**Математички факултет**
**Универзитет у Београду**



Мастер рад

**Спектралне инваријанте у Флоровој хомологији**

Студент: Вукашин Стојисављевић

Ментор: др Дарко Милинковић

У Београду, 2014-2015.

# Садржај

# Увод

Флорова теорија се данас сматра једним од стандардних алата у симплектичкој топологији. У овом раду је дат преглед Флорове теорије, при чему је посебна пажња посвећена спектралним инваријантама које се помоћу ње конструишу. У раду су приказани класични резултати везани за симплектичку топологију и Флорову теорију, као и неки модерни истраживачки правци.

У првој глави је направљен преглед класичних тврђења диференцијалне и алгебарске топологије неопходних за праћење остатка материјала.

У другој глави се бавимо изучавањем Морсове теорије. Флорова теорија се може видети као бесконачно-димензионо уопштење Морсове теорије у симплектичком амбијенту, па се због тога многе идеје изложене у Морсовом случају могу пренети и на Флоров случај. У овој глави је изложен класичан приступ Морсовој теорији који користи идеје диференцијалне топологије и динамичких система, као и модеран приступ који користи више аналитичке методе.

Трећа глава служи као увод у симплектичку топологију. У њој су приказане основне теореме симплектичке топологије са посебним акцентом на Хамилтонову динамику. На крају поглавља смо, да бисмо мотивисали увођење спектралних инваријанти, описали конструкцију Витербоових инваријанти које се могу сматрати коначно димензионом верзијом спектралних инваријанти.

Суштина рада је изложена у четвртој глави. У њој су изложени резултати везани за псеудо-холоморфна пресликавања у симплектичком амбијенту, конструкција неколико верзија Флорове хомологије и спектралних инваријанти, као и примена спектралних инваријанти у доказу недегенерисаности Хоферове метрике на простору Лагранжевих подмногострукости.

Желим да се захвалим свом ментору, професору Дарку Милинковићу, на многим сугестијама, упутствима и саветима које ми је давао током израде овог рада. Он је својим знањем, искуством и ентузијазмом веома допринео изради ове тезе, као и изградњи мог математичког укуса уопште. Такође желим да се захвалим Јовани Ђуретић на дискусијама које смо водили и објашњењима која ми је давала у вези са темом рада. Захваљујем се члановима комисије професору Миодрагу Матељевићу и др Миљану Кнежевићу на сугестијама.

# 1 Тополошки увод

У овом поглављу наводимо класична тврђења диференцијалне и алгебарске топологије неопходна за разумевање остатка материјала. Код тврђења која се могу формулисати и на језику алгебарске и на језику диференцијалне топологије смо углавном бирали диференцијално-тополошку формулацију. Већина материјала је преузета из [2] и [48].

## 1.1 Трансверзалност

У овом одељку ћемо навести неколико класичних тврђења и доказати две Теореме о параметарској трансверзалности.

**Дефиниција 1.1.** Глатку многострукост зовемо *затвореном* уколико је компактна и без границе.

Присетимо се следећих класичних тврђења:

**Теорема 1.1. (О рангу)** Нека је $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ глатко пресликавање константног ранга $r$ у околини тачке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тада постоје отворене околине $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in U$, $F(U) \subset V$ и дифеоморфизми

$$\varphi : U \to I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (\forall j)|x_j| < 1\}$$

$$\psi : V \to I^n = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m | (\forall j)|x_j| < 1\}$$

такви да је

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Специјално уколико је $F$ субмерзија, постоје локалне координате у којима је $F$ пројекција и има запис:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m), \ m \leq n. \quad \square$$

**Дефиниција 1.2.** Нека су $M$ и $N$ глатке многострукости и $F : M \to N$ глатка функција. Уколико $dF(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$ није „на” тачку $p \in M$ зовемо *сингуларном* или *критичном тачком*, а $F(p) \in N$ *сингуларном* или *критичном* *вредношћу.* Тачке $p \in M$ и $q \in N$ зовемо *регуларном тачком* и *регуларном вредношћу* уколико нису сингуларне ($q$ не мора припадати $F(M)$).

**Последица 1.1.** Ако су $M$ и $N$ глатке многострукости и $F : M \to N$ глатка функција и $q \in N$ регуларна вредност тада је $F^{-1}(q) \subset M$ подмногостукост за коју важи:

$$\begin{cases} \operatorname{codim}(F^{-1}(q)) = \dim(N) \\ (\forall p \in F^{-1}(q))\ T_pF^{-1}(q) = \ker(dF(p)). \end{cases}$$

**Дефиниција 1.3.** Нека је $F : M \to N$ глатко пресликавање између глатких многострукости $M$ и $N$ и нека је $Q \subset N$ подмногострукост. Кажемо да је $F$ *трансверзално* на $Q$ и означавамо $F \pitchfork Q$ уколико за свако $p \in M,\ q = F(p)$ важи

$$T_qQ + dF(p)(T_pM) = T_qN.$$

Уколико је $G : M_1 \to N$, *трансверзалност* $F$ *и* $G$ дефинишемо условом

$$dF(p)(T_pM) + dG(p_1)(T_{p_1}M_1) = T_qN$$

док се *трансверзалност две подмногострукости* дефинише као трансверзалност одговарајућих улагања.

Слика 1 показује две многострукости које се секу нетрансверзално и трансверзално. Приметимо да малим померањем нетрансверзалног положаја долазимо у трансверзалан положај.

**Слика 1:** Нетрансверзалан и трансверзалан положај

**Дефиниција 1.4.** Нека је су $M$ и $N$ глатке многострукости и $Q \subset N$ подмногострукост. Раслојење $TN/TQ$ над $Q$ називамо *нормалним раслојењем* и означавамо $\nu_Q$. Нека је $\pi : TN \to TN/TQ = \nu_Q$ пројекција дата са $\pi(v) = [v]$ и

$F : M \to N$ глатко пресликавање. Композицију

$$\pi \circ dF(p) : T_pM \to \nu_Q(F(p))$$

називамо *вертикалним изводом* и означавамо са $DF(p) := \pi \circ dF(p)$.

**Теорема 1.2.** Нека се $M$ и $N$ глатке многострукости, $Q$ подмногострукост од $N$ и $F : M \to N$ глатко пресликавање трансверзално на $Q$. Тада је $F^{-1}(Q) \subset M$ подмногострукост и важи:

$$\begin{cases} \operatorname{codim}(F^{-1}(Q)) = \operatorname{codim}(Q) \\ (\forall p \in F^{-1}(Q))\ T_pF^{-1}(Q) = \ker(DF(p)). \end{cases}$$

**Доказ.** Тврђење је локалног карактера, а локално $Q \subset N$ можемо посматрати као $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k$ је добро дефинисано. У околини тачке $p \in F^{-1}(Q)$ можемо сматрати да $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и услов $F \pitchfork Q$ значи да јр $F \pitchfork \mathbb{R}^k$. Дефинишемо

$$\widetilde{F} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k,\ \widetilde{F} := \pi \circ F$$

где је $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^k$ пројекција. Сада је $F^{-1}(Q) = F^{-1}(\mathbb{R}^k) = \widetilde{F}^{-1}(0)$, а из $F \pitchfork \mathbb{R}^k$ следи да је 0 регуларна вредност пресликавања $\widetilde{F}$, па тврђење следи из Последице 1.1. $\square$

Специјално, уколико је $E$ векторско раслојење над базом $B$ и $F : B \to E$ сечење такво да је $F \pitchfork 0_E$, онда је $F^{-1}(0_E) \subset B$ подмногострукост.

Дефиниција која следи се базира на чињеницама да је у $\mathbb{R}^n$ пребројива унија скупова мере нула опет скуп мере нула, да дифеоморфизми чувају скупове мере нула и да глатка многострукост има пребројиву базу топологије.

**Дефиниција 1.5.** Подскуп $S$ глатке многострукости M је *мере нула* уколико је за сваку карту $(U, \varphi)$, $\varphi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^m$ скуп Лебегове мере нула. Скуп чији је комплемент мере нула зовемо генеричким.

**Теорема 1.3. (Сард)** Скуп критичних вредности глатког пресликавања $F : M \to N$ између глатких многострукости $M$ и $N$ је мере 0. $\square$

**Теорема 1.4. (Параметарска трансверзалност I)** Нека су $M$ и $N$ затворене многострукости, $Q \subset N$ подмногострукост и $S$ многострукост (коју зовемо скупом параметара). Нека:

$$F : M \times S \to N,\ F \pitchfork Q.$$

Тада је $F_s := F(\cdot, s) \pitchfork Q$ за генерички параметар $s \in S$.

**Доказ.** Из $F \pitchfork Q$ следи да је $W := F^{-1}(Q) \subset M \times S$ подмногострукост. Уочимо пројекцију на другу координату $\pi : M \times S \to S$. Сада за $s \in S$ важи:

$$F_s \pitchfork Q \Leftrightarrow s \text{ је регуларна вредност за } \pi|_W.$$

Заиста за $w = (m, s) \in W$ и $q = F(w)$ из $F \pitchfork Q$ имамо

$$T_wW = \ker(DF(w)) = \{(\vec{m}, \vec{s}) \in T_w(M \times S) | dF(w)(\vec{m}) + dF(w)(\vec{s}) \in TQ\}$$

при чему смо користили $T_w(M \times S) = T_wM \oplus T_wS$.
Даље важе еквиваленције:

$s$ је регуларна вредност за $\pi|_W \Leftrightarrow$

$d\pi|_W : TW \to TS$ је сурјективно за свако $w \in W \cap \pi^{-1}(s) \Leftrightarrow$

$(\forall \vec{s} \in T_sS)(\exists \vec{m} \in T_mM)\ dF(w)(\vec{m}) + dF(w)(\vec{s}) \in T_qQ \Leftrightarrow$

$(\forall \vec{n} \in T_qN)\ \vec{n} = dF(w)(\vec{m}_1) + \vec{q}$ за неке $\vec{m}_1 \in T_mM,\ \vec{q} \in T_qQ$

Последња еквиваленција важи јер $F \pitchfork Q$, па $TN = dF(T(M \times S)) + TQ$. Међутим, како $\vec{m}_1 \in T_mM$ то је $dF(w)(\vec{m}_1) = dF_s(m)(\vec{m}_1)$, па је

$(\forall \vec{n} \in T_qN)\ \vec{n} = dF(w)(\vec{m}_1) + \vec{q}$ за неке $\vec{m}_1 \in T_mM,\ \vec{q} \in T_qQ \Leftrightarrow$

$F_s \pitchfork Q$. Сада тврђење следи из Сардове теореме. $\square$

**Теорема 1.5. (Параметарска трансверзалност II)** Нека су $M$, $N$, $Q$, $S$ као у Теореми 1.4, $F : M \times S \to N,\ F \pitchfork Q$ и $W = F^{-1}(Q)$. Тада важи:

$$\begin{cases} \ker(d\pi|_W(w)) = \ker(DF_s(m)) \\ \operatorname{coker}(d\pi|_W(w)) \cong \operatorname{coker}(DF_s(m)) \end{cases}$$

где је $w = (m, s)$, $\pi : M \times S \to S$ пројекција, а $DF_s(m) : T_m M \to \nu_Q$ вертикални извод.

**Доказ.** Нека је $w = (m, s) \in W$, $F(w) = q$.

Важи низ једнакости:
$\ker(d\pi|_W(w)) = \{(\vec{m}, 0) \in \vec{T}_w W\} = \{\vec{m} \in T_m M | dF(w)(\vec{m}) \in T_q Q\} =$
$\{\vec{m} \in T_m M | DF(w)(\vec{m}) = 0 \in \nu_Q\} = \ker(DF_s(m))$ који доказује први део тврђења.

У околини $w$ имамо да важи: $d\pi : TM \to TS$ је сурјекција, па је
$d\pi : \frac{TM \oplus TS}{TM} \to TS$ изоморфизам, па је и
$d\pi : \frac{TM \oplus TS}{TM + TW} \to \frac{TS}{d\pi(TW)} \cong \operatorname{coker}(d\pi|_W)$ изоморфизам у $w$.

С друге стране, како $F \pitchfork Q$ то је $TW = \ker(DF)$ и $\nu_Q = \operatorname{Im}(DF)$, па важи $\frac{TM \oplus TS}{TW} \cong \nu_Q$ односно

$$\frac{TM \oplus TS}{TM + TW} \cong \frac{\nu_Q}{DF(TM)} \cong \frac{\nu_Q}{DF_s(TM)} \cong \operatorname{coker}(DF_s)$$

у тачки $w$ чиме је тврђење доказано. □

## 1.2 Фундаментална класа и оријентабилност

**Теорема 1.6.** Свака глатка многострукост је хомеоморфна симплицијалном комплексу (видети [2]). □

Значај наведене теореме је у томе што омогућава да појмове везане за многострукости искажемо комбинаторним језиком. Специјално оријентабилност можемо изразити као могућност конзистентне оријентације свих $n$-симплекса, док сингуларну хомологију можемо рачунати као симплицијалну. На тај начин једноставним комбинаторним аргументима можемо доказати следећу теорему (видети [2]).

**Теорема 1.7.** За глатку повезану многострукост $M$ димензије $n$ важи:
1. Ако $M$ није затворена, онда је $H_n(M;G) \cong 0$.
2. Ако је $M$ затворена, онда је $H_n(M;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$.
3. Ако је $M$ затворена и оријентабилна, онда је $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.
4. Ако је $M$ затворена и неоријентабилна, онда је $H_n(M;\mathbb{Z}) \cong 0$. □

Горња теорема мотивише увођење следеће класе многострукости.

**Дефиниција 1.6.** Глатку многострукост M димензије $n$ зовемо *$G$-оријентабилном* уколико је $H_n(M;G) \cong G$. Специјално затворена и оријентабилна многострукост је $\mathbb{Z}$-оријентабилна. Уколико је $G = \mathbb{Z}_p$ или $G = \mathbb{Z}$ генератор групе $H_n(M;G)$ зовемо *фундаменталном класом* те многострукости и означавамо га са $[M]$.

Најчешће се фундаменталном класом назива генератор групе $H_n(M;\mathbb{Z})$.

**Напомена:** Теорема о тријангулацији не важи за тополошке многострукости. Наиме, познато је да тополошке многострукости димензије не веће од 3 имају глатку структуру, па се стога могу и тријангулисати ([39]). Фридманова $E8$ многострукост је пример четвородимензионе многострукости која се не може тријангулисати. Проблем тријангулације тополошких многострукости димензије веће од 4 био је отворен до 2013. године када је Циприан Манулеску доказао да постоје многострукости које се не могу тријангулисати у свим димензијама већим од 4. Занимљиво је напоменути да је Манулеску ово тврђење доказао конструишући нову верзију Флорове хомологије!

## 1.3 Поенкареова дуалност

Сингуларна хомологија је дефинисана посматрањем непрекидних пресликавања из симплекса у тополошки простор. Међутим, ако је кодомен $M$ глатка многострукост, можемо посматрати глатка пресликавања из симплекса у $M$ и на тај начин конструисати глатку снгуларну хомологију. Инклузија глатких сингуларних симплекса у сингуларне симплексе индукује изоморфизам на нивоу хомологије, па је у разматрањима која следе довољно посматрати само глатке симплексе. За детаљно излагање теорије везане за глатке симплексе погледати [33]. Наше излагање углавном прати [2].

Конвексан омотач $k+1$ тачака $A_0, A_1, \ldots, A_k$ у $\mathbb{R}^k$ које не леже у једној хиперравни називамо еуклидским $k$-симплексом и означавамо са $\Delta^k$. Непрекидно пресликавање

$$s : \Delta^k \to X$$

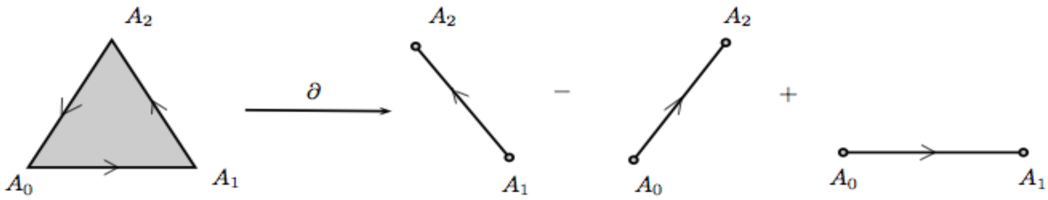
у тополошки простор $X$ зовемо сингуларним $k$-симплексом. Уколико је $M$ глатка многострукост, можемо говорити о глатким пресликавањима из отворених скупова у $\mathbb{R}^k$ у $M$. За пресликавање:

$$c : \Delta^k \to M$$

кажемо да је глатко уколико постоји његово глатко проширење на неки отворен скуп $U \subset \mathbb{R}^k$ такав да $\Delta^k \subset U$. Такво глатко пресликавање $c$ зовемо глатким сингуларним симплексом. Гранични оператор $\partial$ којим је дефинисана (глатка) сингуларна хомологије дат је са

$$\partial c = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_i$$

где су $c_i$ (глатки) сингуларни симплекси добијени рестрикцијом пресликавања $c$ на $A_0, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots A_k$, водећи рачуна о редоследу тачака $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Избор редоследа темена еуклидског симплекса до на парну пермутацију можемо сматрати његовом оријентацијом. У том смислу је $\partial c$ формална сума граничних $(k-1)$-симплекса уз индуковну оријентацију (слика 2):




**Слика 2:** Гранични оператор у сингуларној хомологији

Унутрашњост еуклидског $k$-симплекса је отворен скуп у $\mathbb{R}^k$ док је његова граница мере 0, па за диференцијалну $k$ форму $\omega$ на $M$ и глатки сингуларни симплекс $c : \Delta^k \to M$ можемо дефинисати

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_{\Delta^k} c^*\omega$$

као интеграл по унутрашњости $\Delta^k$. За овако дефинисан интеграл ће важити Стоксова теорема (видети [33]):

$$\int\limits_c d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int\limits_{c_i} \omega$$

где је $c$ глатки сингуларни $k$-симплекс, а $\omega$ диференцијална $k-1$ форма на $M$. Овако дефинисан интеграл продужујемо по линеарности на глатке симплицијалне комплексе.

Горње разматрање нам омогућује да дефинишемо спаривање хомологије над $\mathbb{R}$ и де Рамове кохомологије помоћу интеграла. Наиме, Стоксова теорема остварује дуалност између оператора $\partial$ и $d$, па је могуће дефинисати интеграл на нивоу хомологије и кохомологије, односно могуће је дефинисати[1]

$$\int\limits_{[\sigma]} [\omega]$$

независно од избора представника $\sigma$ и $\omega$. Заиста, за $\sigma_1 - \sigma_2 = \partial\sigma$ имамо

$$\int\limits_{\sigma_1} \omega - \int\limits_{\sigma_2} \omega = \int\limits_{\sigma_1-\sigma_2} \omega = \int\limits_{\partial\sigma} \omega = \int\limits_{\sigma} d\omega = 0$$

[1] Ово спаривање ће одговарати уобичајеном спаривању хомологије и кохомологије $\langle [\omega], [\sigma] \rangle$.

јер је $\omega$ затворена као представник кохомолошке класе, а за $\omega_1 - \omega_2 = d\omega$ је

$$\int_\sigma \omega_1 - \int_\sigma \omega_2 = \int_\sigma \omega_1 - \omega_2 = \int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega = 0$$

јер је $\partial\sigma = 0$ зато што је $\sigma$ представник хомолошке класе. За тако дефинисан интеграл ће важити следећа теорема:

**Теорема 1.8. (де Рам)** Билинеарно пресликавање

$$\int : H^k_{dR}(M) \times H_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ ([\omega],[\sigma]) \to \int_{[\sigma]} [\omega]$$

је недегенерисано. □

**Лема 1.1.** Уколико су $V$ и $W$ реални векторски простори коначне димензије и $\varphi : V \times W \to \mathbb{R}$ недегенерисано билинеарно пресликавање, онда је $V \cong W^*$. Изоморфизам ових простора је дефинисан на природан начин помоћу пресликавања $\varphi$.

**Доказ.** Дефинишемо $\phi : V \to W^*$ са $\phi(v)(w) = \varphi(v,w)$. Остало је линеарна алгебра. □

У случају да је $M$ затворена многострукост, њене хомолошке и кохомолошке групе су коначно генерисане, па чине коначно димензионе векторске просторе над $\mathbb{R}$. Тада де Рамова теорема заједно са Лемом 1.1 даје следећу последицу.

**Последица 1.2.** За затворену многострукост $M$ важи

$$H^k_{dR}(M) \cong (H_k(M;\mathbb{R}))^*$$

при чему се изоморфизам остварује помоћу интеграла.

Наведена последица даје везу између хомологије и кохомологије са коефицијентима у $\mathbb{R}$ у облику дуалности која се остварује путем интеграла. Ова последица не важи за хомологију и кохомологију над било којим прстеном. На пример, не важи $H^k(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_k(M;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. Тврђења која следе су сличног духа као наведена последица и често се скупа називају Поенкареовом дуалношћу. Прво наводимо једну техничку лему.

**Дефиниција 1.7.** *Добро покривање* многострукости $M$ је покривање картама $\{U_\alpha\}$ чији је сваки непразан коначан пресек $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ дифеоморфан $\mathbb{R}^n$.

**Лема 1.2.** Свака многострукост има добро покривање. Компактна многострукост има коначно добро покривање.

**Доказ.** Видети у [16]. $\square$

Пресликавање $[\alpha]\otimes[\beta] \to \int\limits_M \alpha\wedge\beta$ је добро дефинисано на кохомолошком нивоу уколико је $M$ многострукост без границе. Заиста како је

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega = 0$$

и из особина $d$ и $d\alpha = d\beta = 0$ имамо да важи

$$(\alpha + d\alpha_1)\wedge(\beta + d\beta_1) = d\alpha_1 \wedge d\beta_1 + d\alpha_1\wedge\beta + \alpha\wedge d\beta_1 + \alpha\wedge\beta =$$

$$= d(\alpha_1\wedge d\beta_1) + d(\alpha_1\wedge\beta) \pm d(\alpha\wedge\beta_1) + \alpha\wedge\beta$$

то је

$$\int\limits_M \alpha\wedge\beta = \int\limits_M (\alpha + d\alpha_1)\wedge(\beta + d\beta_1)$$

па $\int\limits_M \alpha\wedge\beta$ не зависи од избора представника класа $[\alpha]$ и $[\beta]$. Овим рачуном смо такође показали да кохомолошка класа $[\alpha\wedge\beta]$ зависи само од $[\alpha]$ и $[\beta]$, а не и од самих представник. Следећа теорема је класично тврђење диференцијалне топологије, па њен доказ нећемо навести. Скица доказа се може наћи у [2].

**Теорема 1.9. (Поенкареова дуалност)** Нека је $M$ оријентисана многострукост (без границе) која има коначно добро покривање. Тада је

$$H^k_{dR}(M) \cong (H^{n-k}_{c,dR}(M))^*$$

и дуалност се остварује недегенерисаним спаривањем

$$H^k_{dR}(M)\otimes H^{n-k}_{c,dR}(M) \to \mathbb{R},\ \ [\alpha]\otimes[\beta] \to \int\limits_M \alpha\wedge\beta$$

где је $H^*_{c,dR}$ кохомологија са компактним носачем. Специјално уколико је $M$ затворена важи $H^k_{dR}(M) \cong H^k_{c,dR}(M)$ и она има коначно добро покривање, па ако је још и оријентисана, онда важи $H^k_{dR}(M) \cong (H^{n-k}_{dR}(M))^*$. $\square$

У случају затворене оријентисане многострукости Поенкареова дуалност даје $H^k_{dR}(M) \cong (H^{n-k}_{dR}(M))^*$, а како је због компактности $H^{n-k}_{dR}(M)$ векторски простор коначне димензије, важи $(H^{n-k}_{dR}(M))^* \cong H^{n-k}_{dR}(M)$. Даље закључујемо да важи

$$H^k_{dR}(M) \cong H^{n-k}_{dR}(M).$$

Као последицу де Рамове теореме имамо да важи $H^k_{dR}(M) \cong (H_k(M;\mathbb{R}))^*$ што сличним аргументима о коначности димензије даје

$$H^k_{dR}(M) \cong H^{n-k}_{dR}(M) \cong H_k(M;\mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M;\mathbb{R}).$$

Најчешће се Поенкареова дуалност формулише као

$$H^k(M;R) \cong H_{n-k}(M;R)$$

при чему изоморфизам важи када је $R$ произвољан комутативни прстен са јединицом. Поенкареова дуалност важи и у многим другим облицима (више о томе може се наћи у [13]).

Нека је сада $M$ повезана оријентисана многострукост димензије $n$ и $N \subset M$ затворена подмногострукост димензије $k$. Ако је $i_N$ улагање $N$ у $M$, онда је са

$$\int_N : H^k_{c,dR}(M) \to \mathbb{R}, \quad \alpha \to \int_N \alpha = \int_N i_N^* \alpha$$

добро дефинисано линеарно пресликавање, па према Поенкареовој дуалности постоји јединствена кохомолошка класа $[\beta] \in H^{n-k}_{dR}(M)$ таква да је

$$\int_N \alpha = \int_M \alpha \wedge \beta$$

за свако $[\alpha] \in H^k_{c,dR}(M)$. Ову кохомолошку класу зовемо *Поенкареовим дуалом* подмногострукости $N$ и означавамо $PD(N)$.

**Пример 1.1.** Уколико је $N$ тачка имамо да су све затворене 0 форме $f$ на $M$ функције чији је извод 0 односно константе. Зато је за $f \equiv \lambda$:

$$\int_N f = \int_\bullet \lambda = \lambda = \int_M f \wedge PD(N) = \lambda \int_M PD(N)$$

односно $PD(\bullet)$ је форма запремине нормализована тако да је запремина од $M$ једнака 1.

**Теорема 1.10. (Принцип локализације)** Нека је $N \subset M$ затворена подмногострукост. Тада за сваку отворену околину $U \supset N$ постоји форма $\beta$ која је представник $PD(N)$ и чији је носач садржан у $U$.

**Доказ.** Нека је $\varphi$ произвољна глатка функција чији је носач садржан у $U$ и која је једнака 1 на $N$. Сада за сваку $\alpha \in H^k_{dR}(M)$ важи:

$$\int\limits_N \alpha = \int\limits_N i_N^*\alpha = \int\limits_N i_N^*(\varphi\alpha) = \int\limits_M (\varphi\alpha) \wedge PD(N) = \int\limits_M \alpha \wedge (\varphi PD(N)),$$

па је $\varphi PD(N)$ тражени представник. $\square$

## 1.4 Индекс пресека и производи у (ко)хомологији

У претходном одељку смо доказали да $[\alpha \wedge \beta]$ зависи само од $[\alpha]$ и $[\beta]$, а не и од самих представник. Из тог разлога можемо дефинисати производ у кохомологији са

$$\cup : H^k_{dR}(M) \otimes H^l_{dR}(M) \to H^{k+l}_{dR}(M), \cup([\alpha],[\beta]) = [\alpha \wedge \beta]. \tag{1.1}$$

Овако дефинисан производ се назива *кап производом.*

Нека је сада $M$ многострукост и $R, S \subset M$ њене подмногострукости које се секу трансверзално. Из Теореме 1.2 следи да је $R \cap S \subset M$ такође подмногострукост.

**Теорема 1.11.** Нека је $M$ оријентисана многострукост и $R, S \subset M$ две њене затворене оријентисане подмногострукости које се секу трансверзално. Тада важи

$$PD(R \cap S) = PD(R) \cup PD(S)$$

**Доказ.** Погледати [2]. □

Како $PD : H^k_{dR}(M) \to H_{n-k}(M)$ користећи Поенкареову дуалност можемо дефинисати производ дуалан кап производу на кохомологији са

$$\cap : H_{n-k}(M) \otimes H_{n-l}(M) \to H_{n-k-l}(M), \quad a \cup b = PD(PD(a) \cup PD(b))$$

где су са $PD(\cdot)$ означени одговарајући Поенкареови дуали. Из Теореме 1.11 закључујемо да $\cap$ производ можемо видети и као индукован пресеком.[2]

Нека је сада $M$ затворена оријентисана многострукост и $R, S \subset M$ њене затворене оријентисане подмногострукости које се секу трансверзално и за које важи $\dim R + \dim S = \dim M$. Њихов пресек је коначан скуп тачака и у свакој

[2] Оваква интерпретација важи под претпоставком да се одговарајуће хомолошке класе остварују подмногострукостима. Ово није увек могуће постићи, односно постоје хомолошке класе које се не могу остварити подмногострукостима. Ово питање је први разматрао Поенкаре. Наиме, он је покушавао да дефинише хомологију посматрајући подмногострукости уместо симплекса. Хегард је критиковао овакав приступ, који је на крају напустио и сам Поенкаре. Ово питање је у модерна разматрања вратио Стинрод из чега се касније родила теорија (ко)бордизама. Први пример хомолошке класе која се не може приказати подмногострукошћу је дао Том у [53].

пресечној тачки важи

$$T_pM = T_pR \oplus T_pS.$$

Одавде следи да оријентације многострукости $R$ и $S$ индукују оријентацију $T_pM$ у свакој тачки пресека $R$ и $S$. За $p \in R \cap S$ дефинишимо $\varepsilon(p) = 1$ ако се оријентација простора $T_pM$ индукована из $T_pR$ и $T_pS$ поклапа са оријентацијом простора $T_pM$ наслеђеном из оријентације $M$, а $\varepsilon(p) = -1$ иначе.

**Дефиниција 1.8.** Број $R \cdot S = \sum\limits_{p \in R \cap S} \varepsilon(p)$ се назива *индексом пресек* $R$ и $S$.

Из Теореме 1.11 и Примера 1.1 сада следи следећа теорема.

