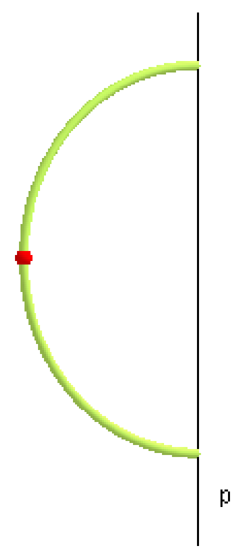
Dakle, površina tela iznosi $96\pi\ cm^2$.

Zapremina V tela je:

$$V = \frac{1}{3}6^2\pi \cdot 8 = \frac{1}{3}36\pi \cdot 8 = 96\pi.$$

Konačno, zapremina tela je $96\pi\ cm^3$.

Primer 2. *Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom polukruga poluprečnika $4cm$ oko prave p koja sadrži njegov prečnik.*

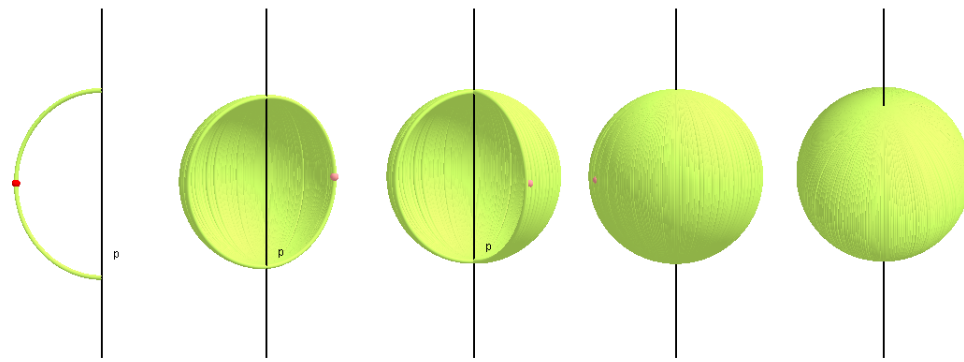


Slika 64: Rotacija polukruga

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet.

[2]Pitagorina teorema tvrdi da je površina kvadrata nad hipotenuzom pravouglog tougla jednaka zbiru površina kvadrata nad katetama tog trougla.

Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 65 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 65: Nastanak tela rotacijom polukruga

Može se uočiti da je telo nastalo na ovaj način lopta, čiji je poluprečnik $4cm$.
Površina P tela je:

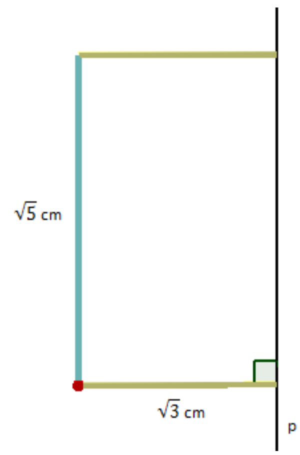
$$P = 4 \cdot 4^2\pi = 4 \cdot 16\pi = 64\pi.$$

Dakle, površina tela iznosi $64\pi\ cm^2$.
Zapremina V tela je:

$$V = \frac{4}{3}4^3\pi = \frac{4}{3}64\pi = \frac{256}{3}\pi.$$

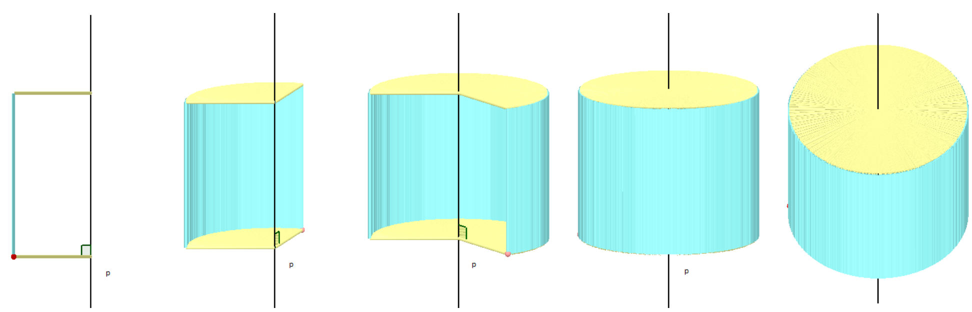
Konačno, zapremina tela je $\frac{256}{3}\pi\ cm^3$.

