УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ђорђе Баралић

ТОПОЛОГИЈА И КОМБИНАТОРИКА КВАЗИТОРУСНИХ МНОГОСТРУКОСТИ И К СТЕПЕНА

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Djordje Baralic

TOPOLOGY AND COMBINATORICS OF QUASITORIC MANIFOLODS AND THE POLYHEDRAL PRODUCT FUNCTORS

Doctoral thesis

Belgrade, 2013

Ментор:

др Раде Т. Живаљевић, научни саветник, Математички институт САНУ и редовни професор, Универзитет у Београду, Физички факултет

Чланови комисије:

академик Свјетлана Терзић, ЦАНУ и редовни професор, Универзитет Црне Горе, Природно-математички факултет у Подгорици

др Синиша Врећица, редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Владимир Грујић, доцент, Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Захвалност

Захваљујем се своме ментору, др Радету Живаљевићу на стрпљењу, труду, помоћи и константној подршци коју ми је пружио у току протеклих 5 година. Најзаслужнији је што је ова дисертација угледала светлост дана.

Посебно се захваљујем др Владимиру Грујићу на саветима, подршци и сарадњи током мојих докторских студија. Велико хвала члановима ЦГТА семинира и сјајном тиму који окупља; без њих се никада не би упознао са најлепшим световима математике.

Захваљујем се својој мајци која је такође много учинила својом љубављу, топлином и подршком да докторску дисертацију приведем крају. Хвала на свему и свим мојим драгим пријатељима: Марији, Ољи, породици Хајдин, Милошу, Игору, Здравку, Јоани, Дулету, Ани, Мири, Милану и колегама са Математичког института.

Посвета

*Ову дисертацију посвећујем човеку који је заслужен за моје прве математичке кораке - свом професору, **Зорану Васиљевићу Гукију**.*

„Топологија надахне душу, геометрија да снагу, а за све остало математика се сама побрине“.

РЕЗИМЕ

Предмет проучавања ове докторске дисертације су квазиторусне многострукости и K-степени. Ове тополошки веома занимљиве многострукости су уопштења торусних варијетета и предмет су проучавања многих математичких дисциплина: торусне геометрије, симплектичке геометрије, торусне топологије, алгебарске геометрије, алгебарске топологије, тополошке комбинаторике, теорије конвексних политопа, итд. У овој тези је акценат стављен на могућност да ове објекте проучавамо комбинаторним метходама, узимајући у обзир геометрију торусног дејства и комбинаторику простих политопа који представљају просторе орбита ових многострукости.

Објекти којима се бави ова дисертација су нашли примену како у математици, тако и у другим примењеним областима. Зато су они предмет интензивне научне пажње. Оригинални научни допринос ове тезе је у новим резултатима о квазиторусним многострукостима у односу на класична питања алгебарске топологије: степене пресликавања међу многострукостима, улагањима и имерзијама многострукости у еуклидске просторе. Методи који се користе у овој тези осликавају дубоку везу између онога што сматрамо класичном математиком и торусном топологијом. У том смислу, методи које овде користимо имају потенцијал да у скорој будућности прошире досадашња знања о овој класи многострукости, али такође и да се искористе у неким другим проблемима, као што су теорија бордизама.

У прва три поглавља су на елементаран начин изложене основне особине симплицијалних комплекса, политопа, торусних варијетета и квазиторусних многострукости, као и најважнији резултати о њима. Акцентован је комбинаторни приступ који нам омогућава да ове апстрактне објекте схватимо као природне.

Четврто поглавље дисертације проучава степене пресликавања међу квазиторусним многострукостима. Техника која се користи базирана је на резултатима Haibao Duan-а и Shicheng Wang-а који су користили пресечну форму за формулисање конкретног услова за постојање пресликавања одређеног степена. Добијени су веома интересантни резултати, а посебно је класа квазиторусних 4-многострукости погодна за проучавање.

Кохомолошки прстен ових многострукости је такав да је у многим случајевима било могуће одредити скуп свих могућих степена пресликавања. Резултати су добијени у терминима елементарне теорије бројева, ослањајући се на класичне резултате о бројевима који се могу записати као сума одређеног броја потпуних квадрата. Описани су скупови могућих степена пресликавања међу многострукости за велики број конкретних многострукости као што су $\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2, S^2 \times S^2$, итд.

У петом поглављу рачунају се $\mathrm{Stifel\text{-}Whitney}$-еве класе ових многострукости, дуалне класе, а потом се оне користе као опструкције за тотално коса улагања и имерзије. Главни резултат је да оне првенствено зависе од дејства торуса, јер су конструисани примери многострукости над истим политопом од којих једна има тривијалне, а друга нетривијалне карактеристичне класе. Пажња је посвећена многострукостима над кубом коју представљају нове примере у којима је доња граница блиска горњој граници за тотално коса улагања, а за које се тачно могу одредити еуклидски простори минималне димензије у које се ове многострукости могу имерзовати и уложити.

У Додатку је кратко изложена теорија о дејствима група и основне особине еквиваријантних пресликавања.

Кључне речи: Квазиторусне многострукости, K-степени, кохомолошки прстен, карактеристичне класе, торусна дејства, прости политопи, степен пресликавања, симплицијални комплекси

Научна област: Математика

Ужа научна област: Топологија

УДК број: 515.16(043.3)

ABSTRACT

The main objects studied in this doctoral thesis are quasitoric manifolds and spaces arising as the images of polyhedral product functors. Quasitoric manifolds are particularly interesting as topological generalization of non-singular toric varieties. They are a research topic of many mathematical disciplines including toric geometry, symplectic geometry, toric topology, algebraic geometry, algebraic topology, theory of convex polytopes, and topological combinatorics. These objects have already found numerous applications in mathematics and sciences and they continue to be intensively studied.

In this thesis we put some emphasis on combinatorial methods, focusing on the interaction of the geometry of toric actions and combinatorics of simple polytopes. This connection of geometry and combinatorics is based on the fundamental observation that convex polytopes naturally arise as orbit spaces of toric actions on quasitoric manifolds. Our main original contributions in this thesis are related to classical topological questions about degrees of maps between manifolds as well as their embeddings and immersions into Euclidean spaces. We follow the general scheme characteristic for Algebraic Topology where a topological problem is reduced, often by non-trivial reductions, to a question of arithmetical, algebraic, or combinatorial nature. We believe that the novel applications of this scheme developed in the thesis, especially the new techniques and calculations, have a potential to be applied on other problems about quasitoric manifods.

Here is a summary of the content of the thesis. For the reader's convenience and for completeness, in the first three chapters we give an elementary exposition of the basic theory of simplicial complexes, convex polytopes, toric varieties and quasitoric manifolds. The emphasis is on the fundamental constructions and central results, however the combinatorial approach, utilized in the thesis, allows us present the theory in a direct and concrete way, with a minimum of topological prerequisites.

The mapping degrees of maps between quasitoric manifolds are studied in Chapter 4 with a particular emphasis on quasitoric 4-manifolds. Utilizing the technique pioneered by Haibao Duan and Shicheng Wang, which is based on the intersection form and the cohomology ring calculations, we demonstrate that a complete information about mapping degrees can be obtained in many concrete situations. The theorems and the corresponding criteria for the existence of mapping degrees are formulated in the language of elementary number theory. It is amusing that the question whether a number appears as a mapping degree between concrete 4-manifolds is directly linked with classical results from number theory such as whether a number can be expressed as a sum of two or three squares, etc. This approach allows us to analyze many concrete 4-manifolds, including $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, etc. In Chapter 5 we calculate the Stiefel-Whitney classes of some concrete quasitoric manifolds and their duals. This information is used to determine cohomological obstructions to embeddings and immersions of these manifolds in Euclidean spaces. As an initial observation we showed that the calculations are highly dependent on the action of torus. Indeed, there are examples of quasitoric manifolds over the same polytope which exhibit a very different behavior and different complexity of the associated characteristic classes. Focusing on the quasitoric manifolds over the n-dimensional cube, we are able to produce quasitoric manifolds which are very complex in the sense that they almost attain the theoretical minimum dimension for their embedding or (totally skew) immersion in Euclidean spaces. The thesis ends with an appendix with an outline of the theory of group actions and equivariant topology.

Keywords: Quasitoric manifolds, the polyhedral product functors, cohomology, characteristic classes, toric actions, simple polytopes, map degree, simplicial complexes

Research area: Mathematics

Research subarea: Topology

UDK number: 515.16(043.3)

СЛИКЕ

САДРЖАЈ

1. УВОД

Централна тема ове дисертације су квазиторусне многострукости и главни циљ је да се опишу њихова тополошка, геометријска и комбинаторна својства. Ове многострукости имају јако занимљиву структуру кохомолошког прстена и може се рећи да имају везу са скоро свим гранама модерне математике.

Развој и сазнања о квазиторусним многострукостима, као и њима блиским објектима, K-степенима захтева свакако много шири простор него што је у овој тези обрађено. Најшири аутору познат преглед научних сазнања о торусној топологији дат је у још необјављеној монографији [14]. Можемо рећи да је торусна топологија чвориште важних математичких дисциплина: комбинаторике, алгебарске геометрије, алгебарске топологије, хомолошке алгебре и др. Како је свака од ових области сама и питања којима се бави сама за себе велики простор откривених и неоткривених тема, у овој тези су поред нових резултата о квазиторусним многострукостима и класичним питањима алгебарске геометрије добијеним у радовима [7], [4], [5] и [6] дат и преглед основних комбинаторних објеката који су фундаментално важни за квазиторусне многострукости.

Теза садржи два дела и додатак. У првом делу су изложени познати резултати о симплицијалним комплексима, политопима, торусним варијететима и квазиторусним многострукостима. Ови објекти су релевантни не само за топологију, већ и за конвексну геометрију и рачунарске науке, па им је због тога, као и чињенице да на српском језику нема или постоји врло мало литературе о актуелним математичким дисциплинама, дат велики простор у уводном делу. Посебна пажња у овој дисертацији је посвећена комбинаторици и комбинаторним објектима, али и као методу којим можемо рачунати конкретне тополошке инваријанте.

Теорија симплицијалних комплекса, политопа и торусних варијетета је изложена пратећи класичне књиге [64], [54], [11], [13], [30], [49] и мноштвом илустрација и примера, са циљем да се они што геометричније и конкретније опишу. Такође, приказано је што вие различитих погледа на ове теме.

Четврто поглавље се ослања на резултате Duana-а и Wang-а о степенима многострукости и њиховом применом на квазиторусне 4-многострукости. Нови резултати који су у овом поглављу изложени илуструју лепу интеракцију између елементарне теорије бројева и класичне алгебарске топологије. Питања везана за степене пресликавања непрекидно привлаче пажњу научне јавности већ више од једног века, али сем случаја 2 и 3 многострукости, није се одмакло даље од парцијалних резултата. Резултати који су овде добијени, показују да скупови могућих степена пресликавања могу бити јако интересантни и зависити нпр. од чињенице да ли се број који је степен неког пресликавана може представити као сума 2 или 3 потпуна квадрата.

У петом поглављу су изложени резултати о класичним питањима имерзије и улагањима квазиторусних многострукости. Ова питања нису много разматрана у овом контексту, али техника Stiefel-Whitney-евих и других карактеристичних класа је итекако позната у научном свету и везана је за питања бордизама и кохомолошке ригидности квазиторусних многострукости. Посебно је интересантан случај квазиторусних многострукости над коцком I^n које се једнако добро „опиру“ улагањима као и пројективни простори. То показује да су многострукости над политопима чији су Stanley-Reisner-ови идеали квадратни, можда неправедно привукле мање пажње од многострукостима над производом симплекса. Из анализе која је овде спроведена следи да геометрија торусног дејства над многострукости има далекосежне импликације на тополошка својства многострукости. Наравно, есенција је да се торусно дејство преведе у језик комбинаторике како би се тополошке инваријанте могле израчунати. Зато је овде тек отворено једно поље за даља истраживања.

У додатку је дат осврт на теорију дејства група и еквиваријантну топологију, користећи монографије [23] и [11]. Ради се о модерном језику савремене математике, који је јако битан за теорију квазиторусних многострукости. Заправо, надградња и питања која би се природно надовезала на питања која су овде разматрана односила би се на њихове одговарајуће еквиваријантне формулације.

Свако поглавље у овој тези је намерно написано, тако да се може читати независно од осталих. Верујемо да овим није никако нарушено јединство ове тезе, јер лепота математике је у томе што она налази различите путеве који се непрекидно гранају, али се исто тако на чудесан начин приближавају и осветљавају један другог.

2. СИМПЛИЦИЈАЛНИ КОМПЛЕКСИ

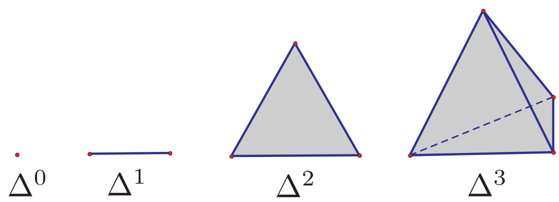
2.1 Симплекси и симплицијални комплекси

Основе теорије симплицијалних комплекса изложићемо ослањајући се на класичне монографије [11], [49] и [13].

Најједноставније фигуре у еуклидским просторима омогућавају нам да разумемо сложеније фигуре, тако што сложеније фигуре раставимо на оне једноставније.

Дефиниција 2.1.1. *n-симӣлекс* Δ^n је конвексан омотач скупа од $n+1$ тачака који не леже у истој хиперравни у $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. Тачка је симплекс у димензији 0, дуж у димензији 1, троугао у димензији 2 и тетраедар у димензији 3.



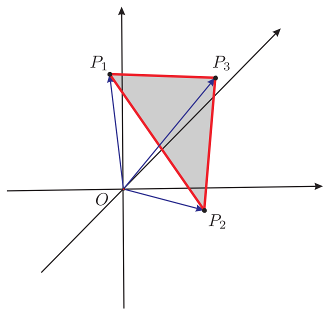
Слика 2.1: Симплекси

У алгебарском смислу дефиниција 2.1.1 каже да полазећи од $n+1$ линеарно независних вектора $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_{n+1}}$ добијамо n-симплекс Δ^n узимајући крајње тачке вектора

$$\lambda_1\overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\overrightarrow{OP_2} + \cdots + \lambda_{n+1}\overrightarrow{OP_{n+1}},$$

где је $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1$ и $\lambda_i \geq 0$.

Сваки подскуп од $m+1$ тачака $\{P_1, P_2, \dots, P_{n+1}\}$ одређује *m-димензионалну сӣрану* Δ^m од Δ^n. Унија свих $(n-1)$-димензионалних страна се назива *īраница* n-симплекса Δ^n и све ниже димензионалне стране од Δ^n леже у граници.



Слика 2.2: Вектори разапињу симплекс

Дефиниција 2.1.2. *Геометријски симплицијални комплекс* или *полиедар* је подскуп тачака $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ који представља коначну унију U симплекса било које димензије такву да су испуњени следећи услови:

(1) Свака страна симплекса из U припада U;
(2) Пресек било која два симплекса из U је страна сваког од њих.

Симплекс из U се назива *страном* од $\mathcal{P}$, 0-димензионалне странице зовемо *теменима*, а 1-димензионалне странице *ивицама*. *Димензија геометријског симплицијалног комплекса* $\mathcal{P}$ је максимална димензија од димензија његових страна.

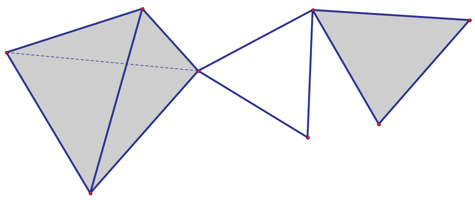
Нека је $\mathcal{S}$ коначан скуп. За дати подскуп $\sigma \subset \mathcal{S}$, означимо његову кардиналност са $|\sigma|$.

Дефиниција 2.1.3. *Апстрактни симплицијални комплекс* на скупу $\mathcal{S}$ је колекција K подскупова од $\mathcal{S}$ таква да за свако $\sigma \in K$ важи да сви подскупови од σ (укључујући и $\emptyset$) припадају K. Подскуп $\sigma \in K$ називамо *(апстрактни) симплекс* од K. Једноелементни подскупови се називају *темена* од K. Уколико K садржи све једноелементне подскупове од $\mathcal{S}$ кажемо да је K *симплицијални комплекс на скупу темена* $\mathcal{S}$. *Димензија апстрактног симплекса* $\sigma \in K$ је $\dim \sigma = |\sigma| - 1$, *димензија апстрактног симплицијалног комплекса* је максимална димензија од димензија његових симплекса.

Дефиниција 2.1.4. Колекција L која је подскуп апстрактног симплицијалног комплекса K која је сама за себе симплицијални комплекс назива се *симплицијални подкомплекс* од K.

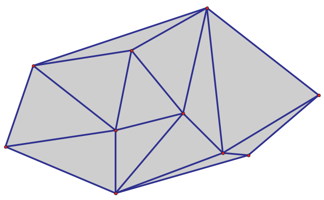
Пљосан или *максимални симплекс* је страна симплицијалног комплекса K која није страна симплекса веће димензије. Симплицијални комплекс је *хомоген* уколико све његове пљосни имају исту димензију. Симплексе од K који имају максималну димензију зовемо *ћелијама*.

Пример 2. На слици *2.3* је дат пример једног нехомогеног симплицијалног комплекса.



Слика 2.3: Нехомогени симплицијални комплекс

Пример 3. На слици *2.4* је дат пример једног хомогеног симплицијалног комплекса.



Слика 2.4: Хомогени симплицијални комплекс

Геометријска реализација апстрактног симплицијалног комплекса K на $\mathcal{S}$ је полиедар $|K|$ за који постоји бијекција између скупа $\mathcal{S}$ и скупа темена од $|K|$ која симплексе из K шаље на стране из $|K|$. Простор X такође зовемо *полиедром* уколико постоји симплицијални комплекс K и хомеоморфизам $h : |K| \to X$. За K кажемо да је *триангулација* простора X.

Означимо са $[m]$ скуп $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Став 2.1.1. *Апстрактни симплицијални комплекс K на скупу темена $[m]$ поседује геометријску реализацију.*

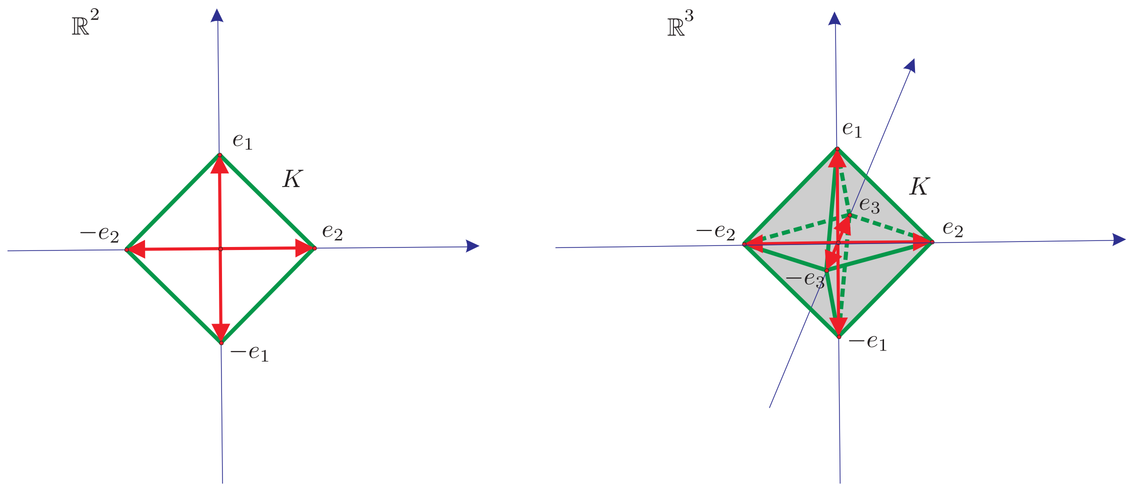
Доказ. Нека је e_i стандардна унитарна база у $\mathbb{R}^m$. За сваки симплекс $\sigma \subset [m]$ означимо са Δ_σ конвексни омотач вектора $e_i, i \in \sigma$. Очигледно је Δ_σ геометријски симплекс. Тада је полиедар

$$\bigcup_{\sigma \in K} \Delta_\sigma \subset \mathbb{R}^m$$

геометријска реализација од K. $\square$

Став 2.1.1 је геометријска интерпретација чињенице да је симплицијални комплекс K на $[m]$ подкомплекс од Δ^{m-1}.

Пример 4. Симплицијални комплекс K на скупу темена $[2n] = \{1, 2, \dots, 2n\}$, $K = \{\sigma \subset [2n] | |\sigma| \leq n, \{i, n+i\} \not\subset \sigma$ за свако $i, 1 \leq i \leq n\}$ има за геометријску реализацију у $\mathbb{R}^n$ границу *крос-политопа.* Крос политоп је конвексни омотач тачака $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$ у $\mathbb{R}^n$ где је $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ стандардна база у $\mathbb{R}^n$.



Слика 2.5: Крос политопи

Дефиниција 2.1.5. *Улагање* симплицијалног комплекса K у $\mathbb{R}^d$ је инјективно пресликавање $i : |K| \to \mathbb{R}^d$.

Теорема 2.1.1. *Симплицијални комплекс K димензије n се може уложити у $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Доказ. Посматрајмо *моменат криву* у $\mathbb{R}^{2n+1}$ $\mathcal{C} = \{(t, t^2, \dots, t^{2n+1}) | t \in \mathbb{R}\}$ и сместимо темена симплицијалног комплекса на $\mathcal{C}$. Особина момент криве је да никоје $2n+2$ тачке са ове криве не леже у истој хиперравни. Заиста, ако неких $2n+2$ тачака припада хиперравни $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{2n+1}x_{2n+1} = 0$ тада полином

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_{2n+1}t^{2n+1}$$

има $2n+2$ различитих нула, што је немогуће. Одавде следи да било која два n-симплекса (од којих сваки има $n+1$ теме) имају заједничку тачку само ако имају заједничка темена.

Заједничка темена формирају симплекс који припада симплицијалном комплексу и имамо улагање. ☐

Недостајућа страна симплицијалног комплекса K је подскуп $\sigma \subset [m]$ такав да $\sigma \notin K$, а свака страна од $\sigma, \tau \subset \sigma$ припада $K, \tau \in K$.

Пример 5. Нека је K симплицијални комплекс на $[m]$ који представља границу симплекса Δ^{m-1} тј. за сваки прави подскуп $\sigma \subset [m], \sigma \neq [m]$ важи $\sigma \in K$. Тада је симплекс $[m]$ недостајућа страна од K.

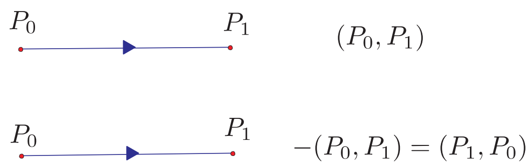
2.1.1 Орјентација

Орјентабилност је важна комбинаторна и тополошка особина. Кратак осврт на ову теорију који дајемо се ослања на монографију [54], у којој су комбинаторика и топологија симплицијалних комплекса изложене.

Нека су $P_0, P_1, \ldots, P_n$ темена n-симплекса Δ^n. Уређена $(n+1)$-торка $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ је *орјентација* n-симплекса. Орјентације су еквивалентне ако се разликују за парну пермутацију темена, тј. ако им је парност темена у инверзији иста. Заправо постоје две могуће орјентације симплекса $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ и $-(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

Орјентација n-симплекса индукује орјентацију његових страна изостављањем темена који не припадају страни.

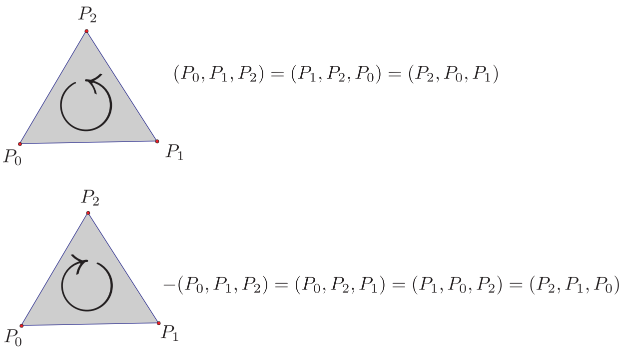
Пример 6. Орјентацију 1-симплекса представљамо визуелно стрелицом као на слици.



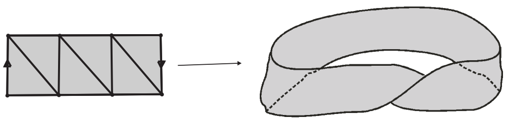
Слика 2.6: Орјентација 1-симплекса

Пример 7. Орјентацију 2-симплекса представљамо визуелно кружном стрелицом као на слици.

Дефиниција 2.1.6. *Орјентација n-димензионалног симплицијалног комплекса K* је додељивање орјентације његовим симплексима. Оријентација је *кохерентна* ако на свака два n-симплекса која имају заједничку $(n-1)$-димензионалну страну индукује супротне орјентације. Симплицијални комплекс је *орјентабилан* уколико поседује кохерентну орјентацију.



Слика 2.7: Орјентација 2-симплекса



Слика 2.8: Триангулисана Мебијусова трака

Пример 8. Пример симплицијалног комплекса који није орјентабилан је триангулисана Мебијусова трака.

2.1.2 Комбинаторика симплицијалних комплекса

Нека је f_i број i-димензионалних симплекса $(n-1)$-димензијалног симплицијалног комплекса K^{n-1}.

Дефиниција 2.1.7. Целобројни вектор $\mathbf{f}(K^{n-1}) = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ називамо f-*вектором* симплицијалног комплекса K^{n-1}. Дефинишимо $f_{-1} = 1$. h-*вектором* од K^{n-1} зовемо целобројни вектор $\mathbf{h}(K^{n-1}) = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$ где су h_i дефинисани једначином

$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1} t + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}. \tag{2.1}$$

Низ $(g_0, g_1, \ldots, g_{[\frac{n}{2}]})$ где је $g_0 = 1, g_i = h_i - h_{i-1}, i > 0$ се назива g-*вектор* од K^{n-1}.

Очигледно је да је f-вектор комбинаторна инваријанта од K^{n-1} и да зависи само од његовог посета страна. f-вектор и h-вектор одређују један другог линеарним релацијама

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{n-k} f_{i-1},\ f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^{n} \binom{q}{k} h_{n-q},\ k = 0, \dots, n. \tag{2.2}$$

Пример 9. За симплекс Δ^{n-1} имамо да било којих k темена одређује један $k-1$ симплекс, па је његов f-вектор

$$\mathbf{f}(\Delta^{n-1}) = \left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}\right).$$

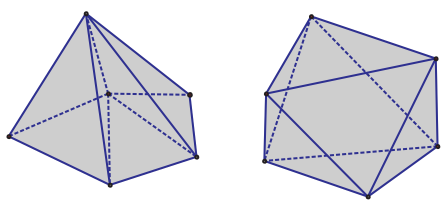
Из једнакости (2.2) добијамо да је $h_0 = 1$ и за $k > 0$,

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{n-k} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} =$$

$$= (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = 0.$$

Дакле, h-вектор од Δ^{n-1} је $(1, 0, \dots, 0)$.

Пример 10. На слици 2.9 се налазе два комбинаторно различита симплицијална комплекса који имају исте f-векторе $f_0 = 6$, $f_1 = 12$ и $f_2 = 8$.



Слика 2.9: Комбинаторно различити симплицијални комплекси са истим f-вектором

Дефиниција 2.1.8. *Ојлерова карактеристика* симплицијалног комплекса K^{n-1} је вредност

$$\chi(K^{n-1}) = f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^n f_n. \tag{2.3}$$

Нека је K симплицијални комплекс на скупу темена $[m]$. Означимо са $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ градуисану полиномијалну алгебру над комутативним прстеном са јединицом $\mathbf{k}$, при чему је $\deg v_i = 2$ за свако i.

Дефиниција 2.1.9. *Stanley-Reisner-ов прстен, или прстен страна* симплицијалног комплекса K је количнички прстен

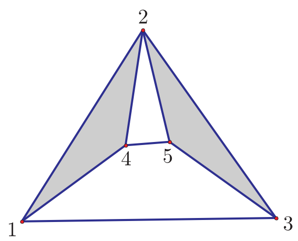
$$\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}[v_1, v_2, \dots, v_m]/\mathcal{I}_K,$$

где је $\mathcal{I}_K$ хомогени идеал генерисан свим мономима $v_\sigma = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s}$ $(i_1 < \cdots < i_s)$ таквим да $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ није симплекс од K.

Идеал $\mathcal{I}_K$ зовемо *Stanley-Reisner-ов идеал* од K.

Пример 11. За дводимензионални симплицијални комплекс K на слици 2.10, имамо да је

$$\mathcal{I}_K = (v_1 v_5, v_3 v_4, v_1 v_2 v_3, v_2 v_4 v_5).$$



Слика 2.10: Пример 11

За сваки подскуп $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subset [m]$ означимо са v_σ моном $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s}$. Приметимо да је $\mathcal{I}_K$ безквадратни мономијални идеал чију базу чине v_σ који одговарају недостајућим странама од K.

Став 2.1.2. *Сваки безквадратни мономијални идеал $\mathcal{I}$ у полиномијалном прстену има форму $\mathcal{I}_K$ за неки симплицијални комплекс K.*

Доказ. Нека је $\mathcal{I}$ безквадратни мономијални идеал. Нека је

$$K = \{\sigma \subset [m] \mid v_\sigma \notin \mathcal{I}\}.$$

Сада се лако провери да је K симплицијални комплекс и да је $\mathcal{I} = \mathcal{I}_K$. □

Дефиниција 2.1.10. Нека је $M = M^0 \oplus M^1 \oplus \dots$ градуисани $\mathbf{k}$-модул. Ред

$$F(M; t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_k M^i) t^i$$

се назива *Поенкареов ред* од M.

Лема 2.1.1. *За Поенкареов ред од* $\mathbf{k}(K^{n-1})$ *важи*

$$F(\mathbf{k}(K^{n-1});t)=\sum_{i=-1}^{n-1}\frac{f_i t^{2(i+1)}}{(1-t^2)^{i+1}}=\frac{h_0+h_1t^2+\cdots+h_nt^{2n}}{(1-t^2)^n},$$

где је $(f_0,\ldots,f_{n-1})$ f*-вектор и* $(h_0,\ldots,h_n)$ h*-вектор од* K^{n-1}.

Доказ. Сваки моном у $\mathbf{k}(K^{n-1})$ има облик $v_{i_1}^{\alpha_1}\cdots v_{i_{k+1}}^{\alpha_{k+1}}$, где је $\{i_1,\ldots,i_{k+1}\}$ симплекс од K^{n-1} и $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}$ природни бројеви. Зато сваки k симплекс од K^{n-1} доприноси Поенкареовом реду са $\frac{t^{2(k+1)}}{(1-t^2)^{k+1}}$, чиме је први део једнакости доказан. Други део једнакости је директна последица једнакости (2.2). □

Пример 12. Нека је $K=\Delta^n$. Према примеру 9 и леми 2.1.1 имамо

$$F(k(\Delta^n);t)=(1-t^2)^{-(n+1)}.$$

2.2 Симплицијална пресликавања и особине симплицијалних пресликавања

2.2.1 Симплицијална и PL (део-по-део линеарна) пресликавања

Улога симплицијалних и PL пресликавања је веома значајна у модерној математици.

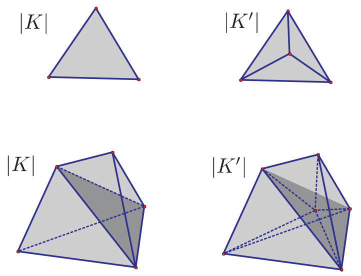
Дефиниција 2.2.1. Нека су K_1 и K_2 симплицијални комплекси на скупу темена $[m_1]$ и $[m_2]$, а $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ њихове геометријске реализације. Пресликавање $\Phi:[m_1]\to[m_2]$ је *симплицијално пресликавање* између K_1 и K_2 ако за сваки симплекс $\sigma\in K_1$ важи да $\Phi(\sigma)\in K_2$ при чему се темена од K_1 сликају у темена од K_2. Пресликавање Φ је *недегерисано* ако је за свако $\sigma\in K_1$ $|\Phi(\sigma)|=|\sigma|$.

Симплицијално пресликавање полиедра $\Phi:|K_1|\to|K_2|$ је линеарно продуже-ње од $\Phi:[m_1]\to[m_2]$ на сваком симплексу из K_1.

Симплицијални изоморфизам полиедра је пресликавање Φ за које постоји симплицијално пресликавање Φ^{-1}.

Дефиниција 2.2.2. Полиедар $|K'|$ је *подподела* полиедра $|K|$ ако сваки симплекс σ полиедра$|K'|$ припада неком симплексу τ полиедра $|K|$ и сваки симплекс полиедра $|K|$ је унија коначно много симплекса полиедара $|K'|$.

Пример 13. На слици су дати примери полиедара $|K|$ и једне од њихових подподела $|K'|$.



Слика 2.11: Подподеле симплицијалних комплекса

Дефиниција 2.2.3. PL *пресликавање* $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ је пресликавање које је симплицијално пресликавање између неких подподела од $|K_1|$ и $|K_2|$. Ако постоји пресликавање φ^{-1} зовемо га PL *хомеоморфизмом,* а полиедре $|K_1|$ и $|K_2|$ PL *хомеоморфним* или *комбинаторно еквивалентним.*

Другим речима, дефиниција 2.2.3 каже да су два полиедра $|K_1|$ и $|K_2|$ PL хомеоморфни ако и само ако постоји полиедар $|K|$ изоморфан подподели сваког од њих.

Пример 14. За сваки симплицијални комплекс K на $[m]$ постоји симплицијално пресликавање (инклузија) $K \hookrightarrow \Delta^{m-1}$.

Став 2.2.1. *Нека је $\phi : K_1 \to K_2$ симплицијално пресликавање између симплицијалних комплекса K_1 и K_2 на скупу темена $[m_1]$ и $[m_2]$ редом. Тада пресликавање $\phi^* : \mathbf{k}[w_1, \ldots, w_{m_2}] \to \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_{m_1}]$ дефинисано са*

$$\phi^*(w_j) = \sum_{i \in f^{-1}\{j\}} v_i,$$

индукује хомоморфизам $\mathbf{k}(K_2) \to \mathbf{k}(K_1)$ који такође обележавамо са ϕ^*.

Доказ. Треба показати да је $\phi^*(\mathcal{I}_{K_2}) \subset \mathcal{I}_{K_1}$. Претпоставимо да $\tau = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset [m_2]$ није симплекс од K_2. Тада је

$$\phi^*(w_{j_1} \cdots w_{j_s}) = \sum_{\{i_1\} \in \phi^{-1}\{j_1\}, \ldots, \{i_s\} \in \phi^{-1}\{j_s\}} v_{i_1} \cdots v_{i_s}. \tag{2.4}$$

Желимо да покажемо да $\sigma = \{i_1, \ldots, i_s\}$ није симплекс од K_1 за сваки моном $v_{i_1} \cdots v_{i_s}$ са десне стране једнакости (2.4). Уколико би то био случај, тада би $\phi(\sigma) = \tau$ због дефиниције симплицијалног пресликавања морало да буде симплекс од K_2 што је у супротности са претпоставком $\tau \notin K_2$. Овим је тврђење доказано. $\square$

2.2.2 Барицентрична подподела симплицијалних комплекса

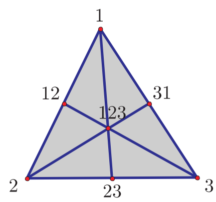
Размотрићемо особине једне специјалне подподеле симплицијалних комплекса која игра веома важну улогу у доказивању многих тврђења.

Дефиниција 2.2.4. *Барицентрична подподела* апстрактног симплицијалног комплекса K је симплицијални комплекс K' на скупу темена $\{\sigma \in K\}$ чији су симплекси ланци уложених симплекса у K, тј. $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r\} \in K'$ ако и само ако је $\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \cdots \subset \sigma_r$ у K.

Барицентар симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ са теменима $v_0, \ldots, v_n$ је тачка $\mathrm{bc}(\Delta^n) = \frac{1}{n+1}(v_0 + \cdots + v_n) \in \Delta^n$. Барицентрична подподела $|K'|$ полиедра K се добија на следећи начин:

- Темена од $|K'|$ су барицентри свих симплекса у K.
- Симплекс од $|K'|$ је сваки симплекс на теменима $\mathrm{bc}(\Delta_1^{i_1}), \ldots, \mathrm{bc}(\Delta_r^{i_r})$ за који важи $\Delta_1^{i_1} \subset \cdots \subset \Delta_r^{i_r}$.

Пример 15. На слици 2.12 је дата барицентрична подела симплекса Δ^2.



Слика 2.12: Барицентрична подела симплекса

Пример 16. За сваки $(n-1)$-димензионални симплицијални комплекс K^{n-1} на скупу темена $[m]$ постоји недегенерисано симплицијално пресликавање $K' \to \Delta^{n-1}$ дефинисано на теменима од K' са $\sigma \to |\sigma|$, за $\sigma \in K$.

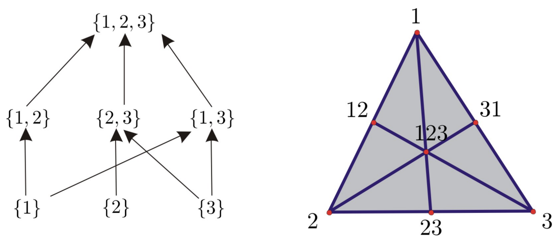
Пример 17. Нека је K симплицијални комплекс на скупу темена $\mathcal{S}$ и нека је дата функција избора $f : K \to \mathcal{S}$ која додељује сваком симплексу $\sigma \in K$ тачку у σ. Нпр. уколико је $\mathcal{S} = [m]$ за f можемо узети функцију $f = \min \sigma$ која сваком симплексу додељује његово минимално теме. За сваку овакву функцију f постоји канонско пресликавање ∇_f :

$K' \to K$ дефинисано на теменима од K' $\nabla_f(\sigma) = f(\sigma)$ за свако $\sigma \in K$. Пресликавање проширимо на симплексе од K' са

$$\nabla_f(\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \cdots \subset \sigma_r) = \{f(\sigma_1), f(\sigma_2), \ldots, f(\sigma_r)\}.$$

Скуп на десној страни је подскуп од σ_r, па је симплекс од K. Дакле, ∇_f је симплицијално пресликавање.

Пример 18. Нека је $(\mathcal{S}, <)$ посет. Нека је $\mathrm{ord}(\mathcal{S})$ колекција свих ланаца $x_1 < x_2 < \cdots < x_k, x_i \in \mathcal{S}$. Очигледно је $\mathrm{ord}(\mathcal{S})$ симплицијални комплекс и називамо га *уређени комплекс* посета $(\mathcal{S}, <)$. Уређени комплекс посета инклузија непразних симплекса симплицијалног комплекса K је његова барицентрична подподела K'. Пример, инклузионог посета за скуп $\{1, 2, 3\}$ тј. за Δ^2 је илустрован на слици 2.13 .



Слика 2.13: Посет страна барицентричне поделе симплекса

Прстен страна барицентричне подподеле K' од K је

$$k(K') = k[(b_\sigma)|\sigma \in K]/\mathcal{I}_{K'},$$

где је b_σ полиномијални генератор који одговара симплексу $\sigma \in K$. Недегенерисано пресликавање $K' \to \Delta^{n-1}$ из примера 16 индукује пресликавања међу одговарајућим Stanley-Reisner-овим прстенима:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_n] & \to & \mathbf{k}(K') \\ v_i & \to & \displaystyle\sum_{|\sigma|=i} b_\sigma. \end{array}$$

Ово пресликавање дефинише канонску структуру $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_n]$-модула у $\mathbf{k}(K')$.