**Теорема 1.12.** Нека је $M$ затворена оријентисана многострукост и $R, S \subset M$ њене затворене оријентисане подмногострукости. Тада је

$$R \cdot S = \int\limits_M PD(R) \wedge PD(S). \quad \square$$

# 2 Морсова хомологија

## 2.1 Морсове функције и негативни градијентни ток

Постоји много начина да се уведу хомолошке групе $H_*(M;G)$ за Абелову групу $G$ и тополошки простор M. Сингуларна хомологија је дефинисана за широку класу тополошких простора, док су симплицијална или $CW$-хомологија дефинисане на ужој класи простора, али су често једноставније за рад. Ми ћемо се ограничити на случај када је $M$ затворена многострукост. Познато је да су у овом случају све наведене хомолошке групе добро дефинисане и изоморфне. У овом поглављу ћемо извести још једну конструкцију хомолошких група које ће бити изоморфне свим осталим и које се називају Морсове хомолошке групе. У тој конструкцији ћемо користити градијентне токове придружене одређеној класи функција. Ово је вероватно најједноставнији и историјски један од првих примера примене Теорије обичних диференцијалних једначина у топологији глатких многострукости. Нама ће Морсова хомологија служити као мотивација за увођење и модел за боље разумевање Флорове хомологије, па ћемо стога избегавати дубоко изучавање свих техничких детаља. Из истог разлога ћемо разматрати само случај Морсове хомологије над пољем $\mathbb{Z}_2$. За дефинисање Морсове хомологије над $\mathbb{Z}$ је потребно користити кохерентну оријентацију о којој ми нећемо говорити (за разматрања везана за кохерентну оријентацију видети [52]). Приказ који следи је већим делом преузет из [28], [47] и [48].

Излагање почињемо уводним разматрањима везаним за Морсове функције и негативни градијенти ток. У даљем тексту $M$ је затворена многострукост.

Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ и нека је $p$ критична тачка функције $F$, то јест $dF(p) = 0$. Тада важи $dF(p)([X,Y]_p) = 0$ односно $X_p(YF) = Y_p(XF)$, што оправдава следећу дефиницију.

**Дефиниција 2.1.** Билинеарно пресликавање $H_p(F) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ дато са

$$H_p(F)(X_p, Y_p) = X_p(YF)$$

назива се *Хесијан* функције $F$ у критичној тачки $p$.

Заиста уколико су $X, \widetilde{X}, Y, \widetilde{Y}$ векторска поља таква да $X_p = \widetilde{X}_p$ и $Y_p = \widetilde{Y}_p$, онда је

$$H_p(F)(X_p, Y_p) = X_p(YF) = \widetilde{X}_p(YF) = Y_p(\widetilde{X}F) = \widetilde{Y}_p(\widetilde{X}F) = H_p(F)(\widetilde{Y}_p, \widetilde{X}_p),$$

па је Хесијан добро дефинисан у тачки $p$. Како је $X_p(YF) = Y_p(XF)$ видимо да је $H_p(F)$ симетрично билинеарно пресликавање, па је у локалним координатама представљено симетричном матрицом, штавише није тешко проверити да за локалну карту $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ важи

$$[H_p(F)] = \left[\frac{\partial^2(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j}.$$

**Дефиниција 2.2.** За критичну тачку $p$ функције $F$ кажемо да је *недегенерисана* уколико је $H_p(F)$ недегенерисано билинеарно пресликавање.

Из Линеарне алгебре нам је познато да се симетрично билинеарно пресликавање може представити дијагоналном матрицом, чији су чланови на дијагонали $0, 1$ и $-1$, међутим у случају недегенерисаног Хесијана $H_p(F)$ важи и више.

**Лема 2.1. (Морс)** Нека је $p$ недегенерисана критична тачка функције $F : M \to \mathbb{R}$. Тада постоји околина $U$ тачке $p$ и дифеоморфизам $\varphi : (U, p) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ такав да важи

$$F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = F(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2. \quad \square$$

**Дефиниција 2.3.** Број $k$ из претходне леме назива се *индексом* критичне тачке $p$ и означава $\operatorname{ind}(p)$.

Према Силвестеровом закону инерције индекс је добро дефинисан. Скуп свих критичних тачака индекса $k$ означаваћемо са $\operatorname{Crit}_k(F)$. Из Морсове леме следи да су недегенерисане критичне тачке изоловане. Функција чије су све критичне тачке недегенерисане назива се *Морсовом функцијом.* Морсове функције чине отворен и густ подскуп од $C^\infty(M)$ са $C^\infty$-топологијом[3]. Из компактности $M$ и изолованости критичних тачака Морсове функције следи да их има коначно много.

Дефиниција Морсове функције се може исказати и на језику трансверзалности,

[3]Под $C^\infty$ топологијом подразумевамо топологију индуковану скуповима $U \cap C^\infty(M)$ где су $U$ отворени у топологији индукованој $C^k$ нормом за неко $k \in \mathbb{N}$.

односно важи следећа лема која се изводи директно.

**Лема 2.2.** $F : M \to \mathbb{R}$ је Морсова ако и само ако је диференцијал

$$dF : M \to T^*M$$

трансверзалан на нулто сечење од $T^*M$ $(df \pitchfork 0_M)$. $\square$

Уочимо пар $(F, g)$ где је $F$ Морсова функција, а $g$ Риманова метрика на $M$ и посматрајмо негативни градијентни ток на $M$ задат са:

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla_g F(\phi_t(x)), \tag{2.1}$$

при чему $\nabla_g F(x)$ означава градијент у односу на метрику $g$, то јест вектор такав да $dF(x)(\xi) = g(\nabla_g F, \xi)$. Приметимо да је

$$\frac{d}{dt}F(\phi_t(x)) = dF(\phi_t(x))(-\nabla_g F(\phi_t(x))) = g(\nabla_g F(\phi_t(x)), -\nabla_g F(\phi_t(x))) < 0,$$

па $F$ опада дуж трајекторија система. Како је $M$ компактна $\phi_t$ је дефинисано за $\forall t \in \mathbb{R}$. Важи следећа лема.

**Лема 2.3.** Нека је $\phi_t$ негативни градијентни ток на затвореној многострукости $M$ за Морсову функцију $F$. Тада $\forall x \in M$ постоји $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi_t(x)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi_t(x) \in \mathrm{Crit}(F)$.

Доказ ове леме се може директно извести. Ипак, ми ћемо приказати нешто дужи доказ који користи појам енергије који ће нам бити од вишеструке користи у даљем излагању.

**Дефиниција 2.4.** Нека је $(M, g)$ глатка Риманова многострукост и $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. Нека је $\gamma : (a, b) \to M$ глатка крива у $M$. Дефинишемо *енергију* криве $\gamma$ са

$$E(\gamma) = \int_a^b \|\nabla_g F(\gamma(t))\|^2 dt$$

где је $\|\cdot\|$ норма дефинисана помоћу $g$.

Енергија је очигледно позитивна и једнака 0 само у случају криве која је константно једнака критичној тачки функције $F$. Нека је сада $\gamma$ решење једначине

(2.1) за које важи $\lim\limits_{t\to-\infty} = p$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = q$. Сада је

$$F(p) - F(q) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\nabla_g F(\phi_t(x)), -\nabla_g F(\phi_t(x))) = E(\gamma).$$

Следећа лема даје оцену енергије дуж градијентних трајекторија.

**Лема 2.4.** Нека је $\gamma : (a,b) \to M$ глатка крива која задовољава (2.1) и за коју важи $\lim\limits_{t\to-\infty}\gamma(t) = x$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t) = y$. Претпоставимо такође да је $\|\nabla_g F(\gamma(t))\| \geq K$ за неку константу $K > 0$ и $t \in (a,b)$. Тада је

$$E(\gamma) \geq K \cdot d(x,y),$$

при чему $d(x,y)$ означава растојање између тачака $x$ и $y$ добијено као инфимум дужина кривих које спајају $x$ и $y$.

**Доказ.** Означимо са $L(\gamma)$ дужину криве $\gamma$. Важи

$$E(\gamma) = \int\limits_a^b \|\nabla_g F(\gamma(t))\|^2 dt \geq K\int\limits_a^b \|\nabla_g F(\gamma(t))\| dt = K \cdot L(\gamma) \geq K \cdot d(x,y). \quad \square$$

Као директну последицу наведене леме изводимо следеће тврђење.

**Последица 2.1.** Нека је $p$ кртична тачка Морсове функције $F : M \to \mathbb{R}$. Постоје отворене околине $U \subset \overline{U} \subset V$ тачке $p$ и $\delta > 0$ такви да свака крива $\gamma$ која задовољава (2.1) и „пролази кроз"[4] $V\backslash U$ има енергију $E(\gamma) > \delta$.

**Доказ.** Критичне тачке функције $p$ су изоловане, па можемо наћи околине $U$ и $V$ из формулације такве да $\nabla_g F \neq 0$ на $\overline{V}\backslash U$. Овај скуп ће бити компактан, па ће на њему важити $\nabla_g F \geq m$ за неко $m > 0$, односно можемо да применимо лему. $\square$

У случају компактне многострукости $M$, Морсова функција $F$ ће имати коначан број тачака, па можемо одредити константу $\delta$ из претходног тврђења независно од критичне тачке. Сада сличним аргументима можемо доказати Лему 2.3.

**Доказ.** Како је $M$ компактна то $F$ достиже минимум $a$ и максимум $b$ на $M$. Због формуле за енергију градијентне трајекторије имамо да је $E(\phi_t(x)) \leq b - a$.

[4] Односно постоје $t_1$ и $t_2$ такви да $\gamma(t_1) \in U$, $\gamma(t_2) \notin V$.

Уколико $\phi_t(x)$ не би конвергирало ка критичној тачки на пример за $t \to +\infty$ имали бисмо да

$$(\forall T > 0)(\exists t > T)\phi_t(x) \notin B_p \text{ ни за једну критичну тачку } p.$$

Одавде следи да $\phi_t(x)$ има бесконачну енергију што је контрадикција. $\square$

Означимо $W^s(p) = \{x \in M | \lim_{t\to+\infty} \phi_t(x) = p\}$ и $W^u(p) = \{x \in M | \lim_{t\to-\infty} \phi_t(x) = p\}$ за $p \in \mathrm{Crit}(F)$. Важи следећа теорема.

**Теорема 2.1. (О стабилним и нестабилним многострукостима)** Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на затвореној многострукости $M$ димензије $n$ са Римановом метриком $g$. Тада се за $p \in \mathrm{Crit}_k(F)$, $W^s(p)$ може добити као слика при улагању диска димензије $n - k$ у $M$, а $W^u(p)$ као слика при улагању диска димензије $k$ у $M$. $\square$

Доказ наведене теореме је нетривијалан и технички захтеван, па га овде нећемо изводити. Мало општија формулација теореме и њен доказ могу се наћи у [12]. Ипак, за одређену специјалну класу метрика, можемо доказати наведено тврђење. Из Морсове леме знамо да у околини сваке критичне тачке можемо да уочимо локалне координате $(x_1, \dots, x_n)$ за које важи

$$F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = F(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2.$$

Претпоставимо да је $g$ у тим координатама стандардна еуклидска метрика у околини сваке критичне тачке. Тада је негативни градијентни ток у околини критичних тачака задат системом:

$$\begin{cases} \dot{u} = 2u \\ \dot{v} = -2v \end{cases}$$

за $u = (x_1, \dots, x_k)$ и $v = (x_{k+1}, \dots, x_n)$. Решења овог система су $u(t) = e^{2t}u(0)$ и $v(t) = e^{-2t}v(0)$, па је $W^u(p)$ $k$-димензиони подпростор задат са $\{v = 0\}$, а $W^s(p)$ $(n - k)$-димензиони подпростор задат са $\{u = 0\}$. Нека је сада $x \in W^s(p)$ и $U$ околина тачке $p$, таква да функција има горњи запис и метрика је еуклидска на $U$. Тада постоји околина $V$ тачке $x$ таква да за довољно велико $T$ важи

$$\phi_T(V) \subset U.$$

Како је $\phi_T$ дифеоморфизам, и $x \in W^s(p)$ ако и само ако $\phi_T(x) \in W^s(p)$ тврђење следи из структуре $W^s(p)$ у околини тачке $p$. Доказ је сличан за $W^u(p)$.

**Дефиниција 2.5.** $W^s(p)$ и $W^u(p)$ називамо редом *стабилном и нестабилном многострукошћу* тачке $p$.

За $p, q \in \mathrm{Crit}(F)$ означимо

$$\mathcal{M}(p,q) = \{u : \mathbb{R} \to M | \dot{u} = -\nabla_g F(u(t)), \lim_{t\to-\infty} u(t) = p, \lim_{t\to+\infty} u(t) = q\}$$

односно $\mathcal{M}(p,q)$ представља скуп свих параметризованих негативно-градијентних трајекторија које спајају $p$ и $q$. Приметимо да је $\mathcal{M}(p,q) = W^u(p) \cap W^s(q)$, па уколико се $W^u(p)$ и $W^s(q)$ секу трансверзално, онда је $\mathcal{M}(p,q)$ подмногострукост у $M$ и важи $\mathrm{codim}(\mathcal{M}(p,q)) = \mathrm{codim}(W^u(p)) + \mathrm{codim}(W^s(q)) = n - \mathrm{ind}(p) + \mathrm{ind}(q)$, па је

$$\dim(\mathcal{M}(p,q)) = \mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q).$$

**Дефиниција 2.6.** Пар $(F, g)$ где је $F$ Морсова функција, а $g$ Риманова метрика на $M$ називамо *Морс-Смејловим* уколико за сваке две тачке $p, q \in \mathrm{Crit}(F)$ важи $W^u(p) \pitchfork W^s(q)$.

Морс-Смејлов услов је испуњен у генеричком случају, па ћемо у даљем тексту Морс-Смејлове парове $(F, g)$ звати и генеричким паровима.

## 2.2 Модулски простор кривих и Морсова хомологија

Фиксирајмо генерички пар $(F, g)$, Морсове функције и Риманове метрике на $M$. Како је једначина

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla_g F(\phi_t(x))$$

аутономна, $\mathbb{R}$ слободно дејствује на скупу $\mathcal{M}(p, q)$ за $p \neq q$ путем транслација:

$$(s \cdot u)(t) = u(t + s)$$

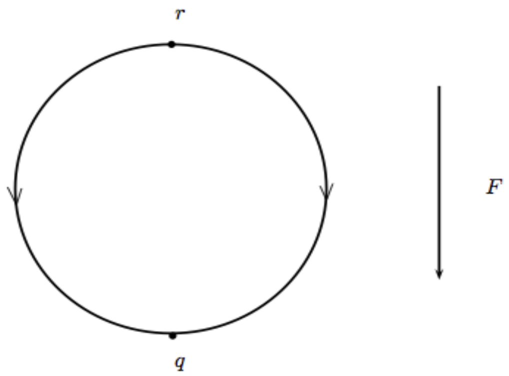
за $s \in \mathbb{R}$. Количнички простор $\overline{\mathcal{M}}(p, q) := \mathcal{M}(p, q)/\mathbb{R}$ називамо модулским простором или простором непараметризованих трајекторија између $p$ и $q$. Важи:

$$\overline{\mathcal{M}}(p, q) = \mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q) - 1. \tag{2.2}$$

Издвајамо два важна специјална случаја:

- Уколико је $\mathrm{ind}(p) \leq \mathrm{ind}(q)$, онда је $\overline{\mathcal{M}}(p, q) = \emptyset$, односно индекс критичних тачака опада дуж трајекторија.
- Уколико је $\mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q) = 1$, онда је $\overline{\mathcal{M}}(p, q)$ многострукост димензије 0.

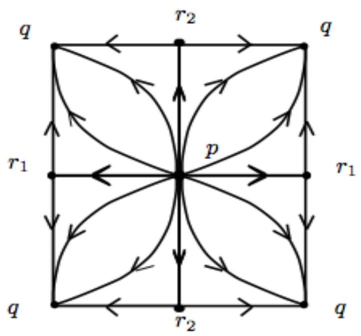
**Пример 2.1.** Посматрајмо јединичну кружницу $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ и функцију висине $F(x, y) = y$ на њој. Уочимо параметризацију кружнице без тачке $(1, 0)$ интервалом $(0, 2\pi)$ дату са $\varphi^{-1}(t) = (\cos t, \sin t)$. У локалним координатама $F$ се може изразити као функција параметра $t$ и важи $F(t) = \sin t$, па лако налазимо да су једине две критичне тачке функције $F$ максимум $p = (0, 1)$ и минимум $q = (0, -1)$, при чему је $\mathrm{ind}(p) = 1$, а $\mathrm{ind}(q) = 0$. Сада је $\dim \overline{\mathcal{M}}(p, q) = \mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q) - 1 = 0$. Скицирајући видимо да се $\overline{\mathcal{M}}(p, q)$ састоји од две тачке (слика 3).




**Слика 3:** Морсова функција висине на кружници

У општем случају $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ не мора бити компактна. Илуструјмо то примером.

**Пример 2.2.** Нека је $\mathbb{T}^2$ дводимензиони торус задат идентификацијом ивица квадрата $[-\pi,\pi]^2$, нека је $F:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}$ дата са $F(t,s)=\cos(t)+\cos(s)$ за $(t,s)\in[-\pi,\pi]^2$ ($F$ је збир функција висина на кружницама уколико посматрамо $\mathbb{T}^2$ као $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$) и нека је $g$ равна Риманова метрика (наслеђена на $[-\pi,\pi]^2$ из $\mathbb{R}^2$). Сада се лако види да је $\mathrm{Crit}(F)=\{p,q,r_1,r_2\}$ где су $p,q,r_1,r_2$ дате у координатама на $[-\pi,\pi]^2$ са $p=(0,0)$, $q=(\pi,\pi)$, $r_1=(\pi,0)$, $r_2=(0,\pi)$, као и да важи $\mathrm{ind}(p)=2, \mathrm{ind}(r_1)=\mathrm{ind}(r_2)=1, \mathrm{ind}(q)=0$. За $s\in\{0,\pi\}$ имамо $-\nabla_g F=\sin t$, а за $t\in\{0,\pi\}$ имамо $-\nabla_g F=\sin s$ па линије тока можемо скицирати користећи ове једначине као и то да су дисјунктне и да дуж њих индекс опада (слика 4):




**Слика 4:** Градијентне трајекторије Морсове функције $F(t,s)=\cos(t)+\cos(s)$ на торусу

Како је $\mathrm{ind}(p)-\mathrm{ind}(q)=2$ то је $\dim\overline{\mathcal{M}}(p,q)=1$. Посматрајући непараметризоване трајекторије у првом квадранту и крећући се „надесно” кроз $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$

видимо (барем на нивоу интуиције) да фамилија трајекторија конвергира ка „изломљеној трајекторији" која спаја $p$ и $q$, односно ка кривој која се добија као унија две трајекторије, од $p$ до $r_1$ и од $r_1$ до $q$.

Наведени пример илуструје генералну ситуацију, $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ се може компактификовати додавањем изломљених трајекторија. Да бисмо то објаснили прво дајемо две дефиниције.

**Дефиниција 2.7.** Нека су $p, q \in \mathrm{Crit}F$. Тада скуп

$$\widetilde{\mathcal{M}}(p,q) = \bigcup_{r_i \in \mathrm{Crit}F} \overline{\mathcal{M}}(p,r_1) \times \overline{\mathcal{M}}(r_1,r_2) \times \ldots \times \overline{\mathcal{M}}(r_{k-1},r_k) \times \overline{\mathcal{M}}(r_k,q)$$

називамо *скупом (непараметризованих) изломљених трајекторија између p и q*. Како индекс опада дуж трајекторија у унију улазе само производи такви да је $\mathrm{ind}(q) < \mathrm{ind}(r_i) < \mathrm{ind}(p)$.

**Дефиниција 2.8.** Хаусдорфов тополошки простор $M$, који има пребројиву базу топологије називамо *глатком многострукошћу са ивицама* уколико постоји фамилија

$$\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) | \lambda \in \Lambda\},$$

где је $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отворено покривање постора $M$, а

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^{n-k} \times [0,+\infty)^k$$

за неко $0 \leq k \leq n$, фамилија хомеоморфизама, таква да је $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ дифеоморфизам за свако $\alpha, \beta \in \Lambda$ за које $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. За фиксирано $k$ скуп свих тачака $p \in \bigcup\limits_\lambda \varphi_\lambda^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \times 0)$ при чему $\lambda$ пролази скуп свих индекса из $\Lambda$ таквих да $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^{n-k} \times [0,+\infty)^k$ називамо ивицом кодимензије $k$. Ивицу кодимензије $k$ ћемо означавати са $M_k$. Специјално многострукост са границом је многострукост која има само ивицу кодимензије 1 коју зовемо границом те многострукости.

Опис поменуте компактификације даје следећа теорема.

**Теорема 2.2.** Нека је $(F,g)$ генерички пар Морсове функције $F$ и Риманове метрике $g$ на затвореној многострукости $M$. Тада за сваке две тачке, $p,q \in \mathrm{Crit}(F)$ модулски простор $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ допушта природну компактификацију до глатке многострукости са ивицама $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ чија је ивица кодимензије $k$

$$\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)_k = \bigcup_{\substack{r_1,\dots,r_k\in\mathrm{Crit}F \\ p,r_1,\dots,r_k,q \text{ различите}}} \overline{\mathcal{M}}(p,r_1)\times\overline{\mathcal{M}}(r_1,r_2)\times\ldots\times\overline{\mathcal{M}}(r_{k-1},r_k)\times\overline{\mathcal{M}}(r_k,q). \quad \square$$

- Уколико је $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{ind}(q)+1$, онда је $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ већ компактна 0-димензиона многострукост, односно коначан скуп тачака. У том случају ћемо означавати
$$n(p,q) = \#_2\overline{\mathcal{M}}(p,q)$$
број тачака у $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ модуло 2.

- Уколико је $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{ind}(q)+2$ $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ је компактна једнодимензиона многострукост са границом, чија је граница
$$\partial\widetilde{\mathcal{M}}(p,q) = \bigcup_{\substack{r\in\mathrm{Crit}F \\ \mathrm{ind}(r)=\mathrm{ind}(q)+1}} \overline{\mathcal{M}}(p,r)\times\overline{\mathcal{M}}(r,q).$$

С обзиром на то да је број тачака на граници једнодимензионе компактне многострукости паран, то је $\#_2\partial\widetilde{\mathcal{M}}(p,q) = 0$, па како важе следеће једнакости (модуло 2)

$$\#_2\partial\widetilde{\mathcal{M}}(p,q) = \sum_{\substack{r\in\mathrm{Crit}F \\ \mathrm{ind}(r)=\mathrm{ind}(q)+1}} \#_2\overline{\mathcal{M}}(p,r)\cdot\#_2\overline{\mathcal{M}}(r,q) = \sum_{\substack{r\in\mathrm{Crit}F \\ \mathrm{ind}(r)=\mathrm{ind}(q)+1}} n(p,r)\cdot n(r,q),$$

то је

$$\sum_{\substack{r\in\mathrm{Crit}F \\ \mathrm{ind}(r)=\mathrm{ind}(q)+1}} n(p,r)\cdot n(r,q) = 0. \tag{2.3}$$

Сада имамо све што је потребно да бисмо дефинисали Морсову хомологију са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима.

Уведимо Морсов ланчасти комплекс са

$$CM_k(F) = \langle \mathrm{Crit}_k(F)\rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

и дефинишимо диференцијал $\partial = \partial_g : CM_k(F) \to CM_{k-1}(F)$ на генераторима са

$$\partial p = \sum_{r\in\mathrm{Crit}_{k-1}F} n(p,r)\cdot r$$

и продужимо га по линеарности. Приметимо да $\partial$ зависи од метрике $g$, док $CM_*(F)$ не. Проверимо сада да $\partial$ задовољава $\partial^2 = 0$. За $p \in \mathrm{Crit}_k F$ имамо

$$\partial^2 p = \partial\Big(\sum_{r \in \mathrm{Crit}_{k-1}F} n(p,r) \cdot r\Big) = \sum_{r \in \mathrm{Crit}_{k-1}F} n(p,r) \cdot \partial r =$$

$$= \sum_{r \in \mathrm{Crit}_{k-1}F} \left( n(p,r) \cdot \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-2}F} n(r,q) \cdot q \right) = \sum_{q \in \mathrm{Crit}_{k-2}F} q \cdot \left( \sum_{r \in \mathrm{Crit}_{k-1}F} n(p,r) \cdot n(r,q) \right)$$

па према (2.3) имамо да је $\partial \circ \partial = 0$, па можемо дефинисати хомологију овог комплекса.

**Дефиниција 2.9.** Хомологија комплекса $(CM_*(F), \partial_g)$ се назива *Морсовом хомологијом пара* $(F, g)$ и означава $HM_*(F, g)$.

**Пример 2.3.** Размотримо поново пример кружнице $\mathbb{S}^1$ и фукнције висине $F$ на њој. Имамо да је $CM_1(F) = \langle p \rangle_{\mathbb{Z}_2}$ и $CM_0(F) = \langle q \rangle_{\mathbb{Z}_2}$, као и да је $\partial p = 2q = 0 \pmod 2$ и $\partial q = 0$, па је $HM_1(F) \cong HM_0(F) \cong \mathbb{Z}_2$, а $HM_k(F) \cong 0$ за $k \geq 2$.

**Напомена:** Структура многострукости на модулском простору из Теореме 2.2 се лакше задаје коришћењем аналитичког приступа Морсовој теорији који ће бити изложен на крају ове главе. У овом тренутку компактност схватамо као постојање конвергентног подниза сваког низа непараметризованих трајекторија. Конвергенција низа непараметризованих трајекторија се задаје на следећи начин:

**Дефиниција 2.10.** Нека је $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_0, \ldots, \widetilde{\gamma}_k)$ изломљена трајекторија која спаја $p$ и $q$ и нека $\widetilde{\gamma}_k$ спаја $r_k$ и $r_{k+1}$ при чему $r_0 = p$, $r_{k+1} = q$. Кажемо да *низ непараметризованих трајекторија* $[\gamma_n]$ *конвергира ка* $[\widetilde{\gamma}] = ([\widetilde{\gamma}_0], \ldots, [\widetilde{\gamma}_k])$ ако за свако $n$ постоје реални бројеви $t_{n,0} \leq t_{n,1} \leq \ldots \leq t_{n,k}$ такви да $\gamma_n(t_{n,i} + \cdot) \to \widetilde{\gamma}_i$ локално $C^\infty$.

## 2.3 Изоморфизам Морсове и сингуларне хомологије

Морсов комплекс дефинисан у претходном одељку очигледно зависи од пара $(F, g)$. Ипак хомологије различитих Морсових комплекса су изоморфне на канонски начин. Нека су $(F_1, g_1)$ и $(F_2, g_2)$ два генеричка пара. Одаберимо генеричку фамилију парова $\{(F_t, g_t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ такву да важи:

$$(F_t, g_t) = \begin{cases} (F_1, g_1), \ t \leq -1 \\ (F_2, g_2), \ t \geq 1. \end{cases}$$

Посматрајмо сада неаутономни систем

$$\dot{u}(t) = -\nabla_{g_t} F_t(u(t)). \tag{2.4}$$

Може се доказати да је за $x \in \mathrm{Crit}(F_1)$ и $y \in \mathrm{Crit}(F_2)$, $\mathrm{ind}(x) = \mathrm{ind}(y)$, скуп решења система (2.4) која спајају $x$ и $y$ компактна 0-димензиона многострукост. Означимо са $\nu(x, y)$ број трајекторија које спајају $x$ и $y$ модуло 2. Дефинишемо пресликавање

$$\Phi : CM_k(F_1) \to CM_k(F_2), \quad \Phi(x) = \sum_y \nu(x, y)y$$

на генераторима и проширимо по линеарности. Важи следећа теорема:

**Теорема 2.3.** За пресликавање $\Phi$ важи:

1° $\Phi \circ \partial = \partial \circ \Phi$, односно $\Phi$ је ланчасто пресликавање, па индукује морфизам

$$\Phi_* : HM_*(F_1, g_1) \to HM_*(F_2, g_2);$$

2° $\Phi_*$ не зависи од избора генеричке фамилије $(F_t, g_t)$;

3° За три пара $(F_i, g_i)$, $i = 1, 2, 3$ и

$$\Phi^{(ij)} : CM(F_i) \to CM(F_j)$$

следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd}
HM_*(F_1) \arrow[rr, "\Phi_*^{(12)}"] \arrow[dr, "\Phi_*^{(13)}"'] & & HM_*(F_2) \arrow[dl, "\Phi_*^{(23)}"] \\
& HM_*(F_3) &
\end{tikzcd}$$

□

Узимајући сада константну фамилију $(F_t, g_t) \equiv (F_1, g_1)$ добијамо

$$\Phi : CM_*(F_1) \to CM_*(F_1), \quad \Phi = id,$$

па је и $\Phi_* = id$, односно комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
HM_*(F_1) \arrow[rr, "\Phi_*^{(12)}"] \arrow[dr, "id"'] & & HM_*(F_2) \arrow[dl, "\Phi_*^{(21)}"] \\
& HM_*(F_1) &
\end{tikzcd}$$

одакле је $\Phi_*^{(21)} \circ \Phi_*^{(12)} = id$ и слично $\Phi_*^{(12)} \circ \Phi_*^{(21)} = id$. Из добијеног следи да је

$$HM_*(F_1, g_1) \cong HM_*(F_2, g_2)$$

и изоморфизам се остварује на канонски начин. Идентификујући помоћу канонских изоморфизама векторске просторе $HM_*(F, g)$ за различите генеричке парове $(F, g)$, добијамо векторски простор $HM_*(M)$ који називамо Морсовом хомологијом затворене многострукости $M$. Морсова хомологија затворене многострукости $M$ ће бити изоморфна њеној $CW$ хомологији, па самим тим и њеној сингуларној хомологији. Доказ тог тврђења се изводи конструкцијом одговарајућег изоморфизма посматрањем скупова $F^{-1}((-\infty, \lambda))$ при чему ће критичним вредностима $\lambda$ одговарати лепљење ћелија. Доказ се може наћи у [48].