Primer 3. *Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom pravougaonika stranica $\sqrt{3}cm$ i $\sqrt{5}cm$ oko prave p koja sadrži njegovu dužu stranicu.*



Slika 66: Rotacija pravougaonika

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 67 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 67: Nastanak tela rotacijom pravougaonika

Može se uočiti da je telo nastalo na ovaj način valjak, čiji je poluprečnik osnove $\sqrt{3}cm$, a visina $\sqrt{5}cm$.

Površina P tela je:

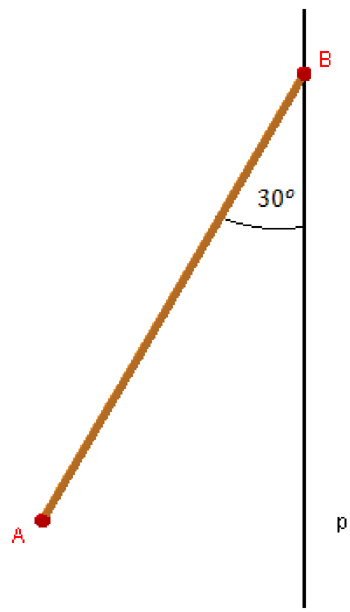
$$P = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \pi + 2 \cdot \sqrt{3}\pi \cdot \sqrt{5} = 6\pi + 2\sqrt{15}\pi.$$

Dakle, površina tela iznosi $\left(6+2\sqrt{15}\right)\pi\, cm^2$.
Zapremina V tela je:

$$V = \left(\sqrt{3}\right)^2 \pi \cdot \sqrt{5}.$$

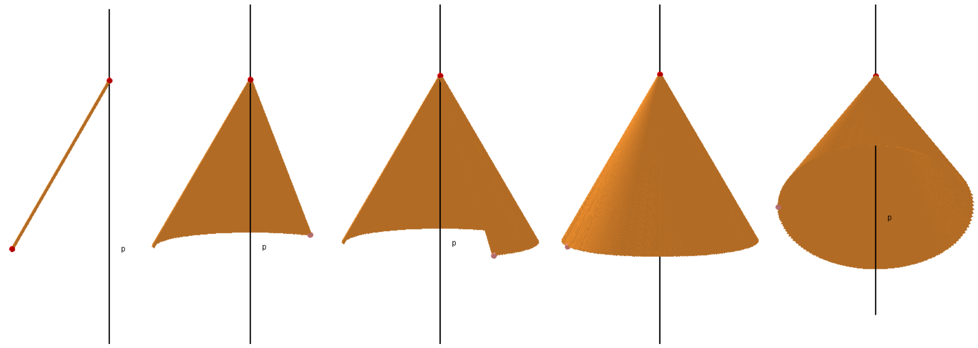
Konačno, zapremina tela je $3\sqrt{5}\pi\, cm^3$.

Primer 4. *Izračunati površinu tela koje nastaje rotacijom duži $AB = 6cm$ oko prave p koja sadrži tačku B i sa duži AB zaklapa ugao od 30^o.*



Slika 68: Rotacija duži

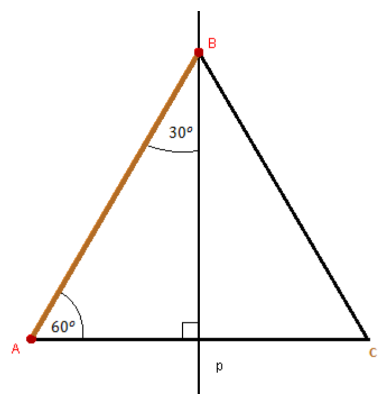
Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 69 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 69: Nastanak tela rotacijom duži

Može se uočiti da je telo nastalo na ovaj način omotač kupe.

Ono što nije poznato je poluprečnik r baze te kupe. Može se odrediti dopunom do jednakostraničnog trougla ABC, kao što pokazuje slika 70.



Slika 70: Dopuna do jednakostraničnog trougla

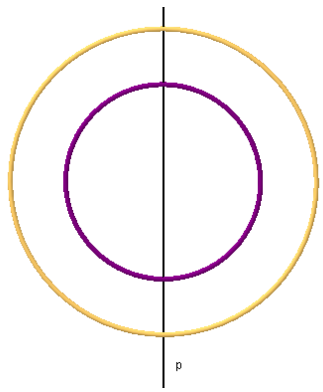
Može se primetiti da je traženi poluprečnik r osnove kupe jednak polovini stranice jednakostraničnog trougla ABC, što je upravo duž $AB = 6cm$. Zbog toga je $r = 3cm$.