Нека је $K \subset \mathbb{R}^d$ симплицијални комплекс и нека је $\mu(K) = \max\{\mathrm{diam}\,\sigma|\sigma \in K\}$ максимални дијаметар неког симплекса од K. Низ барицентричних подподела симплицијалног комплекса K, $K^{(0)} = K, K^{(1)} = K', K^{(2)} = (K^{(1)})', \dots, K^{(n+1)} = (K^{(n)})', \dots$ називамо *профињењем* симплицијалног комплекса K.

Лема 2.2.1. *Нека је $K \subset \mathbb{R}^d$ симплицијални комплекс и $\dim K = n$. Важи неједнакост*

$$\mu(K') \leq \frac{n}{n+1}\mu(K).$$

Доказ. Нека је s ивица од K' са теменима $\mathrm{bc}(\sigma_1^p)$ и $\mathrm{bc}(\sigma_2^q)$ при чему је $\sigma_1^p \subset \sigma_2^q$ у K и $\sigma_1^p = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}, \sigma_2^q = \{a_0, a_1, \dots, a_q\}, p < q \leq n$. Имамо да је:
$\|\mathrm{bc}(\sigma_1^p) - \mathrm{bc}(\sigma_2^q)\| = \left\|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q+1}\sum_{i=0}^q a_i\right\| =$
$= \left\|\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)\sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q+1}\sum_{i=p+1}^q a_i\right\| =$
$= \frac{q-p}{q+1}\left\|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^q a_i\right\|.$

Како су $\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^p a_i$ и $\frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^q a_i$ тачке из σ_2^q, то је

$$\frac{q-p}{q+1}\left\|\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^p a_i - \frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^q a_i\right\| \leq \frac{q-p}{q+1}\operatorname{diam}\sigma_2^q \leq$$

$$\leq \frac{q-p}{q+1}\mu(K) \leq \frac{q}{q+1}\mu(K) \leq \frac{n}{n+1}\mu(K).$$

Како последња неједнакост важи за произвољну ивицу од K', важи и за ивицу максималне дужине и овим је лема доказана. □

Лема 2.2.2. *Нека је $K \subset \mathbb{R}^d$ симплицијални комплекс и $\dim K = n$. За свако $\varepsilon > 0$ постоји $p \in \mathbb{N}$ тако да је $\mu(K^{(p)}) < \varepsilon$.*

Доказ. Према леми 2.2.1 имамо да је

$$\mu(K^{(p)}) \leq \frac{n}{n+1}\mu(K^{(p-1)}) \leq \cdots \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \mu(K).$$

Пошто је $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 0$, то тврђење леме директно следи. □

2.2.3 Теорема о симплицијалној апроксимацији

У овом делу ћемо показати да се било које непрекидно пресликавање између два полиедра $|K|$ и $|L|$ после одређеног броја профињења може довољно добро апроксимирати симплицијалним пресликавањем. Значај ове теореме је огроман јер нам она омогућава да се у изучавању многих објеката ограничимо само на симплицијална пресликавања тј. да их преко ове теореме уопштимо на сва непрекидна пресликавања.

Дефиниција 2.2.5. Линк и стар симплекса $\sigma \in K$ су:

$$\begin{aligned} \mathrm{link}_K\sigma &= \{\tau | \sigma \cup \tau \in K, \sigma \cap \tau = \emptyset\}, \\ \mathrm{star}_K\sigma &= \{\tau | \sigma \subset \tau \in K\}. \end{aligned}$$

Из дефиниције 2.2.5 следи да $|\mathrm{star}_K v|$ садржи све стране које садрже теме v.

Пример 19. Нека је K симплицијални комплекс из примера 11. Имамо да је:
$\mathrm{link}_K\{2\} = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{3,5\}\}$,
$\mathrm{star}_K\{2\} = \{\{2\}, \{1,2,4\}, \{2,3,5\}\}$,
$\mathrm{link}_K\{1,4\} = \{\{2\}\}$,
$\mathrm{star}_K\{1,4\} = \{\{1,4\}, \{1,2,4\}\}$.

Лема 2.2.3. *Нека је σ симплекс од K. Тада је $\mathrm{star}_K\sigma$ затворен подскуп од $|K|$.*

Доказ. Коначна унија затворених скупова (симплекса из $\mathrm{star}_K\sigma$) је затворен скуп. □

Из леме 2.2.3 следи да је $\{\mathrm{Int}\,\mathrm{star}_K v | v$ је теме од $K\}$ отворен покривач од $|K|$.

Дефиниција 2.2.6. За сваки подкомплекс $L \subset K$ *затворена комбинаторна околина* $U_K(L)$ у K је подкомплекс

$$U_K(L) = \bigcup_{\sigma \in L} \mathrm{star}_K\sigma.$$

Из дефиниције 2.2.6 следи да је $U_K(L)$ унија симплекса из K који имају као страну неки симплекс из L. То нам даје могућност да дефинишемо *отворену комбинаторну околину* $\dot{U}_K(L)$ од $|L|$ у $|K|$ као унију релативних унутрашњости страна од $|K|$ који имају симплекс из $|L|$ као неку страну.

Теорема 2.2.1. *Нека су $|K|$ и $|L|$ геометријски симплицијални комплекси и $f : |K| \to |L|$ непрекидно пресликавање. Тада постоји цео број $n \geq 0$ и симплицијално пресликавање $\varphi : |K^{(n)}| \to |L|$ које симплицијално апроксимира f, тј. за свако $x \in |K|$ важи да $f(x), \varphi(x)$ леже у истом симплексу $\sigma \in |L|$.*

Доказ. Имамо да је $\{\mathrm{Int}\,\mathrm{star}_L v | v$ је теме од $L\}$ затворен покривач од $|L|$. Тада је $\mathcal{U} = \{f^{-1}(\mathrm{Int}\,\mathrm{star}_L v) | v$ је теме од $L\}$ затворен покривач од $|K|$. Нека је δ Лебегов број покривача $\mathcal{U}$ (сваки подскуп од $|K|$ дијаметра мањег од δ садржан је у неком скупу из покривача). Према леми 2.2.2 постоји цео број n такав да је $\mu(K^{(n)}) < \frac{\delta}{2}$. Нека је тачка a теме од $K^{(n)}$. Доказаћемо да је $\mathrm{diam}\,\overline{\mathrm{star}_{K^{(n)}}a} < \delta$. Заиста за тачке $x, y \in \overline{\mathrm{star}_K a}$ важи да $x, a \in \tau$ и $y, a \in \tau'$ за неке симплексе τ и τ' од $|K^{(n)}|$. Сада је $\mathrm{d}(x, a) < \frac{\delta}{2}$ и $\mathrm{d}(y, a) < \frac{\delta}{2}$, па је $\mathrm{d}(x, y) < \delta$. Овим је доказано да је $\mathrm{diam}\,\overline{\mathrm{star}_{K^{(n)}}a} < \delta$.

Имамо да $\mathrm{star}_{K^{(n)}}a$ лежи у неком $f^{-1}(\mathrm{Int}\,\mathrm{star}_L v)$ за неко теме v од $|L|$. Дефинишимо $\varphi(a) = v$. Ово урадимо за свако теме a од $K^{(n)}$ и φ нам индукује симплицијално пресликавање $\varphi : |K^{(n)}| \to |L|$. Такође је за свако теме a од $K^{(n)}$

$$f(\mathrm{star}_{K^{(n)}}a) \subset \mathrm{star}_L v = \mathrm{star}_L \varphi(a).$$

Одавде лако следи да је φ симплицијална апроксимација од f. □

2.3 Операције са симплицијалним комплексима

2.3.1 Џоини, производи и повезане суме

У овом делу ћемо описати неке операције са симплицијалним комплексима и неке њихове особине.

Дефиниција 2.3.1. Нека су K_1 и K_2 симплицијални комплекси на $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. *Џоин* симплицијалних комплекса K_1 и K_2 је симплицијални комплекс на $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ дефинисан са

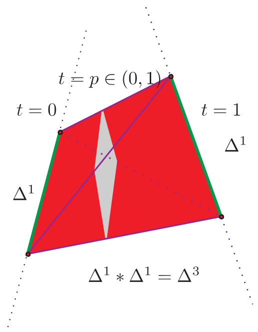
$$K_1 * K_2 = \{\sigma \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 | \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \sigma_1 \in K_1, \sigma_2 \in K_2\}.$$

Операција џоин дефинисана је и за тополошке просторе. Геометријски џоин X и Y који стоје у општем положају у $\mathbb{R}^n$ визуелизујемо као скуп свих дужи које повезују тачке из X и тачке из Y, тј.

$$X * Y \cong \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} | \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y, t \in [0, 1]\}.$$

Имајући ово у виду, лако се уверавамо да је

$$|K * L| \cong |K| * |L|.$$

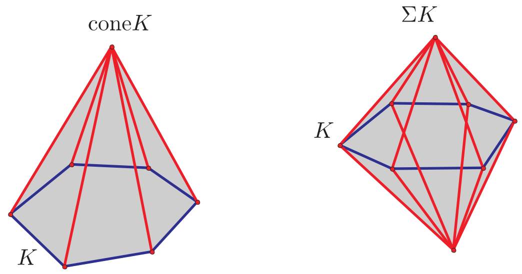


Слика 2.14: Џоин два симплекса

Пример 20. Из дефиниције 2.3.1 следи да је

$$\Delta^m * \Delta^n = \Delta^{m+n+1}.$$

Џоин симплицијалног комплекса K и тачке $K * pt$ називамо *конус* над K и означавамо са $\mathrm{cone}K$. Џоин симплицијалног комплекса K и симплекса Δ^0 називамо *суспензија* над K и означамо са ΣK. Геометријска реализација ових симплицијалних комплекса су тополошки конус и тополошка суспензија над $|K|$.



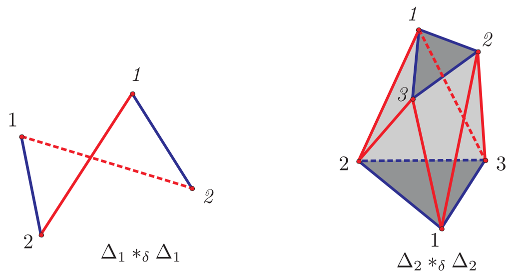
Слика 2.15: Конус и суспензија

Дефиниција 2.3.2. Нека је K симплицијални комплекс на $\mathcal{S}$. *Обрисани џоин* од K је подкомплекс симплицијалног комплекса $K * K$ дефинисан са

$$K *_\delta K = \{\sigma \subset \mathcal{S} | \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2 \in K, \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset\}.$$

Пример 21. Обрисани џоин симплекса Δ^n је хомеоморфан сфери $\mathbb{S}^n$.

Ради једноставнијег записа увешћемо ознаке $K^{*(n)} = \underbrace{K * K * \cdots * K}_{n \text{ пута}}$ за n-тоструки џоин симплицијалног комплекса K и $K_\delta^{*(2)} = K *_\delta K$ за обрисани џоин. Са $K_\delta^{*(n)}$



Слика 2.16: Обрисани џоин симплекса

означавамо n-тоструки обрисани тј. симплицијални комплекс

$$K_\delta^{*(n)} = \{\sigma \subset \mathcal{S} | \sigma = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n, \sigma_i \in K, \text{ за свако } i, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset \text{ за } i \neq j\}.$$

Став 2.3.1. *Џоини и обрисани џоини симплицијалних комплекса комутирају, тј. за симплицијалне комплексе K и L важи*

$$(K * L)_\delta^{*(n)} \cong K_\delta^{*(n)} * L_\delta^{*(n)}.$$

Доказ. „$\subseteq$“Нека $\sigma \in (K * L)^{*(n)}$. Имамо да је $\sigma = \bigcup_i \sigma_i, \sigma_i \in K * L$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Одавде је за свако $i, \sigma_i = \tau_i \cup \rho_i$ где $\tau_i \in K$ и $\rho_i \in L$. Због $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ за $i \neq j$ мора бити $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$ и $\rho_i \cap \rho_j = \emptyset$. Одавде следи да $\tau = \bigcup_i \tau_i \in K_\delta^{*(n)}$ и $\rho = \bigcup_i \rho_i \in L_\delta^{*(n)}$. Сада се лако добија да

$$\sigma = \bigcup_i \sigma_i = \bigcup_i (\tau_i \cup \rho_i) = \bigcup_i \tau_i \cup \bigcup_i \rho_i = \tau \cup \rho \in K_\delta^{*(n)} * L_\delta^{*(n)}.$$

„$\supseteq$“Аналогно као и претходна инклузија. $\square$

Став 2.3.2. *За Stenley-Reisner-ов прстен џоина симплицијалних комплекса K и L важи*

$$\mathbf{k}(K * L) = \mathbf{k}(K) \otimes \mathbf{k}(L).$$

Доказ. Нека је $\mathbf{k}(K) = \mathbf{k}(u_1, \ldots, u_m)/\mathcal{I}_K$ и $\mathbf{k}(L) = \mathbf{k}(v_1, \ldots, v_n)/\mathcal{I}_L$. Према дефиницијама 2.1.9 и 2.3.1 следи да је $\mathcal{I}_{K*L} = \mathcal{I}_K \mathbf{k}(v_1, \ldots, v_n) \cup \mathbf{k}(u_1, \ldots, u_m)\mathcal{I}_L$. Дефинишимо пресликавања $\phi : \mathbf{k}(K) \otimes \mathbf{k}(L) \to \mathbf{k}(K * L)$ и $\psi : \mathbf{k}(K * L) \to \mathbf{k}(K) \otimes \mathbf{k}(L)$ са

$$\phi([u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}] \otimes [v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}]) = [u_{i_1}, \ldots, u_{i_r}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}]$$

$$\psi([u_{i_1},\ldots,u_{i_r},v_{j_1},\ldots,v_{j_s}]) = [u_{i_1},\ldots,u_{i_r}]\otimes[v_{j_1},\ldots,v_{j_s}]$$

Лако се уверавамо да су ϕ и ψ добро дефинисани хомоморфизми прстена и да су једно другом инверзи. $\square$

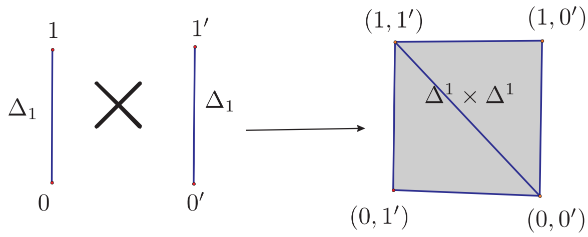
Дефиниција 2.3.3. *Декартов производ симплицијалних комплекса* K_1 и K_2 на $[m_1]$ и $[m_2]$ (са уређењем $\leq$) је симплицијални комплекс $K_1 \times K_2$ на $[m_1]\times[m_2]$ чији је симплекс $\sigma \subset \sigma_1 \times \sigma_2$ $(\sigma_1 \in K_1,\ \sigma_2 \in K_2)$ који остварује неопадајућу кореспонденцију између σ_1 и σ_2, тј.

$$K_1 \times K_2 = \{\sigma \subset \sigma_1 \times \sigma_2 | \sigma_1 \in K_1,\ \sigma_2 \in K_2$$

$$\text{и } i \leq i' \Rightarrow j \leq j' \text{ за било која два } (i,j),(i',j') \in \sigma\}.$$

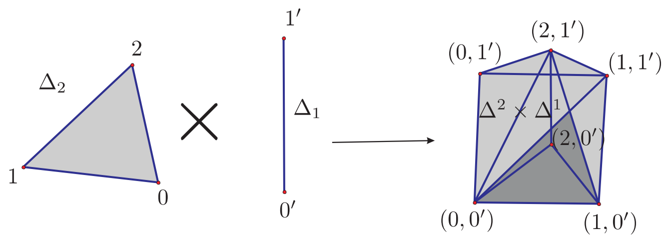
Полиедар $|K_1 \times K_2|$ је *канонска триангулација* од $|K_1| \times |K_2|$.

Пример 22. Производ два симплекса не мора бити симплекс као на слици 2.17.

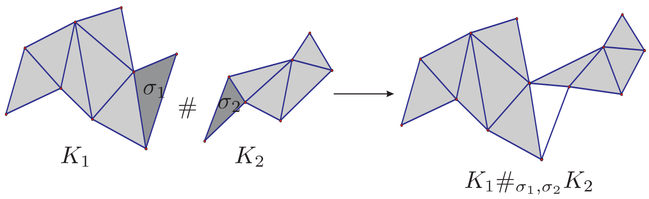


Слика 2.17: Производ два симплекса није симплекс

Пример 23. Производ симплицијалног комплекса K и симплекса Δ^1 и његова триангулација познат је и као *призматична подподела.*



Слика 2.18: Призматична подподела



Слика 2.19: Повезана сума симплицијалних комплекса

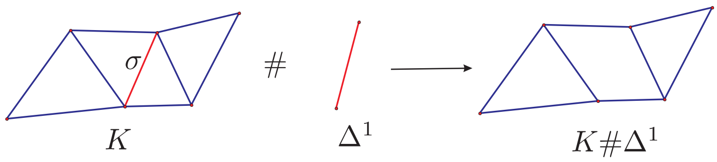
Дефиниција 2.3.4. Нека су K_1 и K_2 хомогени $(n-1)$-димензионални симплицијални комплекси на $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, $|\mathcal{S}_1| = m_1$ и $|\mathcal{S}_2| = m_2$, редом. Нека су $\sigma_1 \in K_1$ и $\sigma_2 \in K_2$ максимални симплекс. σ_1 и σ_2 идентификујемо, а са $\mathcal{S}_1 \cup_\sigma \mathcal{S}_2$ означимо унију $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ са идентификованим σ_1 и σ_2. Симплицијални комплекс

$$K_1\#_{\sigma_1,\sigma_2}K_2 = (K_1 \cup K_2) \setminus \{\sigma\}$$

на $\mathcal{S}_1 \cup_\sigma \mathcal{S}_2$ називамо *повезана сума* K_1 у σ_1 и K_2 у σ_2.

Приметимо да је $|\mathcal{S}_1 \cup_\sigma \mathcal{S}_2| = m_1 + m_2 - n$. Уколико нам је јасан избор и идентификација σ_1 и σ_2 за повезану суму означавамо са $K_1\#K_2$. Геометријски гледано, повезана сума $|K_1|$ у σ_1 и $|K_2|$ у σ_2 се добија слепљивањем $|K_1|$ и $|K_2|$ дуж страна σ_1 и σ_2 и одбацивањем стране σ добијене слепљивањем σ_1 и σ_2.

Пример 24. Нека је K хомоген n-димензионални симплицијални комплекс са фиксираним максималним симплексом σ. Тада је $K\#\Delta^n = K \setminus \{\sigma\}$, тј. $K\#\Delta^n$ се добија брисањем симплекса σ из K.



Слика 2.20: Брисање симплекса помоћу повезане суме

2.3.2 Флегификације, пуни подкомплекси и дуални симплицијални комплекси

У овом делу ћемо описати још неке операције са симплицијалним комплексима које су од значаја у комбинаторици, дискретној математици и алгебарској топологији.

Дефиниција 2.3.5. Симплицијални комплекс K се назива *флеҳ* или *засшавичасш* комплекс уколико сваки скуп темена од којих су свака два повезана ивицом разапиње симплекс у K.

Пример 25. Ивице n-тоугла (схваћене као симплицијални комплекс) су пример флег комплекса.

Пример 26. Уређени комплекс посета тј. барицентрична подподела је пример флег комплекса.

Директно из дефиниције 2.3.5 следи следеће тврђење.

Став 2.3.3. *Симплицијални комплекс K је флег комплекс ако и само ако је његова недостајућа страна има два темена.*

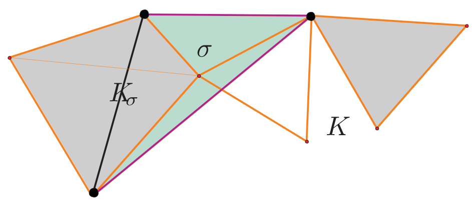
Дефиниција 2.3.6. Минимални симплицијални комплекс који садржи дати симплицијални комплекс K и који је флег назива се *флегификација* од K и обележава се $\mathrm{fla}(K)$.

Став 2.3.4. *За сваки симплицијални граф (1-димензионални симплицијални комплекс) G постоји јединствен флаг комплекс K_G на истом скупу темена чији је 1-скелет G.*

Доказ. Симплекси од K_G су сви комплетни подграфови од G. $\square$

Дефиниција 2.3.7. За сваки подскуп $\sigma \subset \mathcal{S}$ дефинишимо *пуни подкомплекс* K_σ са

$$K_\sigma = \{\tau \in K | \tau \subset \sigma\}.$$

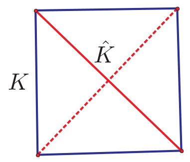


Слика 2.21: Пуни подкомплекс

Означимо скуп $\mathrm{core}\,\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{S} | \mathrm{star}\, v \neq K\}$. *Срж* од K је подкомплекс $\mathrm{core}K = K_{\mathrm{core}S}$ тј. максимални подкомплекс који садржи сва темена чији се старови не поклапају са K.

Дефиниција 2.3.8. Нека је K симплицијални комплекс на $\mathcal{S}$ који није симплекс на $\mathcal{S}$. Дефинишимо дуални симплицијални комплекс симплицијалном комплексу K са

$$\hat{K} = \{\sigma \subset S | S \setminus \sigma \notin K\}.$$



Слика 2.22: Дуални симплицијални комплекс

Дуални симплицијални комплекси имају важну улогу у комбинаторним описивањима Александрове дуалности.

2.3.3 *Дијаграми простора и функтори* colim *и* hocolim

У овом делу ћемо кратко дефинисати важну технику за проучавање сложених комбинаторних структура и помоћу које се могу дефинисати многи интересантни објекти попут K-степена. Даћемо нихову генералну дефиницију, а углавном ће нас занимати посети страна симплицијалног комплекса и политопа. За доказе и детаљније проучавање препоручујемо радове [60] и [65].

Дефиниција 2.3.9. *P-дијаграм простора D* је следећа структура:

- Коначни посет $(P, \leq)$;
- Тополошки простори D_p за свако $p \in P$;
- Непрекидна пресликавања $d_{pq} : D_p \to D_q$ за сваки пар $q \leq p$ у P;

који задовољавају

$$d_{qr}(d_{pq}(x)) = d_{pr}(x)$$

за све тројке $p \geq q \geq r$ у P и $x \in D_p$.

Дефиниција 2.3.10. colim *од P-дијаграма D* је тополошки простор

$$\mathrm{colim} D = \coprod_{p \in P} D_p / \sim,$$

где је $\sim$ идентификација за $p \leq q$ у P, и где $x \in D_p$ и $d_{pq}(x) \in D_q$.

Функтор colim дијаграма нема хомотопска својства. Уколико имамо два P-дијаграма D и E са хомотопијама $\alpha_p : D_p \to E_p$ за свако P и комутативне дијаграме

$$\begin{array}{ccc} D_p & \xrightarrow{\alpha_p} & E_p \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_{pq}} & & \big\downarrow{\scriptstyle e_{pq}} \\ D_q & \xrightarrow{\alpha_q} & E_q \end{array}$$

за све $p > q$, генерално је

$$\mathrm{colim} D \not\simeq \mathrm{colim} E.$$

Да би се овај проблем превазишао постоји други функтор који мења colim.

Дефиниција 2.3.11. Нека је D P-дијаграм. Дефинишимо $\mathcal{T}$ као џоин свих простора у дијаграму њиховим улагањем у косе афине потпросторе. Тачке од $\mathcal{T}$ се могу параметаризовати

$$\left\{ \sum_{p \in P} t_p x_p \mid x_p \in D_p, 0 \leq t_p \leq 1 \text{ и } \sum_{p \in P} t_p = 1 \right\}.$$

Хомотопски colim *од* D је

$$\mathrm{hocolim} D =$$

$$= \left\{ t_0 x_0 + \cdots + t_m x_m \mid x_i \in D_{p_i}, p_0 < \cdots < p_m,\ d_{p_{i+1} p_i}(x_{i+1}) = x_i \right\} \subseteq \mathcal{T}.$$

Следећа теорема говори о хомотопској особини функтора $\mathrm{hocolim}$:

Теорема 2.3.1. *Нека су D и E два P-дијаграма са хомотопијама $\alpha_p : D_p \to E_p$ за свако $p \in P$ и комутативним дијаграмима*

$$\begin{array}{ccc} D_p & \xrightarrow{\alpha_p} & E_p \\ \big\downarrow{\scriptstyle d_{pq}} & & \big\downarrow{\scriptstyle e_{pq}} \\ D_q & \xrightarrow{\alpha_q} & E_q \end{array}$$

за све $p > q$. Тада је

$$\mathrm{hocolim} D \simeq \mathrm{hocolim} E.$$

Веома је значајно и тврђење добијено у раду Zigler-Živaljević [65]:

Теорема 2.3.2 (Лема о клину)**.** *Ако је D P-дијаграм простора са свим константним пресликавањима, тада је*

$$\mathrm{hocolim} D \simeq \Delta(P) \bigvee_{p \in P} (\Delta(P) * D_p) .$$

2.4 K степени

У овој глави дефинишемо K степене и наводимо неке од њихових особина. Иако су релативно млад објекат у математици, они играју важну улогу у торусној топологији и комбинаторици.

Пратићемо терминологију коју су користили Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler у радовима [3] и [2]. Под полиедром сматрамо геометријску реализацију симплицијалног комплекса. K-степени су функтори из категорије симплицијалних комлекса чије су вредности потпростори производа тополошких простора. Пре него што дамо дефиницију увешћемо следеће ознаке:

1. $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ означава скуп уређених парова CW -комплекса.

2. Са K означавамо апстрактни симплицијални комплекс на m темена означе-них скупом $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Дакле, $(k-1)$-симплекс од K је задат уређеним низом $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ где је $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ тако да ако је $\tau \subset \sigma$, тада је τ симплекс од K. Празан скуп $\emptyset$ је такође симплекс од K. Скуп $[m]$ је минималан у смислу да свако $i \in [m]$ припада бар једном симплексу.

Сада ћемо дефинисати функтор из категорије симплицијалних комплекса у којој су морфизми симплицијална пресликавања у категорију повезаних CW комплекса у којој су морфизми непрекидна пресликавања.

Нека $(\underline{X}, \underline{A})$ означава колекцију скупова $\{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ и K симплицијални комплекс као што смо горе навели.

Дефиниција 2.4.1. *Генералисани момент угао комплекс* или *K-степен* одређен са $(\underline{X}, \underline{A})$ и K у ознаци

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$$

дефинишемо користећи функтор

$$D : K \to CW$$

на следећи начин: За свако $\sigma \in K$, нека је

$$D(\sigma) = \prod_{i=1}^{m} Y_i, \qquad \textit{где је} \qquad Y_i = \begin{cases} X_i & \textit{ако} \quad i \in \sigma \\ A_i & \textit{ако} \quad i \notin \sigma \end{cases}$$

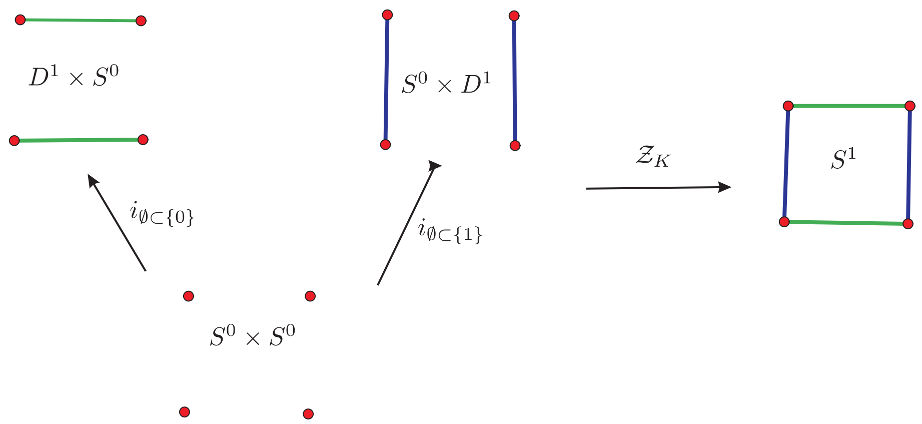
и $D(\emptyset) = A_1 \times \cdots \times A_m$.

K-степен је

$$\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} D(\sigma) = \mathrm{colim} D(\sigma)$$

где је colim дефинисан помоћу инклузија $i_{\sigma,\tau}$ када је $\sigma \subset \tau$ и $D(\sigma)$ са топологијом подскупа од производа $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Пример 27. Нека је $K = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ и $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(D^n, S^{n-1})\}_{i=1}^{2}$ тада је $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = D^n \times S^{n-1} \cup S^{n-1} \times D^n = D^n \times \partial D^n \cup \partial D^n \times D^n = \partial(D^n \times D^n) = \partial D^{2n} = S^{2n-1}$.



Слика 2.23: Пример 27

Пример 28. Нека је $K = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ и $(X_1, A_1) = (D^n, S^{n-1})$ и $(X_2, A_2) = (D^m, S^{m-1})$ тада је $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = D^n \times S^{m-1} \cup S^{n-1} \times D^m = D^n \times \partial D^m \cup \partial D^n \times D^m = \partial(D^n \times D^m) = \partial D^{m+n} = S^{m+n-1}$.

Пример 29. Нека је $K = \Delta^{m-1}$ стандардни симплекс. Тада је $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \prod_{i=1}^{m} X_i$.

Пример 30. Нека је $K = \partial \Delta^{m-1}$ и $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(D^{n_i}, S^{n_i-1})\}_{i=1}^{m}$. Тада је $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{i=1}^{m} D^{n_1} \times \ldots D^{n_{i-1}} \times S^{n_i-1} \times D^{n_{i+1}} \times \ldots D^{n_m} = \partial(D^{n_1} \times \cdots \times D^{n_m}) = \partial(D^{n_1+\cdots+n_m}) = S^{n_1+\cdots+n_m-1}$.

Дефиниција 2.4.2. Нека је K симплицијални комплекс на $[m]$ и $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(D^2, S^1)\}_{i=1}^m$. Тада се одговарајући $\mathcal{Z}_K(\underline{X}, \underline{A})$ обележава са

$$\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$$

и назива *момент-угао комплекс.*

Момент-угао комплекси су веома занимљиви простори, јер су нашли примену у комбинаторици, изучавању f вектора политопа и аранжманима. У монографији Бухштабера и Панова [13] дат је леп и прилично елементаран приказ ових простора, њихове ћелијске структуре као и тополошких инваријанти. Многе теореме које ћемо овде навести без доказа, у овој монографији су доказане пратећи особине кубичних комплекса, која има велику аналогију са симплицијалним комплексима. Интересовање за ове просторе и њихове комбинаторне и тополошке особине је у последњих двадесет година је велико и све чешће се срећу у многим другим областима математике.

Теорема 2.4.1. *Нека је K симплицијална $(n-1)$-сфера. Тада је $\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)$ затворена $(m+n)$-димензионална многострукост.*

Из везе између симплицијалних и кубичних комплекса добија се следећа лепа особина момент-угао комплекса:

Став 2.4.1. *Нека су K_1 и K_2 симплицијални комплекси. Тада је*

$$\mathcal{Z}_{K_1 * K_2}(D^2, S^1) = \mathcal{Z}_{K_1}(D^2, S^1) \times \mathcal{Z}_{K_2}(D^2, S^1).$$

Кохомолошки прстен је описан следећом теоремом [13]:

Теорема 2.4.2. *Важи следећи изоморфизам алгебри:*

$$H^*\left(\mathcal{Z}_K(D^2, S^1)\right) \cong Tor_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\left(\mathbf{k}(K), \mathbf{k}\right).$$

3. ПОЛИТОПИ

3.1 Дефиниције политопа

3.1.1 Дефиниције политопа и њихова еквивалентност

Постоје два алгоритамски различита начина да се дефинишу политопи у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$. Као што ћемо показати, ове две дефиниције су еквивалентне, а имајући у виду бројне комбинаторне и геометријске особине политопа важно је имати у виду обе дефиниције. Наша експозиција основних својстава политопа у највећој мери се ослања на чувену монографију Ziegler-a, *Lectures on Polytopes*, [64]. У [34] је такође веома лепо изложена теорија политопа.

Дефиниција 3.1.1. *Конвексни йолийой (йолийой) N* је конвексан омотач коначног скупа тачака у $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 3.1.2. *Конвексни йолийой (йолийой) H* је ограничен подскуп простора $\mathbb{R}^n$ који је пресек коначног броја полупростора у $\mathbb{R}^n$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle l_i, x\rangle \geq a_i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

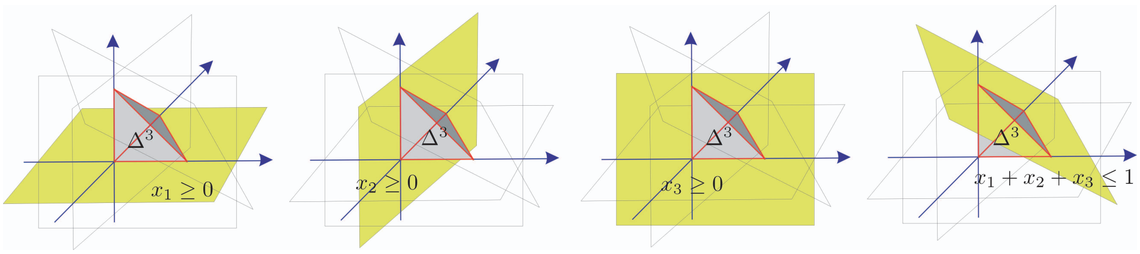
где су $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ линеарне функције и $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$.

Дефиниција 3.1.1 каже да је сваки политоп конвексан омотач неког коначног скупа $V = \{v_1, \ldots, v_n\}, V \subset \mathbb{R}^d$, тј.

$$P = \mathrm{conv} V =$$

$$= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}.$$

Дефиниција 3.1.2 каже да је сваки политоп скуп решења коначног броја линеарних неједначина.



Слика 3.1: Симплекс дефинисан хиперравнима

Пример 31. n-симплекс Δ^n је по дефиницији N политоп. n-симплекс је и H-политоп, јер се може видети и као решење скупа линеарних неједначина $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1$ и $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$.

Следећа три става су директна последица одговарајућих дефиниција.

Став 3.1.1. *Нека је H политоп (у смислу дефиниције 3.1.2) и L афини потпростор, тада је $H \cap L$ такође политоп (у смислу дефиниције 3.1.2).*

Став 3.1.2. *Нека су P и Q политопи (у смислу дефиниције 3.1.2), тада је $P \cap Q$ такође политоп (у смислу дефиниције 3.1.2).*

Став 3.1.3. *Нека је $N \supset \mathbb{R}^d$ политоп (у смислу дефиниције 3.1.1) и $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ пројекција, тада је $\pi(N)$ такође политоп (у смислу дефиниције 3.1.1).*

Став 3.1.4. *Нека је $H \supset \mathbb{R}^d$ политоп (у смислу дефиниције 3.1.2) и $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ пројекција, тада је $\pi(H)$ такође политоп (у смислу дефиниције 3.1.2).*

Доказ. Нека је $H = \{w \in \mathbb{R}^d \mid \langle l_i, w\rangle \geq a_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, где су $l_i \in \left(\mathbb{R}^d\right)^*$ линеарне функције и $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$. Имамо следећи систем еквиваленција

$$x \in \pi(H) \Leftrightarrow (\exists y)(x, y) \in H \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)\langle l_i, (x, y)\rangle \geq a_i, \text{ за све } i = 1, \ldots, m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists y)\text{задовољава свих } m \text{ неједначина решених по } y \Leftrightarrow$$

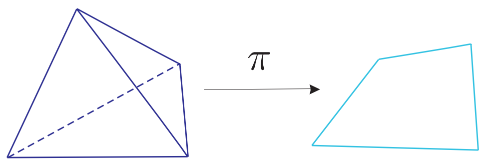
$$\Leftrightarrow \text{свака решена неједначина типа}' \leq y'$$

$$\text{је мања или једнака од сваке решене неједначина типа}' \geq y'.$$

Сада јасно следи да је $\pi(H)$ такође политоп у смислу дефиниције 3.1.2. $\square$

Став 3.1.5. *Нека је $N \supset \mathbb{R}^d$ политоп (у смислу дефиниције 3.1.1), тада постоји пројекција $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ таква да је $N = \pi(\Delta)$.*

Доказ. Нека је $N = \mathrm{conv}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Дефинишимо пројекцију $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ са $\pi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.



Слика 3.2: Пројекција симплекса

Одавде је јасно да је $N = \pi(\Delta)$. □

Став 3.1.6. *Нека је $H \supset \mathbb{R}^d$ политоп (у смислу дефиниције 3.1.2), тада је $H = \Delta \cap L$ за неки симплекс Δ и афини потпростор L.*

Доказ. Нека је H задато са m линеарних неједначина као у дефиницији 3.1.2. Уведимо m нових променљивих за леве стране тих неједначина и решимо систем од m једначина (са старим променљивима) по новим променљивима. Јасно, решења система нам дефинишу један афин потпростор L у $\mathbb{R}^m$. m неједнакости нам очигледно дефинишу симплекс Δ и очигледно је $H = \Delta \cap L$. □

Став 3.1.7. *Нека је L афини потпростор, тада је $\Delta \cap L$ политоп (у смислу дефиниције 3.1.1).*

Доказ. Имамо да је $\partial\Delta^n = \bigcup \Delta^{n-1}$. Тврђење је тривијално за Δ^1. Претпоставимо да је тврђење тачно за неки природан број $n-1$. Имамо да је $\Delta^n \cap L$ конвексан и ограничен скуп. На основу индуктивне хипотезе $\Delta^{n-1} \cap L$ је конвексан омотач коначног скупа V. Нека је W унија свих V за свако Δ^{n-1} из $\partial\Delta^n$. Очигледно је $\mathrm{conv}W \subseteq \Delta^n \cap L$. И обрнута инклузија важи. Довољно ју је показати за тачке из $\mathrm{Int}\Delta^n \cap L$. Заиста за $x \in \mathrm{Int}\Delta^n \cap L$ важи да за свако $y \in W$ зрак $x + \lambda(y - x)$ мора пресећи $\partial\Delta^n$ бар у још једној тачки z. Међутим, x је тада на дужи yz која припада $\mathrm{conv}W$. Овим је став доказан. □

Сада ћемо доказати еквивалентност двеју дефиниција политопа.

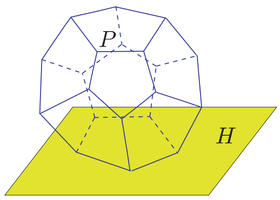
Теорема 3.1.1 (Главна теорема)**.** *Дефиниције 3.1.1 и 3.1.2 су еквивалентне.*

Доказ. $\Rightarrow$ Нека је P политоп који задовољава дефиницију 3.1.1. Тада је према ставу 3.1.5 $P = \pi(\Delta)$. Из примера 31, Δ је политоп који задовољава дефиницију 3.1.2. Сада на основу става 3.1.4 политоп $P = \pi(\Delta)$ задовољава дефиницију 3.1.2.

$\Leftarrow$ Нека је P политоп који задовољава дефиницију 3.1.2. Тада је према ставу 3.1.6 $P = \Delta \cap L$. Из примера 31, Δ је политоп који задовољава дефиницију 3.1.1. Сада на основу става 3.1.7 политоп $P = \Delta \cap L$ задовољава дефиницију 3.1.1. $\square$

Дефиниција 3.1.3. *Димензија политопа* је димензија његовог афиног омотача.

Нека је $P \subset \mathbb{R}^n$ политоп димензије n. Афина хиперраван H се назива *носачем политопа* уколико пресеца P и цео политоп P је садржан у једном од два затворена полупростора одређена овом хиперравни.



Слика 3.3: Носач политопа

Дефиниција 3.1.4. Пресек политопа и носача политопа назива се *страна политопа*. Унутрашњост политопа се сматра страном политопа. Остале стране називамо *правим странама*.