**Напомена:** Управо изложени аргументи користе посматрање извесних модулских простора пресликавања са граничним условима. Додатна структура тих модулских простора (структура многострукости са или без границе, компактност) се може на ефикасан начин користити за извођење разних тврђења. Пример за то смо већ видели када смо доказивали да је $\partial \circ \partial = 0$ коришћењем Теореме 2.2. Други пример је управо изложена конструкција канонских изоморфизама између различитих Морсових хомологија. Овакве аргументе ћемо звати *аргументима кобордизама*.

## 2.4 Операције у Морсовој хомологији

Многе везе и операције које постоје у (ко)хомолошким теоријама могу се описати у терминима Морсове (ко)хомологије[5]. Илуструјмо то на неколико примера. Нека је $M$ затворена могострукост димензије $n$. Приметимо прво да

$$x \in \mathrm{Crit}_k(-F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Crit}_{n-k}(F),$$

односно критичне тачке функције $F$ можемо уједно сматрати и критичним тачкама функције $-F$ уз промену индекса. Имајући у виду ову идентификацију дефинишемо:

$$\Gamma : CM_k(-F) \to CM^{n-k}(F), \quad \Gamma(x) = \delta_x.$$

$\Gamma$ је изоморфизам на нивоу ланаца. Даље имамо да за $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ важи:

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(-t) = -\nabla_g F(\gamma(-t)) = \nabla_g(-F)(\widetilde{\gamma}(t)),$$

односно градијентне трајекторије за функцију $-F$ добијамо од градијентних трајекторија за функцију $F$ променом смера тока. Стога пресликавање $\gamma \to \widetilde{\gamma}$ индукује бијекцију

$$\mathcal{M}_F(y,x) \rightsquigarrow \mathcal{M}_{-F}(x,y),$$

па важи $n_F(y,x) = n_{-F}(x,y)$.

За $x \in CM_k(-F)$ и $y \in CM_{n-k+1}(F)$ важи:

$$\langle \delta\Gamma(x), y\rangle = \langle \Gamma(x), \partial y\rangle = \left\langle \delta_x, \sum_{z\in \mathrm{Crit}_{n-k}F} n_F(y,z)z \right\rangle = n_F(y,x),$$

као и

$$\langle \Gamma(\partial x), y\rangle = \left\langle \Gamma( \sum_{z\in \mathrm{Crit}_{k-1}(-F)} n_{-F}(x,z)z), y \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{z\in \mathrm{Crit}_{k-1}(-F)} n_{-F}(x,z)\delta_z, y \right\rangle = n_{-F}(x,y),$$

[5] Морсова кохомологија се конструише користећи Морсове хомолошке ланце применом Hom функтора на уобичајени начин.

па $\delta \circ \Gamma = \Gamma \circ \partial$ односно $\Gamma$ је ланчасто пресликавање. Како је $\Gamma$ изоморфизам на нивоу ланаца то је и

$$\Gamma_* : HM_k(-F) \to HM^{n-k}(F)$$

изоморфизам, па је компоновањем са $\Phi_* : HM_k(F) \to HM_k(-F)$, дефинисан изоморфизам

$$PD := \Gamma_* \circ \Phi_* : HM_k(F) \to HM^{n-k}(F)$$

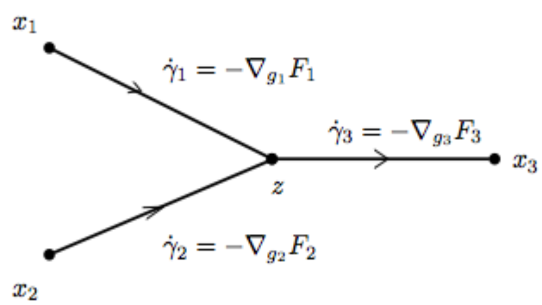
који описује Поенкареову дуалност.

Приметимо да при конструкцији $PD$-а нисмо захтевали услов да је $M$ оријентисана многострукост који је неопходна за остваривање Поенкареове дуалности у општем случају. Разлог за то је чињеница да радимо са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима, где нам услов оријентабилности није неопходан. Изоморфизам се може на сличан начин конструисати и у Морсовој хомологији над $\mathbb{Z}$, али бисмо тада морали да додамо услов да је $M$ оријентабилна и водимо рачуна о оријентацији при бројању трајекторија.

Помоћу пресека је дефинисан производ дуалан кап производу:

$$\cap : H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_{n-l}(M; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-k-l}(M; \mathbb{Z}_2).$$

Овај производ има елегантан геометријски опис у Морсовој хомологији. Посматрајмо генеричку тројку парова $(F_i, g_i)$, $i = 1, 2, 3$, нека су $x_i \in \mathrm{Crit}_*(F_i)$ и нека је $\phi_t^i$ негативни градијентни ток придружен пару $(F_i, g_i)$. Означимо са $\mathcal{M}(x_1, x_2, x_3)$ простор следећих конфигурација:




**Слика 5:** Елементи простора $\mathcal{M}(x_1, x_2, x_3)$

Прецизније:

$$\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)=\{z\in M|\lim_{t\to-\infty}\phi_t^1(z)=x_1,\lim_{t\to-\infty}\phi_t^2(z)=x_2,\lim_{t\to+\infty}\phi_t^3(z)=x_3\}=$$

$$=W^u(x_1)\cap W^u(x_2)\cap W^s(x_3).$$

Уколико је пресек ових подмногострукости трансверзалан, имамо да важи

$$\dim\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)=\mathrm{ind}(x_1)+\mathrm{ind}(x_2)-\mathrm{ind}(x_3)-n,$$

па је $\dim\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)=0$ ако и само ако је $\mathrm{ind}(x_1)+\mathrm{ind}(x_2)-\mathrm{ind}(x_3)=n$. У том случају је $\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)$ компактна и означавамо $n(x_1,x_2,x_3)=\#_2\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)$. Дефинишимо $\cap$ на нивоу ланаца са:

$$x_1\cap x_2=\sum_{x_3}n(x_1,x_2,x_3)x_3$$

при чему је $n(x_1,x_2,x_3)=0$ уколико је $\dim\mathcal{M}(x_1,x_2,x_3)\neq 0$. Овако дефинисано пресликавање ће индуковати производ у Морсовој хомологији:

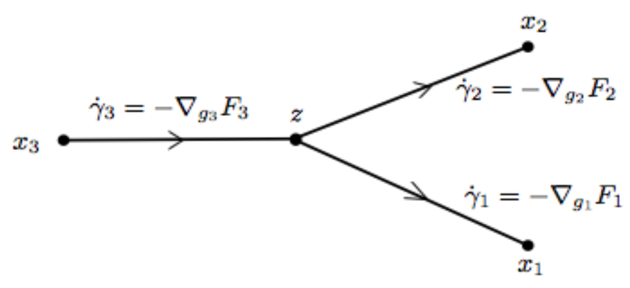
$$\cap: HM_{n-k}(F_1)\otimes H_{n-l}(F_2)\to H_{n-k-l}(F_3)$$

који одговара поменутом производу.

На сличан начин можемо конструисати и кап производ у Морсовој кохомологији. Класичан кап производ је пресликавање:

$$\cup: H^k(M;\mathbb{Z}_2)\otimes H^l(M;\mathbb{Z}_2)\to H^{k+l}(M;\mathbb{Z}_2).$$

Нека је поново $(F_i,g_i)$ за $i=1,2,3$ генеричка тројка парова, $x_i\in\mathrm{Crit}_*(F_i)$ и нека је $\mathcal{M}'(x_1,x_2,x_3)$ простор следећих конфигурација:



**Слика 6:** Елементи простора $\mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3)$

односно
$$\mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3) = W^s(x_1) \cap W^s(x_2) \cap W^u(x_3).$$

Уколико је овај пресек трансверзалан важи
$$\dim \mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{ind}(x_3) - \mathrm{ind}(x_1) - \mathrm{ind}(x_2),$$

па је $\dim \mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3) = 0$ ако и само ако је $\mathrm{ind}(x_3) - \mathrm{ind}(x_2) - \mathrm{ind}(x_3) = 0$. Тада је $\mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3)$ компактна и означавамо $n'(x_1, x_2, x_3) = \#_2 \mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3)$. Нека је
$$\Psi := \sum_{x_1, x_2, x_3} n'(x_1, x_2, x_3) x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in CM_*(F_1) \otimes CM_*(F_2) \otimes CM_*(F_3)$$

при чему је $n'(x_1, x_2, x_3) = 0$ уколико је $\dim \mathcal{M}'(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Даље за $A_1 \in HM^k(F_1)$ и $A_2 \in HM^l(F_2)$ одаберимо коциклове представнике које редом означавамо $a_1$ и $a_2$.
Сада је
$$(a_1 \otimes a_2) \lrcorner \Psi = \sum_{\substack{x_1, x_2, x_3 \\ \mathrm{ind}(x_1) = k \\ \mathrm{ind}(x_2) = l \\ \mathrm{ind}(x_3) = k + l}} n'(x_1, x_2, x_3) a_1(x_1) a_2(x_2) x_3 \in CM_{k+l}(F_3) = CM_{n-k-l}(-F_3)$$

, па $\Gamma((a_1 \otimes a_2) \lrcorner \Psi) \in CM^{k+l}(F_3)$ и $A_1 \cup A_2$ дефинишемо као кохомолошку класу од $\Gamma((a_1 \otimes a_2) \lrcorner \Psi)$. На овај начин смо дефинисали кап производ:
$$\cup : HM^k(F_1) \otimes HM^l(F_2) \to HM^{k+l}(F_3)$$

на нивоу кохомологије.

Идеја бројања различитих конфигурација и дефинисања (ко)хомолошких операција на тај начин је детаљно обрађена у [14] и [15]. У том раду је описано како је могуће бројати конфигурације придружене било ком усмереном графу, при чему примери које смо ми овде описали одговарају бројању два различито усмерена Y-графа. Приметимо да смо у нашем поступку бројали графове који спајају критичне тачке односно генераторе (ко)ланчастих комплекса у Морсовој (ко)хомологији. Може се доказати да ће овакав поступак увек индуковати елемент и на нивоу (ко)хомологије (погледати [14] и [15]) што смо прећутно користили у примерима Y-графова.

## 2.5 Аналитички приступ Морсовој хомологији

Приказани приступ Морсовој хомологији нам пружа увид у основне идеје иза ове теорије. Међутим, такав приступ није погодан за бесконачно-димензионе генерализације које нас занимају, односно Флорову теорију. У револуционарном раду [55] Едвард Витен је изложио другачији, аналитички, приступ Морсовој хомологији (некада се приступ који смо приказали назива класичним, а аналитички приступ модерним). Нови поглед на Морсову теорију је, заједно са такође револуционарним радом Михаила Громова [26], послужио као основа и инспирација Андреасу Флору за дефинисање једне бесконачно-димензионе верзије Морсове хомологије која данас носи назив Флорова хомологија и о којој ће бити речи касније. Ми ћемо сада приказати кратак преглед модерног приступа Морсовој хомологији, углавном пратећи [48]. Ова теорија је детаљно изложена у [52].

Претпоставимо сада да је $(M, g)$ затворена Риманова многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Нека су $p, q \in \mathrm{Crti}_*(f)$ и нека је $U$ простор путева који спајају $p$ и $q$, тј. таквих да $\gamma(-\infty) = p$, $\gamma(+\infty) = q$. Нека је $E$ простор векторских поља дуж путева који спајају $p$ и $q$ и $\pi : E \to U$ пројекција која слика векторско поље дуж $\gamma$ у $\gamma$.

По аналогији са Теоремом 1.2, уколико бисмо имали да су $U$ и $E$ многострукости, да је $\pi : E \to U$ векторско раслојење и

$$F : U \to E,\ F(\gamma) = \frac{d}{dt}\gamma + \nabla_g f(\gamma)$$

сечење тог раслојења такво да је $F \pitchfork 0_E$, где је $0_E$ нулто сечење, онда би $F^{-1}(0_E) \subset U$ била подмносотрукост свих путева $\gamma$ за које важи $\frac{d}{dt}\gamma = -\nabla_g f(\gamma)$ односно $F^{-1}(0_E) = \mathcal{M}(p, q)$.

Проблем лежи у правилној формализацији ове идеје. Наиме, испоставиће се да се простори $U$ и $E$ могу посматрати као бесконачно-димензионе Банахове многострукости и да се у том случају проблеми трансверзалности могу напасти техникама функционалне анализе. Такође, да бисмо постигли трансверзалност морамо да пертурбујемо Риманову метрику, па ће у разматрање бити укључен и простор $G$ Риманових метрика на $M$. Формализујмо сада ова разматрања.

**Дефиниција 2.11.** Хаусдорфов тополошки простор $M$, који има пребројиву базу топологије називамо *глатком Банаховом многострукошћу моделованом над Банаховим простором* $X$ уколико постоји фамилија

$$\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) | \lambda \in \Lambda\},$$

где је $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отворено покривање постора $M$, а

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset B,\ (\varphi_\lambda(U_\lambda) \text{ отворен})$$

фамилија хомеоморфизама, таква да је $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ глатко пресликавање између отворених подскупова Банахових простора за свако $\alpha, \beta \in \Lambda$ за које $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Уколико тражимо да функције преласка буду само класе $C^k$, кажемо да је $X$ класе $C^k$.

За Банахове многострукости дефинишемо већину појмова по аналогији са коначно-димензионим случајем (тангентни простор, тангентно раслојење, извод пресликавања, трансверзалност...) Такође, теореме о имплицитној и инверзној функцији важе и за Банахове просторе (за прецизну формулацију и доказ погледати [5]). Ситуација са теоремом о рангу и Теоремом 1.2 је мало другачија.

**Теорема 2.4. (О рангу)** Нека је су $X$ и $Y$ Банахови простори, $p \in X$ и $F : X \to Y$ глатка субмерзија таква да $\ker(dF(p))$ има затворен комплемент. Тада постоје потпростори $X_1,\ X_2 \subset X$ такви да је $X = X_1 \oplus X_2,\ X_2 \cong Y$ и $F$ је пројекција у околини тачке $p$ и има запис:

$$F(x, y) = y,$$

при чему поистовећујемо $X_2$ и $Y$. □

Имитирајући доказ Теореме 1.2 користећи Теорему 2.4 изводимо следећу теорему.

**Теорема 2.5.** Нека се $M$ и $N$ Банахове многострукости, $Q$ Банахова подмногострукост од $N$ и $F : M \to N$ глатко пресликавање трансверзално на $Q$ такво да $\ker(DF(p))$ има затворен комплемент за $p \in F^{-1}(Q)$. Тада је $F^{-1}(Q) \subset M$ Банахова подмногострукост за коју важи:

$$(\forall p \in F^{-1}(Q))\ T_p F^{-1}(Q) = \ker(DF(p)). \quad \square$$

Да бисмо пренели Теореме о параметарској трансверзалности (Теорема 1.4 и Теорема 1.5) на случај Банахових многострукости потребна нам је теорема аналогна Сардовој теореми, као и услов постојања затвореног комплемента за језгра извода. Ови услови ће бити испуњени за одређену класу пресликавања која називамо Фредхолмовим. У поновном извођењу ћемо изоставити делове који се изводе аналогно као у коначно-димензионо случају. Да бисмо дефинисали Фредхолмово пресликавање морамо прво да дефинишемо Фредхолмов оператор.

**Дефиниција 2.12.** Ограничен линеаран оператор $L : X \to Y$ између Банахових простора $X$ и $Y$ се назива *Фредхолмовим* уколико су $\ker(L)$ и $\mathrm{coker}(L) = Y/\mathrm{Im}(L)$ коначно димензиони простори. Број

$$\mathrm{ind}(L) := \dim(\ker(L)) - \dim(\mathrm{coker}(L))$$

називамо *индексом* Фредхолмовог оператора.

Следеће тврђење сумира основна својства Фредхолмових оператора:

**Лема 2.5.** За Фредхолмов оператор $L : X \to Y$ између Банахових простора $X$ и $Y$ важи:

1° $\ker(L)$ има затворен комплемент у $X$;

2° $\mathrm{Im}(L) \subset B$ је затворен;

3° Скуп Фредхолмових $\mathcal{F}(X, Y)$ оператора је отворен у скупу ограничених линеарних оператора $\mathcal{B}(X, Y)$ у односу на операторску норму и индекс

$$\mathrm{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \to \mathbb{Z}$$

је непрекидно пресликавање. □

**Дефиниција 2.13.** Глатко пресликавање $f : M \to N$ између Банахових многострукости $M$ и $N$ називамо *Фредхолмовим* уколико је $df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ Фредхолмов оператор за $\forall p \in M$.

Из својства 3° Фредхолмових оператора следи да је $\mathrm{ind}(df(p))$ локално константан, па за повезану Банахову многострукост $M$ и Фредхолмово пресликавање

$f : M \to N$ можемо дефинисати $\mathrm{ind}(f) := \mathrm{ind}(df_p)$ за било које $p \in M$.

Сада наводимо теорему аналогну Сардовој у Банаховом случају.

**Дефиницијa 2.14.** Подскуп $S$ метричког простора $M$ је *Беров* или *генерички* уколико садржи пребројив пресек отворених густих скупова.

У оквиру курсева Анализе на Математичком факултету у Београду се обично даје еквивалентна дефиницја Беровог скупа као скупа чији је комплемент скуп прве категорије. Такође се доказује следећа теорема (погледати [5]):

**Теорема 2.6. (Берова о категоријама)** Беров подскуп комплетног метричког простора је густ. □

Због наведене теореме је природно Берове скупове сматрати еквивалентом генеричких скупова у коначно-димензионом случају.

**Теорема 2.7. (Сард-Смејл)** Ако су $M$ и $N$ Банахове многострукости класе $C^k$ за $1 \leq k \leq \infty$, $F : M \to N$ Фредхолмово пресликавање класе $C^k$, и $k > \mathrm{index}(F)$ (овај услов игноришемо за $k = \infty$) онда је скуп регуларних вредности $F$ генерички.

**Доказ.** Погледати у [2]. □

**Теорема 2.8. (Параметарска трансверзалност III)** Нека су $M$, $N$ и $S$ Банахове многострукости, $Q \subset N$ Банахова подмногострукост и $F : M \times S \to N$ глатко пресликавање, $F \pitchfork Q$, такво да је $DF_s(m) : T_mM \to \nu_Q(F_s(m))$ Фредхолмово. Тада је $F_s \pitchfork Q$ за генерички параметар $s \in S$.

**Доказ.** Нека је $W = F^{-1}(Q)$. Имитирањем доказа Теореме 1.5 закључујемо да је $d\pi|_W$ Фредхолмово ако и само ако је $DF_s$ Фредхолмово. Анализирајући доказ Теореме 1.4 закључујемо да су $s \in S$ за које важи $F_s \pitchfork Q$ регуларне вредности $\pi|_W$. Доказ сада завршавамо применом Сард-Смејлове теореме на $\pi|_W : W \to S$. Ипак, да бисмо могли да применимо све наведене теореме и разматрања везана за њих, потребно је да $W$ буде Банахова многострукост. Према Теореми 2.5 довољно је доказати да $\ker(DF(m,s))$ има затворен комплемент за $\forall (m,s) \in W$. Како је

$$DF(m,s)(\vec{m},\vec{s}) = DF(m,s)(\vec{m},\vec{0}) + DF(m,s)(\vec{0},\vec{s}) = DF_s(m)(\vec{m}) + DF(m,s)(\vec{0},\vec{s})$$

и $DF_s(m)$ је Фредхолмов, доказ завршава следећа лема:

**Лема 2.6.** Ако је $L : X \times Y \to Z$ ограничен линеарни оператор између Банахових простора дат са:

$$L(v_1, v_2) = D(v_1) + P(v_2),\ D : X \to Z \text{ - Фредхолмов},\ P : Y \to Z \text{ - ограничен}$$

онда $\ker(L)$ има затворен комплемент. $\square$

Банахово векторско раслојење се дефинише по аналогији са коначно-димензионим случајем захтевајући да све многострукости у дефиницији буду Банахове и фибра Банахов простор. У овом случају се $\nu_Q$ може поистоветити са $E$, а пројекција $\pi : TE \to TE/T(0_E)$ са пројекцијом на фибру, па можемо сматрати да $DF(m, s) : T_{(m,s)}(M \times S) \to E_{(m,s)}$.

Теорема коју сада наводимо крунише досадашња разматрања везана за трансверзалност за Банахове многострукости. Она ће бити кључни састојак у дефинисању $\mathcal{M}(p, q)$.

**Теорема 2.9.** Нека су $M$ и $S$ Банахове многострукости, $E$ Банахово векторско раслојење над $M \times S$, $F : M \times S \to E$ глатко сечење и претпоставимо да за све $(m, s) \in F^{-1}(0_E)$ важи:

1° $DF(m, s) : T_{(m,s)}(M \times S) \to E_{(m,s)}$ је сурјекција.

2° $DF_s(m) : T_m M \to E_{(m,s)}$ је Фредхолмово.

Тада за генеричко $s \in S$ важи:

$$\begin{cases} F_s^{-1}(0_E) \subset N \text{ је многострукост коначне димензије,} \\ T_m F_s^{-1}(0_E) = \ker(DF_s(m)). \end{cases}$$

и важи $\dim(F_s^{-1}(0_E)) = \operatorname{index}(DF_s(m))$.

**Доказ.** Доказ ове теореме је суштински већ изведен кроз доказе Теорема о параметарској трансверзалности (Теорема 1.4, Теорема 1.5, Теорема 2.8). $\square$

Вратимо се сада на поставку проблема са почетка овог одељка. Желимо да нам $U$ буде простор путева који спајају $p$ и $q$, а $E$ простор векторских поља дуж путева из $U$. Такође, желимо да нам $E$ буде Банахово векторско раслојење и $F$ сечење дефинисано са:

$$F : U \to E,\ F(\gamma) = \frac{d}{dt}\gamma + \nabla_g f(\gamma).$$

Да бисмо обезбедили добру поставку за генерички избор параметара, у духу Теореме 2.9 ћемо посматрати и простор Риманових метрика $G$, који ће играти улогу простора параметара $S$, односно пертурбоваћемо метрику. Дакле, сада желимо да $E$ буде векторско раслојење над $U \times G$, а $F$ сечење дато са:

$$F : U \times G \to E,\ F(\gamma, g) = \frac{d}{dt}\gamma + \nabla_g f(\gamma).$$

Даље, да бисмо могли да применимо Теорему 2.9, за почетак мора да важи да су $U$, $G$ и $E$ Банахове многострукости. За $G$ можемо узети простор $C^k$ метрика за $k \geq 1$, који ће бити Банахова многострукост.

Ситуација са простором $U$ је мало сложенија. Желимо да радимо са путевима $\gamma : \mathbb{R} \to M$ таквим да је $\frac{d}{dt}\gamma$ добро дефинисано и $\frac{d}{dt}\gamma \in L^2$. Један од разлога зашто захтевамо овај услов је да би појам енергије имао смисла за градијентне трајекторије. Такође, желимо да имамо контролисану конвергенцију првих извода. Дакле, природно је посматрати норму дату са

$$\|\gamma\|_{1,2} = \|\gamma\|_2 + \|\frac{d}{dt}\gamma\|_2.$$

Први покушај би био да посматрамо простор $C^1$ путева у $M$ са овако задатом нормом. Међутим, овај простор није комплетан, а како нам је услов Банаховости неопходан, морамо посматрати његово комплетирање (или еквивалнетно томе, комплетирање простора $C^\infty$ функција у истој норми). На тај начин добијамо простор Собољева $W^{1,2}(\mathbb{R}, M)$. Ови простори су добро познати у класичној анализи, па детаље везане за њихову дефиницију, као и својства слабих извода овде нећемо излагати. Више о просторима Собољева може се наћи у [3] и [7].

Дефинишемо и наводимо само неке од теорема и појмова које ћемо користити у даљем излагању.

Да бисмо дефинисали $W^{k,p}(N, \mathbb{R}^m)$ за затворену многострукост $N$ потребно је да изаберемо коначно покривање многострукости $N$ картама $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\varphi_i(U_i) =$

$B_i$, $B_i \subset \mathbb{R}^n$ лопта, дефинишемо

$$\|u\|_{k,p} = \sum_i \|u \circ \varphi_i^{-1}\|_{k,p}$$

и комплетирамо простор $C^\infty$ пресликавања $U : N \to \mathbb{R}^m$ у норми $\|\cdot\|_{k,p}$. Такође можемо дефинисати $W^{k,p}(\mathbb{R}^n, M)$ и $W^{k,p}(N, M)$ за глатку многострукост $M$ фиксирајући улагање $j : M \to \mathbb{R}^a$ и комплетирајући простор $C^\infty$ функција са кодоменом у $M$ у односу на норму $\|\cdot\|_{k,p}$ у простору $W^{k,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^a)$, односно простору $W^{k,p}(N, \mathbb{R}^a)$.

Означимо са $C_c^\infty(X, M)$ простор глатких функција са компкатним носачем из $X$ у $M$ ($X$ је отворен подскуп $\mathbb{R}^n$, а $M$ глатка многострукост). Простор $W_{loc}^{k,p}(X, M)$ дефинишемо као комплетирање простора $C_c^\infty$ у односу на топологију конвергенције:

$$u_n \to u \Leftrightarrow u_n|_C \to u|_C$$

за свако $C \subset X$ отворен, $\overline{C} \subset X$.

За глакто векторско раслојење $E$ над $M$ можемо дефинисати просторе $W^{k,p}$ сечења без улагања $E$ у $\mathbb{R}^a$ посматрајући тривијализације. Како је

$$B_i \times \mathbb{R}^k \cong U_i \times \mathbb{R}^k \cong E|_{U_i}$$

то можемо посматрати пресликавања $u \circ \varphi_i^{-1} : B_i \to \mathbb{R}^k$ и комплетирање у односу на норму

$$\|u\|_{k,p} = \sum_i \|u \circ \varphi_i^{-1}\|_{k,p}$$

и добијени простор неће зависити од избора тривијализација. Простор $W^{k,p}$ сечења означавамо са $W^{k,p}(E)$

Како желимо да посматрамо путеве који почињу и завршавају у критичним тачкама ($\gamma(-\infty) = p$ и $\gamma(\infty) = q$), потребно је да задржимо појам лимеса који не постоји у $W^{k,p}$ у општем случају (зато што је овај простор добијен као комплетирање). За то ће нам бити потребне Теореме Собољева о утапању:

**Теорема 2.10. (Собољева о утапању)** Нека су $M$ и $N$, глатке многострукости, $N$ компактна и $\dim(N) = n$. Тада се за $kp > n$ елементи комплетирања $W^{k+j,p}(N, M)$ могу представити функцијама класе $C^j$, односно важи:

$$W^{k+j,p}(N,M) \hookrightarrow C^j(N,M).$$

Уколико $N$ није компактна уз услов $kp > n$ важи:

$$W^{k+j,p}_{loc}(N,M) \hookrightarrow C^j_{loc}(N,M)$$

при чему је $C^j_{loc}(N,M)$ простор функција $C^j(N,M)$ са униформном конвергенцијом на компактима. Ова улагања су ограничени и компактни оператори. $\square$

За нас је интересантан случај $W^{1,2}(\mathbb{R},M)$, односно $k=1$, $p=2$ и $n=1$, па је $kp > n$. У овом случају се елементни $\gamma \in W^{1,2}(\mathbb{R},M)$ могу представити непрекидним путевима, па можемо говорити о конвергенцији.

Међутим, ни $W^{1,2}(\mathbb{R},M)$ није добар кандидат за дефинисање простора $U$ због тога што $\mathbb{R}$ није компактан. Наиме, чак ни константан пут $\gamma(t) = a \neq 0$ не припада $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ јер је $\int_{\mathbb{R}} \|a\| = \infty$. Слично, ни један пут који спаја две тачке различите од 0 није коначне норме. Следећи логичан покушај би био простор $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R},M)$. Проблем са овим простором је што није Банахов, већ само комплетан метрички (метрика не долази од норме). Коначно дефинишемо простор $U$ помоћу $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R},M)$, контролишући конвергенцију у крајњим тачкама. Нека је $g_0$ Риманова метрика на $M$. Ову метрику користимо када говоримо о норми приликом дефиниције простора $U$ и $E$ и њу нећемо варирати. Дефиниција коју дајемо неће зависи од избора метрике $g_0$.

**Дефиниција 2.15.** Нека је

$$U = \left\{ \begin{array}{r} \gamma \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R},M) \mid \lim\limits_{s\to-\infty}\gamma(s) = p, \ \ \lim\limits_{s\to+\infty}\gamma(s) = q \text{ и } \exists S \in \mathbb{R},\ S > 0 : \\ \gamma(s) = \exp_p(\xi_p(s)) \text{ за } s \leq -S \text{ за неко } \xi_p \in W^{1,2}((-\infty,-S),T_pM), \\ \gamma(s) = \exp_q(\xi_q(s)) \text{ за } s \geq S \text{ за неко } \xi_q \in W^{1,2}((S,+\infty),T_qM) \end{array} \right\}$$

при чему је exp експоненцијално пресликавање. $U$ називамо простором путева.

Оваква дефиниција нам обезбеђује да простор $U$ буде Банахова многострукост. , прецизније важи следећа лема:

**Лема 2.7.** *$U$ је глатка Банахова многострукост моделована над $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$, где је $m$ димензија многострукости $M$.*

**Доказ.** Видети [48] или [52]. $\square$

Као што смо већ поменули дефинишемо:

**Дефиниција 2.16.** $G$ је простор свих Риманових метрика класе $C^k$ за фиксирано $k \geq 1$.

**Дефиниција 2.17.** $E$ је простор $L^2$ векторских поља дуж путева из $U$. Прецизније

$$E = \{L^2(\gamma^*(TM)) | \gamma \in U\}$$

при чему се мисли на $L^2$ сечења.

Важи следећа лема:

**Лема 2.8.** $G$ је глатка Банахова многострукост, а $E$ је глатко Банахово векторско раслојење над $U \times G$ са фибром $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ где је $m$ димензија многострукости $M$. .