Površina P tela je:

$$P = 3 \cdot \pi \cdot 6 = 18\pi.$$

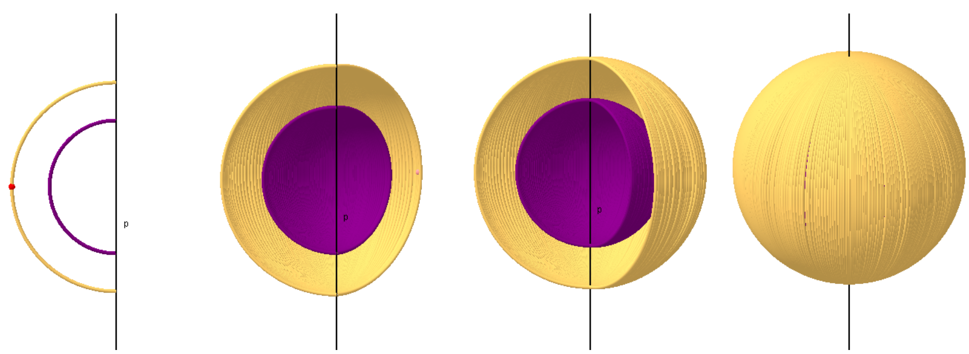
Dakle, površina tela iznosi $18\pi\ cm^2$.

Primer 5. *Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom kružnog prstena određenog krugovima poluprečnika* 11*cm i* 7*cm oko prave* p *koja sadrži njihov prečnik.*



Slika 71: Rotacija kružnog prstena

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Zbog bolje preglednosti, na apletu će rotirati polukrug, ali krajnji efekat će biti isti. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 72 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 72: Nastanak tela rotacijom kružnog prstena

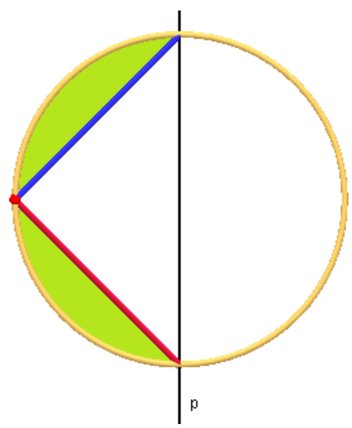
Može se uočiti da je telo nastalo na ovaj način razlika velike i male lopte, pa se zapremina tela dobija kada se od zapremine velike lopte oduzme zapremina male lopte.

Zapremina V tela je:

$$V = \frac{4}{3}11^3\pi - \frac{4}{3}7^3\pi = \frac{4}{3}\left(11^3 - 7^3\right)\pi = \frac{4}{3}\left(1331 - 343\right)\pi = \frac{4}{3}988\pi = \frac{3952}{3}\pi.$$

Dakle, zapremina tela iznosi $\frac{3952}{3}\pi\ cm^3$.

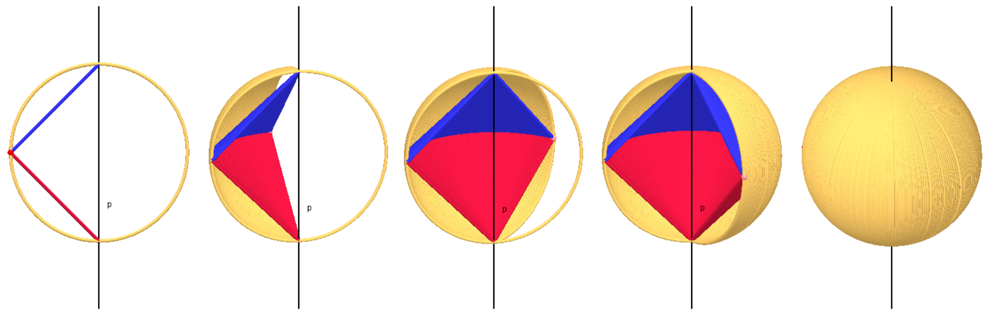
Primer 6. *Izračunti zapreminu tela koje nastaje rotacijom jednakokrako-pravouglog trougla i njegove opisane kružnice oko prave p koja sadrži hipotenuzu dužine $2\sqrt{2}cm$ tog trougla.*



Slika 73: Rotacija trougla i opisane kružnice

Zapravo, treba uočiti kakvo telo nastaje rotacijom dela koji je obojen zelenom bojom na slici.