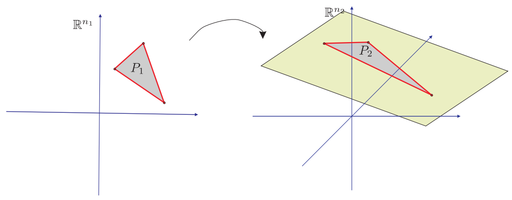
Граница политопа ∂P^n је унија свих његових правих страна. Праве стране су такође политопи мање димензије од n. 0-димензионалне стране зовемо *теменима*, 1-димензионе стране зовемо *ивицама*, а $(n-1)$-димензионе стране политопа P^n називамо *пљосни*.

Дефиниција 3.1.5. Два политопа $P_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $P_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ су *афино еквивалентна* или *афино изоморфна* ако постоји афино пресликавање $\mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ које је бијекција међу тачкама тих политопа.

Теорема 3.1.2. *Политоп димензије n са m пљосни је афино еквивалентан пресеку позитивног конуса*

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_i \geq 0, i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^m$$

и неке n-равни.



Слика 3.4: Афино еквивалентни политопи

Доказ. Нека је $P \subset \mathbb{R}^n$ n-политоп дефинисан као у 3.1.2 за неке $l_i \in (\mathbb{R}^n)^*$, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$. Нека је L $n \times m$ матрица чије су колоне вектори l_i написани у стандардној бази од $(\mathbb{R}^n)^*$, тј. $L_{ji} = (l_i)_j$. Теме политопа се добија као пресек најмање n хиперравни, па је матрица L ранга n. Слично, нека је $a = (a_1, \ldots, a_m)^t \in \mathbb{R}^m$ колона вектор. Тада се неједначине из дефиниције 3.1.2 могу написати у облику

$$P = \left\{ x \in R^n \mid (L^t x + a)_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}, \tag{3.1}$$

где је L^t транспонована матрица и $x = (x_1, \ldots, x_m)^t$ колона вектор. Посматрајмо афино пресликавање

$$A_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, A_P(x) = L^t x + a \in \mathbb{R}^m.$$

Из (3.1) следи да је $A_P(P)$ пресек једне n-равни у $\mathbb{R}^m$ и конуса $\mathbb{R}^m_+$. Нека је W $m \times (m-n)$ матрица чије колоне формирају базу линеарних зависности међу векторима l_i. W је ранга $(m-n)$ која задовољава $LW = 0$. Одавде следи да је

$$A_P(P) = \left\{ y \in R^m \mid W^t y = W^t a, y_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \right\}.$$

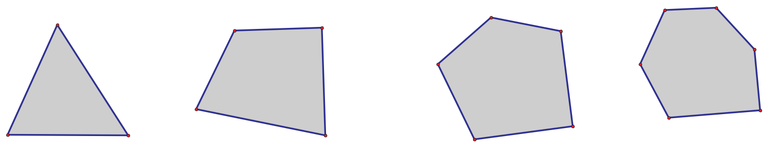
Према дефиницији 3.1.5 политопи $A_P(P)$ и P су афино еквивалентни. □

3.1.2 Примери неких политопа

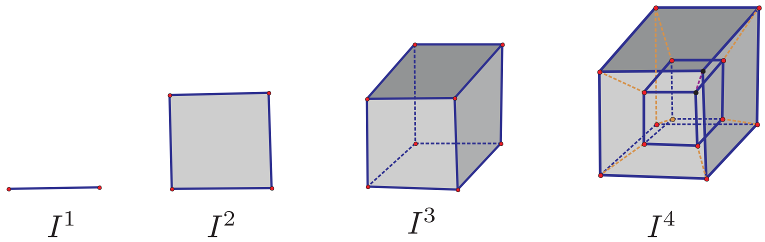
Поред симплекса представићемо и још неке примере и класе политопа.

Пример 32. 2-димензионални политопи се називају *полигони* или *многоуглови.* Према броју темена називамо их n-*тоуглови.*

Пример 33. *d-димензионални куб I^d* или *хиперкоцка* је политоп који представља конвексан омотач 2^d тачака у $\mathbb{R}^d$ чије су координате 0 или 1. Овај политоп је задат неједначинама $0 \leq x_i \leq 1$, за $i = 1, \ldots, d$.

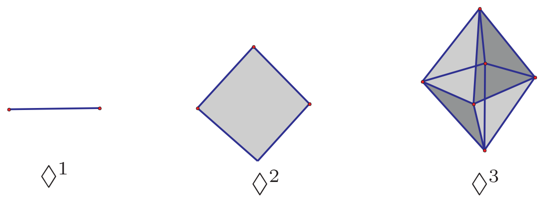


Слика 3.5: Полигони



Слика 3.6: Кубови

Пример 34. *Крос политоп* $\lozenge^n$ је конвексни омотач тачака $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$ у $\mathbb{R}^n$ где је $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ стандардна база у $\mathbb{R}^n$.

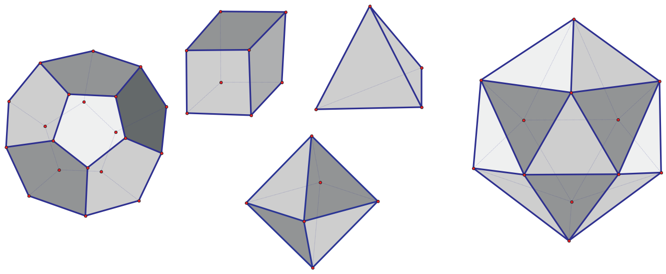


Слика 3.7: Крос политопи

Дефиниција 3.1.6. Политоп се назива *правилним* ако је његова група изометрија транзитивна на свим флаговима (тј. на низу инклузија: теме, ивица, 2-страна, ..., пљосан).

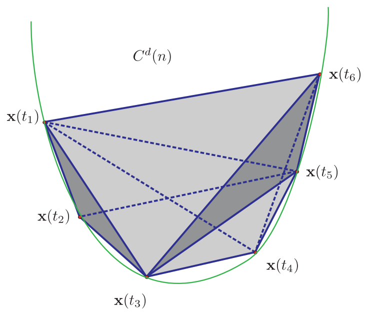
Пример 35. *Правилни политопи димензије* 2 *су правилни полигони: једнакостранични троугао, квадрат, правилни, петоугао, ... Правилни политопи у димензије* 3 *су Платонова тела или правилни полиедри: тетраедар, коцка, октаедар, додекаедар и икосаедар.*

Код политопа димензије $n \geq 4$ постоје правилни симплекси, хиперкоцке и крос политопи који су аналогони тетраедра, коцке и октаедра. У димензији $n \geq 5$ то су и једини правилни политопи. У димензији $n = 4$ постоје још три правилна политопа: 24-ћелија (24 октаедарских пљосни), 120-ћелија (120 додекаедарских пљосни) и 600-ћелија (600 икосаедарских пљосни).



Слика 3.8: Платонова тела

Пример 36. *Циклични политоп* $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ је конвексни омотач тачака $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \ldots, \mathbf{x}(t_n)$ које леже на момент кривој $\mathcal{C} = \{(t, t^2, \ldots, t^d) | t \in \mathbb{R}\}$ и где је $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.



Слика 3.9: Циклични политоп

Циклични политопи су веома важни у теорији политопа. Често се јављају као класа политопа која реализује неко комбинаторно или екстремално својство политопа. Следећи став, познат као Gale-ов услов парности [31], показаће да су темена политопа $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ тачке и $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2)$, $\ldots$, $\mathbf{x}(t_n)$ и да су сви политопи $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ афино изоморфни безобзира на избор параметара $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.

Став 3.1.8 (Gale-ов услов парности). *Нека је $n > d \geq 2$, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ реални параметри. Циклични политоп $C_d(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathrm{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_n)\}$ је d димензионални политоп чија су све стране симплекси. Подскуп $S \subseteq [n]$, $|S| = d$ формира пљосан политопа $C_d(n)$ ако и само ако је испуњен следећи „услов парности“:*

Ако $i < j$ не припадају скупу S, тада је број $k \in S$, $i < k < j$ паран.

Доказ. Пођимо од Вандермондовог идентитета

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{d-1} & t_1^{d-1} & \dots & t_d^{d-1} \\ t_0^d & t_1^d & \dots & t_d^d \end{vmatrix} = \prod_{0\le i<j\le d} (t_j - t_i).$$

Из овог идентитета следи да је било којих $d+1$ тачака на момент кривој афино независно. Одавде следи да су пљосни политопа $C_d(n)$ $d-1$ симплекси и да су све стране такође симплекси.

Нека је $S = \{i_1, \dots, i_d\} \subseteq [n]$. Хиперраван H_S кроз одговарајуће тачке $\mathbf{x}(t_{i_s})$ је дефинисана са

$$H_S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid F_S(\mathbf{x}) = 0\right\},$$

где је

$$F_S(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_{i_1}) & \dots & \mathbf{x}(t_{i_d}) \end{pmatrix}.$$

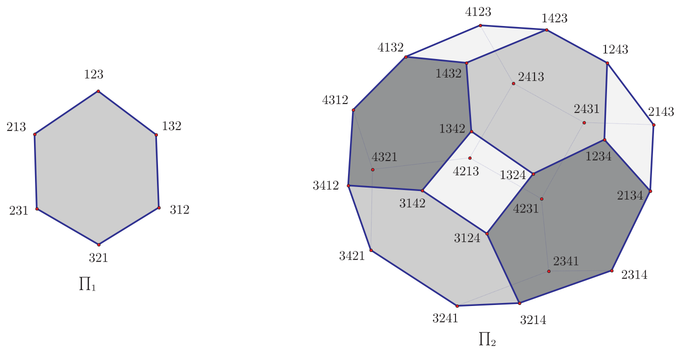
Дакле, $F_S(\mathbf{x})$ је линеарна функција по $\mathbf{x}$, која има нуле у датим тачкама $\mathbf{x}(t_{i_s})$.

За тачку $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}$ са момент криве $F_S(\mathbf{x}(t))$ је полином по t степена d чије су нуле t_{i_1}, $t_{i_2}, \dots, t_{i_d}$. У свим овим тачкама вредност полинома $F_S(\mathbf{x}(t))$ мења знак. Хиперраван H_S формира пљосан ако и само ако вредности $F_S(\mathbf{x}(t_i))$ имају исти знак за све $i \in [n] \setminus S$. Ово је испуњено ако и само ако за све $i < j, i, j \in [n] \setminus S$ има паран број промена знакова $F_S(\mathbf{x}(t))$ тј. паран број елемената из S. □

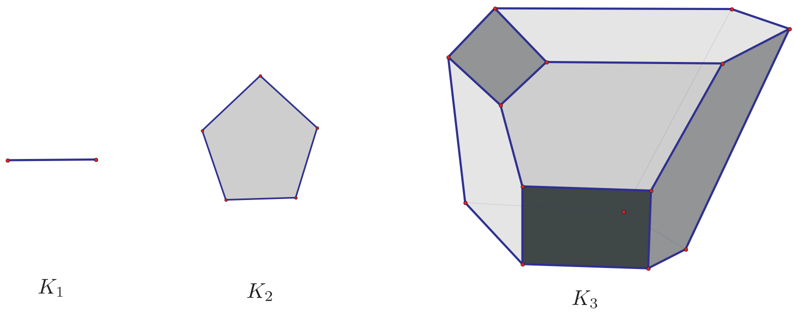
Пример 37. *Пермутоедар* $\Pi_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ је политоп који се дефинише као конвексан омотач тачака који се добијају свим могућим пермутацијама координата тачке $(1, 2, \dots, d)$.

Темена пермутоедра се могу идентификовати са пермутацијама $\mathcal{S}_d$ скупа од d елемената, при чему су два темена повезана ивицом ако и само ако се пермутације разликују за тачно једну суседну транспозицију. k-стране пермутоедра одговарају уређеним разбијањима скупа $[d]$ на $d-k$ непразних делова. Пљосни одговарају поделама скупа $[d]$ на делове $(A, [d] \setminus A)$ где је $\emptyset \subset A \subset [d]$.

Пример 38. *Асоциедар* или *политоп Сташева* K_n је конвексни политоп димензије n чије су k-стране у бијекцији са бинарним дрветима које имају $n-k+1$ унутрашњих чворова и $n+2$ листова.



Слика 3.10: Пермутоедри



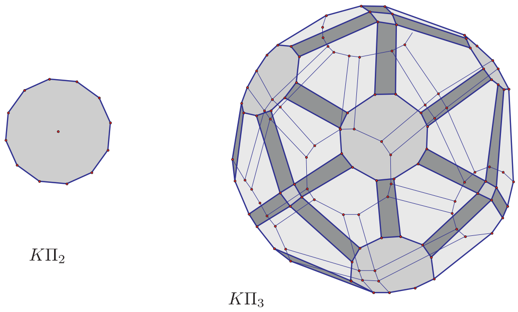
Слика 3.11: Асоциедри

Асоциедри су важна класа политопа која се појављује у теорији простора петљи, комбинаторици и др. Стране асоциедра се могу схватити као повлачење $n-k$ непресецајућих дијагонала у конвексном $(n+2)$-тоуглу. Темена асоциедра одговарају правилном постављању n-парова заграда у терм $x_1x_2\ldots x_{n+2}$. Loday [43] је описао асоциедар експлицитно задајући координате његових темена.

Пример 39. *Пермутоасоциедар* или *политоп Капранова* $K\Pi_n$ је конвексни политоп димензије n чије су стране у бијекцији са свим начинима да се помноже термови a_1, a_2, $\ldots$, a_n у произвољном редоследу, претпостављајући да множење није ни комутативно нити асоцијативно при чему је дозвољено делимично правилно заграђивање.

Пример 40. *Биркхофов политоп* или *политоп двоструко стохастичких матрица* или *политоп савршеног спаривања од* $K_{n,n}$ је политоп који је конвексан омотач тачака x^σ у $\mathbb{R}^{d^2}$

$$P(d)=\operatorname{conv}\{x^\sigma \mid \sigma\in\mathcal{S}_d\}\subseteq\mathbb{R}^{d^2},$$



Слика 3.12: Пермутоасоциедри

где је σ пермутација скупа $\{1, \ldots, n\}$, а тачка x^σ је $0/1$ матрица дефинисана са

$$x^\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако је } \sigma(i) = j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

3.2 Комбинаторна својства политопа

3.2.1 Комбинаторна еквивалентност политопа

Сада ћемо описати нека комбинаторна својства политопа. Постоји јака веза и аналогија између комбинаторике политопа и комбинаторике симплицијалних комплекса.

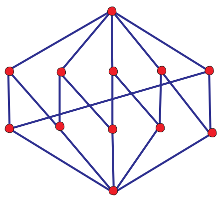
Дефиниција 3.2.1. *Посет страна политопа* P чини скуп свих страна политопа који је парцијално уређен у односу на инклузију.

Дефиниција 3.2.2. Два политопа су *комбинаторно еквивалентна* ако постоји бијекција између скупова њихових страна која поштује релацију инклузије међу странама.

Из дефиниција 3.2.1 и 3.2.2 следи да су два политопа комбинаторно еквивалентна ако и само ако су им посети страна изоморфни.

Посет страна политопа се често шематски представља *Хасеовим дијаграмом*. Хасеов дијаграм је (орјентисан) граф чија су темена стране политопа, укључујући празан скуп и сам политоп, а свака ивица графа повезује неку F_i^k k-страну и F_j^{k+1} $(k+1)$-страну такву да је $F_i^k \subset F_j^{k+1}$.

Пример 41. На слици је приказан посет страна петоугла. На најнижем нивоу је празна страна, затим темена, потом странице и на највишем нивоу сам петоугао.



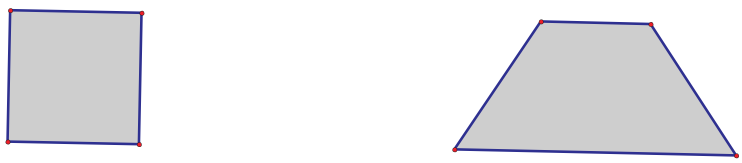
Слика 3.13: Хасеов дијаграм за петоугао

Дефиниција 3.2.3. *Комбинаторни политоп* је класа комбинаторно еквивалентних конвексних политопа.

Комбинаторни политоп је одређен посетом страна (геометријског) политопа.

Два афино изоморфна политопа су комбинаторно еквивалентна, али обрнуто не мора да важи.

Пример 42. *Трапез и квадрат су примери два комбинаторно еквивалентна, а афино неизоморфна политопа.*



Слика 3.14: Комбинаторно еквивалентни и афино неизоморфни политопи

3.2.2 Прости и симплицијални политопи; поларност између политопа

За скуп од $m > n$ тачака у $\mathbb{R}^n$ кажемо да су *општем положају* уколико никојих $n+1$ од њих не лежи у истој афиној хиперравни. Уколико је политоп конвексан омотач коначног скупа тачака у општем положају у $\mathbb{R}^n$, следи да свака пљосан овог политопа има минималан број темена n тј. да су све стране оваквог политопа симплекси. Политопе са овом особином називамо *симплицијалним*.

Пример 43. Симплекс и крос-политоп су примери симплицијалних политопа.

За скуп од $m > n$ хиперравни у $\mathbb{R}^n$ кажемо да су у општем положају уколико никојих $n+1$ од њих немају заједничку тачку. Уколико је политоп ограничен хиперравнима које се налазе у општемо положају, тада се тачно n пљосни сусреће у сваком темену политопа. Такве политопе називамо *простим*.

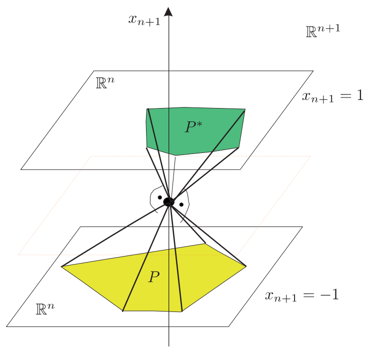
Пример 44. Полигони и куб су примери простих политопа.

Следећи став се лако добија коришћењем дефиниција простих и симплицијалних политопа.

Став 3.2.1. *Једини политопи који су истовремено и симплицијални и прости су полигони и симплекси.*

Дефиниција 3.2.4. *Поларни скуп* $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$ подскупа $P \subset \mathbb{R}^n$ је скуп дефинисан са

$$P^* = \{x' \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x', x \rangle \geq -1 \text{ за све } x \in P\}.$$



Слика 3.15: Поларни скуп

Према дефиницији 3.2.4 могуће је дефинисати објекат $(P^*)^*$ који називамо *дуални-полар* и обележавамо P^{**}. За њега важи да је

$$P^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle c, x \rangle \geq -1 \text{ за све } x \in P \text{ повлачи } \langle c, y \rangle \geq -1, \text{ за } c \in (\mathbb{R}^n)^*\}.$$

Следећа теорема нам описује неке важне особине ових конструкција.

Теорема 3.2.1. (i) *Ако је* $P \subseteq Q$ *тада је* $P^* \supseteq Q^*$ *и* $P^{**} \subseteq Q^{**}$*,*
(ii) $P \subseteq P^{**}$*,*
(iii) P^* *и* P^{**} *су конвексни скупови,*
(iv) $\mathbb{O} \in P^*$*, и* $\mathbf{0} \in P^{**}$*,*
(v) *Ако је* P *политоп и* $\mathbf{0} \in P$*, тада је* $P = P^{**}$*,*
(vi) *Ако је* P *политоп и* $\mathbf{0} \in \mathrm{int}(P)$ *задат са* $P = \mathrm{conv}(V)$*, тада је*

$$P^* = \{a \mid \langle a, v \rangle \geq -1, \text{ за све } v \in V\},$$

Доказ. Особине (i), (ii), (iii) и (iv) се директно проверају користећи дефиниције P^* и P^{**}.

Нека је $y \in P^{**} \setminus P$. Тада за је за свако $c \in (\mathbb{R}^n)^*$ испуњено $\langle c, y\rangle \geq -1$ јер $\mathbf{0} \in P$. Но, одавде мора бити $y = \mathbf{0} \in P$. Дакле, важи особина (v).

За особину (vi) потребно је доказати једнакост

$$\{a \mid \langle a, x\rangle \geq -1, \text{ за све } x \in P\} = \{a \mid \langle a, v\rangle \geq -1, \text{ за све } v \in V\}\,.$$

Инклузија „$\subseteq$“је очигледна, док инклузија „$\supseteq$“следи из конвексности политопа тј. из чињенице да се свака тачка $x \in P$ може представити у облику $x = \sum\limits_{v_i \in V} \lambda_i v_i$, где су $0 \leq \lambda_i \leq 1$, такви да је $\sum \lambda_i = 1$. □

Теорема 3.2.1 има следеће важне последице.

Последица 1. *Уколико је P политоп $\mathbf{0} \in \operatorname{int}(P)$ тада је и P^* политоп.*

Уколико се држимо комбинаторних политопа можемо закључити да је:

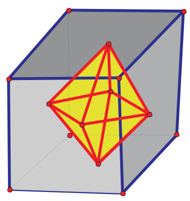
Последица 2. *Полар простог политопа је симплицијални политоп и полар симплицијалног политопа је прост политоп.*

Пример 45. Поларни политоп од симплекса је такође симплекс.

Пример 46. Поларни политоп куба је крос-политоп и обратно.

Пример 47. Додекаедар и икосаедар су једно другом поларни политопи.

Поларни политоп се заправо може схватити као политоп који има обрнут посет страна тј. темена му одговарају пљоснима, пљосни теменима и уопште k-стране одговарају $(n-k)$-странама.



Слика 3.16: Поларни политопи

3.2.3 Комбинаторне инваријанте политопа

Слично као и код симплицијалних комплекса, увећемо појмове f и h вектора за симплицијалне и просте политопе. Нека је P симплицијални политоп и f_i број његових i страна. Такође, дефинишимо да је $f_{-1} = 1$.

Дефиниција 3.2.5. Нека је P симплицијални политоп, тада целобројни вектор $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ зовемо *f-вектором* од P. *h-вектор* од P је целобројни вектор $\mathbf{h}(P) = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$ где су h_i дефинисани једначином

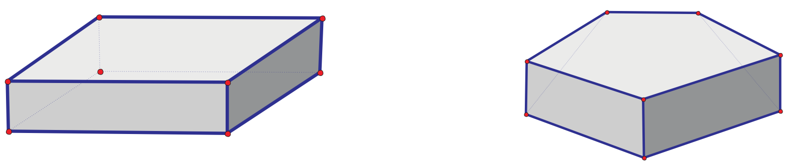
$$h_0 t^n + \cdots + h_{n-1}t + h_n = (t-1)^n + f_0(t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}. \tag{3.2}$$

Низ $(g_0, g_1, \ldots, g_{[\frac{n}{2}]})$ где је $g_0 = 1, g_i = h_i - h_{i-1}, i > 0$ се назива *g-вектор* од P.

Према последици 2 полар простог политопа је симплицијални политоп, па се f-вектор, h-вектор и g-вектор простих политопа дефинишу као f-вектор, h-вектор и g-вектор поларног политопа. То значи да код простог политопа P f-вектор $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$, f_k означава број $(n-k-1)$-страна политопа P.

Очигледно је да f-вектор зависи само од посета страна политопа, па представља комбинаторну инваријанту политопа.

Пример 48. Два комбинаторно различита политопа могу имати исте f-вектор. Прости политопи са слике имају исте f-векторе $(6, 12, 8)$.



Слика 3.17: Комбинаторно различити политопи са истим f-векторима

Све релације за f-вектор, h-вектор и g-вектор које су важиле код симплицијалних комплекса важе и за симплицијалне и просте политопе. Подсетимо се да су f-вектор и h-вектор одређују један другог линеарним релацијама:

$$h_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{n-i}{n-k}f_{i-1},\; f_{n-1-k} = \sum_{q=k}^{n}\binom{q}{k}h_{n-q},\; k = 0, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Дефиниција h-вектора може деловати неприродно на први поглед, али код политопа она носи веома важне комбинаторно-геометријске и алгебарске информације о политопу и често је много погоднији за изучавање од f-вектора.

Пошто су политопи као тополопошки простори хомеоморфни сфери, а Ојлерова карактеристика сфере је $(-1)^n + 1$ то је

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n + 1. \tag{3.4}$$

Имајући у виду (3.3), једнакост (3.4) се записује у облику

$$h_0 = h_n = 1.$$

Ова релација има своју генерализацију у виду Dehn-Samervil-ових једнакости.

Теорема 3.2.2 (Dehn-Samervil-ове једнакости). *h-вектор симплицијалног или простог политопа је симетричан, тј. за свако $i = 0, 1, \ldots, n$ важи*

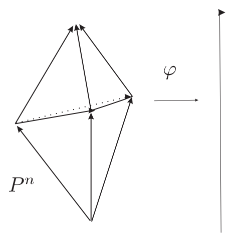
$$h_i = h_{n-i}.$$

Доказ. Нека је $P^n \subset \mathbb{R}^n$ прост политоп. Нека је $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ линеарна функција која узима различите вредности на теменима политопа тј. $\varphi(v_i) \neq \varphi(v_j)$ за различита темена v_i и v_j. То значи да φ можемо схватити као функцију висине, тј. ивице политопа можемо орјентисати од темена са мањом вредношћу функције φ ка темену са већом вредношћу функције φ. Нека је $I(v)$ број излазних ивица из темена v. Свака k-страна од P^n има јединствено теме на ком φ достиже максимум, а како је k-страна сама за себе прост политоп, то у максималном темену има бар k излазних ивица. Приметимо следеће, свако теме индекса $I(v) = i$ одређује $\binom{i}{k}$ $(n-k-1)$-димензионалних страна од P^n. Нека је h'_k број темена v таквих да је $I(v) = n - k$. Дакле,

$$f_{n-k-1} = \sum_{i \geq k} \binom{q}{k} h'_k.$$

Но, имајући у виду једнакости (3.3) то је $h'_k = h_k$.

Приметимо да функција $-\varphi$ такође има описана својства као и φ. Значи свакој ивици



Слика 3.18: Функција висине

можемо променити усмерење и спровести исту причу као и малопре и добити да је

$$f_{n-k-1} = \sum_{i \geq k} \binom{q}{k} h'_{n-k}.$$

Одавде је $h'_{n-k} = h_k$, а већ смо показали да је $h'_{n-k} = h_{n-k}$, одакле следи $h_k = h_{n-k}$. Овим је тврђење доказано. □

Користећи једнакости (3.3), $\mathrm{Dehn\text{-}Samervil}$-ове једнакости се могу записати у облику

$$f_{k-1} = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} \binom{j}{k} f_{j-1},\ k = 0,\ 1,\ \ldots, n.$$

Имајући у виду дефиницију $\mathrm{Stanley\text{-}Reisner}$-овог прстена за симплицијалне комплексе (која важи и за симплицијалне политопе) могуће је дефинисати $\mathrm{Stanley\text{-}Reisner}$-ов прстен за просте политопе.

Нека је P прост n димензионални политоп и $F_1,\ \ldots,\ F_m$ његове пљосни. Нека је k фиксирани комутативни прстен са јединицом. Нека је $k[v_1, \ldots, v_m]$ полиномијална алгебра над k са m генератора са градуацијом $\deg(v_i) = 2$.

Дефиниција 3.2.6. *$\mathit{Stanley\text{-}Reisner}$-ов прстен* простог политопа P је квоцијентни прстен

$$k(P) = k[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_P,$$

где је $\mathcal{I}_P$ идеал генерисан безквадратним мономима $v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_s}$ таквим да је $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_s} = \emptyset$ у P, $i_1 < \cdots < i_s$.

Пример 49. Нека је P^2 m-тоугао, $m \geq 4$. Тада је

$$k(P^2) = k[v_1, \ldots, v_m]/(v_i v_j |\, |i-j| \not\equiv 0, 1 \bmod m).$$

Пример 50. Нека је $P = I^n$ куб. Тада је

$$k(I^n) = k[v_1, \dots, v_{2n}]/(v_i v_{i+n} | \, i = 1, \dots, n).$$

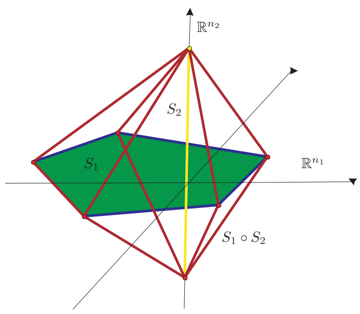
3.3 Операције са политопима

3.3.1 Производи и повезане суме простих политопа

Производ $P_1 \times P_2$ простих политопа P_1 и P_2 је такође прост политоп. Одговарајућа операција над симплицијалним политопима може се описати на следећи начин. Нека су $S_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $S_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ симплицијални политопи такви да оба садрже $\mathbf{0}$ у својим унутрашњостима. Дефинишимо операцију *поларни производ* $\circ$ на следећи начин

$$S_1 \circ S_2 = \operatorname{conv}(S_1 \times 0 \cup 0 \times S_2) \subset R^{n_1+n_2}.$$

Пошто су S_1 и S_2 симплицијални политопи следи да и $S_1 \circ S_2$ мора бити симплицијални политоп.



Слика 3.19: Поларни производ политопа

Став 3.3.1. *Нека су $P_1 \subset R^{n_1}$ и $P_2 \subset R^{n_2}$ прости политопи који садрже 0 у својим унутрашњостима. Тада важи једнакост*

$$P_1^* \circ P_2^* = (P_1 \times P_2)^*.$$

Доказ. Нека је $P_1 = \operatorname{conv}\{v_1, \dots, v_m\}$ и $P_2 = \operatorname{conv}\{w_1, \dots, w_l\}$. На основу дефиниције 3.2.4 имамо да је

$$(P_1 \times P_2)^* = \left\{x' \subset (\mathbb{R}^{n_1+n_2})^* \mid \langle x', (x_1, x_2)\rangle \geq -1 \text{ за све } (a, b) \in P_1 \times P_2\right\}.$$

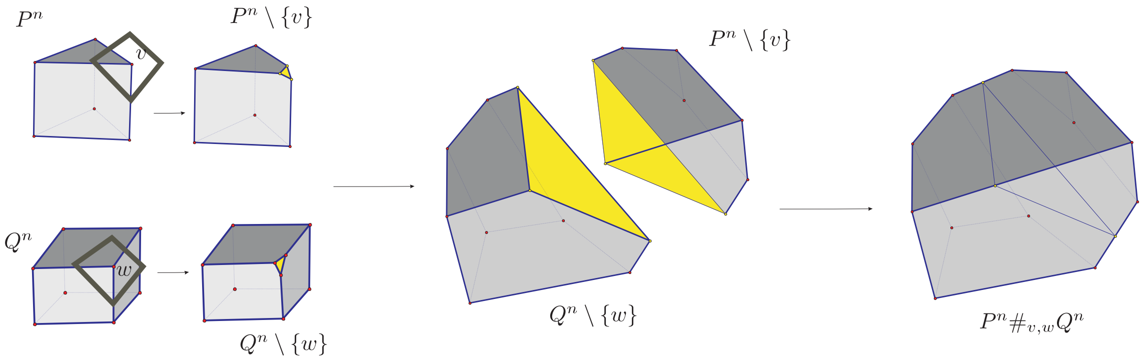
Како је $x' = (x_1', x_2')$ за $x'1 \in (\mathbb{R}^{n_1})^*$ и $x_2' \in (\mathbb{R}^{n_2})^*$. Како се свака тачка политопа може изразити преко конвексних комбинација темена то је

$$(P_1 \times P_2)^* =$$

$$= \operatorname{conv}\left\{(x_1', 0), (0, x_2') \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \langle x_1', v_i\rangle \geq -1, \langle x_2', w_j\rangle \geq -1, \text{ за све } v_i \text{ и } w_j\right\}.$$

Одавде директно следи тврђење. □

Повезана сума простих политопа исте димензије P^n и Q^n се може описати на следећи начин. Уочимо на политопима P^n и Q^n редом темена v и w. „Одсецимо“ v и w од политопа и појавиће нам се на сваком политопу пљосан у облику симплекса. Одговарајућом пројективном трансформацијом „слепљујемо“ ове пљосни и добијамо прост политоп $P^n \#_{v,w} Q^n$ који представља повезану суму простих политопа.



Слика 3.20: Повезана сума политопа

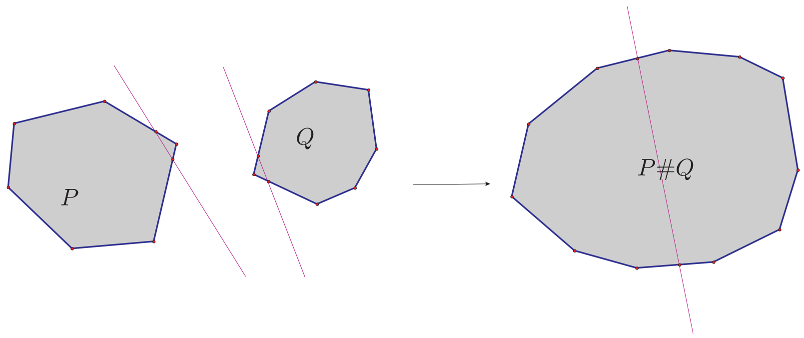
Уколико избор темена v и w не утиче у комбинаторном смислу на добијени политоп, тада се често повезана сума обележава само са $P^n \# Q^n$. Операције повезане суме за симплицијалне политопе је иста као и код симплицијалних комплекса.

Пример 51. Нека је P^2 n-тоугао и Q^2 m-тоугао, тада је $P \# Q$ $(n+m-2)$-угао.

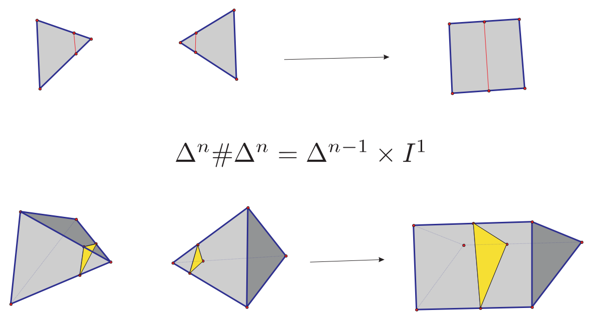
Пример 52. Ако су P и Q n-симплекси тада је $\Delta^n \# \Delta^n = \Delta^{n-1} \times I^1$.

Пример 53. Повезана сума $P^n \#_{v,w} \Delta^n$ је резултат „одсецања“ темена v од политопа P једном хиперравни која раздваја теме v и остала темена политопа P^n.

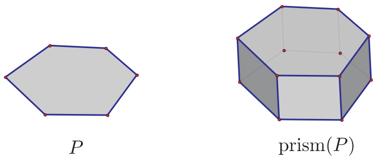
Призма над политопом P је политоп $\operatorname{prism}(P) = P \times I^1$.



Слика 3.21: Повезана сума полигона

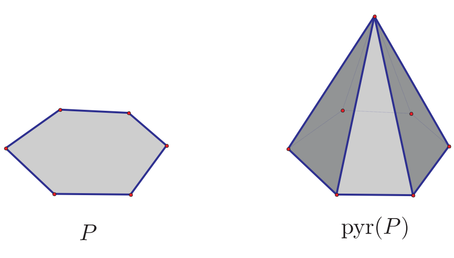


Слика 3.22: Повезана сума симплекса



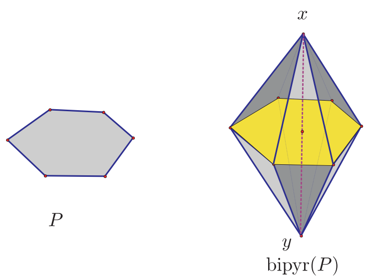
Слика 3.23: Призма над политопом

Пирамида над политопом P је политоп $\mathrm{pyr}(P) = \mathrm{conv}\{P \cup x\}$ где је x тачка која не лежи у афином омотачу скупа темена од P. Стране политопа $\mathrm{pyr}(P)$ су стране политопа P и пирамиде над странама од P.



Слика 3.24: Пирамида над политопом

Бипарамида над политопом P $\mathrm{bipyr}(P) = \mathrm{conv}\{P \cup x \cup y\}$ где су x и y тачке које не леже у афином омотачу скупа темена од P и дуж $\overline{xy}$ сече унутрашњост политопа P.



Слика 3.25: Бипирамида над политопом

Пример 54. За крос-политоп важи

$$\lozenge^{n+1} = \mathrm{bipyr}(\lozenge^n).$$

3.3.2 Суседски политопи

Сада ћемо описати једну класу политопа која се често среће у комбинаторици и дискретној математици.

Дефиниција 3.3.1. Симплицијални политоп P се назива k*-суседски* ако било којих k темена разапињу једну страну политопа. Прост политоп P је k*-суседски* ако било којих k пљосни има непразан пресек.

Став 3.3.2. *Нека је P^n симūлицијални k-суседски ūолиūоū и нека је $k > \left[\frac{n}{2}\right]$, ūада је P^n симлекс Δ^n.*

Доказ. Нека је m број темена политопа P^n. Имамо да је $f_i = \binom{m}{i}$ за $i = 0, 1, \ldots, k$, па је на основу (3.3)

$$h_i(P^n) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^i \binom{n-j}{i-j} \binom{m}{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \binom{-n+i-1}{i-j} \binom{m}{j} = \binom{m-n+i-1}{i}.$$

Искористимо сада Dehn-Samervil-ове једначине 3.2.2 $h_{\left[\frac{n}{2}\right]} = h_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ за непарно n и $h_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} = h_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ за парно n и у оба случаја добијамо да је $m = n+1$, одакле следи да је $P^n = \Delta^n$ симплекс. □

Због става 3.3.2 поставља се питање постоје ли политопи који имају произвољан број темена и који су $\left[\frac{n}{2}\right]$-суседски. Такви политопи постоје и они се називају *суседски йолийойи.*

Пример 55. Нека је $P = \Delta^2 \times \Delta^2$ производ два троугла. То је прост политоп код којег било које 2 пљосни имају заједничку 2-страну, па је то 2-суседски политоп. Његов полар је дакле суседски 4-димензионални политоп.

Став 3.3.3. *Циклични йолийойи из йримера 36 су йолийойи са йроизвољним бројем йемена који су суседски.*

Доказ. Нека је $C_d(t_1, \ldots, t_n)$ циклични политоп и нека су $\mathbf{x}(t_{i_1}), \ldots, \mathbf{x}(t_{i_k})$ произвољних k темена где је $k \leq \left[\frac{d}{2}\right]$. Желимо да докажемо да ових k тачака разапињу страну од k. Уочимо неко довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да је $t_i < t_i + \varepsilon < t_{i+1}$ за све $i < n$ и неко $M > t_n + \varepsilon$.

Уочимо тачке $\mathbf{x}(M+1), \ldots, \mathbf{x}(M+d-2k)$ на момент кривој које се налазе „јако далеко“ од политопа. Дефинишимо линеарну функцију $F_T(\mathbf{x})$ са

$$F_T(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_{i_1}) & \mathbf{x}(t_{i_1}+\varepsilon) & \ldots & \mathbf{x}(M+1) & \ldots & \mathbf{x}(M+d-2k) \end{pmatrix}.$$

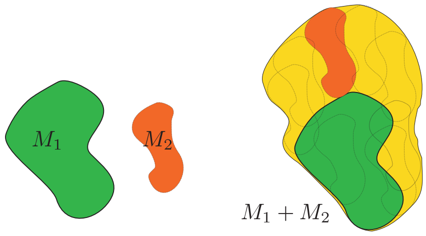
Ова функција има нуле у тачкама $\mathbf{x}(t_{i_1}), \ldots, \mathbf{x}(t_{i_k})$. Посматрајмо $F_T(\mathbf{x}(t))$ као полином по t. То је полином степена d који има d различитих нула t_{i_1}, $t_{i_1}+\varepsilon$, $\ldots$, t_{i_k}, $t_{i_k}+\varepsilon$, $M+1, \ldots, M+d-2k$. Између t_r и t_s таквих да $r \neq i_j$, $s \neq i_j$ за све $j = 1, \ldots, k$, $F_T(\mathbf{x}(t))$ има паран број нула јер нула у t_l долази у пару са нулом у $t_l + \varepsilon$. Према томе сва остала темена политопа налазе се са исте стране хиперравни $F_T(\mathbf{x}) = 0$, па ових k темена формира страну цикличног политопа. $\square$

3.3.3 Сума Минковског политопа и граф-асоциедри

Сада ћемо описати једну важну конструкцију у теорији конвексности и теорији политопа која је дата у [14].