**Доказ.** Видети [48] или [52]. $\square$

Позабавимо се сада пресликавањем $F$. Важе следеће две леме чији се докази такође могу наћи у [48] или [52].

**Лема 2.9.** $F$ је добро дефинисано сечење класе $C^k$. $\square$

**Лема 2.10.** Уколико је $\gamma$ добијено као решење $F(\gamma, g) = 0$, онда је $\gamma$ класе $C^{k+1}$. $\square$

Коначно, важе услови неопходни за примену Теореме 2.9. То формулишемо у следећој леми:

**Лема 2.11.** За $(u, g) \in F^{-1}(0_E)$ важи:

1° $DF(u, g) : T_{(u,g)}(U \times G) \to E_{(u,g)}$ је сурјекција.

2° $DF_g(u) : T_uU \to E_{(u,g)}$ је Фредхолмово пресликавање индекса $\mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q)$. $\square$

Доказ ове леме је технички веома сложен, па га због тога изостављамо. Доказ се може наћи у [48] и [52].

Као директну последицу наведене Леме и Теореме 2.9 изводимо следећу теорему:

**Теорема 2.11.** Нека је $1 \leq k \leq \infty$ и $k > \mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q)$. Тада за генеричку $C^k$ метрику $g$ важи:[6]

$$\mathcal{M}^k(p,q) := F_g^{-1}(0_E)$$

је подмногострукост од $U$ класе $C^k$ чија је димензија

$$\dim(\mathcal{M}^k(p,q)) = \mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q)$$

и тангентни простор

$$T_\gamma \mathcal{M}^k(p,q) = \ker(DF_g(\gamma))$$

за вертикални извод $DF_g(\gamma) : T_\gamma U \to E_\gamma$. $\square$

Надаље ћемо се ограничити на разматрање $C^\infty$ метрика и одговарајући простор ћемо означавати са $\mathcal{M}(p,q)$.

**Напомена:** За сваку $C^k$ метрику можемо наћи $C^\infty$ метрику која је њој произвољно близу. Како је трансверзалности, односно регуларност отворено својство та $C^\infty$ метрика ће бити регуларна.[7] У оквиру Теореме 2.11 говоримо о генеричкој (односно регуларној) метрици $g$ као о метрици за коју је $DF_g(\gamma)$ сурјекција на $E_\gamma$ за $\gamma \in \mathcal{M}(p,q) = F_g^{-1}(0_E)$. Овај услов је еквивалентан услову да је пар $(f,g)$ Морс-Смејлов, што смо у класичном приступу сматрали генеричким случајем.

Простор $\overline{\mathcal{M}}(p,q) := \mathcal{M}(p,q)/\mathbb{R}$ дефинишемо на исти начин као у класичном приступу, односно као количник у односу на већ описано дејсто. Надаље ћемо сматрати да важи Морс-Смејлов услов, мада нам тај услов неће увек бити неопходан.

Да бисмо комплетирали излагање остаје још да опишемо поступак компактификације простора $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ о коме смо говорили у Теореми 2.2.

Опишимо прво конвергенцију у $\mathcal{M}(p,q)$ и $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$. Топологија на $\mathcal{M}(p,q)$ је наслеђена из $U$. За $v \in \overline{\mathcal{M}}(p,q)$ означимо са $\tilde{v} \in \mathcal{M}(p,q)$ елемент такав да

[6] Овакву метрику зовемо и *регуларном*.

[7] Такође ће и регуларне метрике бити генериче у скупу свих $C^\infty$ метрика.

$[\tilde{v}] = v$. Како је $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ количнички простор, то на њему постоји количничка топологија задата са

$$U \text{ отворен у } \overline{\mathcal{M}}(p,q) \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \text{ отворен у } \mathcal{M}(p,q)$$

односно минимална топологија таква да је пројекција $\pi : \mathcal{M}(p,q) \to \overline{\mathcal{M}}(p,q)$ непрекидна. Конкретније

$$v_n \to v \text{ у } \overline{\mathcal{M}}(p,q) \Leftrightarrow \exists \tilde{v}_n \to \tilde{v} \text{ у } \mathcal{M}(p,q)$$

што узимајући у обзир како је дефинисано $\mathbb{R}$ дејство даје:

$$[\gamma_n] \to [\gamma] \text{ у } \overline{\mathcal{M}}(p,q) \Leftrightarrow \text{ Постоји низ } s_n \in \mathbb{R},\ \gamma_n(\cdot + s_n) \to \gamma(\cdot) \text{ у } \mathcal{M}(p,q).$$

Дакле, за изучавање конвергенције у $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ суштински је да изучимо конвергенцију у $\mathcal{M}(p,q)$. Конвергенција у $U$ повлачи $C^0$ конвергенцију на компактима, па самим тим и конвергенција у $\mathcal{M}(p,q)$ повлачи $C^0$ конвергенцију на компактима. Међутим, важи и следећа теорема.

**Теорема 2.12.** Нека низ $\gamma_n \in \mathcal{M}(p,q)$ конвергира у $C^0_{loc}$ топологији ка $\gamma \in \mathcal{M}(p,q)$. Тада $\gamma_n$ конвергира ка $\gamma$ у $\mathcal{M}(p,q)$.

**Доказ.** Видети [48] или [52]. □

Пређимо сада на разматрања везана за компактност простора $\mathcal{M}(p,q)$ и $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$. За почетак важи следећа лема.

**Лема 2.12.** Нека је $\gamma_n$ низ решења једначине $\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = -\nabla_g f(\gamma_n(t))$. Тада $\gamma_n$ има подниз (у истој ознаци $\gamma_n$) такав да

$$\gamma_n \to \gamma \text{ у } C^0_{loc} \text{ топологији.}$$

Takође важи $\frac{d}{dt}\gamma(t) = -\nabla_g f(\gamma(t))$

**Доказ.** $\gamma_n|_{[-S,S]} : [-S,S] \to M \subset \mathbb{R}^a$ су равномерно ограничене због комапактности $M$. Такође је због компактности $M$, норма градијента $\|\nabla_g f\|$ равномерно ограничена, па ја је и норма $\|\frac{d}{dt}\gamma(t)\| = \|\nabla_g f(\gamma(t))\|$ равномерно ограничена. Применом теореме о средњој вредности закључујемо да је $\gamma_n$ равностепено непрекидан (еквинепрекидан) низ, па су испуњени услови за примену Арцела-Асколијеве теореме. Одавде следи $C^0_{loc}$ конвергенција. Да гранична крива $\gamma_\infty$

задовољава градијентну једначину закључујемо тако што применимо Арцела-Асколијеву теорему на низ $\frac{d}{dt}\gamma_n$ да бисмо закључили да постоји подниз (поново означен са $\gamma_n$) који конвергира ка $\gamma_\infty$ у $C^1$. Сада како сви $\gamma_n$ задовољавају $\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = -\nabla_g f(\gamma(t))$ тврђење следи. $\square$

**Последица 2.2.** Означимо са $\mathcal{M} := \bigcup\limits_{p,q\in \mathrm{Crit} f} \mathcal{M}(p,q)$. Простор $\mathcal{M}$ је $C^0_{loc}$ компактан.

Према овој последици за низ $\gamma_n \in \mathcal{M}(p,q)$ знамо да ће увек постојати $C^0_{loc}$ конвергентан подниз (који означавамо опет са $\gamma_n$) и нека је његов лимес $\gamma$. Уколико је $\gamma \in \mathcal{M}(p,q)$, онда $\gamma_n \to \gamma$ и у $\mathcal{M}(p,q)$. Међутим, ако $\gamma \notin \mathcal{M}(p,q)$ онда $\gamma \in \mathcal{M}(\tilde{p},\tilde{q})$ за неке критичне тачке $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$. Тај случају ће нас довести до појма конвергенције ка изломљеној трајекторији за низ трајекторија $[\gamma_n] \in \overline{\mathcal{M}}(p,q)$. Опишимо ту ковергенцију.

**Лема 2.13.** Нека су $\gamma_n$ и $\gamma \in \mathcal{M}(\tilde{p},\tilde{q})$ описани путеви. Тада постоји низ реалних бројева $s_n$ такав да $w_n = \gamma_n(\cdot + s_n) \to w$ у $C^0_{loc}$ и $f(w(\mathbb{R})) \cap f(\gamma(\mathbb{R})) = \emptyset$.

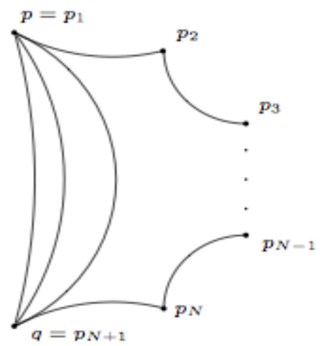
**Доказ.** Видети [48] или [52]. $\square$

Коначно, важи следећа теорема.

**Теорема 2.13.** За низ $\gamma_n \in \mathcal{M}(p,q)$ постоји подниз (опет $\gamma_n$), као и низови реалних бројева $s^i_n \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,N$ и путеви $\gamma^i \in \mathcal{M}(p_i,p_{i+1}),\ p_1 = p,\ p_{N+1} = q,\ f(p_1) > \ldots > f(p_{N+1})$ такви да важи:

$$\gamma^i_n := \gamma_n(\cdot + s^i_n) \to \gamma^i \text{ у } \mathcal{M}(p_i,p_{i+1}).$$

**Доказ.** Доказ се изводи комбинацијом приказаних тврђења и у потпуности је изведен у [48] и [52]. $\square$




**Слика 7:** Распадање Морсових трајекторија

Приметимо да су $\gamma_n^i$, $i = 1, \dots, N$ из претходне теореме добијени репараметризацијом истог пута $\gamma_n$, односно $[\gamma_n^1] = \dots = [\gamma_n^N] = [\gamma_n] \in \overline{\mathcal{M}}(p,q)$. Како су у случају када нема ломљења трајкеторија конвергенција у $\mathcal{M}(p,q)$ и $C^\infty_{loc}$ конвергенција еквивалентне, то Теорема 2.13 тврди да

$$[\gamma_n] \to ([\gamma^1], \dots, [\gamma^N])$$

у смислу Дефиниције 2.10. Одавде следи да сваки низ непараметризованих трајекторија има подниз који конвергира ка, евентуално изломљеној, непараметризованој трајекторији. Додавањем изломљених трајкеторија скупу $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ добијамо $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$. Уз мало пажње при дефинисању топологије можемо да тврдимо да је $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ компактан према Теореми 2.13. Ми ипак желимо мало више. Наиме, циљ нам је да проширимо топологију са $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$ на $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ тако да $\widetilde{\mathcal{M}}(p,q)$ баш има структуру описану у Теореми 2.2. Да такву конструкцију можемо извести гарантује Теорема о лепљењу. Пре него што формулишемо ову теорему, приказаћемо основну идеју овакве компактификације на примеру скупа реалних бројева.

**Пример 2.4.** Сваки низ реалних бројева има или конвергентан подниз или подниз који тежи ка $+\infty$ или $-\infty$. Посматрајмо скуп $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где је $\{-\infty, +\infty\}$ неки двочлан скуп. Дефинишимо $(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$ и $[-\infty, a) = (-\infty, a) \cup \{-\infty\}$ за $a \in \mathbb{R}$. За базу топологије на $\overline{\mathbb{R}}$ узимамо све отворене интервале $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$ и све инервала облика $(a, +\infty]$ и $[-\infty, a)$. Овако дефинисан тополоши простор $\overline{\mathbb{R}}$ је компактан.

Сада ћемо, зарад једноставности, формулисати Теорему о лепљењу за случај $p, q \in \mathrm{Crit}_*(f)$, $\mathrm{ind}(p) - \mathrm{ind}(q) = 2$. Доказ ове Теореме изостављамо.

**Теорема 2.14. (О лепљењу)** За произвољне $p, q, a \in \mathrm{Crit}_*(f)$ такве да је $\mathrm{ind}(p) = \mathrm{ind}(a) + 1 = \mathrm{ind}(q) + 2$ постоји функција лепљења:

$$\# : \mathcal{M}(p, a) \times \mathcal{M}(a, q) \times (\lambda_0, +\infty) \to \mathcal{M}(p, q),\ \#(\gamma^1, \gamma^2, \lambda) = \gamma^1 \#_\lambda \gamma^2$$

таква да:

1° $\#$ индукује улагање $\overline{\mathcal{M}}(p, a) \times \overline{\mathcal{M}}(a, q) \times (\lambda_0, +\infty)$ у $\overline{\mathcal{M}}(p, q)$.

2° За $\gamma^1 \in \mathcal{M}(p, a), \gamma^2 \in \mathcal{M}(a, q)$ важи $[\gamma^1 \#_\lambda \gamma^2] \to ([\gamma^1], [\gamma^2])$ кад $\lambda \to +\infty$.

3° Ако $[\gamma_n] \to ([\gamma^1], [\gamma^2])$ кад $n \to \infty$, онда је почевши од неког $n$, $[\gamma_n] = [\gamma^1 \#_{\lambda_n} \gamma^2]$ за неки низ $\lambda_n \to \infty$. $\square$

Из ставке 2° видимо да се свака изломљена трајекторија може добити као лимес који долази из лепљења, док из ставке 3° видимо да сви лимеси ка изломљеним трајкеторијама долазе управо од лепљења. Дакле, Теорема 2.14 потпуно описује околине изломљених трајекторија, па можемо дефинисати топологију на $\overline{\mathcal{M}}(p, q)$ слично као у Примеру 2.4. Овако дефинисан тополошки простор ће бити компактан и имаће управо структуру многострукости са ивицама о којој говори Теорема 2.2.

**Напомена:** У неким случајевима можемо дефинисати Морсову хомологију и на неким некомпактним многострукостима. У тим случајевима постављамо додатне услове за метрику и Морсову функцију. Један пример за то су векторска раслојења. Нека је $E$ векторско раслојење над $M$ и $F$ Морсова функција на $E$ таква да је изван неког компакта $K \subset E$, $F = Q$ где је $Q : E \to \mathbb{R}$ глатка функција чија је рестрикција на сваку фибру раслојења $E$ недегенерисана квадратна форма. Уколико уочимо и метрику $g$ на $E$ која је изван $K$ једнака стандардној еуклидској метрици на свакој фибри[8] можемо коректно засновати Морсову теорију. Наиме, посматраћемо све криве које задовољавају једначину (2.1) и имају коначну енергију. Због услова које смо поставили на $F$ и $g$, функција $F$ ће имати све критичне тачке унутар компакта $K$, док ће све градијентне трајекторије које напусте $K$ имати бесконачну енергију. Из тог разлога ће се цела динамика одвијати унутар компакта и Морсова хомологија се дефинише на исти начин као у некомпактном случају.

[8]Након тривијализације.

# 3 Панорама симплектичке топологије

У овом поглављу ћемо дати преглед основних појмова и тврђења симплектичке топологије. Већи део поглавља је посвећен изучавању појмова који су у вези са спектралним инваријантама (Хамилтонова динакима и генеришуће функције). Приказ је већим делом преузет из [6], [46] и [47].

## 3.1 Симплектичке многострукости

**Дефиниција 3.1.** Недегенерисана, затворена, диференцијална 2-форма $\omega$ се назива *симплектичком формом* на $M$. Многострукост $M$ са симплектичком формом се назива *симплектичка многострукост.*

**Пример 3.1.** $\mathbb{R}^{2n}$ са формом $\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$ где су координате на $\mathbb{R}^{2n}$ дате са $(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$ је симплектичка многострукост.

Простор $\mathbb{R}^{2n}$ са овако задатом симплектичком формом зовемо симплектичким векторским простором. Форму $\omega_0$ зовемо *стандардном* симплектичком формом.

До краја овог поглавља, уколико другачије не напоменемо, сматрамо $M$ повезаном симплектичном многострукошћу димензије $n$ са симплектичком формом $\omega$.

Симплектичке многострукости имају много глобалних рестрикција. На пример свака симплектичка многострукост је парне димензије. Заиста ако је $p \in M$, $(M, \omega)$ симплектичка, $\dim(M) = m$ онда је $\omega|_{T_pM}$ недегенерисана, антисиметрична билинеарна форма, па за матрицу $B$ те форме у било којој бази $T_pM$ важи $B^T = -B$. Сада је $\det B = \det B^T = (-1)^m \det B$, па је $m$ паран јер $\det B \neq 0$. Даље, симплектичке многострукости су оријентабиле. То је последица следеће леме.

**Лема 3.1.** Диференцијална 2-форма $\omega \in \Omega^2(M)$ на многострукости $M$, димензије $2n$ је недегенерисана ако и само ако је

$$\omega^{\wedge n} := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n} \neq 0. \quad \square$$

**Пример 3.2.** Све оријентабилне површи (многострукости димензије 2) су симплектичке многострукости, са формом запремине као симплектичком формом.

Уколико је симплектичка многострукост $(M, \omega)$, $\dim(M) = 2n$ још и затворена, имамо додатне тополошке рестрикције. Наиме, важи

$$H_{dR}^{2k}(M) \neq \{0\} \text{ за } 0 \leq k \leq n.$$

Уколико би било $H_{dR}^{2k}(M) = \{0\}$ онда би свака затворена $2k$-форма била и тачна, па би важило $\omega^{\wedge k} = d\eta$, односно $\omega^{\wedge n} = d(\eta \wedge \omega^{\wedge n-k})$. Даље, уколико са $V(M)$ означимо запремину $M$ у односу на форму $\omega^{\wedge n}$ Стоксова теорема даје:

$$V(M) = \int\limits_M \omega^{\wedge k} = \int\limits_M \omega^{\wedge k} = \int\limits_M d(\eta \wedge \omega^{\wedge n-k}) = \int\limits_{\partial M} \eta \wedge \omega^{\wedge n-k} = 0,$$

што је контрадикција.

**Последица 3.1.** Једина сфера која је симплектичка је $\mathbb{S}^2$.

Упркос мноштву глобалних рестрикција симплектичке многострукости немају никакву локалну структуру. Испоставља се да се локално свака симплектичка форма може поистоветити са стандардном симплектичком формом на $\mathbb{R}^{2n}$. Прецизније важи:

**Теорема 3.1. (Дарбу)** Свака тачка $p \in M$ симплектичке многострукости $(M, \omega)$ има координатну околину $(U, \phi)$ такву да важи

$$\omega|_U = \phi^* \omega_0$$

где је $\omega_0$ стандардна симплектичка форма на $\mathbb{R}^{2n}$. □

Нама најважнији пример симплетичке многострукости је следећи:

**Пример 3.3.** Нека је $\pi : T^*M \to M$ пројекција на котангентном раслојењу. Канонску 1-форму $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ задату са:

$$\lambda_p = \pi^*_{\pi(p)}(p)$$

зовемо *Лиувиловом формом.* У дефиницији Лиувилове форме $p$ игра двоструку улогу, тачке из $T^*M$ и 1-форме на $M$, односно за $X_p \in T_p(T^*M)$ важи:

$$\lambda_p(X_p) = p(\pi_*(p)(X_p)).$$

Уочимо карту $U$ на $M$ и локалне координате $(q_1, \ldots, q_n)$ у тој карти и нека су $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots p_n)$ координате на $T^*M|_U$ одабране тако да је $p_i$ дуалан ковектор вектора $q_i$, односно $p_i(q_j) = \delta_{ij}$. Тада из дефиниције Лиувилове форме следи да је њен локални запис у $U$:

$$\lambda_U = p_1 dq_1 + \ldots p_n dq_n.$$

Даље видимо да у овако изабраним координатама на $T^*M$ форма $\omega = -d\lambda$ има локални запис:

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n,$$

што је управо запис стандардне симплектичке форме на $\mathbb{R}^{2n}$. Одавде следи да је $\omega$ канонски задата симплектичка форма, а $T^*M$ симплектичка многострукост. Штавише, описане координате су експлицитно одређене координате из Дарбуове теореме. Многострукост $M$ се улаже у $T^*M$ као нулто сечење, па је у описаним координатама $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots p_n)$, $M$ дата са $(p_1, \ldots p_n) = (0, \ldots, 0)$, па $\lambda|_M = 0$. Одавде следи и да је $\omega|_M = 0$.

## 3.2 Лагранжеве подмногострукости

Иако је постојање симплектичке форме веома условљено топологијом многострукости $M$, видели смо да свакој многострукости можемо на канонски начин придружити симплектичку многострукост - котангентно раслојење. У овом случају важи $\dim(M) = n$, $\dim(T^*M) = 2n$ и $\lambda|_M = 0$. Инспирисани овим примером можемо дати следећу дефиницији:

**Дефиниција 3.2.** Нека је $(M, \omega)$ симплектичка многострукост димензије $2n$. Подмногострукост $L \subset M$ зовемо *Лагранжевом* уколико је $\dim L = n$ и $j^*\omega = 0$, где је $j : L \to M$ улагање.

Лагранжеве подмногострукости су централни објекти у Симплектичкој топологији. Оне се јављају као природни објекти у више различитих ситуација. Опишимо једну.

Пресликавања која чувају симплектичку форму издвајамо следећом дефиницијом.

**Дефиниција 3.3.** Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ симплектичке многострукости $(M, \omega)$ називао *симплектоморфизмом* уколико има компактан носач и чува симплектичку форму, односно важи $\phi^*\omega = \omega$. Скуп свих симплектоморфизама на $M$ означавамо са $\mathrm{Symp}(M)$. $\mathrm{Symp}(M)$ је очигледно група у односу на композицију пресликавање.

**Лема 3.2.** Нека је $(M, \omega)$ симплектичка многострукост. Тада је $M \times M$ такође симплектичка многострукост са симплектичком формом

$$\Omega := \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$$

где су $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ пројекције на прву и другу координату. Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ је симплектоморфизам ако и само ако је његов график

$$\Gamma(\phi) = \{(p, \phi(p)) \in M \times M \mid p \in M\}$$

Лагранжева подмногострукост у $(M \times M, \Omega)$.

**Доказ.** Како је $T(M \times M) = TM \oplus TM$ недегенерисаност $\Omega$ следи из недегенерисаности $\omega$, а $d\Omega = \pi_1^* d\omega - \pi_2^* d\omega = 0$. Нека је

$$j = (id, \phi) : M \to M \times M,\ j(p) = (p, \phi(p))$$

улагање чија је слика $\Gamma(\phi)$. Како је

$$j^*\Omega = (id^*, \phi^*)(\pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega) = \omega - \phi^*\omega$$

то је $j^*\Omega = 0$ ако и само ако $\phi^*\omega = \omega$ што завршава доказ. $\square$

Нека је $L \subset T^*M$ подмногострукост димензије $n$ и $j : L \to T^*M$ улагање. Тада је $j^*\omega = j^*(-d\lambda) = d(j^*\lambda)$, па је $L$ Лагранжева подмногострукост ако и само ако је $j^*\lambda$ затворена форма на $L$. Можемо тражити и јачи услов, да је $j^*\lambda$ тачна форма. У том случају $L$ зовемо *тачном Лагранжевом подмногострукошћу.*

**Пример 3.4.** Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. График диференцијала од $f$, $\Gamma(df) \subset T^*M$ је тачна Лагранжева подмногострукост.

**Пример 3.5.** Посматрајмо цилиндар $C = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ као котангентно раслојење $C = T^*\mathbb{S}^1$. Лиувилова форма $\lambda$ је дата са $\lambda = pdq$ где је $q$ координата на $\mathbb{S}^1$, а $p$ координата на $\mathbb{R}$. Уочимо контрактибилну петљу $\gamma$ на $C$ и нека она ограничава диск $D$. $\gamma$ је Лагранжева подмногострукост јер $\gamma^*\omega = 0$ због димензије. Стоксова теорема даје

$$P(D) = \int\limits_D \omega = -\int\limits_\gamma \lambda,$$

па ако је $\gamma^*\lambda = df$ поновном применом Стоксове теореме имамо $P(D) = 0$ односно $\gamma$ не може бити тачна Лагранжева подмногострукост. Ако претпоставимо сада да је $\gamma$ неконтрактибилна и тачна из Стоксове теореме имамо да важи

$$\int\limits_\gamma \lambda = \int\limits_\gamma pdq = 0.$$

Последњи интеграл представља разлику површина које $\gamma$ ограничава изнад и испод $0_{\mathbb{S}^1}$, па да би $\gamma$ била тачна ове две површине морају бити једнаке. Одавде следи да је $\gamma \cap 0_{\mathbb{S}^1} \neq \emptyset$.

## 3.3 Хамилтонова динамика

Природно питање у духу Ерлангенског програма би било описати све симетрије симплектичке многострукости $M$, односно групу $\mathrm{Symp}(M)$. Из дефиниције није јасно да ли такве симетрије уопште постоје, односно да ли је $\mathrm{Symp}(M)$ нетривијална група. На примеру Риманове геометрије видимо да одговор на ово питање може бити негативан. Наиме, група изометрија Риманове многострукости димензије веће од 1 је тривијална за генерички избор Риманове метрике. Испоставља се да у општем случају постоји „много" симплектоморфизама. Прецизније, конструисаћемо подгрупу групе $\mathrm{Symp}(M)$ која ће бити бесконачно-димензиона Лијева група. Ова подгрупа потиче из математичке формулације класичне механике.

За векторско поље $X$ означимо са $i_X(\omega)$ унутрашњи извод форме $\omega$, односно $i_X(\omega) \in \Omega^1(M)$ је 1 форма дефинисана са $i_X(\omega)(Y) = \omega(X, Y)$. Нека је $I = [0, 1]$ и $H : M \times I \to \mathbb{R}$ глатка функција. Сада из недегенерисаности $\omega$ следи да можемо да нађемо глатко векторско поље $X_{H_t}$ које зависи од времена $t \in I$ такво да важи:

$$i_{X_{H_t}}(\omega) = dH_t.$$

**Дефиниција 3.4.** За симплектичку многострукост $M$, глатку функцију $H : M \times I \to \mathbb{R}$ називамо *Хамилтоновом функцијом* или *Хамилтонијаном* уколико постоји компакт $K \subset M$ такав да $\mathrm{supp}(H_t) \subset K$ за свако $t \in I$ (у случају затворене многострукости $M$ ово је празан услов). Једначину

$$i_{X_{H_t}}(\omega) = dH_t$$

називамо *Хамилтоновом једначином*, векторско поље $X_{H_t}$ дефинисано Хамилтоновом једначином називамо *Хамилтоновим векторским пољем*, а ток Хамилтоновог векторског поља *Хамилтоновим током.* $X_{H_t} = 0$ изван $K$, па $X_{H_t}$ дефинише фамилију дифеоморфизама $f_t$ за $t \in I$, $f_0 = id$. Сваки дифеоморфизам $f_t : M \to M$ називамо *Хамилтоновим дифеоморфизмом.*

Скалирањем по $t$ можемо добити сваки Хамилтонов дифеоморфизам као $f_1$ за пут Хамилтонових дифеоморфизама генерисан модификованим Хамилтонијаном. Због тога у претходној дефиницији можемо дефинисати и Хамилтонов дифеоморфизам као $f_1$ за фамилију дифеоморфизама $f_t$ генерисану са $H_t$. Скуп свих Хамилтонових дифеоморфизама ћемо означавати са $\mathrm{Ham}(M)$.

У Хамилтоновој формулацији класичне механике симплектичку многострукост $M$ сматрамо фазним простором, док Хамилтонијан $H : M \times I \to \mathbb{R}$ сматрамо енергијом система. Илуструјмо то следећим примером.

**Пример 3.6.** Посматрајмо систем чији је фазни простор $\mathbb{R}^{2n}$ при чему су координате $q_i$, $p_i$ $i = 1, \dots n$ и форма $\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n = dq \wedge dp$ као у Примеру 3.1. Интерпретирајмо $q_i$ као координате положаја, а $p_i$ као координате импулса. Нека је $U(q)$ потенцијал који зависи само од положаја, а $F = -\frac{\partial U}{\partial q}$ сила која потиче од тог потенцијалан. Нека је кинетичка енергија $K(p) = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$, а укупна енергија $H(q,p,t) = U(q) + K(p) = U(q) + \frac{p^2}{2m}$. Означимо са $\frac{\partial H}{\partial q} = (\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n})$ и $\frac{\partial H}{\partial p} = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n})$. Решавањем Хамилтонове једначине налазимо $X_H = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q})$. Сада су једначине Хамилтоновог тока:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

Из ових једначина добијамо $m\ddot{q} = F$ што је Други Њутнов закон.

Коресподенција између Хамилтонијана и њима генерисаних вектроских поља није једнозначна. Наиме, знајући Хамилтоново векторско поље, ми можемо да одредимо $dH_t$ и обрнуто, па два Хамилтонијана $H_t^1$ и $H_t^2$ одређују исто Хамилтоново векторско поље ако и само ако је $H_t^1 - H_t^2 = c(t)$ где је $c$ функција која зависи само од времена. У случају отворене многострукости $M$ Хамилтонијан је идентички једнак 0 изван компактна $K$, па је због тога кореспонденција између векторског поља и Хамилтонијана једнозначна. У случају затворене многострукости $M$ овај проблем превазилазимо задајући додатни услов на Хамилтонијан. Наиме, тражимо да за Хамилтонијан $H_t$ важи:

$$\int_M H_t \cdot \omega^{\wedge n} = 0 \text{ за свако } t \in I.$$

Класу Хамилтонијана који задовољавају овај услов називамо нормализованим. Скуп нормализованих Хамилтонијана који не зависе од времена ћемо означавати са $\mathcal{H}$.

**Лема 3.3.** Хамилтонови дифеоморфизми су симплектоморфизми.

**Доказ.** Означимо са $\phi_t$ Хамилтонов ток за Хамилтонијан $H_t$. Према Картановој формули важи:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t^*\omega = \phi_t^*(d(i_{X_{H_t}}(\omega)) + i_{X_{H_t}}(d\omega)) = \phi_t^*(d(dH_t)) = 0,$$

па је $\phi_t^*\omega = \phi_0^*\omega = \omega$. □

Наведена лема нам гарантује да симплектоморхизама има барем колико и до на константу различитих функција са компактним носачем на $M$. За симплектоморфизме је јасно да формирају групу у односну на композицију зато што их можемо описати као пресликавања која чувају симплектичку форму. Хамилтонови дифеоморфизми немају сличан опис, па није одмах јасно да ли и они формирају групу. Испоставља се да формирају што ћемо сада и доказати.

