Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад

Настава геометрије у различитим школским системима-упоредна анализа

ментор:

Проф. Др Срђан Вукмировић

студент:

Јован Шиљић

1141/2012

Београд 2015.

Садржај

Увод

Вековима и миленијумима уназад најстарије цивилизације су користиле многа сазнања из геометрије јер су им била неопходна у свакодневном животу. Сумерци, Египћани, Вавилонци, Индијци и наравно Грци, који су још у VI веку пре нове ере преузели водећу улогу у развоју науке, нису могли да замисле живот без геометрије. Сматра се да је геометрија поникла у Египту из практичне потребе да се после изливања Нила поплављено земљиште премери и поново парцелише. Као у долини Нила, и у долини река Тигра и Еуфрата, у Месопотамији, цветала је цивилизација неколико миленијума пре ступања Грка на историјску сцену. И у Месопотамији геометрија је била развијена, ако не и развијенија него у Египту судећи према записима који су до нас доспели. Грци су од Египћана и Вавилонаца преузели научна сазнања и онда све то почели да сређују. Многе чувене школе у старој Грчкој, које су се бавиле друштвеним наукама и филозофијом, изучавале су геометрију, јер се сматрало да се на тај начин слушаоци уче логичком расуђивању што је било неопходно при озбиљном бављењу филозофијом. Стога не изненађује што је изнад улаза у Платонову академију писало: „*Нека не улази онај ко не зна геометрију*". У односу на друге научне области, геометрија је достигла завидан ниво, а једни од најзаслужнијих за то су били старогрчки математичари: Талес из Милета(око 634-546. године старе ере), Питагора са Самоса(рођен је средином шестог века старе ере) и Еуклид (око 330-275. године старе ере).

Талес је био легендарни филозоф, математичар и астроном старог века, убрајан је међу седам мудраца. Све остале мудраце превазишао је многостраношћу своје делатности јер поред тога што се бавио филозофијом, математиком и астрономијом, био је и хидротехничар, и наутички инжењер, трговац, и политичар, и како тврди Плутарх у делу *Гозба седам мудраца,* једини се међу мудрацима уздигао изнад сфере практичне користи. Морнаре је учио да се орјентишу пазећи на сазвежђе *Малог медведа*, а према Херодотовим речима, предвидео је помрачење Сунца које се, како је касније утврђено, збило 28. маја 585. године старе ере. Традиција приписује Талесу да је први доказивао теореме и да је, штавише, умео да докаже пет геометријских ставова међу којима је и тврђење да је угао над пречником прав.

Питагора је један од најутицајнијих људи грчке интелектуалне историје. Око 530. године старе ере иселио се из родног града у јужну Италију, у Кротон, где је основао своју школу. Заправо, било би боље рећи да је он утемељио један савез или једно морално-религиозно братство које је опстало и после његове смрти. Иако није ништа написао, њему се приписује да је утврдио да је збир унутрашњих углова троугла једнак збиру двају правих углова, да је умео да докаже да важи четрдесет седми став прве књиге Еуклидових *Елемената,* данас познат као *Питагорина теорема* и да је развио геометријску алгебру из друге књиге *Елемената*. Приписивала су му се и друга открића као што су постојање несамерљивих дужи и конструкција правилних полиедара.

Еуклид је написао *Елементе* око 300. године старе ере. Иако нема много књига које се са *Елементима* могу поредити по утицају на историју цивилизације, о њеном аутору се веома мало зна. Вероватно је учио у Атини, у Платоновој академији. По позиву Птоломеја Сотера, Александровог генерала који је завладао Египтом, дошао је у Александрију и ту основао чувену математичку школу која је после тога постојала вековима. Поред *Елемената*, који су доскора свуда служили као уџбеник геометрије, саставио је још неколико списа који су сачувани до наших дана. То су:

- *Подаци,* који служе као увод у геометријску анализу
- *О разлагању фигура*, спис сачуван само у арапском преводу
- *Феномени,* посвећени елементарној сферној геометрији и њеној примени у астрономији
- *Оптика,* у којој Еуклид расправља о ширењу и одбијању светлости у складу са питагорејском теоријом коју је, касније, преузео Платон, о зрацима који из очију падају на предмете.

Све до 19. века геометрија се изучавала на основу *Елемената*, када је руски математичар Лобачевски (1792-1856), професор универзитета у Казању, утемељио хиперболичку геометрију која се назива и геометријом Лобачевског. На његовом предавању одржаном на Универзитету у Казању 24. фебруара 1826. године, први пут је јавно саопштена идеја о томе да се геометрија може засновати на аксиоми која негира пети Еуклидов постулат тј. да се кроз дату тачку ван дате праве у истој равни могу повући две праве које не секу дату праву. Садржај овог предавања објављен је у расправи штампаној у казањском *Веснику* за 1829. годину.

Тако је Лобачевски основао једну нову геометрију, у којој нема нелогичности, мада су закључци са становишта очигледности веома необични. У почетку су ови резултати изазвали подсмех, јер нису налазили подлогу у коначном простору. У овој геометрији збир унутрашњих углова у троуглу није константан и мањи је од збира два права угла, не постоје слични троуглови, а троуглови који имају једнаке углове су подударни, у датој равни кроз дату тачку ван дате праве може се повући бесконачно много правих које не секу дату праву.

Потпуно независно од њега до исте геометрије дошао је и мађарски математичар, Јанош Бољај (1802-1860) који је резултате својих истраживања објавио 1832. године у виду додатка књиге „*Геометрија*", свога оца Фаркаша Бољаја. Стога се тај рад у литератури и среће под насловом „*Апендикс*", што на латинском језику значи додатак.

