

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ



Мастер рад

Детекција и екстракција FESG сигнала коришћењем таласића

Ментор:
проф. др Десанка Радуновић

Чланови комисије:
проф. др. Милан Дражић
проф. др. Зорица Станимировић

Студент:
Катарина Аврамовић
бр.индекса: 1064/2014

Београд, 2015.

Садржај

1.	Увод	3
2.	Електрокардиограм.....	6
2.1.	Срце и његова електрична активност.....	6
2.2.	Електрокардиограм и његова детекција.....	10
2.2.1.	Карактеристични делови ЕКГ-а	11
2.2.2.	Одређивање броја откуцаја срца и присутних аритмија.....	12
2.3.	Шум у ЕКГ сигналу	12
2.4.	Фетална електрокардиографија	13
3.	Трансформација таласићима.....	15
3.1.	Репрезентација сигнала у временско-фреквенцијском домену	15
3.2.	Трансформација сигнала	17
3.3.	Мултирезолуција, функција скалирања и таласић.....	19
3.4.	Бесконачна диадска таласна трансформација	27
3.5.	Коначна таласна трансформација.....	31
3.5.1.	Дефиниција и својства коначне диадске трансформације таласићима .	31
3.5.2.	Израчунавање коначне диадске трансформације таласићима.....	31
3.5.3.	Инверзна коначна трансформација таласићима	32
4.	Детекција ивица сигнала	34
4.1.	Ивица једнодимензионалног сигнала.....	34
4.2.	Алгоритам детекције ивица.....	35
4.3.	Математички модел	37
4.4.	Реконструкција коефицијената таласне трансформације из ивица – метод алтернирајућих пројекција	39

4.5.	Таласић за детекцију ивица.....	43
4.5.1.	Конструкција таласића.....	43
4.5.2.	Алгоритам за трансформацију.....	45
4.5.3.	Алгоритам за реконструкцију.....	47
5.	Имплементирани алгоритам.....	48
5.1	Резултати.....	50
6.	Закључак.....	55
7.	Додатак.....	56
8.	Литература.....	69

1. Увод

Својим развојем електроника и рачунарство стичу све важније примене у биологији и медицини. Снимање, обрада и анализа разних електричних сигнала биолошког порекла постали су важно оруђе како за научна истраживања, тако и у свакодневной медицинској пракси. Савремена технологија олакшава напредак у истраживању начина функционисања људског тела и разних процеса који се у њему одвијају, дијагностику разних болести и поремећаја, праћењу стања пацијената и слично. Један од биоелектричних сигнала који се користе у те сврхе је и електрокардиографски сигнал. Електрокардиографија представља методу за проучавање рада срца графичким регистровањем електричне струје која настаје при његовом раду.

Фетална електрокардиографија је поступак мерења електричног сигнала који потиче од рада срца фетуса. Карактеристике овог сигнала као што су број карактеристичних пикова у јединици времена, њихов облик и појављивање или непојављивање могу дати битне информације о развоју фетуса, његовој зрелости, здравственом стању и евентуалним аномалијама. Поред тога може се детектовати и случај близаначке трудноће. Електричну активност срца фетуса можемо екстраховати из електричног сигнала снимљеног на абдомену труднице што је врло пожељан метод јер нема директног контакта са фетусом. Баш због тог неинвазивног начина снимања сигнала често се добијају само најизраженији пикови електрокардиограма (R, S), док су мање изражени пикови као што су P и T сакривени.

Удео феталног ЕКГ сигнала у снимљеном сигналу је јако мали, стога није лако издвојити фетални ЕКГ из абдоменског сигнала. Могу се јавити и додатне тешкоће као што су шумови изазвани дисањем мајке, померањем мајке, спољашње буке, шум који произилази из неправилног рада електроде или њеног одвајања од површине коже итд. Срце фетуса куца брже него срце мајке, па се у просеку једном у десет секунди деси преклапање откуцаја срца фетуса и откуцаја срца мајке, а то је још једна потешкоћа коју треба превазићи приликом решавања овог проблема.

Таласна трансформација је ефикасан алат за анализу нестационарних и променљивих сигнала. Неке од главних предности таласне трансформације су то што даје добру временско-фреквенцијску резолуцију и што се може имплементирати на једноставан начин - конволуцијом са дискретним филтрима.

До сада је имплементирано више метода за екстракцију феталног ЕКГ сигнала коришћењем таласића.

Ечевериа (J. C. Echeverria, [5]) је 1996. године представио методу за екстракцију феталног ЕКГ сигнала у којој је претпоставио да се абдоменски сигнал може представити у облику $s(t) = r(t) \cdot [f(t) + m(t) + n(t)]$ где $f(t)$, $m(t)$ и $n(t)$ представљају редом фетални ЕКГ, мајчин ЕКГ и сигнал који представља шум, а $r(t)$ представља фактор промене сигнала услед проласка кроз ткива. Метода се састоји од три корака: отклањање нискофреквенцијских и високофреквенцијских шума након мултирезолуцијске анализе сигнала, уклањање мајчиног ЕКГ сигнала коришћењем алгоритама препознавања поклапања у сигналима (pattern matching) након чега се детектује QRS комплекс феталног ЕКГ-а.

Ye Datian и Ouyang Xuemei су у [2] искористили чињеницу да максимуми модула коефицијената таласића представљају сингуларне тачке које нису Липшицове са експонентом $\alpha = 1$ и да максимуми модула одговарају ивицама сигнала. Проблем овог модела је немогућност да детектује пикове феталног ЕКГ-а који се поклапају са пиковима мајчиног ЕКГ-а, а то се дешава једном у десет секунди.

Paradimitriou ([14]) је искористио анализу максимума модула на разним скалама да би детектовао и уклонио шум како би побољшао квалитет екстрахованог феталног ЕКГ-а. Уклањање шума је изведено анулирањем максимума модула који га репрезентују (са различитих скала).

У овом раду је описан и имплементиран алгоритам за издвајање феталног ЕКГ сигнала коришћењем таласне трансформације чији су кораци представљени у [6]. Прецизније, детектовани су пикови улазних сигнала – сигнала снимљеног на грудном кошу мајке и на абдомену мајке. Пикови сигнала са грудног коша, који припадају

мајчином електрокардиограму, искоришћени су да би се детектовали пикови који припадају феталном електрокардиограму у сигналу снимљеном на абдомену. Од добијених пикова реконструисан је фетални електрокардиограм. Следеће поглавље рада обухвата кратак опис настанка и својстава електрокардиографског сигнала и истиче значај феталне електрокардиографије.

2. Електрокардиограм

Рудолф фон Коликер¹ и Хајнрих Мулер² су 1856. године први опазили да постоје акцијске струје срца, а Августус Волер³ је 1877. године извршио прво снимање овог сигнала на човеку тзв. капиларним електрометром. Помоћу усавршених и сложених електронских апарата електрокардиографија је изоштрила дијагностику срчаних обољења и олакшала њихово лечење.

2.1. Срце и његова електрична активност

Мишићи су активни покретачи нашег тела. Срце спада у групу попречнопругастих мишића које не можемо свесно контролисати. Састоји се из два дела који заједно делују као пумпа за крв. У десну страну срца долази крв из читавог организма. То је крв сиромашна кисеоником, јер га је организам из ње већ узео и потрошио. У леву страну срца долази крв из плућа, а та крв је, кроз процес дисања, обогаћена кисеоником. Срчани мишић се ритмички шири и скупља, као двострука пумпа, захваљујући постојању једне посебне врсте срчаних ћелија, од којих је изграђен тзв. природни срчани пејсмејкер. Те ћелије, груписане у тзв. синусном чвору стварају слабу електричну струју у облику ритмичких импулса, који се спроводе до свих делова срчаног мишића. Импулси проузрокују наизменично грчење и опуштање срчаног мишића, што има за резултат рад срца.

Електрични потенцијали се јављају на мембранама скоро свих ћелија у телу. Неке од тих ћелија имају способност да саме стварају електрохемијске импулсе. Такве су

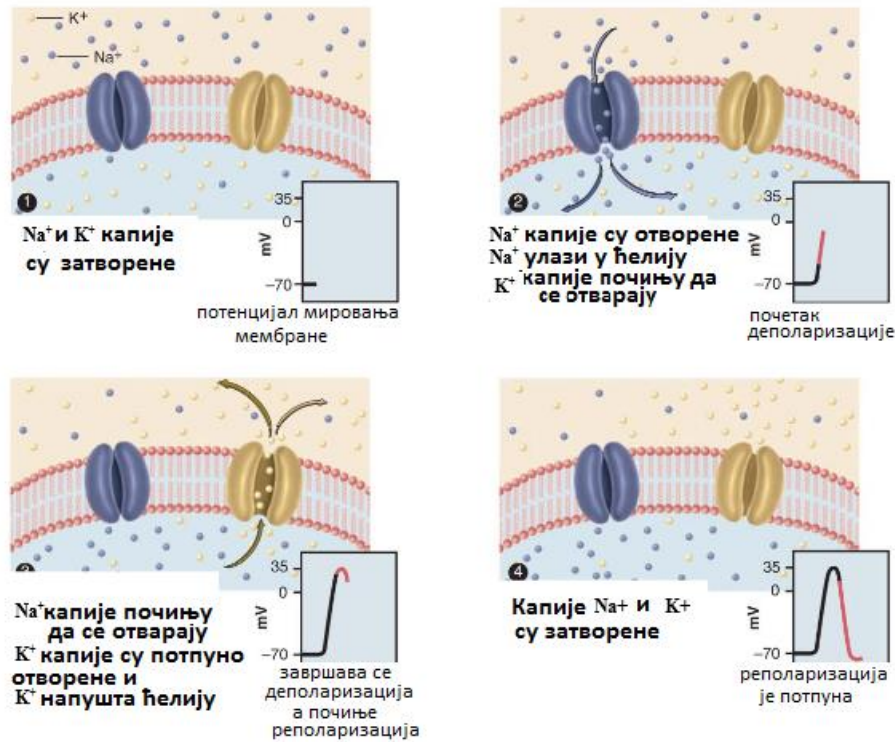
¹ **Albert von Kölliker** (рођен *Rudolf Albert Kölliker*; 6. јул 1817. – 2. новембар 1905.) – швајцарски анатом и физиолог

² **Heinrich Müller** (17. децембар 1820. – 10. мај 1864.) – немачки анатом

³ **Augustus Volney Waller** (21. децембар 1816. – 18. септембар 1870.) – британски неуропсихијатар

нервне и мишићне ћелије. Стимулуси за настанак мембранског потенцијала су разлике у концентрацијама и полу наелектрисања са две стране мембране.

Унутрашњост ћелије - интрацелуларна течност и њена спољашњост - екстрацелуларна течност садрже једнаке количине позитивних и негативних јона. Међутим под утицајем натријум-калијумске пумпе долази до транспорта позитивних натријумских јона из ћелије и транспорта позитивних калијумских јона у ћелију. Јони натријума и калијума се транспортују у односу 3:2. Зато унутар ћелије остаје више анјона и то узрокује негативну поларисаност интрацелуларне течности, док изван ћелије буде више позитивно наелектрисаних јона натријума и екстрацелуларна течност постаје позитивно поларисана.



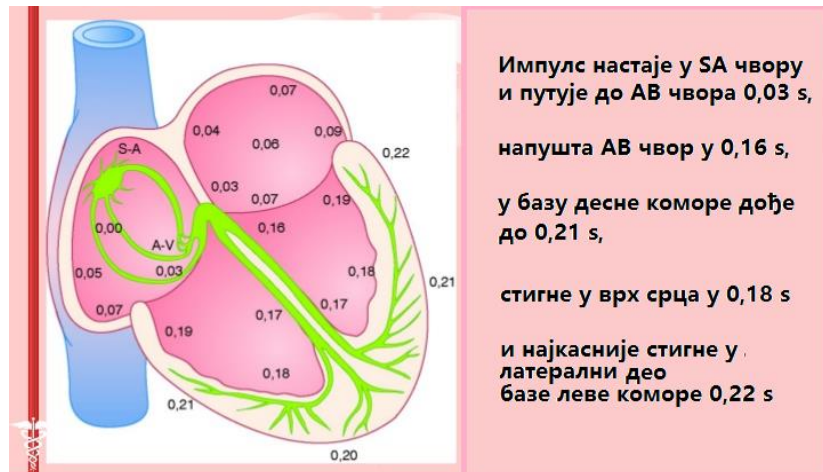
Слика 1: Дешавања на мембрани током акционог потенцијала, [16]

Разлика у концентрацијама унутар ћелије и изван ње доводи до спонтане дифузије тј. до пасивног транспорта јона. Тада мембрана постаје више пропустљива за катјоне него за анјоне. Због велике концентрације натријумових јона изван ћелије постоји велики

концентрацијски градијент усмерен ка унутра, па постоји и велика тежња натријума да дифундује у ћелију. Уласком натријума у ћелију повећава се број позитивних јона унутар ћелије, тј. ствара се електропозитивност у интрацелуларној течности. Са спољашње стране мембране остају анјони, па је спољашњост ћелије електронегативна. Овим процесом настаје разлика потенцијала на мембрани која натријумове јоне усмерава у супротном смеру од смера дифузије (усмерава их ван ћелије). За временски период од једне милисекунде потенцијал на мембрани толико нарасте да долази до заустављања дифузије натријума. Пасивни транспорт важи и за јоне калијума, само што се почетно стање разликује. У тренутку када са спољашње стране мембране постоји велика концентрација натријумових јона, унутар ћелије је велика концентрација калијумових јона. Пошто је мембрана пропустљива за катјоне, калијумови јони излазе из ћелије и ствара се поларисаност мембране, негативна унутар ћелије и позитивна ван ћелије. Потенцијал и у овом случају за кратко време достиже вредност која зауставља дифузију.

Као што је већ споменуто, срце има особину ауторитмичности, тј. стимулише себе на контракцију у одређеним временским интервалима. Све срчане мишићне ћелије имају способност стварања електричних импулса, али срце увек води она ћелија или група ћелија која има највећу фреквенцију стварања електричног импулса. Ћелије које имају највећу фреквенцију стварања импулса налазе се у делу срца који зовемо синус веносус. Код сисара је синус веносус потпуно закржљао и његов остатак се налази уклопљен у десну преткомору. Овај остатак синус веносуса зовемо синус преткоморски (СА) чвор. Његове ћелије имају највећу фреквенцију стварања импулса (око 70 пута у минути) и овај чвор је чвор који води срце (чвор предводник, енгл. pacemaker). У СА чвору, ћелије пејсмејкера генеришу акциони потенцијал спонтано и у једнаким временским интервалима. Овај акциони потенцијал се преко спроводног система шири на читаву преткомору и узрокује отварање Na^+ капија ћелија преткоморе.

У преткомори се налази посебан систем мишићних ћелија (влакана) који врло брзо проводи импулсе кроз преткомору. Након проласка импулса кроз преткомору и деполаризације мишићних ћелија, долази до њихове контракције.



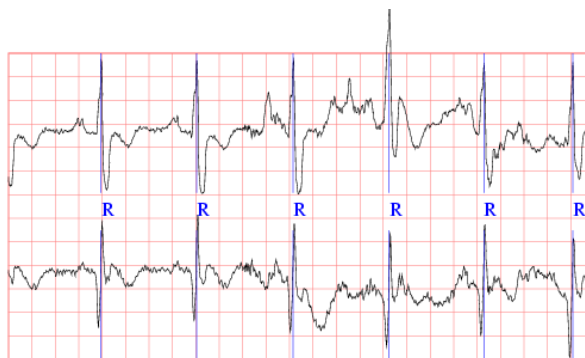
Слика 2: Временски ток путовања импулса, [16]

У доњем делу десне преткоморе налази се други чвор (група ћелија) који зовемо атриовентрикуларни (AV) чвор. Ћелије овог чвора мање су од ћелија преткомора и имају потенцијал мировања који није тако негативан као потенцијал мировања преткоморских ћелија. Проласком кроз тај чвор, електрични импулс се успори тј. падне брзина његовог простирања. Осим тога, импулс у AV чвору знатно ослаби. Ово успоравање импулса има врло велику важност, јер омогућава да преткоморе потпуно доврше своју контракцију, пре него што коморе започну своју. AV чвор је једина електрична веза између преткомора и комора, тј. електрични импулс који је настао у преткомори може прећи у комору само кроз AV чвор. Након што импулс изађе из AV чвора, он улази у Хисов сноп. Овај чвор је изграђен од влакана која су специјализована за врло брзо провођење импулса. Ту импулс постиже највећу брзину. Проводна влакна се иза Хисовог снопа гранају у две гране, по једна за сваку срчану комору. Брзина провођења импулса је и овде врло велика. У коморама долази до даљњег гранања проводних влакана у тзв. Пуркинеова влакна. Она врло брзо проводе импулс кроз комору и представљају разгранат проводни систем који доводи импулс до свих њених делова. Из Пуркиневих влакана импулс прелази на мишићне ћелије након чега се оне контрахују. Након контракције комора, срце се налази у стању мировања. У овом временском интервалу врши се реполаризација срчаних ћелија, тј. срчане ћелије су негативно поларисане. Након реполаризације горе наведени процес се понавља. Електрична активност срца фетуса је слична електричној активности одраслог човека.