Дефиниција 3.3.2. *Сума Минковсковског* два скупа M_1 и M_2 у $\mathbb{R}^n$ је скуп

$$M_1 + M_2 = \{x \in R^n \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$



Слика 3.26: Сума Минковског два скупа

Лема 3.3.1. *Сума Минковскоḡ два конвексна омоṫача неких скуṗова ṫачака је конвексни омоṫач некоḡ скуṗа ṫачака:*

$$\operatorname{conv}(v_1, \dots, v_k) + \operatorname{conv}(w_1, \dots, w_l) = \operatorname{conv}(v_1 + w_1, \dots, v_i + w_j, \dots, v_k + w_l).$$

Доказ. Нека је $M_1 = \operatorname{conv}(v_1, \dots, v_k)$ и $M_2 = \operatorname{conv}(w_1, \dots, w_l)$. Тада $v_i + w_j \in M_1 + M_2$ за свако $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq l$. Узмимо произвољне тачке $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$, тада је

$$x_1 = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i,\; x_2 = \sum_{j=1}^{l} \tau_j w_j,$$

за неке $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1, t_i \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{l} \tau_j = 1, \tau_j \geq 0$. Имамо да је

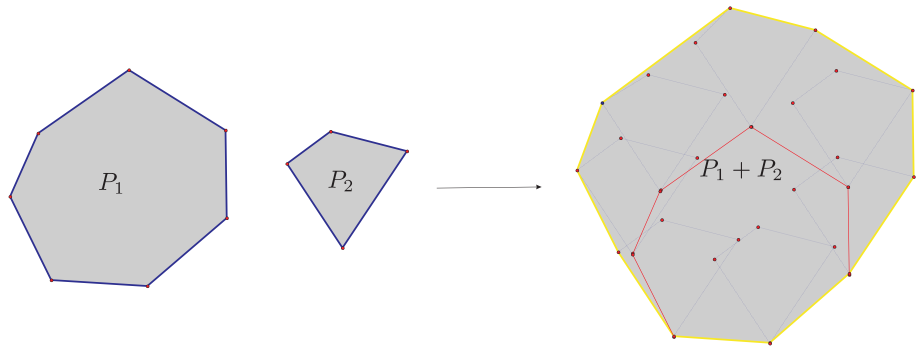
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \sum_{i=1}^{k} t_i \left(\sum_{j=1}^{l} \tau_j \right) v_i + \sum_{j=1}^{l} \tau_j w_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \xi_{ij} (v_i + w_j), \end{aligned}$$

где је $\xi_{ij} = t_i \tau_j \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \xi_{ij} = 1$. Овим смо и доказали лему. $\square$

Последица 3. *Сума Минковскоḡ два конвексна ṗолиṫоṗа је конвексан ṗолиṫоṗ.*

Означимо са $\mathcal{M}_n$ колекцију свих конвексних политопа у $\mathbb{R}^n$. Сума Минковског задаје структуру Абеловог моноида на $\mathcal{M}_n$, чији је неутрални елемент тачка $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ која има следеће особине:

1. Постоји канонски хомоморфизам $\mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n$, где је слика вектора $v \in \mathbb{R}^n$ политоп од једне тачке .



Слика 3.27: Сума Минковског два конвексна политопа

2. $\mathcal{M}_n$ поседује структуру $\mathbb{R}$-модула, за дато $\lambda \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathcal{M}_n$

$$\lambda M = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n \mid x \in M\}.$$

3. У $\mathcal{M}_n$ важи $M_1 + M = M_2 + M \Rightarrow M_1 = M_2$ за свако $M \in \mathcal{M}_n$.

4. Свако линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ индукује хомоморфизам

$$L_* : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_k.$$

Дефиниција 3.3.3. *Функција ослонца* за политоп $M \in \mathcal{M}_n$ је функција дефинисана са

$$s_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ s_M(x) = \max_{y \in M} \langle x, y \rangle,$$

где је $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ скаларни производ.

Из дефиниције 3.3.3 следе следеће особине функције s_M:

1. $s_M(\lambda x) = \lambda s_M(x)$ за сваки ненегативан скалар $\lambda \in \mathbb{R}$. Дакле, ако је $|x| \neq 0$, тада је $s_M(x) = |x| s_M\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

2. функција s_M је део-по-део линеарна.

3. функција s_M је линеарна ако и само ако је M тачка у $\mathbb{R}^n$.

4. функција s_M је конвексна функција, тј.

$$s_M(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t s_M(x_1) + (1-t) s_M(x_2)$$

за било које x_1 и x_2 и $t \in [0,1]$.

Лема 3.3.2. *За било које* M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_n$ *важи*

$$s_{M_1+M_2} = s_{M_1} + s_{M_2}.$$

Доказ. Нека је $M(x)$ слика од M пресликавања $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$. Имамо да је $M(x) = [a,b]$ где је $a = \max_{y\in M}\langle x,y\rangle = s_M(x)$ и $b = \min_{y\in M}\langle x,y\rangle$. Очигледно је

$$M_1(x) + M_2(x) = (M_1 + M_2)(x).$$

Према дефиницији 3.3.2 у $\mathbb{R}^1$ је

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2],$$

а одавде следи тврђење. □

Нека је $\{v_1, \ldots, v_n\}$ скуп темена конвексног политопа P. За свако $x \in \mathbb{R}^n$ постоји v_i тако да је $s_P(x) = \langle x, v_i\rangle$. Нека су V_i $i = 1, \ldots, N$ скупови дефинисани са

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s_P(x) = \langle x, v_i\rangle\}.$$

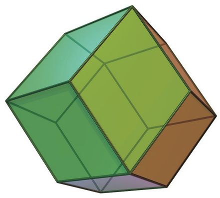
Имамо да је $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^N V_i$ и сваки V_i је конвексан полиедарски конус са теменом у $O \in \mathbb{R}^n$. Скуп $\{V_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ се назива *лепеза конвексног политопа* P.

Дефиниција 3.3.4. *Зонотоп* је политоп који се може добити као сума Минковског коначног броја дужи.

Пример 56. Нека су $v_0 = (0,0,0)$, $v_1 = (\sqrt{3},0,0)$, $v_2 = (0,\sqrt{3},0)$, $v_3 = (1,1,1)$ и $v_4 = (1,1,-1)$. Нека су $P_i = \operatorname{conv}(v_0, v_i)$, $i = 1,2,3,4$ дужи. Политоп $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ је *ромбични додекаедар.* То је конвексни политоп чије су стране 12 ромбова и има 24 ивице и 14 темена.

Ромбични додекаедар је пример суме Минковског простих политопа која не даје прост политоп. Још увек је отворено питање када сума Минковског простих политопа даје прост политоп.

Нека је B колекција непразних подскупова скупа $[n] = \{1, \ldots, n\}$ и нека су e_i, $i = 1$, $\ldots, n$ вектори стандардне базе у $\mathbb{R}^n$. За свако $I \in B$ нека је $\Delta_I = \operatorname{conv}(e_i \mid i \in I)$ и



Слика 3.28: Ромбични додекаедар

$P_B\Delta_I = \sum_{I\in B}$. Описаћемо једну класу колекција B за које је политоп P_B прост. Ово су доказали Postnikov, Reiner и Williams.

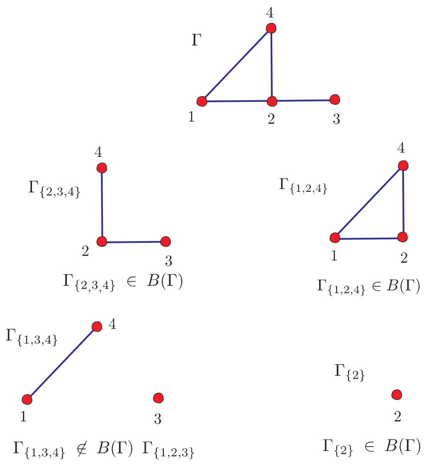
Дефиниција 3.3.5. Колекција B непразних подскупова скупа $[n]$ се назива *грађећи скуп* ако важи:

1. $I, J \in B$ и $I \cap J \neq \emptyset \Rightarrow I \cup J \in B$;

2. $\{i\}$ за све $i \in [n]$.

Дефиниција 3.3.6. Нека је Γ граф на скупу темена $[n] = \{1, \ldots, n\}$ без петљи и вишеструких ивица. *Графовски грађећи скуп* $B(\Gamma)$ је скуп свих непразних подскупова $I \subset [n]$ таквих да је граф $\Gamma|_I$ повезан.

Пример 57. За граф са слике имамо да је $B(\Gamma) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.



Слика 3.29: Графовски грађећи скуп

Лако се проверава да важи следећа лема.

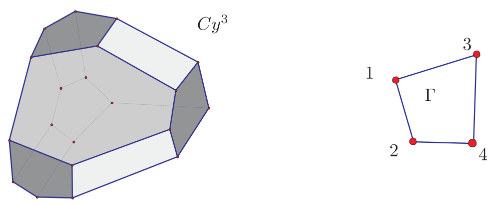
Лема 3.3.3. *Графовски грађени скуп је $B(\Gamma)$ је грађени скуп.*

Дефиниција 3.3.7. *Граф-асоциедар $P(\Gamma)$* је прост политоп $P_{B(\Gamma)}$.

Пример 58. Уколико је граф Γ стаза са $n+1$ чворова, $P(\Gamma)$ је асоциедар K_n.

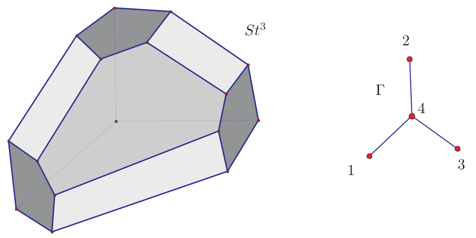
Пример 59. Уколико је граф Γ комплетан граф са $n+1$ чворова, $P(\Gamma)$ је пермутоедар Π_n.

Пример 60. Уколико је граф Γ цикл са $n+1$ чворова, $P(\Gamma)$ је *циклоедар* Cy^n.



Слика 3.30: Циклоедар

Пример 61. Уколико је граф Γ звезда са $n+1$ чворова, $P(\Gamma)$ је *звездоедар* St^n.



Слика 3.31: Звездоедар

Следећа лема даје опис геометријске реализације политопа P_B за једну широку класу грађених скупова:

Лема 3.3.4. *Нека је $[n] \in B$. Тада за свако $I_k \in B$ такво да је $I_k \neq [n]$, једначина*

$$\sum_{i \in I_k} x_i = \mu(I_k) \tag{3.5}$$

даје пљосан политопа P_B у хиперравни $\sum_{i=1}^{n} x_i = \mu([n])$, где је $\mu(I_k)$ број $I_l \in B$ таквих да је $I_l \subset I_k$. Такође, свака пљосан политопа P_B може се задати једначином (3.5) за неко $I_k \in B$.

Као последицу леме 3.3.4 имамо следеће лепо комбинаторно својство политопа P_B:

Последица 4. *Политоп P_B се може добити као резултат сукцесивних „одсецања“ страна симплекса $x \in \{R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu([n])\}$.*

4. ТОРУСНИ ВАРИЈЕТЕТИ И КВАЗИТОРУСНЕ МНОГОСТРУКОСТИ

4.1 Торусни варијети

4.1.1 Дефиниција торусних варијетета

У овом делу ћемо изучавати комбинаторне и тополошке особине торусних варијетета.

Са $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ означаваћемо мултипликативну групу комплексних бројева. Производ $(\mathbb{C}^*)^n$ од n копија од $\mathbb{C}^*$ је познат као *торус* у теорији алгебарских група. У топологији, *торус* T^n је производ $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ од n тополошких сфера S^1. Торус T^n је подгрупа алгебарског торуса на стандардан начин:

$$T^n = \{(z_1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\}. \tag{4.1}$$

Дефиниција 4.1.1. *Торусни варијетет* је нормалан алгебарски варијетет M који садржи алгебарски торус $(\mathbb{C}^*)^n$ као Зариски отворен подскуп и природно дејство торуса $(\mathbb{C}^*)^n$ на самога себе се продужава до дејства на M.

Торус $(\mathbb{C}^*)^n$ дејствује на M са густом орбитом.

Пример 62. $(\mathbb{C}^*)^n$ и $\mathbb{C}^n$ су очигледно торусни варијетети.

Пример 63. $\mathbb{C}P^n$ је торусни варијетет. Заиста ако су $x_0, x_1, \ldots, x_n$ хомогене координате у $\mathbb{C}P^n$ тада пресликавање

$$(\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}P^n$$

дефинисано са $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto [1 : t_1 : \cdots : t_n]$ идентификује $(\mathbb{C}^*)^n$ са Зариски отвореним скупом $\mathbb{C}P^n \setminus \mathbf{V}(x_0 x_1 \cdots x_n)$. Алгебарски торус дејствује на $\mathbb{C}P^n$

$$(t_1, \ldots, t_n) \cdot [x_0 : x_1 : \ldots x_n] = [x_0 : t_1 x_1 : \cdots : t_n x_n].$$

Пример 64. Заоштрена кубика $\mathbf{V}(y^2-x^3) \subset \mathbb{C}^2$ је пример торусног варијетета јер садржи $\mathbb{C}^*$ помоћу пресликавања $t \mapsto (t^2, t^3)$ који дејствује на V са $t \cdot (u, v) = (t^2u, t^3v)$.

У проучавању торусних варијетета целобројне решетке $\mathbb{Z}^n$ играју важну улогу. За тачку $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ дефинишу се два важна објекта за проучавање торусних варијетета.

Дефиниција 4.1.2. *Лореанов моном* је

$$\mathbf{t^a} = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}.$$

Њиме је дефинисано пресликавање $(\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$ које називамо *карактером.*

$\mathbb{C}$-линеарно раширење свих Лореанивих монома је прстен $\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \ldots,$
$t_n, t_n^{-1}]$ свих Лореанових полинома.

Дефиниција 4.1.3. 1-*параметарска подгрупа* $\lambda^{\mathbf{a}}$ је пресликавање $\lambda^{\mathbf{a}} : \mathbb{C}^* \to (\mathbb{C}^*)^n$ дефинисана са

$$\lambda^{\mathbf{a}}(t) = (t^{a_1}, \ldots, t^{a_n}).$$

Торусни варијетети се састоје од $(\mathbb{C}^*)^n$ и „додатног дела“. Када је торусни варијетет V афин овај „додатни део“ је одређен Лореановим мономима $\mathbf{t^m}$ који су дефинисани на V.

Пример 65. Лореанови мономи који су дефинисани на торусном варијетету $\mathbb{C}^n$ су тачно они одређени тачкама $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ код којих је $m_i \geq 0$ за свако i, јер само за њих $\mathbf{t^m} = (t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n})$ дефинише пресликавање $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Користећи директно дефиницију 4.1.1 добијамо следећи став:

Став 4.1.1. *Ако су V и W торусни варијетети тада је и производ $V \times W$ такође торусни варијетет.*

Последица 5. *Производ пројективних простора $\mathbb{C}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{n_k}$ је торусни варијетет.*

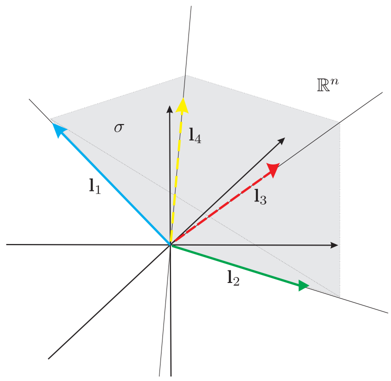
4.1.2 Комбинаторика торусних варијетета

Једна од најважнијих особина торусних варијетета је да се њихове алгебарско-геометријске особине преводе у језик комбинаторике и конвексне геометрије. Зато ћемо најпре дефинисати комбинаторне објекте, помоћу којих ћемо описати торусне варијетете.

Нека је $\mathbb{R}^n$ еуклидски простор и $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ целобројна решетка у њему. Нека је дат коначан скуп вектора $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_s \in \mathbb{R}^n$.

Дефиниција 4.1.4. *Конвексни полиедарни конус* σ разапет над $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_s$ је скуп

$$\sigma = \{r_1\mathbf{l}_1 + \cdots + r_s\mathbf{l}_s \in \mathbb{R}^n \mid r_i \geq 0\}. \tag{4.2}$$

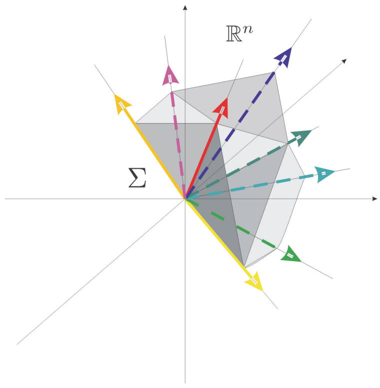


Слика 4.1: Конус

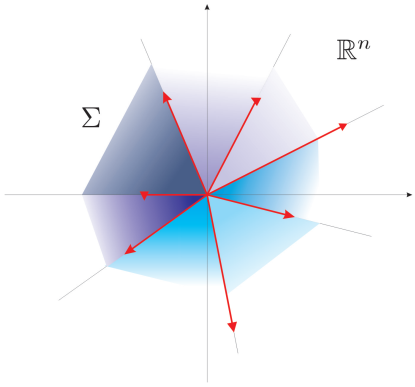
Дефиниције стране политопа 3.1.4 на исти начин дефинише *стране конвексног полиедарног конуса*.

Уколико вектори $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_s$ припадају целобројној решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$, тада конвексни полиедарни конус називамо *рационалним*. Конвексни полиедарни конус је *строго конвексан* уколико не садржи ниједну праву кроз координатни почетак и за све које будемо посматрали претпостављамо да су строго конвексни осим ако другачије није наглашено. Конус је *симплицијалан* ако је генерисан делом базе од $\mathbb{R}^n$. Уколико је генерисан делом базе од $\mathbb{Z}^n$ називамо га *несингуларним*.

Дефиниција 4.1.5. *Лепеза* је скуп Σ конуса у $\mathbb{R}^n$ такав да сваки конус $\sigma \in \Sigma$ важи да све његове стране такође припадају Σ и пресек свака два конуса σ и τ из Σ је конус који припада Σ.



Слика 4.2: Лепеза



Слика 4.3: Потпуна лепеза

Лепеза Σ се назива *потпуна* уколико је унија свих конова из Σ цео $\mathbb{R}^n$.

Лепеза је *симплицијална* уколико су сви њени конуси симплицијални, а ако су сви њени конуси несингуларни, лепузу називамо *несингуларном*.

Нека је Σ лепеза у $\mathbb{R}^n$ са m једнодимензионалних конуса (полуправих). Изаберимо генераторне векторе $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_m$ ових конуса тако да буду целобројни и са узајамно простим координатама. Лепези Σ придружујемо симплицијални комплекс K_Σ на $[m]$ који називамо *потпорни комплекс* од Σ. По дефиницији, $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ је симплекс од K_Σ ако и само ако $\mathbf{l}_{i_1}, \ldots, \mathbf{l}_{i_k}$ разапињу конус у Σ. Очигледно је да је Σ потпуна лепеза ако и само ако је K_Σ симплицијална $(n-1)$-сфера.

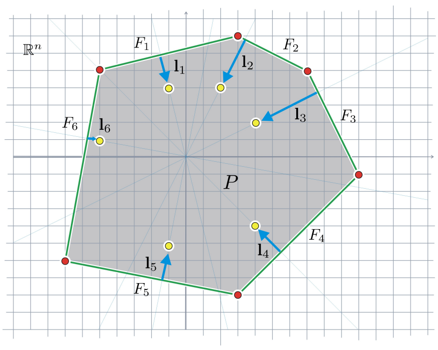
У стандардним књигама описана је један-један кореспонденција између лепеза у $\mathbb{R}^n$ и торусних варијетета комплексне димензије n. Торусни варијетет који одговара лепези Σ обележавамо са M_Σ. Ова веза између лепеза и торусних варијетета нам омогућава да тополошке и геометријске особине торусних варијетета изучавамо посматрајући комбинаторику њихових потпорних комплекса.

Посет $(\mathbb{C}^*)^n$-орбита на M_Σ одговара посету страна лепезе Σ са обрнутом инклузијом, тј. k-димензионални конуси одговарају орбитама кодимензије k дејства алгебарског торуса на M_Σ. n-димензионални конуси одговарају фиксним тачкама дејства, док координатни почетак одговара јединственој густој орбити. Торусни варијетет M_Σ је компактан ако и само ако је лепеза потпуна. Уколико је лепеза симплицијална, торусни варијетет M_Σ је *орбитна многострукост* тј. локално хомеоморфна простору орбита дејства коначне групе на $\mathbb{R}^{2n}$. Торусни варијетет M_Σ је *несингуларан* или *гладак* ако и само ако је лепеза несингуларна и овакви торусни варијетети се у литератури често називају *торусне многострукости*.

4.1.3 Торусни варијетети задати политопом

Торусни варијетети играју значајну улогу у доказивању тврђења везаних за политопе. Слично конструкцији варијета из потпуне лепезе могуће је конструисати торусне варијетете из политопа.

Нека је P n-политоп дефинисан као у дефиницији 3.1.2 чија се темена налазе у чворовима решетке $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Такве политопе зовемо *целобројним* или *решеткастим*. Вектори $\mathbf{l}_i$, $1 \leq i \leq m$ се могу изабрати тако да буду целобројни и примитивни, а бројеви a_i тако да буду цели. Вектори $\mathbf{l}_i$ су нормални на пљосни F_i и усмерени ка унутрашњости политопа P.



Слика 4.4: Конструкција торусног варијетета из политопа

Дефинисаћемо лепезу $\Sigma(P)$ тако што ће конусе дефинисати скупови нормалних вектора $\mathbf{l}_{i_1}, \ldots, \mathbf{l}_{i_k}$ такви да пљосни $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$ имају непразан пресек. Лепеза $\Sigma(P)$ се назива *нормална лепеза* политопа P. Можемо је дефинисати и на следећи начин. Уколико $0 \in P$ тада се нормална лепеза састоји од конуса над странама поларног политопа.

Дефинишимо торусни варијетет $M_P := M_{\Sigma(P)}$. Варијетет M_P је несингуларан ако и само ако је P прост политоп и нормални вектори $\mathbf{l}_{i_1}, \ldots, \mathbf{l}_{i_n}$ n пљосни $F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}$ који се секу у истом темену разапињу базу решетке $\mathbb{Z}^n$.

Сваки комбинаторни прост политоп је рационалан, тј. има конвексну реализацију са теменима чије су координате рационални бројеви. Такође је могуће мало претурбовати неједнакости у дефиницији 3.1.2 тако да сви бројеви и вектори буду рационални, а да се при томе комбинаторни тип политопа не промени. Одавде следи да можемо добити реализацију у целобројним тачкама помоћу хомотетије kP за неко $k \in \mathbb{Z}$. То није могуће у случају политопа генерално. У свакој димензији ≥ 5 постоје конвексни политопи који нису рационални (ни прости ни симплицијални) (погледати [64]), док су у димензији 2 и 3 сви конвексни политопи рационални. У диминезији 4 ово питање је још увек отворено.

Различите реализације датог простог комбинаторног политопа производе генерално тополошки различите торусне варијетете M_P. Такође постоје комбинаторни политопи P који не допуштају реализацију решетком тако да је торусни варијетет M_P несингуларан.

Следећа конструкција [30] нам омогућава да торусни варијетет M_P идентификујемо као количнички простор $T^n \times P^n/\sim$ где је $\sim$ једна релација еквиваленције коју ћемо описати.

Торус T^n ћемо посматрати као количнички модел $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. За сваку тачку $q \in P^n$ дефинисаћемо $G(q)$ као страну најмање димензије која садржи q у својој унутрашњости. Нормални простор на $G(q)$ који ћемо означити са N је разапет векторима $\mathbf{l}_i$ који одговарају пљоснима F_i које садрже $G(q)$. Пошто је N рационалан потпростор, његова пројекција на торус T^n је подторус $T(q)$. Приметимо да је $\dim T(q) = n - \dim G(q)$. Тада је M_P тополошки простор

$$M_P = T^n \times P^n/\sim,$$

тако да је $(t_1, p) \sim (t_2, q)$ ако и само ако је $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in T(q)$. Подторуси $T(q)$ су групе изотропија дејства торуса T^n на M_P, а P^n је простор орбита. Ако је q теме политопа P^n тада је $T(q) = T^n$, па темена одговарају T^n-фиксним тачкама од M_P. Уколико тачка $q \in \mathrm{int}P^n$ онда је $T(q) = \{e\}$, тако да је T^n-дејство слободно над унутрашњости политопа. Генералније, $\pi : M_P \to P^n$ је количничка пројекција

$$\pi^{-1}(\mathrm{int}G(q)) = (T^n/T(q)) \times \mathrm{int}G(q).$$

Дејство торуса $T^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ на несингуларном компактном торусном варијетету M је локално еквивалентно стандардном дејству торуса T^n на $\mathbb{C}^n$. Простор орбита M/T^n је хомеоморфан диску D^n који има тополошку структуру *многострукости са ћошковима* добијеним скуповима фиксних тачака одговарајућих подторуса. Грубо говорећи, многострукост са ћошковима је многострукост локално хомеоморфна са отвореним подскуповима позитивног конуса $\mathbb{R}^n_+$.

Пример 66. Нека је P^n прост политоп. За свако теме $v \in P^n$ дефинишимо са U_v отворени подскуп од P^n који се добија одбацивањем свих страна које не садрже теме v. Овај скуп је дифеоморфан са $\mathbb{R}^n_+$, па је P^n многострукост са ћошковима и атласом $\{U_v\}$.

4.2 Кохомологија несингуларних торусних варијетета

Познавање кохомологије несингуларних торусних варијетета је од велике важности. Теорема Danilov-Jurkiewicz-а нам даје потпуну карактеризацију кохомолошког прстена у терминима потпорног комплекса лепезе Σ.

Нека су примитивни целобројни вектори дуж једнодимензионалних конуса лепезе Σ записани у стандардној бази од $\mathbb{Z}^n$:

$$\mathbf{l}_j = (l_{1j}, \dots, l_{nj})^t, \quad j = 1, \dots, m.$$

Сваком вектору $\mathbf{l}_j$ придружићемо променљиву v_j степена 2 и дефинисати линеарне форме

$$\theta_i := l_{i1}v_1 + \dots + l_{im}v_m \in \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m],\ 1 \le i \le n.$$

Означимо са $\mathcal{J}_\Sigma$ идеал у $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ генерисан овим формама, тј. $\mathcal{J}_\Sigma = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Са $\mathcal{I}_{K_\Sigma}$ означићемо Stanley-Reisner-ов идеал потпорног комплекса.

Теорема 4.2.1 (Danilov-Jurkiewicz). *Нека је Σ потпуна несингуларна лепеза у $\mathbb{R}^n$ и M_Σ одговарајући торусни варијетет. Тада:*

(а) Бетијеви бројеви (рангови хомолошких група) од M_Σ су једнаки 0 у непарним димензијама, док су у парним димензијама дефинисани са

$$\beta_{2i}(M_\Sigma) = h_i(K_\Sigma), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где је $\mathbf{h}(K_\Sigma) = (h_0, \dots, h_n)$ h-вектор од K_Σ.

(б) Кохомолошки прстен од M_Σ дат је са

$$H^*(M_\Sigma;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]/(\mathcal{I}_{K_\Sigma}+\mathcal{J}_\Sigma) = \mathbb{Z}(K_\Sigma)/\mathcal{J}_\Sigma,$$

где v_i, $1 \leq i \leq m$ означавају 2-димензионалне кохомолошке класе дуалне инваријантним дивизорима (подмногострукостима кодимензије 2) D_i које одговарају 1-димензионалним конусима лепезе Σ. Низ $\theta_1,\ldots,\theta_n$ је регуларан у $\mathbb{Z}(K_\Sigma)$.

Доказ ове теореме се може пронаћи у [40] за случај торусних варијетета, а Danilov је у [22] дао доказ у генералном случају. Danilov је такође доказао верзију теореме 4.2.1 са коефицијентима у $\mathbb{Q}$ која је тачна за симплицијалне лепезе и торусне варијетете.

Идеал $\mathcal{I}_{K_\Sigma}$ је потпуно одређен комбинаториком лепезе, док идеал $\mathcal{J}_\Sigma$ зависи од геометрије лепезе Σ.

Пример 67. Пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ је торусни варијетет M_{Δ^n} који настаје из стандардног симплекса Δ^n. Теорема 4.2.1 идентификује његову кохомологију са количничким прстеном

$$\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_{n+1}]/(v_1\cdots v_{n+1}, v_1-v_{n+1},\ldots,v_n-v_{n+1}).$$

Рачун у овом прстену показује да се све класе $v_1,\ldots,v_{n+1}$ могу идентификовати са једном дводимензионалном класом u и да је он изоморфан са $\mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, а то је добро познати облик кохомолошког прстена $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$.

4.3 Квазиторусне многострукости

Квазиторусне многострукости или *квазиторусни варијетети* представљају тополошку генерализацију торусних варијетета. Генерално говорећи то су многострукости на којима дејствује торус. Њихов појам је први уведен у раду Davis-а и Januszkiewicz-а [21]. Веза између торусних варијетета у алгебарској геометрији и квазиторусних многострукости је веома блиска. У монографији Бухштабера и Панова [13] дата је лепа експозиција о овим многострукостима. Пратећи њихов приступ изложићемо њихове основне особине и резултате о квазиторусним многострукостима.

4.3.1 Квазиторусне многострукости и карактеристично пресликавање

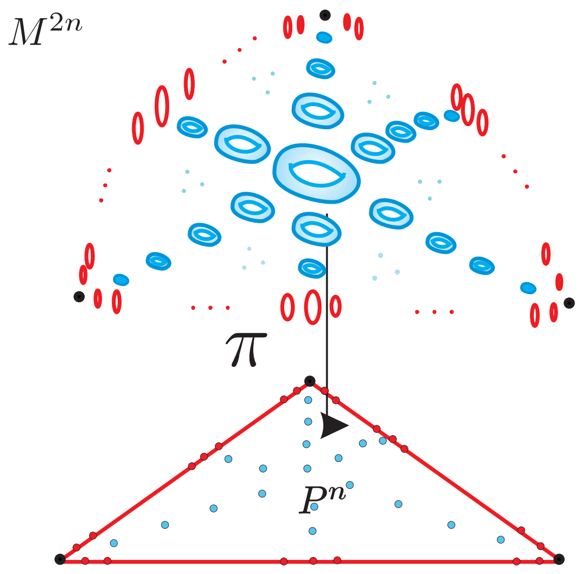
Нека је M^{2n} $2n$-димензионална многострукост на којој дејствује торус T^n - *T^n-многострукост.*

Дефиниција 4.3.1. *Стандардна карта* на M^{2n} је уређена тројка (U, f, ψ) где је U T^n-стабилан отворени подскуп од M^{2n}, ψ неки аутоморфизам торуса T^n, и f је ψ-еквиваријантни хомеоморфизам $f : U \to W$ у неки (T^n-стабилан) отворени подскуп $W \subset \mathbb{C}^n$ тј. $f(t \cdot y) = \psi(t)f(y)$ за свако $t \in T^n$ и $y \in U$. Кажемо да је дејство T^n на M^{2n} *локално стандардно* ако M^{2n} поседује *стандардни атлас*, тј. свака тачка од M^{2n} лежи у стандардној карти.

Простор орбита локално стандардног дејства T^n на M^{2n} је n-димензионална многострукост са угловима и квазиторусне многострукости одговарају случају када је простор орбита дифеоморфан, као многострукост са ћошковима, простом политопу P^n.

Дефиниција 4.3.2. Нека је дат прост политоп P^n. T^n-многострукост M^{2n} се назива *квазиторусна многострукост* над P^n уколико су задовољени следећи услови:

1. дејство T^n је локално стандардно;
2. постоји пројекција $\pi : M^{2n} \to P^n$ која је константна на T^n-орбитама која пресликава сваку k-димензионалну орбиту у тачку у унутрашњости стране кодимензије k политопа P^n за свако $k = 0, \ldots, n$.



Слика 4.5: Орбитно пресликавање π квазиторусне многострукости M^{2n}

Дејство T^n на квазиторусној многострукости M^{2n} је слободно над унутрашњости количничког политопа P^n, а темена политопа P^n одговарају T^n-фиксним тачкама од

M^{2n}. Нека су $F_1, \ldots, F_m$ пљосни од P^n. За сваку пљосан F_i, скуп $\pi^{-1}(\mathrm{int} F_i)$ се састоји од орбита кодимензије 1 са истом 1-димензионалном подгрупом изотропије, коју обележавамо са $T(F_i)$, (видети Слику 4.5). $\pi^{-1}(\mathrm{int} F_i)$ је $2(n-1)$-димензионална квазиторусна подмногострукост над F_i, у односу на дејство $T^n/T(F_i)$ и означаваћемо је са $M_i^{2(n-1)}$ и називати *подмногострукост пљосни* која одговара F_i. Њена подгрупа изотропије $T(F_i)$ се може написати као

$$T(F_i) = \left\{ \left(z^{\lambda_{1i}}, \ldots, z^{\lambda_{1n}}\right) \in T^n \mid |z| = 1 \right\}.$$

Вектор $\lambda_{\mathrm{i}} = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$ је одређен само до на знак и назива се *вектор пљосни* који одговара F_i. Кореспонденција

$$l : F_i \mapsto T(F_i) \tag{4.3}$$

се назива *карактеристично пресликавање* од M^{2n}.

Нека је G^{n-k} страна кодимензије k добијена као пресек k пљосни $G^{n-k} = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$. Тада се подмногострукости $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ секу трансверзално у подмногострукости $M(G)^{2(n-k)}$, коју називамо *подмногострукост стране* која одговара страни G. Пресликавање $T(F_{i_1}) \times \cdots \times T(F_{i_k}) \to T^n$ је ињективно пошто је $T(F_{i_1}) \times \cdots \times T(F_{i_k})$ k-димензионална подгрупа изотропије од $M(G)^{2(n-k)}$. Дакле, вектори $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}$ формирају део базе решетке $\mathbb{Z}^n$.

Нека је Λ целобројна $n \times m$ матрица чију i-ту колону формирају координате вектора пљосни λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Свако теме $v \in P$ политопа P добија се као пресек n пљосни $v = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$, а како вектори $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}$ представљају базу целобројне решетке, то подматрица $\Lambda_{(v)} := \Lambda_{(i_1, \ldots, i_n)}$ од Λ коју формирају колоне $i_1, \ldots, i_n$ има особину

$$\left|\det \Lambda_{(v)}\right| = 1. \tag{4.4}$$

Матрицу Λ називамо *карактеристичном матрицом* квазиторусне многострукости. Stanley-Reisner-ов прстен и карактеристична матрица Λ носе доста информација о топологији квазиторусне многострукости.

Кореспонденција

$$G^{n-k} \mapsto \text{ подгрупа изотропије од } M(G)^{2(n-k)}$$

продужује карактеристично пресликавање (4.3) до пресликавања из посета страна од P^n у посет подторуса од T^n.

Дефиниција 4.3.3. Нека је P^n комбинаторни прост политоп и l пресликавање пљосни од P^n у 1-димензионалне подгрупе од T^n. Тада уређени пар (P^n, l) називамо *карактеристичним паром* ако је $l(F_{i_1}) \times \cdots \times l(F_{i_k}) \to T^n$ инјективно кадгод је $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \emptyset$.

Пресликавање l се директно продужава до пресликавања из посета страна P^n у посет подторуса од T^n, тако да имамо подгрупу $l(G) \subset T^n$ за сваку страну G политопа P^n. У случају стандардног дејства T^n на $\mathbb{C}^n$, тада постоји пројекција $T^n \times P^n \to M^{2n}$ чије су фибре над $x \in M^{2n}$ подгрупе изотропија над x. Овај аргумент се користи за реконструисање квазиторусне многострукости из датог карактеристичног пара (P^n, l).

За дату тачку $q \in P^n$, означимо са $G(q)$ минималну страну која садржи q у својој релативној унутрашњости. Дефинишимо релацију $\sim$ на $T^n \times P^n$ на следећи начин $(t_1, p) \sim (t_2, q)$ ако и само ако је $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in l(G(q))$. Дефинишимо

$$M^{2n}(l) := (T^n \times P^n)/\sim .$$

Слободно дејство торуса T^n на $T^n \times P^n$ се очигледно спушта до дејства $(T^n \times P^n)/\sim$, са количником P^n. Ово дејство је слободно над унутрашњошћу политопа P^n и његове фиксне тачке су темена од P^n, (видети Слику 4.5). Као што је P^n покривен отвореним скуповима U_v, смештеним у теменима и дифеоморфним са $\mathbb{R}^n_+$, тако је и простор $(T^n \times P^n)/\sim$ прекривен отвореним скуповима $(T^n \times U_v)/\sim$ хомеоморфним са $(T^n \times \mathbb{R}^n_+)/\sim$, тј. са $\mathbb{C}^n$. Одваде следи да је дејство T^n на $(T^n \times P^n)/\sim$ локално стандардно, и према томе $(T^n \times P^n)/\sim$ је квазиторусна многострукост.

Описана конструкција квазиторусне многострукости се може исказати и у терминима дефиниције 2.3.10. Уочимо посет страна политопа P и за сваку k-страну политопа $G = F_{i_1} \cap \cdots F_{i_k}$ уочимо простор $T^k \times G$ при чему T^k схватамо као $T^n/(l(F_{i_1}) \times \cdots \times l(F_{i_{n-k+1}}))$. За стране $G \subset E$ дефинисаћемо пресликавање $d_{EG} : T^l \times E \to T^k \times G$ на следећи начин $d_{EG}(t, x) = (l(t), x)$ где је $l(t) \in T^l/T^{l-k}$, тј. l је пресликавање између посета подторуса T^n које настаје из карактеристичног пресликавања (4.3). Тада је

$$M^{2n} = \mathrm{colim}_P T^k \times G.$$

Производ две квазиторусне многострукости $M_1^{2n_1}$ и $M_2^{2n_2}$ над политопима $P_1^{n_1}$ и $P_2^{n_2}$ је квазиторусна многострукост над политопом $P_1^{n_1} \times P_2^{n_2}$.

4.3.2 Кохомологија квазиторусних многострукости

Кохомологију квазиторусних многострукости описали су Davis и Januszkiewicz у [21]. Они су конструисали CW структуру са ћелијама искључиво парне димензије на квазиторусној многострукости.

Нека су $F_1, \ldots, F_m$ пљосни простог политопа P^n и нека је $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$ полиномијална алгебра над $\mathbb{Z}$ са m генератора $v_1, \ldots, v_m$ по једним за сваку пљосан. Stanley-Reisner-ов прстен простог политопа P^n је према дефиницији 3.2.6 је количнички прстен $\mathbb{Z}(P^n) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_P$ где је $\mathcal{I}_P$ идеал генерисан свим бесквадратним мономима $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s}$ таквим да је $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_s} = \emptyset$ у P, $i_1 < \cdots < i_s$.

Нека је квазиторусна многострукост M^{2n} задата карактеристичним пресликавањем $l : F_i \mapsto T(F_i)$ и векторима пљосни $\lambda_{\mathbf{i}} = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{ni})^t \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \ldots, m$. Дефинишимо линеарне форме

$$\theta_i := \lambda_{i1} v_1 + \cdots + \lambda_{im} v_m \in \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m], \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.5}$$

Слике ових линеарних форми у Stanley-Reisner-овом прстену $\mathbb{Z}(P^n)$ означаваћемо на исти начин. Нека је $\mathcal{I}_l$ идеал у $\mathbb{Z}(P^n)$ генерисан са $\theta_1, \ldots, \theta_n$.