Нова стремљења у аксиоматичком заснивању геометрије подстицала су математичаре да приступе суптилној анализи основних геометријских појмова и тврђења. Седамдесетих година 19. века два немачка математичара Рихард Дедекинд (1872.) и Георг Кантор (1873.) скоро истовремено, на различите начине, развили су учење о непрекидности. Увођењем аксиома непрекидности они су успели да отклоне један од крупних недостатака аксиоматике Еуклида. Године 1882. немачки математичар, Мориц Паш (1843-1930) у својој књизи „Предавања из новије геометрије", уводи аксиоме поретка којима отклања још један недостатак аксиоматике Еуклида. Три италијанска математичара Ђузепе Пеано (1889.), Ђузепе Веронезе (1891.) и Марио Пиери (1889.) у својим расправама дају своје визије аксиоматичког заснивања геометрије. Најсистематичнији приступ у геометрији заснован на непротивречном, независном и потпуном систему аксиома дао је немачки математичар Давид Хилберт (1862-1943) у свом делу „Основи геометрије" објављеном 1899. године. Геометријски објекти које разматра Хилберт у овом делу имају далеко шире значење него код Еуклида. За основне геометријске објекте он узима тачке, праве и равни. У већини данашњих уџбеника даје се курс геометрије који је заснован на идејама блиским Хилбертовом раду.

Настава геометрије

У последњих двадесетак година у многим земљама света поново се јавља мишљење да настава математике треба да указује и на примене математичког знања у моделирању нашег окружења. У томе предњаче земље Далеког истока, као што су: Сингапур, Јапан, Кина, Јужна Кореја итд.

Геометријско знање је широко примењено на моделирање реалности. Оно се користи при разматрању помрачења преко кругова, рефлексија преко елипсе и парабола, радио таласа преко хиперболе, паркетирање преко полигона... Геометрија доприноси решавању многих проблема свакодневног живота као што су паковање производа, оглашавање, изградња мостова, тунела, зграда, спортских терена, прављење мапа градова и саобраћајних путева итд.

Велики број ученика не увиђа улогу геометрије у свакодневном животу што је један од разлога слабе мотивације ученика на часовима математике.

Настава геометрије у свим школским системима заузима значајну улогу у наставном плану и програму. У неким земљама геометрија има највећи удео у наставном плану и програму математике. Тако од земље до земље постоје различите методе, принципи и начини како се кроз наставне јединице и теме обрађују области из геометрије.

Ми ћемо упоређивати наставни план и програм геометрије у школским системима следећих земаља: Енглеска, Јапан, Француска, Холандија и Немачка(покрајина Баден-Виртемберг). Такође, навешћемо неколико карактеристичних примера и задатака који су намењени ученицима за решавање и вежбу у државама чији план анализирамо. Дати задаци су углавном намењени узрасту ученика од 10 до 16 година.

Енглеска

Наставни план и програм математике у Енглеској сврстан је по главним разредима и нивоима које ученици постепено достижу. Постављени су јасни циљеви, и то да се наставним планом програмом осигура да сви ученици:

- вешто користе основне математичке појмове, укључујући и да током времена стичу праксу да решавају сложене математичке проблеме, као и да развију опште разумевање и способност мишљења и примене знање брзо и прецизно.
- закључују математички кроз тражење решења и да кроз претпоставке и уопштавање знају да доказују користећи математички језик.
- могу да реше проблеме примењујући своје знање у устаљеним и неуобичајеним ситуацијама повећавајући вештину, укључујући разлагање проблема на једноставније кораке и буду истрајни у проналажењу решења.

Све области у математици су тесно повезане и ученици треба да се оспособе да се снађу у представљању разних математичких идеја. Програми учења су, по потреби, организовани у наизглед различитим областима, али ученици треба да направе преглед кроз разне математичке теме.

Очекује се да већина ученика савлађује наставни план и програм истим темпом. Било како било, одлуке о доношењу темпа напретка треба да се заснивају на осигурању схватања ученика до следећег нивоа.

План и програм геометрије у Енглеској

Главни ниво 1(прва и друга година учења)

Прва година учења

Ученике треба учити да:

- препознају и именују дводимензионалне и тродимензионалне фигуре што укључује: 2-Д фигуре(на пример правоугаоник, квадрат, кругове и троуглове), 3-Д фигуре (на пример квадар, коцка, пирамида, сфера)

Смернице:

Ученици знају да препознају 2-Д и 3-Д облике различитих величина у свакодневном животу са знањем да четвороуглови, троуглови, квадри и пирамиде нису увек слични једни другима.

Ученике треба учити: да опишу положај, правац и кретање, укључујући цео окрет, половину, четвртину и три четвртине окрета, да користе језик положаја за правац и кретање и орјентацију у простору, да знају за орјентацију и у смеру казаљке на часовнику као и у њеном супротном смеру.

Друга година учења

Ученике треба учити да:

- установе и описују својства 2-Д фигура, број страница, симетрије
- установе и описују својства тела и просторних фигура укључујући број ивица, темена, пљосни
- препознају фигуре које су на странама тела и просторних фигура (на пример круг на ваљку или троугао као пљосан пирамиде)
- упореде и разврстају 2-Д и 3-Д облике у објектима који се појављују свакодневно
- именују фигуре на начин који је одговарајући за њихов ниво писања и изражавања
- цртају линије и фигуре користећи лењир

Нижи главни ниво 2(трећа и четврта година учења)
Трећа година учења

Ученике треба учити да:

- цртају 2-Д фигуре и праве тела и просторне фигуре користећи материјал за моделирање, препознају тела и просторне фигуре у различитим ситуацијама и описују их
- препознају углове код различитих фигура
- препознају праве углове, препознају да два права угла чине опружен угао, а четири права угла пун угао
- препознају паралелне и нормалне праве, као и парове таквих правих
- примењују заокругљивање децимала бројева када цртају дужи и странице фигура у центиметрима у различитим ситуацијама