Следећа лема се изводи директно:

**Лема 3.4.** За симплектоморфизам $\phi : M \to M$ и глатку функцију $F : M \to \mathbb{R}$ важи

$$X_{F\circ\phi^{-1}} = \phi_* X_F. \quad \square$$

**Последица 3.2.** Нека су $f_t$ и $g_t$, $t \in I = [0,1]$ Хамилтонови дифеоморфизми генерисани Хамилтонијанима $F_t$ и $G_t$. Тада је $h_t = f_t \circ g_t$, $t \in I$ пут Хамилтонових дифеоморфизама генерисан Хамилтонијаном $H_t = F_t + G_t \circ f_t^{-1}$.

**Доказ.** Из дефиниције је

$$\frac{d}{dt} f_t(x) = X_{F_t}(f_t(x)),\ \frac{d}{dt} g_t(x) = X_{G_t}(g_t(x))$$

па применом Леме 3.4 рачунамо:

$$\frac{d}{dt} h_t(x) = \frac{d}{dt} f_t \circ g_t(x) = X_{F_t}(f_t(g_t(x)) + (f_t)_*(X_{G_t}(g_t(x)) =$$

$$= X_{F_t}(f_t(g_t(x)) + X_{G_t \circ f_t^{-1}}(f_t(g_t(x)) = X_{H_t}(h_t(x))$$

па тврђење следи. □

Доказана лема представља формулу за Хамилтонијан композиције дифеоморфизама и суштински доказује да је $\mathrm{Ham}(M)$ група. Заиста, из саме леме следи затвореност $\mathrm{Ham}(M)$ за композиције, а помоћу исте леме лако доказујемо и да је $f_t^{-1}$ генерисан са $-F_t \circ f_t$, па је $\mathrm{Ham}(M)$ затворен и за узимање инверза. Из наведеног директно следи следећа теорема:

**Теорема 3.2.** Хамилтонови дифеоморфизми чине групу у односу на композицију. $\square$

Према дефиницији, за $f \in \mathrm{Ham}(M)$, постоји пут $f_t$ такав да је $f_0 = id$, а $f_1 = f$ генерисан Хамилтонијаном. Према Бањагиној теореми ([11]) важи и обрат.

**Теорема 3.3.** Сваки гладак пут $f_t$ у $\mathrm{Ham}(M)$ такав да је $f_0 = id$ је генерисан неким (нормализованим) Хамилтонијаном. $\square$

Андреас Флор је у [21], [22], [23] развио бесконачо димензиону верзију Морсове хомологије коју данас зовемо Флоровом хомологијом да би доказао Арнолдову хипотезу. Флорова хомологија ће бити описана у четвртој глави. Сада наводимо једну од формулација Арнолдове хипотезе.[9]

**Дефиниција 3.5.** Периодичну орбиту $\gamma$ Хамилтоновог дифеоморфизма $H$ периода 1 зовемо *недегенерисаном* уколико важи

$$\det(\mathrm{id} - d\phi_1^H(\gamma(0))) \neq 0,$$

где је $\phi_t^H$ Хамилтонових ток генерисан са $H$. За Хамилтонијан кажемо да испуњава *услов негенерисаности* или да је *недегенерисан*, ако је свака његова периодична орбита периода 1 недегенерисана.

**Теорема 3.4. (Арнолдова хипотеза)** Нека је $(M, \omega)$ компактна симплектичка многострукости и $H_t = H_{t+1} : M \to \mathbb{R}$ гладак недегенерисан Хамилтонијан који зависи од времена. Означимо број Хамилтонових периодичих орбита периода 1 са $n$. Тада је

$$n \geq \sum_{i=0}^{2n} \mathrm{dim} H_i(M, \mathbb{Q})$$

где је $H_i(M, \mathbb{Q})$ сингуларна хомологија са коефицијентима у $\mathbb{Q}$. $\square$

Ограничимо се сада на симплектичку многострукост $T^*M$ и Хамилтонијан $H$

[9] Оригинална формулација коју је дао Арнолд у [9] је била другачија и односила се на пресеке Лагранжевих подмногострукости.

на њој. За глатку криву $\gamma : [0, 1] \to T^*M$ дефинишемо *функционал дејства*

$$\mathcal{A}_H : \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}_H(\gamma) = \int\limits_0^1 \gamma^*\lambda - H_t(\gamma(t))dt$$

где је $\mathcal{P}$ простор путева у $T^*M$, а $\lambda$ Лиувилова форма. Нека је $\xi_t \in T_\gamma\mathcal{P}$ векторско поље дуж $\gamma$ и нека је $\gamma_s$ варијација криве $\gamma$, таква да је $\gamma_0 = \gamma$ и $\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}|_{s=0} = \xi_t$. Сада је

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi_t) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \mathcal{A}_H(\gamma_s) =$$

$$= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \int\limits_0^1 \gamma_s^*\lambda - H_t(\gamma_s(t))dt = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\gamma_s^*\lambda) - dH_t(\xi_t)dt.$$

Према Картановој формули је

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (\gamma_s^*\lambda) = \gamma_0^*(i_{\xi_t}d\lambda + d(i_{\xi_t}\lambda)) = -\omega(\xi_t, \dot{\gamma}(t) + \gamma(d(i_{\xi_t}\lambda)),$$

па из Стоксове теореме и $dH_t(\xi_t) = \omega(X_H, \xi_t)$ имамо

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = -\int\limits_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt + \lambda(\gamma(1))(\xi) - \lambda(\gamma(0))(\xi). \tag{3.1}$$

Уколико уместо простора свих путева $\mathcal{P}$ посматрамо простор петљи $\Lambda_0$ или простор путева $\mathcal{P}_0$ који почињу и завршавају на $0_M$ имаћемо[10]

$$\lambda(\gamma(1))(\xi) = \lambda(\gamma(0))(\xi),$$

па ће на $\mathcal{P}_0$ и $\Lambda$ важити

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = -\int\limits_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt.$$

Како је $\xi$ произвољна варијација то $d\mathcal{A}_H = 0$ ако и само ако $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$, односно критичне тачке $\mathcal{A}_H$ су Хамилтонове петље у случају $\Lambda$, односно Хамилтонови путеви који почињу и завршавају на $0_M$ у случају $\mathcal{P}_0$. Из тог разлога функционал дејства можемо да користимо као детектор Хамилтонових трајекторија.[11]

[10] $\lambda_{0_M} \equiv 0$

[11] То ће нам бити важно у разматрањима везаним за Флорову хомологију.

$\mathcal{A}_H$ се може дефинисати на простору контрактибилних петљи $\Lambda$ на произвољној симплектичкој многострукости (на којој не постоји $\lambda$) ако је испуњен услов $\pi_2(M) = 0$. Заиста, према Стоксовој теореми у $T^*M$ важи

$$\int_0^1 \gamma^*\lambda = -\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega$$

за произвољно пресликавање диска $u : \mathbb{D}^2 \to T^*M$, $u|_{\partial\mathbb{D}^2} = \gamma$. Због тога на $\lambda$ можемо дефинисати

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = -\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega - \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt$$

где је $u$ произвољно пресликавање диска $\mathbb{D}^2$ које попуњава $\gamma$. $u$ ће постојати јер $\gamma \in \Lambda$, док из $\pi_2(M) = 0$ и $d\omega = 0$ закључујемо да $\int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega$ неће зависити[12] од избора $u$. Узимајући варијацију $u_s$ сличним рачуном као и у случају $T^*M$ закључујемо да важи (3.1), па су критичне тачке у овом случају $\mathcal{A}_H$ контрактибилне Хамилтонове петље у $M$.

Следећа лема се изводи директним рачуном уз помоћ Картанове формуле.

**Лема 3.5.** Ако је $L \subset T^*M$ тачна Лагранжева подмнонгострукост и $f$ Хамилтонов дифеоморфизам, онда је и $f(L)$ тачна Лагранжева многострукост. Специјално $f(0_M)$ је тачна Лагранжева подмногострукост. □

Наведена лема указује на то да постоји веза између тачних Лагранжевих подмногострукости у $T^*M$ и Хамилтонових дифеоморфизама. Није познато да ли важи обрат ове теореме, то јест да ли је свака тачна Лагранжева подмногострукост добијена као $f(0_M)$ за неки Хамилтонов дифеоморфизам $f$. Ово питање је једна од најпознатијих нерешених хипотеза у симплектичкој геометрији.

Једноставан пример тачне Лагранжеве подмногострукости је график диференцијала функције (Пример 3.4). Хамилтонове деформације нултог сечења су на неки начин уопштење овог примера. Да бисмо то показали посматрајмо

[12] Стоксова теорема примењена на хомотопију $H$ између произвољног $h : \mathbb{S}^2 \to M$ и *const* даје $\int_{\mathbb{S}^2} h^*\omega = 0$. Даље узимамо $h = u_1 \# u_2$ за два различита $u$.

простор

$$\mathcal{E} = \{\gamma : [0,1] \to T^*M | \gamma(0) \in 0_M\}$$

свих путева који почињу на $0_M$. Простор $\mathcal{E}$ је бесконачно-димензионо раслојење над $M$ са пројекцијом

$$\Pi : \mathcal{E} \to M,\ \Pi(\gamma) = \pi(\gamma(1))$$

за канонску пројекцију $\pi : T^*M \to M$. Посматрајмо $\mathcal{A}_H$ као функцију на $\mathcal{E}$. Вертикални извод $D\mathcal{A}_H$ је извод рестрикције $\mathcal{A}_H$ на фибру $\Pi^{-1}(p)$ раслојења $\mathcal{E}$, односно $D\mathcal{A}_H$ је $d\mathcal{A}_H$ при чему $\mathcal{A}_H$ посматрамо на поростору путева који почињу на $0_M$, а завршавају на $\pi^{-1}(p)$. Како је $\lambda|_{\pi^{-1}(p)} \equiv 0$ то је $D\mathcal{A}_H$ ако и само као је $\gamma$ Хамилтонов. Посматрајмо даље простор свих Хамилтонових путева који почињу на $0_M$

$$\Sigma_{\mathcal{A}_H} = \{\gamma \in \mathcal{E} \mid D\mathcal{A}_H = 0\}.$$

За $\gamma \in \Sigma_{\mathcal{A}_H}$ обичан диференцијал $d\mathcal{A}_H$ има само хоризонталну компоненту, то јест

$$\gamma \in \Sigma_{\mathcal{A}_H} \Rightarrow d\mathcal{A}_H(\gamma) = \lambda(\gamma(1)).$$

Посматрајмо пресликавање

$$i_{\mathcal{A}_H} : \Sigma_{\mathcal{A}_H} \to T^*\mathcal{E},\ \gamma \to d\mathcal{A}_H(\gamma).$$

Како је за $\gamma \in \Sigma_{\mathcal{A}_H}$, $D\mathcal{A}_H = 0$ то за $\xi^1, \xi^2 \in T_\gamma\mathcal{E}$ такве да $\Pi_*(\gamma)(\xi^1) = \Pi_*(\gamma)(\xi^2)$ важи $d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi^1 = d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi^2$. Из тог разлога можемо дефинисати

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)v = d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi,\ \text{за } v \in TM,\ v = \Pi_*(\xi),$$

односно можемо сматрати да

$$i_{\mathcal{A}_H} : \Sigma_{\mathcal{A}_H} \to T^*M.$$

Како је $d\mathcal{A}_H(\gamma) = \lambda(\gamma(1))$ и по дефиницији $\lambda(\gamma(1)) = \gamma(1) \circ \pi_*$ наша идентификација даје

$$i_{\mathcal{A}_H} : \Sigma_{\mathcal{A}_H} \to T^*M,\ i_{\mathcal{A}_H}(\gamma) = \gamma(1).$$

Како су елементи $\Sigma_{\mathcal{A}_H}$ Хамилтонови путеви који почињу на $0_M$ то је $i_{\mathcal{A}_H}(\Sigma_{\mathcal{A}_H}) = \phi_1^H(0_M)$ где је $\phi_t^H$ Хамилтонов ток генерисан са $H$.

На овај начин смо произвољну Хамилтонову деформацију нултог сечења представили као слику диференцијала неке функције само је овај пут та функција била дефинисана на (бесконачно-димензионом) раслојењу $\mathcal{E}$.

## 3.4 Хоферова геометрија

За даља разматрања ће нам бити корисно да посматрамо $\mathrm{Ham}(M)$ као Лијеву групу. За то ће нам послужити нека општа разматрања везана за Лијеве групе.

Нека је $G$ Лијева група и $\mathfrak{g}$ њена Лијева алгебра коју идентификујемо са тангентним простором у неутралу $\mathfrak{g} = T_eG$. На $G$ можемо дефинисати десну и леву транслацију, као и коњуговања $R_f$, $L_f$ и $\mathrm{ad}_f = R_{f^{-1}} \circ L_f$ са

$$R_f(g) = gf,\ L_f(g) = fg,\ \mathrm{ad}_f(g) = fgf^{-1}.$$

$R_f$ и $L_f$ су дифеоморфизми са инверзним дифеоморфизмима $R_{f^{-1}}$ и $L_{f^{-1}}$, па и пресликавања $(R_f)_*$ и $(L_f)_*$ индукују изоморфизме тангентних простора. Према формули за извод композиције је $(\mathrm{ad}_f)_* = (R_{f^{-1}})_*(L_f)_*$, па можемо дефинисати дејство коњуговањем на $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}_f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},\ \mathrm{Ad}_f(\xi) = (\mathrm{ad}_f)_*(\xi).$$

**Дефиниција 3.6.** *Финслерова метрика* на глаткој многострукости $M$ је глатка фамилија норми на сваком од тангентних простора на $M$ (уколико ове норме долазе од скаларног производа говоримо о Римановој метрици).

Да бисмо задали Финслерову метрику на $G$ довољно је да задамо норму $\|\cdot\|$ на $\mathfrak{g}$ и проширимо је на цело $TG$ помоћу десних транслација са:

$$\|\xi_f\|_f = \|(R_{f^{-1}})_*(\xi_f)\|_e,$$

односно помоћу левих транслација са

$$\|\xi_f\|_f = \|(L_{f^{-1}})_*(\xi_f)\|_e.$$

Уколико још желимо и да проширење не зависи од тога да ли смо се одлучили за леве или десне транслације потребно је да важи:

$$\|(R_{f^{-1}})_*\xi_f\|_e = \|(L_{f^{-1}})_*(\xi_f)\|_e \text{ за } \forall \xi_f \in T_fG,$$

односно ако $\xi_f = (L_f)_*(v)$, треба да важи:

$$\|(R_{f^{-1}})_*(L_f)_*(v)\|_e = \|v\|_e \text{ за } \forall v \in T_eG = \mathfrak{g}.$$

Како $(R_{f^{-1}})_*(L_f)_* = (R_{f^{-1}} \circ L_f)_* = (\mathrm{ad})_*$ то претходни услов постаје

$$\|\mathrm{Ad}_f(v)\|_e = \|v\|_e$$

за свако $f \in G$ и свако $v \in \mathfrak{g}$.

На овај начин избором норме на $\mathfrak{g}$ која је инваријантна у односу на дејство конјуговањем можемо задати структуру Финслерове многострукости на Лијевој групи $G$ на природан начин (не нарушавајући симетрију избором левих или десних транслација). Финслерова метрика нам даље омогућава да дефинишемо дужину кривих у $G$ као

$$L(f_t) = \int\limits_0^1 \|\dot{f}_t\| dt.$$

Сада на $G$ можемо дефинисати псеудо-метрику (овај пут у смислу растојања, а не Финслерову или Риманову метрику) са:

$$d : G \times G \to \mathbb{R},\ d(g,h) = \inf\{L(f_t) | f_0 = g,\ f_1 = h\}$$

при чему се инфимум узима по свим глатким путевима који спајају $g$ и $h$. Лако се проверава да $d$ задовољава аксиоме псеудо-метрике:

- $d(f,f) \geq 0$;
- $d(f,g) = d(g,f)$;
- $d(f,g) + d(g,h) \geq d(f,h)$.

Из начина на који смо дефинисали Финслерову метрику тако да буде инваријантна у односу на транслације следи да $d$ задовољава додатно својство биинваријантности:

- $d(hf,hg) = d(fh,gh) = d(f,g)$.

Псеудо-метрику са овим додатним својством зовемо биинваријантном псеудометриком. Уколико је још и $d(f,g) > 0$ за сваке две различите тачке $f, g \in G$, онда је $d$ биинваријантна метрика.

Вратимо се сада на групу $\mathrm{Ham}(M)$. Лијева алгебра групе $\mathrm{Ham}(M)$ је тангентни простор у $id$, односно простор свих тангентних вектора у $t = 0$ на глатке криве $f_t \in \mathrm{Ham}(M)$ такве да је $f_0 = id$. Диференцирањем $\frac{d}{dt}|_{t=0} f_t(x) = \xi(x)$ налазимо да Лијеву алгебру групе $\mathrm{Ham}(M)$ можемо поистоветити са скупом Хамилтонових векторских поља генерисаних аутономним Хамилтонијанима. Заиста, ако је $F(x,t)$ Хамилтонијан који генерише $f_t$ онда је векторско поље $\xi$ генерисано Хамилтонијаном аутономним $F_0(x) = F(x, 0)$. Хамилтонова векторска поља генерисана аутономним Хамилтонијаном су у бијекцији са $\mathcal{H}$, па Лијеву алгебру можемо идентификовати са $\mathcal{H}$.

Нека је $G \in \mathcal{H}$ тангентан у $t = 0$ на $g_t \in \mathrm{Ham}(M)$, $g_0 = id$ и $f \in \mathrm{Ham}(M)$. На Лијевој алгебри групе $\mathrm{Ham}(M)$ дејство коњуговањем је дато са:

$$\mathrm{Ad}_f(G) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f g_t f^{-1} = G \circ f^{-1}$$

при чему последња једнакост важи због Леме 3.4.

Дакле, да бисмо дефинисали биинваријантну метрику на $\mathrm{Ham}(M)$ довољно је да нађемо норму на $\mathcal{H} \subset C^\infty(M)$ која је инаваријантна у односу на репараметризације, односно која је независна од избора координата на $M$. Постоји пуно природних кандидата за овакву норму. Неки од њих су $L^p$ норме дате са:

$$\|F\|_p = \Big( \int\limits_M |F|^p \omega^{\wedge n} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

за $1 \leq p < \infty$, односно

$$\|F\|_\infty = \max F - \min F$$

за $p = \infty$.

Биинваријантна псеудо-метрика која настаје од ових норми за $1 \leq p < \infty$ ће бити идентички једнака нули ([20]). С друге стране, у случају $p = \infty$ добијена псеудо-метрика ће бити недегенерисана, односно биће права метрика. Овако конструисану биинваријантну метрику зовемо *Хоферовом метриком* на $\mathrm{Ham}(M)$ према Хелмуту Хоферу који је први пут доказао њену недегенерисаност за случај $M = \mathbb{R}^{2n}$ ([27]). Хоферова метрика је један од важних предмета изучавања унутар симплектичке топологије. Она поседује необична својства која су у контрасту са биинваријантним метрикама на коначно димензионим Лијевим групама, па је зато можемо сматрати чисто бесконачнодимензионим објектом (погледати прву главу у [47]). Иако је прошло 25 година од открића Хоферове метрике, нека основна питања везана за ову метрику су и даље неразрешена. На пример, није познато да ли је дијаметар групе $\mathrm{Ham}(M)$ у односу на Хоферову метрику бесконачан за општу симплектичку многострукост $M$. Познати докази чињенице да је Хоферова метрика недегенерисана су веома нетривијални (чак и у случају $M = \mathbb{R}^{2n}$).

Напоменимо и то да је Хоферова метрика у одређеном смислу јединствена биинваријантна метрика добијена од норме на Лијевој алгебри. О томе говори следећа теорема коју су доказали Буховски и Островер у [17].

**Теорема 3.5.** Нека је $M$ затворена симплектичка многострукост и $\|\cdot\|'$ норма на $\mathcal{H}$ непрекидна у $C^\infty$ топологији и инваријантна у односу на дејство коњуговањем. Тада је псеудо-метрика $d'$ на $\mathrm{Ham}(M)$ генерисана помоћу $\|\cdot\|'$ недегенерисана ако и само ако је норма $\|\cdot\|'$ еквивалентна са $L^\infty$ нормом $\|\cdot\|$, односно ако и само ако постоје константе $C, c > 0$ такве да важи:

$$c\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|. \quad \square$$

Хоферову метрику можемо да искористимо да бисмо дефинисали метрику на одређеном простору Лагранжевих подмногострукости. Наиме, нека је $(M, \omega)$ затворена симплектичка многострукост и $(M \times M, \Omega)$ симплектичка многострукост из Леме 3.2. Из исте леме знамо да је график симплектоморфизма Лагранжева подмногострукост у $M \times M$. Како су Хамилтонови дифеоморфизми симплектоморфизми (Лема 3.3) то је за $f \in \mathrm{Ham}(M)$ график $\Gamma(f) \subset M \times M$ Лагранжева подмногострукост. Нека је $\Delta \subset M \times M$ дијагонала и $L_t$, $t \in [0,1]$ пут Лагражевих подмногострукости. Кажемо да је пут $L_t$ тачан уколико постоји $\Psi : \Delta \times [0,1] \to M \times M$ такав да важи

$$\Psi(\Delta, t) = L_t, \;\; \Psi^*\Omega = dH_t \wedge dt$$

за неку глатку функцију $H : \Delta \times [0,1] \to \mathbb{R}$. Дефинишимо *Хоферову дужину* пута $\gamma(t) = L_t$ са

$$L(\gamma) = \int_0^1 (\max_x H(x,t) - \min_x H(x,t))dt.$$

Рачуном се проверава да је ова дефиниција добра. Нека је сада $\mathcal{L}(M)$ простор свих Лагранжевих подмногострукости од $M \times M$ које се могу спојити са $\Delta$ тачним путем. Може се показати да је сваки гладак пут у $\mathcal{L}(M)$ тачан (аргументи су слични као за путеве Хамилтонових дифеоморфизама, видети [11]). Дефинишемо растојање на $\mathcal{L}(M)$ са

$$\tilde{d}(L_0, L_1) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(0) = L_0,\ \gamma(1) = L_1,\ \gamma \text{ -тачан}\}.$$

Постоји природно улагање

$$\mathrm{Ham}(M) \to \mathcal{L}(M),\ f \to \Gamma(f).$$

Како је за Хамилтонијан $H$ и њиме дефинисан Хамилтонов ток $\phi_t^H$ пут

$$L_t = (x, \phi_t^H(x)),\ L_0 = \Delta,\ L_1 = \Gamma(\phi_1^H)$$

тачан, то ће важити

$$d(f, g) \geq \tilde{d}(\Gamma(f), \Gamma(g))$$

за $f, q \in \mathrm{Ham}(M)$. Островер је у [44] доказао да ће у случају $\pi_2(M) = 0$ ова неједнакост бити строга. Наиме он је доказао следећу теорему.

**Теорема 3.6.** Нека је $(M, \omega)$ затворена симплектичка многострукост за коју важи $\pi_2(M) = 0$. Тада постоји пут $\phi_t \in \mathrm{Ham}(M)$, $t \in [0, +\infty)$ такав да је

$$\widetilde{d}(\Delta, \Gamma(\phi_t)) = const,$$

док важи

$$d(id, \phi_t) \to +\infty,\ \text{када}\ t \to +\infty. \quad \square$$

Из претходне теореме специјално следи да је дијаметар групе $\mathrm{Ham}(M)$ бесконачан када је $\pi_2(M) = 0$.

## 3.5 Генеришуће функције и Витербоове инваријанте

У одељку 3.3. смо видели да Хамилтонову деформацију $0_M$ можемо добити као слику диференцијала $d\mathcal{A}_H$. При том је $\mathcal{A}_H$ била функција дефинисана на бесконачно-димензионом раслојењу. Сада спроводимо исту конструкцију у коначно димензионом случају за произвољно раслојење.

**Дефиниција 3.7.** Лагранжева подмногострукост $L \subset T^*M$ је задата *генеришућом функцијом* $S$, ако постоји векторско раслојење $E$ над базом $M$ и функција $S : E \to \mathbb{R}$ таква да је скуп

$$\Sigma_S = \{e \in E | DS(e) = 0\}$$

подмногострукост у E, а пресликавање

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M,\ i_S(e) = dS(e)$$

улагање такво да је $L = i_S(\Sigma_S)$. $D$ означава вертикални извод при чему користимо исте идентификације као у случају $\mathcal{A}_H$.

Уколико је $L$ Лагранжева подмногострукости која може да се представи генеришућом функцијом $S$, онда из наведене дефиниције одмах следи следећа лема.

**Лема 3.6.** Скупови $\mathrm{Crit}_*(S)$ и $L \cap 0_M$ су у бијекцији. □

**Дефиниција 3.8.** Имерзија $j : L \to T^*M$ се назива *Лагранжевом* ако је $j^*\omega = 0$, односно ако је $j^*\lambda$ затворена форма, а *тачном Лагранжевом* ако је $j^*\lambda$ тачна.

У случају функције $S$ на векторском раслојењу $E$ вертикални извод $DS$ можемо да посматрамо и као пресликавање $DS : E \to E^*$. Важи следећа теорема.

**Теорема 3.7.** Уколико је пресликавање

$$DS : E \to E^*$$

трансверзално на $0_M$, онда је $\Sigma_S \subset E$ подмногострукост, а

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M,\ i_S(e) = dS(e)$$

тачна Лагранжева имерзија. $\square$

Дефиниција Лагранжеве подмногострукости генерисане генеришућом функцијом очигледно зависи од избора $E$ и $S$. У одељку 3.3 смо видели да уколико је $L = \phi_1^H(0_M)$ за Хамилтонов дифеоморфизам $\phi_1^H$ генерисан са $H$, онда можемо да изаберемо канонско бесконачно-димензионо раслојење и функцију $\mathcal{A}_H$ на њему који ће генерисати $L$. У том смислу је функционал дејства канонска генеришућа функција у случају $L = \phi_1^H(0_M)$. Уколико је $L = \phi_1^H(0_M)$, $L$ можемо генерисати и коначно димензионом генеришућом функцијом која се „лепо понаша " у бесконачности.

**Дефиниција 3.9.** *Квадратна форма* на векторском раслојењу $E$ је глатко пресликавање $Q : E \to \mathbb{R}$ чија је рестрикција на сваку фибру раслојења квадратна форма. Функција $S : E \to \mathbb{R}$ је *квадратна у бесконачности* ако постоји компакт $K \subset E$ такав да је $S = Q$ изван $K$, за неку недегенерисану квадратну форму $Q$ на $E$.

**Теорема 3.8.** Нека је $M$ компактна многострукост и $L \subset T^*M$ Хамилтонова деформација $0_M$. Тада се $L$ може представити помоћу генеришуће функције $S$ квадратне у бесконачности на коначно димензионом векторском раслојењу $E$.
**Доказ.** Доказ се заснива на конструкцији $S$ као дискретне верзије $\mathcal{A}_H$ и може се наћи у [31]. $\square$

**Последица 3.3.** За Хамилтонијан $H$ на $T^*M$ и њиме генерисан Хамилтонов дифеоморфизам $\phi_1^H(0_M)$ је

$$\phi_1^H(0_M) \cap 0_M \neq \emptyset,$$

односно нулто сечење се не може раздвојити од себе Хамилтоновом деформацијом.

**Доказ.** Из претходне теореме следи да се $\phi_1^H(0_M)$ може генерисати функцијом $S : E \to \mathbb{R}$ квадратном у бесконачности, односно постоји компакт $K \subset E$ такав да је $S = Q$ изван $K$, за неку недегенерисану квадратну форму $Q$. Како је извод недегенерисане квадратне форме различит од 0 то је $\Sigma_S = \{e \in E | DS(e) = 0\}$ компактан, па рестрикција $S$ на $\Sigma_S$ има критичних тачака. Како су $\mathrm{Crit}_*(S)$ и

$L \cap 0_M$ у бијекцији тврђење следи. $\square$

На примеру цилиндра смо видели да тачна Лагранжева подмногострукост мора сећи нулто сечење. Ово ће важити и за компактне тачне Лагранжеве подмногострукости $L \subset T^*M$ над било којом затвореном многострукошћу $M$, а сада видимо да то важи и за Хамилтонове деформације што иде у прилог хипотези да је свака тачна Лагранжева подмногострукости у $T^*M$ Хамилтонова деформација од $0_M$.

Посматрајмо сада раслојење $E$ ранга $k$ над затвореном $M$ и нека је $S : E :\to \mathbb{R}$ генеришућа функција квадратна у бесконачности која генерише Лагранжеву подмногострукост $L \subset T^*M$.

**Дефиниција 3.10.** Нека је $u \in H^*_{dR}(M)$ кохомолошка класа и $\tau : H^k_{dR}(M) \to H^{s+k}_{c,dR}(E)$ Томов изоморфизам.[13] Нека је

$$j_\lambda : \{e \in E | S(e) < \lambda\} \to E$$

улагање. Број

$$c(u, S) := \inf\{\lambda \mid j^*_\lambda(\tau(u)) \neq 0\}$$

називамо *Витербоовом инваријантом* кохомолошке класе $u$. Витербоове инваријанте хомолошке класе $a$ дефинишемо помоћу дуалности са

$$c(a, S) = -c(PD(a), -S).$$

Витербо је своје инваријанте на описани начин дефинисао у [54]. У истом раду су доказана и својства која следе.