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, treba posmatrati GeoGebra aplet. Zbog bolje preglednosti, na apletu će rotirati polukrug, ali krajnji efekat će biti isti. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 74 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 74: Nastanak tela rotacijom trougla i opisane kružnice

Može se uočimo da je telo nastalo na ovaj način razlika lopte i dve kupe kojima su spojene baze, pa se zapremina tela dobija kada se od zapremine lopte oduzme zapremina tih kupa. Pomenute kupe su jednake, pa se može od zapremine lopte oduzeti dvostruka vrednost zapremine jedne kupe.

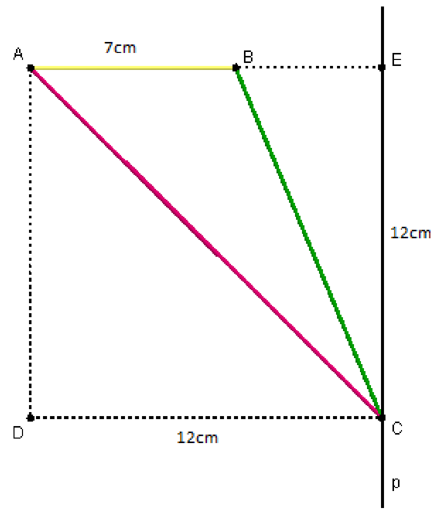
Visina kupe i poluprečnik njene osnove jednaki su poluprečniku lopte, tj. $\sqrt{2}\, cm$.

Zapremina V tela je:

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}^3 \pi - 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{2}^2 \pi \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{2}\pi - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\pi \\ &= \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \pi \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi.\end{aligned}$$

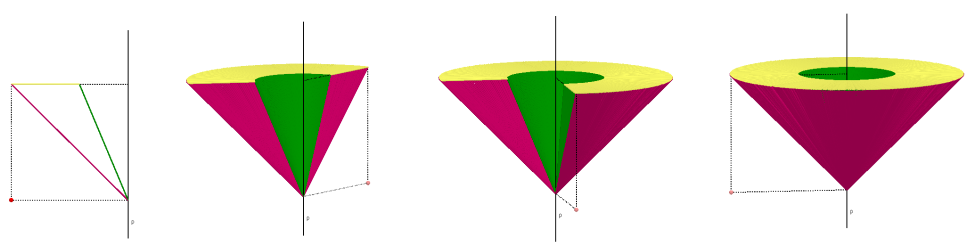
Dakle, zapremina tela iznosi $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\ cm^3$.

Primer 7. *Ako je četvorougao ADCE kvadrat, prema podacima sa slike izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom trougla ABC oko prave p.*



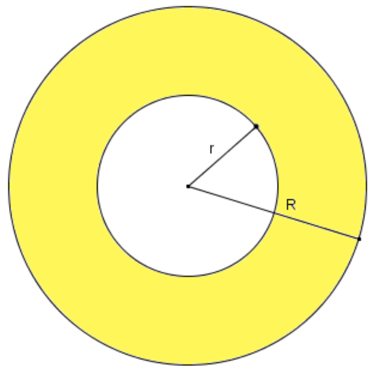
Slika 75: Rotacija trougla

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 76 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 76: Nastanak tela rotacijom trougla

Može se uočiti da je telo ograničeno jednim kružnim prstenom i omotačima dve kupe, pa je površina tela jendaka zbiru površina kružnog prstena i omotača kupa, a zapremina je jednaka razlici zapremina veće i manje kupe. Za početak, treba posmatrati kružni prsten čiji je veliki poluprečnik R, a mali r.



Slika 77: Kružni prsten

Površina ovakvog kružnog prstena računa se po formuli

$$P = \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi.$$

Za računanje površine omotača kupa, potrebne su dužine izvodnica.

$$BE = AE - AB = 12 - 7 = 5.$$

Dakle, $BE = 5cm$.

Iz trougla BCE, na osnovu *Pitagorine teoreme*, sledi da je

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169,$$

odnosno, $BC = 13cm$. S obzirom da je AC dijagonala kvadrata $ADCE$, sledi da je $AC = 12\sqrt{2}cm$.