Четврта година учења

Ученике треба учити да:

- упореде и класификују геометријске фигуре, укључујући четвороуглове(на пример паралелограм, ромб, трапез) и троуглове(на пример, једнакокраки, једнакостранични, разнострани) на основу њихових особина и величине
- препознају оштре и тупе углове, да их упоређују и уређују по величини коришћењем угломера и препознају правилне и неправилне многоуглове
- препознају симетрале 2-Д фигура представљене у другачијим ситуацијама
- допуњују једноставне симетричне фигуре узимајући у обзир одређену праву симетрије и препознају симетрију на разним дијаграмима
- описују координате тачака у координатном систему у првом квадранту
- описују померања координата тачака тј. промену њихових позиција лево/десно и горе/доле

Виши главни ниво 2(пета и шеста година учења)
Пета година учења

Ученике треба учити да:

- препознају тела и просторне фигуре укључујући коцку и друге полиедре, одвајајући их од 2-Д фигура
- знају мерити углове у степенима, процењују и упоређују оштре, тупе и опружене углове
- цртају дате углове и мере их у степенима
- користе својства правоугаоника како би одредили непознате дужине страница и мере углова
- разликују правилне и неправилне многоуглове на основу једнаких страница и углова
- извежбају прецизност у цртању лењиром до милиметра
- користе типичне ознаке за паралелне и нормалне праве
- користе појам дијагонале и да изведу углове формиране између страница, као и углове између дијагонала и паралелних страница(углови са паралелним крацима), као и друга својства код четвороуглова коришћењем геометријских рачунарских програма

Шеста година учења

Ученике треба учити да:

- конструишу 2-Д фигуре користећи дате странице и углове, описују и граде моделе полиедара, што укључује израду мреже полиедара
- знају да упоређују и класификују геометријске фигуре на основу њихових особина и пронађу непознате углове у троугловима, четвороугловима и осталим многоугловима
- илуструју и именују делове круга, укључујући полупречник, пречник и обим
- препознају унакрсне углове, углове са паралелним крацима, напоредне углове
- цртају и препознају координате тачака у сва четири квадранта координатног система
- цртају једноставније фигуре пресликавају их осном симетријом

Главни ниво 3

Ученике треба учити да:

- изводе и примењују формуле за израчунавање и решавају проблеме као што су: обим и површина троугла, паралелограма, трапеза, запремина квадра и коцке и других полиедара(укључујући и ваљак)
- решавају проблеме у вези са обимом и површином круга и површином кружног исечка
- цртају и мере странице и углове геометријских фигура укључујући тумачење размере цртежа
- знају да конструишу симетрале страница и датих дужи, нормале на странице и дате дужи, симетрале углова коришћењем лењира и шестара и препознају да се растојање од тачке до праве или дужи рачуна конструисањем нормале из те тачке на дату праву или дуж што представља најкраће растојање
- описују скице и цртеже коришћењем устаљених термина и ознака основних геометријских појмова
- знају да користе ставове о подударности троуглова
- изводе и користе збир унутрашњих углова у троуглу и четвороуглу и да рачунају збир унутрашњих углова у правилним многоугловима
- користе подударност и сличност троуглова као и Питагорину теорему код једноставнијих доказа
- користе Питагорину теорему и тригонометријске функције да би решили проблеме у вези са правоуглим троуглом
- користе основне особине темена, ивица и пљосни, коцке, квадра, призме, пирамиде, ваљка, купе, сфере за решавање проблема у простору

- тумаче математичке везе и алгебарски ,и геометријски

Главни ниво 4

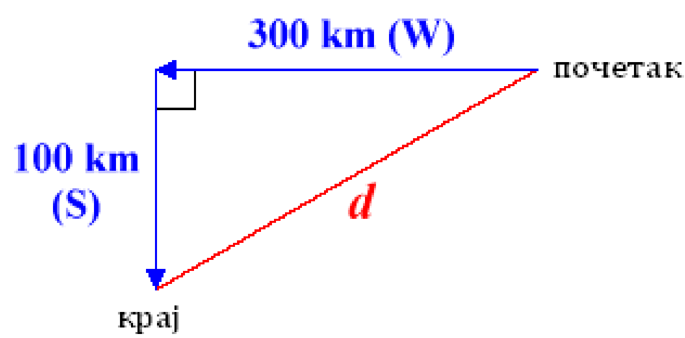
Поред утврђивања садржаја из главног нивоа 3 ученике треба учити да:

- пресликавају геометријске фигуре коришћењем ротације, симетрије и транслације
- користе и примењују сва својства у вези са кругом и кружницом и њиховим елементима укључујући: центар, полупречник, тетиву, пречник, обим, тангенту, лук, кружни исечак
- примењују и доказују различите ставове у вези са кругом
- израчунају површину и запремину лопте, пирамиде, купе и осталих полиедара
- примењују подударност и сличност и препознају односе површине и запремина фигура и тела
- знају вредности тригонометријских функција за углове од 30°, 45°, 60° и 90°, знају и примењују синусну и косинусну теорему када траже непознате елементе троугла
- знају да сабирају, одузимају и множе векторе скаларом и то геометријски представљају
- користе векторе и операције са њима код доказивања различитих једнакости

Ево и неколико карактеристичних задатака:

Задаци

1. Брод креће из луке и плови ка западу 300 km, а онда 100 km тачно ка југу. Израчунати колико је брод на крају овог путовања удаљен од почетне луке?