**Лема 3.7.** Нека су $S_1$ и $S_2$ две генеришуће функције квадратне у бесконачности које генеришу исту Лагранжеву подмногострукости $L \subset T^*M$. Тада постоји константа $c_0 \in \mathbb{R}$ таква да за све хомолошке класе $a$ и кохомолошке класе $u$ важи:

$$c(a, S_1) = c(a, S_2) + c_0, \; c(u, S_1) = c(u, S_2) + c_0. \quad \square$$

Из ове леме закључујемо да уколико је $L_S$ генерисана функцијом $S$ можемо говорити о $c(a, L_S)$ и $c(u, L_S)$ које ће бити дефинисане до на константу. Следећа теорема сумира својства Витербоових инваријанти.

[13] За дефиницију Томовог изоморфизма погледати [2]. Томов изоморфизам се може дефинисати и за кохомологију са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима у нешто другачијем облику него за де Рамову кохомологију.

**Теорема 3.9.** Нека су $E$, $M$ и $S$ као и до сада и нека $S$ генерише Лагранжеву подмногострукости $L_S \subset T^*M$. Тада важи:

1° $c(a, S)$ и $c(u, S)$ су критичне вредности С.

2° . Функције $c(a, \cdot) : S \to c(a, S)$ и $c(u, \cdot) : S \to c(u, S)$ су непрекидне у $C^0$ топологији.

3° Ако су $S_1 : E_1 \to \mathbb{R}$ и $S_2 : E_2 \to \mathbb{R}$ две генеришуће функције квадратне у бесконачности и

$$S_1 \# S_2 : E_1 \oplus E_2 \to \mathbb{R},\ S_1 \# S_2(\xi_1, \xi_2) = S_1(\xi_1) + S_2(\xi_2),$$

онда је

$$c(u \cup v, S_1 \# S_2) \geq c(u, S_1) + c(v, S_2)$$

за све $u, v \in H^*(M)$.

4° Ако је $M$ повезана и оријентисана, означимо са $\mu \in H_n(M)$ и $1 \in H_0(M)$ фундаменталну класу $M$ и класу тачке. Тада је

$$c(\mu, S) \geq c(1, S)$$

и $c(\mu, S) = c(1, S)$ ако и само ако је $L_S = 0_M$. $\square$

Витербоове инваријанте су у [36] дефинисане на језику Морсове теорије на начин који се може прилагодити за дефинисање спектралних инваријанти у Флоровој теорији о којима говоримо у следећем поглављу.

# 4 Спектралне инваријанте

Спектралне инваријанте можемо сматрати бесконачно-димензионом верзијом Витербоових инваријанти за канонску генеришућу функцију $\mathcal{A}_H$. Природан прелаз са једних на друге инваријанте је начињен у [38], [36], [37] и притом је доказано да се ове инваријанте поклапају уз извесну нормализацију. Да бисмо дефинисали спектралне инваријанте, потребно је да заснујемо бесконачно-димензиону симплектичку верзију Морсове хомологије, Флорову хомологију. У овом поглављу ћемо говорити о заснивању Флорове хомологије и њеној вези са Морсовом теоријом. Покушаћемо да илуструјемо дух Флорове теорије не излажући притом превише техничких детаља[14] (заинтересован читалац детаљно излагање Флорове теорије може наћи у [10]). На крају поглавља ћемо доказати нека својства спектралних инваријанти аналогна наведеним својствима Витербоових инваријанти и приказати како спектралне инваријанте можемо искористити да дефинишемо метрику сличну Хоферовој на простору Лагранжевих подмногострукости.

## 4.1 Псеудохоломорфне криве

У овом одељку ћемо описати неке технике и резултате које је Михаил Громов увео у свом револуционарном раду [26], а које је Андреас Флор касније искористио за дефинисање Флорове хомологије. Основна идеја рада је увођење холоморфних пресликавања у симплектички амбијент на природан начин.

**Дефиниција 4.1.** *Скоро комплексна структура* на многострукости $M$ је глатка фамилија пресликавања $J_p : T_pM \to T_pM$, $p \in M$ линеарних на сваком тангентном простору за коју важи $J_p \circ J_p = -id_{T_pM}$. Многострукост $M$ која има скоро комплексну структуру назива се *скоро комплексном многострукошћу.*

**Пример 4.1.** Комплексне многострукости су скоро комплексне многострукости. Скоро комплексна структура $J$ је дефинисана помоћу множења са $i$.

У комплексној анализи пресликавање зовемо *холоморфним* уколико је његов први извод линеаран над $\mathbb{C}$, односно ако комутира са множењем са $i$ (видети [4]). Тај опис користимо да дамо следећу дефиницију холоморфности за скоро комплексне многострукости.

[14] Излагање свих детаља Флорове теорије би по обиму далеко превазишло оквире мастер тезе.

**Дефиниција 4.2.** Пресликавање $f : M \to N$ скоро комплексних многострукости $(M, J_M)$ и $(N, J_N)$ зовемо *псеудо-холоморфним* или краће *холоморфним* уколико важи

$$df \circ J_N = J_M \circ df.$$

Уколико је многострукост $M$ симплектичка, онда је она и скоро комплексна многострукост. Међутим, у случају симплектичке многострукости симплектичка форма и скоро комплексна структура могу да буду у вези на следећи начин.

**Дефиниција 4.3.** Нека је $M$ симплектичка многострукост са симплектичком формом $\omega$ и $J$ скоро комплексна структура на $M$. Кажемо да је $J$ *сагласна* са $\omega$ уколико је са

$$g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$$

задата Риманова метрика.

Аргументима линеарне алгебре може се показати да важи следећа лема (видети [34]).

**Лема 4.1.** На свакој симплектичкој многострукости $(M, \omega)$ постоји скоро комплексна структура сагласна са $\omega$. $\square$

Простор скоро комплексних структура сагласних са $\omega$ означавамо са $\mathbb{J}_\omega$. Такође важи следеће нетривијално тврђење.

**Лема 4.2.** $\mathbb{J}_\omega$ је контрактибилна бесконачно-димензиона многострукост. $\square$

Нека је надаље $(M, \omega)$ симплектичка многострукост, а $\Sigma$ Риманова површ и $j$ канонска комплексна структура на њој (која долази од множења са $i$). За $u : \Sigma \to M$ важи

$$du = \frac{1}{2}(du - J \circ du \circ j) + \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j).$$

Уколико означимо $\overline{\partial}_J(u) = du + J \circ du \circ j$ имамо да је $du$ линеарно над $\mathbb{C}$, односно $u$ је холоморфно, ако и само ако важи $\overline{\partial}_J(u) = 0$. С друге стране $\overline{\partial}_J(u)$ је антилинеарно над $\mathbb{C}$, па уколико је $\overline{\partial}_J(u)(v) = 0$, онда је и $\overline{\partial}_J(u)(jv) = 0$. Из тог разлога, ако на $\Sigma$ постоје глобалне координате $(t,s)$, $s=it$, имамо да важи

$$\overline{\partial}_J(u)=0 \Leftrightarrow \overline{\partial}_J(u)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=0,$$

односно у проширеном облику

$$\frac{\partial u}{\partial t}+J\frac{\partial u}{\partial s}=0. \tag{4.1}$$

Оператор $\overline{\partial}_J$ зовемо Коши-Римановим оператором, а једначину (4.1) *Коши-Римановом једначином.*

Како су Риманове површи димензије 1 над $\mathbb{C}$ холоморфна пресликавања $u:\Sigma\to M$ зовемо *холоморфним кривама.*

**Дефиниција 4.4.** Нека $u:\Sigma\to M$ холоморфна крива. *Енергијом* криве $u$ зовемо вредност интеграла $\int\limits_\Sigma u^*\omega$ и означавамо са $E(u)$.

**Теорема 4.1.** Нека је $u:\Sigma\to M$ холоморфна крива на симплектичкој многострукости $(M,\omega)$, $J$ скоро комплексна структура на $M$ сагласна са $\omega$ и $g$ Риманова метрика на $\Sigma$. Тада важи

$$E(u)=\int\limits_\Sigma u^*\omega=\frac{1}{2}\int\limits_\Sigma \|du\|^2 d\sigma \tag{4.2}$$

где је $d\sigma$ форма запремина на $\Sigma$ једнака 1 на ортонормираној бази, а $\|du\|$ Хилберт-Шмитова норма[15] оператора $du$.

**Доказ.** Нека је $(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial y}=j\frac{\partial}{\partial x}$ ортонормирана база на $TU$, $U\subset\Sigma$ на коме имамо координате. Рачунамо

$$\int\limits_\Sigma u^*\omega=\int\limits_\Sigma \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),du\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),du\left(j\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)dxdy=\int\limits_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),Jdu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)dxdy=$$

[15] Због $\mathbb{C}$-линеарности пресликвања $u$ су вредности $|du(\frac{\partial}{\partial x})|$ исте за сваки јединични вектор $\frac{\partial}{\partial x}$, па је $\|du\|^2=2|du(\frac{\partial}{\partial x})|^2$ за било који јединични вектор $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$= \int\limits_{\Sigma} \left| du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|^2 dxdy.$$

Из овог рачуна и напомене у фусноти следи тврђење на $U$. Како дефиниција Хилберт-Шмитове норме не зависи од координата, тврђење добијамо помоћу разбијања јединице. $\square$

Формула (4.2) доводи у везу тополошке и аналитичке објекте. Наиме, по дефиницисчји је $E(u) \int\limits_{\Sigma} u^*\omega = \langle \omega, u_*[\Sigma]\rangle$, где је $\langle \omega, u_*[\Sigma]\rangle$ спаривање кохомолошке класе $\omega$ са фундаменталном класом површи $\Sigma$. С друге стране $\int\limits_{\Sigma} \|du\| d\sigma$ је аналитички објекат који учествује у дефиницији $W^{1,2}$-норме Собољева. Из тог разлога нам формула (4.2) пружа могућност да $W^{1,2}$-норму контролишемо тополошким условима. На пример, ако је $M$ компактна и $u_n : \Sigma \to M$ низ холоморфних пресликавања таквих да је $u_{n*}[\Sigma] = A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ константна хомолошка класа, $\|u_n\|$ ће бити униформно ограничено због компактности, а $\|du_n\|_2$ ће бити ограничено због формуле (4.2), па ће низ $u_n$ бити униформо ограничен у $W^{1,2}(\Sigma, M)$. Помоћу ових разматрања можемо уз контролу енергије постићи компактност. О томе говори Громовљева теорема компактности.

**Дефиниција 4.5.** *Сингуларна холоморфна крива* је формална коначна сума

$$u + \sum_k m_k v_k$$

где су $m_k$ природни бројеви, а

$$u : \Sigma \to M,\ v_k : \mathbb{C}P^1 \to M$$

холоморфне криве.

**Теорема 4.2. (Громовљева теорема компактности)** Нека је

$$u_n : \Sigma \to M$$

низ холоморфних пресликавања таквих да је

$$u_{n*}[\Sigma] = A \in H_2(M, \mathbb{Z}).$$

Тада постоји сингуларна крива $u_\infty = u_0 + \sum_k m_k v_k$ таква да за неки подниз низа $u_n$ (означен опет са $u_n$) важи:

1° Ван коначног скупа тачака $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$$

у $C^1$ топологији.

2° $u_{0*}[\Sigma] + \sum_k m_k v_k[\mathbb{C}P^1] = A$.

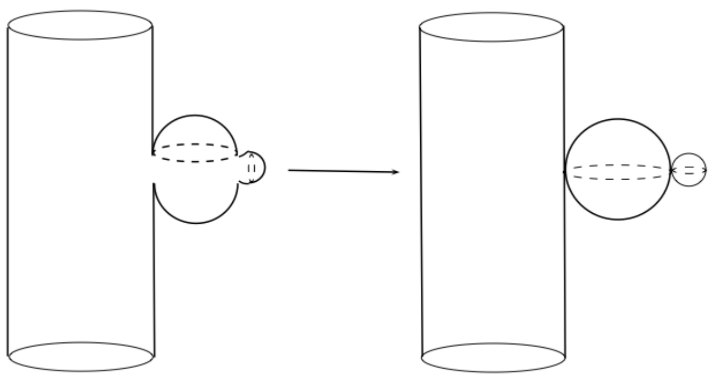
3° $E(u_\infty) = E(u_0) + \sum_k m_k E(v_k) = \lim_{n\to\infty} E(u_n)$.

4° Скупови $\mathrm{Im}(u_\infty)$ конвергирају ка $\mathrm{Im}(u_\infty)$ у Хаусдорфовој топологији.[16]

5° $\mathrm{Im}(u_\infty)$ је повезан и кроз сваку од тачака $z_k$ пролази нека сфера $v_s$. □

Доказ ове теореме је технички веома сложен, па га нећемо изложити. Доказ се може наћи у [26] или [35].

Холоморфне сфере $v_s$ зовемо *мехуровима*, а одговарајућу конвергенцију *конвергенцијом до на мехурове.* Мехурови не морају пролазити ни кроз једну од тачака $z_k$, нити морају уопште да додирују $u_\infty(\Sigma)$. Може доћи до појаве мехурова на мехуровима (слика 8). Појаву мехурова можемо сматрати опструкцијом за компактност.



**Слика 8:** Појава мехурова код низа псеудохоломорфних кривих

[16]За дефиницију погледати [26].

Теорема компактности важи и у многим другим облицима. На пример теорема ће важити уколико енергију контролишемо и другачијим условима од ових наведених у теореми или ако посматрамо извесне модификације једначине (4.1) (овде конкретно мислимо на пертурбовану Коши-Риманову једначину коју ћемо разматрати у следћем одељку). Теорема компактности ће у сличном облику важити и за Риманове површи са границом. Можемо теорему формулисати за низ холоморфних пресликавања $u_n : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (M, L)$ где је $L \subset M$ Лагранжева подмногострукост (то јест граница површи се слика на $L$). Важна разлика у односу на случај без границе је та што се мехурови сада могу појавити као холоморфне сфере $v_k : \mathbb{C}P^1 \to M$ (као у случају без границе), али и као холоморфна пресликавања $w_k : (\mathbb{D}^2, \partial\mathbb{D}^2) \to (M, L)$ диска са границом на $L$.

## 4.2 Основе Флорове теорије

У овом одељку ћемо приказати конструкције неколико различитих верзија Флорове хомологије и производа на некима од њих. Две за нас најважније, верзије Флорове хомологије ће бити Хамилтонова Флорова хомологија и Лагранжева Флорова хомологија којима је и посвећен већи део овог одељка. Као и у случају Морсове хомологије, конструисаћемо Флорову хомологију над $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима. За конструкцију Флорове хомологије над $\mathbb{Z}$, неопходна је егзистенција кохерентне оријентације о којој ми нећемо говорити. За разматрања везана за кохерентну оријентацију у Хамилтоновом случају видети [25], а за Лагранжев случај видети [41].

### 4.2.1 Класична Морсова теорија као теорија холоморфних кривих



Холоморфне криве су у ускоj вези са Морсовом теоријом. Наиме, градијентне трајекторије на затвореној многострукости $M$ су у вези са холоморфним тракама у симплектичкој многострукости $T^*M$ са симплектичком формом дефинисаном као у Примеру 3.3 (под холоморфним тракама подразумевамо холоморфна пресликавања $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M$). Да бисмо до те везе дошли, уочимо скоро комплексну труктуру $J_0$ на $T^*M$ такву да важи:

1) $J_0$ је компатибилна са симплектичком формом $\omega$ на $T^*M$.

2) $J_0$ слика вертикалне тангентне векторе у хоризонталне у односу на Леви - Чивита повезаност[17] одређену метриком $g$.

3) На нултом сечењу $0_M \subset T^*M$ сваком вектору $X \in T_qM$ $J$ придружује котангентни вектор $X_J$ такав да је $X_J(\xi) = g(\xi, X_J)$ за свако $\xi \in T_qM$, уз очигледну идентификацију.

Посматрајмо Морсову функцију $f : M \to \mathbb{R}$ и трајекторију

$$\gamma : \mathbb{R} \to M,\ \frac{d}{dt}\gamma = -\nabla_g f(\gamma),\ \gamma(-\infty) = x,\ \gamma(+\infty) = y \tag{4.3}$$

[17] За дефиницију Леви - Чивита повезаности видети [1].

за метрику $g = \omega(\cdot, J_0\cdot)$. Дефинишимо Хамилтонијан $H : T^*M \to \mathbb{R}$ проширивањем функције $-f$ константно по фибрама, односно $H := -f \circ \pi$, где је $\pi$ пројекција на $T^*M$. Означимо са $\phi_t^H$ Хамилтонов ток за $H$ и са $\Gamma(df) \subset T^*M$ график функције $df$. Директним рачуном (на пример у Дарбуовој карти на $T^*M$) се проверава да је $\phi_1^H(0_M) = \Gamma(df)$. Даље имамо да је

$$dH(\xi) = -df(\pi_*\xi) = -g(\nabla_g f, \pi_*\xi) = -\omega(\pi_*\xi, J_0\nabla_g f)$$

као и

$$dH(\xi) = \omega(X_H, \xi) = \omega(\xi, -X_H),$$

па је

$$\omega(\xi, -X_H) = -\omega(\pi_*\xi, J_0\nabla_g f)$$

за произвољно векторско поље $\xi$ на $T^*M$. Из својства 3) скоро комплексне структуре $J_0$ имамо да је $\omega(\xi, J_0\nabla_g f) = \omega(\pi_*\xi, J_0\nabla_g f)$, односно $\omega(\xi, -X_H) = \omega(\xi, -J_0\nabla_g f)$, па из недегенерисаности $\omega$ следи

$$X_H = J_0\nabla_g f.$$

Дакле Хамилтоново кретање одговара транслацији по фибрама. Дефинишимо пресликавање

$$u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M,\ u(t,s) = \phi_s^H(\gamma(t)),\ t \in \mathbb{R},\ s \in [0,1]$$

добијено транслирањем градијентне трајекторије дуж фибри и фамилију скоро комплексних структура

$$J_s = -(\phi_s^H)_* \circ J_0 \circ (\phi_s^H)_*^{-1}.$$

Директан рачун даје

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\phi_s^H)_*\left(\frac{d\gamma}{dt}\right),\ \frac{\partial u}{\partial s} = X_H(\gamma(t)),$$

односно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J_s\frac{\partial u}{\partial s} = (\phi_s^H)_*\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) + J_s X_H(\gamma(t)) = (\phi_s^H)_*\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) - (\phi_s^H)_* \circ J_0 \circ (\phi_s^H)_*^{-1} X_H(\gamma(t)),$$

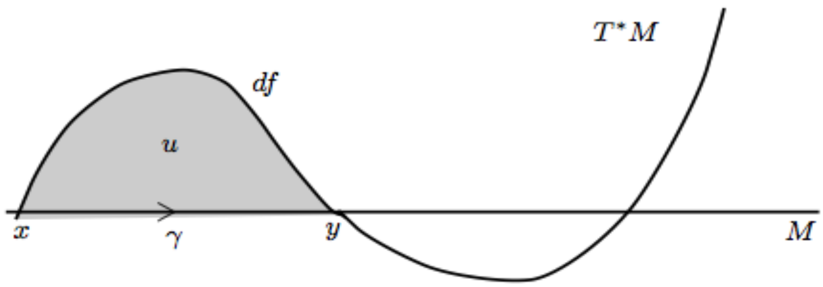
па како је $(\phi_s^H)_*^{-1} X_H = X_H$, то је

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} = (\phi_s^H)_* \left( \frac{d\gamma}{dt} - J_0 X_H \right).$$

Због $X_H = J_0 \nabla_g f$ имамо $\frac{d\gamma}{dt} - J_0 X_H = \frac{d\gamma}{dt} + \nabla_g f = 0$, па је и $\frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} = 0$, односно $u$ је холоморфно пресликавање у односу на неаутономну скоро комплексну стуктуру $J_s$. Дакле $u$ задовољава следећу парцијалну једначину (Коши-Риманову) са граничним условима:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \\ u(t,0) \in 0_M \\ u(t,1) \in \Gamma(df) = \phi_1^H(0_M) \\ u(-\infty, s) = x \\ u(+\infty, s) = y, \ x, y \in \mathrm{Crit}_*(f). \end{cases} \tag{4.4}$$

На овај начин смо градијентну трајекторију видели као траг који холоморфна трака оставља на $0_M = M$. Због $u(-\infty, s) = x$ и $u(+\infty, s) = y$ говоримо и о холоморфним дисковима (слика 11):




**Слика 11:** Холоморфни диск $u$

Важи и више, наиме сваки холоморфни диск се добија на овај начин. Уколико дефинишемо

$$\gamma(t,s) = (\phi_s^H)^{-1}(u(t,s)),$$

имамо да је

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (\phi_s^H)_*^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right), \ \frac{\partial \gamma}{\partial s} = (\phi_s^H)_*^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) - X_H(u),$$

па је

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} - J_0\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s} + X_H(\gamma)\right) = (\phi_s^H)_*^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - J_0(\phi_s^H)_*^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) =$$
$$(\phi_s^H)_*^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - (\phi_s^H)_* \circ J_0 \circ (\phi_s^H)_*^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)\right),$$

а како је $J_s = -(\phi_s^H)_* \circ J_0 \circ (\phi_s^H)_*^{-1}$, то имамо да је

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} - J_0\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s} + X_H(\gamma)\right) = (\phi_s^H)_*^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + J_s\frac{\partial u}{\partial s}\right) = 0$$

због холоморфности $u$. Важиће и $\frac{\partial\gamma}{\partial s} = 0$, односно $\gamma$ ће зависити само од $t$ и важиће $\gamma(t) = \gamma(t,0) = u(t,0) \in 0_M$ (видети [23]). Комбинацијом са горњом једначином добијамо

$$\frac{d\gamma}{dt} = J_0 X_H = -\nabla_g f,$$

па закључујемо да ће сваки $J_s$ холоморфни диск бити добијен управо као транслација градијенте трајекторије дуж фибри. На овај начин смо решавање обичне диференцијалне једначине (4.3) поистоветили са решавањем парцијалне диференцијалне једначине (4.4) и направили кореспонденцију између градијентних трајекторија и холоморфних трака (дискова). Обе једначине имају асимптотске услове конвергенције ка критичним тачкама, док (4.4) има и два гранична услова.

Као што смо видели у другој глави критичне тачке Морсове функције можемо узети за генераторе Морсове хомологије, а бројање градијентних трајекторија искористити за дефинисање граничног оператора $\partial$. Из тог разлога описана кореспонденција добија велику тежину. Пратећи дефиницију Морсове хомологије за генераторе хомологије можемо узети $\Gamma(df) \cap 0_M$, док гранични оператор дефинишемо као

$$\partial x = \sum_{\substack{y \\ \mathrm{ind}(x)-\mathrm{ind}(y)=1}} \tilde{n}(x,y)y,$$

где је $\tilde{n}(x,y)$ број холоморфних дискова између $x$ и $y$ односно број решења једначине (4.4). На овај начин добијену хомологију зовемо *Флоровом хомологијом.* Из описане конструкције је јасно да је Флорова хомологија у овом случају изоморфна Морсовој, односно сингуларној.

### 4.2.2 Флорова хомологија као Морсова хомологија функционала дејства

Конструисана Флорова хомологија је специјалан случај општије Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке и може послужити као мотивација за изучавање везе Морсове хомологије и холоморфних кривих. Сада дајемо још једну мотивацију за изучавање ове везе и дефинишемо Флорову хомологију на другачији начин.

Нека је $M$ затворена симплектичка многострукост са симплектичком формом $\omega$. Посматрајмо просторе контрактибилних петљи у $M$ и простор путева у $T^*M$ који почињу и завршавају на $0_M$ и означимо ове просторе са $\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$ редом. У одељку 3.3 смо видели да је $\mathcal{A}_H$ добро дефинисан у следћа два случаја:

1° за Хамилтонијан $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ уколико важи $\pi_2(M) = 0$ ;

2° за Хамилтонијан $H : T^*M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Надаље ћемо сматрати[18] да је $\pi_2(M) = 0$, да бисмо могли коректно да дефинишемо $\mathcal{A}_H$. Такође ћемо сматрати да је Хамилтонијан $H$ у разматрањима везаним за $\Lambda$ такав да важи $H_t = H_{t+1}$.

За $\mathcal{A}_H$ важи

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt.$$

Уведимо Риманову метрику на $\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$ са

$$g(\xi(s), \eta(s)) = \int_0^1 \omega(\xi(s), J_s\eta(s))ds$$

где су $\xi$ и $\eta$ векторска поља дуж петљи у $\Lambda$ односно путева у $\mathcal{P}_0$ која поистовећујемо са тангентним векторима из $T\Lambda$ и $T\mathcal{P}_0$. $J_s$, $s \in [0, 1]$ је глатка фамилија скоро комплексних структура, за коју још тражимо и $J_0 = J_1$ у случају простора $\Lambda$.

[18] Пун значај овог услова ће постати јасан приликом разматрања везаних за компактност простора холоморфних пресликавања.

За градијент $\nabla_{J_s}\mathcal{A}_H$ у односу на ову метрику ће важити

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)(\xi) = g_{J_s}(\xi, \nabla_{J_s}\mathcal{A}_H),$$

односно

$$-\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt = \int_0^1 \omega(\xi, J_s\nabla_{J_s}\mathcal{A}_H(\gamma))ds,$$

па како је $\xi$ произвољно то је

$$J_s\nabla_{J_s}\mathcal{A}_H(\gamma) = X_H(\gamma) - \frac{d\gamma}{ds},$$

односно

$$\nabla_{J_s}\mathcal{A}_H(\gamma) = J_s\left(\frac{d\gamma}{ds} - X_H(\gamma)\right).$$

Негативна градијентна једначина за $\mathcal{A}_H$ је

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla_{J_s}\mathcal{A}_H$$

за $u : \mathbb{R} \to \Lambda,\ \mathcal{P}_0$. Имајући у виду да су простори $\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$ већ простори кривих можемо сматрати[19] да $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M,\ t \in \mathbb{R},\ s \in [0,1]$ у случају простора $\Lambda$, односно $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M,\ t \in \mathbb{R},\ s \in [0,1]$ у случају простора $\mathcal{P}_0$. Сада негативна градијентна једначина добија облик

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J_s\frac{\partial u}{\partial s} - J_sX_H(u) = 0. \tag{4.5}$$

Добијену парцијалну једначину зовемо *пертурбованом Коши-Римановом једначином* или *Флоровом једначином*, а решење $u$ те једначине *пертурбованим холоморфним пресликавањем*.

Покушајмо сада да дефинишемо Морсову хомологију на просторима $\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$ за функцију $\mathcal{A}_H$ (коју надаље зовемо Флоровом хомологијом). Како је $d\mathcal{A}_H(\gamma) = 0$ ако и само ако је $\gamma$ Хамилтонов то ће критичне тачке $\mathcal{A}_H$ на $\Lambda$ бити периодичне Хамилтонове орбите, а на $\mathcal{P}_0$ Хамилтонови путеви који почињу и завршавају на $0_M$. Да би дефиниција била добра у случају Морсове хомологије смо тражили да функција чији негативни градијентни ток посматрамо буде

[19] Пресликавања $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ за која је $u(t,0) = u(t,1)$ посматрамо некада као пресликавања из $\mathbb{R} \times [0,1]$, а некада као пресликавања из $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

Морсова, односно да се добро понаша у околини критичних тачака. Овај услов се могао еквивалентно исказати на језику трансверзалности као $\Gamma(df) \pitchfork 0_{T^*M}$ (видети одељак 2.1). Услов који одговара овом услову и који ћемо захтевати у случају простора $\Lambda$ је услов недегенерисаности Хамилтонових петљи о коме смо говорили у оквиру дискусије везане за Арнолдову хипотезу (видети дефиницију пре Арнолдове хипотезе у одељку 3.3). У случају $\mathcal{P}_0$ критичне тачке $\mathcal{A}_H$ можемо поистоветити са $0_M \cap \phi_1^H(0_M)$ и услов који захтевамо као аналоган услову $\Gamma(df) \pitchfork 0_{T^*M}$ је $0_M \pitchfork \phi_1^H(0_M)$.

О Морсовој хомологији за некомпактне многострукости смо говорили у напомени на крају главе 2, то јест на крају одељка 2.5. Тада смо рекли да у некомпактном случају треба да посматрамо градијентне трајекторије са коначном енергијом и захтевали смо додатне услове који би обезбедили да се цела динамика одвија унутар компактног скупа. Конкретно ти услови су могли да буду да је изван неког компакта $K$, метрика еуклидска и Морсова функција квадратна. Слични услови се задају у случају Флорове хомологије на $\mathcal{P}_0$ због тога што је $T^*M$ некомпактна многострукост. Како $H$ има компактан носач треба још додати услов на $J_s$ који ће обезбедити да се $J_s$ изван неког компакта $K \supset 0_M$ на фибрама понаша као стандардна комплексна структура на $\mathbb{C}^n$. Сада ће изван $K$ због $H = 0$ Флорова једначина постати Коши-Риманова једначина у односну на $J_s$ (које се изван $K$ понаша као стандардна комплексна структура), па ће неконстантне холоморфне криве остајати унутар $K$ због принципа максимума (за све детаље погледати [19], за принцип максимума погледати [4]).

Даље, да бисмо конструисали Флорову хомологију за $\mathcal{A}_H$, потребно је да дефинишемо оператор $\partial$ и то као

$$\partial x = \sum_{\substack{y \\ \mu(x)-\mu(y)=1}} \tilde{n}(x,y)y$$

где је $\tilde{n}(x,y)$ број пертурбованих холоморфних пресликавања $u$, која задовољавају $u(-\infty,s) = x(s)$, $u(+\infty,s) = y(s)$. Број $\mu$ које учествује у изразу је *Конли-Цендеров индекс* у случају петљи, односно *Масловљев индекс* у случају путева. Индекс $\mu$ ће задавати градуацију у верзијама Флорове хомологије на $\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$ које овде описујемо.[20] За наша даља разматрања је довољно знати да се

[20]Генератори $k$-те ланчасте групе неће обавезно имати Конли-Цендеров, односно Масловљев индекс једнак $k$ већ њихов индекс може бити транслиран за неку констану. Не постоји универзална конвенција о томе за коју константу транслирамо $\mu$.