2.2. Електрокардиограм и његова детекција

Човеково тело је добар проводник наелектрисања јер флуиди унутар тела садрже велике количине јона који се крећу као слободни носиоци наелектрисања и узрокују разлике потенцијала у телу. Током срчаног циклуса, при спровођењу акционог потенцијала по миокарду срца, ствара се електрична струја која може да се мери на површини човековог тела. Ова појава може да се мери јер током спровођења акционог потенцијала по срцу, мала количина електричног импулса одлази у околно ткиво које окружује срце и шири се по читавом телу. Електрокардиограм је графички запис електричних потенцијала насталих у срцу. Електроде које се постављају на површину коже су спојене са апаратом који детектује мале промене напона настале као резултат деловања акционог потенцијала срца. Апарат детектује укупни акциони потенцијал који се спроведе кроз срце у одређеном временском периоду. Целокупан снимак-запис акционог потенцијала зове се електрокардиограм (ECG или ЕКГ).

На слици 3 је приказан типични ЕКГ сигнал. Трајање ЕКГ сигнала је произвољно, а зависи од тога колико дуго желимо пратити рад срца. Са слике 3 се може видети да се ЕКГ сигнал састоји из неколико карактеристичних таласних облика који се периодично понављају. На слици је приказан реални ЕКГ сигнал који поред корисног сигнала садржи и шум.

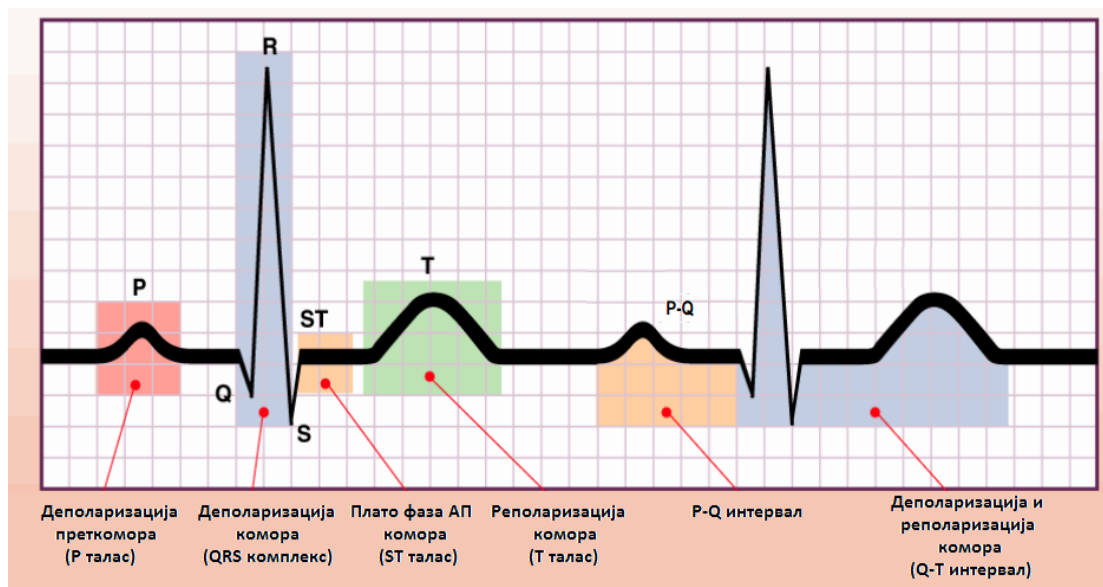


Слика 3: Електрокардиограм

2.2.1. Карактеристични делови ЕКГ-а

ЕКГ сигнал има карактеристичну морфологију у којој је могуће уочити неколико појава, које се називају таласи, а сваки од њих карактеристичан је за одређену фазу у провођењу акционих потенцијала кроз срце. Карактеристични делови ЕКГ сигнала су Р, Q, R, S и Т талас. QRS комплекс чине Q, R и S таласи.

Р таласом се представља електрична активност контракција обе преткоморе. QRS комплексом се представља електрични импулс на путу од АВ чвора преко Пуркиневих влакана до ћелија миокарда. QRS комплекс представља електричну активност надражених комора. Q талас је први силазни део QRS комплекса. Талас Q често није присутан на ЕКГ-у. Т талас представља реполаризацију комора тако да оне могу бити поново надражене електричним импулсом. Овај талас можемо схватити као ресетовање срчаних ћелија. Један срчани циклус сачињавају Р талас, QRS комплекс и Т талас. Овај циклус се непрекидно понавља.



Слика 4: Карактеристични делови електрокардиограма, [16]

Краткотрајни QRS комплекс је најдоминантни део у нормалном ЕКГ сигналу. На основу временских тренутака у којима се јављају и облика QRS комплекса може се доћи до значајних информација о стању срца. QRS комплекси користе се за одређивање срчаног

ритма, за класификацију срчаних циклуса и као полазна тачка у алгоритмима за компресију ЕКГ сигнала, што значи да је детекција QRS комплекса у основи готово свих алгоритама за аутоматску обраду ЕКГ сигнала.

2.2.2. Одређивање броја откуцаја срца и присутних аритмија

Детекција QRS комплекса неопходна је да би се утврдила варијабилност срчаног ритма (HRV-Heart Rate Variability), што је конвенционално прихваћен термин који описује осцилације тренутне вредности брзине рада срца. Да би се добио HRV сигнал, детектује се сваки QRS комплекс у ЕКГ сигналу и одређују се интервали између суседних QRS комплекса који су резултат нормалне активности синопреткоморалног чвора. Сви други типови откуцаја изазвани латентним пејсмејкерима, а који представљају аномалије у срчаном раду, не само да се не узимају у обзир при добијању HRV сигнала, већ их је пожељно и уклонити по QRS детекцији ради даље поуздане анализе HRV сигнала. HRV представља један од највише коришћених квантитативних мера кардиоваскуларног аутономног регулаторног система. Утврђено је да су промене HRV сигнала у директној вези са стањем у организму, односно да изглед HRV сигнала пружа могућност готово јасног разликовања здравог од патолошког функционисања организма.

Аритмија представља ненормални срчани ритам, а обично укључује неправилности у фреквенцији и редоследу што се може јасно видети на ЕКГ-у. Број откуцаја срца здравог фетуса варира од 120 до 160 откуцаја у минути. Брадикарадија је смањење броја откуцаја на мање од 120 у минути, а тахикардија је повећање броја откуцаја на преко 160 откуцаја у минути. Хиперкалцемија је повишена количина калцијума у крви која доводи до неправилног ритма откуцаја срца.

2.3. Шум у ЕКГ сигналу

ЕКГ сигнал поред Р таласа, QRS комплекса и Т таласа садржи и шум. Сметње потичу од различитих ствари. То су сметње узроковане напоном напајања, сметње настале због отпорности мишићне масе, контакта између коже и електрода, сметње настале утицајем остале опреме у близини, лош контакт електрода са телом, померање електрода,

покретање пацијента... Утицај неких сметњи је могуће умањити применом нискофреквенцијских филтара о којима ће бити више речи касније.

2.4. Фетална електрокардиографија

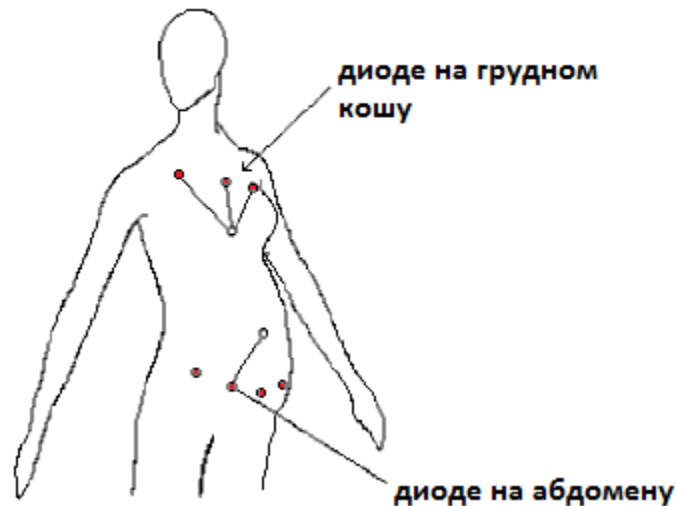
Бебино срце се формира непосредно после зачећа (сматра се да је то око треће недеље после зачећа) и започиње свој развој као цеваста структура која се окреће и дели и на крају развије у срце подељено на две преткоморе, коморе, залиске и велике крвне судове. Око двадесете недеље откуцаји срца фетуса се могу чути без појачања. Срчане мане се најчешће јављају јер није дошло до нормалног „увртања“ и дељења срца. Фактори ризика за развој срчаних мана су узимање различитих лекова, алкохола, нека обољења мајке (на пример: шећерна болест) и постојање срчаних мана код најближих чланова породице. Срчане мане се јављају и у тзв. „непреселектованој“ популацији тј. без неких посебних разлога или ризика за то.

Срчане аномалије су једне од најчешћих аномалија које се виђају како пре тако и после рођења бебе и јављају се у око 1% живорођених беба. Ако је налаз феталне електрокардиографије нормалан, могу се искључити велике срчане мане. Мале срчане мане, као и мане које се јављају у касној трудноћи или се развају односно погоршавају током трудноће, не могу се искључити. У те мане спадају мање комуникације између комора или преткомора (дефекти септума комора или преткомора), последице недовољног раста ширине великих крвних судова, одређене мане уливања плућних крвних судова у леву преткомору, мане аорте које се развијају тек након рођења бебе...

Када се нађе срчана мана, консултују се дечји кардиолози и кардиохирурзи, предлаже одређивање кариотипа бебе јер срчане мане често иду са поремећајима хромозома, те на основу тих налаза, врсте мане и чињенице да ли постоји додатна аномалија на другим органима, разговара са родитељима о прогнози и даљим корацима и прегледима.

Фетални електрокардиограм може послужити за одређивање броја откуцаја бебиног срца у минути и QRS комплекса срца фетуса, а самим тим и за одређивање

присутности аритмија и других аномалија рада срца, као и аномалија везаних за неправилно формирање срца као што је увећање комора или преткомора.



Слика 5: Положај диода на мајчином телу

ЕКГ сигнал трудница се најчешће мери на две локације, на грудном кошу и на абдомену. Фетални ЕКГ се најчешће издваја из неколико сигнала добијених од више диода. Конкретно, могу се поставити три диода на грудни кош и пет на абдомен, мада број диода зависи од технике која се примењује. Сигнали снимљени на грудном кошу садрже углавном мајчин ЕКГ сигнал са малим или без утицаја феталног ЕКГ сигнала. Претпоставља се да диоде на грудном кошу детектују само мајчин сигнал јер је бебино срце далеко од тих диода и његови откуцаји су знатно слабији од откуцаја срца мајке. Насупрот томе, абдоменске диоде детектују композитни сигнал састављен од ЕКГ сигнала мајке и феталног ЕКГ-а. Утврђено је да енергија феталног ЕКГ-а чини мање од једне четвртине енергије абдоменског сигнала.

3. Трансформација таласићима

3.1. Репрезентација сигнала у временско-фреквенцијском домену

Први проблем на који се наилази при свакој обради сигнала је представљање сигнала у облику који је погодан за одређену намену. У пракси се често користе трансформације које трансформишу сигнал у његов фреквенцијски домен. Пример такве трансформације је и Фуријеова трансформација (ФТ) која даје информације о томе које су фреквенцијске компоненте присутне у сигналу (фреквенцијски спектар). Међутим, лоша страна ове трансформације за неке примене је то што се губи информација о времену када се појединачне компоненте јављају.

Предност таласне трансформације у односу на Фуријеову је њена могућност да сигнал представи у временско-фреквенцијском домену. Идеја која се крије иза временско-фреквенцијске репрезентације је да се жељени сигнал “исече” на неколико делова, а онда анализира сваки од делова посебно. Трансформација сигнала на овај начин даје више информација о томе када се јављају различите фреквенцијске компоненте, али се наилази на нови проблем – како поделити жељени сигнал?

Да би се сазнало које све фреквенцијске компоненте постоје у сигналу у сваком временском тренутку можемо исећи сигнал Дираковим импулсом. Одсецање сигнала је конволуција улазног сигнала и сигнала за одсецање (прозора), у овом случају Дираковог импулса. Пошто је конволуција у временском домену исто што и множење у фреквенцијском домену и пошто ФТ од Дираковог импулса садржи све могуће фреквенције, фреквенцијске компоненте сигнала ће бити разливене свуда по фреквенцијској оси. У овом случају имамо други крајњи случај - количина информација о времену је одлична, тј. са високом временском резолуцијом, али немамо никакву фреквенцијску резолуцију. Овај проблем је познат као Хесенбергов принцип

неодређености који, у случају обраде сигнала, говори о немогућности да се у исто време знају тачне фреквенције и тачан тренутак времена када се ове фреквенције јављају.

Таласна трансформација је, између осталог, начин да се превазиђу негативне особине Фуријеове трансформације, иако постоји и други начин тзв. краткотрајна Фуријеова трансформација. У таласној анализи се за одсецање сигнала користе функције променљиве ширине (прозори). Прозор „клизи“ по сигналу и за сваку позицију се израчуна конволуција. Овај процес се понавља више пута са ужим и ширим прозорима да би се различите фреквенцијске компоненте сигнала другачије третирале. Када је прозор за одсецање узак, посматрају се компоненте сигнала високе фреквенције (имају мању периоду, па се могу обухватити уским прозором) и притом ће се добити добра резолуција у времену. Када се повећава ширина прозора, резултат конволуције ће бити компоненте ниже фреквенције (јер оне имају већу периоду) и добиће се боља фреквенцијска резолуција. Крајњи резултат је колекција временско-фреквенцијских репрезентација сигнала са различитим резолуцијама.

Код ове трансформације се обично не говори о временско-фреквенцијској репрезентацији, већ о репрезентацији време-скала. Скала је реципрочна фреквенцији. Скала се користи зато што је назив фреквенција задржан за ФТ. Параметар скала у таласној трансформацији је сличан употреби скале у мапама. Као и у случају мапа, вредност великих скала одговара глобалном не-деталном погледу на сигнал, док мале скале одговарају детаљном погледу. Слично, када је реч о фреквенцији, ниске фреквенције (велике скале) одговарају глобалној информацији сигнала (информацији која је обично прожета кроз цео сигнал), док високе фреквенције (мале скале) одговарају детаљнијој информацији о сигналу (обично о некој структури која траје релативно кратко). Тако кретањем од великих скала према мањим вршимо зумирање.

У наредним поглављима ћемо увести таласну трансформацију на начин на који је то урађено у [15].

Појмови и ознаке

Простор функција интеграбилних са квадратом на \mathbb{R} означава се са $L^2(\mathbb{R})$, тј.

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f \mid \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Подразумевана норма у овом простору је

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

и назива се енергијском нормом функције f . Ова норма је индукована скаларним производом

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\|^2 = (f, f).$$

Фуријеова трансформација функције $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, која је функција фреквенције ω , означава се са $\hat{f}(\omega)$, тј.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Симетричну функцију функције $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, у ознаци $f_-(x)$, дефинишемо са $f_-(x) = f(-x)$.

Скалирање функције дефинишемо са $f_s(x) = 2^{s/2} f(2^s x)$.

3.2. Трансформација сигнала

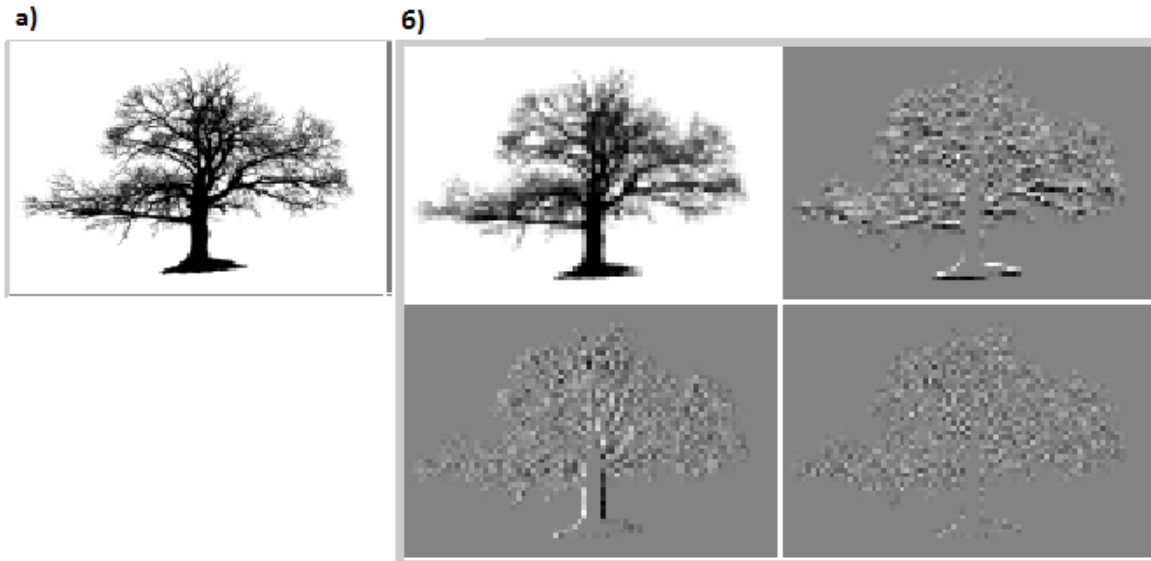
Репрезентација Φf сигнала f треба да одговара конкретној примени сигнала. Претпоставимо да $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Наведимо неке особине репрезентације Φf које унапред захтевамо по природи проблема.