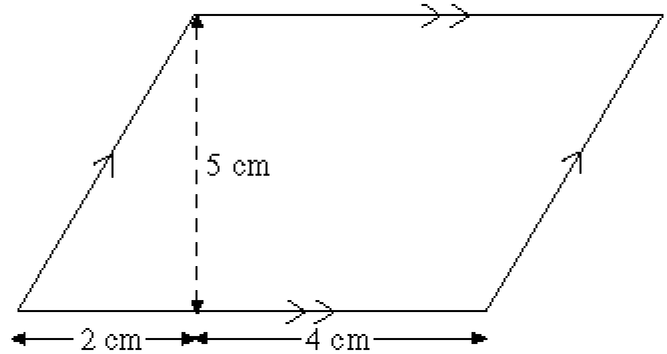
Слика 1

Решење:

Са d ћемо означити растојање од почетне тачке до крајњег одредишта брода. Овде се може применити Питагорина теорема, па важи:

$$d^2 = 100^2 + 300^2$$
$$d^2 = 10000 + 90000$$
$$d^2 = 100000$$
$$d = \sqrt{100000} = 316{,}2\ km$$

2. Дат је паралелограм који је приказан на слици:



Слика 2

Израчунати обим паралелограма, а резултат приказати на две децимале.

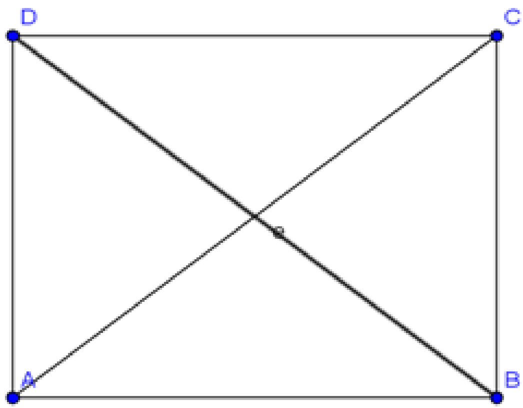
Решење:

$$O = 2a + 2b$$
$$a = 2\ cm + 4\ cm = 6cm$$
$$h = 5\ cm$$

Применом Питагорине теореме добијамо:

$$b^2 = 5^2 + 2^2$$
$$b^2 = 25 + 4$$
$$b^2 = 29$$
$$b = \sqrt{29} = 5{,}39\ cm$$
$$O = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5{,}39 = 12 + 10{,}78 = 22{,}78\ cm$$

3. Соба треба да има под правоугаоног облика, са странама дужине 4 m и 5 m. Градитељ жели да провери да ли је под собе савршен правоугаоник и мери обе дијагонале пода собе које би требало да буду исте дужине. Колика је дужина дијагонала? Резултат приказати са једним децималним местом.



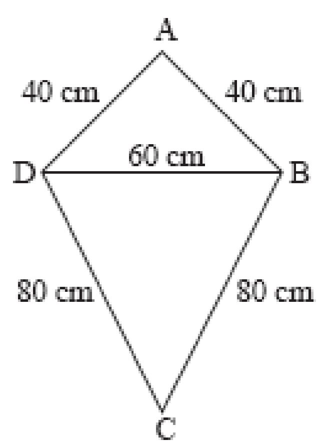
Слика 3

Решење:

$$AB = CD = 5\ m, \qquad BC = AD = 4\ m$$
$$AC = BD$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 5^2 + 4^2$$
$$AC^2 = 25 + 16$$
$$AC^2 = 41$$
$$AC = \sqrt{41} = 6{,}4\ m$$

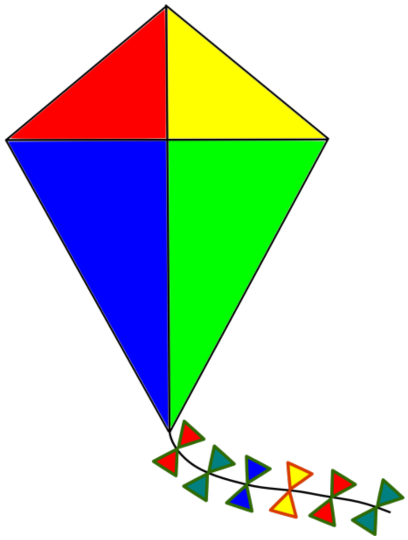
Дужина дијагонале мора бити 6,4 m.

4. Сара прави змаја од два једнакостранична троугла, као што је приказано на слици:

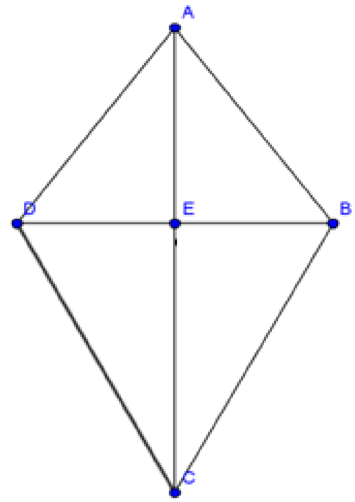


Слика 4

Израчунати дужину дијагонале AC, а тражени одговор дати као заокругљен цео број у центиметрима.



Слика 5

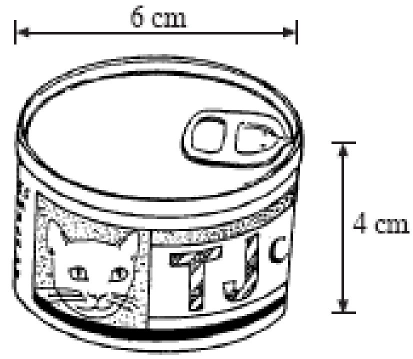


Слика 6

Решење: Модел змаја представља делтоид код којег, као што знамо, већа дијагонала полови мању, па пошто је $DB = 60\ cm$, $DE = EB = \frac{DB}{2} = \frac{60}{2} = 30\ cm$.

$$AC = AE + EC$$
$$AE^2 = AD^2 - DE^2$$
$$AE^2 = 40^2 - 30^2 = 1600 - 900 = 700$$
$$AE = \sqrt{700} = 26{,}4575\ cm$$
$$EC^2 = CD^2 - DE^2$$
$$EC^2 = 80^2 - 30^2 = 6400 - 900 = 5500$$
$$EC = \sqrt{5500} = 74{,}162\ cm$$
$$AC = AE + EC = 26{,}4575\ cm + 74{,}162\ cm$$
$$AC = 100{,}6195\ cm \approx 101\ cm$$

5. TJ компанија, која производи храну за мачке , планира да користи конзерве облика ваљка. Унутрашње мере конзерве су приказане на слици:



Слика 7

Израчунати запремину хране за мачке коју та конзерва садржи.