градуација може задати помоћу $\mu$, а за детаљно разматрање Конли-Цендеровог и Масловљевог индекса упућујемо читаоца на [49] и [50].

Опишимо сада неке од детаља конструкције Флорове хомологије. У оба случаја ($\Lambda$ и $\mathcal{P}_0$) се конструкција Флорове хомологије у великој мери изводи по аналогији са аналитичком конструкцијом Морсове хомологије описаном у одељку 2.6. Размотримо прво случај Флорове хомологије за простор контрактибилних петљи $\Lambda$ (све време подразумевамо $\pi_2(M) = 0$. Можемо дефинисати енергију решења Флорове једначине слично као у случају холоморфни кривих.

**Дефиниција 4.6.** Нека је $u$ решење једначине (4.5), за које је $u(t,0) = u(t,1)$. *Енергија* решења $u$ је

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial s} - X_H(u)\right\|^2\right)dtds.$$

Решења једначине (4.5) која ће улазити у конструкцију Флорове хомологије су она и само она која имају коначну енергију. О томе говори следећа теорема.

**Теорема 4.3.** Нека је $u$ решење једначине (4.5), за које је $u(t,0) = u(t,1)$. Тада су следећи услови еквивалентни.

$1^\circ$ $E(u) < \infty$.

$2^\circ$ Постоје Хамилтонове петље $x$ и $y$ такве да

$$\lim_{t\to-\infty} u(t,s) = x(s) \quad \lim_{t\to+\infty} u(t,s) = y(s)$$

као и $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ при чему су сви лимеси равномерни по $s$.

$3^\circ$ Постоје константе $\delta > 0$ и $c > 0$ такве да је

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right\| \le ce^{-\delta|s|}$$

за све $s$ и $t$.

**Доказ.** Погледати [51]. □

За оваква решења кажемо да спајају Хамилтонове петље $x$ и $y$. У другој глави смо извели формулу $E(\gamma) = F(p) - F(q)$ за градијенту трајекторију која спаја $p$ и $q$. Аналогну формулу у нашем случају даје следећа лема.

**Лема 4.3.** Нека је $u$ пертурбовани холоморфни цилиндар који спаја Хамилтонове петље $x$ и $y$. Тада важи:

$$E(u) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y).$$

**Доказ.** Одаберимо глатка пресликавања диска $\mathbb{D}^2$, $u_- : \mathbb{D}^2 \to M$ и $u_+ : \mathbb{D}^2 \to M$ таква да је $u_-|_{\partial \mathbb{D}^2} = x(s)$ и $u_+|_{\partial \mathbb{D}^2} = y(s)$. Узимајући повезану суму пресликавања добијамо пресликавање $u_- \# u \# u_+ : \mathbb{S}^2 \to M$, па како је $\pi_2(M) = 0$ то важи

$$\int\limits_{\mathbb{D}^2} u_+^* \omega - \int\limits_{\mathbb{D}^2} u_-^* \omega = \int\limits_{\mathbb{D}^2} u^* \omega,$$

односно

$$\mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y) = -\int\limits_{\mathbb{D}^2} u_-^* \omega - \int\limits_0^1 H_s(x(s)) ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{D}^2} u_+^* \omega + \int\limits_0^1 H_s(y(s)) ds = \int\limits_{\mathbb{D}^2} u^* \omega + \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} H_s(u(t,s)) ds,$$

па како је

$$\int\limits_{\mathbb{D}^2} u^* \omega = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s}\right) dt ds$$

и $dH_s(\cdot) = \omega(X_H, \cdot)$ добијамо

$$\mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s} - X_H\right) dt ds.$$

Сада из Флорове једначине имамо $\frac{\partial u}{\partial s} - X_H = J_s \frac{\partial u}{\partial t}$, односно $\frac{\partial u}{\partial t} = -J_s(\frac{\partial u}{\partial s} - X_H)$. Одавде директно следи

$$\mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y) = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 dt ds = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| \frac{\partial u}{\partial s} - X_H(u) \right\|^2 dt ds$$

одакле следи тврђење. $\square$

Како је енергија позитивна ова лема такође доказује да функционал дејства опада дуж холоморфних цилиндара. Аналогна лема ће важити и у случају простора $\mathcal{P}_0$.

Сада за Хамилтонове петље $x$ и $y$ можемо дефинисати простор $\mathcal{M}(x,y)$ холоморфних цилиндара између њих као

$$\{u : \mathbb{R}\times\mathbb{S}^1 \to M \mid (4.5),\ E(u) < \infty,\ u(-\infty,s) = x(s),\ u(+\infty,s) = y(s)\}.$$

Да бисмо видели када је овај простор многострукост и да бисмо извршили његову компактификацију користимо се Фредхолмовом теоријом и Теоремама о параметарској трансверзалности (Теорема 1.4, Теорема 1.5 и Теорема 2.8) на исти начин као и у случају Морсове хомологије. Простор аналоган простору $U$ из Дефиниције 2.15 ће бити простор пресликавања

$$\mathcal{U}^{1,p} :=$$

$$\left\{\begin{array}{r} u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, M) \mid \lim\limits_{s\to-\infty} u(t,s) = x(s),\ \lim\limits_{s\to+\infty} u(t,s) = y(s) \text{ и } \exists T > 0 : \\ u(t,s) = \exp_{x(s)}(\xi^-(t,s)) \text{ за } t \leq -T,\ \xi^- \in W^{1,p}((-\infty,-T)\times\mathbb{S}^1, x^*TM), \\ u(t,s) = \exp_{y(s)}(\xi^+(t,s)) \text{ за } t \geq T,\ \xi^+ \in W^{1,p}((T,\infty)\times\mathbb{S}^1, y^*TM) \end{array}\right\}.$$

У Морсовом случају смо за простор параметара узимали простор метрика $G$, док ћемо овде узимати комплетирање простора скоро комплексних структура сагласних са $\omega$ у норми Собољева, које означавамо са $\mathcal{J}_\omega$. Раслојење $\mathcal{E}$ над $\mathcal{U}\times\mathcal{J}_\omega$ ће бити простор свих $L^p$ векторских поља над пресликавањима из $\mathcal{U}$, односно влакно над $u \in \mathcal{U}$ ће бити[21]

$$\mathcal{E}_u = L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1, u^*TM).$$

Коначо сечење раслојења $\mathcal{E}$ које одговара сечењу $F(\gamma,g) = \frac{d}{dt}\gamma + \nabla_g f(\gamma)$ у Морсовом случају ће бити дато са

$$\overline{\partial} : \mathcal{U}\times\mathcal{J}_\omega \to \mathcal{E},\ \overline{\partial}(u,J) = \frac{\partial u}{\partial t} + J_s\frac{\partial u}{\partial s} - J_s X_H(u)$$

и $\mathcal{M}(x,y) = (\overline{\partial})^{-1}(0_{\mathcal{E}})$ ће бити глатка многострукост за генеричку скоро комплексну структуру $J$ (у овом случају кажемо да је су параметарти $H$ и $J$ *регуларни*). Димензија $\mathcal{M}(x,y)$ ће као и у Морсовом случају бити индекс одговарајућег Фредхолмовог пресликавања.

---

[21] Разлика у односу на Морсов случај је што у Флоровом случају разматрамо просторе $W^{1,p}_{loc}$ и $L^p$ за $p > 1$, при чему $p$ бирамо зависно од ситуације.

**Напомена:** Важна разлика између Морсове и Флорове теорије је то што су холоморфни дискови гранични случај за примену теореме Собољева о утапању (Теорема 2.10). Наиме, путеви су 1-димензиони, па су параметри у Теореми Собољева $k = 1$, $p = 2$ и $n = 1$ и важи $kp > n$, па можемо сматрати да су путеви из $U$ непрекидна пресликавања јер се одговарајући простор Собољева утапа у $C^0$. Цилиндри су са друге стране 2-димензиони, па је $n = 2$, односно ако би било $k = 1$, $p = 2$ важило би $kp = n$, односно цилиндре из $\mathcal{U}^{1,p}$ не бисмо могли да сматрамо непрекидним. То је један од разлога због чега посматрамо $W^{1,p}_{loc}$ и $L^p$ просторе за $p \neq 2$. На пример да бисмо коректно дефинисали $\mathcal{U}$ потребно је да можемо да дефинишемо конвергенцију ка $x$ и $y$, па зато узимамо $p > 2$. Конструисани простор $\mathcal{M}(x, y)$ неће зависити[22] од избора $p$ јер ће холоморфне криве које добијемо на крају бити класе $C^\infty$. Такође, због тога што не радимо са непрекидним пресликавањима, у разматрањима везаним за компактност не можемо примењивати Арцела-Асколијеву теорему. Компактност је у Флоровом случају далеко суптилније питање него у Морсовом и за контролу компактности се користи Громовљева теорема о компактности (Теорема 4.2).

Из Громовљеве теореме знамо да у лимесу може доћи до појаве мехурова.[23] Међутим, тополошки услов $\pi_2(M) = 0$ нам гарантује да неће доћи до појаве мехурова о чему говори следећа лема.

**Лема 4.4.** Нека је $M$ симплектичка многострукост са симплектичком формом $\omega$, таква да је $\pi_2(M) = 0$ и $J$ скоро комплексна структура сагласна са $\omega$. Ако је $u : \mathbb{C}P^1 \to M$, $J$-холоморфна сфера, онда је $u = const$.

**Доказ.** Нека су $u_1, u_2 : \mathbb{C}P^1 \to M$ два глатка пресликавања и

$$H : \mathbb{C}P^1 \times [0, 1] \to M$$

глатка хомотопија између њих (која постоји јер $\pi_2(M) = 0$). Према Стоксовој теореми је

[22]Фредхолмов индекс одговарајућих пресликавања такође неће зависти од $p$.

[23]Приметимо да овде користимо модификацију Теореме компактности за пертурбоване холоморфне цилиндре. Такође, енергију низа $u_n \in \mathcal{M}(x, y)$ не контролишемо тополошким условом $(u_n)_*([\Sigma]) = const \in H_2(M)$ већ асимптотским условом конвергенције ка $x$ и $y$, односно формулом $E(u_n) = \mathcal{A}_H(x) - \mathcal{A}_H(y)$ (Лема 4.3). Теорема ће важити и у овом случају и мехурови ће се појављивати на исти начин као и у непертурбованом случају, као холоморфне сфере (непертурбоване).

$$\int_{\mathbb{C}P^1} u_1^*\omega - \int_{\mathbb{C}P^1} u_2^*\omega = \int_{\mathbb{C}P^1\times[0,1]} H^*d\omega = 0,$$

односно

$$\int_{\mathbb{C}P^1} u_1^*\omega = \int_{\mathbb{C}P^1} u_2^*\omega,$$

па је за константно пресликавање $c$

$$E(u) = \int_{\mathbb{C}P^1} u^*\omega = \int_{\mathbb{C}P^1} c^*\omega = 0,$$

односно $u$ је константно. □

Приметимо да је у горњој леми (као и за дефиницију $\mathcal{A}_H$) довољно тражити $\langle\omega, \pi_2(M)\rangle = 0$ при чему $\omega$ спарујемо са хомотопском класом помоћу интеграла. Дакле, уколико је $\langle\omega, \pi_2(M)\rangle = 0$, не може доћи до појаве мехурова, па можемо да искористимо Громовљеву теорему да конструишемо Флорову хомологију на исти начин као што смо конструисали Морсову. Овако дефинисана Флорова хомологија се назива *Флоровом хомологијом за периодичне орбите* или *Хамилтоновом Флоровом хомологијом.* Хамилтонова Флорова хомологија ће бити изоморфна са Морсовом хомологијом од $M$ (па самим тим и сингуларном). Генератори Флорових ланчастих комплекса $CF_*(\Lambda, H)$ ће бити периодичне Хамилтонове орбите, па како су Бетијеви бројеви $\beta_i = \dim HM_i(M) = \dim HF_i(\Lambda, H)$ то ће број периодичних Хамилтонових орбита бити бар $\sum_{i=0}^{n}\beta_i$. Овиме је доказана Арнолдова хипотеза формулисана[24] у одељку 3.3 за случај $\pi_2(M) = 0$.

Окренимо се сада изучавању Флорове хомологије за $\mathcal{P}_0$. У овом случају се мехурови могу појавити и као холоморфни дискови са границом на $0_M$ (видети дискусију испод Теореме 4.2). Следећа лема отклања ту могућност.

**Лема 4.5.** Нека је $u : \mathbb{D}^2 \to T^*M$ $J$-холоморфно пресликавање јединичног диска у односу на скоро комплексну структуру $J$ сагласну са канонском симплектичком формом на $T^*M$ и нека је $u(\partial\mathbb{D}^2) \subset L$ за тачну Лагранжеву подмногострукост $L$. Тада је $u = const$.

[24]Због тога што све време радимо са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима (да бисмо смањили број техничких детаља) доказана је верзија Арнолдове хипотезе у том случају, а не са коефицијентима у $\mathbb{Q}$ као што је наведена у трећој глави.

**Доказ.** Према Стоксовој теореми је

$$E(u) = \int_{\mathbb{D}^2} u^*\omega = -\int_{\mathbb{D}^2} u^* d\lambda = -\int_{\partial\mathbb{D}^2} u^*\lambda = -\int_{\partial\mathbb{D}^2} u^* df = -\int_{\partial(\partial\mathbb{D}^2)} f = 0,$$

па је $u = const.$ □

Да бисмо избегли појаву мехурова као холоморфних сфера довољно је опет да тражимо $\pi_2(M) \cong \pi_2(T^*M) = 0$ и у том случају је Флорова хомологија добро дефинисана на простору $\mathcal{P}_0$ (дефиниција је иста као и у Хамилтоновом, односно Морсовом случају). Овако дефинисана Флорова хомологија се назива *Флоровом хомологијом за Лагранжеве пресеке* или *Лагранжевом Флоровом хомологијом* и означава $HF_*(0_M, \phi_1^H, H)$. Лагранжева Флорова хомологија ће такође бити изоморфна са Морсовом хомологијом од $M$.

### 4.2.3 О уопштењима Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке

Лагранжева Флорова хомологија допушта природна уопштења. Наиме, Флорову једначину (4.5) можемо свести на Коши-Риманову једначину помоћу следећег трика. Нека је $J_s$ фамилија скоро комплексних структура која учествује у дефиницији $HF_*(0_M, \phi_1^H, H)$. Дефинишимо нову фамилију скоро комплексних структура са $\widetilde{J}_s = (\phi_s^H)_*^{-1} \circ J_s \circ (\phi_s^H)_*$, односно $J_s = (\phi_s^H)_* \circ \widetilde{J}_s \circ (\phi_s^H)_*^{-1}$. За пресликавање $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M$ такво да је $u(t,0), u(t,1) \in 0_M$ дефинишемо $\tilde{u}(t,s) = (\phi_s^H)^{-1}(u(t,s))$. Директан рачун даје:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \widetilde{J}_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = (\phi_s^H)_*^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + \widetilde{J}_s \left( (\phi_s^H)_*^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} - X_H \right) =$$

$$= (\phi_s^H)_*^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (\phi_s^H)_* \widetilde{J}_s (\phi_s^H)_*^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} - (\phi_s^H)_* \widetilde{J}_s (\phi_s^H)_*^{-1} X_H \right) =$$

$$= (\phi_s^H)_*^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} - J_s X_H \right),$$

па је

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \widetilde{J}_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} - J_s X_H = 0.$$

На овај начин смо решавање једначине (4.5) са граничним условима

$$u(t,0),\ u(t,1) \in 0_M$$

и асимптотским условима

$$u(-\infty,s) = x(s),\ u(\infty,s) = y(s)$$

за Хамилтонове путеве $x$ и $y$ свели на решавање једначине $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \widetilde{J}_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} = 0$, са граничним условима

$$\tilde{u}(t,0) \in 0_M,\ \tilde{u}(t,1) \in (\phi_1^H)^{-1}(0_M)$$

и асимптотским условима

$$\tilde{u}(-\infty,s) = (\phi_s^H)^{-1}(x(s)) = const = c_1,\ \tilde{u}(\infty,s) = (\phi_s^H)^{-1}y(s) = const = c_2.$$

Како $\tilde{u}(t,0) \in 0_M$, $\tilde{u}(t,1) \in (\phi_1^H)^{-1}(0_M)$ то $c_1, c_2 \in 0_M \cap (\phi_1^H)^{-1}(0_M)$. Дакле, проблем који решавамо да бисмо конструисали Лагранжеву Флорову хомологију смо (након преозначавања $\tilde{u}$ и $H$) свели на проблем

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + J_s \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \\ u(t,0) \in 0_M \\ u(t,1) \in \phi_1^H(0_M) \\ u(-\infty,s) = x \\ u(+\infty,s) = y,\ x,y \in 0_M \cap \phi_1^H(0_M). \end{cases} \tag{4.6}$$

Приметимо да је (4.4) специјалан случај проблема (4.6) за $\phi_1^H(0_M) = \Gamma(df)$, док је услов $0_M \pitchfork \phi_1^H(0_M)$ уствари услов $0_M \pitchfork \Gamma(df)$ што је управо услов да је $f$ Морсова функција. Сада конструкцију Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке можемо извршити на исти начин као и конструкцију Флорове хомологије за проблем (4.4). Генератори Флоровог ланчастог комплекса $CF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$ ће бити пресечне тачке $0_M \cap \phi_1^H(0_M)$, а $\partial$ дефинишемо бројањем холоморфних дискова, односно решења проблема (4.6).

Ова дефиниција Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке је погодна за уопштења. Разлог за то је што се у формулацији проблема (4.6) не појављује $H$ осим у граничном услову, па исти проблем можемо решавати заменивши $T^*M$ са произвољном симплектичком многострукошћу $N$, а $0_M$ и $\phi_1^H(0_M)$ са две произвољне Лагранжеве подмногострукости $L_0$ и $L_1$ од $N$ које се секу трансверзално, $L_0 \pitchfork L_1$. Уколико је оваква хомологија добро дефинисана, њени генератори су $L_0 \cap L_1$, а $\partial$ дефинишемо бројањем холоморфних дискова који спајају тачке пресека $L_0 \cap L_1$. Овако добијену хомологију означавамо са $HF_*(L_0, L_1)$. Постоје случајеви у којима је немогуће коректно дефинисати $HF_*(L_0, L_1)$ на овај начин, док се може догодити и да је $HF_*(L_0, L_1)$ добро дефинисана, али да није у вези са Морсовом хомологијом $M$. Такође може да се догоди да у $HF_*(L_0, L_1)$ не можемо да уведемо градуацију Масловљевим индексом.

Уколико је $HF_*(L_0, L_1)$ дефинисана, она је инваријантна у односу на Хамилтонова кретања, односно за $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M)$ важи

$$HF_*(\phi(L_0), \psi(L_1)) \cong HF_*(L_0, L_1).$$

Из тог разлога можемо говорити и о $HF_*(L_0, L_1)$ ако $L_0$ и $L_1$ нису у трансверзалном положају јер их Хамилтоновим кретањем можемо довести у трансверзалан положај, па чак можемо да говоримо и о $HF_*(L_0, L_0)$.

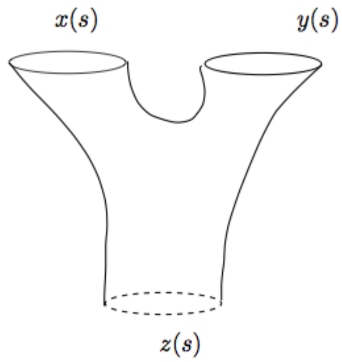
Напоменимо на крају да је Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке у неком смислу општија од Хамилтонове Флорове хомологије. Наиме, ако је $\Delta \subset M \times M$ дијагонала, а $\Gamma(\phi_1^H) \subset M \times M$ график Хамилтоновог дифеоморфизма $\phi_1^H$ (који је Лагранжева подмногострукост у $M \times M$ према Леми 3.2), онда ће $HF_*(\Delta, \Gamma(\phi_1^H))$ бити добро дефинисана и важиће

$$HF_*(\Delta, \Gamma(\phi_1^H)) \cong HF_*(\Lambda, H).$$

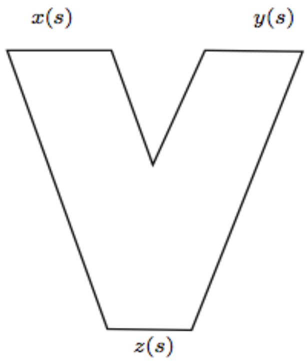
Услов недегенерисаности Хамилтонових петљи је еквивалентан услову $\Delta \pitchfork \Gamma(\phi_1^H)$. .

### 4.2.4 Производи у Флоровој хомологији

У одељку 2.4 смо видели да производе у хомологији и кохомологији можемо дефинисати бројањем Y-графова који спајају критичне тачке. Трајекторија која је одговарала свакој од грана тог графа је задовољавала негативну градијентну једначину за одговарајућу Морсову функцију. По аналогији са том конструкцијом можемо дефинисати производе у Флоровој (ко)хомологији у случајевима $HF_*(\Lambda, H)$ и $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$. Наиме дефинишемо пресликавања $\cap$ и $\cup$ на нивоу Флорових ланаца на сличан начин као у одељку 2.4 при чему бројимо „панталоне"(слике 9 и 10) које спајају генераторе $x$, $y$ и $z$ Флорових ланаца.




**Слика 9:** „Панталоне" које дефинишу производ у Флоровој хомологији за периодичне орбите




**Слика 10:** „Панталоне" које дефинишу производ у Флоровој хомологији за Лагранжеве пресеке

Под „панталонама" подразумевамо пертурбована холоморфна пресликавања из Риманових површи приказаних на слици. Треба објаснити шта значи пертурбовано холоморфно пресликавање из Риманових површи на којима немамо глобалне координате (па не можемо ни да запишемо Флорову једначину).[25]. Уколико желимо да конструишемо производ на ланцима[26] $CF_*(H_1, J_1)$,

[25]Дајемо неформално објашњење, за формалну дефиницију видети [43].

[26]Истичемо само Хамилтонијан и скоро комплексну структуру, не правећи разлику између Лагранжевог и Хамилтоновог случаја. Такође Риманову површ у оба случаја означавамо са $\Sigma$.

$CF_*(H_2, J_2)$ и $CF_*(H_3, J_3)$ захтеваћемо да пресликавања $u : \Sigma \to M(T^*M)$ задовољавају Флорову једначину (4.5) у околини $x$, $y$, $z$ за параметре $(H_1, J_1)$, $(H_2, J_2)$ и $(H_3, J_3)$ на сваком од цилиндара (трака) који теже ка $x \in CF_*(H_1, J_1)$, $y \in CF_*(H_2, J_2)$ и $z \in CF_*(H_3, J_3)$ редом. Даље ћемо Хамилтонијане $H_i$ глатко „спуштати" до нуле и скоро комплексне структуре $J_i$ глатко модификовати тако да у средини површи добијемо непертурбовану холоморфну једначину. Дефиниција непертурбоване холоморфне криве је независна од координата, па то оправдава нашу дефиницију.

## 4.3 Пиуникин-Саламон-Шварцов изоморфизам

По угледу на канонске изоморфизме описане у одељку 2.3 дефинишемо канонске изоморфизме у Флоровој хомологији. Нека су $(H^\alpha, J^\alpha)$ и $(H^\beta, J^\beta)$ два регуларна (односно генеричка) пара Хамилтонијана и скоро комплексних структура и $HF_*(0_M, \phi_1^{H^\alpha}(0_M))$ и $HF_*(0_M, \phi_1^{H^\beta}(0_M))$ одговарајуће Лагранжеве Флорове хомологије. Посматрајмо хомотопију $(H_{t,s}^{\alpha\beta}, J_{t,s}^{\alpha\beta})$ између парова $(H^\alpha, J^\alpha)$ и $(H^\beta, J^\beta)$

$$H_{t,s}^{\alpha\beta} = \begin{cases} H_s^\alpha, \text{ за } t \leq -1 \\ H_s^\beta, \text{ за } t \geq 1 \end{cases}, \quad J_{t,s}^{\alpha\beta} = \begin{cases} J_s^\alpha, \text{ за } t \leq -1 \\ J_s^\beta, \text{ за } t \geq 1 \end{cases}.$$

Сада можемо решавати неаутономну Флорову једначину

$$\frac{\partial u}{\partial t} + J_{t,s}\frac{\partial u}{\partial s} - J_{t,s}X_{H^{\alpha\beta}}(u) = 0. \tag{4.7}$$

за $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to T^*M$, при чему ћемо тражити асимптотске граничне услове

$$\lim_{t\to-\infty} u(t,s) = x^\alpha(s), \quad \lim_{t\to+\infty} u(t,s) = x^\beta(s)$$

за Хамилтонове путеве $x^\alpha$ и $x^\beta$. Скуп свих решења овог проблема ћемо означавати са[27] $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$. Сада ћ за генерички избабор хомотопије $H_{t,s}^{\alpha\beta}$ ће $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$ бити глатка многострукост. Уколико је $\mu(x^\alpha) = \mu(x^\beta)$ ($\mu$ означава Масловљев индекс), важиће

$$\dim \mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta}) = 0$$

и $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$ ће бити компактна. Означимо са $n(x^\alpha, x^\beta)$ број тачака у $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta}, J^{\alpha\beta})$ модуло 2. Дефинишемо

$$h_\# : CF_*(0_M, \phi_1^{H^\alpha}(0_M)) \to CF_*(0_M, \phi_1^{H^\beta}(0_M)), \; h_\#(x^\alpha) = \sum_{\substack{x^\beta \\ \mu(x^\alpha)=\mu(x^\beta)}} n(x^\alpha, x^\beta)x^\beta.$$

Важиће теорема аналогна Теореми 2.3.

**Теорема 4.4.** За пресликавање $h_\#$ важи:

[27] Уколико не варирамо $H$ или $J$ писаћемо и $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H^{\alpha\beta})$, односно $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, J^{\alpha\beta})$.

1° $h_\# \circ \partial = \partial \circ h_\#$, односно $h_\#$ је ланчасто пресликавање па индукује морфизам

$$h_*^{\alpha\beta} : HF_*(0_M, \phi_1^{H^\alpha}(0_M)) \to HF_*(0_M, \phi_1^{H^\beta}(0_M));$$

2° $h_*^{\alpha\beta}$ не зависи од избора генеричке фамилије $(H_{t,s}^{\alpha\beta}, J_{t,s}^{\alpha\beta})$;

3° За три пара $(H_{t,s}^{\alpha\beta}, J_{t,s}^{\alpha\beta})$, $(H_{t,s}^{\beta\gamma}, J_{t,s}^{\beta\gamma})$ и $(H_{t,s}^{\alpha\gamma}, J_{t,s}^{\alpha\gamma})$
следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd}
HF_*(0_M, \phi_1^{H^\alpha}(0_M)) \arrow[rr, "h_*^{\alpha\beta}"] \arrow[dr, "h_*^{\alpha\gamma}"'] & & HF_*(0_M, \phi_1^{H^\beta}(0_M)) \arrow[dl, "h_*^{\beta\gamma}"] \\
& HM_*(0_M, \phi_1^{H^\gamma}(0_M)) &
\end{tikzcd}$$

□

Истим резоном као за Теорему 2.3 закључујемо да важи

$$HF_*(0_M, \phi_1^{H^\alpha}(0_M)) \cong HF_*(0_M, \phi_1^{H^\beta}(0_M)),$$

као и да је наведени изоморфизам канонски.

**Напомена:** Коришћене аргументе такође зовемо аргументима кобордизама као у Морсовом случају (видети напомену испод Теореме 2.3).

На сличан начин се дефинишу канонски изоморфизми $h_*^{\alpha\beta}$ за Хамилтонов случај и важиће иста теорема (погледати [51]).

Као што смо већ поменули $HF_*(\Lambda, H)$ и $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$ су изоморфне са Морсовом хомологијом од $M$ (па самим тим и са сингуларном). Оригиналне методе које је Флор користио да би доказао $HF_*(H) \cong HM_*(M)$ су сличне првој конструкцији Флорове хомологије коју смо приказали у одељку 4.2.1. (видети [23] и [24]). У [45] Пиуникин, Саламон и Шварц су пронашли нови начин конструкције изоморфизма између $HF_*(\Lambda, H)$ и $HM_*(M)$, у духу аргумената кобордизама. Тај изоморфизам по њима носи име Пјуникин-Саламон-Шварцов изоморфизам (скраћено $PSS$ изоморфизам). Верзију $PSS$ изоморфизма за Лагранжеву Флорову хомологију су конструисали Катић и Милинковић у [29] и [30] и Алберс у [8]. Наводимо опис конструкције и резултате везане за $PSS$ изоморфизам у Лагранжевом случају и Хамилтоновом случају. Потпун приказ и докази тврђења се могу наћи у четири наведена рада.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција, $p \in M$ њена критична тачка, $H \in \mathrm{Ham}(T^*M)$ Хамилтонијан, $\phi_t^H : T^*M \to T^*M$ одговарајућа фамилија Хамилтонових дифеоморфизама и $x : [0,1] \to T^*M$ Хамилтонова орбита таква да је $x(0), x(1) \in 0_M$.