- Пожељно је да трансформисани сигнал Φf буде скуп дискретних вредности да би се лако процесирао дигиталним рачунаром.

- Не желимо да изгубимо информације које је садржао оригинални сигнал f , па стога оператор Φ мора да буде инвертибилан, тј. мора да постоји Φ^{-1} .

- При обради сигнала, почетак x -осе се може узети произвољно, а репрезентација сигнала $f(x)$ не треба да зависи од позиције почетне тачке. Дакле, трансформација мора да комутира са оператором транслације по x -оси. Нека $f(x) \in U$, где је U потпростор простора $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, такав да $U = \{f(x) \mid \exists g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), g(x) = f(x-t), t \in \mathbb{R}\}$, уколико је $g(x) = f(x-t)$, онда је репрезентација сигнала Φg једнака репрезентацији Φf транслираној за t .

- У обради сигнала се веома корисном показала декомпозиција сигнала по различитим скалама које садрже детаље сигнала на различитим нивоима резолуције. Као илустрацију ове идеје наведимо „мултирезолуцијску трансформацију“ слике дрвета (слика б). На најфинијој скали би се налазили ситни детаљи као што су листови, најситније границе, бордуре на кори дрвета. На нижим скалама, налазиле би се компоненте које представљају облике све већих и већих грана и на њима не бисмо могли разазнати различите листове. На најнижој скали бисмо видели стабло и крошњу као сенку.



Слика 6: На слици а) је приказана апроксимација слике на скали 2^{-3} , а на слици б) апроксимација на следећој нижој диадској скали са одговарајућим детаљима.

3.3. Мултирезолуција, функција скалирања и таласић

Диадска таласна репрезентација биће представљена као трансформација сигнала (којег ћемо у овом поглављу звати функцијом) која декомпонује непрекидни сигнал на суму детаља на диадским скалама 2^{-j} , $j \in \mathbb{Z}$. Диадска таласна трансформација је дискретизација по скалама непрекидне таласне трансформације.

Нека је A^j оператор који некој функцији $f(x) \in L^2$ придружује њену апроксимацију на скали 2^{-j} и V_j скуп апроксимација свих сигнала из L^2 на скали 2^{-j} . Желимо да оператор A^j има следеће особине.

- Оператор A^j је линеаран. Ако је $A^j f(x)$ апроксимација неке функције $f(x)$ на скали 2^{-j} , тада је апроксимација функције $A^j f(x)$ на истој скали такође $A^j f(x)$ тј. $A^j \circ A^j = A^j$. Дакле, оператор A^j је оператор пројекције на векторски потпростор V_j који је садржан у L^2 .

- Међу свим апроксимацијама функције $f(x)$ на скали 2^{-j} , $A^j f(x)$ је функција која је најсличнија $f(x)$ у смислу L^2 -норме.

$$\forall g(x) \in V_j \quad \|g(x) - f(x)\| \geq \|A^j f(x) - f(x)\| \quad (3.1)$$

Дакле, $A^j f(x)$ је ортогонална пројекција на векторски потпростор V_j .

- Каузалност: апроксимација функције на скали $2^{-(j+1)}$ садржи све неопходне информације за апроксимацију функције на скали 2^{-j} . Пошто је A^j оператор пројекције на V_j ова чињеница је еквивалентна следећем

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} . \quad (3.2)$$

- Операција апроксимирања је слична на свим нивоима. Желимо да будемо у могућности да потпростор апроксимираних функција добијемо скалирањем сваке функције коју он садржи за количник вредности скала.

$$g(x) \in V_j \quad \Leftrightarrow \quad g(2x) \in V_{j+1} \quad (3.3)$$

- Када се $f(x)$ транслира за одређени фактор, $A^j f(x)$ се такође транслира.
- Када се функција апроксимира на скали 2^{-j} губимо неке детаље оригиналне функције $f(x)$. Изгубљени детаљи одговарају ортогоналној пројекцији $f(x)$ на комплемент потпростора V_j у L^2 . Међутим, када се смањује скала, апроксимација функције треба да тежи оригиналној функцији. Обрнуто, када се скала повећава, апроксимација садржи све мање и мање детаља и треба да конвергира ка нули. Пошто је апроксимација функције на скали 2^{-j} једнака ортогоналној пројекцији на потпростор V_j , то је скуп $\bigcup_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j$ густ у L^2 и $\bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j = \{0\}$.

Сваки скуп векторских потпростора $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ са претходно наведеним особинама ћемо звати *мултирезолуцијском анализом простора L^2* . Наводимо дефиницију мултирезолуције преузету из књиге [15].

Дефиниција 1. Мултирезолуцијска анализа је декомпозиција Хилберт-овог простора $L^2(\mathbb{R})$ на низ затворених потпростора $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ таквих да је

- (1) $\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$
- (2) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
- (3) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- (4) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$
- (5) $\exists \varphi \in V_0$ тако да је $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ Рисов базис потпростора V_0 .

Специјално, у особини (5) базис се може изабрати тако да буде ортонормирани базис простора V_0 .

Апроксимациони простор V_j , $j \in \mathbb{Z}$ се може добити бинарним скалирањем, ширењем или скупљањем простора V_0 . Простор V_j са скалом 2^{-j} садржи два пута финије детаље од оних које садржи V_{j-1} са скалом $2^{-(j-1)}$. Када $j \rightarrow +\infty$ апроксимација постаје репрезентација јер V_j тежи $L^2(\mathbb{R})$. Ако функцију $\varphi(x)$ скалирану j пута и транслирану за k означимо са

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

Рисов базис простора V_j је скуп функција $\{\varphi_{j,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Функцију $\varphi(x)$ помоћу које креирамо све базисе потпростора, зовемо *функцијом скалирања*.

Како је $V_j \subset V_{j+1}$, детаљи који су садржани у V_{j+1} , а нису у V_j налазе се у ортогоналном комплементу простора V_j у односу на простор V_{j+1} . Овај ортогонални комплемент се назива простор таласића на скали j и означимо га са T_j . Стога је

$$V_{j+1} = V_j \oplus T_j, \quad (3.5)$$

где \oplus означава ортогоналну суму. Из везе (3.5) следе важна својства мултирезолуције:

- Простори таласића T_j су разлике апроксимационих простора V_j .
- Апроксимациони простори V_j су суме простора таласића T_j .
- Простори T_j су узајамно ортогонални.

Докази наведених својстава се могу наћи у [15].

Простори таласића T_j , генерисани су скалирањем и диадским транслацијама функције $\psi(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, која се назива *основни таласић* („мајка“), тј. $\{\psi_{j,k} \in L_2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, где је

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.6)$$

је база за T_j .

Креирана мултирезолуција простора $L^2(\mathbb{R})$ омогућава да функције разложимо на различите фреквенцијске компоненте и затим сваку компоненту анализирамо са резолуцијом која одговара њеној скали. За сваки простор V_j пројекција на њега у односу на мултирезолуцијску базу је

$$\forall f(x) \in L^2, \quad f_{V_j}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x). \quad (3.7)$$

У односу на ниво са скалом $2^{-(j+1)}$ овако одређена апроксимација функције изгубила је неке детаље функције, који се налазе у T_j , па могу бити представљени оператором пројектовања на простор таласића T_j :

$$f_{T_j}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \quad (3.8)$$

Из (3.5) закључујемо да је свака функција $f_{V_{j+1}}(x) \in V_{j+1}$ збир две узајамно ортогоналне функције, и то $f_{V_j}(x)$ из V_j и $f_{T_j}(x)$ из T_j :

$$f_{V_{j+1}}(x) = f_{V_j}(x) + f_{T_j}(x). \quad (3.9)$$

Настављајући поступак тј. разлагањем функције $f_{V_j}(x)$ итд., функције из простора V_{j+1} могу се представити збиром

$$\begin{aligned} f_{V_{j+1}}(x) &= f_{V_j} + (f_{V_{j+1}} - f_{V_j}) + (f_{V_{j+2}} - f_{V_{j+1}}) + \dots + (f_{V_{j+1}} - f_{V_j}) \\ &= f_{V_j}(x) + f_{T_j}(x) + f_{T_{j+1}}(x) + \dots + f_{T_j}(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

што представља *мултirezолуцијску репрезентацију функције* $f_{V_{j+1}}$.

У граничном случају, на основу услова комплетности мултirezолуције (2) из дефиниције, следи да $f_j(x) \rightarrow f(x)$ када $j \rightarrow \infty$, а то се може записати на следећи начин:

$$f(x) = f_{V_j}(x) + \sum_{j=J}^{\infty} f_{T_j}(x), \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_{T_j}(x). \quad (3.11)$$

Суме (3.11) представљају *мултirezолуцијске развоје функције* $f(x)$ јер садрже базисне функције различитих нивоа резолуције. Избором најгрубље скале 2^{-J} бесконачни низ простора T_j , $j = J-1, J-2, \dots$, замењен је простором V_J . Можемо закључити да базис простора L^2 чине функције скалирања на изабраном нивоу J и таласићи на нивоима $j \geq J$, али и само таласићи на свим нивоима резолуције.

Приметимо да $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ припада простору V_1 чији је базис $\{\varphi_{1,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ тј. $\{\sqrt{2}\varphi(2x-k)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, што значи да се $\varphi(x)$ може записати у облику

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (3.12)$$

где су c_k реални бројеви. Једначина (3.12) се назива *дилатационом једначином*.

Дилатациона једначина има бесконачно много решења: ако је $\varphi(x)$ решење, онда је и $const \cdot \varphi(x)$ такође решење те једначине. Да би решење, уколико постоји, било јединствено захтеваћемо и да је његова средња вредност једнака јединици

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (3.13)$$

Интеграљењем дилатационе једначине добијамо

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x - k) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k, \quad (3.14)$$

а одатле је

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k = \sqrt{2}. \quad (3.15)$$

Означимо са $h_k = c_k / \sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ и једначина (3.12) постаје

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k). \quad (3.16)$$

Фуријеова трансформација функције скалирања је

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x - k) e^{-i\omega x} dx. \quad (3.17)$$

Интеграл на десној страни можемо да израчунамо увођењем смене $u = 2x - k$:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2x-k)e^{-ix\omega} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)e^{-i(u+k)\omega/2} du = e^{-i\omega k/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.18)$$

Стога је

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k/2} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.19)$$

где је $\hat{H}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$ и назива се *фреквенцијским одзивом филтра дефинисаног коефицијентима h_k* .

Настављајући поступак добијамо

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{H}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{H}\left(\frac{\omega}{4}\right) \dots \hat{H}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.20)$$

а пуштајући да $n \rightarrow +\infty$ добијамо

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{n=1}^{+\infty} \hat{H}\left(\frac{\omega}{2^n}\right) \quad (3.21)$$

јер $\hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, па бесконачни производ конвергира. $H(\omega)$ се може схватити као додатно „изравнавање“ неопходно да се пређе од скале $2^{-(j+1)}$ до скале 2^{-j} .

Када скала опада, очекујемо да оператор A^j приказује све ситније детаље функције $f(x)$ тако да $A^j f(x)$ у $L^2(\mathbb{R})$ конвергира ка $f(x)$. Насупрот томе, када скала расте, губимо детаље, све више и више изравнавамо функцију и очекујемо да ће резултујућа функција конвергирати ка нули. Ове тврдње се осликавају следећим условима Фуријеове трансформације функције $\varphi(x)$:

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} \hat{\varphi}(\omega) = 1 \text{ и } \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(\omega) = 0. \quad (3.22)$$

Пројекција функције на простор таласића за дати таласић $\psi(x)$ може се срачунати формулом

$$\forall f(x) \in L^2, \quad f_{T_j}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x). \quad (3.23)$$

Таласић $\psi_{j,l}(x)$ припада простору V_{j+1} чији је базис $\{\varphi_{j+1,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Слично као функција скалирања, таласић се може записати у облику $\psi_{j,l}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi_{j+1,k}(x)$, а одатле се изводи да важи

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega) \hat{\varphi}(\omega) \quad (3.24)$$

где је $G(\omega)$ фреквенцијски одзив одговарајућег филтра.

Дискретна таласна трансформација функције $f(x) \in L^2$ на скали 2^{-j} се дефинише као конволуциони оператор:

$$W^j f(x) = f * \psi_j(x). \quad (3.25)$$

На сличан начин се дефинише и изравнавање функцијом скалирања на скали 2^{-j}

$$S^j f(x) = f * \varphi_j(x). \quad (3.26)$$

Приметимо да је пројекција функције на простор таласића одређена коефицијентима $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}}$, па је идеја да се таласна трансформација дефинише конволуцијом потекла из чињенице да су за диадске скале и диадске тачке одговарајући коефицијенти једнаки:

$$W^j f(x_0) = f * \psi_j(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_j(x_0 - x) dx = \langle f(x), \psi_j(x_0 - x) \rangle. \quad (3.27)$$

3.4. Бесконечна диадска таласна трансформација

Диадска таласна трансформација је низ таласних трансформација по свим скалама $2^j, j \in \mathbb{Z}$. Можемо увести оператор диадске таласне трансформације \mathbf{W} на $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{W}f = (W^j f(x))_{j \in \mathbb{Z}}. \quad (3.28)$$

Размотримо неке особине диадске таласне трансформације.

Транслација

Нека $f(x) \in U$ где је $U = \{g(x) \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists f \in L^2(\mathbb{R}), g(x) = f(x-t), t \in \mathbb{R}\} = L^2(\mathbb{R})$.

Пошто конволуција комутира са транслацијом, важи $\mathbf{W}g(x) = \mathbf{W}f(x-t)$.

Стабилност и комплетност

Захтевајмо да постоје две константе $A > 0$ и $B < \infty$ такве да

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_j(\omega)|^2 \leq B. \quad (3.29)$$

Испуњење горњег услова гарантује да је диадски дилатацијама таласића покривена цела фреквенцијска оса [3]. Функција може бити реконструисана из своје диадске таласне трансформације на следећи начин:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W^j f * \tilde{\psi}_j(x) = \mathbf{W}_I^{-1} \left(W^j f(x) \right)_{j \in \mathbb{Z}} \quad (3.30)$$

где је $\tilde{\psi}(x)$ такво да

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}_j(\omega) \hat{\tilde{\psi}}_j(\omega) = 1. \quad (3.31)$$

Заиста, заменимо у $\mathbf{W}_I^{-1} \left(W^j f(x) \right)_{j \in \mathbb{Z}}$ изразе за \mathbf{W}_I^{-1} и \mathbf{W}_I и добијамо

$$\mathbf{W}_I^{-1} \left(W^j f(x) \right)_{j \in \mathbb{Z}} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} W^j f * \tilde{\psi}_j(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f * \psi_j(x) * \tilde{\psi}_j(x) \quad (3.32)$$

Применимо Фуријеову трансформацију на (3.32) да бисмо искористили чињеницу

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(2^j \omega) \hat{\tilde{\psi}}(2^j \omega) = 1 \text{ и потом применимо инверзну Фуријеову трансформацију.}$$

Инверзна диадска таласна трансформација \mathbf{W}_I^{-1} је дефинисана једначином (3.30) и постоји ако је испуњен услов допустивости [3]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (3.33)$$

Ако важи (3.29), онда постоји бесконачно много функција $\tilde{\psi}(x)$ које задовољавају (3.31).

Можемо захтевати да

$$\hat{\tilde{\psi}}_j(\omega) = \frac{\hat{\psi}_j(\omega)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_j(\omega)|^2} \quad (3.34)$$

и такво $\tilde{\psi}(x)$ зовемо *таласићем реконструкције*.

Приметимо да, ако је $\{\psi_{j,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ортонормирана база простора T_j , тада је и $\{\tilde{\psi}_{j,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$ ортонормирана база истог простора. Таласић $\tilde{\psi}_{j,l}(x)$ припада простору

V_{j+1} чији је базис $\{\varphi_{j+1,k}(x)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, па се може записати у облику $\tilde{\psi}_{j,l}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \kappa_k \varphi_{j+1,k}(x)$

тј.

$$\hat{\psi}(2\omega) = K(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (3.35)$$

где је $K(\omega)$ фреквенцијски одзив одговарајућег филтра.