Теорема 4.3.1 (Davis-Januszkiewicz). *Кохомолошки прстен од M^{2n} је описан са*

$$H^*(M^{2n}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/(\mathcal{I}_P + \mathcal{I}_l) = \mathbb{Z}(P^n)/\mathcal{I}_l,$$

где су v_i 2-димензионалне кохомолошке класе дуалне подмногострукостима пљосни $M_i^{2(n-1)}$, $i = 1, \ldots, m$.

4.3.3 Stiefel-Whitney-еве класе квазиторусних многострукости

Davis и Januszkiewicz су у раду у [21] израчунали и карактеристичне класе квазиторусних многострукости. У њиховом раду добијена је формула [21, Теорема 4.14, Последица 6.8] из које се добијају многе тополошке инваријанте многострукости, између осталог и карактеристичне класе.

Нека је P прост политоп димензије n са m пљосни и M квазиторусна многострукост димензије $2n$ над P. Нека је v_j ($\deg v_j = 2, j = 1, \ldots, m$) Поенкареов дуал инваријантне подмногострукости M_j кодимензије 2 у M^{2n}, као и у претходном поглављу. Еквиваријантни кохомолошки прстен $H^*_{T^n}(M; \mathbb{Z}) = H^*(ET \times_{T^n} M)$ од M има следећу структуру прстена:

$$H^*_{T^n}(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]/\mathcal{I},$$

где је $\mathcal{I}$ Stanley-Reisner-ов идеал (идеал страна) политопа P у полиномијалном прстену $\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]$.

Нека је $\pi : ET\times_T M \to BT$ природна пројекција. Индуковани хомоморфизам

$$\pi^* : H^*(BT) = \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n] \to H^*(ET\times_{T^n} M) = H^*_{T^n}(M;\mathbb{Z})$$

се описује $n\times m$ матрицом $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, где $\lambda_j \in \mathbb{Z}^n$ ($j = 1,\ldots,m$) одговарају генераторима Лиеве алгебре изотропске подгрупе карактеристичне подмногострукости M_j. Другим речима, Λ је карактеристична матрица од M. Нека је $\lambda_j = (\lambda_{1j},\ldots,\lambda_{nj})^t \in \mathbb{Z}^n$. Тада имамо

$$\pi^*(t_i) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}v_j$$

који генеришу идеал $\mathcal{J}$ у $\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]$ са $\pi^*(t_i)$ за све $i=1,\ldots,n$. Према Теореми 4.3.1 је:

$$H^*(M) \simeq \mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]/(\mathcal{I}+\mathcal{J}).$$

Следећа теорема чији се доказ може наћи у [21] описује Stiefel-Whitney-еве класе квазиторусне многострукости M.

Теорема 4.3.2 (Davis-Januszkiewicz формула)**.** *Stiefel-Whitney-еве карактеристичне класе су описане формулом:*

$$\omega(M) = \imath^*\prod_{i=1}^{m}(1+v_i),$$

где је $\imath$ инклузија $\imath : M \to ET\times_T M$ и $\imath^*$ је индуковани хомоморфизам.

4.3.4 Несингуларни торусни варијетети и квазиторусне многострукости

Конструкција квазиторусне многострукости из карактеристичног пара и торусног варијетета из политопа имају сличности. У случају простог политопа P са теменима у решетки добијени несингуларни торусни варијетет је и квазиторусна многострукост над комбинаторним политопом P. Карактеристична пресликавања и карактеристична матрица су у овум случају исте. Зато је пројективан простор $\mathbb{C}P^n$ квазиторусна многострукост над симплексом Δ^n.

Сваки несингуларни пројективни торусни варијетет је дакле и квазиторусна многострукост, али у општем случају несигуларни непројективни торусни варијетет не мора да буде квазиторусна многострукост. Иако је простор орбита многострукост са ћошковима, она не мора бити дифеоморфна са простим политопом. Експлицитан пример таквог торусног варијетета још увек није пронађен.

Дефиниција 4.3.4. Симплицијална лепеза Σ у $\mathbb{R}^n$ је *строго политопална* уколико се може реализовати као конус са теменом у O над странама конвексног симплицијалног политопа или еквивалентно уколико је нормална лепеза простог политопа са теменима у решетки. Симплицијална лепеза Σ је *слабо политопална* ако је њен потпорни симплицијални комплекс K_Σ политопална сфера.

Нека је Σ несингуларна лепеза и M_Σ одговарајући торусни варијетет. Тада је M_Σ пројективан ако и само ако је Σ строго политопална лепеза, M_Σ је квазиторусна многострукост ако и само ако је Σ слабо политопална. Дакле, проналажење несингуларне лепезе која није слабо политопална.

Пример квазиторусне многострукости која није торусни варијетет је повезана сума две комплексне пројективне равни $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$. Ово је пример квазиторусне многострукости над квадратом I^2, али њено тангентно раслојење не дозвољава комплексну структуру, па не може бити ни торусни варијетет.

Природно је поставити и питање класификације квазиторусних многострукос-ти над задатим простим политопом. Следећи пример је пример простог политопа који не допушта карактеристично пресликавање.

Пример 68. Нека је P_n 2-суседски прост политоп са $m \geq 2^n$ пљосни као нпр. поларни политоп цикличног политопа $C^n(m)$ из примера 36 са $n \geq 4$ и $m \geq 2^n$. Заиста, уколико би постојало карактеристично пресликавање тада би постојала и карактеристична матрица Λ. Како је $m \geq 2^n$ то би морало да постоје две колоне тј. два вектора λ_i и λ_j чије су све координате исте парности. Пошто је P два суседски политоп, одговарајуће пљосни F_i и F_j имају непразан пресек и колоне i и j улазе у састав подматрице Λ_v за неко v. Но $\det \Lambda_v \equiv 0 \pmod 2$, што је немогуће.

Претходни пример показује да не постоји несигуларни торусни варијетет над поларним политопом цикличног политопа $(C^n(m))^*$ са не мање од 2^n пљосни. То значи да се комбинаторни политоп $C^n(m)$ са $m \geq 2^n$ не може реализовати као симплицијални политоп са теменима у решетки, на такав начин да је лепеза над његовим странама несигуларна. У торусној геометрији, питање да ли за задату комплетну несингуларну лепезу Σ постоји комбинаторно еквивалентна лепеза Σ' из које настаје глатки торусни варијетет, познато је као Ewald-ова хипотеза. Показано је да ниједна лепеза над странама реализације цикличног политопа $C^n(m)$ са $m \geq n+3$ није несингуларна. Ово значи да се неки циклични политопи $C^n(m)$ са малим бројем темена (између $n+3$ и 2^n) могу појавити као простори орбита квазиторусне многострукости, али не и несингуларних торусних варијетета.

Из свега овога природно се поставља питање:

Проблем 1. *Описати класу комбинаторних политопа P^n који дозвољавају карактеристично пресликавање у смислу (4.3).*

Карактеристично пресликавање је подсетимо одређено матрицом Λ која задовољава услове (4.4) за свако $v \in P^n$. Услов $(\det \Lambda_v)^2 = 1$ дефинише хиперповрш у простору $M(n, m; \mathbb{Z})$ целобројних $n \times m$ матрица. Из дефиниције следи да:

Став 4.3.1. *Скуп карактеристичних матрица се поклапа са пресеком*

$$\bigcap_{v \in P^n} \left\{ (\det \Lambda_(v))^2 = 1 \right\}$$

хиперповрши у простору $M(n, m; \mathbb{Z})$

4.3.5 $\mathrm{Hirzebruch}$-ове површи и 4-димензионалне квазиторусне многострукости

$\mathrm{Hirzebruch}$-ове површи је увео $\mathrm{Hirzebruch}$ у [39] и оне су алгебарске површи над комплексним бројевима. Основне особине ових многострукости су дате у [42]. Као комплексне многострукости оне се међусобно различите док као глатке многострукости постоје само два различита дифеоморфна типа.

За дати природан број k, $\mathrm{Hirzebruch}$-ова површ је комплексна многострукост $\mathbb{C}P(\zeta_k \oplus \mathbb{C})$, где је ζ_k комплексно линијско раслојење над $\mathbb{C}P^1$ чија је прва Чернова класа k, и $\mathbb{C}P(\cdot)$ означава пројективизацију комплексног раслојења. Свака $\mathrm{Hirzebruch}$-ова површ је тотални простор раслојења $H_k \to \mathbb{C}P^1$ са фибром $\mathbb{C}P^1$. За парно k површ H_k је дифеоморфна са $S^2 \times S^2$, а за непарно k са $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$, где $\overline{\mathbb{C}P^2}$ означава комплексни простор $\mathbb{C}P^2$ са обрнутом оријентацијом. Hirzebruch-ова површ H_k је квазиторусна многострукост чији је простор орбита комбинаторни квадрат.

Проблем тополошке класификације (до на дифеоморфизам) за квазиторусне многострукости над простим политопом је отворен. До сада су познати само неки парцијални резултати. У [51] проблем класификације квазиторусних многострукости над полигонима је у потпуности решен .

Теорема 4.3.3. *Квазиторусна многострукост димензије* 4 *је дифеоморфна повезаној суми неколико копија* $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}$ *и* $S^2 \times S^2$.

5. СТЕПЕНИ ПРЕСЛИКАВАЊА ИЗМЕЂУ КВАЗИТОРУСНИХ МНОГОСТРУКОСТИ

5.1 Степен пресликавања

Степени пресликавања су једна од првих проучаваних тополошких инваријанти. Скоро сви уџбеници алгебарске топологије поседују део који је посвећен степену пресликавања и неким техникама његовог рачунања.

Нека су дате две орјентисане n-многострукости M и N. Свако пресликавање $f : M \to N$ индукује хомоморфизам

$$f_* : H_*(M) \to H_*(N).$$

Дефиниција 5.1.1. *Степен пресликавања* f је цео број такав да је

$$f_*([M]) = k\,[N],$$

где су $[M] \in H_n(M)$ и $[N] \in H_n(N)$ фундаменталне хомолошке класе многострукости M и N редом.

Природно се поставља питање:

Проблем 2. *За дате две многострукости M и N одредити све целе бројеве које се могу реализовати као степени неког пресликавања*

$$f : M \to N?$$

Ово је тежак проблем, и математика још увек није дала одговор на ово питање. Проблем се такорећи непрекидно изучава два века у назад и највећи напредак је остварен у парцијалним случајевима када је $n = 2$ и $n = 3$.

Дефиниција 5.1.2. *За дате две затворене оријентабилне n-многострукости M и N,* *са $D(M,N)$ означавамо скуп свих целих бројева који се могу реализовати као степени неког пресликавања из M у N*

$$D(M,N)=\{\mathrm{deg} f \mid f : M \to N\}.$$

У димензији $n=2$, проблем одређивања скупа $D(M,N)$ је потпуно решен у радовима [41] и [28]. У димензији $n=3$, бројни математичари су проучавали проблем и за многе класе 3-многострукости је проблем решен. Најважнији резултати у случају 3-многострукости могу се пронаћи у прегледном раду Wang-a, [59]. Резултати у димензији 2 и 3 показују да скуп $D(M,N)$ зависи од хомотопског типа обе многострукости M и N. У раду [52] су проучавани степени пресликавања међу Grassmann-овим многострукостима.

У стандардном курсу топологије ([35] и [11]) дато је неколико ефективних метода за израчунавање степена пресликавања. Став 2.30 и Вежба 8. стр. 258 у [35] се лако генерализују у тврђење:

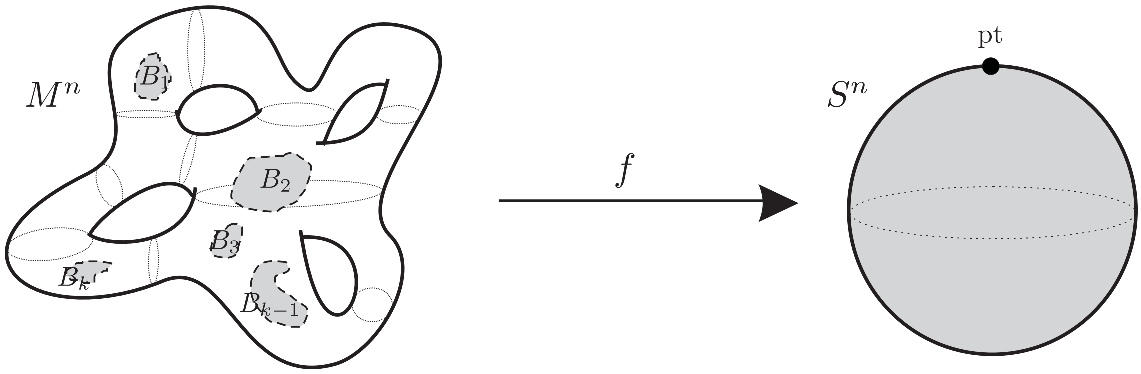
Теорема 5.1.1. *Нека је пресликавање $f : M \to N$ између повезаних затворених оријентабилних n-многострукости и $y \in N$ тачка таква да је $f^{-1}(y)=\{x_1,\ldots,x_k\}$ и постоји лопта $B \subset N$, $y \in B$ таква да је $f^{-1}(y)$ унија k дисјунктних лопти $B_1, \ldots, B_k$, $x_i \in B_i$ за свако i, $1 \le i \le k$, степен пресликавања $\mathrm{deg} f$ је сума*

$$\mathrm{deg} f=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{deg} f \mid x_i$$

где је $\mathrm{deg} f \mid x_i$ локални степен пресликавања, тј. степен пресликавања $f : \partial B_i \to \partial B$.

Теорема 5.1.1 тврди да $\mathrm{deg} f$ израчунава колико се пута полазна многострукост M „намотава около“ полазне многострукости N пресликавањем f. Ова геометријска интуиција је водећи принцип у већини радова које се баве степенима пресликавања. Из Теореме 5.1.1 је лако произвести пресликавање било ког задатог степена k у сферу S^n. Једноставно уочимо k дисјунктних лопти на M и пресликајмо њихове унутрашњости хомеоморфизмом који чува оријентацију на $S^n-\{\mathrm{pt}\}$, а преостале тачке многострукости M пресликајмо у тачку $\{\mathrm{pt}\}$, Слика 5.1. Дакле, $D(M^n,S)=\mathbb{Z}$.

Свако пресликавање $f : M \to N$ индукује хомоморфизам у хомологији f_* и кохо-



Слика 5.1: Пресликавање степена k из M^n у S^n.

мологији f^*. Из следећег комутативног дијаграма (видети [35], стр. 241)

$$\begin{tikzcd} H_n(M;\mathbb{Z}) \times H^k(M;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cap"] \arrow[d, "f_*"] & H_{n-k}(M;\mathbb{Z}) \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(N;\mathbb{Z}) \times H^k(N;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cap"] \arrow[u, "f^*"'] & H_{n-k}(N;\mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

закључујемо да пресликавања ненултог степена f, индукују мономорфизме за свако k $f^* : H^k(N;\mathbb{Z}) \to H^k(M;\mathbb{Z})$. Дакле, не постоји пресликавање ненултог степена $f : \Sigma^n \to M$ из хомолошке сфере Σ^n у затворену оријентисану многострукост M са нетривијалном кохомологијом.

Лако се конструише пресликавање степена 0, тако да $0 \in D(M,N)$. Идентитет пресликавање показује да $1 \in D(M,M)$. Са Проблемом 2 можемо поставити једно мање амбициозно питање:

Проблем 3. *За дате две многострукости M и N да ли постоји пресликавање степена* 1 *из M у N?*

Следећи примери показују да се у општем случају скупови $D(M,N)$ разликују од случаја до случаја. Чак и за Проблем 3 је тешко дати потврдан или одречан одговор.

Став 5.1.1. *За сваку повезану затворену оријентабилну многострукост M^{2n-1} важи $D(M,\mathbb{R}P^{2n-1}) = 2\mathbb{Z}$.*

Доказ: Сфера S^n је универзално наткривање пројективног простора $\mathbb{R}P^n$ и нека је p наткривајуће пресликавање. Нека је $f : M \to \mathbb{R}P^n$ пресликавање. Посматрајмо следећи комутативни дијаграм

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}P^n. \end{tikzcd}$$

Пошто је фундаментална група $\pi_1 M$ тривијална, постоји подизање $\tilde{f} : M \to S^n$ од f. Из функторијалности хомологије добијамо $f_* = p_* \tilde{f}_*$, те је стога $\deg f = \deg p \cdot \deg \tilde{f}$. Но, како је $\deg p = 2$ када је n непарно, следи да је $\deg f$ парно.

Није тешко конструисати пресликавање степена $2k$. Компонујмо било које пресликавање степена k из M у S^{2n-1} са p. $\square$

Став 5.1.2. *Нека је M просто повезана затворена оријентабилна 3-многостру-кост M, и P Поенкареова хомолошка сфера. Тада је $D(M, P) = 120\mathbb{Z}$.*

Доказ: Сфера S^3 је универзално наткривање од P, а степен наткривање p је 120. Аргумент је исти као у претходном доказу. $\square$

Коментар. Став 5.1.2 је само специјални случај резултата Legrand-Matveev-Zieschang [37] о израчунавању степена пресликавања између Seifert-ових многострукости у Поенкареову хомолошку сферу. Овај резултат заједно са резултатима из рада [37] одговорио је на Проблем 2 у случају Seifert-ових многострукости.

Резултати о 3-многострукостима обично предпостављају неку додатну геометријску или тополошку структуру на многострукости. До пре неколико година само неколико специјалних случајева многострукости чија је димензија изнад 3 је проучавано, од којих су можда најзанимљивији [8], [24] и [33]. Haibao Duan и Shicheng Wang су направили значајан искорак у проблему са радовима [25] и [27], јер су формулисали алгебарски услов за постојање пресликавања одређеног степена између $(n-1)$-повезаних $2n$-многострукости. Њихов алгебарски услов следи из топологије ових многострукости. Међутим, чак и у димензији 4 где је ситуација најједноставнија, ове услове није једноставно проверити.

5.2 Резултати Duan-а и Wang-а

Радови [25] и [27] су значајно прошириле наша знања о степенима пресликавања између затворених орјентабилних $2n$-многострукости. У овом делу ћемо се упознати са неким деловима њиховог рада и поново доказати Теорему 2 из рада [25], као и дати појачање Последице 3 Wang-овог и Duan-овог резултата.

Нека је M $2n$-димензионална, затворена, повезана и орјентабилна многостру-кост, $n > 1$ и нека је $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$ слободни део у кохомолошкој групи $H^n(M;\mathbb{Z})$. Кап производ у кохомологији

$$\bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) \otimes \bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) \to H^{2n}(M;\mathbb{Z})$$

дефинише пресечну форму X_M над $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$, која је по Поенкареовој дуалности билинеарна и унимодуларна, видети [35], Став 3.38. Ова форма је и n-симетрична у смислу да је

$$X_M(x \otimes y) = (-1)^n X_M(y \otimes x).$$

Нека је $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ база за $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$. Тада пресечна форма X_M одређује $m \times m$ матрицу $A = (a_{ij})$ где су елементи a_{ij} дати са

$$a_{ij} = \alpha_i \cup \alpha_j[M],$$

а $[M]$ је фундаментална класа у $H_{2n}(M)$.

Нека је $f : M \to L$ пресликавање између повезаних, затворених и орјентабилних $2n$-многогострукости M и L, и нека су f^* и f_* индуковани хомоморфизми кохомолошких и хомолошких прстена. Нека су $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ базе за $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$ и $\bar{H}^n(L;\mathbb{Z})$ редом. Индуковани хомоморфизам f^* одређује $m \times l$ матрицу $P = (p_{ij})$ такву да је

$$f^*(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij}\beta_j,$$

за свако $i, 1 \leq i \leq m$.

Теорема 5.2.1 (H. Duan, S. Wang)**.** *Нека су M и L затворене орјентабилне $2n$-многострукости са пресечним матрицама A и B над задатим базама α за $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$ и β за $\bar{H}^n(L;\mathbb{Z})$. Ако постоји пресликавање $f : M \to L$ степена k такво да је $f^*(\beta) = \alpha P$, тада је*

$$P^t AP = kB.$$

Штавише, ако је $k = 1$, тада је X_L је изоморфно директном сабирку од X_M.

Доказ: За пресликавање $f : M \to L$ важи $f_*([M]) = k[L]$. Из функторијалности кап и кеп производа добијамо

$$X_M(f^*(x) \otimes f^*(y)) = f^*(x) \cup f^*(y)[M] =$$

$$= f^*(x \cup y)[M] = (x \cup y) f_*([M]) = (x \cup y) k[L] = k X_L(x \otimes y)$$

за свако $x, y \in \bar{H}^n(L;\mathbb{Z})$. Дакле, следеће дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} \bar{H}^n(L;\mathbb{Z}) \times \bar{H}^n(L;\mathbb{Z}) \arrow[r, "X_L"] \arrow[d, "f^* \otimes f^*"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\times k"] \\ \bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) \times \bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) \arrow[r, "X_M"] & \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Као последицу, за базу α за $\bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$ и β за $\bar{H}^n(L;\mathbb{Z})$ ова чињеница се записује у форми $P^t A P = kB$ где је $f^*(\beta) = \alpha P$.

Специјално, када је $k = 1$ рестрикција на X_M подгрупе $f^*(\bar{H}^n(L;\mathbb{Z})) \subset \bar{H}^n(M;\mathbb{Z})$ је изоморфна са X_L и унимодуларна. Према Леми о ортогоналној декомпозицији [47], стр. 5, је

$$X_M = X_{f^*(\bar{H}^n(L;\mathbb{Z}))} \oplus X_{H^\perp} = X_L \oplus X_{H^\perp},$$

где је $H^\perp$ ортогонални комплемент од $f^*(\bar{H}^n(L;\mathbb{Z}))$ и $X_{H^\perp}$ је рестрикција X_M на $H^\perp$. $\square$

У истом раду Duan и Wang су доказали следећу теорему која даје потпуни критеријум за постојање пресликавања степена k из 4-многострукости M у просто повезану 4-многострукост L.

Теорема 5.2.2. *Нека су M и L повезане, затворене и орјентабилне 4-многострукости са пресечним матрицама A и B над датим базама α за $\bar{H}^2(M;\mathbb{Z})$ и β за $\bar{H}^2(L;\mathbb{Z})$. Ако је L просто повезана, тада постоји пресликавање $f : M \to L$ степена k такво да је $f^*(\beta) = \alpha P$ ако и само ако је*

$$P^t A P = kB.$$

Штавише, постоји пресликавање $f : M \to L$ степена 1 ако и само ако је X_L изоморфно директном сабирку од X_M.

Duan и Wang су доказали у ради [25] Последицу 3 Теореме 5.2.1. Из њихових разматрања се лако закључује да она важи у нешто генералнијој форми.

Последица 6. *Нека су M и L затворене орјентабилне $2n$-многострукости такве да је $\mathrm{rank}\bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{rank}\bar{H}^n(L;\mathbb{Z}) = 2r+1$. Тада је за било које пресликавање $f : M \to L$, апсолутна вредност степена пресликавања од f потпун квадрат.*

Доказ: Нека је P матрица реализована пресликавањем f. По Теореми 5.2.1 имамо да је

$$P^t A P = kB,$$

где су P, A и B квадратне матрице реда $2r+1$. Узимајући детерминанте на обе стране једнакости добијамо $|P|^2|A| = k^{2r+1}|B|$. Пошто су A и B унимодуларне матрице, то је $|P|^2 = |k|^{2r+1}$. Дакле, $|k|$ је потпун квадрат. □

У радовима [25] и [27], Duan и Wang су развили технику за проучавање ненултих степена пресликавања између $(n-1)$-повезаних затворених и орјентабилних $2n$-многострукости. Своју технику су илустровали на бројним конкретним примерима. У наредном делу ћемо наставити у истом духу као у раду [25] и покушати да те резултате поставимо у мало генералнији контекст.

5.3 Степени пресликавања између квазиторусних 4-многострукости

Пресликавања између неких квазиторусних 4-многострукости су проучавана у раду [25], као примери који илуструју примену Теорема 5.2.1 и 5.2.2. Резултати који су они добили у најједноставнијим случајевима нису тривијални. У овом делу ћемо се фокусирати на генералнији случај квазиторусних 4-многострукости. Ове многострукости су разматране у [6].

Квазиторусне 4-многострукости су тополошки класификоване Теоремом 4.3.3 и њихова пресечна форма се лако одређује. Матрице које представљају пресечне форме за $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}$ и $S^2\times S^2$ су

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{и} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

редом. Дакле, пресечна форма за $\mathbb{C}P^2\sharp\overline{\mathbb{C}P^2}$ има матричну репрезентацију као

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Теорема 4.3.3 тврди да је квазиторусна 4-многострукост дифеоморфна са

$$\left(\mathbb{C}P^2\right)^{\sharp a}\sharp\left(\overline{\mathbb{C}P^2}\right)^{\sharp b}\sharp\left(S^2\times S^2\right)^{\sharp c} =$$

$$= \underbrace{\mathbb{C}P^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{C}P^2}_{a\,\text{пута}}\sharp\underbrace{\overline{\mathbb{C}P^2}\sharp\cdots\sharp\overline{\mathbb{C}P^2}}_{b\,\text{пута}}\sharp\underbrace{S^2\times S^2\sharp\cdots\sharp S^2\times S^2}_{c\,\text{пута}}.$$

Пресечна форма дате квазиторусне многострукости има репрезентацију $(a + b + 2c)$-квадратне матрице

$$\begin{bmatrix} I_{a\times a} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{b\times b} & 0 \\ 0 & 0 & A_{c\times c} \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

где је $A_{c\times c}$ $2c$-квадратна матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нека су $M = (\mathbb{C}P^2)^{\sharp a} \sharp \left(\overline{\mathbb{C}P^2}\right)^{\sharp b} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp c}$ и $N = (\mathbb{C}P^2)^{\sharp d} \sharp \left(\overline{\mathbb{C}P^2}\right)^{\sharp e} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp f}$ две квазиторусне многострукости, а A и B матрице њихових пресечних форми, редом. Из Теореме 5.2.2 следи да постоји пресликавање степена k између M и N ако и само ако постоји $(a+b+2c) \times (d+e+2f)$ матрица P таква да је $P^tAP = kB$. Директним израчунавањем добијамо да су елементи $(d + e + 2f)$-квадратне матрице $C = P^tAP$:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{a} p_{ri}p_{rj} - \sum_{r=1}^{b} p_{a+r\,i}p_{a+r\,j} + \sum_{r=1}^{c}(p_{a+b+2r-1\,i}p_{a+b+2r\,j} + p_{a+b+2r\,i}p_{a+b+2r-1\,j}).$$

Решавање матричне једначине $P^tAP = kB$ је еквивалентно решавању одговарајућег система Диофантових једначина. Не постоји алгоритам за решавање Диофантове једначине, тако да не постоји природан пут за приступ проблему. У нашем систему свега $d + e + f$ од $\frac{(d+e+f)(d+e+f+1)}{2}$ израза на левој страни једначина је једнако $\pm k$, док су остали једнаки 0.

Докажимо следећу лему:

Лема 5.3.1. *Нека су $B_{n\times k}$ и $C_{k\times n}$ произвољне матрице такве да је $k < n$. Тада је*

$$\det |B \cdot C| = 0.$$

Доказ: Означимо $A = B \cdot C$. Тада је $a_{ij} = \sum_{r=1}^{k} b_{ir}c_{rk}$. Нека су B' и C' n-квадратне матрице такве да

$$B' = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}, \qquad C' = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Очигледно је

$$B' \cdot C' = B \cdot C = A,$$

и одатле следи да је

$$0 = \det B' \cdot \det C' = \det A.$$

□

Теорема 5.3.1. *Нека су M и N повезане, затворене и орјентабилне $2n$-многострукости такве да је $1 \leq \mathrm{rank}\bar{H}^n(M;\mathbb{Z}) < \mathrm{rank}\bar{H}^n(N;\mathbb{Z})$. Тада не постоји пресликавање $f : M \to N$ ненултог степена.*

Доказ: Ово је последица Леме 5.3.1 примењене на матрице P^t и $A \cdot P$. Према Леми је

$$0 = k^{\mathrm{rank}\bar{H}^n(N;\mathbb{Z})} \det B,$$

а због унимодуларности пресечне форме је $k = 0$. □

Теорема 5.3.2. *Ако постоји пресликавање $f : M \to N$ степена k између две 4-многострукости, тада постоји пресликавање степена k из $M\sharp\mathbb{C}P^2$ у N.*

Доказ: Нека је A матрица пресечне форме за M, B за N и P матрица, таква да је

$$P^tAP = kB.$$

Тада је $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ матрица пресечне форме за $M\sharp\mathbb{C}P^2$. Матрица $P' = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix}$ очигледно задовољава услов

$$(P')^tA'P' = kB.$$

□

Теорема 5.3.3. *Ако постоји пресликавање $f : M \to N$ степена k између две 4-многострукости, тада постоји пресликавање степена k из $M\sharp\left(S^2 \times S^2\right)$ у N.*

Доказ: Нека је A матрица пресечне форме за M, B за N и P матрица, таква да је

$$P^t AP = kB.$$

Тада је $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ матрица пресечне форме за $M\sharp(S^2 \times S^2)$. Матрица $P' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix}$ очигледно задовољава услов

$$(P')^t A' P' = kB.$$

□

Као последицу Теорема 5.3.2 и 5.3.3 добијамо:

Последица 7. *Ако постоји пресликавање $f : M \to N$ степена k између две 4-многострукости, тада постоји пресликавање степена k из $M\sharp Q$ у N за сваку 4-многострукост Q.*

Теорема 5.3.4. *Ако су $f : M \to N$ и $g : M' \to N'$ пресликавања степена k између 4-многострукости, тада постоји пресликавање степена k из $M\sharp M'$ у $N\sharp N'$.*

Доказ: Нека су A и A' матрице пресечних форми за M и M', B и B' за N и N', P и P' матрице такве да

$$P^t AP = kB,$$

$$P'^t A' P' = kB'.$$

Директно проверавамо да је

$$\begin{bmatrix} P^t & 0 \\ 0 & P'^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{bmatrix}.$$

□

5.3.1 Пресликавања у $\mathbb{C}P^2$

У овом делу ћемо изучавати пресликавања из квазиторусних многострукости у $\mathbb{C}P^2$ (и $\overline{\mathbb{C}P^2}$). Користимо знања из елементарне теорије бројеве које се могу наћи у већини стандардних књига о овој теми, као што је [58], [17] и [50].

Нека је M квазиторусна многострукост дифеоморфна са

$$(\mathbb{C}P^2)^{\sharp a}\, \sharp \left(\overline{\mathbb{C}P^2}\right)^{\sharp b} \sharp \left(S^2 \times S^2\right)^{\sharp c}.$$

Теорема 5.2.2 своди проблем на постојање нетривијалног решења Диофантове једначине

$$\sum_{i=1}^{a} p_{i\,1}^2 - \sum_{i=1}^{b} p_{a+i\,1}^2 + 2\sum_{i=1}^{c} p_{a+b+2i-1\,1} p_{a+b+2i\,1} = k. \tag{5.4}$$

Теорема 5.3.5.

- *Ако је $a \geq 1$ (или $b \geq 1$) и $c \geq 1$ тада једначина 5.4 има решење за свако $k \in \mathbb{Z}$*
- *Ако је $a \geq 4$ и $b = c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки ненегативан цео број k и нема решења за негативно k.*
- *Ако је $b \geq 4$ и $a = c = 0$ тада једначина 5.4 има решење за зваки цео број $k \leq 0$ и нема решења за позитивне целе бројеве k.*
- *Ако је $a = 3$ и $b = c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки ненегативни цео број облика $k \neq 4^p(8q+7)$ и нема решења за позитивне целе бројеве облика $k = 4^p(8q+7)$ и негативне целе бројеве.*
- *Ако је $b = 3$ и $a = c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки непозитиван цео број облика $k \neq -4^p(8q+7)$ и нема решења за негативне целе бројеве облика $k = -4^p(8q+7)$ и позитивне целе бројеве.*
- *Ако је $a = 2$ и $b = c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки ненегативан цео број k такав да се сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ појављује паран број пута у канонској факторизацији броја k и нема решења у осталим случајевима.*
- *Ако је $b = 2$ и $a = c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки цео број $k \leq 0$ такав да се сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ појављује паран број пута у канонској факторизацији броја k и нема решења у осталим случајевима.*
- *Ако је $a = b = 1$ и $c = 0$ тада једначина 5.4 има решења за сваки цео број облика $k \neq 4p+2$ и нема решења за бројеве облика $k = 4p+2$.*

- *Ако је $a = 1$ и $b = c = 0$ тада једначина 5.4 има решење за сваки цео број који је потпун квадрат и нема решења у осталим случајевима.*

- *Ако је $b = 1$ и $a = c = 0$ тада једначина 5.4 има решење за сваки цео број који је потпун квадрат помножен са -1 и нема решења у осталим случајевима.*

- *Ако је $a = b = 0$ и $c \geq 1$ тада једначина 5.4 има решења за сваки паран број k и нема решења у осталим случајевима.*

Доказ: Сваки цео број се може записати у облику $u^2 + 2vw$ где су u, v и w цели бројеви. Ова особина нам гарантује постојање пресликавања $f : \mathbb{C}P^2\sharp(S^2 \times S^2) \to \mathbb{C}P^2$ степена k. Теореме 5.3.2 и 5.3.3 рашурују овај резултат на квазиторусне многострукости са $a \geq 1$ и $c \geq 1$. Из стандардног курса елементарне теорије бројева нам је познато да се сваки цео број може записати као сума квадрата четири цела броја, па постоји пресликавање степена $k \geq 0$ када је $a \geq 4$ и $b = c = 0$.

Случај $a = 3$ и $b = c = 0$ је веома интересантан, пошто следи из нетривијалног резултата Legendre-а (1798) и Gauss-а (1801) да се ненегативни цели бројеви могу записати као сума квадрата три цела броја ако и само ако су облика $4^p(8q + 7)$.

Ако је $a = 2$ и $b = c = 0$ тада за било које пресликавање $f : \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, $\deg f$ мора бити цео број који се записује као сума квадрата два цела броја. Као што је познато, цео број се може записати као сума квадрата два цела броја ако и само ако се сваки прост делилац тог броја облика $4p-1$ појављује паран број пута у његовој канонској факторизацији. За $k = u^2 + v^2$ можемо узети да је матрица P

$$P = \begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix}$$

и добијамо пресликавање степена k.

У случају $a = b = 1$ и $c = 0$, степен пресликавања мора бити цео број који се записује као разлика два потпуна квадрата, а то је могуће ако и само ако тај број не даје остатак 2 при дељењу са 4. Директно проверавамо да матрица

$$P = \begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix}$$

гарантује пресликавање $u^2 - v^2$.

Остали случајеви се доказују користећи горе наведене особине и аналогно доказу претходних случајева. $\square$

5.3.2 Пресликавања у $S^2 \times S^2$

Пресликавања из $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ у $S^2 \times S^2$ су проучавана у раду [25]. У овом делу ћемо проучавати пресликавања из произвољне квазиторусне многострукости у $S^2 \times S^2$.

Став 5.3.1. *Не постоји пресликавање ненултог степена из $(\mathbb{C}P^2)^{\sharp k}$ ($(\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp k}$) у $S^2 \times S^2$.*

Доказ: За сваку матрицу P индуковану пресликавањем $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp k} \to S^2 \times S^2$ важи да је

$$P^t P = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}.$$

Из овог услова следи да је P нула матрица, па је и $k = 0$. $\square$

Став 5.3.2. *За сваки цео број k постоји пресликавање степена k из $(S^2 \times S^2)^{\sharp n}$ у $S^2 \times S^2$.*

Доказ: Према теореми 5.3.3, довољно је показати да постоји пресликавање $f : S^2 \times S^2 \to S^2 \times S^2$ степена k. Матрица

$$P = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

према теореми 5.2.2 гарантује постојање пресликања степена k. $\square$

Став 5.3.3. *За сваки цео број k постоји пресликавање степена k из $(\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ $(\mathbb{C}P^2 \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp 2})$ у $S^2 \times S^2$.*

Доказ: Директно проверавамо да следећа матрица

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k \\ 1 & k \end{bmatrix}$$

по Теореми 5.2.2 гарантује постојање пресликавања степена k. $\square$

Теорема 5.3.6. *Нека је M квазиторусна многострукост таква да је $c \geq 1$. Тада постоји пресликавање степена k из M у $S^2 \times S^2$ за сваки цео број k.*

Доказ: Лако се проверава да матрица P

$$P = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

задовољава услове Теореме 5.2.2. $\square$

Теорема 5.3.7. *Нека је M квазиторусна многострукост таква да је $a \geq 2$ и $b \geq 1$ (или $a \geq 1$ и $b \geq 2$). Тада постоји пресликавање степена k из M у $S^2 \times S^2$ за сваки цео број k.*

Доказ: Лако се проверава да матрица P

$$P = \begin{bmatrix} 0_{(a-2)\times 2} \\ k \quad 0 \\ 0 \quad 1 \\ -k \quad 1 \\ 0_{(b+2c-1)\times 2} \end{bmatrix}$$

задовољава услове Теореме 5.2.2. $\square$

5.3.3 Пресликавања у $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$

Према раду [25] не постоји пресликавање ненултог степена из $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ и $S^2 \times S^2$ у $\mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$. За остале квазиторусне многострукости скупови $D(M, \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2)$ су много занимљивији.

Став 5.3.4. *Постоји пресликавање $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2}$ степена k ако и само ако је $k \geq 0$ и ако сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ учествује паран број пута у канонској факторизацији броја k.*

Доказ: Нека је $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ матрица индукована пресликавањем f. Одговарајући систем једначина је

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = k, \tag{5.5}$$

$$ab + cd = 0. \tag{5.6}$$

Очигледно је да k мора имати репрезентацију као сума два квадрата, тј. $k = u^2 + v^2$ за целе бројеве u и v.

Са друге стране матрица $P = \begin{bmatrix} u & v \\ v & -u \end{bmatrix}$ за свако такво k показује постојање неког пресликавања степена k. □

Став 5.3.5. *Постоји пресликавање* $f : (S^2 \times S^2)^{\sharp n} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2}$ $n \geq 2$ *степена* k *ако и само ако је* k *паран број.*

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{2n} & b_{sn} \end{bmatrix}$$

матрица индукована пресликавањем f. Одговарајући систем једначина је

$$2a_1a_2 + \cdots + 2a_{2n-1}a_{2n} = 2b_1b_2 + \cdots + 2b_{2n-1}b_{2n} = k, \tag{5.7}$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_{2n}b_{2n} = 0. \tag{5.8}$$

Одавде је јасно да k мора бити паран број.

Довољно је да докажемо да постоји пресликавање $f : (S^2 \times S^2)^{\sharp 2} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2}$ степена $k = 2t$. Ово је тачно, јер матрица

$$P = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

задовољава услове Теореме 5.2.2. □

Став 5.3.6. *За сваки цео број* k *постоји пресликавање* $f : \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \sharp (S^2 \times S^2) \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2}$ *степена* k.

Доказ: Уколико је $k \neq 4t+2$ број k се може записати у облику $u^2 - v^2$ и тада матрица

$$P = \begin{bmatrix} u & u \\ v & v \\ u^2 - v^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

задовољава услове Теореме 5.2.2.

Уколико је $k = 4t+2$ тада ћемо за P узети:

$$P = \begin{bmatrix} t+2 & t \\ t & t \\ 1 & 2t+1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

Теорема 5.3.8. *Постоји пресликавање $f : (\mathbb{C}P^2)\sharp(S^2 \times S^2) \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ степена k ако и само ако је $k \geq 0$ и ако сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ учествује паран број пута у канонској факторизацији броја k.*

Доказ: Нека је P матрица индукована пресликавањем

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Потребно је одредити све целе бројеве k за које систем

$$a^2 + 2ce = b^2 + 2df = k, \tag{5.9}$$

$$ab + de + cf = 0. \tag{5.10}$$

Множењем последње једначине са $2cd$ добијамо

$$0 = 2abcd + d^2(2ce) + c^2(2df) = 2abcd + d^2(k - a^2) + c^2(k - b^2),$$

одакле следи да је

$$k(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2.$$

Одавде је $k \geq 0$ и k облика $u^2 + v^2$.