$PSS$ изоморфизам ћемо дефинисати бројањем објеката који се састоје од градијентне трајекторије и холоморфне криве које се спајају у једној тачки. Овакве, мешовите, објекте ћемо звати *комбинованим објектима* или *објектима комбинованог типа.* Нека је $R_0$ фиксиран позитиван број и $\varphi_{R_0} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ глатка функција таква да је

$$\varphi_{R_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq R_0 + 1 \\ 0, & t \leq R_0 \end{cases}$$

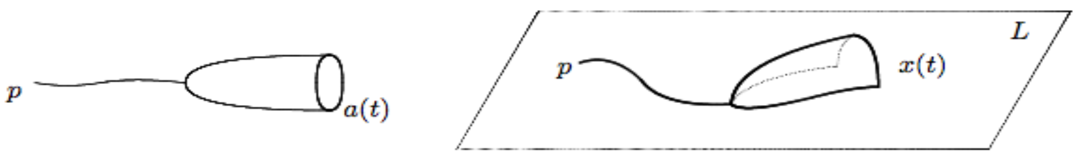
и нека је $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ простор парова пресликавања

$$\gamma : (-\infty, 0] \to M, \quad u : [0, +\infty) \times [0,1] \to T^*M$$

који задовољавају

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s)), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\varphi_{R_0} \cdot H}(u)) = 0 \\ u(\partial([0, +\infty) \times [0,1])) \subset 0_M, \\ \gamma(-\infty) = p, u(+\infty, t) = x(t), \\ \gamma(0) = u(0, \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{4.8}$$

Овако дефинисани парови пресликавања чиниће комбиноване објекте које желимо да бројимо. Аналогно дефинишемо парове пресликавања у Хамилтоновом случају (слика 12):




**Слика 12:** Комбиновани објекти који дефинишу $PSS$ изоморфизам у случају периодичних орбита и Лагранжевих пресека

Пратећи ток горе дефинисаног објекта „полазимо” из критичне тачке и „стижемо” у Хамилтонов пут. Исти простор само „у другом смеру” дефинишемо на следећи начин. Нека је $\varphi_{R_0} : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ сада глатка функција таква да је

$$\varphi_{R_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \leq -R_0 - 1 \\ 0, & t \geq -R_0 \end{cases}$$

и нека је $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ простор парова пресликавања

$$u : (-\infty, 0] \times [0, 1] \to T^*M, \quad \gamma : [0, +\infty) \to M$$

који задовољавају

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{ds} = -\nabla f(\gamma(s), \\ \frac{\partial u}{\partial s} + J(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{\varphi_R H}(u)) = 0 \\ u(\partial((-\infty, 0] \times [0, 1])) \subset 0_M, \\ u(-\infty, t) = x(t), \gamma(+\infty) = p \\ \gamma(0) = u(0, \frac{1}{2}). \end{cases} \tag{4.9}$$

За дефинисане просторе ће важити следећа теорема.

**Теорема 4.5.** За генерички избор $f$ и $H$ скупови $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ су глатка многострукости. Димензија ових многострукости се може изразити преко $\text{ind}(p)$ и $\mu(x)$ и уколико $p \in CM_k(f)$ и $x \in CF_k(0_M, \phi_1^H(0_M))$ важи

$$\dim \mathcal{M}(p, f; x, H) = \dim \mathcal{M}(x, H; p, f) = 0$$

и $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ су компактне. □

Из наведене теореме следи да су $\mathcal{M}(p, f; x, H)$ и $\mathcal{M}(x, H; p, f)$ коначни скупови тачака. Њихове кардиналне бројеве по модулу 2 ћемо означавати редом са $n(p, f; x, H)$ и $n(x, H; p, f)$. Дефинишимо хомоморфизме

$$\phi : CF_k(0_M, \phi_1^H(0_M)) \to CM_k(f), \quad \psi : CM_k(f) \to CF_k(0_M, \phi_1^H(0_M))$$

на генераторима $x \in CF_k(0_M, \phi_1^H(0_M))$, $p \in \text{Crit}_k(f)$ са

$$\phi(x) := \sum_{\text{ind}(p)=k} n(x, H; p, f) p, \quad \psi(p) := \sum_x n(p, f; x, H) x$$

при чему друга сума иде по Хамилтоновим путевима $x \in CF_k(0_M, \phi_1^H(0_M))$ и проширимо их по линеарности. Ови морфизми ће задовољавати

$$\phi \circ \partial_F = \partial_M \circ \phi, \quad \psi \circ \partial_M = \partial_F \circ \psi.$$

па помоћу њих индукујемо хомоморфизме

$$\Phi : HF_k(H) \to HM_k(f), \quad \Psi : HM_k(f) \to HF_k(H)$$

на нивоу Хомологије. Важи следећа теорема.

**Теорема 4.6.** Хомоморфизми $\Phi$ и $\Psi$ су изоморфизми и важи:

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}, \quad \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}\,. \quad \square$$

**Дефиниција 4.7.** Изоморфизам $\Psi$ називамо *Пиуникин-Саламон-Шварцовим изоморфизомом.* Поред $\Psi$ користимо и ознаку $PSS$.

Сва до сада наведена тврђења ће важити и за случај Хамилтонове Флорове хомологије. $PSS$ изоморфизам се лепо слаже са канонским изоморфизмима о чему говори следећа теорема (у овој теореми $HF_*(H)$ може да означава и $HF_*(\Lambda, H)$ и $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$).

**Теорема 4.7.** Дијаграм

$$\begin{array}{lll} HF_*(H^\alpha) & \xrightarrow{h_*^{\alpha\beta}} HF_*(H^\beta) & \\ \uparrow PSS_\alpha & \quad \uparrow PSS_\beta = (\Phi^\beta)^{-1} & \\ HM_*(f^\alpha) & \xrightarrow{\Phi_*^{(\alpha\beta)}} HM_*(f^\beta) & \end{array} \tag{4.10}$$

комутира.

## 4.4 Конструкција и особине спектралних инваријанти

У трећој глави смо видели како функционал дејства можемо посматрати као генеришућу функцију на бесконачно-димензионом раслојењу путева. У истој глави смо видели да генеришуће функције можемо искористити да дефинишемо Витербоове инваријанте $c(a, L)$. Мотивисани том конструкцијом дефинишемо спектралне инваријанте у Флоровој хомологији. Спектралне инваријанте се могу дефинисати у случају $HF_*(\Lambda, H)$, као и у случају $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$. Када су разматрања аналогна у та два случаја, писаћемо[28] $CF_*(H)$ и $HF_*(H, J)$ имајући у виду да $HF_*(H, J)$ може бити и $HF_*(\Lambda, H)$ и $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$. У конструкцији спектралних инваријанти у сваком од случајева $HF_*(\Lambda, H)$ или $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$ постоје специфичности у односу на други случај. Сматрамо да се презентовањем једног случаја могу добро приказати дух целе теорије и идеје иза ње, па ћемо углавном извођења која су специфична изводити за случај Лагранжеве Флорове хомологије. Поређење спектралних инваријанти за Хамилтонову Флорову хомологију и Лагранжеву Флорову хомологију се може наћи у [18] и [40]. Кроз цело излагање сматрамо да је $\pi_2(M) = 0$ (за општији случај видети [32]).

Нека је $CF$ скуп свих генератора Флорових ланаца $CF_*(H)$ и означимо са

$$CF^\lambda(H) = \{x \in CF | \mathcal{A}_H(x) < \lambda\}$$

скуп свих генератора Флорових ланаца испод нивоа[29] $\lambda$. Дефинишимо

$$CF_*^\lambda(H) = \langle CF^\lambda(H) \rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

као низ $\mathbb{Z}_2$ модула над $CF(H)$. Из Леме 4.3 имамо да вредност $\mathcal{A}_H$ опада дуж пертурбованих холоморфних пресликавања (трака или цилиндара), па ако $u$ спаја $x$ и $y$ и $\mathcal{A}_H(x) < \lambda$ следи да је $\mathcal{A}_H(y) < \lambda$. Из тог разлога гранични оператор

$$\partial : CF_*(H) \to CF_*(H)$$

индукује гранични оператор

[28]Истичемо скоро комплексну структуру $J$.

[29]$\mathcal{A}_H$ посматрамо као Морсову функцију зато кажемо испод нивоа $\lambda$.

$$\partial^\lambda : CF_*^\lambda(H) \to CF_*^\lambda(H)$$

рестрикцијом на генераторе испод нивоа $\lambda$ и очигледно важи

$$\partial^\lambda \circ \partial^\lambda = 0.$$

Дефинишемо *релативне Флорове хомолошке групе* као

$$HF_*^\lambda(H,J) = \frac{\mathrm{Ker}(\partial^\lambda)}{\mathrm{Im}(\partial^\lambda)},$$

док $CF_*^\lambda(H)$ зовемо *релативним Флоровим ланчастим комплексима.* Инклузија

$$j^\lambda : CF^\lambda(H) \to CF(H)$$

индукује хомоморфизам група

$$j_\#^\lambda : CF_*^\lambda(H) \to CF_*(H)$$

за који важи $\partial \circ j_\#^\lambda = j_\#^\lambda \circ \partial^\lambda$. Овај хомоморфизам даље индукује природан морфизам

$$j_*^\lambda : HF_*^\lambda(H,J) \to HF_*(H,J).$$

*Релативна Флорова кохомологија* се дефинише дуално коришћењем Hom функтора.

Нека је даље $HM_*(M)$ Морсова хомологија за фиксирану Морсову функцију и

$$PSS : HM_*(M) \to HF_*(H,J)$$

Пјуникин-Саламон-Шварцов изоморфизам описан у претходном одељку.

**Дефиниција 4.8.** За регуларни избор параметара (генерички у смислу добре дефиниције $HF_*(H)$) $H$ и $J$ и $a \in HM_*(M)$ број

$$\rho(a,H,J) = \inf\{\lambda \mid PSS(a) \in \mathrm{Im} j_*^\lambda\}$$

зовемо *спектралном инваријантом* за параметре $(a,H,J)$.

**Дефиниција 4.9.** Скуп

$$\sigma(H) = \mathcal{A}_H(\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H))$$

зовемо *спектром* Хамилтонијана $H$.

Како је $H \equiv 0$ изван неког компакта $K$, а скуп генератора Флорових ланаца $CF(H)$ је у бијекцији са $0_M \cap \phi_1^H(0_M)$ у случају $HF_*(0_M, \phi_1^H(0_M))$ односно у бијекцији са $\Delta \cap \Gamma(\phi_1^H)$ у случају $HF_*(\Lambda, H)$ и оба ова пресека су трансверзална, закључујемо да је број генератора $CF_*(H)$ коначан. Одавде директно следи следећа теорема.

**Теорема 4.8.** За регуларне параметре $(H, J)$ и $a \neq 0$, важи $\rho(a, H, J) \in \sigma(H)$.

**Доказ.** Претпоставимо супротно да $\rho(a, H, J) \notin \sigma(H)$. Како $CF_*(H)$ имају коначан број генератора то $\exists \varepsilon > 0$ такво да вредност $\mathcal{A}_H$ ни на једном генератору није у интервалу $(\rho(a, H, J) - \varepsilon, \rho(a, H, J) + \varepsilon)$ па $HF_*^{\rho(a,H,J)-\varepsilon} = HF_*^{\rho(a,H,J)+\varepsilon}$ односно $\rho(a, H, J) \leq \rho(a, H, J) - \varepsilon$ што доводи до контрадикције. $\square$

Користећи аргументе кобордизама можемо доказати следећу лему.

**Лема 4.6.** $\rho(a, H, J)$ не зависи од избора регуларне скоро комплексне структуре $J$.

**Доказ.** Нека су $J^\alpha$ и $J^\beta$ две регуларне скоро комплексне структуре и $J_t^{\alpha\beta}$ регуларан (у смислу аргумената кобордизама) пут скоро комплексних структура такав да важи

$$J_t^{\alpha\beta} = \begin{cases} J_t^\alpha, \text{ за } t \leq -1 \\ J_t^\beta, \text{ за } t \geq 1 \end{cases}.$$

Нека је

$$h_{\alpha\beta} : HF_*(H, J^\alpha) \to HF_*(H, J^\beta)$$

изоморфизам индукован хомоморфизмом

$$h_\# : CF_*(H) \to CF_*(H),\ h_\#(x^\alpha) = \sum_{x^\beta} n(x^\alpha, x^\beta) x^\beta$$

где је $n(x^\alpha, x^\beta)$ број тачака у 0-димензионој многострукости $\mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, J_t^{\alpha\beta})$ модуло 2 (видети претходни одељак). Нека је $u \in \mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, J_t^{\alpha\beta})$. Тада важи:

$$\mathcal{A}_H(x^\beta) - \mathcal{A}_H(x^\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_H(u(s,t)) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{A}_H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \omega\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s} - X_H(u)\right)dsdt,$$

па како $u$ задовољава $\frac{\partial u}{\partial t} + J_t^{\alpha\beta}(\frac{\partial u}{\partial s} - X_H(u)) = 0$ то је

$$\mathcal{A}_H(x^\beta) - \mathcal{A}_H(x^\alpha) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{J_t^{\alpha\beta}} dsdt.$$

Одавде видимо да $\mathcal{A}_H$ опада дуж $u$, па имамо

$$\mathcal{A}_H(x^\alpha) \geq \mathcal{A}_H(x^\beta)$$

и закључујемо да

$$h_{\alpha\beta} : HF_*^\lambda(H, J^\alpha) \to HF_*^\lambda(H, J^\beta)$$

као и $h_{\alpha\beta} \circ j_*^\lambda = j_*^\lambda \circ h_{\alpha\beta}$. Ако означимо

$$PSS_\alpha : HM_*(M) \to HF_*(H, J^\alpha),\ PSS_\beta : HM_*(M) \to HF_*(H, J^\beta)$$

онда из $PSS_\alpha(a) \in \mathrm{Im} j_*^\lambda$ следи $h_{\alpha\beta} \circ PSS_\alpha(a) = PSS_\beta(a) \in \mathrm{Im} j_*^\lambda$ па

$$\rho(a, H, J^\alpha) \geq \rho(a, H, J^\beta).$$

Заменом $\alpha$ и $\beta$ добијамо $\rho(a, H, J^\alpha) = \rho(a, H, J^\beta)$. □

Као последицу претходне леме можемо да говоримо о $\rho(a, H) := \rho(a, H, J)$ које неће зависити од избора[30] регуларне скоро комплексне структуре $J$. За тако дефинисано $\rho(a, H)$ ће важити следећа лема.

**Лема 4.7.** Нека су $H^\alpha$ и $H^\beta$ два регуларна Хамилтонијана. Тада је

$$-\int_0^1 \max(H^\beta - H^\alpha)ds \leq \rho(a, H^\beta) - \rho(a, H^\alpha) \leq -\int_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds.$$

[30] Хамилтонов дифеоморфизам генерисан са $H$ и даље мора да задовољава услов трансверзаности. За такав $H$ кажемо да је *регуларан*.

**Доказ.** Нека је $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција класе $C^\infty$ за коју важи

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1, \text{ за } t \geq 1 \\ \varphi(t) = 0, \text{ за } t \leq 0 \end{cases}.$$

Дефинишимо (могуће не регуларну) хомотопију

$$\widetilde{H}_t := \varphi(t)H^\beta + (1 - \varphi(t))H^\alpha$$

и нека је $H_t^{\alpha\beta}$ регуларна хомотопија која спаја $H^\alpha$ и $H^\beta$ и која је $\varepsilon$-близу $\widetilde{H}_t$ у $C^1$ топологији. За $u \in \mathcal{M}(x^\alpha, x^\beta, H_t^{\alpha\beta})$ имамо

$$\mathcal{A}_{H^\beta}(x^\beta) - \mathcal{A}_{H^\alpha}(x^\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\mathcal{A}_{H_t^{\alpha\beta}}(u(s,t))dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( d\mathcal{A}_{H_t^{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 H_t^{\alpha\beta}(u)ds \right) dt =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_J^2 dsdt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \frac{\partial H_t^{\alpha\beta}}{\partial t}(u)dsdt.$$

Како су $H_t^{\alpha\beta}$ и $\widetilde{H}_t$ $\varepsilon$-близу то је

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \frac{\partial H_t^{\alpha\beta}}{\partial t}(u)dsdt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \frac{\partial \widetilde{H}_t}{\partial t}(u)dsdt \right| < \varepsilon$$

а како је $\frac{\partial \widetilde{H}_t}{\partial t}(u) = \varphi'(t)(H^\beta(u) - H^\alpha(u))$ имамо

$$\mathcal{A}_{H^\beta}(x^\beta) - \mathcal{A}_{H^\alpha}(x^\alpha) \leq$$

$$\leq -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_J^2 dsdt - \int\limits_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds + \varepsilon \leq -\int\limits_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds + \varepsilon.$$

Одавде закључујемо да

$$h_{\alpha\beta} : HF_*^\lambda(H^\alpha, J) \to HF_*^{\lambda - m + \varepsilon}(H^\beta, J)$$

где је $m = \int\limits_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds$. Истим аргументима као у претходној леми закључујемо

$$\rho(a, H^\beta) - \rho(a, H^\alpha) \leq -\int\limits_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds + \varepsilon,$$

па како је $\varepsilon > 0$ произвољно, то имамо

$$\rho(a, H^\beta) - \rho(a, H^\alpha) \leq -\int\limits_0^1 \min(H^\beta - H^\alpha)ds.$$

Заменом улога $\alpha$ и $\beta$ добијамо тврђење. $\square$

**Последица 4.1.** За фиксирану хомолошку класу $a \in HM_*(M)$, $a \neq 0$ пресликавање

$$\rho_a : (\mathrm{Ham}, \mathcal{J}_\omega)_{reg} \to \mathbb{R},\ \rho_a(H, J) = \rho(a, H)$$

је $C^0$ непрекидно. $\square$

Ова последица нам омогућава да дефинишемо $\rho(a, H)$ за било коју непрекидну функцију $H$ као

$$\rho(H) = C^0 - \lim_{n\to\infty} \rho(H_n),\ \text{за регуларне Хамилтонијане } H_n.$$

За $a \neq 0$ и глатко $H$ ће и даље важити $\rho(a, H) \in \sigma(H)$ (видети [42])[31].

Означимо са $\rho_l(a, H)$ Лагранжеве спектралне инваријанте. Производ дуалан кап производу:

$$\cap : H_{n-k}(M; \mathbb{Z}_2) \otimes H_{n-l}(M; \mathbb{Z}_2) \to H_{n-k-l}(M; \mathbb{Z}_2).$$

је у Флоровој хомологији дефинисан бројањем „панталона" (видети претходни одељак). Користећи такву дефиницију и чињеницу да функционал дејства опада дуж пертурбованих холоморфних трака, можемо извести следећу лему.

**Лема 4.8.** Нека су $H_1$ и $H_2$ Хамилтонијани на $T^*M$ такви да је $H_1(t_1, \cdot) = H_2(t_2, \cdot) = 0$ за $t_1$ близу 1 и $t_2$ близу 0.[32] Нека је $H_1\#H_2 : [0,2] \times T^*M :\to \mathbb{R}$

[31] Да бисмо дефинисали спектар, $H$ не мора да буде регуларан.

[32] Увек је могуће изменити Хамилтонијане тако да овај услов буде задовољен без промене спектралних инваријанти (видети [46]).

Хамилтонијан настао надовезивањем $H_1$ и $H_2$ по времену. Тада важи

$$\rho_l(a \cap b, H_1 \# H_2) \leq \rho_l(a, H_1) + \rho_l(b, H_2)$$

за хомолошке класе $a$ и $b$ за које $a \cap b \neq 0$. $\square$

Као последицу наведене леме можемо извести следећу лему.

**Лема 4.9.** Нека су $H_1$ и $H_2$ Хамилтонијани на $T^*M$ који генеришу исти дифеоморфизам $\phi_1^{H_1} = \phi_1^{H_2}$. Тада се спектралне инваријанте од $H_1$ и $H_2$ поклапају.

**Доказ.** Видети у [40]. $\square$

Као последицу претходне леме можемо дефинисати $\rho_l(a, \phi)$ за $\phi \in \mathrm{Ham}(T^*M)$.

Витербоове инваријанте су дефинисане посматрањем промена топологије испод нивоа генеришуће функције $S$. С друге стране, спектралне инваријанте су дефинисане посматрањем промена топологије испод нивоа функционала дејства $\mathcal{A}_H$, а како смо видели у одељку 3.3 $\mathcal{A}_H$ можемо посматрати као канонски дефинисану бесконачно-димензиону варијанту генеришуће функције. Из тог разлога је логично да постоји веза између Витербоових и спектралних инваријанти. Та веза је откривена у [38] и исказујемо је следећом теоремом.

**Теорема 4.9.** Нека је $L_S = \phi_1^H(0_M) \subset T^*M$ Хамилтонова деформација нултог сечења генерисана функцијом $S$ квадратном у бесконачности и нека $a \in HM_*(M)$. Тада уз извесну нормализацију параметара $H$ и $S$ важи

$$c(a, L_S) = \rho_l(a, \phi_1^H).$$

**Доказ.** Видети у [38]. $\square$

Као последицу Теореме 3.9 сада изводимо следеће тврђење.

**Последица 4.2.** За фундаменталну класу многострукости $M$, $\mu \in HM_{2n}(M)$ и класу тачке $1 \in HM_0(M)$ важи

$$\rho_l(\mu, \phi_1^H) - \rho_l(1, \phi_1^H) \geq 0,$$

при чему ће $\rho_l(\mu, \phi_1^H) - \rho_l(1, \phi_1^H)$ зависити само од $\phi_1^H(0_M)$ и једнакост важи ако и само ако[33] $\phi_1^H(0_M) = 0_M$. $\square$

Напоменимо на крају да данас постоје многи покушаји да се аксиоматизују спектралне инваријанте. Најчешће се за аксиоме узимају својства слична онима која смо навели у овом поглављу. Један такав приступ може се наћи у [47].



[33]Својство да разлика инваријанти зависи само од Лагранжеве подмногострукости и овакав услов се појављују због нормализације.

## 4.5 Хоферова метрика на простору Лагранжевих подмногострукости у котангентном раслојењу

У одељку 3.4 смо видели како на одређеном простору Лагранжевих подмногострукости од $M \times M$ можемо задати метрику у случају затворене симплектичке многострукости $M$. Сада ћемо на сличан начин дефинисати метрику на простору Хамилтонових деформација нултог сечења у $T^*M$. Као примену спектралних инваријанти ћемо доказати да је ова метрика недегенерисана.

Нека је $M$ симплектичка многострукост и означимо са $\mathcal{L}_M(L_0)$ простор свих Лагранжевих подмногострукости $L \subset M$ добијених Хамилтоновом деформацијом од $L_0$. Другим речима:

$$\mathcal{L}_M(L_0) = \{\phi_1^H(L_0) | \phi_1^H \in \mathrm{Ham}(M)\}.$$

Група $\mathrm{Ham}(M)$ дејствује транзитивно на $\mathcal{L}_M(L_0)$ са $\phi \cdot L = \phi(L)$. На $\mathcal{L}_M(L_0)$ можемо задати природну метрику инваријантну у односу на ово дејство.

**Дефиниција 4.10.** За $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_M(L_0)$ дефинишемо

$$d_H(L_1, L_2) = \inf\{d(id, \phi) \mid \phi \in \mathrm{Ham}(M),\ \phi(L_1) = L_2\}$$

где је $d$ Хоферова метрика на $\mathrm{Ham}(M)$.

Сва својства метрике $d_H$ осим недегенерисаности се изводе на елементаран начин коришћењем својстава Хоферове метрике $d$ и групе $\mathrm{Ham}(M)$. Недегенерисаност изводимо помоћу Леме 4.7 и Последице 4.2. Узимајући $H^\alpha \equiv 0$ добијамо

$$-\int_0^1 \max(H^\beta)ds \leq \rho(a, H^\beta) \leq -\int_0^1 \min(H^\beta)ds.$$

Заменом $a = \mu$ и $a = 1$ за фундаменталну класу $\mu$ и класу тачке 1 добијамо

$$\rho(\mu, H^\beta) \leq -\int_0^1 \min(H^\beta)ds,$$

односно
$$-\int_0^1 \max(H^\beta)ds \leq \rho(1, H^\beta).$$
Одузимањем ових неједнакости добијамо
$$\rho(\mu, H^\beta) - \rho(1, H^\beta) \leq \int_0^1 \max(H^\beta)ds - \int_0^1 \min(H^\beta)$$
одакле узимањем инфимума следи
$$\rho(\mu, H^\beta) - \rho(1, H^\beta) \leq d(id, H^\beta).$$
Сада недегенерисаност следи из Последице 4.2. Конструисана метрику зовемо *Хоферовом метриком* на простру $\mathcal{L}_M(L_0)$.

# Литература

[1] М. Антић, *Диференцијална геометрија*, Математички факултет у Београду, у припреми.

[2] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет у Београду, 2003.

[3] Б. Јовановић, *Парцијалне и интегралне једначине*, Завод за уџбенике, Београд, 2010.

[4] М. Матељевић, *Комплексне функције 1 и 2*, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.

[5] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2*, скрипта, `http://poincare.matf.bg.ac.rs/ milinko//skripta/Analiza2.pdf`.

[6] Д. Милинковић, *Мини курс о симплектичким многострукостима* `http://poincare.matf.bg.ac.rs/ milinko/skripta/simplekticke.pdf`.

[7] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, 2003.

[8] P. Albers, *A Lagrangian Piunikhin-Salamon-Schwarz morphism and two comparison homomorphisms in Floer homology*, International Mathematics Research Notices, 2008.

[9] V. I. Arnold, *Sur une propriete topologique des applications globallmant canoniques de la mecanique classique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 1965.

[10] M. Audin, M. Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, Springer, 2014.

[11] A. Banyaga, *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique*, Commentarii Mathematici Helvetici, 1978.

[12] A. Banyaga, D. Hurtubise, *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[13] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *A History of Duality in Algebraic Topology.*

[14] M. Betz, *Operad Representations in Morse Theory and Floer Homology*, Stanford University Ph.D thesis, 1995.

[15] M. Betz, R. L. Cohen, *Graph Moduli Spaces and Cohomology Operations*, Turkish Journal of Mathematics, 1994.

[16] R. Bott, L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

[17] L. Buhovsky, Y. Ostrover, *On the Uniqueness of Hofer's Geometry*, Geometric and Functional Analysis, 2011.

[18] J. Djuretić, J. Katić, D. Milinković, *Comparison of spectral invariants in Lagrangian and Hamiltonian Floer theory*, Filomat, *mo anneap*

[19] Y. Eliashberg, M. Gromov, *Convex symplectic manifolds*, International Journal of Mathematics, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 1991.

[20] Y. Eliashberg, L. Polterovich, *Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms*, International Journal of Mathematics, 1993.

[21] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, Journal of Differential Geometry, 1988.

[22] A. Floer, *A relative Morse index for the symplectic action*,Communications on Pure and Applied Mathematics, 1988.

[23] A. Floer, *Witten's complex and infinite-dimensional Morse theory*, Journal of Differential Geometry, 1989.

[24] A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Communications in Mathematical Physics, 1989.

[25] A. Floer, H. Hofer *Coherent orientations for periodic orbit problems in symplectic geometry*, Mathematische Zeitschrift, Springer, 1993.

[26] M. Gromov, *Pseudo Holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Inventiones mathematicae, 1985.

[27] H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps* , Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1990.

[28] M. Hutchings, *Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves)*, 2002
`http://people.math.umass.edu/ sullivan/797SG/hutchings-morse.pdf.`

[29] J. Katić, D. Milinković, *Piunikin-Salamon-Schwarz isomorphisms for Lagrangian intersectios*, Differential Geometry and its Applications, 2005.

[30] J. Katić, D. Milinković, *Coherent orientation of mixed moduli spaces in Morse-Floer theory*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 2009.

[31] F. Laudenbach, J.-C. Sikorav, *Persistance d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent*, Inventiones mathematicae, 1985.

[32] R. Leclercq, F. Zapolsky, *Spectral invariants for monotone Lagrangians*, arXiv:1505.07430

[33] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2012.

[34] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, Oxford Mathematical Monographs, 1999.

[35] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology: Second Edition*, American Mathematical Society, 2012.

[36] D. Milinković, *Morse homology for generating functions of Lagrangian submanifolds*, Transactions of the American Mathematical Society, 1999.

[37] D. Milinković, *On Equivalence of Two Constructions of Invariants of Lagrangian Submanifolds*, Pacific Journal of Mathematics, 2000.

[38] D. Milinković, Y. G. Oh, *Generating functions versus the action functional-stable Morse theory versus Floer theory*, Proceedings of Workshop on Geometry, Topology and Dynamics, Montreal, 1998.

[39] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Annals of Mathematics, 1952.

[40] A. Monzner, N. Vichery, F. Zapolsky, *Partial quasi-morphisms and quasi-states on cotangent bundles, and symplectic homogenization*, arXiv:1111.0287

[41] Y. G. Oh, *Symplectic topology as the geometry of action functional. I. Relative Floer theory on the cotangent bundle*, Journal of Differential Geometry, 1997.

[42] Y. G. Oh, *Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds*, The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry, Progress in Mathematics Volume 232, 2005.

[43] Y. G. Oh, *Symplectic Topology and Floer Homology*
`http://people.maths.ox.ac.uk/ritter/morse-cambridge.html`.

[44] Y. Ostrover, *A Comparison of Hofer's Metrics on Hamiltonian Diffeomorphisms and Lagrangian Submanifolds*, Communications in Contemporary Mathematics, 2003.

[45] S. Piunikhin, D. Salamon , M. Schwarz, *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology*, Contact and Symplectic Geometry, 1996.

[46] L. Polterovich, *The Geometry of the Group of Symplectic Diffeomorphism*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel 2001.

[47] L. Polterovich, D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, American Mathematical Society and Centre de Recherches Mathématiques, 2014.

[48] A. Ritter, *Morse homology, Lecture notes* `http://people.maths.ox.ac.uk/ritter/morse-cambridge.html`.

[49] J. Robbin, D. Salamon, *The Maslov index for paths*, Topology, 1993.

[50] J. Robbin, D. Salamon, *The spectral flow and the Maslov index*, Bulletin of the London Mathematical Society, 1995.

[51] D. Salamon, *Lectures on Floer homology*, 1997.

[52] M. Schwarz, *Morse Homology*, Birkhäuser, 1993.

[53] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Commentarii Mathematici Helvetici, 1954.

[54] C. Viterbo, *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Mathematische Annalen , 1992.

[55] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, Journal of Differential Geometry, 1982.

# Индекс појмова