Решење: Да бисмо решили проблем, морамо израчунати запремину ваљка пречника основе 6 cm и висине 4 cm. Дакле, $2r = 6\ cm$ и $H = 4\ cm$.

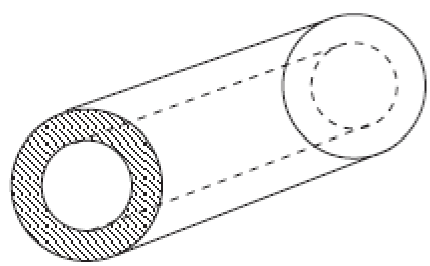
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot H$$

$$V = 3^2 \cdot \pi \cdot 4 = 9 \cdot 4\pi = 36\pi\ cm^2$$

$$V = 36 \cdot 3{,}14 = 113{,}04 \approx 113\ cm^2$$

Конзерва садржи 113 cm^2 хране за мачке.

6. На слици је приказан попречни пресек цеви која је дугачка 50 cm. Унутрашњи пречник цеви је 20 cm, спољашњи пречник цеви је 30 cm.



Слика 8

а) Израчунати запремину метала која потребна да би се та цев направила.

б) Израчунати целокупну површину цеви, укључујући унутрашњу површину.

Решење:

$$\text{а) } V = 15^2 \cdot \pi \cdot 50 - 10^2 \cdot \pi \cdot 50$$

$$V = 225 \cdot 50 \cdot \pi - 100 \cdot 50 \cdot \pi$$

$$V = 11250\pi - 5000\pi = 6250\pi\ cm^3$$

$$V = 6250 \cdot 3{,}14 = 19625\ cm^3$$

б) $P = 2 \cdot 15^2\pi - 2 \cdot 10^2\pi + 30\pi \cdot 50 + 20\pi \cdot 50$

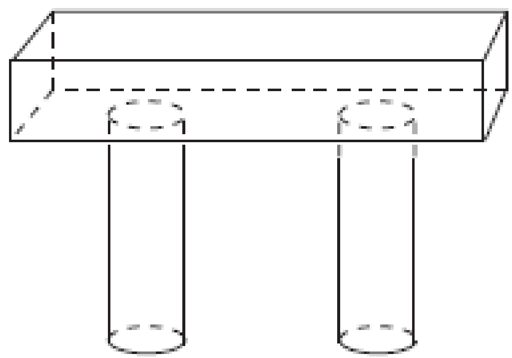
$$P = 2 \cdot 225\pi - 2 \cdot 100\pi + 1500\pi + 1000\pi$$

$$P = 450\pi - 200\pi + 2500\pi$$

$$P = 2750\pi\ cm^2$$

$$P = 2750 \cdot 3{,}14 = 8635\ cm^2$$

7. Бетонска греда лежи на два бетонска стуба. Греда има облик квадра са ивицама $0{,}5\ m$, $3\ m$ и $0{,}4\ m$. Стубови имају пречник основе $0{,}4\ m$ и висине $2\ m$. Израчунати укупну запремину бетона која је потребна да се направи греда и стубови.



Слика 9

Решење:

$$V = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2^2\pi \cdot 2$$

$$V = 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}04 \cdot 3{,}14$$

$$V = 0{,}6 + 0{,}5024$$

$$V = 1{,}1024\ m^3 \approx 1{,}1\ m^3$$

Јапан

Министарство просвете у Јапану прикупља и дистрибуира курсеве студија и водича наставних програма у којима су циљеви и садржај постављени до детаља, за сваки предмет на сваком нивоу разреда. Очекивано је да се сав садржај предаје. Одбори за образовање у свакој префектури праве наставне програме на основу ових докумената и комерцијалних издавача уџбеника, који треба да буду овлашћени од стране Министарства. Префектуре одлучују о уџбеницима који се доносе на основу предлога из школа. Све у свему, систем је јако централизован и круто униформисан.

Јапански школски систем се састоји од 6 година основне школе, 3 година млађе средње школе и 3 година средње школе. Практично сва деца узраста од 6 до 15 година су уписана у школу. Фокусираћемо се на више разреде основне школе (3.-6.) и млађе средње школе. Постоје и јавне и приватне институције на свим нивоима академске хијерархије: 1% ученика основних школа, 4% нижих средњошколаца, а 29% од виших средњошколаца је уписано у приватне школе. Школе нису усмерене у основним и млађим средњошколским разредима, а намера је да наставник бира задатке који одговарају ученицима. Не постоје националне смернице о диференцијацији са одлукама напуштања школа (мада је занемарљиво задржавање и убрзавање ученика). Не постоји формални систем екстерног испитивања. Свака префектура поставља свој испит на крају млађих разреда средње школе (старост 15 година). Више разреде средње школе, које похађа 97% јапанских ученика, су рангиране, а за упис високих школа конкуренција је веома велика, што подстиче похађање приватних ЈУКУ школа за припремање пријемних испита.

Удео укупних часова и недељно потрошено време на математици приказано је у Табели 1.