Остаје да покажемо само још да пресликавање степена $u^2 + v^2$ постоји за све целе бројеве u и v. Довољно је да за P узмемо матрицу

$$P = \begin{bmatrix} u+v & u-v \\ -u & v \\ v & u \end{bmatrix}.$$

□

Теорема 5.3.9. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \sharp (S^2 \times S^2) \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k *ако и само ако је* $k \geq 0$ *и ако сваки прост делилац броја* k *облика* $4p-1$ *учествује паран број пута у канонској факторизацији броја* k.

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}.$$

Решавамо следећи систем Диофантових једначина

$$a^2 + c^2 + 2ge = b^2 + d^2 + 2fh = k \tag{5.11}$$

$$ab + cd + ef + gh = 0. \tag{5.12}$$

Јасно је да за $k = m^2 + n^2$ имамо решење $a = d = m, b = n, c = -n$ и $g = e = h = k = 0$.

Доказаћемо да се свако k за које постоји решење, може записати у облику $m^2 + n^2$.

Помножимо са $2fg$ једначину $ab + cd + ef + gh = 0$ и искористимо преостале две једнакости:

$$2fg(ab + cd) + f^2(k - a^2 - c^2) + g^2(k - b^2 - d^2) = 0.$$

Одавде следи:

$$k(f^2 + g^2) = (af - bg)^2 + (cf - dg)^2.$$

Сада је јасно да је k број облика $u^2 + v^2$. □

Теорема 5.3.10. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 3} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k *ако и само* *ако је $k \geq 0$ и ако сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ учествује паран број пута у канонској факторизацији броја k.*

Доказ: Из досадашњих разматрања довољно је да покажемо да је k облика u^2+v^2, пошто пресликавање $f : \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2$ степена u^2+v^2 постоји по Ставу 5.3.4.

Уколико је

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = k, a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \tag{5.13}$$

Можемо претпоставити да је $NZD(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = 1$, јер уколико је $NZD(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = d$, решавамо еквивалентан систем за $\frac{k}{d^2}$. Изразимо на два начина $a_3^2b_3^2$:

$$a_3^2b_3^2 = (k - a_1^2 - a_2^2)(k - b_1^2 - b_2^2),$$

$$a_3^2b_3^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Одавде добијамо да је

$$k^2 - k(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_2 + a_2b_1)^2 = 0.$$

Доказаћемо да не постоји прост број q облика $4r-1$, такав да $q^{2s+1} \mid\mid k$, одакле следи наше тврђење. Ако би такво q постојало, имали би да $q^{2s+1} \mid (a_1b_2 + a_2b_1)^2$ односно $q^{s+1} \mid (a_1b_2 + a_2b_1)$. Дакле, $q^{2s+2} \mid k(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)$ одакле $q \mid a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$. Но како је

$$2k = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$$

то следи да $q \mid a_3^2 + b_3^2$ и $q \mid a_3$ и $q \mid b_3$. Аналогно, се доказује да $q \mid a_1$, $q \mid b_1$, $q \mid a_2$ и $q \mid b_2$. Контрадикција са тим да је $NZD(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = 1$. □

Теорема 5.3.11. *Постоји пресликавање $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n} \to \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2$, $n \geq 4$ степена k ако и само ако је k ненегативан цео број.*

Доказ: Из Теореме 5.2.2 и исписивања њеног услова видимо да је број k сума n потпуних квадрата, тј. услов да је $k \geq 0$ је потребан.

Са друге стране сваки ненегативан цео број се може записати као сума четири квадрата. Нека је $k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, тада матрица

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{bmatrix}$$

гарантује постојање пресликавања степена k. $\square$

Теорема 5.3.12. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 3} \sharp (S^2 \times S^2) \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k *за сваки ненегативан цео број* k.

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_4a_5 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2b_4b_5 = k, \tag{5.14}$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5 = 0. \tag{5.15}$$

Помножимо последњу једначиму са $2a_4b_5$ и искористимо прве две једначине слично као у доказу Теореме 5.3.8 и добијамо:

$$k(a_4^2 + b_5^2) = (a_4b_1 - b_5a_1)^2 + (a_4b_2 - b_5a_2)^2 + (a_4b_3 - b_5a_3)^2.$$

Одавде следи да је услов $k \geq 0$ потребан.

Уколико је $k \geq 0$, k се може записати као сума четири потпуна квадрата $k =$

$u^2 + v^2 + w^2 + z^2$. Тада ће матрица P

$$P = \begin{bmatrix} u & -w \\ v & -z \\ w-z & u-v \\ w & v \\ z & u \end{bmatrix},$$

гарантовати постојање пресликавања степена k. $\square$

Теорема 5.3.13. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k *ако и само ако је* $k \geq 0$ *и ако сваки прост делилац броја* k *облика* $4p-1$ *учествује паран број пута у канонској факторизацији броја* k.

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a^2 + c^2 - e^2 = b^2 + d^2 - f^2 = k, ab + cd - ef = 0. \tag{5.16}$$

Из овог система једначина добијамо квадратну једначину

$$k^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)k + (bc - ad)^2 = 0.$$

Из Виетових формула, очигледно је $k \geq 0$.

Не губећи на општости можемо да претпоставимо да је $NZD(a, b, c, d, e, f) = 1$. Докажимо да не постоји прост број q облика $4p - 1$ такав да $q^{2r+1} \mid\mid k$. Заиста, ако би такво q постојало, из квадратне једначине би имали да $q^{r+1} \mid bc - ad$ и $q \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Одавде следи да $q \mid (a+d)^2 + (b-c)^2$ и $q \mid (a-d)^2 + (b+c)^2$. Одавде је $a + d \equiv b - c \equiv 0 \pmod q$ и $a - d \equiv b + c \equiv 0 \pmod q$. Дакле, $a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv 0 \pmod q$, па мора да $q \mid e$ и $q \mid f$. Контрадикција са тим да је $NZD(a, b, c, d, e, f) = 1$.

За $k = u^2 + v^2$ матрица

$$P = \begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

гарантује постојање пресликавања степена k. $\square$

Теорема 5.3.14. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 3} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k *ако и само ако је* $k \geq 0$ *и ако сваки прост делилац броја* k *облика* $4p-1$ *учествује паран број пута у канонској факторизацији броја* k.

Доказ: Због претходне Теореме, довољно је да докажемо да је k облика u^2+v^2.

Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a^2+c^2+e^2-g^2 = b^2+d^2+f^2-h^2 = k, \tag{5.17}$$

$$ab+cd+ef-gh = 0. \tag{5.18}$$

Можемо увести смену $e = g+m$ и $f = h+n$, па прећи на решавање еквивалентног система

$$a^2+c^2+m^2+2gm = b^2+d^2+n^2+2hn = k, \tag{5.19}$$

$$ab+cd+mn+gn+fm = 0. \tag{5.20}$$

Помножимо последњу једначину са $2mn$ и искористимо прве две једначине и добијамо

$$2mnab+2mncd+2m^2n^2+n^2(k-a^2-c^2-m^2)+m^2(k-b^2-d^2-n^2) = 0.$$

Одавде следи да је

$$(m^2+n^2)k = (mb-an)^2+(md-cn)^2,$$

тј. k мора бити облика u^2+v^2. $\square$

Теорема 5.3.15. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$, $n \geq 4$ *степена* k *ако и само ако је* k *ненегативан цео број.*

Доказ: Најпре ћемо доказати да је неопходно да k буде ненегативан цео број.

Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2 - b_n^2 = k, \tag{5.21}$$

$$a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} - a_n b_n = 0. \tag{5.22}$$

Слично претходним ситуацијама из система се може добити следећа квадратна једначина

$$k^2 - k(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2) + \left(\sum_{1 \le i < j \le n-1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \right),$$

одакле због Виетових формула следи да је $k \geq 0$.

Према Теореми 5.3.11 и 5.3.2 добијамо да за сваки ненегативан цео број k постоји пресликавање степена k. □

Теорема 5.3.16. *За сваки цео број k постоји пресликавање $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp 2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ степена k.*

Доказ: Уколико је $k = 2t + 1$ непаран број за матрицу P можемо узети:

$$P = \begin{bmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t+1 \\ 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix},$$

а уколико је $k = 2t$ паран број узећемо:

$$P = \begin{bmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t+1 \\ 1 & t \\ t & -1 \end{bmatrix}.$$

□

На основу горе навединих резултата и Теорема 5.3.2 и 5.3.3 добијамо:

Последица 8. *Ако је M квазиторусна 4-многострукост таква да је* $\mathrm{rank}\bar{H}^2(M;\mathbb{Z}) \geq 5$ *и* $b+2c \geq 2$, *тада за сваки цео број* k *постоји пресликавање* $f : M \to \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ *степена* k.

5.3.4 Пресликавања у $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$

Став 5.3.7. *Не постоји пресликавање* $f : \mathbb{C}P^{2\sharp n} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ *ненултог степена.*

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = k, \tag{5.23}$$

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{n-1}^2 - b_n^2 = -k, \tag{5.24}$$

$$a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n = 0. \tag{5.25}$$

Из прве једначине је $k \geq 0$, а из друге је $k \leq 0$, одакле је $k = 0$. □

Став 5.3.8. *Не постоји пресликавање* $f : \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ *ненултог степена.*

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

одговарајући систем Диофантових једначина је

$$a^2 - c^2 = b^2 - d^2 = k, \tag{5.26}$$

$$ab - cd = 0. \tag{5.27}$$

Из овог система добијамо да је

$$a^2 b^2 = c^2 d^2 = (a^2 - k)(b^2 - k),$$

одакле је $k = 0$ или $k = a^2 + b^2$. У другом случају је $a = b = c = d = 0$, тј. $k = 0$ је једино решење. $\square$

Теорема 5.3.17. *За сваки цео број k постоји пресликавање $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \to \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ степена k.*

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Интересује нас следећи систем Диофантових једначина

$$a^2 + c^2 - e^2 = f^2 - b^2 - d^2 = k \tag{5.28}$$

$$ab + cd - ef = 0. \tag{5.29}$$

За сваки цео број облика $k \neq 4t + 2$ је познато да постоје цели бројеви m и n такви да је $k = m^2 - n^2$. У овом случају, $a = b = 0$, $c = f = m$ и $d = e = n$ је решење. За $k = 4t + 2$, можемо узети да је $a = 1, b = 2, c = 2t + 1, d = 2t + 2, e = 2t$ и $f = 2t + 3$. $\square$

Теорема 5.3.18. *За сваки цео број k постоји пресликавање $f : \mathbb{C}P^2 \sharp (S^2 \times S^2) \to \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ степена k.*

Доказ: Нека је

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Одговарајући систем једначина је

$$a^2 + 2ce = b^2 + 2df = k \tag{5.30}$$

$$ab + cf + de = 0. \tag{5.31}$$

За $k = 2t$ можемо узети да је $a = b = 0, c = d = t, e = 1$ и $f = -1$. За $k = 2t + 1$ можемо узети да је $a = b = d = e = 2t + 1, e = -t$ и $f = -t - 1$. $\square$

На основу претходних теорема и Теорема 5.3.2 и 5.3.3 добијамо:

Последица 9. *За сваку квазиторусну 4-многострукост M такву да је $b \geq 1$ и $c \geq 1$ и за сваки цео број k, постоји пресликавање $f : M \to \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ степена k.*

5.4 Ортогоналне решетке и пресликавања између повезаних сума пројективних простора $\mathbb{C}P^2$

У овом делу ћемо посебну пажњу посветити пресликавањима између многострукости које су хомеоморфне повезаној суми коначног броја пројективних простора $\mathbb{C}P^2$. Интересују нас степени пресликавања

$$f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n}.$$

Став 5.4.1. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2n-1} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2n-1}$, $n \geq 1$ *степена* k *ако и само ако је* k *потпун квадрат.*

Доказ: Тврђење следи из Последице 6. □

Теорема 5.4.1. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4}$ *степена* k *ако и само ако је* k *ненегативан цео број.*

Доказ: Искористићемо чињеницу да сваки ненегативан цео број има репрезентацију као сума четири потпуна квадрата

$$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Тада матрица

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{bmatrix}$$

гарантује постојање пресликавања степена k. □

Теорема 5.4.1 заједно са Теоремом 5.3.4 имплицира:

Последица 10. *Постоји пресликавање* $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n}$, $n \geq 1$ *степена* k *ако и само ако је* k *ненегативан цео број.*

Преостали случај одређивања степена пресликавања

$$f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2},$$

$n \geq 1$ је још увек отворен. Став 5.3.4 имплицира да скуп свих целих бројева који се могу записати као сума два потпуна квадрата је подскуп од $D((\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2}, (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2})$. Чак и у случају $f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 6} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 6}$ није познат одговор, али директно се проверава да 3, 7, 11, 15, 19 не могу бити степени пресликавања, што подржава хипотезу да је $D((\mathbb{C}P^2)^{\sharp 6}, (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 6})$ једнак скупу целих бројева који се могу записати као сума два потпуна квадрата:

Хипотеза 1. *Скуп $D((\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2}, (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 4n+2})$ је скуп ненегативних целих бројева k таквих да сваки прост делилац броја k облика $4p-1$ учествује паран број пута у канонској факторизацији броја k.*

Хипотеза 1 се може реформулисати на следећи начин:

Постоји целобројна матрица $P = [p_{ij}]$ $1 \le i, j \le 4n+2$ таква да је

$$\sum_{j}^{4n+2} p_{ij}^2 = k$$

за свако $i = 1, \ldots, 4n+2$ и

$$\sum_{t}^{4n+2} p_{it}p_{jt} = 0$$

за свако $i \neq j$ ако и само ако се k може записати као сума два потпуна квадрата.

Колоне матрице P можемо схватити као векторе у $\mathbb{R}^{4n+2}$. Приметимо да би таква матрица P задовољавала случај једнакости у чувеној Hadamard-овој неједнакости (погледати [16], стр. 108). Ово имплицира да ако векторе (колоне матрице P) узмемо за генераторе решетке (која је подрешетка стандардне решетке $\mathbb{Z}^{4n+2}$), број k је њена дискриминанта. Наше питање је заправо које су могуће вредности дискриминанте ортогоналних решетки у $\mathbb{R}^{4n+2}$ вији су генератори једнаке дужине. Матрице које задовољавају услов једнакости у Hadamard-овој неједнакости се често срећу у различитим областима математике. Оне чији су елементи -1 и 1 називамо *Hadamard-овим матрицама* (видети [1]). Не постоји $(4n+2) \times (4n+2)$ Hadamard-ова матрица према резултату Paley-а из 1933. Због тога мислимо да је Хипотеза 1 блиско повезана са проучавањем ортогоналних решетки и њихових дискриминанта.

5.5 Неке обзервације о степенима пресликавања између квазиторусних 4-многострукости

У претходној глави, видели смо неколико примера скупова $D(M, N)$ када су M и N квазиторусне 4-многострукости. Још увек нисмо у могућности да одредимо овај скуп за произвољне квазиторусне 4-многострукости, али захваљујући Теореми 5.3.4, последици 7 и специјалним случајевима које смо испитали, за многе многострукости можемо одредити ове скупове и у већини случајева дати неку нетривијалну информацију о њима.

Можемо проблему приступити на следећи начин. Најпре декомпонујемо M и N као повезане суме од $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}$ и $S^2 \times S^2$. Из система Диофантових једначина можемо добити неку генералну рестрикцију на степен пресликавања k, као нпр. да мора бити ненегативан или непозитиван, паран или непаран или сума извесног броја потпуних квадрата. Онда покушамо да докажемо да су ти услови довољни. Проучавали смо пресликавања у $\mathbb{C}P^2$, $\overline{\mathbb{C}P^2}, S^2\times S^2, \mathbb{C}P^2\sharp\overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{C}P^2\sharp\mathbb{C}P^2$ и др. Ове резултате можемо комбиновати узастопном применом Теореме 5.3.4 и надати се да ћемо произвести пресликавање $f : M \to N$ степена k. Ово није могуће увек урадити, али је један алгоритам за генерисање интересантних резултата.

Теорема 5.5.1. *Нека су l, m и n позитивни цели бројеви такви да је $l \geq m+n$, тада постоји пресликавање*

$$f : (S^2 \times S^2)^{\sharp l} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n}\sharp(\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp n}\sharp(S^2 \times S^2)^{\sharp m}$$

степена k ако и само ако је k паран број.

Доказ: Очигледно је да је услов парности за k неопходан. На основу резултата [27] постоје пресликавања било ког парног степена $f : S^2 \times S^2 \to \mathbb{C}P^2\sharp(\overline{\mathbb{C}P^2})$ и $g : S^2 \times S^2 \to S^2 \times S^2$. На основу Теореме 5.3.4 следи тврђење. □

Теорема 5.5.2. *Нека су m и n позитивни цели бројеви такви да је $n \geq m$, тада постоји пресликавање*

$$f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n}\sharp(S^2 \times S^2)^{\sharp n} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp 2m}$$

степена k ако и само ако је k потпун квадрат.

Доказ: На основу Теореме 5.3.5, и Теореме 5.3.4 следи тврђење. □

Теорема 5.5.3. *Нека су l, m, n и p позитивни цели бројеви такви да је $p \geq 2n$ и $l \geq m$, тада за сваки цео број k постоји пресликавање*

$$f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp p} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp p} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp l} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp n} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp n} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp m}$$

степена k.

Доказ: На основу Теореме 5.3.16, Става 5.3.2 и Теореме 5.3.4 следи тврђење. □

Имајући у виду ову идеју, можемо доказати да је:

Теорема 5.5.4. *Нека је M квазиторусна 4-многострукост. Тада постоје цели бројеви a_0, b_0 и c_0 такви да за све целе бројеве a, b и c такве да за $a \geq a_0$, $b \geq b_0$ и $c \geq c_0$ важи*

$$D((\mathbb{C}P^2)^{\sharp a} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp b} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp c}, M) = \mathbb{Z}.$$

Доказ: Нека је M дифеоморфно са

$$(\mathbb{C}P^2)^{\sharp m} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp n} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp p}.$$

Према Теореми 5.3.5 и 5.3.4 постоје пресликавања $f_1 : (\mathbb{C}P^2 \sharp (S^2 \times S^2))^{\sharp m} \to (\mathbb{C}P^2)^{\sharp m}$, $f_2 : (\overline{\mathbb{C}P^2} \sharp (S^2 \times S^2))^{\sharp m} \to (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp m}$ и $f_3 : (S^2 \times S^2))^{\sharp m} \to (S^2 \times S^2))^{\sharp m}$ било ког степена k. Узмимо да је $a_0 = m$, $b_0 = n$ и $c_0 = m + n + p$. По Теореми 5.3.4 постоји пресликавање

$$f : (\mathbb{C}P^2)^{\sharp a_0} \sharp (\overline{\mathbb{C}P^2})^{\sharp b_0} \sharp (S^2 \times S^2)^{\sharp c_0} \to M.$$

Сада из Теорема 5.3.2 и 5.3.3 следи тврђење задатка. □

Ова теорема тврди да постоји бесконачно много многострукости које се могу сликати у квазиторусну многострукост M пресликавањем било ког степена.

Чувени рад [29] Freedman-а даје класификацију 4-многострукости у терминима њихове пресечне форме. Но као што смо видели, техника коју смо користили има ограничене ефективне могућности чак и у случају квазиторусних многострукости које имају релативно једноставну пресечну форму. Рад са општијим многострукостима и поред резултата Freedman-а са становишта елементарне теорије бројева није погодан. Већ смо објаснили везу ових проблема са проблемима о решеткама и квадратним формама. За упознавање решетки и њихове везе са апстрактним многострукостима упућујемо читаоца на [10] и [20]. Природно је наставити да се проблем изучава са становишта озбиљнијих техника, пре свега теорије бројева. За очекивати је зато да сваки помак у било којој од ових дисциплина доведе до помака у осталим.

Парцијални резултати које смо добили у случају 4-многострукости даје наду да ћемо бар за класу квазиторусних многострукости моћи да јасно формулишемо и докажемо критеријум за постојање пресликавања одређеног степена.

6. ТОТАЛНО КОСА УЛАГАЊА И ИМЕРЗИЈЕ КВАЗИТОРУСНИХ МНОГОСТРУКОСТИ

6.1 Тотално коса улагања многострукости

У овој глави разматраћемо тотално коса улагања многострукости са посебним акцентом на квазиторусне многострукости.

Дефиниција 6.1.1. За две праве у афином простору $\mathbb{R}^N$ кажемо да су у *косом* положају ако нису паралелне и ако се не секу или еквивалентно ако разапињу афин простор димензије 3. Генералније, афини потпростори $U_1, \ldots, U_l$ од $\mathbb{R}^N$ се називају *коси* ако разапињу афин простор димензије $\dim(U_1) + \cdots + \dim(U_l) + l - 1$.

Специјално, пар U, V афиних потпростора у $\mathbb{R}^N$ је кос ако и само ако су сваке две праве $p \subset U$ и $q \subset V$ косе.

Дефиниција 6.1.2. Улагање $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ глатке многострукости M^n се назива *тотално косо* ако су за сваке две тачке $x, y \in M^n$ афини потпростори $df(T_xM)$ и $df(T_yM)$ од $\mathbb{R}^N$ коси. $N(M^n)$ је минимални природан број N такав да постоји тотално косо улагање многострукости M^n у $\mathbb{R}^N$.

Ghomi и Tabachnikov су у раду [32] почели изучавање тотално косих улагања многострукости и повезали инваријанту $N(M^n)$ са неким од класичних инваријанти у геометрији и топологији. Они су показали [32, Теорема 1.4] да је проблем одређивања $N(\mathbb{R}^n)$ у блиској вези са генерализованим проблем векторског поља и проблемом имерзије реалног пројективног простора и да су повезани неједнакошћу

$$N(\mathbb{R}^n) \geq r(n) + n$$

где је $r(n)$ минимално r такво да Витнијева сума $r\xi_{n-1}$ од r копија канонског линијског раслојења над $\mathbb{R}P^{n-1}$ допушта $n + 1$ линеарно независних сечења.

Други пример је ([32, Теорема 1.2]) је неједнакост

$$N(S^n) \leq n + m(n) + 1$$

где је $m(n)$ добропозната функција дефинисана као минимално m такво да постоји несингуларна, симетрична билинеарна форма $B : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^m$. Као последицу ове везе, добијају се следеће неједнакости $N(S^n) \leq 3n + 2$ и $N(S^{2k+1}) \leq 3(2k+1) + 1$.

О тачним вредностима инваријанте $N(M)$ се веома мало зна. Према раду [32], једино до сада познате тачне вредности су

$$N(\mathbb{R}^1) = 3, \quad N(S^1) = 4, \quad N(\mathbb{R}^2) = 6.$$

Коначно за било коју n-многострукост M^n Ghomi и Tabachnikov су успоставили горње и доње границе

$$2n + 1 \leq N(M^n) \leq 4n + 1 \tag{6.1}$$

и показали да се доња граница може повећати на $2n + 2$ када је M^n затворена многострукост.

У раду [7] изучаване су тополошке обструкције за тотално коса улагања многострукости и проналажене су добре доње оцене за $N(M^n)$. Показано је да у многим класама многострукости постоје примери када је горња граница $4n + 1$ из (6.1) веома блиска тачној вредности од $N(M^n)$. На пример $N(\mathbb{R}P^n)$ је по [7] један од бројева $4n - 1, 4n, 4n + 1$ када је $n = 2^k$ степен броја 2, специјално $N(\mathbb{R}P^2)$ је 7, 8, или 9. Генералније, ако је $M^n = \mathbb{R}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{n_k}$ производ реалних пројективних простора и $n_i = 2^{r_i}$ су различити степени броја 2, тада је

$$N(M^n) = N(\mathbb{R}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}P^{n_k}) \geq 4n - 2\alpha(n) + 1$$

где је $\alpha(n)$ број ненула цифара у бинарној репрезентацији броја n. Слична процена

$$N(X) \geq 8n - 4\alpha(n) + 1 = 4 \cdot \dim_{\mathbb{R}}(X) - 4\alpha(n) + 1$$

је добијена за $X = \mathbb{C}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{n_k}$ где су $n_i = 2^{r_i}$ различити степени броја 2 и $n = n_1 + \cdots + n_k = \dim_{\mathbb{C}}(X)$.

У истом раду су ради проналажења $N(M^n)$ који су блиски горњој граници $4n + 1$

изучаване Грасманове многострукости $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ и оријентисани Грасманијани $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^{n+k})$. Доказано је да је $N\left(G_2\left(\mathbb{R}^{2^r+2}\right)\right) \geq 4 \cdot 2^{r+1} - 3$ и $N(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{2^r+2})) \geq 3 \cdot 2^{r+1} + 1$. Сличне неједнакости су добијене за много других Грасманијана као на пример:

$$N(G_3(\mathbb{R}^6)) \geq 31, \quad N(G_3(\mathbb{R}^7)) \geq 43, \quad N(\tilde{G}_3(\mathbb{R}^7)) \geq 41, \text{ итд.}$$

Ови резултати су у оштром контрасту са чињеницом да се о тачној вредности $N(M^n)$ веома мало зна. Тачна вредност $N(M^2)$ није позната чак ни у случају затворених површи M^2.

У истом раду је постављена у аналогији са класичном *Хипотезом имерзије* [19], хипотеза која предвиђа да за $n > 1$ важи

$$N(M^n) \leq 4n - 2\alpha(n) + 1.$$

6.1.1 Декомпозиција векторског раслојања

Нека је $F_2(M) := M^2 \backslash \Delta_M$ конфигурациони простор (многострукост) свих различит уређених парова тачака у M. Тангентно раслојење $T(F_2(M))$ дозвољава цепање

$$T(F_2(M)) \cong \pi_1^* TM \oplus \pi_2^* TM \tag{6.2}$$

где су $\pi_1, \pi_2 : F_2(M) \to M$ природне пројекције. Ради лакше нотације са

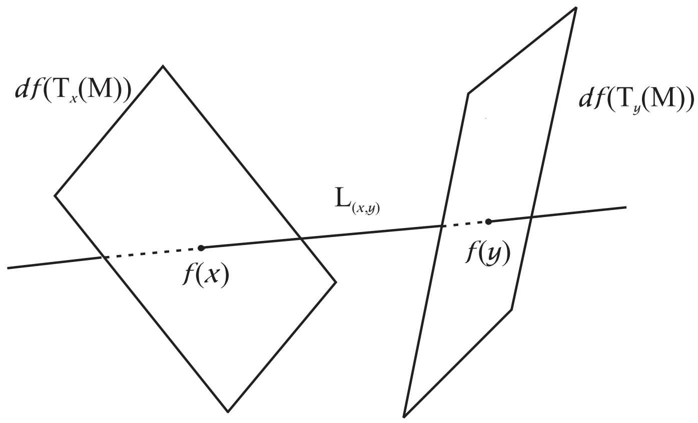
$$T_{(x,y)}(F_2(M)) \cong T_x(M) \oplus T_y(M)$$

ћемо обележавати влакна овог раслојења у $(x, y) \in F_2(M)$.

Ако је $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ утапање, тада постоји тривијално линијско раслојење L над $F_2(M)$ такво да за $(x, y) \in F_2(M)$ влакно $L_{(x,y)}$ је права $\mathbb{R} \cdot (f(y) - f(x))$. Ако је $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ тотално косо улагање, тада постоји мономорфизам векторских раслојења

$$\Phi = \Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)} : T(F_2(M)) \oplus \varepsilon^1 \longrightarrow F_2(M) \times \mathbb{R}^N$$

где је $\Phi^{(1)}_{(x,y)} : T_x(M) \oplus T_y(M) \to \mathbb{R}^N$ пресликавање дефинисано са $\Phi^{(1)}_{(x,y)}(u, v) = df_x(u) + df_y(v)$ и $\Phi^{(2)}$, дефинисано са $\Phi^{(2)}(\lambda) = \lambda(f(y) - f(x))$, пресликава тривијално линијско раслојење ε^1 у L. У овом случају тривијално N-димензионално раслојење ε^N



Слика 6.1: Влакно раслојења $T(F_2(M)) \oplus \varepsilon^1$.

над $F_2(M)$ се цепа

$$\varepsilon^N \cong T(F_2(M)) \oplus \varepsilon^1 \oplus \nu \tag{6.3}$$

где је ν $(N-2n-1)$-димензионално „нормално“ раслојење. Као последицу ([48, Секција 4]) добијамо следећи став:

Став 6.1.1. *Ако је дуална* $Stiefel\text{-}Whitney$*-ева класа*

$$\overline{w}_k(T(F_2(M))) := \omega_k(\nu) \in H^k(F_2(M), \mathbb{F}_2)$$

нетривијална, тада $2n+k+1 \leq N$. *Специјално,* $N(M) \geq 2n+k+1$.

6.1.2 Карактеристичне класе од $T(F_2(M))$

Кохомологија од $F_2(M) = M^2 \setminus \Delta_M$ се може израчунати из дугог тачног низа пара $(M^2, M^2 \setminus \Delta_M)$,

$$\ldots \longrightarrow H^*(M^2, M^2 \setminus \Delta_M) \xrightarrow{\alpha} H^*(M^2) \xrightarrow{\beta} H^*(F_2(M)) \longrightarrow \ldots \tag{6.4}$$

Нас интересују дуалне $\mathrm{Stiefel\text{-}Whitney}$-еве класе (Став 6.1.1) тако да ми подразумевамо да сва кохомологија има коефицијенте $\mathbb{Z}_2$ осим ако није другачије назначено.

По природности, довољно је да проверимо нетривијалност карактеристичне класе $\overline{w}_k(T(F_2(M)))$, а за ово је довољно проверити да се $\overline{w}_k(M^2)$ не налази у слици пресликавања α.

Слика $A := \mathrm{Image}(\alpha)$ од α је одређена у [48, Теорема 11.11] (видети такође

[11, Chapter VI, Section 12]). Она је генерисана, као $H^*(M)$-модул, „дијагоналном кохомолошком класом"

$$u'' = \sum_{i=1}^{r} b_i \times b_i^\sharp \tag{6.5}$$

где је $\{b_i\}_{i=1}^r$ адитивна база за $H^*(M)$ и $b_i^\sharp$ класа дуална b_i.

Постоје два дејства прстена $H^*(M)$ на $H^*(M \times M)$ асоцирана са пројекцијама $\pi_1, \pi_2 : M^2 \to M$. Према [48, Лема 11.8], која тврди да ако је $a \in H^*(M)$ тада је

$$(a \times 1) \cup u'' = (1 \times a) \cup u'',$$

ова два дејства имају исти ефекат на u''. Као последицу добијамо следећи став.

Став 6.1.2.

$$\begin{array}{rcccl} A & = & \mathrm{Image}(\alpha) & = & H^*(M) \cdot u'' & = & \{(1 \times a) \cup u'' \mid a \in H^*(M)\} \\ & & & & & = & \{(a \times 1) \cup u'' \mid a \in H^*(M)\} \end{array} \tag{6.6}$$

Следећи став обезбеђује једноставан и ефикасан критеријум за тестирање када се класа налази у слици од α. Приметимо да је услов $k \leq n-1$ есенцијалан због

$$H^{2n}(M \times M) \cong H^n(M) \otimes H^n(M) \subset \mathrm{Image}(\alpha). \tag{6.7}$$

Став 6.1.3. *Нека је M затворена и глатка n-димензионална многострукост. Нека је $k \leq n-1$ и $\theta \in H^k(M) \otimes H^k(M) \subset H^*(M \times M) \cong H^*(M) \otimes H^*(M)$ ненула класа. Тада $\theta \notin \mathrm{Image}(\alpha)$. Генералније, ако је $\omega \in H^{n+p}(M \times M)$ ненула класа у слици од α тада она мора имати компоненту бистепена (p, n) ненула „ивичну класу" облика $a \times z$ за неко $a \in H^p(M)$, где је $z \in H^n(M)$ фундаментална кохомолошка класа од M.*

Доказ: Ако је $z \in H^n(M)$ фундаментална кохомолошка класа од M тада дијагонална класа u'' има следеће форме

$$u'' = z \times 1 + x_1 \times y_1 + \cdots + x_r \times y_r + 1 \times z$$

где је $x_i \times y_i$ класа бистепена $(t, n-t)$ за неко $0 < t < n$. Ако је $\omega \in H^{n+p}(M \times M)$ у слици од α тада из Става 6.1.2 следи да је

$$\omega = (a \times 1)u'' = az \times 1 + A + a \times z$$

где је $A = ax_1 \times y_1 + \cdots + ax_n \times y_n$ класа чије су хомогене компоненте бистепена $(q, n+p-q)$ за неко $q > p$, одакле тврђење директно следи. $\square$

Последица 11. *Ако је* $k := \max\{i \mid \overline{w}_i(M) \neq 0\}$ *тада је* $\overline{w}_{2k}(T(F_2(M))) = w_{2k}(\nu) \neq 0$.

Доказ: Из природности Stiefel-Whitney-евих класа добијамо

$$w_{2k}(\nu) = \overline{w}_{2k}(T(F_2(M))) = \beta(\overline{w}_{2k}(M^2)) = \beta(\overline{w}_k(M) \times \overline{w}_k(M)).$$

Приметимо да је $k \leq n-1$. У супротном, свака n-димензионална глатка многострукост би се могла уложити у $\mathbb{R}^{2n}$ и $\overline{w}_n(M) = 0$ према [48, Последица 11.4.].

Како је $k \leq n-1$ можемо искористити Став 6.1.3 који имплицира да је $\overline{w}_k(M) \times \overline{w}_k(M) \notin \mathrm{Image}(\alpha)$. Одавде и из тачности низа (6.4) коначно закључујемо $w_{2k}(\nu) \neq 0$.
$\square$

6.2 Тотално коса улагања квазиторусних многострукости

У овом делу изучавамо и дајемо побољшања доње оцене за тотално коса улагања у случају неких квазиторусних многострукости.

6.2.1 Комплексни пројективни простори

Према Примеру 67 комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ је квазиторусна многострукост на симплексом $\triangle^n$.

Кохомологија комплексног пројективног простора $\mathbb{C}P^n$ са $\mathbb{Z}$ коефицијентима је посечена полиномијална алгебра, па је по Теореми о универзалним коефицијентима $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]/(t^{n+1} = 0)$ где је $\mathrm{deg} t = 2$.

Према Примеру 67 и Теореми 4.3.2 имамо да је тотална Stifel-Whitney-ева класа тангентног раслојења од $\mathbb{C}P^n$ задата са

$$w(\mathbb{C}P^n) = (1+t)^{n+1}.$$

Сада се лако налази да је одговарајућа дуална Stifel-Whitney-ева класа

$$\overline{w}(\mathbb{C}P^n) = (1+t)^{-n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{j} t^j. \tag{6.8}$$

Приметимо да је највиша класа $\overline{w}_{2n}$ увек нула, што је специјални случај генералнијег резултата Massey-а 6.4.1. Према Последици 11 интересује нас највећа вредност j таква да је $\overline{w}_{2j} = \binom{n+j}{j} t^j \neq 0$. Најпре приметимо да је $\overline{w}_{2n-2} \neq 0$ ако и само ако је $n = 2^r$ и степен 2.

То следи из низа елементарних особина функције цели део и биномних коефицијената.

Став 6.2.1. *За сваки природан број n важи*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^k}\right] = n - \alpha(n)$$

где је $\alpha(n)$ број јединица у бинарном запису броја n.

Доказ: Тврђење доказујемо индукцијом по $\alpha(n)$.

За $\alpha(n) = 1$ имамо да је $n = 2^r$ и тврђење следи.

Нека тврђење важи за $\alpha(n) = m$ и докажимо да важи и за све n такве да је $\alpha(n) = m + 1$.

Заиста, n можемо записати у облику $n = 2^r + n'$, где је $2^r > n'$ и $\alpha(n') = m$. Према индуктивној претпоставци је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^r + n'}{2^k}\right] = \sum_{k=1}^{r} \left[\frac{2^r + n'}{2^k}\right] = \sum_{k=1}^{r} \left(2^{r-k} + \left[\frac{n'}{2^k}\right]\right) =$$

$$= 2^r - 1 + n' - \alpha(n') = n - \alpha(n),$$

чиме је тврђење доказано. □

Став 6.2.2. *Број 2^d где је $d = \alpha(k) + \alpha(n-k) - \alpha(n)$, је највећи степен броја 2 такав да $2^d \mid \binom{n}{k}$.*

Доказ: Имамо да $\sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^j}\right] = n - \alpha(n)$ број 2 у канонској факторизацији броја $n!$. Зато је према претходном ставу, број двојки у $\binom{n}{k}$ једнак

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2^j}\right] - \left[\frac{k}{2^j}\right] - \left[\frac{n-k}{2^j}\right] \right) = (n - \alpha(n)) - (k - \alpha(k)) - (n - k - \alpha(n-k)) =$$

$$= \alpha(k) + \alpha(n-k) - \alpha(n).$$

□

Из претходна два става следи да је биномни коефицијент $\binom{2n-1}{n-1}$ непаран ако и само ако је $\alpha(n)+\alpha(n-1) = \alpha(2n-1) = 0$. Генерално, $\alpha(n)+\alpha(m) = \alpha(n+m)$ ако и само ако нема ниједног поклапања цифре 1 у бинарним записима бројева m и n, па специјално за наш случај је $n = 2^r$.

Једна директна последица је да је за $n = 2^r$

$$w(\mathbb{C}P^n) = 1 + t + t^n \quad \text{и} \quad \overline{w}(\mathbb{C}P^n) = 1 + t + \cdots + t^{n-1}.$$

Према Последици 11, закључујемо да је у овом случају $\overline{w}_{4n-4}(\nu) \neq 0$ и по Ставу 6.1.1 добијамо следећи резултат.

Теорема 6.2.1. *Нека је $n = 2^r$ за неко $r \geq 0$. Тада је*

$$N(\mathbb{C}P^n) \geq 4n + (4n-4) + 1 = 4 \cdot \dim(\mathbb{C}P^n) - 3.$$

Интересантна је и генерална оцена за свако n, која обухвата претходни случај. Ова оцена не мора бити блиска горњој граници, нпр. за $n = 2^r - 1$ поклапа се са доњом границом коју су добили Ghomi и Tabachnikov.

Последица 12.

$$N(\mathbb{C}P^n) \geq 8 \cdot 2^{[\log_2 n]} - 3.$$

Доказ: Нека је $n = 2^{r_1} + \cdots + 2^{r_k}$ бинарна репрезентација броја n и $r_1 > \cdots > r_k \geq 0$. Није тешко проверити да је биномни коефицијент $\binom{2^{r_1+1}-1}{n}$ непаран, па следи да је за $j = 2^{r_1+1} - 1 - n, \overline{w}_{2j} \neq 0$. Овим смо показали да је према Ставу 6.1.1

$$N(\mathbb{C}P^n) \geq 4n + 4j + 1 = 4n + 4(2^{r_1+1} - 1 - n) + 1 = 8 \cdot 2^{[\log_2 n]} - 3,$$

јер је $r_1 = [\log_2 n]$. □

6.2.2 Производи комплексних пројективних простора

Нека је $X = \mathbb{C}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{n_k}$. Ово су квазиторусне многострукости над производима одговарајућих симплекса. Кохомолошки прстен од X са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима је

$$H^*(X) \cong \mathbb{Z}_2[u_1, \ldots, u_k]/(u_1^{n_1+1} = \ldots = u_k^{n_k+1} = 0)$$

где је $\deg(u_1) = \ldots = \deg(u_{n_k}) = 2$. За ово је много лакше користити Теорему о кохомологији производа него Теорему Davis-а и Januszkiewicz-а 4.3.1. Ми ћемо надаље сматрати да су $n_1, n_2, \ldots, n_k$ степени броја 2, зато што се због Теореме 6.2.1 у овом случају добијају најбољи резултати.