Множењем неједнакости (3.29) са $|\hat{f}(\omega)|^2$, интеграљењем и и применом Парсевалове теореме добијамо

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \|f(x)\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|W^j f(x)\|^2 \leq B \|f(x)\|^2. \quad (3.36)$$

Добешиз је у раду [3] доказала да је ово довољан и неопходан услов да реконструкција таласићима буде стабилна. Што је B/A ближе јединици, то је трансформација стабилнија.

Из услова (3.33) следа да

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\omega) dx = 0 \quad (3.37)$$

и да таласић мора довољно брзо тежити нули када $|x| \rightarrow \infty$.

Приметимо да сваки низ $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$, где је $g_j(x) \in L^2(\mathbb{R})$, није диадска таласна трансформација неке функције из $L^2(\mathbb{R})$. Нека је M_T потпростор простора $(L^2)^{\mathbb{Z}}$ свих таласних трансформација $\mathbf{W}_{M_T} f = (W^j f(x))_{j \in \mathbb{Z}}$ за $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Утврдили смо да \mathbf{W}_{M_T} има инверз $\mathbf{W}_{M_T}^{-1}$ који је дат једначином (3.30).

Уведимо оператор P_{M_T} као оператор пројекције $(L^2)^{\mathbb{Z}}$ на M_T .

Оператор $\mathbf{W}_{M_T}^{-1}$ можемо проширити на $(L^2)^{\mathbb{Z}}$ на следећи начин:

$$\forall (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in (L^2)^{\mathbb{Z}} \quad \mathbf{W}_{M_T}^{-1} (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} g_j * \tilde{\psi}_j(\omega).$$

Лако се показује да је $\mathbf{W}_{M_T}^{-1} (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in L^2$. За $P_{M_T} = \mathbf{W}_{M_T} \circ \mathbf{W}_{M_T}^{-1}$ очигледно важи

$$\forall (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in (L^2)^{\mathbb{Z}} \quad P_{M_T} (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M_T \quad (3.38)$$

и

$$(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M_T \quad \text{ако} \quad P_{M_T} (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} = (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \quad (3.39)$$

На основу формуле за реконструкцију закључујемо да је $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$ дидаска таласна трансформација неке функције из $L^2(\mathbb{R})$ ако је $\mathbf{W}(\mathbf{W}^{-1}(g_l(x))_{l \in \mathbb{Z}}) = (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$.

Редундантност

Ако у (3.30) заменимо операторе \mathbf{W} и \mathbf{W}^{-1} њиховим изразима, добијамо

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l * \mathfrak{I}_{l,j}(x) &= g_j(x), \\ \mathfrak{I}_{l,j}(x) &= \tilde{\psi}_l * \psi_j(x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ове једначине су познате као *једначине репродукујућег језгра* (reproducing kernel equations). Приметимо да је $W^l f(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{I}_{l,k} * W^k f(x)$. Енергија $\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathfrak{I}_{lk}(x)|^2 dx$ језгра \mathfrak{I}_{lk} мери редундантност таласне трансформације на скалама 2^{-j} и 2^{-l} .

У пракси мерни инструменти не могу мерити сигнале са бесконачном фреквенцијом већ можемо мерити само апроксимацију улазног сигнала са коначном фреквенцијом r . Самим тим, нема сврхе рачунати диадску таласну трансформацију таквих апроксимираних сигнала на скалама већим од r . Заиста, ако је скала финија од резолуције којом је сниман сигнал, детаљи на тој скали не дају никакве информације о оригиналном сигналу.

3.5. Коначна таласна трансформација

3.5.1. Дефиниција и својства коначне диадске трансформације таласићима

Претпоставимо да смо у могућности да апроксимирамо функцију $f(x)$ на скали 2^{-j_2} . Апроксимација $S^{j_2} f(x)$ не садржи никакве информације о детаљима функције који су мањи од 2^{-j_2} . Стога би рачунање коефицијената таласића за скале са већом фреквенцијом од 2^{j_2} било бескорисно.

Претпоставимо да је фреквенција 2^{j_2} максимална фреквенција нашег апарата за мерење сигнала (функције). Теоријски, из $S^{j_2} f(x)$ можемо израчунати таласну трансформацију функције $f(x) \in L^2$ на свакој нижој скали 2^{-j} , $j > j_2$. У пракси се међутим морамо зауставити на некој коначној скали 2^{-j_1} , $j_1 > j_2$.

Коначном диадском трансформацијом таласићима између скала 2^{-j_2} и 2^{-j_1} ћемо звати оператор који било коју функцију $f(x) \in L^2$ слика у скуп функција

$$W_F(S^{j_2} f) = \left\{ (W^j f(x))_{j_2 \leq j \leq j_1}, S^{j_1} f(x) \right\}. \quad (3.41)$$

Овај оператор нам даје изравнавање функције $f(x)$ на грубој скали 2^{-j_1} и узастопне детаље који се јављају између скала 2^{-j_2} и 2^{-j_1} .

3.5.2. Израчунавање коначне диадске трансформације таласићима

У овој подсекцији биће описан прости алгоритам за рачунање коначне диадске трансформације таласићима за произвољну функцију $S^{j_2} f(x) \in V_{j_2}$. Подсетимо се да Фуријеове трансформације функције скалирања и њој придруженог таласића задовољавају

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ и } \hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.42)$$

На било којој скали 2^{-j} , Фуријеове трансформације $S^{j+1}f(x)$, $S^j f(x)$ и $W^j f(x)$ су повезане једначинама

$$\begin{aligned} \hat{S}^j f(\omega) &= \hat{f}(\omega)\hat{\phi}(2^{-j}\omega) \\ &= \hat{f}(\omega)H(2^{-j-1}\omega)\hat{\phi}(2^{-j-1}\omega) \\ &= H(2^{-j-1}\omega)\hat{S}^{j+1}f(\omega), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}^j f(\omega) &= \hat{f}(\omega)\hat{\psi}(2^{-j}\omega) \\ &= \hat{f}(\omega)G(2^{-j-1}\omega)\hat{\phi}(2^{-j-1}\omega) \\ &= G(2^{-j-1}\omega)\hat{S}^{j+1}f(\omega). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Нека су h^j и g^j инверзне Фуријеове трансформације $H(2^{-j}\omega)$ и $G(2^{-j}\omega)$ редом. Из претходних једначина је

$$S^j f(x) = S^{j+1} f * h^{j+1}, \quad (3.45)$$

$$W^j f(x) = S^{j+1} f * g^{j+1}. \quad (3.46)$$

Рачунајући $S^j f(x)$ и $W^j f(x)$ за све j од $j_2 - 1$ до j_1 , можемо да израчунамо коначну диадску таласну трансформацију $S^{j_2} f(x)$.

3.5.3. Инверзна коначна трансформација таласићима

Коначна диадска трансформација таласићима је комплетна. Можемо да реконструирамо $f^* = S^{j_2} f \in V_{j_2}$ из њене коначне таласне трансформације

$$W_F(S^{j_2} f) = \left\{ \left(W^j f(x) \right)_{j_2 \leq j \leq j_1}, S^{j_1} f(x) \right\} \quad (3.47)$$

Нека су $\bar{H}(\omega)$, $\bar{G}(\omega)$ и $\bar{K}(\omega)$ редом комплексни коњулати $H(\omega)$, $G(\omega)$ и $K(\omega)$.

Приметимо да из једначина (3.25) и (3.43) следи

$$\begin{aligned}
& \bar{H}(2^{-j-1}\omega)\hat{S}^j f(\omega) + \bar{K}(2^{-j-1}\omega)\hat{W}^j f(\omega) \\
&= \bar{H}(2^{-j-1}\omega)H(2^{-j-1}\omega)\hat{S}^{j+1} f(\omega) + \bar{K}(2^{-j-1}\omega)G(2^{-j-1}\omega)\hat{S}^{j+1} f(\omega) \\
&= \left(\bar{H}(2^{-j-1}\omega)H(2^{-j-1}\omega) + \bar{K}(2^{-j-1}\omega)G(2^{-j-1}\omega)\right)\hat{S}^{j+1} f(\omega) \\
&= \hat{S}^{j+1} f(\omega)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

ако је

$$\bar{H}(\omega)H(\omega) + \bar{K}(\omega)G(\omega) = 1. \tag{3.49}$$

Претходно извођење значи да смо користећи услов (3.49) после трансформације таласићима и реконструкције таласића добили почетни сигнал. Услов (3.49) називамо *условом савршене реконструкције*.

Нека су h_-^j и k_-^j редом симетричне функције функција h^j и k^j , инверзна Фуријеова трансформација једначине (3.48) може се записати као

$$h_-^{j+1} * S^j f(x) + k_-^{j+1} * W^j f(x) = S^{j+1} f(x) \tag{3.50}$$

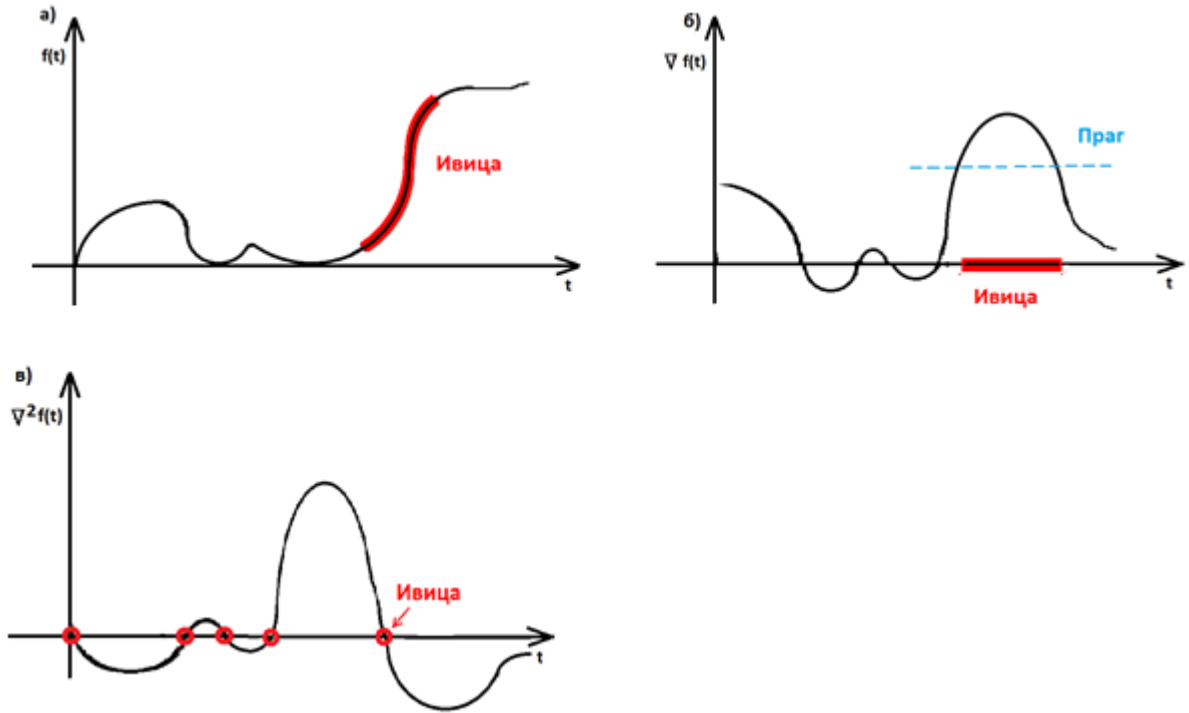
Итерирањем када j иде од j_1 до j_2 кроз ову једначину, можемо реконструисати $S^{j_2} f(x)$ из његове коначне диадске таласне трансформације.

4. Детекција ивица сигнала

4.1. Ивица једнодимензионалног сигнала

Интуитивно, ивица представља наглу промену у сигналу у просторно или временским узастопним тачкама. На пример у сигналу који представља говор, ивица је тачка у којој почиње нека реч, тачка у којој се завршава нека реч; у црно белој слици, ивица је место где се једна поред друге јављају две нијансе сиве, једна јако светла, друга јако тамна. Математички, ивицом можемо назвати тачку у којој је извод велики.

Идеја методе налажења ивица коришћењем Лапласијана је описана у наставку ове секције, а детаљније о овој методи се може прочитати у [9]. Посматрајмо једнодимензионални сигнал са слике 7 чија је ивица означена црвеном бојом. Очигледно, извод има екстремну вредност у околини ивице. Поређењем извода са неким прагом можемо детектовати позицију ивице на месту где је вредност извода већа од одређеног прага. У овом тренутку смо детектовали ивицу, али је она густа (детектована ивица је ширира од праве ивице). Међутим, знамо да се ивица налази на месту екстремне вредности првог извода, па њену локацију можемо да нађемо као локацију нуле другог извода. Други извод има више нула, али ми смо посматрањем првог извода и применом прага на њега обезбедили да разматрамо само оне који су нам заиста потребне.



Слика 7: а) Једнодимензионални сигнал б) први извод сигнала в) други извод сигнала

4.2. Алгоритам детекције ивица

Барјактаровић у [1] наводи три генерална корака од којих се састоје алгоритми за детекцију ивица.

У првом кораку потребно је максимално смањити шум у сигналу (загладити га) како би се оствариле што боље перформансе детектора, тј. како би се спречиле детекција непостојећих ивица, изостанак детекције правих ивица и делокализација ивица. Редукција шума се најчешће врши нископропусним (low-pass) филтрирањем јер шум представља високофреквенцијски сигнал. Међутим, у овом кораку морамо бити јако опрезни јер се уклањањем шума губи и део информације о ивици објекта јер и сама ивица представља високофреквенцијски сигнал.

Други корак у детекцији ивица је високопропусно филтрирање, најчешће реализовано помоћу диференцирања.

У трећем кораку потребно је локализовати ивицу и уклонити компоненте који су лажно детектоване као ивице јер производе сличан излаз из високопропусног филтра као и саме ивице.

Постоји више метода за детекцију ивица, овај проблем можемо свести на проблем налажења екстремума првог извода, на проблем налажења нула другог извода, а можемо га решити и применом таласића [8].

Методe које се базирају на налажењу првог извода имају и неке предности у односу на методe које се заснивају на налажењу другог извода. Рачунањем другог извода губимо информацију о „јачини“ ивица тј. при посматрању првог извода очигледно је да ли је ивица оштра или блага, док код другог извода то није случај. Други извод даје само локације ивица, а не и амплитуде.

Ми ћемо користити методe које се базирају на трансформацији таласићима. Нископропусно филтрирање захтева конструкцију оптималног филтра који представља компромис између елиминације шума и очувања структуре ивица. Ивица се најчешће описује својом скалом која се може тумачити као ширина ивица. Уобичајено је да филтар садржи параметар који одређује његову скалу, у случају Гаусовог филтра скала одговара стандардној девијацији σ . Уколико ширина ивица приближно одговара параметру σ , положај ивица добија се као локални максимум апсолутне вредности конволуције сигнала са првим изводом Гаусовог филтра. Уколико се користи други извод, ивицу представља пролазак кроз нулу (zero crossing) конволуције сигнала са другим изводом нископропусног филтра. Међутим, како сигнал може да садржи ивице различитих ширина и облика, немогуће је само на једној скали детектовати све потребне ивице.

Најпопуларнији детектор ивица предложио је Кени⁴ и његов алгоритам се и данас сматра стандардним алгоритмом за детекцију ивица у индустрији и испољава боље перформансе у односу на многе новије детекторе ивица. Кени је у раду [7] детекцију ивица посматрао као оптимизациони проблем. Разматрао је три критеријума која детектор ивица треба да испуни:

⁴ **John F. Canny** (1953.-/) – аустралијски научник

-исправна детекција, односно примена оптималног филтра која резултује великим односом сигнал-шум,

-тачна локализација ивице,

-само један одзив за сваку пронађену ивицу.

Филтар који задовољава поменути критеријуме Кени је одредио варијационим рачуном. Показао је да не постоји аналитичко решење, али да се у случају једнодимензионалних сигнала оптимални филтар може апроксимирати првим изводом Гаусове функције.

Већина детектора ивица базирана на таласној трансформацији полази од идеја које су презентовали Малат⁵ и Џонг⁶, где је детекција ивица на свакој скали трансформација реализована као у случају Кени детектора. Они су доказали да је Кенијев алгоритам за детекцију ивица еквивалентан проблему налажења локалних екстремума таласне трансформације. Уместо извода Гаусовог филтра на свакој скали се дефинише таласић које представљају извод функције скалирања.

У наредна два поглавља ћемо описати алгоритме за налажење ивица сигнала/функције и реконструкцију сигнала из тих ивица. За ове алгоритме су заслужни Малат и Џонг, а описали су их у [11].

4.3. Математички модел

Изравнавајућа функција (која се користи за чишћење шума у првом кораку алгоритма) је било која функција $\phi(x)$ чији је интеграл једнак јединици и која конвергира нули у бесконачности. Пример изравнавајуће функције је Гаусова функција.