Табела 1. Целокупни часови и време потрошено на математици у основним и млађим средњим школама

	основна				млађа средња		
разред(старост)	3(9)	4(10)	5(11)	6(12)	1(13)	2(14)	3(15)
часови по седмици(сати)	21	22	22	25	25	25	25
% времена за математику	18	17	17	17	10	13	13
Просечно време математике седмично(минути)	227	224	224	255	150	195	195

Геометрија у јапанском наставном програму

Наставни програм геометрије у Јапану има сличности са оним у Енглеској: оба програма су спирална, имају језгро еуклидске геометрије, укључујући и једноставне облике, подударности и сличности, неке трансформације геометрије (са прилично мало кохерентности и развоја), а сличан приступ премеравања и посвећености неговању логичког размишљања и закључивања. Обе земље прилично мало покривају геометрију координата или вектора или ангажовање својих ученика у „правим'' пројектима или истраживањима у геометрији.

Два програма се разликују у времену увођења садржаја, уз јапански се геометријске теме уводе у целини, а чешће раније него у Енглеској. У Јапану постоји знатно већи нагласак на принципу и компасу конструкција (почиње у раном узрасту од 9 година), и на разлагање тела и просторних фигура, на скицирање(посебно на представљање просторних фигура у равни), и на пропорционалним односима међу мерама. „Институт креативне технологије'' се само повремено помиње и то више са општим него са конкретним геометријским циљевима: на пример „ефикасније коришћење рачунара приликом захтевнијих задатака''.

У Јапану постоји рани фокус на рад са геометријским дводимензионалним фигурама, и знатно јачи нагласак је на конструкцијама него што је случај у Енглеској. Такође, у Јапану се више ради и са тродимензионалним фигурама. Од 13. године експлицитно се ставља нагласак на изградњу оквира за неформални доказ, на основу једнакости (подударности) и сличности фигура. Касније нагласак се помера на коришћење особина за доказ резултата, који онда могу да се користе и у накнадном доказу. У овом јапанском програму, за разлику од Енглеске, од свих ученика се очекује да ураде доказе који се односе на 2-Д и 3-Д дијаграме, у којима се очекује да се ученици позивају само на познате резултате.

Трендови и промене у Јапану

Јапан је недавно смањио свој наставни план и програм математике због притиска на програм у целини. Почевши од априла 2002. године, издвајање времена за учење математике у већини разреда је смањено са просечним бројем минута недељно, у разредима од 3. до 6. опада на 193 минута, а у млађим разредима средње школе пада до 150 минута, као што је приказано у табели 2.

Табела 2. Укупни часови и време математике у основним и млађим средњим школама.

	Основни				Млађи средњи		
Разред(узраст)	3(9)	4(10)	5(11)	6(12)	1(13)	2(14)	3(15)
Број часова по години	910	945	945	945	980	980	980
Број часова математике по години	150	150	150	150	105	105	105
Број часова математике недељно	4-5	4-5	4-5	4-5	3	3	3
Стандардно трајање часа(минути)	45	45	45	45	50	50	50
Просечно време математике недељно	193	193	193	193	150	150	150

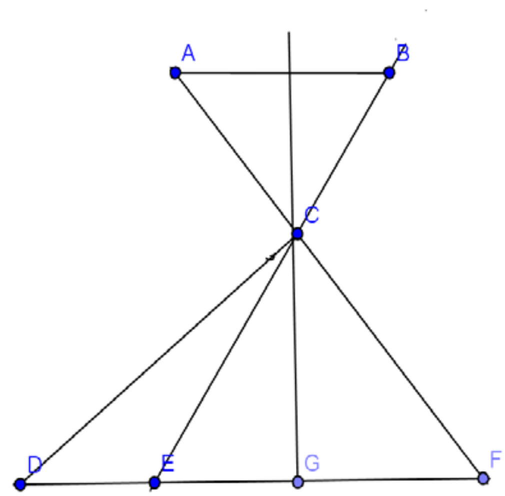
Није могуће дати детаље о изменама, али је јасно да је неки садржај избрисан (нпр. резање материје), а неки се преселио у више средње школе(тај круг особина није обавезан за све ученике). Поред тога, већи акценат ће се ставити на коришћење компјутера у основним разредима да би се обогатио дечији осећај за бројеве, количину и геометријске фигуре. Није изненађујуће да су промене биле контроверзне, и ту је прича о паду стандарда.

Сада ћемо се осврнути на неколико карактеристичних геометријских задатака из јапанског наставног плана и програма:

Задаци:

1. На слици су приказани конопци неких једара високог брода.
   ACF и BCE су праве линије $\measuredangle DCE = 27°$ и $\measuredangle BCF = 150°$. Израчунај величине следећих углова:

Слика 10



Слика 11

а) $\measuredangle ACD$
б) $\measuredangle ACB$
в) $\measuredangle DCF$

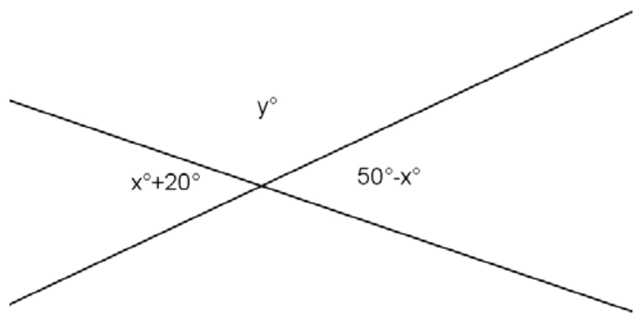
Решење:

а) $\measuredangle ACE = \measuredangle BCF = 150°$ (унакрсни углови),
$\measuredangle ACD = \measuredangle ACE - \measuredangle DCE = 150° - 27° = 123°$
б) $\measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ACE = 180° - 150° = 30°$
в) $\measuredangle DCF = \measuredangle DCE + \measuredangle ECF = 27° + 30° = 57°$

2. Испитати сваку од слика:

- формирати једначину по x
- израчунати вредност x и y.