Povrina P tela je:

$$\begin{aligned} P &= \left(12^2 - 5^2\right)\pi + 12\pi \cdot 12\sqrt{2} + 5\pi \cdot 13 \\ &= (144 - 25)\pi + 144\pi\sqrt{2} + 65\pi \\ &= 119\pi + 144\pi\sqrt{2} + 65\pi \\ &= \left(119 + 144\sqrt{2} + 65\right)\pi \\ &= \left(184 + 144\sqrt{2}\right)\pi. \end{aligned}$$

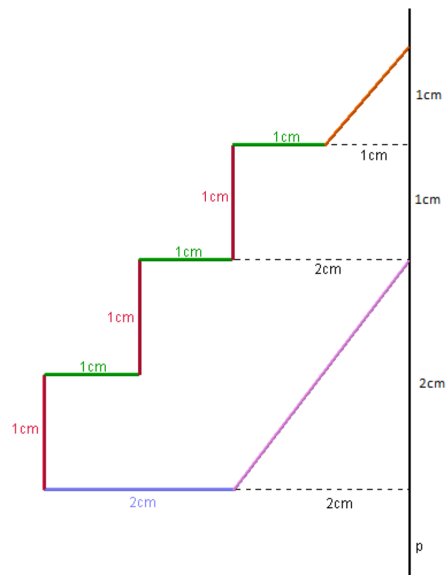
Dakle, površina tela iznosi $\pi\left(184 + 144\sqrt{2}\right) cm^2$.

Zapremina V tela je:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}12^2 \cdot 12 - \frac{1}{3}5^2 \cdot 12 \\ &= \frac{12}{3}\left(12^2 - 5^2\right) \\ &= 4\,(144 - 25) \\ &= 4 \cdot 119 \\ &= 476. \end{aligned}$$

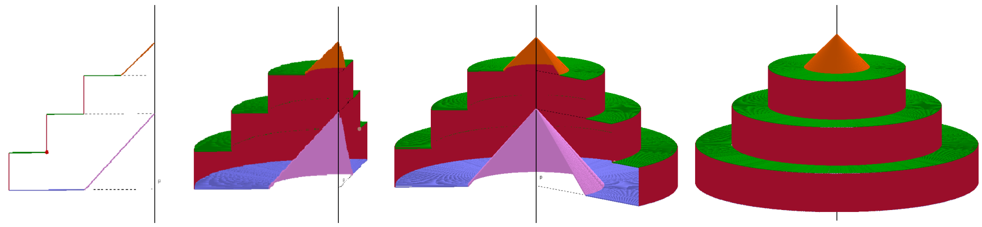
Konačno, zapremina tela je $476cm^3$.

Primer 8. *Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure na slici oko prave p.*



Slika 78: Rotacija figure

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 79 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 79: Nastanak tela rotacijom date figure

Može se uočiti da je telo ograničeno sa četiri kružna prstena, omotačima tri valjka i omotačima dve kupe, pa je površina tela jendaka zbiru površina kružnih prstena, omotača valjaka i omotača kupa, a zapremina se dobija kada se od zbira zapremina valjaka i manje kupe oduzme zapremina veće kupe.

Površina kružnog prstena čiji je veliki poluprečnik R, a mali r računa se po formuli:

$$P = \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi.$$

Za računanje površine omotača kupa, potrebne su dužine izvodnica. Izvodnica s_1 manje kupe je, prema Pitagorinoj teoremi:

$$s_1^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2,$$

odnosno $s_1 = \sqrt{2}cm$. Slično, dužina izvodnice s_2 veće kupe je $s_2 = 2\sqrt{2}cm$.

Površina P tela je:

$$\begin{aligned}
P = &\ 1 \cdot \pi \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2} + \left(2^2 - 1^2\right)\pi + \left(3^2 - 2^2\right)\pi + \left(4^2 - 3^2\right)\pi + \left(4^2 - 2^2\right)\pi \\
&+ 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 1 \\
&= \pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2} + (4-1)\pi + (9-4)\pi + (16-9)\pi + (16-4)\pi + 4\pi + 6\pi + 8\pi \\
&= \pi\sqrt{2} + 4\pi\sqrt{2} + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 12\pi + 4\pi + 6\pi + 8\pi \\
&= \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 3 + 5 + 7 + 12 + 4 + 6 + 8\right)\pi \\
&= \left(5\sqrt{2} + 45\right)\pi.
\end{aligned}$$