⁵ **Stephane Mallat** – амерички научник који се бави примењеном математиком и обрадом сигнала

⁶ **Yitang (Tom) Zhang** – амерички научник кинеског порекла

У овом раду изравнавајућа функција ће бити функција скалирања $\varphi(x)$.
 Дефинишимо $\psi^a(x)$ и $\psi^b(x)$ као први и други извод функције $\varphi(x)$

$$\psi^a(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{dx} \text{ и } \psi^b(x) = \frac{\partial^2\varphi(x)}{dx^2}. \quad (4.1)$$

Израчунајмо интеграле ових функција

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^a(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi(x)}{dx} dx = 0, \quad (4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^b(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2\varphi(x)}{dx^2} dx = 0. \quad (4.2)$$

Пошто ове функције имају средњу вредност 0, можемо их сматрати таласићима.

Таласна трансформација функције $f(x)$ на скали 2^{-s} и позицији x таласићем $\psi^a(x)$ дата је са

$$W^{s,a} f(x) = f * \psi_s^a(x). \quad (4.3)$$

Важи

$$W^{s,a} f(x) = f * \left(2^{s/2} \frac{\partial\varphi_s}{dx} \right)(x) = 2^{s/2} \frac{\partial}{dx} (f * \varphi_s)(x) \quad (4.4)$$

$$W^{s,b} f(x) = f * \left(2^s \frac{\partial^2\varphi_s}{dx^2} \right)(x) = 2^s \frac{\partial^2}{dx^2} (f * \varphi_s)(x) \quad (4.5)$$

Таласне трансформације W_s^a и W_s^b су редом, први и други извод апроксимације сигнала на скали 2^{-s} , што значи да се локације ивица сигнала могу наћи налажењем локалних екстремума таласне трансформације таласићем $\psi^a(x)$ или налажењем локација нула таласне трансформације таласићем $\psi^b(x)$.

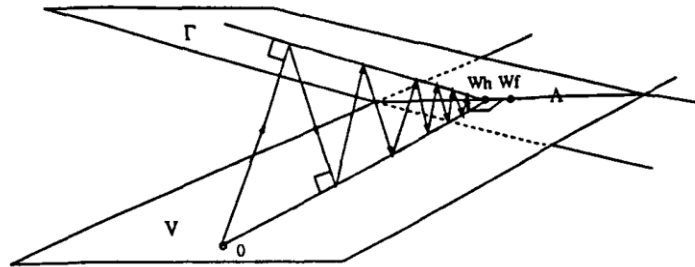
4.4. Реконструкција коефицијената таласне трансформације из ивица – метод алтернирајућих пројекција

Након претходног корака, имамо само вредности и локације локалних екстрема таласне трансформације на различитим скалама. Метод алтернативних пројекција налази таласну трансформацију које је „најсличнија“ таласној трансформацији оригиналног сигнала.

Нека је M простор свих низова функција $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$ за које важи

$$\left\| (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \right\|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\|g_j\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{dg_j}{dx} \right\|^2 \right) < +\infty. \quad (4.6)$$

Претходна једнакост се може схватити као дефиниција норме која дефинише Хилбертову структуру над M .



Слика 8: Метод алтернирајућих пројекција

Нека је M_T потпростор диадских таласних трансформација функција из $L^2(\mathbb{R})$ за које се може показати да се налазе у M . Нека је Γ афини потпростор низова функција $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M$ таквих да за сваки индекс j и позицију екстремума x_n^j важи $g_j(x_n^j) = W^j f(x_n^j)$. Другим речима, нека је Γ потпростор низова функција из M које интерполирају диадску таласну трансформацију полазне функције у свим тачкама

екстремума и на свим скалама. Може се доказати да је Γ затворен у M , а доказ се може наћи у [13]. Тада је $\Lambda = M_T \cap \Gamma$ скуп таласних трансформација функција из $L^2(\mathbb{R})$ које интерполирају екстремне вредности на свим скалама. Тражимо минимални елемент у Λ по норми из M такав да се интерполационе тачке понашају као локални екстреми. Да бисмо нашли све такве елементе у Λ , користимо метод алтернативних пројекција.

Нека је W диадска таласна трансформација и нека је W^{-1} инверзна диадска таласна трансформација. Диадска таласна трансформација неког сигнала је инваријантна у односу на оператор

$$P_{M_T} = W \circ W^{-1}, \quad (4.7)$$

а одатле је $P_{M_T} W = W$.

За сваки низ $X = (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M_T$ важи $P_{M_T} X = X \in M_T$.

Ако је таласић ψ_j симетричан или антисиметричан, онда је репродукујуће језгро \mathfrak{S}_{jl} симетрично ($\mathfrak{S}_{jl} = \mathfrak{S}_{lj}$), а тада је и трансформација таласићима је самоадјунгован оператор. Познато је да су самоадјунговани оператори пројекције уствари оператори ортогоналне пројекције, па је P_{M_T} ортогонална пројекција $(L^2)^{\mathbb{Z}}$ на M_T .

Оператор P_{Γ} пројектује низ $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M$ на његов најближи низ $(h_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in \Gamma$ у односу на норму из M . Овај оператор се имплементира тако што се додаје део-по-део експоненцијална крива на сваку функцију низа који се пројектује на Γ .

Грешка између елемента из M и елемента из Γ може се представити као

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\varepsilon_j\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{d\varepsilon_j}{dx} \right\|^2 \quad (4.8)$$

где је

$$\varepsilon_j(x) = h_j(x) - g_j(x) \quad (4.9)$$

и грешка се мери у односу на меру простора M .

Треба да нађемо $h_j(x)$ тако да је ова грешка минимална. Да бисмо минимизовали ову суму, минимизујемо одвојено сваки од сабирака

$$\|\varepsilon_j\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{d\varepsilon_j}{dx} \right\|^2 \quad (4.10)$$

Нека су x_0 и x_1 позиције два узастопна локална екстрема $W^j f(x)$, таласна трансформације улазног сигнала f . Пошто је $(h_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in \Gamma$, то је

$$\begin{cases} h_j(x_0) = W^j f(x_0) \\ h_j(x_1) = W^j f(x_1), \end{cases} \quad (4.11)$$

а одатле је

$$\begin{cases} \varepsilon_j(x_0) = W^j f(x_0) - g_j(x_0) \\ \varepsilon_j(x_1) = W^j f(x_1) - g_j(x_1) \end{cases} \quad (4.12)$$

Између две позиције два узастопна локална екстрема x_0 и x_1 , проблем минимизације грешке између елемената из M и елемената из Γ је еквивалентан проблему минимизације

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(|\varepsilon_j(x)|^2 + 2^{2j} \left| \frac{d\varepsilon_j(x)}{dx} \right|^2 \right) dx \quad (4.13)$$

Ојлерова једначина за овај проблем је

$$\varepsilon_j(x) - 2^{2j} \frac{d^2 \varepsilon_j(x)}{dx^2} = 0 \quad (4.14)$$

за $x \in [x_0, x_1]$, а из варијационог рачуна налазимо да је решење облика

$$\varepsilon_j(x) = \alpha e^{x2^{-j}} + \beta e^{-x2^{-j}}. \quad (4.15)$$

Решење мора да задовољава граничне услове у x_0 и x_1 , дакле мора да важи

$$\begin{bmatrix} e^{x_0 2^{-j}} & e^{-x_0 2^{-j}} \\ e^{x_1 2^{-j}} & e^{-x_1 2^{-j}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^j f(x_0) - g_j(x_0) \\ W^j f(x_1) - g_j(x_1) \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

За сваку скалу j и за сваке две узастопне позиције локалних екстремума x_0 и оператор P_Γ додаје функцији $g_j(x)$ грешку $\varepsilon_j(x)$ која је функција шест аргумената: x_0 , x_1 , $W^j f(x_0)$, $W^j f(x_1)$, $g_j(x_0)$, and $g_j(x_1)$. На тај начин, P_Γ пројектује $(g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M$ на најближи елемент $(h_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in \Gamma$ у односу на норму из M .

Нека је $P = P_{M_T} \circ P_\Gamma$ алтернирајућа пројекција на оба простора (пројекција припада сваком од ова два простора) и нека је $P^{(n)}$ оператор који представља n пута примењен оператор P . Пошто је Γ афини простор и M_T Хилбертов простор, то важи да је за сваки низ функција $X = (g_j(x))_{j \in \mathbb{Z}} \in M$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P^{(n)} X = P_\Lambda X. \quad (4.17)$$

Другим речима, алтернирајуће пројекције на Γ и M_T конвергирају пројекцији на жељени простор $\Lambda = M_T \cap \Gamma$ за било коју почетну тачку X простора M .

Ако је X нула-елемент простора M , тј. $g_j(x) = 0$ за свако $j \in \mathbb{Z}$, тада алтернирајуће пројекције конвергирају ка елементу простора Λ чија је норма минимална.

4.5. Таласић за детекцију ивица

4.5.1. Конструкција таласића

Изведимо класу таласића који се могу користити за брзу имплементацију таласне трансформације коју су за то користили и Малат и Џонг у [11]. Прво ћемо одабрати функцију скалирања $\varphi(x)$, а онда ћемо извести формуле за таласић и таласић реконструкције који јој одговарају.

Подсетимо се да Фуријеова трансформација функције скалирања може да се напише као производ:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} H\left(\frac{\omega}{2^p}\right) \quad (4.18)$$

где је $H(\omega)$ 2π -периодична диференцијабилна функција таква да $|H(0)| = 1$.

Дефинишемо таласић $\psi(x)$ чија је Фуријеова трансформација $\hat{\psi}(x)$ облика

$$\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \quad (4.19)$$

где је $G(\omega)$ 2π -периодична функција.

Покушајмо да нађемо таласић реконструкције $\tilde{\psi}(x)$ тако да је

$$\hat{\tilde{\psi}}(2\omega) = K(\omega)\hat{\varphi}(\omega) \quad (4.20)$$

где је $K(\omega)$ 2π -периодична функција.

Сада треба да нађемо конкретно $H(\omega)$, $G(\omega)$ и $K(\omega)$ тако да важи услов савршене реконструкције

$$|H(\omega)|^2 + \overline{K(\omega)}G(\omega) = 1 \quad (4.21)$$

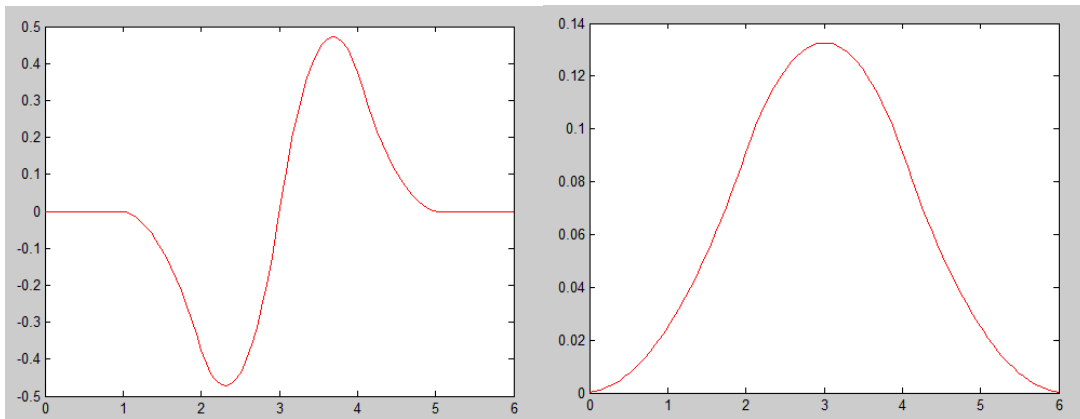
Узимајући у обзир изложени алгоритам за детекцију ивица, желимо да $\psi(x)$ буде једнако првом изводу функције скалирања $\varphi(x)$. Због услова допустивости захтевамо да $\hat{\psi}(\omega)$ има нулу у $\omega=0$. Пошто је $|\hat{\varphi}(0)| = 1$, закључујемо да и $G(\omega)$ мора имати нулу у $\omega=0$.

$H(\omega)$ бирамо тако да таласић $\psi(x)$ буде антисиметричан, да има мали носач и да буде регуларан што вишег реда. Фамилија функција $H(\omega)$, $G(\omega)$ и $K(\omega)$ које задовољавају ове особине су дате са

$$H(\omega) = e^{i\omega/2} (\cos(\omega/2))^{2n+1}, \quad (4.22)$$

$$G(\omega) = 4ie^{i\omega/2} \sin(\omega/2), \quad (4.23)$$

$$K(\omega) = \frac{1 - |H(\omega)|^2}{G(\omega)}. \quad (4.24)$$



Слика 9: Квадратни сплајн таласић којег су конструисали Малат и Џонг и одговарајућа функција скалирања

Из (4.18) и (4.19) налазимо Фуријеове трансформације

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{2n+1}, \quad (4.25)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = i\omega \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right)^{2n+2}. \quad (4.26)$$

За потребе овог алгоритма ћемо узети да је $2n+1=3$ тј. $n=1$. Стога је

$$H(\omega) = e^{i\omega/2} \left[\frac{1 + e^{i\omega}}{2e^{i\omega/2}} \right]^3 \quad \text{тј.} \quad H(\omega) = \frac{1}{8} (e^{-i\omega} + 3 + 3e^{i\omega} + 2e^{2i\omega}). \quad (4.27)$$

Одатле су коефицијенти функције h која се користи у алгоритму (3.43) и (3.44)

$$h_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad h_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad h_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}. \quad (4.28)$$

Слично је и за таласиће, некалирани резултати су дати у табели 1.

N	h	g	k
-3			0.0078125
-2			0.0546875
-1	0.125		0.171875
0	0.375	-2.0	-0.171875
1	0.375	2.0	-0.0546875
2	0.125		-0.0078125

Табела 1: коефицијенти фреквенцијског одзива филтара

4.5.2. Алгоритам за трансформацију

Малат и Џонг су у раду [11] навели псеудо код за имплементацију диадске дискретне таласне трансформације. На сваком нивоу j , улазни сигнал се разлаже на детаље $W^j f$ и апроксимацију $S^j f$. Коефицијенти детаља одговарају високим фреквенцијама док коефицијенти апроксимације одговарају ниским фреквенцијама сигнала.

Псеудо код алгоритма за трансформацију којег су предложили Малат и Џонг је следећи:

```

j = J
while (j >= J)
{
     $W^j f = \frac{1}{\lambda_j} \cdot S^{j+1} f * G_{j+1}$ 
     $S^j f = S^{j+1} f * H_{j+1}$ 
    j = j - 1
}

```

У изложеном алгоритму је са J обележен укупан број нивоа декомпозиције који је ограничен дужином улазног сигнала. Филтри H и G су дискретни филтри који карактеришу базисни таласић ψ и то такви да је H нискофреквенцијски (low-pass) филтар, а G је високофреквенцијски (high-pass) филтар.

Табела 1 садржи коефицијенте за филтре H и G . Да би се добили коефицијенти апроксимације $S^j f$, врши се конволуција сигнала коефицијентима филтра H , док се за добијање коефицијената таласића $W^j f$ врши конволуција са коефицијентима филтра G .

У алгоритму су коришћене трансформисане верзије H_j и G_j оригиналних филтара, такве да је између свака два коефицијента оригиналног филтра налази $2^j - 1$ нула. С обзиром на то да примењујемо дискретну конволуцију, треба водити рачуна о крајевима сигнала. Како бисмо и на крајевима сигнала добили праве коефицијенте, продужујемо сигнал периодично или симетрично.

Екстремна вредност коефицијената таласића треба да има исте вредности на свим диадским скалама [11], али због дискретизације то није случај. Због тога се при реконструкцији користе константе λ_j које компензују овај ефекат.

j	λ_j
1	1.50
2	1.12
3	1.03
4	1.01
5	1.00

Табела 2: Константа λ

4.5.3. Алгоритам за реконструкцију

Инверзна таласна трансформација реконструише оригинални сигнал из коефицијената његове дискретне таласне трансформације. Сигнал $S^{j-1}f$ се реконструише из $S^j f$ и $W^j f$. Алгоритам којег су предложили Малат и Џонг представљен је следећим псеудо-кодом:

```

j = 0
while (j < J)
{
     $S^{j+1}f = \lambda_j \cdot W^j f * K_j + S^j f * H_j$ 
    j = j + 1
}

```


5. Имплементирани алгоритам

Идеја је да из сигнала снимљених на грудном кошу нађемо локације пикова ЕКГ-а мајке тј. ивице мајчиног ЕКГ-а, а да затим те пикове екстрахујемо из сигнала снимљеног на абдомену. Тако ће нам из композитног сигнала остати само фетални пикови тј. ивице феталног сигнала, а показали смо како се из њих реконструише улазни сигнал.