Stifel-Whitney-еве класе се понашају природно у односу на производ тангентних раслојења па је тотална класа дата са

$$\overline{w}(X) = (1 + u_1 + u_1^{n_1}) \cdots (1 + u_k + u_k^{n_k}),$$

а одговарајућа дуална класа

$$\overline{w}(X) = (1 + u_1 + \cdots + u_1^{n_1-1}) \cdots (1 + u_k + \cdots + u_k^{n_k-1}).$$

Одавде закључујемо да је $\overline{w}_{2n-2k} = u_1^{n_1-1} \cdots u_k^{n_k-1}$ нетривијална класа, а као последицу Става 6.1.1 и Последице 11 добијамо следећу оцену.

Теорема 6.2.2. *Нека је $X = \mathbb{C}P^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{n_k}$ где су $n_i = 2^{r_i}$ степени броја 2 и нека је $n = \dim_{\mathbb{C}}(X) = (1/2)dim_{\mathbb{R}}(X) = n_1 + \cdots + n_k$. Тада је $N(X) \geq 8n - 4k + 1$. Ако су сви цели бројеви различити n_i тада је*

$$N(X) \geq 8n - 4\alpha(n) + 1 = 4 \cdot \dim_{\mathbb{R}}(X) - 4\alpha(n) + 1$$

где је $\alpha(n)$ број јединица у бинарном запису броја n.

6.3 Тотално коса улагања квазиторусних многострукости над коцком I^n

Нека је I^n коцка и M_{I^n} квазиторусна многострукост I^n. Коцка има $2n$ пљосни F_1, $\ldots, F_n, F_1', \ldots, F_n'$ таквих да $F_i \cap F_i' = \emptyset$ за свако $i = 1, \ldots, n$. Нека су $v_1, \ldots, v_n, u_1$, $\ldots, u_n$ Поенкареови дуали карактеристичних подмногострукости над пљоснима $F_1, \ldots$, $F_n, F_1', \ldots, F_n'$ редом. Тада је Stanley-Reisner-ов идеал генерисан мономима

$$\mathcal{I} = \{v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_nu_n\}.$$

Конструисаћемо специјалну квазиторусну многострукост M_{I^n} над коцком такву да је вектор λ_j придружен пљосни F_j (или генератор Лиеве алгебре изотроп-ске подгрупе карактеристичне подмногострукости M_j)

$$\lambda_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})^t$$

за свако $j = 1, \ldots, n$ и вектор λ_{j+n} придружен пљосни F'_j је

$$\lambda_{n+j} = (\underbrace{1, \ldots, 1,}_{i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i})^t$$

за свако $j = 1, \ldots, n$. Тада је карактеристична матрица:

$$\Lambda_{M_I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Идеал $\mathcal{J}$ у $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n]$ је генерисан линеарним формама

$$\begin{array}{ccccccccc} v_1 & + & u_1, & & & & & & \\ v_2 & + & u_1 & + & u_2, & & & & \\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & , \\ v_n & + & u_1 & + & u_2 & + & \cdots & + & u_n. \end{array}$$

6.3.1 Кохомолошки прстен $H^*(M_{I^n})$ и Stiefel-Whitney-еве класе $w(M_{I^n})$

Кохомолошки прстен $H^*(M_{I^n})$ је одређен теоремом Davis-Januszkiewicz-а 4.3.1:

Став 6.3.1. *Кохомолошки ӣрсӣен $H^*(M_{I^n}; \mathbb{Z})$ је изоморфан са*

$$H^*(M_{I^n}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]/\mathcal{F}_n$$

ӯде је $\mathcal{F}_n$ идеал у ӣолиномијалном ӣрсӣену $\mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_n]$ (ӣакав да је $\deg u_1 = \cdots = \deg u_n = 2$) ӯенерисан квадраӣним формама

$$\mathcal{F}_n = \{u_1^2, u_2^2 + u_1u_2, \ldots, u_n^2 + u_1u_n + u_2u_n + \cdots + u_{n-1}u_n\}.$$

Лако се проверава да је у прстену $H^*(M_{I^n};\mathbb{Z})$:

Став 6.3.2. *За свако* $i = 2, \dots, n$ *важи*

$$(1+u_i)(1+v_i) = 1 + u_1 + \cdots + u_{i-1} = 1 + v_{i-1}.$$

Редуковањем на $\mathbb{Z}_2$ коефицијенте добијамо да је

$$H^*(M_{I^n};\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u_1, \dots, u_n]/\mathcal{F}_n$$

где је $\mathcal{F}_n$ идеал у полиномијалном прстену $\mathbb{Z}_2[u_1, \dots, u_n]$ такав да је $\mathrm{deg} u_1 = \cdots = \mathrm{deg} u_n = 2$) генерисан квадратним формама

$$\mathcal{F}_n = \{u_1^2, u_2^2 + u_1u_2, \dots, u_n^2 + u_1u_n + u_2u_n + \cdots + u_{n-1}u_n\}.$$

Stiefel-Whitney-еве класе су карактеристичне класе у кохомологији са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. По Davis-Januszkiewicz-овој формули, тотална Stiefel-Whitney-ева класа од M_{I^n} је задата са

$$w(M_{I^n}) = (1+u_1)\cdots(1+u_n)(1+v_1)\cdots(1+v_n),$$

али због Става 6.3.1 и 6.3.2 лако се редукује на

$$w(M_I) = (1+u_1)(1+u_1+u_2)\cdots(1+u_1+\cdots+u_{n-1}).$$

Због једноставнијег рачуна у кохомолошком прстену $H^*(M_{I^n};\mathbb{Z}_2)$, искористећемо други облик кохомолошког прстена. Подсетимо да је

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & u_1, \\ v_2 & = & u_1 + u_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,} \\ v_n & = & u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \end{array}$$

Имамо да је

$$H^*(M_{I^n};\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_n]/\mathcal{G}_n$$

где је $\mathcal{G}_n$ идеал у полиномијалном прстену $\mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_n]$ (такав да је $\mathrm{deg} v_1 = \cdots =$

$\deg v_n = 2$) генерисан квадратним формама

$$\mathcal{G}_n = \{v_1^2, v_2^2 + v_1 v_2, \ldots, v_n^2 + v_{n-1} v_n\}.$$

У новим генераторима, тотална Stiefel-Whitney-ева класа је дата са

$$w(M_{I^n}) = (1 + v_1) \cdots (1 + v_{n-1}).$$

Поново, није се тешко уверити [4] и [5] да у $H^*(M_{I^n}; \mathbb{Z}_2)$ важи:

Став 6.3.3. *За свако* $i = 1, \ldots, n$ *важи*

$$v_i^i = v_1 v_2 \cdots v_i \neq 0 \ \text{ и } t_i^{i+1} = 0.$$

Доказ: Лако се види да је

$$v_i^{i+1} = v_i^i v_{i-1} = \cdots = v_i v_{i-1}^i = v_i v_{i-1}^{i-1} v_{i-2} = \cdots = v_i \cdots v_2 v_1^2 = 0.$$

Слично је и

$$v_i^i = v_1 v_2 \cdots v_i$$

за све $i = 1, \ldots, n$.

Да бисмо доказали нетривијалност класа v_i^i, довољно је да докажемо да је $v_n^n = v_1 \cdots v_n$ нетривијална класа.

Најпре ћемо доказати следећу лему:

Лема 6.3.1. *Нека је* $i < j$ *и* a *и* b *ненегативни цели бројеви такви да је* $a \leq i$ *и* $b \leq j$. *Тада је класа* $v_i^a v_j^b$ *тривијална или једнака производу неких* $a + b$ *различитих генератора* v_k.

Доказ: Није тешко проверити да је

$$v_i^a v_j^b = v_{i-a+1} \cdots v_i v_{j-b+1} \cdots v_b.$$

Ако је $i \leq j - b$ доказ је завршен. У супротном, $i = j - k$ за неки природан број $k \leq b - 1$, одакле је

$$v_i^a v_j^b = v_{j-(a+k)+1} \cdot \cdots \cdot v_{j-k} \cdot v_{j-b+1} \cdot \cdots \cdot v_b =$$

$$= v_{j-(a+k-1)} \cdots v_{j-b} v_{j-b+1}^2 \cdots v_{j-k}^2 v_{j-k+1} \cdots v_j.$$

Сада наставимо да елиминишемо квадрате и степене генератора у овом изразу користећи једнакости $v_m^2 = v_m v_{m-1}$. Одавде због $v_1^2 = 0$ имамо ако је $j \geq a + b$ да је

$$v_i^a v_j^b = v_{j-(a+b)+1} \cdots v_j,$$

док је у супротном случају $v_i^a v_j^b = 0$. □

Као директну последицу претходне леме добијамо:

Последица 13. *Свака класа типа $v_{i_1}^{r_1} \cdots v_{i_k}^{r_k}$ је или тривијална или једнака производу неких $r_1 + \cdots + r_k$ различитих генератора. Штавише, ова класа је нетривијална ако и само ако је $p = 1, 2, \ldots, n$ $r_1 + \ldots + r_p \leq p$.*

Из опште теорије многострукости знамо да је $H^{2n}(M_{I^n}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Дакле, на основу претходног разматрања, генератор највиће кохомолошке групе мора бити класа $v_1 v_2 \cdots v_n$ чиме је став доказан. □

Следећи став, који ћемо називати „лема о скраћивању“, обједињује већину особина кохомолошког прстена $H^*(M_I, \mathbb{Z}_2)$ који ћемо касније користити. Користићемо ознаку v^α да бисмо означили моном $v^\alpha = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}$ степена $|\alpha| = k$ где је $\alpha = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ подскуп од $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. По конвенцији је $v^\alpha = 1$ ако је $\alpha = \emptyset$ и увек претпостављамо да је $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Став 6.3.4 (Лема о скраћивању). *Скуп монома $v^\alpha = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}$, где је $\alpha \subset [n]$, је градуисана $\mathbb{Z}_2$-база градуисаног векторског простора $H^*(M_I, \mathbb{Z}_2)$. Штавише, ако је $\beta \subset [n]$ тада је $v^\beta v_n^p \neq 0$ ако и само ако је $|\beta| + p \leq n$.*

Доказ: Већ знамо да је према Ставу 6.3.3, колекција $\mathcal{B} = \{v^\alpha\}_{\alpha \subset [n]}$ разапињући скуп за $\mathbb{Z}_2$-векторски простор $H^*(M_I, \mathbb{Z}_2)$. Као последицу имамо
$\dim(H^*(M_I, \mathbb{Z}_2)) \leq 2^n$. Према [13] важи:

$$\dim(H^*(M_I, \mathbb{Z}_2)) = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$$

где је $h = (h_0, \ldots, h_n)$ h-вектор асоцираног политопа. Подсетимо да је сума свих h_j увек једнака броју темена асоцираног простог политопа P. Специјално, када је $P = I^n$ n-димензионална коцка, добијамо да је $\dim(H^*(M_{I^n}, \mathbb{Z}_2)) = 2^n$ чиме је први део доказа завршен. Други део се једноставно показује индукцијом по p. □

6.3.2 Stiefel-Whitney-ева класа $\overline{w}(M_I)$ нормалног раслојења

Интересује нас Stiefel-Whitney-ева класа $\overline{w}(M_{I^n})$ нормалног раслојења. Stiefel-Whitney-еве класе $w(M_{I^n})$ и $\overline{w}(M_{I^n})$ су повезане једнакошћу

$$w(M_{I^n}) \cdot \overline{w}(M_{I^n}) = 1.$$

Како смо већ одредили Stiefel-Whitneyеву класу $w(M_{I^n})$ према Ставу 6.3.3, важи:

Лема 6.3.2. *Тотална Stiefel-Whitney-ева класа $\overline{w}(M_{I^n})$ нормалног раслојења је дата са:*

$$\overline{w}(M_{I^n}) = (1+v_1)(1+v_2+v_2^2)\cdots(1+v_{n-1}+\cdots+v_{n-1}^{n-1}).$$

Како је $\overline{w}_{2i}(M_{I^n}) = 0$ када је $i \geq n$, није јасно шта је дуална Stiefel-Whitney-ева класа $\overline{w}(M_{I^n})$ у кохомолошком прстену $H^*(M_{I^n};\mathbb{Z}_2)$. За мало n, директним рачуном добијамо да је $\overline{w}(M_{I^n})$:

Став 6.3.5. *1.* $\overline{w}(M_{I^2}) = 1 + v_1$,

2. $\overline{w}(M_{I^3}) = 1 + (v_1 + v_2)$,

3. $\overline{w}(M_{I^4}) = 1 + (v_1 + v_2 + v_3) + v_1v_3 + v_1v_2v_3$,

4. $\overline{w}(M_{I^5}) = 1 + (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (v_1v_3 + v_1v_4 + v_2v_4) + (v_1v_2v_3 + v_2v_3v_4)$.

Према Леми 6.3.2 дуалне Stiefel-Whitney-еве класе од $\overline{w}(M_{I^n})$ и $\overline{w}(M_{I^{n+1}})$ задовољавају следећу рекурентну релацију (у $H^*(M_{I^{n+1}};\mathbb{Z}_2)$):

$$\overline{w}(M_{I^{n+1}}) = \overline{w}(M_{I^n})(1 + v_n + \cdots + v_n^n), \tag{6.9}$$

или још експлицитније

$$\overline{w}_{2k}(M_{I^{n+1}}) = \overline{w}_{2k}(M_{I^n}) + v_n\,\overline{w}_{2k-2}(M_{I^n}) + \cdots + v_n^k \text{ за све } k = 0,\ldots,n-1 \tag{6.10}$$

и

$$\overline{w}_{2n}(M_{I^{n+1}}) = v_n\,\overline{w}_{2n-2}(M_{I^n}) + \cdots + v_n^n. \tag{6.11}$$

Овде смо користили чињеницу да постоји природан хомоморфизам $i, i : H^*(M_{I^n};\mathbb{Z}_2) \to H^*(M_{I^{n+1}};\mathbb{Z}_2)$ које дозвољава да све класе посматрамо у групи $H^*(M_{I^{n+1}};\mathbb{Z}_2)$.

Према леми о скраћивању (Став6.3.4) и радећи по модулу 2, $\overline{w}_{2k}$ је сума одређеног броја линеарно независних безквадратних монома. Посматрајмо полином $\overline{W}_{2k}(v_1,\dots,v_n)$ у прстену $\mathbb{Z}_2[v_1,\dots,v_n]$ степена $2k$, добијеног после примене свих могућих скраћивања у Леми 6.3.2.

Дефинишимо бројеве σ_n^k за све природне бројеве n и $0\le k\le n-1$ на следећи начин

$$\sigma_n^k=\overline{W}_{2k}(1,\dots,1) \pmod 2 \tag{6.12}$$

Према (6.10) и (6.11), имамо да је

$$\sigma_{n+1}^k=\sum_{i=0}^{k}\sigma_n^i \tag{6.13}$$

за све $k=1,\dots,n-1$ и

$$\sigma_{n+1}^n=\sigma_{n+1}^{n-1}.$$

Напишимо првих неколико n врста бројева σ_n^k за $k=0,\dots,n$:

$$\begin{array}{llllllll}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\multicolumn{8}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Претходни низ бројева је у блиској вези за следећим низом биномних коефицијената

$\binom{n+k}{k}$:

$$
\begin{array}{llllllll}
\boxed{1} & & & & & & & \\
\boxed{1} & \boxed{3} & & & & & & \\
\boxed{1} & 4 & 10 & & & & & \\
\boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{15} & \boxed{35} & & & & \\
\boxed{1} & 6 & \boxed{21} & 56 & 70 & & & \\
\boxed{1} & \boxed{7} & \binom{8}{2} & \binom{9}{3} & \binom{10}{4} & \binom{11}{5} & & \\
\boxed{1} & 8 & \binom{9}{2} & \binom{10}{3} & \binom{11}{4} & \binom{12}{5} & \binom{13}{6} & \\
\boxed{1} & \boxed{9} & \boxed{\binom{10}{2}} & \boxed{\binom{11}{3}} & \boxed{\binom{12}{4}} & \boxed{\binom{13}{5}} & \boxed{\binom{14}{6}} & \boxed{\binom{15}{7}} \\
\multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Математичком индукцијом се показује да је:

Лема 6.3.3.

$$\sigma_n^k \equiv \binom{n+k}{k} \pmod 2.$$

По претходној Леми, у случају када је $n = 2^r$, добијамо да је

$$\sigma_n^{n-1} \equiv \binom{2^r + (2^r - 1)}{2^r - 1} \equiv \binom{2^{r+1} - 1}{2^r - 1} \equiv 1 \pmod 2.$$

Очигледно, по дефиницији σ_n^k ако је $\sigma_n^k = 1$ тада је

$$\overline{w}_{2k}(M_{I^n}) \neq 0.$$

Дакле,

Теорема 6.3.1. *Ако је $n = 2^r$ степен од 2 тада је*

$$\overline{w}_{2n-2}(M_{I^n}) = v_1 v_2 \cdots v_{n-1} \neq 0.$$

Као директну последицу имамо

Последица 14. *За $n = 2^r$, квазиторусна многострукост M_{I^n} се не може тотално косо уложити у $\mathbb{R}^N$ када је N мање од*

$$8n - 3 = 4 \cdot \dim M_{I^n} - 3.$$

Теорема 6.3.1 је најбоља могућа оцена која се може добити користећи Stiefel-Whitney-еве класе за квазиторусне многострукости. Ипак, када n није степен од 2, у општем случају M_{I^n} не постиже максималну могућу вредност k за које је Stiefel-Whitney-ева класа $\overline{w}_{2k}(M_{I^n}) \neq 0$.

Но овај проблем се може превазићи користећи већ добијени резултат.

Нека је $n = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t}$, $r_1 > r_2 > \cdots > r_t \geq 0$ бинарна репрезентација броја n и нека је $m_i = 2^{r_i}$ за $i = 1, \ldots, t$. Поделимо пљосни од I_n у t група $A_1, \cdots, A_t$ на такав начин да супротне пљосни припадају истој групи и да је $|A_j| = 2m_j$ за $j = 1, \ldots, t$. За свако $j = 1, \ldots, t$, означимо пљосни од A_j са $F_i^{(j)}$ и $F_i'^{(j)}$ (супротне пљосни), $i = 1, \ldots, m_j$. Конструисаћемо нову квазиторусну многострукост Q^{2n} над коцком дефинисањем нове карактеристичне матрице Λ. Нека су $\lambda_i^{(j)} = (\underbrace{0, \ldots, 0,}_{(\sum_s^{j-1} m_s)+(i-1)} \ 1, \ \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-(\sum_s^{j-1} m_s)-i})^t \in \mathbb{Z}^n$ и $\lambda_{i+n}^{(j)} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(\sum_s^{j-1} m_s)} \underbrace{1, \ldots, 1,}_{i} \ \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-(\sum_s^{j-1} m_s)-i})^t \in \mathbb{Z}^n$ вектори придружени пљоснима $F_i^{(j)}$ и $F_i'^{(j)}$ редом. Нека су $v_i^{(j)}$ и $u_i^{(j)}$ Поенкареови дуали карактеристичних подмногострукости над пљоснима $F_i^{(j)}$ и $F_i'^{(j)}$ за све пљосни, редом. Карактеристична матрица Λ је

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|ccc} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m_t \times m_t} \\ & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ I_n & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{m_1 \times m_1} & \cdots & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{array}\right].$$

Према теореми Davis-Januszkiewicz-а 4.3.1 је

Теорема 6.3.2. • *Кохомолошки прстен* $H^*(Q;\mathbb{Z})$ *је изоморфан са*

$$H^*(Q;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[u_1^{(1)},\dots,u_{m_1}^{(1)},\dots,u_{m_t}^{(t)}]/\mathcal{F}$$

где је $\mathcal{F}$ *идеал у полиномијалном прстену* $\mathbb{Z}[u_1^{(1)},\dots,u_{m_1}^{(1)},\dots,u_{m_t}^{(t)}]$ *(таквом да је* $\mathrm{deg} u_i^{(j)} = 2$ *за све* j *и* i*) генерисан квадратним формама*

$$\mathcal{F} = \{{u_1^{(j)}}^2, {u_2^{(j)}}^2 + u_1^{(j)}u_2^{(j)},\dots,$$

$${u_{m_j}^{(j)}}^2 + u_1^{(j)}u_{m_j}^{(j)} + u_2^{(j)}u_{m_j}^{(j)} + \cdots + u_{m_j-1}^{(j)}u_{m_j}^{(j)} | j \in [t]\}.$$

• *Кохомолошки прстен* $H^*(Q;\mathbb{Z}_2)$ *је изоморфан са*

$$H^*(Q;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u_1^{(1)},\dots,u_{m_1}^{(1)},\dots,u_{m_t}^{(t)}]/\mathcal{G}$$

где је $\mathcal{G}$ *идеал у полиномијалном прстену* $\mathbb{Z}_2[u_1^{(1)},\dots,u_{m_1}^{(1)},\dots,u_{m_t}^{(t)}]$ *(таквом да је* $\mathrm{deg} u_i^{(j)} = 2$ *за све* j *и* i*) генерисан са квадратним формама*

$$\mathcal{G} = \{{u_1^{(j)}}^2, {u_2^{(j)}}^2 + u_1^{(j)}u_2^{(j)},\dots,$$

$${u_{m_j}^{(j)}}^2 + u_1^{(j)}u_{m_j}^{(j)} + u_2^{(j)}u_{m_j}^{j} + \cdots + u_{m_j-1}^{(j)}u_{m_j}^{(j)} | j \in [t]\}.$$

• *Тотална Stiefel-Whitney-ева класа* $w(Q)$ *је задата са*

$$w(Q) = \prod_{j=1}^{t}(1+u_1^{(j)})(1+u_1^{(j)}+u_2^{(j)})\cdots(1+u_1^{(j)}+\cdots+u_{m_j-1}^{(j)}).$$

На исти начин као раније уводимо нове генераторе $t_1^{(1)},\dots,t_{m_1}^{(1)},\dots,t_{m_t}^{(t)}$ такве да је

$$H^*(Q;\mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[t_1^{(1)},\dots,t_{m_1}^{(1)},\dots,t_{m_t}^{(t)}]/\mathcal{G}$$

где је $\mathcal{G}$ идеал у полиномијалном прстену $\mathbb{Z}_2[t_1^{(1)},\dots,t_{m_1}^{(1)},\dots,t_{m_t}^{(t)}]$ (таквом да је $\mathrm{deg} t_1 = \cdots = \mathrm{deg} t_n = 2$) генерисан са квадратним формама

$$\mathcal{G} = \{{t_1^{(j)}}^2, {t_2^{(j)}}^2 + t_1^{(j)}t_2^{(j)},\dots,{t_{m_j}^{(j)}}^2 + t_{m_j-1}^{(j)}t_{m_j}^{(j)} | j \in [t]\}.$$

Тотална Stiefel-Whitney-ева класа дата је са

$$w(Q)=\prod_{j=1}^{t}(1+t_1^{(j)})\cdots(1+t_{m_j-1}^{(j)}).$$

Одговарајућа дуална Stiefel-Whitney-ева класа дата је са

$$\overline{w}(Q)=\prod_{j=1}^{t}(1+t_1^{(j)})(1+t_2^{(j)}+t_2^{(j)^2})\cdots(1+t_{m_j-1}^{(j)}+\cdots+t_{m_j-1}^{(j)}{}^{m_j-1}).$$

Али, према Теореми 6.3.1 је:

$$\overline{w}(Q)=\prod_{j=1}^{t}(1+(t_1^{(j)}+\cdots+t_{m_j-1}^{(j)})+\cdots+t_1^{(j)}t_2^{(j)}\cdots t_{m_j-1}^{(j)}).$$

Дакле, највиша нетривијална дуална Stifel-Whitneyева класа је

$$\overline{w}_{2n-2\alpha(n)}(Q)=t_1^{(1)}\cdots t_{m_1-1}^{(1)}t_1^{(2)}\cdots t_{m_t-1}^{(t)},$$

где је $\alpha(n)$ број ненула цифара у бинарном запису броја n

Као последицу добијамо

Теорема 6.3.3. *За сваки природан број* n *постоји квазиторусна многострукост над коцком* I^n *таква да је*

$$N(Q)\geq 8n-4\alpha(n)+1.$$

Претходно тврђење је у [5] доказано на краћи начин ослањајући се на резултате из [15].

Коментар. Сличан резултат се не може очекивати у класи торусних варијетета јер је у том случају Stiefel-Whitney-ева класа тривијална.

6.4 Имерзије и улагања неких квазиторусних многострукости

Овде ћемо се кратко осврнути на проблем имерзија квазиторусних многострукости. Имерзије многострукости су веома проучаван феномен у алгебарској топологији и диференцијалној геометрији. Проучавање имерзија многострукости је једно од централних питања алгебарске топологије и мотивисало је многе познате математичаре да на овом проблему раде. Један од првих и најзначајнијих резултата је Whitney-ева теорема о улагању ([61], [62] и [63]) која тврди да се свака компактна n-многострукост $n > 1$ може глатко уложити у $\mathbb{R}^{2n}$ и имерзовати у $\mathbb{R}^{2n-1}$. Smale и Hirsch су значајно допринели теорији имерзија многострукости, [38] и [53].

Познату *Хипотезу имерзије*, која предвиђа да се свака компактна глатка n-многострукост $n > 1$ може имерзовати у $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$, где је $\alpha(n)$ број јединица у бинарном запису броја n, доказао је R. Cohen [19]. Њеном доказу је претходио следећи резултат Masseya-а.

Теорема 6.4.1 (W.S. Massey, [44]). *Нека је M^n глатка, компактна n-димензионална многострукост $(n > 1)$. Тада је $\overline{w}_j(M) = 0$ за $j > n - \alpha(n)$.*

Дуалне Stiefel-Whitney-еве класе такође представљају тополошку обструкцију за имерзију многострукости. Због резултата Cohen-а можемо за неке многострукости одредити и тачну вредност минималне димензије Еуклидског простора у који се многострукост може имерзовати.

Према Теореми 4.5 из [48] важи:

Теорема 6.4.2. *Ако се глатка, компактна n-многострукост M^n може имерзовати у Еуклидски простор $\mathbb{R}^{n+k}$, тада су дуалне Stiefel-Whitney-еве класе*

$$\overline{w}_i(M) = 0,$$

за $i > k$.

Веза између Stiefel-Whitney-евих класа, имерзија и улагања је дата следећом теоремом

Теорема 6.4.3. *Ако је $k := \max\{i \mid \overline{w}_i(M^n) \neq 0\}$ тада*

$$imm(M^n) \geq n + k \text{ и } em(M^n) \geq n + k + 1,$$

где је $imm(M^n) = \min\left\{d \mid M \text{ се имерзује у } \mathbb{R}^d\right\}$ и
$em(M^n) = \min\left\{d \mid M \text{ се улаже у } \mathbb{R}^d\right\}$.

Како је $M_{I^n}^{2n}$ орјентабилна многострукост, она се може уложити у $\mathbb{R}^{4n-1}$. Дакле,

Теорема 6.4.4. *Ако је n степен двојке тада је*

$$em(M_{I^n}) = 4n - 1.$$

Лема 6.3.2 имплицира да је

$$\overline{w}_2(M_{I^n}) = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}.$$

Према леми о скраћивању, када је n степен двојке, карактеристична класа $\overline{w}_2(M_{I^n})\overline{w}_{2n-2}(M_{I^n})$ је тривијална. Према резултату Massey-a [45], следи:

Теорема 6.4.5. *Ако је $n \geq 4$ стeпен двојке тада*

$$imm(M_{I^n}) = 4n - 2$$

Генерално, за многострукост M_{I^n} из претходног разматрања важи:

Последица 15. *За сваки природан број n постоји квазиторусна многострукост M_I над коцком таква да је*

$$imm(M_I) \geq 4n - 2\alpha(n),$$

$$em(M_I) \geq 4n - 2\alpha(n) + 1$$

и

$$N(M_I) \geq 8n - 4\alpha(n) + 1.$$

ДОДАТАК

А. ДЕЈСТВА ГРУПА

А.1 Тополошке групе

А.1.1 Основне особине тополошких група

Тополошке групе су тополошки простори који су истовремено групе у алгебарском смислу. Оне представљају богат рудник важних примера у топологији и геометрији. У овом делу ћемо приказати основе теорије тополошких група ослањајући се на [11] и [23].

Дефиниција А.1.1. *Тополошка група* је Хауздорфов тополошки простор G заједно са структуром групе на G такав да важи:

(1) множење у групи $(g,h) \mapsto gh, G \times G \to G$ је непрекидно пресликавање; и
(2) инверзно пресликавање у групи $g \mapsto g^{-1}, G \to G$ је непрекидно.

Дефиниција А.1.2. *Подгрупа* H тополошке групе G је подпростор који је такође и подгрупа у алгебарском смислу.

Пример 69. Простор $\mathrm{Z}_4 = \{e, \omega, \omega^2, \omega^3\}$ са дискретном топологијом има структуру тополошке групе $Z_4 = \langle \omega | \omega^4 = e \rangle$. Подпростор $\mathrm{Z}_2 = \{e, \omega^2\}$ овог простора је подгрупа са структуром групе Z_2.

Дефиниција А.1.3. Ако су G и G' тополошке групе *хомоморфизмом* називамо неприкидан хомоморфизам група $f : G \to G'$.

Дефиниција А.1.4. Ако је G тополошка група и $g \in G$ тада *левим транслирањем* за елемент g зовемо пресликавање $L_g : G \to G$ дато са $L_g(h) = gh$. Слично, *десним транслирањем* за g називамо пресликавање $R_g : G \to G$ дато са $R_g(h) = hg^{-1}$.

Став А.1.1. *За тополошку групу G важи $L_g \circ L_h = L_{gh}$ и $R_g \circ R_h = R_{gh}$. Оба пресликавања L_g и R_g су хомеоморфизми као и конјугација са g ($h \mapsto ghg^{-1}$).*

Доказ. За произвољан елемент $v \in G$ важи:

$$L_g \circ L_h(f) = L_g(L_h(f)) = L_g(hf) = g(hf) = (gh)f = L_{gh}(f).$$

Аналогно проверавамо и другу релацију. Из ове релације важи $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_e = Id$ и $L_{g^{-1}} \circ L_g = L_e = Id$ па је $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$. Аналогно доказујемо да је и R_g хомеоморфизам. Конјугација $h \mapsto ghg^{-1}$ је заправо композиција $R_g \circ L_g$, па је као композиција хомеоморфизама такође хомеоморфизам. □

Ако су A и B подскупови тополошке групе G означимо са $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$ и са $A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$.

Став А.1.2. *Нека је G тополошка група и U произвољна околина јединичног елемента e. Тада постоји околина $V \subset U$ која садржи e и важи $V = V^{-1}$.*

Доказ. Из непрекидности инверзног пресликавања је U^{-1} такође околина од e, па је $V = U \cap U^{-1}$ околина коју тражимо. □

Из непрекидности множења и инверзног пресликавања лако се доказују следеће две пропозиције.

Став А.1.3. *Нека је G тополошка група, $g \in G$ и U произвољна околина од g тада постоји околина V од e таква да је $V = V^{-1}$ и $VgV^{-1} \subset U$.*

Став А.1.4. *Нека је G тополошка група, U произвољна околина јединичног елемента e и n природан број тада постоји околина V од e таква да је $V = V^{-1}$ и $V^n \subset U$.*

Став А.1.5. *Нека је H подгрупа тополошке групе G онда је $\overline{H}$ такође подгрупа од G. Ако је H нормална подгрупа онда је и $\overline{H}$ нормална подгрупа.*

Доказ. Довољно је доказати да је $\overline{H}^{-1} \subset \overline{H}$ и $\overline{H}\overline{H} \subset \overline{H}$.

Нека је $v \in \overline{H}^{-1}$ и V произвољан отворен скуп који садржи v. Тада је $v = w^{-1}$ за неко $w \in \overline{H}$. Одавде следи да $w \in V^{-1}$. Скуп V^{-1} је отворен због услова (2) у дефиницији А.1.1. Зато је $V^{-1} \cap H \neq \emptyset$ па постоји $h \in H$ такво да $h \in V^{-1}$. Одавде следи да $h^{-1} \in V$, а како је H подгрупа то је $h^{-1} \in H$. Дакле, $V \cap H \neq \emptyset$ па $v \in \overline{H}$.

Нека су $h_1, h_2 \in \overline{H}$ и нека је U произвољан отворен скуп такав да $h_1 h_2 \in U$. Имамо да је $h_1^{-1}U$ отворен скуп који садржи h_2, па је $h_1^{-1}U \cap H \neq \emptyset$ тј. постоји $h' \in H$ такав да $h' \in h_1^{-1}U$. Одавде следи да $h_1 h' \in U$. Аналогно, Uh'^{-1} је отворен скуп који садржи h_1 и постоји $h'' \in H$ и $h'' \in Uh'^{-1}$. Зато $h'h'' \in U$, а како је H подгрупа то $h'h'' \in H$ и $h'h'' \in U \cap H$.

Преостали део тврђење доказујемо аналогно доказујући за $g \in G$ релацију $g\overline{H}g^{-1} \subset \overline{H}$. □

Став A.1.6. *Ако је G тополошка група и H њена затворена подгрупа тада простор G/H левих косета од H у G, са топологијом индукованом канонским пресликавањем $\pi : G \to G/H$ је Хауздорфов простор, а пресликавање π је отворено и непрекидно.*

Доказ. Нека је $U \subset G$ отворен тада је $\pi^{-1}\pi(U) = UH = \bigcup\{Uh|h \in H\}$ унија отворених скупова па је и сам отворен скуп. На основу дефиниције количничке топологије следи да је $\pi(U)$ отворен, па је π непрекидно и отворено пресликавање. Остаје да докажемо да је G/H Хауздорфов простор.

Нека су $g_1, g_2 \in G$ такви да је $g_1H \neq g_2H$, тј. $g_1^{-1}g_2 \notin H$. Како је $G - H$ околина од $g_1^{-1}g_2$ то према пропозицији A.1.3 постоји околона U од e таква да је $Ug_1^{-1}g_2U \cap H = \emptyset$. Одавде следи да је $g_1^{-1}g_2U \cap UH = \emptyset$, тј. $g_2U \cap g_1UH = \emptyset$. Последња релација повлачи и да је $g_2UH \cap g_1UH = \emptyset$, па су g_1UH и g_2UH (као скупови косета) дисјунктне околине тачака g_1H и g_2H. □

Став A.1.7. *Ако је H затворена нормална подгрупа тополошке групе G тада је простор G/H са количничком топологијом такође тополошка група.*

Доказ. Према пропозицији A.1.6 G/H је Хауздорфов простор па је довољно доказати да су множење и инверзно пресликавање у групи G/H непрекидна пресликавања. Посматрајмо следећи комутативни дијаграм где су хоризонталне стрелице множења у групи:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r] \arrow[d, "\pi\times\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/H \times G/H \arrow[r] & G/H.
\end{tikzcd}$$

Из пропозиције A.1.6 се лако закључује да је скуп у $G/H \times G/H$ отворен ако и само ако је у $G \times G$ отворена његова инверзна слика. Да бисмо доказали непрекидност множења на доњој хоризонталној стрелици, довољно је доказати да је инверзна слика отвореног скупа у G/H отворена у $G/H \times G/H$, а то је исто као да покажемо да је инверз у $G \times G$ (идући дијаграмом лево-горе) отворен. Овај инверз је исти као и када идемо дијаграмом горе-лево (преко G) а он је отворен пошто су множење у G и π непрекидна пресликавања. Аналогно доказујемо и непрекидност инверзног пресликавања у G/H. □

A.1.2 Класичне Лиеве групе

Једна од најважнијих класа тополошких група су *Лиеве групе* које поседују и диференцијабилну структуру. Описаћемо структуре тополошких група неких „класичних Лиових група“.

Скуп M_n свих $n \times n$ матрица је заправо еуклидски простор димензије n^2. Функција детерминанте $M_n \to \mathbb{R}$ је непрекидна јер је полином по коефицијентима матрице. Зато је инверзна слика од $\{0\}$ затворен скуп. Његов комплент је скуп свих несингуларних матрица, и формира групу у односу на множење матрица. Ова група се назива *општа линеарна група* и обележава се $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$. Множења матрица је задато полиномом по коефицијентима матрица, па је очигледно непрекид- но. Инверзна матрица је према Крамеровом правилу рационална функција коефицијената матрице, па је и ова функција непрекидна. Дакле, $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ је тополошка група.

Аналогно можемо закључити да је општа линеарна група $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$ над комплексним бројевима тополошка група. Општа линеарна група $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$ над кватернионима је такође тополошка група, иако се то доказује другачијим аргументом.

Специјална линеарна група $\mathbf{Sl}(n, \mathbb{R})$ (односно $\mathbf{Sl}(n, \mathbb{C})$) је подгрупа групе $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ (односно $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$) коју чине матрице чија је детерминанта једнака 1.

Скуп $\mathbf{O}(n)$ свих ортогоналних реалних матрица формира подгрупу групе $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ и то је затворен скуп, пошто је дефинисан релацијом $AA^t = I$. Како коефицијенти ортогоналне матрице леже у $[-1, 1]$ скуп $\mathbf{O}(n)$ је ограничен затворен подскуп n^2-димензионалног еуклидског простора па је компактан. Аналогно, скуп $\mathbf{U}(n)$ унитарних комплексних матрица, тј. матрица дефинисаних релацијом $AA^* = I$ где је $A^* = \bar{A}^t$, је компактна подгрупа од $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$. Кватернионски аналог група ортогоналних и унитарних матрица је симплектичка група $\mathbf{Sp}(n)$, коју чине све кватернионске матрице A које задовољавају релацију $AA^* = I$, где A^* представља квартенионски конјуговану транспоновану матрицу од A. Ова група је такође компактна подгрупа од $\mathbf{GL}(n, \mathbb{H})$.

Рестрикцијом на матрице димензије 1 добијају се следеће групе:

$$\begin{aligned}
\mathbf{SO}(n) &= \{A \in \mathbf{O}(n) \mid \det(A) = 1\} = \textit{специјална ортогонална група},\\
\mathbf{SU}(n) &= \{A \in \mathbf{U}(n) \mid \det(A) = 1\} = \textit{специјална унитарна група}.
\end{aligned}$$

Симплектички аналог ових група не постоји.

A.2 Дејства група

A.2.1 Основне особине дејства група

У овом делу ћемо се упознати са основним концептом дејства група.

Дефиниција A.2.1. Нека је G тополошка група и X простор, тада се *левим дејством групе* G на X назива непрекидно пресликавање $\varrho : G \times X \to X$, при чему $\varrho(g,x)$ обележавамо са $g(x)$, такво да је:

(1) $(gh)(x) = g(h(x))$; и
(2) $e(x) = x$.

Левим G-простором (трасформацијском групом) називамо пар (X,ϱ) који се састоји од простора X и левог дејства групе G на X.

Аналогно дефиницији A.2.1 дефинишемо *десно дејство* као непрекидно пресликавање $X \times G \to X$, $(x,g) \mapsto xg$ које задовољава услове $(xh)g = x(hg)$ и $xe = x$. Није тешко видети да ако је $(x,g) \mapsto xg$ десно дејство, тада је $(x,g) \mapsto xg^{-1}$ лево дејство. Обично радимо са левим G-просторима, па изостављамо реч леви.

Из дефиниције A.2.1 лако добијамо следеће тврђење.

Став A.2.1. *Лево транслирање $L_g : X \to X$, $x \mapsto g(x)$ је хомеоморфизам простора X.*

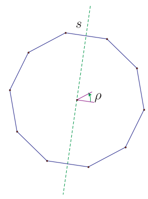
Другим речима пропозиција A.2.1 каже да је дејство групе G на X заправо хомоморфизам групе G у групу хомеоморфизама простора X.