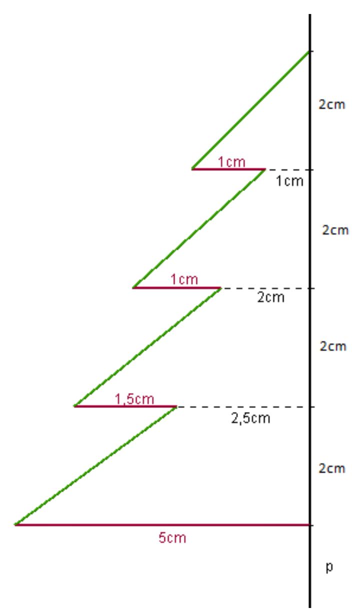
Dakle, površina tela je $\pi\left(5\sqrt{2} + 45\right) cm^2$.

Zapremina V tela je:

$$\begin{aligned} V &= 4^2\pi \cdot 1 + 3^2\pi \cdot 1 + 2^2\pi \cdot 1 + \frac{1}{3}1^2\pi \cdot 1 - \frac{1}{3}2^2\pi \cdot 2 \\ &= 16\pi + 9\pi + 4\pi + \frac{1}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi \\ &= \left(16 + 9 + 4 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3}\right)\pi \\ &= \frac{80}{3}\pi. \end{aligned}$$

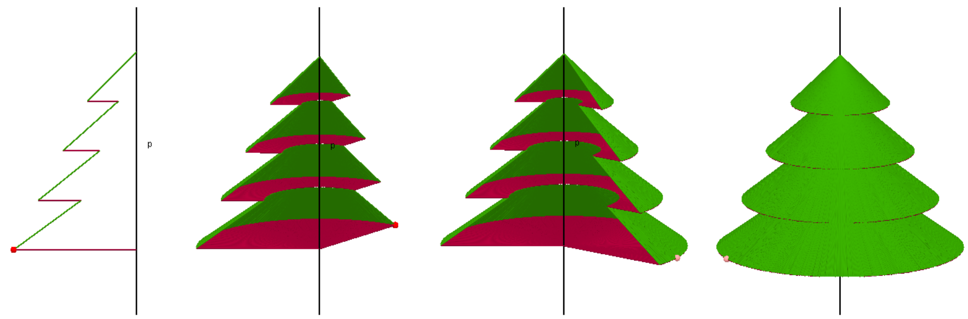
Konačno, zapremina tela iznosi $\frac{80}{3}\pi cm^3$.

Primer 9. *Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure na slici oko prave p.*



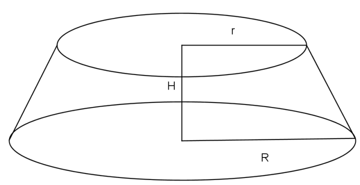
Slika 80: Rotacija figure oko prave p

Da bi se lakše razumelo kakvo telo nastaje rotacijom date figure oko prave p, a samim tim i lakše rešio zadatak, može se posmatrati GeoGebra aplet. Pomeranjem crvene tačke (što sporije, da bi bilo potpunije) na apletu, vidi se formiranje pomenutog tela. Pomeranjem radne površine telo se može posmatrati iz različitih uglova. Na slici 81 je ukratko predstavljeno nastajanje tog tela.



Slika 81: Nastanak tela rotacijom date fiigure oko prave p

Treba uočiti da se telo sastoji od jedne kupe (koja je na vrhu) i tri zarubljene kupe, pa je zapremina tela jednaka zbiru zapremina tih delova. Za početak, treba posmatrati zarubljenu kupu čiji je poluprečnik donje baze R, poluprečnik gornje baze r i visina H.



Slika 82: Zarubljena kupa

Zapremina ovakve zarubljene kupe računa se po formuli:

$$V = \frac{H}{3}\left(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}\right),$$

odnosno:

$$V = \frac{R\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

Zapremina V tela je:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2\pi}{3}\left(5^2 + 5 \cdot 2,5 + 2,5^2\right) + \frac{2\pi}{3}\left(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2\right) + \frac{2\pi}{3}\left(3^2 + 3 \cdot 1 + 1^2\right) + \frac{2\pi}{3}2^2 \\
&= \frac{2\pi}{3}(25 + 12,5 + 6,25) + \frac{2\pi}{3}(16 + 8 + 4) + \frac{2\pi}{3}(9 + 3 + 1) + \frac{2\pi}{3} \cdot 4 \\
&= \frac{2\pi}{3} \cdot 43,75 + \frac{2\pi}{3} \cdot 28 + \frac{2\pi}{3} \cdot 13 + \frac{2\pi}{3} \cdot 4 \\
&= \frac{2\pi}{3}(43,75 + 28 + 13 + 4) \\
&= \frac{2\pi}{3} \cdot 88,75 \\
&= \frac{\pi}{3} \cdot 177,5.
\end{aligned}$$

Dakle, zapremina tela iznosi $177,5\frac{\pi}{3}cm^3$.