Да бисмо одредили позиције локалних екстремума који одговарају мајчином ЕКГ-у посматрамо сигнале прикупљене на грудном кошу мајке. Издвајање ЕКГ сигнала мајке радимо на следећи начин:

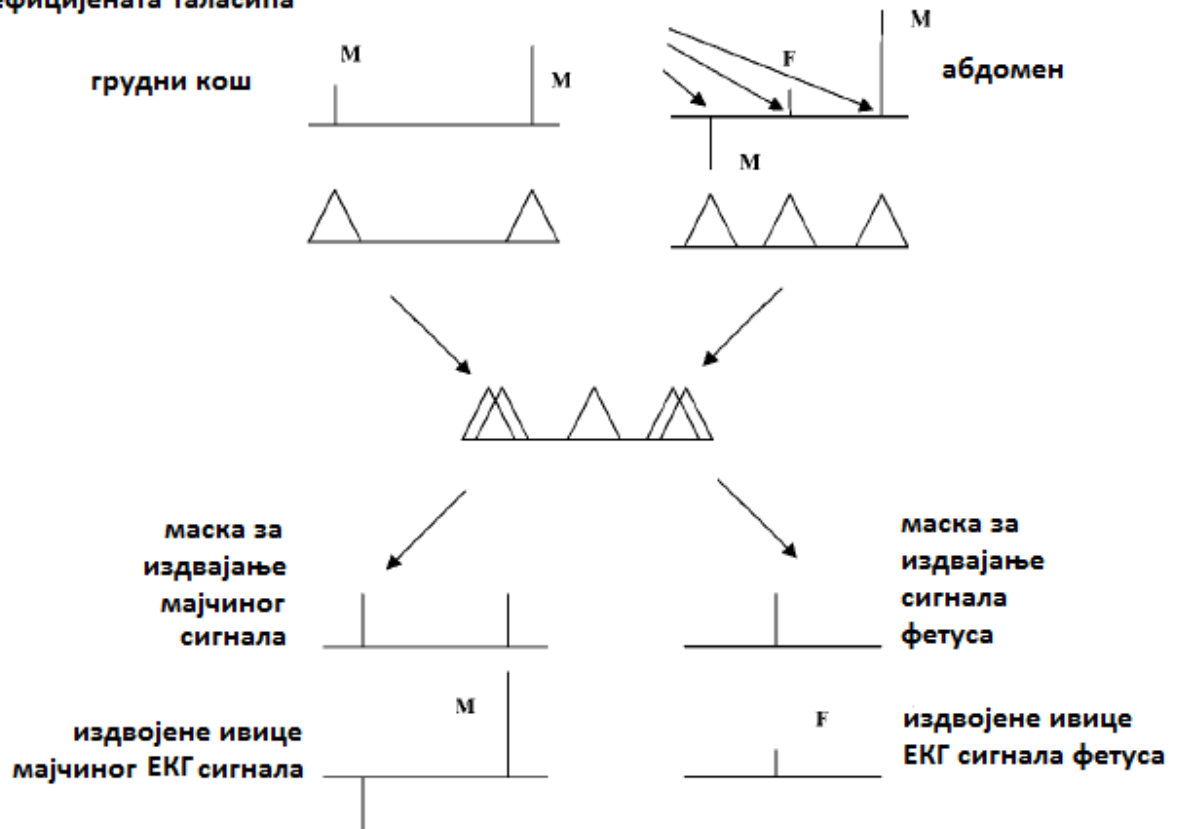
1. извршимо таласу трансформацију сигнала снимљених на грудном кошу и абдомену
2. нађемо локалне екстремуме коефицијената таласића, запамтимо њихове локације и вредности
3. око сваке од тих локација сигнала са грудног коша направимо троугаону функцију (са врхом на позицији саме локације и ширине која зависи од скале)
4. правимо „маску“ која служи за издвајање мајчиног ЕКГ-а из композитног сигнала
5. из композитног сигнала снимљеног на абдомену уклонимо максимуме модула који припадају мајчином сигналу
6. реконструишемо коефицијенте таласића феталног ЕКГ-а
7. реконструишемо фетални ЕКГ инверзном трансформацијом таласићима

Појаснимо боље корак 4. Уведимо дводимензионалне функције $\mu^c(2^j, n)$ за сваки сигнал са грудног коша $c = 1, \dots, p$ и $\mu^a(2^j, n)$ за сваки абдоменски сигнал. Ове функције се састоје од троугаоних делова чије позиције врхова одговарају позицијама екстремних вредности коефицијената таласића. Усредњене локације екстремних вредности за мајчин сигнал се могу израчунати

$$\mu^c(2^j, n) = \bigcup_{c=1}^p \mu^c(2^j, n) \text{ за } 1 \leq j \leq \log_2(N) \quad (5.1)$$

где је N дужина сигнала.

**екстремне вредности
коэффицијената таласића**



Слика 10: Креирање маски

Функцију $\mu^c(2^j, n)$ користимо да бисмо издвојили екстремне вредности мајчиног ЕКГ-а из композитног сигнала. Да бисмо то извели формирамо маску $mask M_m$

$$M_m(2^j, n) = \begin{cases} \mu^c(2^j, n) \cap \mu^a(2^j, n), \\ 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

На сличан начин дефинишемо феталну маску $m_{2^j}^l$

$$M_f(2^j, n) = \begin{cases} 1 - M_m(2^j, m_{2^j}^l), & \text{за } 1 \leq j \leq \log_2(N) \\ 0. & \end{cases} \quad (5.3)$$

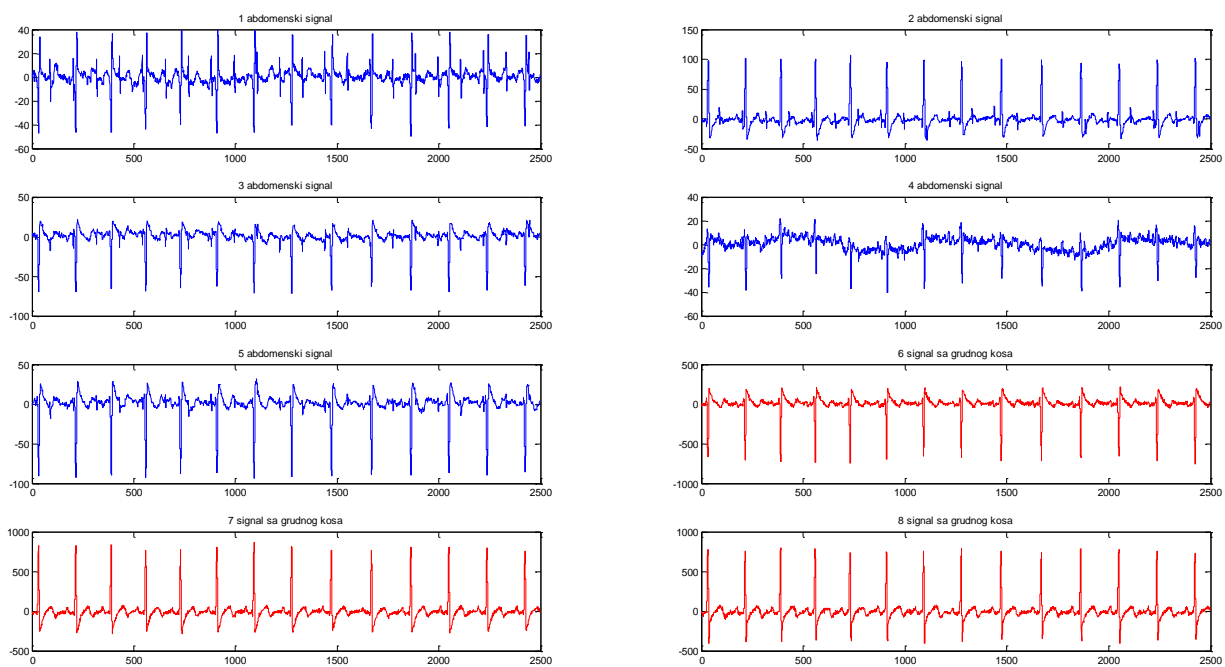
Максимуми модула композитног сигнала $W_a(2^j, m_{2^j}^l)$ су унија оних који припадају феталном ЕКГ-у $W_f(2^j, m_{2^j}^l)$ и оних који припадају мајчином ЕКГ-у $W_m(2^j, m_{2^j}^l)$, а ови се могу издвојити на следећи начин:

$$W_m(2^j, m_{2^j}^l) = M_m(2^j, m_{2^j}^l) \times W_a(2^j, m_{2^j}^l), \quad (5.4)$$

$$W_f(2^j, m_{2^j}^l) = M_f(2^j, m_{2^j}^l) \times W_a(2^j, m_{2^j}^l). \quad (5.5)$$

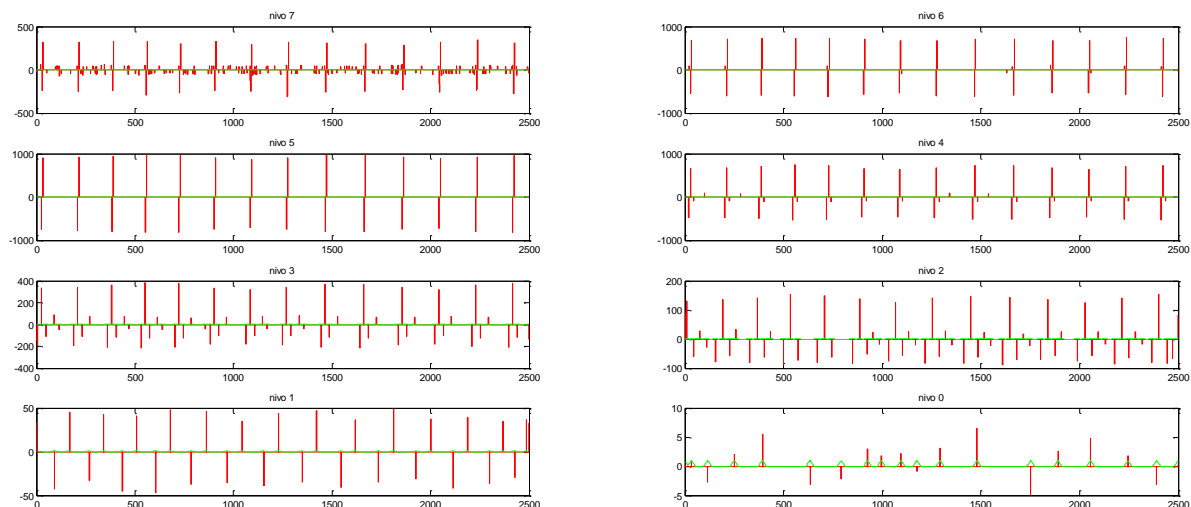
5.1 Резултати

MATLAB код за имплементирани алгоритам се може наћи у додатку 1 на крају рада. Као улазни податак узет је сигнал са сајта <http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/daisy/daisydata.html>. Сигнал је снимљен тако што је 5 диода постављено на абдомен мајке (плава боја) и 3 диоде су постављене на грудни кош мајке (црвена боја). Оригинални сигнали су приказани на слици 11.

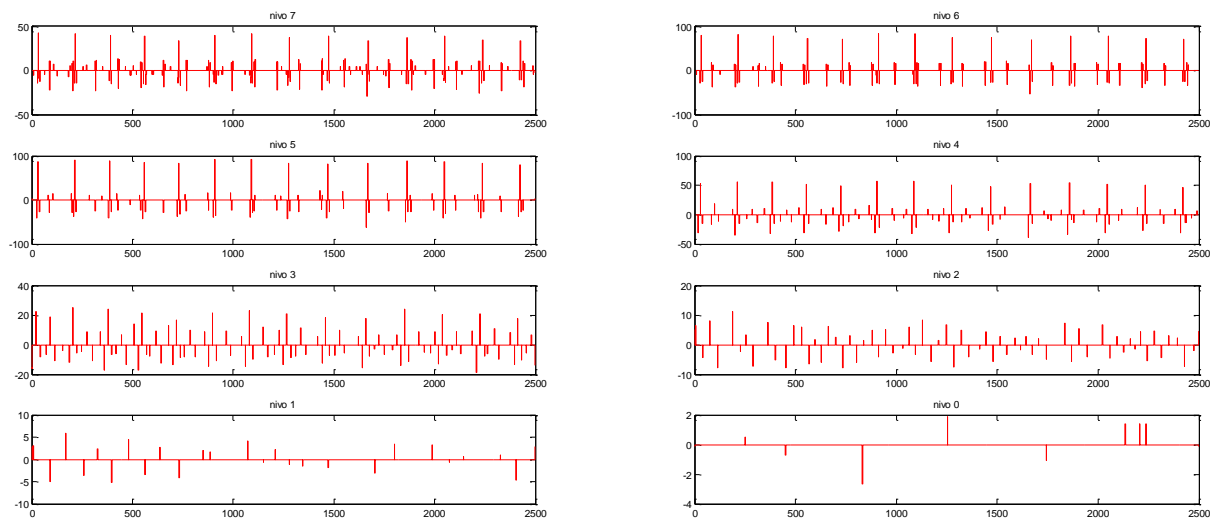


Слика 11. Оригинални сигнал

Екстремне вредности коефицијената таласића на различитим нивоима мултирезолуције за један абдоменски (1) и један торастички сигнал (6) су на следећим сликама.

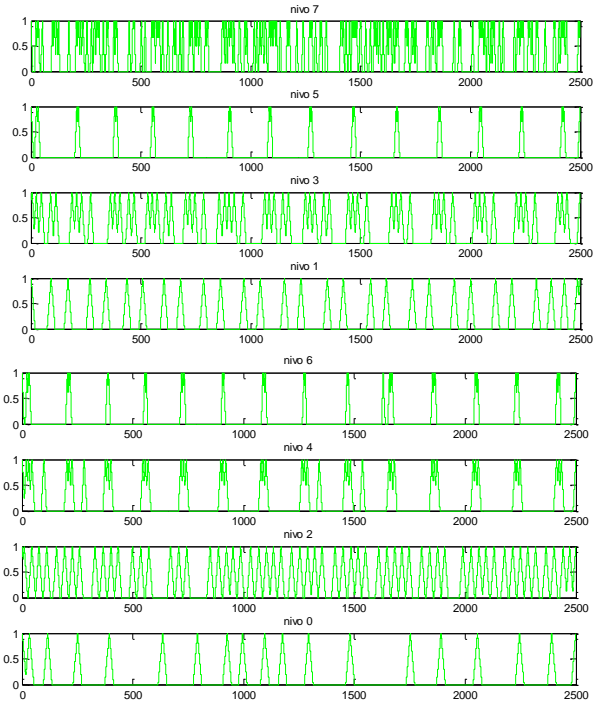


Слика 12. Локалне екстремне вредности коефицијената таласића абдоменског сигнала на различитим нивоима мултирезолуције



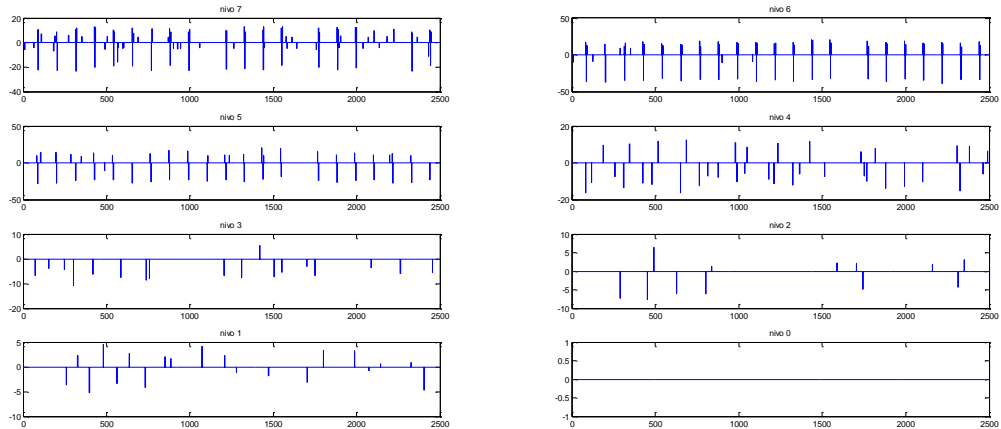
Слика 13. Локалне екстремне вредности коефицијената таласића сигнала са грудног коша на различитим нивоима мултирезолуције

Пример „троугаоне“ функције од којих се формира маска за матерински сигнал дата је на следећој слици (сигнал б).