1)

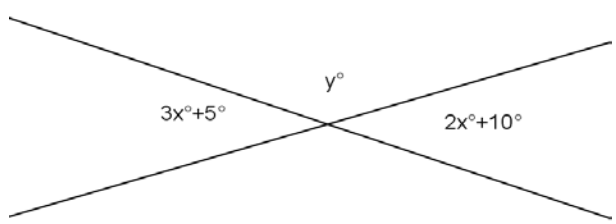


Слика 12

Решење: $x° + 20° = 50° - x°$
$x° + x° = 50° - 20°$
$2x° = 30°$
$x° = 15°$
$x = 15$

$x° + 20° + y° = 180°$
$15° + 20° + y° = 180°$
$35° + y° = 180°$
$y° = 180° - 35° = 145°$
$y = 15$

2)

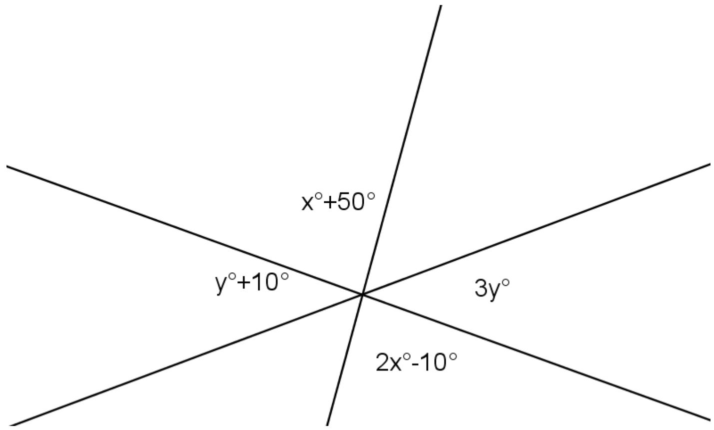


Слика 13

Решење: $3x° + 5° = 2x° + 10°$
$3x° - 2x° = 10° - 5°$
$x° = 5°, x = 5$

$3x° + 5° + y° = 180°$
$3 \cdot 5° + y° = 180°$
$15° + y° = 180°$
$y° = 180° - 15° = 165°, y = 165$

3)



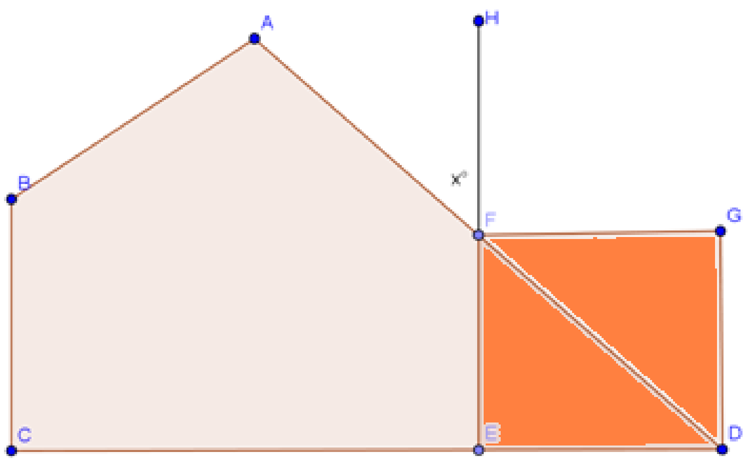
Слика 14

Решење: $x° + 50° = 2x° - 10°$ $\quad$ $y° + 10° = 3y°$

$2x° - x° = 50° + 10°$ $\quad$ $3y° - y° = 10°$

$x° = 60°, x = 60$ $\quad$ $2y° = 10°, y° = 5°, y = 5$

3. Сликар је поставио скелу на кров куће. AFD и HFE су праве линије.$\measuredangle HFG$ је прав угао. $\measuredangle AFH = x°$. Ако је $\measuredangle AFE = 155°$, израчунати величину $\measuredangle GFD$.



Слика 15

Решење: $\measuredangle AFH = 180° - \measuredangle AFE = 180° - 155° = 25°$,

$x° = 25°, x = 20$

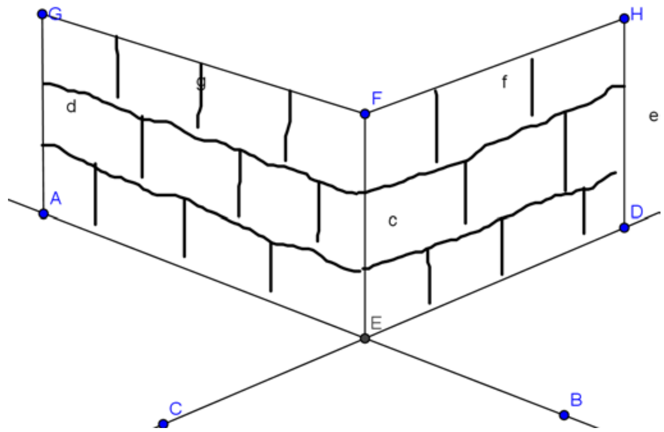
$\measuredangle AFH = \measuredangle EFD = 25°$ (унакрсни углови)

$\measuredangle GFD = 180° - \measuredangle HFG - \measuredangle EFD = 180° - 90° - 25°$

$\measuredangle GFD = 65°$

4. ***Мозгалица***

Да би открио угао $\measuredangle AED$ којег чине два зида која се спајају, градитељ је поставио два права штапа AB и CD уз зидове. Он је утврдио да је $\measuredangle DEB$ само четири петине $\measuredangle CEB$. Која је величина $\measuredangle AED$?