Zaključak

Na prethodnim stranama je prikazano kako se programski paket GeoGebra može koristiti u različitim aspektima nastave stereometrije u osmom razredu osnove škole. Predstavljen je način izlaganja gradiva predviđenog planom i programom, uz kreativno i interaktivno rešavanje zadataka za sva tri nivoa postignuća. Upravo zbog toga, elektronske lekcije kreirane za potrebe ovog rada mogu biti od koristi u redovnoj, dodatnoj i dopunskoj nastavi stereometrije kako nastavnicima, tako i učenicima.

Sa jedne strane, koristeći prikazano u radu, nastavnici mogu zameniti tradicionalno crtanje geometrijskih tela po tabli njihovim interesantnijim, dinamičkim prikazima. Na taj način postiže se efikasnije izvođenje časa, čime se nastavniku otvara mogućnost obrade naprednijih sadržaja, inače najčešće nedostupnim tradicionalnim metodama nastave. Sa druge strane, učenici mogu zadatke, koji su na vizuelno interesantan način urađeni, iskoristiti za otklanjanje eventualnih nedoumica u vezi samog gradiva, kao i za produbljivanje već naučenih sadržaja. Zbog svega navedenog, postoji nada da elektronske lekcije kreirane za potrebe ovog rada, iskorišćene na pravilan način od strane motivisanog nastavnika i motivisanog učenika, mogu doneti veoma pozitivne rezultate. Doprinos bi mogao biti i u unapređivanju i poboljšanju nastave matematike koja bi bila u skladu sa tehnološkim mogućnostima i svakodnevnim izazovima koje nameće moderno doba.

Primena različitih načina komunikacije između nastavnika i učenika poboljšava kvalitet tog odnosa, kako i informisanost nastavnika o učenikovom znanju. Korišćenjem elektronskih lekcija nastavnik može predstaviti učenicima apstraktne matematičke pojmove u virtuelnom okruženju, gde se učenici dobro snalaze. Različiti interaktivni delovi nastavnog materijala (materijal za učenje, za vežbanje zadataka) utiču na motivaciju učenika i zahtevaju njihovu pažnju tokom celokupnog procesa učenja.

Sistem podrške nastavnicima koji koriste GeoGebru odvija se kroz zvanične GeoGebra Institute. U Srbiji postoji GeoGebra Centar Beograd, osnovan pri Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, čija je internet adresa `http://geogebra.matf.bg.ac.rs`. Cilj GeoGebra Centra Beograd jeste unapređivanje nastave matematike, stručno usavršavanje nastavnika matematike, kao i implementacija didaktičkog materijala u nastavi koji je napravljen korišćenjem GeoGebra paketa (Marić i sar., 2012).

Literatura

[1] Judith Preiner, Introdusing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra, Dissertation in Mathematics Education, Faculty of Natural Sciences, University of Salzburg, Salzburg, 2008

[2] Slaviša Radović, Aleksandra Stevanović, Marija Radojičić, Miroslav Marić, Programski paket GeoGebra kao interaktivni alat za izučavanje površine geometrijskih figura, Inovacije u nastavi, Vol. 26, Facs. 3, pp. 135-145, 2013.: http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml06125, pristupljeno 06.01.2016.

[3] Milena Isajlović, Elementarne funkcije, interaktivni nastavni materijal, 2012.: http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml06068

[4] Vladimir Stojanović, Matematika za osmi razred osnovne škole, Matematiskop, Beograd, 2012.

[5] Vladimir Stojanović, Matematika za sedmi razred osnovne škole, Matematiskop, Beograd, 2012.

[6] Elektronska lekcija *Prizma*: http://alas.matf.bg.ac.rs/ ml10056/MRad/prizma.html, pristupljeno 26.12.2015.