За тачку $x \in X$, скуп $G(x) = \{g(x) \mid g \in G\}$ зовемо *орбитом* елемента x, а подгрупу $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ називамо *групом изотропије* или *стабилизатором групе* у x. Скуп свих група изотропије означавамо са $\mathrm{Iso}(X)$. Уколико је $G(x) = X$ тј. постоји само једна орбита (цео простор X) дејство групе се назива *транзитивним.* Уколико важи ($g(x) = x$ за свако x) $\Rightarrow g = e$, дејство се назива *ефективним.* Група дејствује *слободно* ако важи ($g(x) = x$ за неко x) $\Rightarrow g = e$.

Пример 70. Нека је H подгрупа тополошке групе G. Тада множење у групи G дефинише једно слободно дејство групе H на G, $H \times G \to G$, $(h,g) \mapsto hg$. Такође група G дејствује сама на себи конјуговањем $G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$.

Пример 71. Нека је $G = Z_2 = \{e,\omega\}$ и $X = \mathbb{R}^n$. Група Z_2 дејствује на $\mathbb{R}^n$ са централном симетријом у односу на координатни почетак $\omega(x) = -x$.

Пример 72. Диедарска група $G = D_n = \langle s, \rho \mid s^2 = \rho^n = e, s\rho^{-1} = \rho s\rangle$ дејствује на правилном n-тоуглу X као група његових симетрија



Слика A.1: Диедарска група

Пример 73. Ортогонална група $\mathbf{O}(n)$ дејствују на $\mathbb{R}^n$ као изометрија тј. чува дужину вектора. Пример једног дејства групе $\mathbf{O}(n)$ је њено дејство на јединичну сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. Такође на $\mathbb{S}^{n-1}$ дејствује и било која подгрупа групе $\mathbf{O}(n)$.

Пример 74. Група $G = A_5$ је група симетрија икосаедра и дејствује на икосаедру X.

Пример 75. Нека је X тополошки простор и $Y = X \times X \times \cdots \times X = X^n$. На простору Y дејствује група свих пермутација S_n у n-слова, $\sigma : [n] \to [n]$, $\phi_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Такође, било која подгрупа $G \subset S_n$ (као нпр. циклична група Z_n) дејствује на Y.

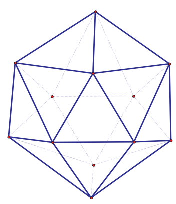
Пример 76. Нека је X G-простор и Y H-простор. Простор $X \times Y$ постаје један $G \times H$ простор са дејством

$$((g, h), (x, y)) \mapsto (gx, hy).$$

Став A.2.2. *Нека је x тачка G простора X и $G_x = H$. Тада је $G_{g(x)} = gHg^{-1}$.*

Доказ. Нека је $g_1 \in G_{g(x)}$, тада је $g_1(g(x)) = g(x)$, а одавде је

$$g^{-1}(g_1(g(x)) = x.$$



Слика A.2: Икосаедар

Одавде следи да $g^{-1}g_1g \in H$ тј. $g_1 \in gHg^{-1}$ и $G_{g(x)} \subset gHg^{-1}$.

Имамо да за $h \in H$ важи

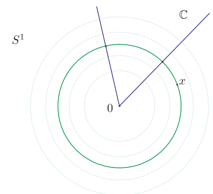
$$ghg^{-1}(g(x)) = gh(x) = g(x),$$

одакле следи да $ghg^{-1} \in G_{g(x)}$, тј. $gHg^{-1} \subset G_{g(x)}$. Дакле, $G_{g(x)} = gHg^{-1}$. $\square$

Нека је X G-простор. Релација $\sim = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\}$ је релација еквиваленције на скупу X. Класа еквиваленције елемента X је $G(x)$ орбита елемента x. Скуп свих класа еквиваленције обележавамо са X/G, а додељујемо му количничку топологију индуковану пресликавањем $X \to X/G, x \mapsto G(x)$. Овај простор зовемо *простор орбита* G-простора X.

Подскуп простора $F \subset X$ G-простора X се назива *фундаментални домен* овог простора уколико је $F \hookrightarrow X \to X/G$ бијекција. Фундаментални домен садржи тачно један елемент из сваке орбите. Један простор може имати више различитих фундаменталних домена.

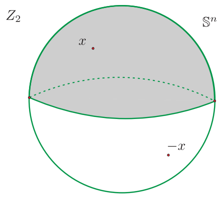
Пример 77. Група S^1 схваћена као група свих комплексних бројева модула 1 обичним множењем делује у комплексној равни $\mathbb{C}$, геометријски као ротација око 0. Орбита елемента x је кружница са центром у 0 и полупречника $|x|$. Ово дејство није слободно јер сваки елемент S^1 фиксира 0. Но, ова група дејствује слободно на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Пример фундаменталног домена за C при дејству S^1 је било која полуправа са почетком у 0.



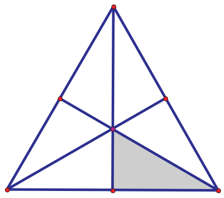
Слика А.3: Група S^1

Пример 78. Група Z_2 дејствује на сфери $\mathbb{S}^n, x \to -x$. Орбита сваког елемента x се састоји од два елемента $\{x, -x\}$. Простор орбита овог простора је пројективни простор $\mathbb{R}P^n$. Њега визуелизујемо као горњу полулопту сфере S^n са антиподалном идентификацијом на екватору.

Пример 79. Фундаментални домен за групу симетрија једнакостраничног троугла је шрафирани троугао на слици А.5.



Слика А.4: Антиподално дејство на сфери S^n



Слика А.5: Пример 79

А.2.2 Неке важне особине дејства група

У претходном делу видели смо различите примере дејства група на објектима које сматрамо блиским. Већ у њима се уочава важност и такорећи стално сретање овог концепта у математици. У овом делу ћемо описати још нека својства дејства група и њихове одржавање на комбинаторику, геометрију, алгебру и топологију простора. Сва пресликавања са којима од надаље радимо подразумевамо да су непрекидна.

Став А.2.3. *Нека је X G-простор и $x \in X$. Пресликавање $G \to X$, $g \mapsto gx$ је константно на косетима gG_x и индукује инјективно пресликавање $q_x : G/G_x \to X$ чија је слика орбита елемента x.*

Доказ. Нека је $g_1 G_x = g_2 G_x$, тј. нека $g_1^{-1} g_2 \in G_x$. Одавде следи да је $g_1^{-1} g_2(x) = x$ тј. $g_1(x) = g_2(x)$, чиме смо показали да је пресликавање константно на косетима и да је пресликање $q_x(gG_x) = g(x)$ добро дефинисано и њективно. На основу дефиниције количничке топологије оно је и непрекидно. Очигледно је да је слика од q_x орбита $G(x)$ елемента x. □

До сада смо пажњу посвећивали дејствима не прецизирајући да ли је реч о левом или десном дејству. Простор орбита левих дејстава уобичајено обележавамо са $G \backslash X$, а десних X/G.

Пример 80. Простор орбита десних дејстава $G \times H \to G$ је G/H, простор десних косета

gH. Простор левих косета је $H\backslash G$. Пресликавање

$$G \times G/H \to G/H,\ (g', gH) \mapsto g'gH$$

је непрекидно. Било који G-простор G/H са овако дефинисаним дејством назива се *хомогени простор*. Уколико је $K \subset G$ било која друга подгрупа, можемо опет формирати простор $K\backslash(G/H)$, *простор дуплираних косета*.

За две подгрупе групе G, K и H кажемо да су *коњуговане* у G ($H \sim K$) ако и само ако постоји $g \in G$ такво да је $H = gKg^{-1}$. Релација коњугованости група је једна релација еквиваленције на скупу $S(G)$ подгрупа групе G. Коњуговану класу групе H означавамо са (H). За групу H кажемо да је *подкоњугована* групи K уколико је коњугована некој подгрупи групе K и означавамо са $(H) < (K)$. Подкоњугација дефинише једно парцијално уређење на скупу класа коњугације подгрупа групе G.

Нека је X G-простор и H подгрупа групе G. Дефинисаћемо следеће подскупове од X:

$$\begin{aligned} X_H &= \{x \in X \mid G_x = H\}, \\ X_{(H)} &= \{x \in X \mid G_x \sim H\}. \end{aligned}$$

Скуп $X_{(H)}$ називамо (H)-*орбитним раслојењем* од X. Простор X је дисјунктна унија својих орбитних раслојења. Један од проблема у теорији трансформација група је разумевање начина на који су простори изграђени од својих орбитних раслојења.

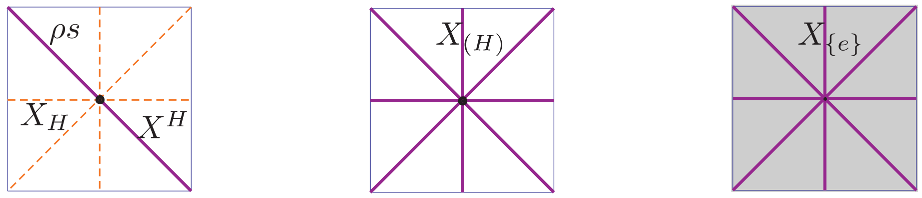
Нека је H подгрупа од G, тада скуп

$$X^H = \{x \in X \mid hx = x \text{ за свако } h \in H\}$$

називамо H-*фиксним скупом тачака* од X. Тачке у X^G се називају *стационарне тачке* G-простора. Очигледно је $X_H \subset X^H$. Лако се проверава да важи следећа релација

$$X^{>H} = X^H \setminus X_H = \bigcup_K X^K, \text{ за све } K \supset H, H \neq K.$$

Пример 81. Нека је X квадрат и нека је $G = D_4$ диедарска група. Узмимо за H двоелементну подгрупу генерисану елементом ρs (симетријом у односу на дијагоналу). Тада је X_H скуп свих тачака дијагонале без центра квадрата, $X_{(H)}$ скуп свих тачака обе дијагонале и обе осе симетрије нормалних на странице квадрата без центра квадрата, а X^H цела дијагонала (Слика А.6).



Слика А.6: Пример 81

Нека је X G-простор и $Y \subset X$, Y називамо G-*инваријантним* или G-*потпростором* ако за све $g \in G$ и све $y \in Y$ важи $gy \in Y$. Тада очигледно имамо индуковану акцију $G \times Y \to T$, $(g, y) \mapsto gy$ па је и Y G-простор. Орбите су најмањи (у смислу инклузије) G-потпростори G-простора, а сваки G-потпростор је унија орбита. Орбитна раслојења су G-потпростори. Орбитно раслојење $X_{\{e\}}$ је највећи подскуп простора X на коме је дејство слободно. Комплемент $X \setminus X_{\{e\}}$ се назива *сингуларним* скупом G-простора X. Овај скуп је унија фиксних скупова тачака X^H, $H \neq \{e\}$.

Пример 82. У примеру 81 скуп $X_{\{e\}}$ је скуп свих тачака које нису на осама симетрије квадрата.

А.3 Еквиваријантна пресликавања

А.3.1 Категорија G-простора и G-пресликавања

Многи проблеми у математици могу се свести на питање постојања одређеног еквиваријантног пресликавања. Неке од најзначајних теорема математике XX века, као нпр. Борсак-Уламова теорема, говоре о њиховој егзистенцији. Њихово изучавање је зато од круцијалне важности. Уопштено говорећи еквиваријантна пресликавања између два G-простора су она пресликавања која се „слажу” са G-дејствима. Њихова примена у комбинаторици и другим гранама математике је изложена у [66] и [46]. Резултати и теорија коју овде излажемо прати монографију [23] у којој је теорија еквиваријантности детаљно проучена.

Дефиниција А.3.1. Нека су X и Y два G-простора. Пресликавање $f : X \to Y$ називамо G-*еквиваријантним* уколико за свако $g \in G$ и за свако $x \in X$ важи

$$f(gx) = g(f(x)).$$

G-еквиваријантно пресликавање $f : X \to Y$ индукује непрекидно пресликавање на простору орбита

$$f/G : X/G \to Y/G,\ G(x) \mapsto G(f(x)).$$

Очигледно је да је за свако $x \in X, G_x \subset G_{f(x)}$. Уколико је за свако $x \in X, G_x = G_{f(x)}$ пресликавање f називамо *изоваријантним*.

Ради лакшег означавања, G-еквиваријантно пресликавање f наглашавамо са $f : X \overset{G}{\to} Y$ и називамо га краће G-пресликавање.

G-простори као објекти и G-пресликавања као морфизми између објеката формирају једну категорију. Изоморфни објекти ове категорије су G-простори између којих постоји G-хомеоморфизам (G-пресликавање које је и хомеоморфизам).

Ова категорија поседује производ. Нека је $(X_i \mid i \in I)$ фамилија G-простора. Тополошки производ $\prod_{i \in I} X_i$ поседује G-дејство дефинисано са

$$(g, (x_i \mid i \in I)) \mapsto (g(x_i) \mid i \in I),$$

које називамо *дијагоналним дејством*.

Дефиниција A.3.2. G-пресликавања $f_0, f_1 : X \to Y$ називамо *G-хомотопним* уколико постоји непрекидно G-пресликавање F, које зовемо *G-хомотопија* између f_0 и f_1

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

такво да је $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, а G дејствује тривијално на $[0,1]$ и дијагонално на $X \times [0,1]$. *Свако пресликавање f_t, $x \mapsto F(x,t)$ је једно G-пресликавање.*

Релација G-хомотопности је једна релација еквиваленције и постоји категорија G-простора и G-хомотопних класа пресликавања. Скуп G-хомотопних класа пресликавања $X \overset{G}{\to} Y$ обележавамо са $[X,Y]_G$. Са $f_0 \simeq_G f_1$ означавамо да су f_0 и f_1 хомотопна.

Став A.3.1. *Нека су H и K подгрупе тополошке групе G.*

(1) *G-пресликавање $G/H \to G/K$ постоји ако и само ако је H коњугована некој подгрупи групе K.*

(2) *За $a \in G$, $a^{-1}Ha \subset K$, постоји G-пресликавање $R_a : G/H \to G/K$, $gH \mapsto gaK$.*

(3) *Свако G-пресликавање $G/H \to G/K$ има форму пресликавања R_a за одређено $a \in G$ такво да је $a^{-1}Ha \subset K$.*

(4) $R_a = R_b$ *ако и само ако* $ab^{-1} \in K$.

Доказ. Нека је $f : G/H \xrightarrow{G} G/K$. Уочимо $a \in G$ такво да је $f(eH) = aK$. Из еквиваријантности закључујемо да је $aK = f(eH) = f(hH) = hf(eH) = haK$ за свако $h \in H$. Одавде следи да је $a^{-1}Ha \subset K$ и H је очигледно коњугована овој подгрупи. Такође из еквиваријантности добијамо да је $f(gH) = f(geH) = gf(eH) = gaK$.

Обрнуто нека је $a^{-1}Ha \subset K$. Ако је $g_1H = g_2H$, тада је $g_1 = g_2h$ за неко $h \in H$ и $ha = ak$ за неко $k \in K$. Одавде је $g_1aK = g_2haK = g_2akK = g_2aK$ и пресликавање R_a је добро дефинисано. R_a је по својој дефиницији G-еквиваријантно. Овим смо доказали (1), (2) и (3).

$R_a = R_b$ је еквивалентно са тим да за свако $g \in G$ важи $gaK = gbK$, односно да је $aK = bK$, а ово је еквивалентно са тим да $ab^{-1} \in K$. □

Нека је H подгрупа групе G. *Нормализатор групе* H у групи G је група $NH = \{n \in G \mid n^{-1}Hn = H\}$. Група H је нормална подгрупа групе NH, па постоји квоцијентна група NH/H коју означавамо са WH и зовемо *Вајловом групом.* Према примеру А.3.1 G-ендоморфизми простора G/H имају облик $R_n : G/H \to G/H, gH \mapsto gnH$ за $n^{-1}Hn \subset H$. У општем случају n не мора бити елемент од NH, n припада NH ако и само ако је R_n G-аутоморфизам од G/H. Одавде се закључује да је Вајлова група изоморфна групи $\mathrm{Aut}_G(G/H)$ G-аутоморфизама.

Став А.3.2. *Дејство групе* WH *на* G/H

$$G/H \times WH \to G/H,\ (gH, nH) \mapsto gnH$$

је слободно.

Доказ. Нека је за неко $n \in NH$ и неко $gH, gnH = gH$. Тада је $nH = H$ и $h \in H$.□

Став А.3.3. *Нека је* X G*-простор и* H *подгрупа од* G*. Простор* X_H *је* NH/H *простор.*

Доказ. Нека је $x \in X_H$ и $g \in NH/H$. Према ставу А.2.2 и дефиниције Вајлове групе, имамо да је $G_{g(x)} = gHg^{-1} = H$. Дакле, $g(x) \in X_H$.

Остаје да докажемо да је ово дејство добро дефинисано. Нека су $g_1, g_2 \in NH$ такви да је $g_1H = g_2H$. Тада је $g_2^{-1}g_1 \in H$, па је $g_2^{-1}g_1(x) = x$ тј. $g_1(x) = g_2(x)$, чиме је тврђење доказано. □

А.3.2 Фамилије подгрупа и еквиваријантна пресликавања

На даље ћемо посматрати дејства компактних група на Хауздорфовим просторима.

Орбитни тип G-простора X је скуп класа изоморфизама хомогених простора који су изоморфни орбитама. Ако је овај скуп коначан, кажемо да X има *коначан орбитни тип*. *Изотропски тип* G-простора X је скуп конјугованих класа изотропских група.

Дефиниција А.3.3. *Фамилија изотропије (или краће фамилија)* групе G је скуп $\mathfrak{F}$ затворених подгрупа групе G таквих да за све $H \in \mathfrak{F}$, $H \sim K$ следи да $K \in \mathfrak{F}$.

Фамилија $\mathfrak{F}$ је *затворена* уколико из $H \in \mathfrak{F}$, $H \subset K$ следи да $K \in \mathfrak{F}$, а *отворена* уколико $H \in \mathfrak{F}, K \subset H$ следи да $K \in \mathfrak{F}$. Нека је X G-простор и $\mathfrak{F}$ фамилија дефинишимо скуп

$$X(\mathfrak{F}) = \{x \in X \mid G_x \in \mathfrak{F}\}.$$

Овај G-потпростор је унија орбитних раслојења.

Пример 83. Нека је $X = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ и нека на X дејствује група $Z_4 = \{\omega | \omega^4 = e\}$ на следећи начин $\omega(x, y) = (-y, x)$. Затворене фамилије су $\mathfrak{F}_1 = \{Z_4\}, \mathfrak{F}_3 = \{\{e, \omega^2\}, Z_4\}$ и $\{\{e\}, \{e, \omega^2\}, Z_4\}$. Имамо да је $X(\mathfrak{F}_1) = X(\mathfrak{F}_2) = \{(0, 0)\}$ и $X(\mathfrak{F}_3) = X$.

Дефиниција А.3.4. G-простор X се назива $\mathfrak{F}$-*тривијалним* ако постоји G-еквива-ријантно пресликавање $X \to G/H, H \in \mathfrak{F}$.

Отворени G-потпростор U простора X називамо *цев* око тачке $x \in U$ ако постоји G-еквиваријантно пресликавање $U \to G/G_x$.

Дефиниција А.3.5. G-простор X се назива $\mathfrak{F}$-*локално тривијалним* ако постоји отворено покривање $\mathfrak{F}$-тривијалним G-потпросторима. G-простор X се назива $\mathfrak{F}$-*строго локално тривијалним* ако постоји ако постоји цев око сваке тачке простора X.

Став А.3.4. *Нека је X строго локално тривијалан простор. Ако је $\mathfrak{F}$ затворена (отворена) фамилија, тада је $X(\mathfrak{F})$ затворен (отворен) у X.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{F}$ отворена фамилија, $x \in X(\mathfrak{F})$ и $f : U \to G/G_x$ G-пресликавање из цеви U око x. Нека је $y \in U$ и $f(y) = gG_x$, тада из еквиваријантности добијамо да за свако $h \in G_y$ важи

$$gG_x = f(y) = f(h(y)) = h(f(y)) = hgG_x.$$

Одавде је $G_x = g^{-1}hgG_x$ па $g^{-1}hg \in G_x$ тј. $h \in gG_xg^{-1}$ и $G_y \subset gG_xg^{-1}$. Дакле, све групе изотропија тачака из U су подконјуговане групи $G_x \in \mathfrak{F}$ и $U \subset X(\mathfrak{F})$, па је $X(\mathfrak{F})$ отворен у X.

Нека је $\mathfrak{F}$ затворена фамилија и $\mathfrak{F}'$ комплемент од $\mathfrak{F}$ у скупу свих затворених подгрупа. $\mathfrak{F}'$ мора бити отворена јер уколико би за $H \in \mathfrak{F}'$, $K \subset H$ важило $K \in \mathfrak{F}$, затвореност $\mathfrak{F}$ би значило да $H \in \mathfrak{F}$, што је немогуће. Све групе изотропија су затворене, па је $X(\mathfrak{F}) = X \setminus X(\mathfrak{F}')$ затворен у X. $\square$

Свако G-еквиваријантно пресликавање $f : X \to Y$ индукује G-еквиваријантно пресликавање

$$f(\mathfrak{F}) : X(\mathfrak{F}) \to Y(\mathfrak{F})$$

за сваку затворену фамилију $\mathfrak{F}$. Зато се често посматра филтрација простора X потпросторима $X(\mathfrak{F})$ где су $\mathfrak{F}$ затворене фамилије. Инклузија дефинише једно парцијално уређење подскупова $X(\mathfrak{F})$. Докази и конструкције у теорији трансформација групе често се спроводе индукцијом по филтрацији $X(\mathfrak{F})$ почевши од скупа фиксних тачака и додајући једно орбитно раслојење.

Нека су X и Y G-простори. За G-еквиваријантно пресликавање $f : X \to Y$ имамо да за свако $x \in X$ важи $G_x \subset G_{f(x)}$. Посматраћемо потпростор

$$I(X,Y) = \{(x,y) \mid G_x \subset G_y\} \subset X \times Y.$$

Ово је G-потпростор простора $X \times Y$ са дијагоналним дејством. Простор орбита означићемо са $M(X,Y) = I(X,Y)/G$. Пројекција $X \times Y \to X$ индукује пресликавање

$$q : M(X,Y) \to X/G$$

преласком на просторе орбита. G-пресликавање $f : X \to Y$ индукује пресликавање $X \to I(X,Y), x \mapsto (x, f(x))$, а преласком на просторе орбита добијамо пресликавање

$$s_f : X/G \to M(X,Y).$$

Ово пресликавање s_f је *сечење*, тј. важи $qs_f = \mathrm{id}$. Показаћемо да под одређеним условима, сечења од q одговарају еквиваријантним пресликавањима.

Дефиниција А.3.6. Пар (X, Y) G-простора се назива *допустив* ако је дијаграм

$$\begin{array}{ccc} I(X,Y) & \xrightarrow{Q} & X \\ \downarrow{\scriptstyle P_X} & & \downarrow{\scriptstyle p_X} \\ M(X,Y) & \xrightarrow{q} & X/G \end{array}$$

који настаје од q, *повлачење*.

Став А.3.5. *Нека је пар (X, Y) допустив. Тада је додељивање $f \mapsto s_f$ бијективна кореспонденција између G-пресликавања $X \to Y$ и сечења од q. Два G-пресликавања $f_0, f_1 : X \to Y$ су G-хомотопна ако и само ако су одговарајућа сечења хомотопна као сечења.*

Доказ. Нека је $s : X/G \to M(X, Y)$ сечење. Дијаграм повлачења нам даје индуковано сечење $t : I(X, Y)$. Компонујмо t са пројекцијом $I(X, Y) \to Y$ и добијамо пресликавање $f_s : X \to Y$. Имамо да је $Qt(gx) = gx = gQt(x) = Q(gt(x))$, јер је t сечење и Q G-пресликавање. Такође је, $Pt(gx) = sp(gx) = sp(x)$ јер је t индуковано сечење и p орбитно пресликавање. Важи и да је $P(gtx) = Pt(x) = sp(x)$ јер је P такође орбитно пресликавање. Дакле, $gt(x)$ и $t(gx)$ имају исте слике у односу на пројекције P и Q, па они морају бити једнаки. Придруживање $s \mapsto f_s$ се лако проверава да је инверз придруживању $f \mapsto s_f$. G-хомотопија $H : X \times I \to Y$ индукује сечење $s_H : (X \times I)/G \to M(X \times I, Y)$. Пресликавање $M(X \times I, Y) \to (X \times I)/G$ је канонски хомеоморфно са $q \times \mathrm{id}_I : M(X \times Y) \times I \to X/G \times I$ и s_H је трансформисано овим хомеоморфизмом у хомотопију од сечења q. Лако се проверава да је и пар $(X \times I, Y)$ допустив, чиме је тврђење у потпуности доказано. $\square$

Следећи став нам даје карактеризацију једне широке класе допустивих парова.

Став А.3.6. *Нека је G компактна група и нека су X и Y Хауздорфови простори. Тада је пар (X, Y) допустив.*

Став А.3.6 омогућава проучавање еквиваријантних пресликавања методама алгебарске топологије као што је теорија обструкција.

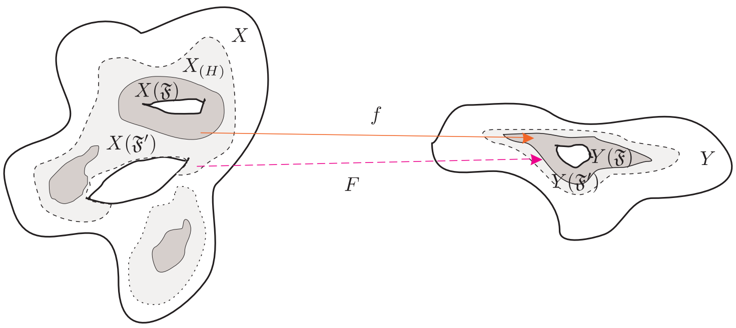
Метод индукције по орбитним типовима редукује многе проблеме на слободна дејства група.

Теорема А.3.1. *Нека је $\mathfrak{F}$ затворена фамилија и X строго локално тривијалан G-простор. Нека је H максимална међу групама изотропије тачака из X која није у*

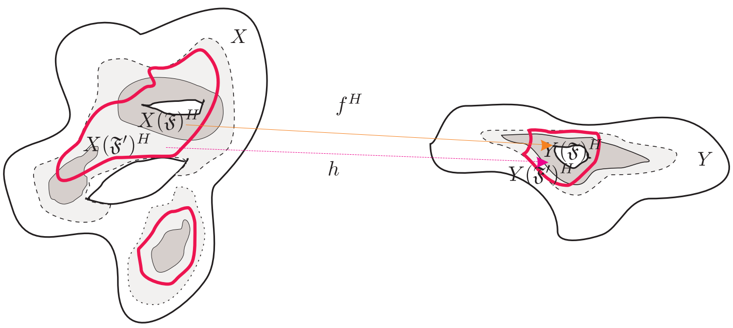
$\mathfrak{F}$ и нека је $\mathfrak{F}'$ минимална затворена фамилија која садржи $\mathfrak{F}$ и (H). Претпоставимо да је $f : X(\mathfrak{F}) \to Y(\mathfrak{F})$ G-пресликавање. Продужења $F : X(\mathfrak{F}') \to Y(\mathfrak{F}')$ пресликавања f бијективно одговарају NH/H-продужењима $h : X(\mathfrak{F}')^H \to Y(\mathfrak{F}')^H$ од $f^H : X(\mathfrak{F})^H \to Y(\mathfrak{F})^H$.

$$\begin{tikzcd} X(\mathfrak{F}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y(\mathfrak{F}) \arrow[d, hook] \\ X(\mathfrak{F}') \arrow[r, dashed] & Y(\mathfrak{F}'). \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X(\mathfrak{F})^H \arrow[r, "f^H"] \arrow[d, hook] & Y(\mathfrak{F})^H \arrow[d, hook] \\ X(\mathfrak{F}')^H \arrow[r, dashed] & Y(\mathfrak{F}')^H. \end{tikzcd}$$

Доказ. Претпоставимо да се продужења F_1 и F_2 поклапају на скупу $X(\mathfrak{F}')^H$. Они се поклапају и на $X(\mathfrak{F})$ и $(X(\mathfrak{F}') \setminus X(\mathfrak{F}))^H = X^H_{(H)} = X_H$. Како је $X_{(H)} = GX_H$, због еквиваријантности се морају подударати и на $X_{(H)}$. Због максималности групе H важи да је $X(\mathfrak{F}') = X_{(H)} \cup X(\mathfrak{F})$ па је $F_1 \equiv F_2$.



Слика А.7: Раширење G-пресликавања



Слика А.8: Раширење NH/H-пресликавања

Нека је h NH/H-пресликавање које продужује f^H. Дефинишимо

$$E : X(\mathfrak{F}') \to Y(\mathfrak{F}')$$

на следећи начин

$$E(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X(\mathfrak{F}) \\ gh(y), & x = gy,\ y \in X(\mathfrak{F}')^H. \end{cases}$$

Треба доказати да је E добро дефинисано, непрекидно и еквиваријантно пресликавање. Претпоставимо да је $x = g_1 y_1$ и $y_1 \in X(\mathfrak{F})^H$. Тада је $g_1 h(y_1) = g_1 f(y_1) = f(g_1 y_1) = f(x)$. Ако је $x = g_1 y_1 = g_2 y_2$ и $y_1, y_2 \in X_H$, тада је $g_1 = g_2 n$ за неко $n \in NH$. Како је h NH-еквиваријантно, следи да је

$$g_1 h(y_1) = g_2 n h(y_1) = g_2 h(n y_1) = g_2 h(y_2).$$

Дакле, E је добро дефинисано. Оно је непрекидно јер је непрекидно на затвореним подскуповима $X(\mathfrak{F})$ и $GX(\mathfrak{F}')^H$. Еквиваријантност од E се директно проверава. $\square$

Пример 84. Нека је G група и Y G-простор. За произвољан простор X простор $G \times X$ је G-простор са слободним дејством. Произвољно пресликавање $f : X \to Y$ индукује G пресликавање $F : G \times X \to Y, F(g, x) = gf(x)$.

Пример 85. Нека је G група, H њена подгрупа и Y G-простор. За произвољан простор X простор $G/H \times X$ је G-простор. Произвољно пресликавање $f : X \to Y^H$ индукује G пресликавање $F : G/H \times X \to Y, F(gH, x) = gf(x)$.

Теорема 2.3.1 важи у еквиваријантној верзији:

Став А.3.7. *Особина G-еквиваријантности и G-еквиваријантне хомотопске еквиваленције се преноси и на функтор* hocolim.

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. S. Agaian, *Hadamard Matrices and Their Applications*, Springer-Verlag (1985)

[2] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen and S. Gitler, *Cup-products in generalized moment-angle complexs*, arXiv:1001.3372v1.

[3] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, PNAS 2009 106:12241-12244.

[4] Dj . Baralić, *Immersions and Embeddings of Quasitoric Manifolds over Cube*, to appear in Publications de l'Institut Mathématique

[5] Dj . Baralić, *Note on Totally Skew Embeddings of Quasitoric Manifolds over Cube*, http://arxiv.org/abs/1304.5924

[6] Dj . Baralić, *On Non-Zero Degree Maps between Quasitoric 4-manifolds* , http://arxiv.org/abs/1301.0848

[7] Dj . Baralić, B. Prvulović, G. Stojanović, S. Vrećica and R. Živaljević. Topological Obstructions to Totally Skew Embeddings. *Transactions of American Mathematical Society.* AMS, (2012), vol. **364** no. **4**, 2213-2226.

[8] H. J. Baues, *The degree of maps between certain 6-manifolds*, Compositio Math. 110 (1998) 51-64.

[9] I. Berstein and A. L. Edmonds, *On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds*, Transactions of American Mathematical Society 247 (1979), 87-124.

[10] Torsten Asselmeyer-Maluga and Carl H. Brans, *EXOTIC SMOOTHNESS AND PHYSICS - Differential Topology and Spacetime Models*, World Scientific (2007)

[11] Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1993.

[12] V. Buchstaber, T. Panov and N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordisms of quasitoric manifolds*, Moscow Math. Journal 7 (2007), no. 2, 219-242.

[13] V. Buchstaber and T. Panov, *Torus Actions and their applications in topology and combinatorics*, AMS University Lecture Series, volume 24, (2002).

[14] V. Buchstaber and T. Panov, *Toric Topology*, dostupno na http://arxiv.org/abs/1210.2368

[15] V. Buchstaber and N. Ray, *Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes*, Int. Math. Res. Not. **4** (2001), 194–219.

[16] P. S. Bullen, *A Dictionary of Inequalities*, Chapman & Hall (1998)

[17] David M. Burton, *ELEMENTARY NUMBER THEORY*, McGraw-Hill Higher Education (2007)

[18] Suyoung Choi and Shintarô Kuroki. Topological classification of torus manifolds which have codimension one extended actions, *Algebraic and Geometric Topology,* 11, (2011), 2655–2679.

[19] R. L. Cohen. The Immersion Conjecture for Differentiable Manifolds. *Annals of Math.*, 2 (1985), 237–328.

[20] John H. Convay, *The Sensual Quadratic Form*, The Mathematical Association of America (1997)

[21] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), no. 2, 417451.

[22] V. Danilov, *The geometry of toric varieties* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2, 85-134; English translation in: Russian Math. Surveys **33** (1978), no. 2, 97-154.

[23] Dieck T. t. , *Transformation Groups*, Berlin; New York : de Gruyter, 1987.

[24] Haibao Duan, *Self-maps on the Grassmannian of complex structure*, Compositio Math. 132 (2002), 159-175.

[25] H. Duan and S. Wang, *Non-zero Degree Maps between $2n$-manifolds*, arXiv:math/0402119v1 [math.GT]

[26] H. Duan and S. Wang, *Non-zero Degree Maps between $2n$-manifolds*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 20 (2004), no. 1, 114.

[27] H. Duan and S. Wang, *The degrees of maps between manifolds*, Mathematische Zeitschrift

[28] Allan L. Edmonds, *Deformation of Maps to Branched Coverings in Dimension Two*, *The Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 110, No. 1 (1979), 113-125.

[29] M. H. Freedman, *The topology of 4-manifolds*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 337-453.

[30] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1993)

[31] D. Gale, *Neighborly and cyclic polytopes*, Proc. Symp. Pure Math., 7 (Convexity), 225-232 (1963)

[32] M. Ghomi, S. Tabachnikov. Totally skew embeddings of manifolds. *Math. Z.* (2008) 258:499–512.

[33] S. Feder and S. Gitler, *Mappings of quaternionic projective space*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 18 (1973), 33-37.

[34] B. Grunbaum, *Convex polytopes*, Springer (1967)

[35] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2001)

[36] C. Hayat-Legrand, S. Wang and H. Zieschang, *Minimal Seifert manifolds*, Math. Ann. 308 (1997), 673-700.

[37] C. Hayat-Legrand, S. Wang and H. Zieschang, *Computer calculation of the degree of maps into the Poincaré homology sphere*, Experimental Mathematics 10 (2001), 497-508.

[38] M. Hirsch, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242-276.

[39] F. Hirzebruch, *Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Manningfaltigkeiten*, Math. Ann. 124 (1951), 77-86.

[40] J. Jurkiewicz, *Torus embeddings, polyhedra, $k*$-actions and homology*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **236** (1985)

[41] H. Kneser, *Glätung von Flächenabbildugen*, Math. Ann. (1928), 609-617.

[42] M. Kreck and D. Crowlet, *Hirzebruch surfaces*, Bulletin of the Manifold Atlas, 2011, 19-22.

[43] J.-L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, Archiv der Mathematik (Basel) 83 (2004), no. 3, 267278.

[44] W.S. Massey. On the Stiefel-Whitney classes of a manifold. *Amer. J. of Math.*, 82 (1960), 92–102.

[45] W. S. Massey, *Normal vector fields on manifolds*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 33–40.

[46] Matoušek J. , *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, 2008.

[47] J. Milnor and D. Husemoller, *Symmetric billinear forms*, Berlin Heidelberg New York

[48] J.W. Milnor, J.D. Stasheff. *Characteristic Classes.* Princeton Univ. Press 1974.

[49] Naber G. L. , *Topological Methods in Eucledean Spaces*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2000.

[50] Melvyn B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer (1991)

[51] P. Orlik and F. Raymond, *Actions of the torus on 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 531-559.

[52] P. Sankaran and S. Sarkar, *Degrees of maps between Grassmann manifolds*, Osaka J. Math. 46 (2009), no. 4, 11431161.

[53] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in Eucledean space*, Annals of Math. 69(1959), 327-344.

[54] Stillwell J. , *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

[55] G. Stojanović, S. Tabachnikov. Non-existence of n-dimensional T-embedded discs in R^{2n}. *Comment. Math. Helv.* 81 (2006), 877–882.

[56] G. Stojanović. Embeddings with multiple regularity. *Geom. Dedicata* (2006) 123:1–10.

[57] G. Stojanović. *Embeddings with certain non-degeneracy conditions*. Ph.D degree thesis. Pennsylvania State University, August 2007.

[58] James J. Tattersall *Elementary number theory in nine chapters*, Cambridge University Press (1999)

[59] Schicheng Wang, *Non-zero Degree Maps between* 3*-manifolds*, arXiv:math/0304301v1 [math.GT]

[60] V. Welker, G. Ziegler, R. Živaljević, *Homotopy colimits-comparasion lemmas for combinatorial applications*, J. Reine Angew. Math., 509(1999), 117-149.

[61] H. Whitney, *The self-intersections of a smooth n-manifolds in $2n$-space*, Annals of Math. 45 (1944), 220-246.

[62] H. Whitney, *The singularities of a smooth n-manifolds in $(2n-1)$-space*, Annals of Math. 45 (1944), 247-293.

[63] H. Whitney,*Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press, 1957.

[64] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer (1995)

[65] G. Ziegler, R. Živaljević, *Homotopy types of sub-space arrangements via diagrams of spaces*, Math. Ann., **295**(1993), 527-548.

[66] Živaljević R., *User's Guide to Equivariant Methods in Combinatorics*, Publications de L'Institut Mathèmatique, Nouvelle sèrie, tome 59 (73), 1996, 114-130.

Биографија аутора

Ђорђе Баралић је рођен 29.09.1986. у Крагујевцу, где је завршио основну школу „Станислав Сремчевић и Прву крагујевачку гимназију као ученик генерације. Таленат за математику је открио у Математичкој радионици младих и професора Зорана Васиљевића - гукија. Током основне и средње школе учестовао је на математичким такмичењима и освајач је медаља на међународним математичким олимпијадама. 2008. је дипломирао на ПМФ у Крагујевцу, смер теоријска математика и уписао докторске студије на Математичком факултету у Београду на групи топологија. Запослен је на Математичком институту САНУ. Активно учествује у пројекту Жива математика и раду ЦГТА семинара којим руководе др Раде Живаљевић и др Синиша Врећица.

Током докторских студија учестовао је и имао предавања и постере на 2 математичка конгреса, 10 међународних научних конференција и боравио у математичким институтима у Пизи (Италија), Обервολфаху (Немачка), Берлину (Немачка), Љубљана (Словенија) и Стокхолму (Шведска). Има 2 објављена рада у часописима SCI листе, као и 2 у у зборницима радова са конференција. Аутор је једне збирке задатака. Још 4 рада су у процесу рецензије. Поред торусне, геометријске и алгебарске топологије, у његов научни интерес спадају комбинаторика, дискретна и комбинаторна геометрија, класична и рачунарска пројективна геометрија.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани **Ђорђе Баралић**

број уписа **2010/2008**

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Топологија и комбинаторика

квазиторусних многострукости и К степена

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 2. 9. 2013.

Ђорђе Баралић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора **Ђорђе Баралић**

Број уписа 2010/2008

Студијски програм **Топологија**

Наслов рада **Топологија и комбинаторика квазиторусних многострукости и К степена**

Ментор **др Раде Т. Живаљевић**

Потписани **Ђорђе Баралић**

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 2. 9. 2013.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Топологија и комбинаторика квaзиторусних многострукости и К степена

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 2. 9. 2013.

Ђорђе Баралић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.