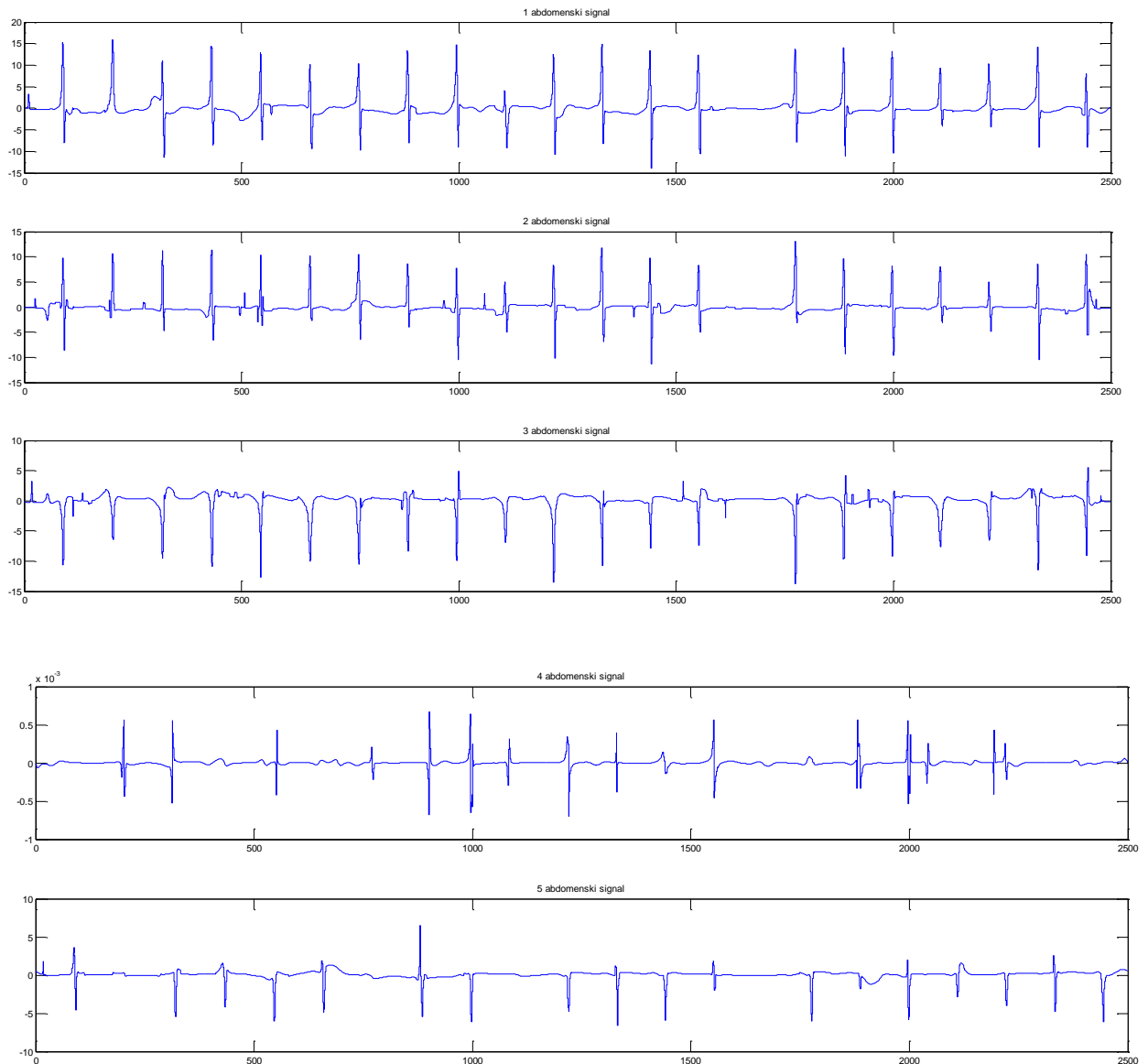
Слика 14. „Троугаона“ функција сигнала са грудног коша б на различитим нивоима мултирезолуције

На следећој слици су локације и интензитети ивица који припадају феталном ЕКГ-у за први абдоменски сигнал.



Слика 15. Локалне екстремне вредности коефицијента таласића сигнала са грудног коша које припадају феталном ЕКГ-у на различитим нивоима мултирезолуције

Примећује се да су ови графици за торастичке сигнале увек једнаки нули, тј. у торастичким сигнаlima није детектован ниједан пик који припада фетусу. Коначно, реконструисани сигнал са абдоменских диода су приказани на следећој слици.



Слика 16. Екстрахован фетални ЕКГ

Квалитет издвојеног сигнала умногоме зависи од положаја диоде, шума, некада узрок може бити и квар диоде претпостављам да је то случај са диодом 5. Око 200-те вредности на x-оси се мајчин и бебин откуцај срца преклапају (дешавају у исто време), па је резултујући сигнал са неких диода у том периоду замућен.

6. Закључак

Имплементирани алгоритам се састоји од неколико алгоритама: таласна декомпозиција, издвајање ивица сигнала, комбиновање сигнала са различитих електрода, издвајање одговарајућих ивица, реконструкција из ивица, таласна реконструкција. За таласну трансформацију је конструисан посебан таласић за који се сматра да има пожељне карактеристике. Поред тога, описане су и математичке основе таласне трансформације, доказано је да је описана процедура изводљива и да се резултујући сигнал може сматрати ЕКГ сигналом фетуса.

Добре перформансе приказаног алгоритма су постигнуте пре свега коришћењем робусних карактеристика ЕКГ сигнала као што су његове сингуларне тачке. Још једна предност овог алгоритма је то што не захтева никакве претпоставке о улазном сигналу и нису му потребни други улазни подаци осим самог сигнала.

Резултати приказани у раду показују да се овим алгоритмом може успешно екстраховати фетални ЕКГ из мајчиног. На основу резултата, лекари су у могућности да одреде број откуцаја срца и да уоче најјаче пикове (S и R).

Алгоритам је релативно успешно издвојио фетални ЕКГ чак и из сигнала који је садржао истовремено и нискофреквенцијски и високофреквенцијски шум, али се чишћење од шума и даље може унапређивати, на пример изучавајући очекиване фреквенције које се јављају у феталном ЕКГ-у како бисмо били сигурни да уклањањем шума нисмо уклонили компоненте феталног ЕКГ-а. Такође, алгоритам се није добро показао када се откуцаји срца бебе и мајке преклапају. Овај проблем би се могао решити бољим алгоритмом за упоређивање сличности ивица на различитим скалама.

7. Додатак

Функција која позива функције за екстраховање и графичко представљање феталног ЕКГ-а дата је следећим кодом.

```
function EkstrakcijaFetalnogECGSignal(a(signal, brojNivoa)
    % Funkcija ekstrahuje FECG iz signala koji se sastoji od 5 signala
    % snimljenih na abdomenu majke i 3 signala snimljenih na grudnom
    % kosu. Prvo se iz signala sa grudnog kosa nadju ivice signala
koriscenjem
    % kvadratnog-splajn talsica ciji je grafik prikazan na prvoj slici,
    % zatim se izdvoje ivice koje pripadaju MECG, ostale ivice pripadaju
    % FECG, konacno, FECG se dobija rekonstruisanjem iz ivica koje mu
    % pripadaju (iz abdomenskih signala).
    %
    % signal    - je matrica ciju prvu kolonu cine vremenski trenuci, a
ostale
    %
    %           kolono su signali (5 abdomenskih i 3 sa grudnog kosa)
    % brojNivoa - broj nivoa multirezolucije pri transformaciji talasicima
    %
    % poziv: EkstrakcijaFetalnogECGSignal (FOETAL_ECG, 7)

s = size (signal);
n = s(1);
%n=1024;

%----- CRTANJE TALASICA I FUNKCIJE SKALIRANJA -----
H = [0.1250    0.3750    0.3750    0.1250]; %frekvencijski odziv filtra
pridruyenog funkciji skaliranja
G = [0    -2    2    0]; %frekvencijski odziv filtra pridruyenog
talasicu
talasic(H,G,5,0,1,1, 'Kvadratni splajn talasic');
fja_skaliranja(H,5,0,1,1, 'Funkcija skaliranja');

%----- UCITAVANJE SIGNALA -----
% Z0 = FOETAL_ECG(1:n,1); %vremenski trenuci
Z1 = signal(1:n,2); %abdomenski signal
Z2 = signal(1:n,3); %abdomenski signal
Z3 = signal(1:n,4); %abdomenski signal
Z4 = signal(1:n,5); %abdomenski signal
Z5 = signal(1:n,6); %abdomenski signal
Z6 = signal(1:n,7); %signal sa grudnog kosa
Z7 = signal(1:n,8); %signal sa grudnog kosa
Z8 = signal(1:n,9); %signal sa grudnog kosa

Z4 = ZaravnjivanjeGausovimFilterom(Z4);

figure('Name','Originalni signal');
hold on;
```

```

X = (0:1:n-1);
subplot(4,2,1),stairs(X,Z1,'b'),title('1 abdomenski signal');
subplot(4,2,2),stairs(X,Z2,'b'),title('2 abdomenski signal');
subplot(4,2,3),stairs(X,Z3,'b'),title('3 abdomenski signal');
subplot(4,2,4),stairs(X,Z4,'b'),title('4 abdomenski signal');
subplot(4,2,5),stairs(X,Z5,'b'),title('5 abdomenski signal');
subplot(4,2,6),stairs(X,Z6,'r'),title('6 signal sa grudnog kosa');
subplot(4,2,7),stairs(X,Z7,'r'),title('7 signal sa grudnog kosa');
subplot(4,2,8),stairs(X,Z8,'r'),title('8 signal sa grudnog kosa');
hold off;

%----- DEKOMPOZICIJA SIGNALA -----
% ktt - koeficijenti talasne transformacije
ktt1 = QuadraticSplineDekompozicija(Z1, brojNivoa);
ktt2 = QuadraticSplineDekompozicija(Z2, brojNivoa);
ktt3 = QuadraticSplineDekompozicija(Z3, brojNivoa);
ktt4 = QuadraticSplineDekompozicija(Z4, brojNivoa);
ktt5 = QuadraticSplineDekompozicija(Z5, brojNivoa);
ktt6 = QuadraticSplineDekompozicija(Z6, brojNivoa);
ktt7 = QuadraticSplineDekompozicija(Z7, brojNivoa);
ktt8 = QuadraticSplineDekompozicija(Z8, brojNivoa);

%----- IZDVAJANJE IVICA SIGNALA -----
% nalazenje lokalnih ekstremnih vrednosti koeficijenata talasica
iviceSignala1 = ModulusMaxima(ktt1,10);
iviceSignala2 = ModulusMaxima(ktt2,10);
iviceSignala3 = ModulusMaxima(ktt3,10);
iviceSignala4 = ModulusMaxima(ktt4,10);
iviceSignala5 = ModulusMaxima(ktt5,10);
iviceSignala6 = ModulusMaxima(ktt6,10);
iviceSignala7 = ModulusMaxima(ktt7,10);
iviceSignala8 = ModulusMaxima(ktt8,10);

trougaonaFja6 = TrougaonaFunkcija(iviceSignala6);
trougaonaFja7 = TrougaonaFunkcija(iviceSignala7);
trougaonaFja8 = TrougaonaFunkcija(iviceSignala8);

CrtanjeGrafika('Ivice abdomenskog signala 1', ktt1, iviceSignala1);
CrtanjeGrafika('Ivice abdomenskog signala 2', ktt2, iviceSignala2);
CrtanjeGrafika('Ivice abdomenskog signala 3', ktt3, iviceSignala3);
CrtanjeGrafika('Ivice abdomenskog signala 4', ktt4, iviceSignala4);
CrtanjeGrafika('Ivice abdomenskog signala 5', ktt5, iviceSignala5);
CrtanjeGrafika('Ivice signala sa grudnog kosa 6', ktt6, iviceSignala6,
trougaonaFja6);
CrtanjeGrafika('Ivice signala sa grudnog kosa 7', ktt7, iviceSignala7,
trougaonaFja7);
CrtanjeGrafika('Ivice signala sa grudnog kosa 8', ktt8, iviceSignala8,
trougaonaFja8);

brojNivoa = brojNivoa + 1;

%----- PRAVLJENJE MASKI -----
% iz signala sa grudnog kosa izdvajamo ivice MEGG-a
MECGmask = zeros(n, brojNivoa);
for i = 1 : brojNivoa
    for j= 1 : n

```

```

        a=trougaonaFja6(j,i);
        b=trougaonaFja7(j,i);
        c=trougaonaFja8(j,i);
        if (a > 0.85 || b > 0.85 || c > 0.85)
            MEGmask(j,i) = 1 ;
        else
            MEGmask(j,i) = mean([a;b;c]) ;
        end
    end
end

figure('Name','Maska za izdvajanje MEGmask-a');
hold on;
for j = 1:brojNivoa

subplot(ceil((brojNivoa+2)/2),2,j),stairs(X,MEGmask(:,j)','b'),title(['nivo
',num2str(j-1)]);
    end
    hold off;

%iz ivica abdomenskih signala izdvajamo one koje pripadaju FECCG
for i = 1 : brojNivoa - 1
    for j= 1 : n
        if (MEGmask(j,i) >= 0.5)
            iviceSignala1(j,i) = 0 ;
            iviceSignala2(j,i) = 0 ;
            iviceSignala3(j,i) = 0 ;
            iviceSignala4(j,i) = 0 ;
            iviceSignala5(j,i) = 0 ;
        end
    end
end

iviceSignala1(:, brojNivoa) = zeros(1, n)';
iviceSignala2(:, brojNivoa) = zeros(1, n)';
iviceSignala3(:, brojNivoa) = zeros(1, n)';
iviceSignala4(:, brojNivoa) = zeros(1, n)';
iviceSignala5(:, brojNivoa) = zeros(1, n)';

CrtanjeJednogGrafika(iviceSignala1, 'Modulus Maxima abdomenskog signala
1');
CrtanjeJednogGrafika(iviceSignala2, 'Modulus Maxima abdomenskog signala
2');
CrtanjeJednogGrafika(iviceSignala3, 'Modulus Maxima abdomenskog signala
3');
CrtanjeJednogGrafika(iviceSignala4, 'Modulus Maxima abdomenskog signala
4');
CrtanjeJednogGrafika(iviceSignala5, 'Modulus Maxima abdomenskog signala
5');

%----- REKONSTRUKCIJA KOEFICIJENATA TALASICA -----
-----
% rekonstrukcija iz ivica
signal1 = ModulusMaximaRekonstrukcija(iviceSignala1);
signal2 = ModulusMaximaRekonstrukcija(iviceSignala2);
signal3 = ModulusMaximaRekonstrukcija(iviceSignala3);

```

```

signal4 = ModulusMaximaRekonstrukcija(iviceSignala4);
signal5 = ModulusMaximaRekonstrukcija(iviceSignala5);

%----- REKONSTRUKCIJA -----
% rekostrukcija iz koeficijenata talasica
rekonstruisani1 = QuadraticSplineRekonstrukcija(signal1);
rekonstruisani2 = QuadraticSplineRekonstrukcija(signal2);
rekonstruisani3 = QuadraticSplineRekonstrukcija(signal3);
rekonstruisani4 = QuadraticSplineRekonstrukcija(signal4);
rekonstruisani5 = QuadraticSplineRekonstrukcija(signal5);

CrtanjeJednogGrafika(rekonstruisani1, 'FECG 1');
CrtanjeJednogGrafika(rekonstruisani2, 'FECG 2');
CrtanjeJednogGrafika(rekonstruisani3, 'FECG 3');
CrtanjeJednogGrafika(rekonstruisani4, 'FECG 4');
CrtanjeJednogGrafika(rekonstruisani5, 'FECG 5');

end

```

Следећа функција врши таласну трансформацију сигнала.

```

function W = QuadraticSplineDekompozicija(signal, J)
% Funkcija racuna transformaciju kvadratnim-splajn talasicem.
%
% signal - signal koji treba transformisati
% j      - broj nivoa talasica (dodacemo jos jedan nivo za aproksimaciju
%          funkcijom skaliranja)
%
% Rezultat je matrica cija prva kolona predstavlja najsitnije detalje,
% ostale kolone su koeficijenti talasica na nizim nivoima,
% osim poslednje kolone koja predstavlja koeficijente na najni
%
%
sizeS = size(signal);
N = sizeS(1);
W = zeros(N, J+1);
lambdaVektor = [1.50 1.12 1.03 1.01];

j = 0;
while j<J
    p = 2^j-1;
    lambda = 1;
    if (j<4)
        lambda = lambdaVektor(j+1);
    end
end

```

```

for i = 1:N
    W(i, j+1) = (-2 * signal(i) + 2*signal(mod(i+p, N)+1))/lambda;
end

s = zeros(N, 1);
for i = 1:N
    s(i) = 0.125 * signal(mod(i-p-2, N)+1)+...
          0.375 * signal(i) + ...
          0.375 * signal(mod (i+p, N)+1)+...
          0.125 * signal(mod (i+p * 2 +1, N)+1);
end
signal = s;
j = j+1;
end
W(:, J+1)=s;
end

```

Реконструкцију сигнала из његове таласне трансформације врши следећа функција.

```

function [S] = QuadraticSplineRekonstrukcija (W)
[N j] = size(W);
S = W(:, j);
j = j-1;

lambdaTable = [1.50 1.12 1.03 1.01]';
while j>0
    p = 2^(j-1) -1;
    lambda = 1;
    if j<4
        lambda = lambdaTable(j);
    end

    K = zeros(N, 1);
    for i = 1:N
        K(i) = 0.0078125 * W( mod(i - 3 * p - 4, N) + 1, j) + ...
              0.054685 * W( mod(i - 2 * p - 3, N) + 1, j) + ...
              0.171875 * W( mod(i - 1 * p - 2, N) + 1, j) + ...
              -0.171875 * W( i, j) + ...
              -0.054685 * W( mod(i + 1 * p - 0, N) + 1, j) + ...
              -0.0078125* W( mod(i + 2 * p + 1, N) + 1, j);
    end

    H = zeros(N, 1);
    for i = 1:N
        H(i) = 0.125 * S(mod(i - 2 * p - 3, N) + 1) + ...
              0.325 * S(mod(i - 1 * p - 2, N) + 1) + ...
              0.325 * S(i) + ...
              0.125 * S(mod(i + 1 * p - 0, N) + 1);
    end

    S = K * lambda + H;
    j = j-1;
end

```

end

Следећа функција се користи за детектовање ивица сигнала.

```
function ivice = ModulusMaxima(a,par)
% Nalazi lokalne maksimume apsolutnih vrednosti matrice a po kolonama.
% Parametar par se koristi za odredjivanje praga vrednosti ispod koje ce se
% zanemarivati lokalni maksimumi apsolutnih vrednosti.

sz = size(a);
brojNivoa = sz(2);
n = sz(1);

ivice = zeros(sz);

for k=1:brojNivoa
    for i = 1:n
        if (i == 1)
            ivice(i,k) = a(i,k);
        else
            if (i == n)
                ivice(i,k) = a(i,k);
            else
                prag = max(abs(a(:,k)))/par;
                localmax = ...
                    (((a(i,k) > a(i+1,k) & a(i,k) >= a(i-1,k))...
                     | (a(i,k) > a(i+1,k) & a(i,k) >= a(i-1,k))...
                     & a(i,k) > prag & a(i,k) >= 0) | ...
                     ((a(i,k) < a(i+1,k) & a(i,k) <= a(i-1,k))...
                     | (a(i,k) < a(i+1,k) & a(i,k) <= a(i-1,k))...
                     & abs(a(i,k)) > prag & a(i,k) < 0);
                ivice(i,k) = localmax * a(i,k);
            end
        end
    end
end
end
```

Следећа функција реконструише сигнал из његових ивица.

```
function signal = ModulusMaximaRekonstrukcija (signal)
% Funkcija racuna rekonstrukciju signala cije su vrednosti i lokacije ivica
% na razlicitim nivoima date kao ulazni parametar. Svaka kolona ulaznog
% signala je jedan nivo.

s = size(signal);
e = 2.718281828459045; % Ojlerov broj

J = s(2);
n = s(1);
```

```

Xosa = (0:1:n)./100;

epsFunkcija = @(x, alfa, beta, e, j) (alfa * e^(2^(-j)*x) + beta * e^(-2^(-
j)*x));

%----- NALAZENJE LOKACIJA IVICA ZA SVAKI NIVO -----
nenule = cell(n,1);
vrednosti = cell(n,1);
for j = J:-1:1
    nenuleJ = find(signal(:, J-j+1));
    nenule(j,1) = {nenuleJ};
    vrednostiJ = zeros(size(nenuleJ));
    for k= 1:length(nenuleJ)
        vrednostiJ(k) = signal(nenuleJ(k), J-j+1);
    end
    vrednosti(j,1) = {vrednostiJ};
end
l = 1;
%---- IMPLEMENTACIJA OPERATORA PROJEKCIJE P = Pv o Pg (pogledati teorijski
deo rada)-----
rekonstruisaniP = zeros(size(signal)); %rekonstruisani signal iz prethodne
iteracije
while (rastojanje (rekonstruisaniP, signal) > 0.01)
    if (l > 1)
        rekonstruisaniP = signal;
    end
    l = l+1;
    rekonstruisani = []; %u ovoj promenljivoj cuvamo rekonstrukciju iz
trenutne iteracije

%----- operator projekcije na G tj. Pg (pogledati teorijski deo rada)-----
---
for j = J:-1:1
    %izdvajamo kolonu signala koja predstavlja trenutni nivo
    rekonstruisaniPJ = rekonstruisaniP(:,j);

    %lokacije ivica trenutnog nivoua su u vektoru:
    nenuleJ = nenule(j,1);
    nenuleJ = nenuleJ{1};

    %vrednosti ivica trenutnog nivoua su u vektoru:
    vrednostiJ = vrednosti(j,1);
    vrednostiJ = vrednostiJ{1};

    if (~isempty(nenuleJ))
        rekonstruisaniJ = zeros(1, nenuleJ(1));
        for k = 1:length(nenuleJ)-1
            %dve uzastopne ivice su:
            x0 = nenuleJ(k);
            x1 = nenuleJ(k+1);
            %vrednosti u tim dvema uzastopnim ivicama su:
            s0 = vrednostiJ(k);
            s1 = vrednostiJ(k+1);

            matrica = [e^(Xosa(x0)*2^(-j)) e^(-Xosa(x0)*2^(-j));...

```

```

        e^(Xosa(x1)*2^(-j)) e^(-Xosa(x1)*2^(-j))];

    c = (matrica)^(-1) * [s0-rekonstruisaniPJ(x0); s1-
rekonstruisaniPJ(x1)];
    alfa = c(1);
    beta = c(2);
    pomocnaFunkcija= @(x) epsFunkcija(x,alfa, beta, e, j);
    for i = x0:x1-1
        rekonstruisaniJ = [rekonstruisaniJ
rekonstruisaniPJ(i)+pomocnaFunkcija(Xosa(i))];
    end
    end
    rekonstruisaniJ = [rekonstruisaniJ zeros(1, n - nenuleJ(end))];
else
    rekonstruisaniJ = zeros(1, n);
end

rekonstruisani =[rekonstruisani; rekonstruisaniJ];
end
%----- operator projekcije na P tj Pv (pogledati teorijski deo rada)-----
--
    rekonstruisani = QuadraticSplineRekonstrukcija(rekonstruisani');
    signal = QuadraticSplineDekompozicija(rekonstruisani, J-1);
end
end

```

Заравњивање Гаусовим филтром врши се следећом функцијом.

```

function zaravnjeni = ZaravnjivanjeGausovimFilterom(signal,
duzinaGausovogFiltera, devijacijaGausovogFiltera)

if nargin == 1
    duzinaGausovogFiltera = 16;
    devijacijaGausovogFiltera = 0.7;
end
x = linspace(-duzinaGausovogFiltera / 2, duzinaGausovogFiltera / 2,
duzinaGausovogFiltera);
gausovFilter = exp(-x .^ 2 / (2 * devijacijaGausovogFiltera ^ 2));
gausovFilter = gausovFilter / sum (gausovFilter); % normalizovanje

zaravnjeni = conv (signal, gausovFilter, 'same');

end

```

Наредне две функције графички представљају улазне сигнале.

```

function CrtanjeGrafika(varargin)
%Funkcija crta dva ili tri razlicita signala koja su dekomponovana na nivoe
% i to tako sto se za svaki nivo crta jedna slika.
% Prvi parametar je naslov prozora,

```



```

% ostala dva ili tri parametra su signali.
% Plavi grafik predstavlja aproksimaciju signala na odredjenoj skali,
% crveni - vrednost i poziciju ivica,
% zeleni - trougaonu funkciju oko ivica.

naslovGrafika = varargin{1};
kkt = varargin{2};
iviceSignala = varargin{3};
if (nargin==4)
    trougaonaFja = varargin{4};
end

s = size(kkt);
brojNivoa = s(2);
n = s(1);
X = (0:1:n-1);

figure('Name',naslovGrafika);
hold on;
for j = 1:brojNivoa,
    w = kkt(1:n, j);
    v = iviceSignala(1:n, j);
    %subplot(ceil((brojNivoa+2)/2),2,j),stairs(X,w,'b'),title(['talasici:
nivo ',num2str(brojNivoa - j)]); hold;
    subplot(ceil((brojNivoa+2)/2),2,j),stairs(X,v,'r'),title(['nivo
',num2str(brojNivoa - j)]); hold;
    if (nargin == 4)
        t = trougaonaFja(1:n, j);
        subplot(ceil((brojNivoa+2)/2),2,j),stairs(X,t,'g'),title(['nivo
',num2str(brojNivoa - j)]);
    end
end
hold off;

end

function CrtanjeJednogGrafika(signal, naslovGrafika)

s = size(signal);
brojNivoa = s(2);
n = s(1);

figure('Name',naslovGrafika);
hold on;
for j = 1:brojNivoa,
    w = signal(1:n,j);
    X = (0:1:length(w) - 1)';
    if (brojNivoa > 1)
        subplot(ceil((brojNivoa+2)/2),2,j),stairs(X,w,'b'),title(['nivo
',num2str(brojNivoa - j)]);
    else
        if (brojNivoa == 1)

```

```

        plot(X, w, 'b');
    end
end
end
hold off;
end

function d = rastojanje (a, b)

sum = 0;
sa = size (a);
sb = size (b);
if (~isequal(sa,sb))
    msgID = 'rastojanje:incorrectSize';
    msg = 'Prosledjeni parametri su razlicitih velicina.';
    causeException = MException(msgID,msg);
    throw (causeException)
end

for i = 1:sa(1)
    for j = 1:sa(2)
        sum = sum + (a(i, j)-b(i, j))^2;
    end
end

sum = sqrt(sum/(sa(1)*sa(2)));

d = sum;
end

```

Следећа функција прави „троугаони“ сигнал од улазног сигнала.

```

function y = TrougaonaFunkcija(x)
% x je matrica ciji su grafici kolona oblika:
%
%   |
%   |_____
%   |
%
%
% Ova funkcija pravi novu matricu ciji su grafici kolona oblika
%
%   /\_____/\_____/\_____
%
% Sirina trouglova je proporcionalana rednom broju kolone vektora x.

s = size (x);
y = zeros(s);

for j= 1 : s(1,2)
    sirinaTrougla = 2*j-1;
    triangle = zeros(1, sirinaTrougla);
    step = 1/sirinaTrougla;
    for i = 1 : sirinaTrougla
        triangle(i) = step * i;
    end
end

```

```

end

for i = 1 : s(1,1)
    if (x(i,j) ~= 0 )
        y(i,j) = 1;
        for k = 1:sirinaTroughla-1
            if (i-k >= 1)
                y(i-k,j) = max(y(i-k,j), triangle(sirinaTroughla - k));
            end
            if (i+k <= s(1,1))
                y(i+k,j) = max(y(i+k,j), triangle(sirinaTroughla - k));
            end
        end
    end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end

```

У следеће две функције је имплементиран пирамидални алгоритам који је коришћен да би се нацртали графици функције скалирања и таласића.

```

function fja_scaliranja(c,J,T,S,a, naziv)
% Funkcija racuna vrednosti funkcije skaliranja na osnovu koeficijenata
% odziva pridruzenog filtra (piramidalnim algoritmom).
% c- koeficijenti odziva filtra , J-nivo, T-translacija, S-faktor skaliranja
N=length(c);

K=1;
for i=1:J
    K=2*K+N-2;
end
korak=(N-1)/(K-1);
A=zeros(J+1,K);

A(J+1,1)=1;

for j=J:-1:1
for l=1:K
v=ceil((l-N)/2);
y=floor((l-1)/2);
for k=v-1:y+1
if (l-2*(k-1)>0 & k>0 & l-2*(k-1)<=N & k<=K)
A(j,l)=A(j,l) + c(l-2*(k-1))*A(j+1,k);
end
end
end
end

fi=zeros(1,K);
for i=1:K
fi(i)=A(1,i)*2^(J/2);
end
end

```

```

%transliranje
x=(T:korak:N-1+T);

%skaliranje (skracivanje / proizvodavanje nosaca)
x=x.*(2^S);

fi=fi.*a;
    figure('Name',naziv);
    plot(x,fi,'r');
end

function talasic(c,d,J,T,S,b, naziv)
% Funkcija racuna vrednosti talasica na osnovu koeficijentat odziva filtra
% talasica i funkcije skaliranja (piramidalnim algoritmom).
%
% c- koeficijenti odziva filtra pridruzenog fji skaliranja
% d- koeficijenti odziva filtra pridruzenog talasicu
% J-nivo, T-translacija, S-faktor skaliranja
%
% poziv: talasic([1+sqrt(3) 3+sqrt(3) 3-sqrt(3) 1-sqrt(3)]./(4*sqrt(2)), [1-
sqrt(3) -3+sqrt(3) 3+sqrt(3) -1-sqrt(3)]./(4*sqrt(2)),4,1,2,1)

N=length(c);

%koliko tacaka K
K=1;
for i=1:J
    K=2*K+N-2;
end
korak=(N-1)/(K-1);

A=zeros(J+1,K);
B=zeros(J+1,K);
B(J+1,1)=1;

    for j=J:-1:1
        for l=1:K
            for k=1 : K
                if (1-2*(k-1)>0 && 1-2*(k-1)<=N)
                    A(j,l)=A(j,l) + c(1-2*(k-1))*A(j+1,k) + d(1-2*(k-1))*B(j+1,k);
                end
            end
        end
    end

fi=zeros(1,K);
for i=1:K
    fi(i)=A(1,i)*2^(J/2);
end

%transliranje
x=(T:korak:N-1+T);

```

```
%skaliranje (skracivanje / produzavanje nosaca)
x=x.*(2^S);
fi=fi.*b;
figure('Name',naziv);
plot(x,fi,'r');
end
```

```
function y = lshift(x)
    y = [ x( 2:length(x) ) x(1) ];
```

```
function y = rshift(x)

    n = length(x);
    y = [ x(n) x( 1: (n-1) )];
```

8. Литература

- [1] Барјактаровић Марко, Перформансе детектора ивица базираног на множењу wavelet коефицијената, http://www.telekomunikacije.rs/arhiva_brojeva/osmi_broj/mr_marko_barjaktarovic:_performanse_detektora_ivica_baziranog_na_mnodjenju_wavelet_koeficijenata.414.html
- [2] Datian, Y., Xuemei, O. (1996) Application of wavelet analysis in detection of fetal ECG. Engineering in Medicine and Biology Society. Bridging Disciplines for Biomedicine. Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE. Amsterdam. Netherlands; 31 October–3 November 1996. vol. 3. p. 1043–1044.
- [3] Daubechie, I., "The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis," To appear in Communications in pure and applied mathematics, 1988.
- [4] Daubechie, I., "Othonormal bases of compactly supported wavelets," subm. to IEEE Trans. on Information, Theory, Bell lab., 1987.
- [5] Echeverria, J. C., Ramirez, N., Pimentel, A.B., et al. (1996) Fetal QRS extraction based on wavelet analysis and pattern matching. Engineering in medicine and biology society. Bridging disciplines for biomedicine. Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE. Amsterdam. Netherlands; 31 October–3 November 1996. vol. 4. p. 1656–1657
- [6] Khamene Ali, Negahdaripour Shahriar, „A New Method for the Extraction of Fetal ECG from the Composite Abdominal Signal“, IEEE Transactions on Biomedical Engineering, VOL. 47, NO. 4 April, 2000
- [7] Canny, J., „A Computational Approach To Edge Detection“, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6):679–698, VOL.PAMI-8, NO. 6, November, 1986.

- [8] Kimmel R., Bruckstein A. M., “Regularized Laplacian Zero Crossings as Optimal Edge Integrators“ Department of Computer Science, Technion–Israel Institute of Technology, Technion City, Haifa 32000, Israel, September 12, 2001; Revised January 8, 2002; Accepted January 9, 2003
- [9] Claypoole Roger, Lewis Jim, Bhashyam Srikrishna, and Kelly Kevin, Image Morphing, <http://www.owl.net.rice.edu/~elec539/Projects97/morphjrks/laplacian.html>
- [10] Mallat Stephane, „Dyadic Wavelets Energy Zero-Crossings“, University of Pennsylvania ScholarlyCommons, jul 1988.
- [11] Mallat Stephane, Sifen Zhong, „Characterization of Signals from Multiscale Edges“, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, VOL. 14, NO. 7 July, 1992
- [12] Mallat Stephane, Wen Liang Hwang, „Singularity Detection and Processing with Wavelets“, IEEE Transactions on Information Theory, VOL. 14, NO. 7 July, 1992
- [13] Mallat Stephane, “Zero-Crossings of a Wavelet Transform“, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6):679–698, VOL.PAMI-8, NO. 6, November, 1986.
- [14] Meyer Yves, Robert D. Ryan, Stéphane Jaffard, “Wavelets: Tools for Science & Technology”, Society for Industrial Mathematics, 2001
- [15] Papadimitriou, S. , Gatzounas , D. , Papadopoulos, V., et al. (1996) Fetal heart rate signal denoising by processing the wavelet transform modulus maxima. Engineering in Medicine and Biology Society, Bridging Disciplines for Biomedicine. Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE. Amsterdam. Netherlands; 31 October– 3 November 1996. vol. 3. p. 1029–1030.
- [16] Радуновић Десанка, „Таласићи“, Академска мисао, Београд, 2005
- [17] Saladin, „Anatomy & Physiology: Unity of Form and Function“, The McGraw-Hill Companies, New York (2003)

[18] Sameni Reza, Gari D. Clifford, „A Review of Fetal ECG Signal Processing; Issues and Promising Directions

[19] Hasan MA, Reaz MBI, Ibrahimy MI, Hussain MS, Uddin J., “Detection and processing techniques of FECG signal for fetal monitoring”, Biological Procedures Online. 2009;11(1):263–295