Слика 16

Решење:

$\measuredangle DEB = \frac{4}{5}\measuredangle CEB$

$\measuredangle CEB + \measuredangle DEB = 180°$

$\measuredangle CEB + \frac{4}{5}\measuredangle CEB = 180°$

$\frac{9}{5}\measuredangle CEB = 180°$

$9\measuredangle CEB = 900°$, $\measuredangle CEB = \frac{900°}{9}$, $\measuredangle CEB = 100°$

$100° + \measuredangle DEB = 180°$

$\measuredangle DEB = 180° - 100°$

$\measuredangle DEB = 80°$

$\measuredangle AED = \measuredangle CEB = 100°$

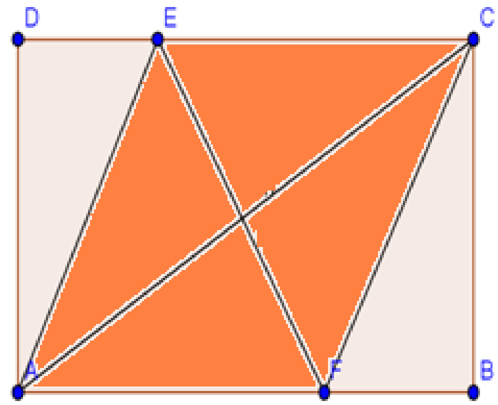
5. $ABCD$ је правоугаоник. Када су уцртане дужи AE и AC , утврђено је да оне деле $\measuredangle DAB$ на три једнака дела. Дуж ЕF је нормална на AC.

a) Колики је $\measuredangle EAC$?

б) Доказати да је ΔEAC једнакокраки ($AE = EC$).

в) Доказати да је $CF = AE$.

г) Који је четвороугао $AFCE$?



Слика 17

Решење:

а) $\measuredangle DAB = 90°$, пошто га дужи AE и AC деле на три једнака дела, следи да је $\measuredangle EAC = 30°$.

б) $\measuredangle ECA = \measuredangle FAC$ (углови са паралелним крацима), $\measuredangle FAC = 30°$, па је онда и $\measuredangle ECA = 30°$, из претходног је $\measuredangle EAC = 30° \Rightarrow \Delta\, EAC$ једнакокраки.

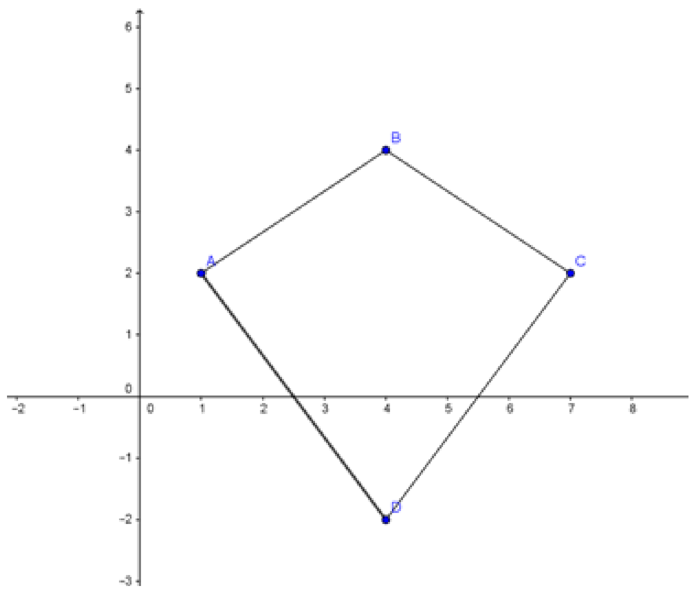
в) Пошто је дуж ЕF нормална на AC, а $\measuredangle EAC = 30° \Longrightarrow \measuredangle AEF = 60°$.
$\measuredangle EAF = 60°$ па је и $\measuredangle AFE = 60° \Longrightarrow \Delta\, AFE$ једнакостранични.
Онда је $EF = EC \Longrightarrow \measuredangle EFC = \measuredangle ECF$.
$\measuredangle FEC = 60°$ на основу чега закључујемо да је $\measuredangle EFC = 60°$, а такође и $\measuredangle ECF = 60°$. Па су тако ΔAFE и ΔFCE два подударна једнакостранична троугла. Дакле, $CF = AE$.

г) Странице четвороугла $AFCE$ су једнаке: $AF = FC = CE = EA$.
Дијагонале AC и EF се полове и нормалне су, па из тога следи да је четвороугао $AFCE$ ромб.

6. Дате су координате три темена четвороугла $ABCD$: $A(1,2), B(4,4), C(7,2)$. Који је четвороугао $ABCD$ ако теме D има координате: а)(4,-2); б)(4,0).

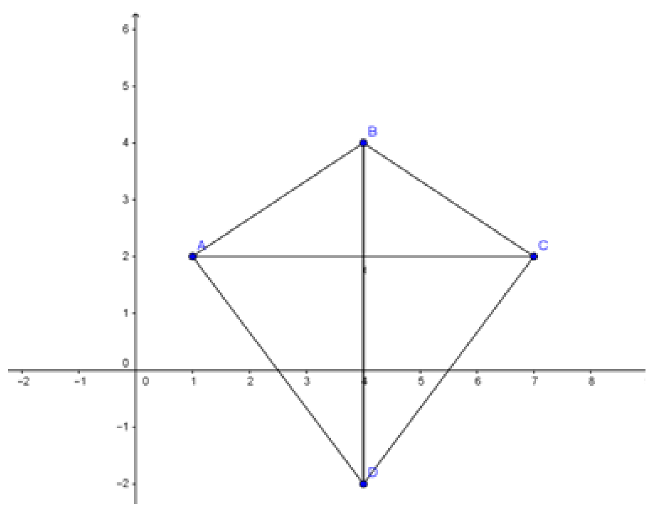
Решење:

а)



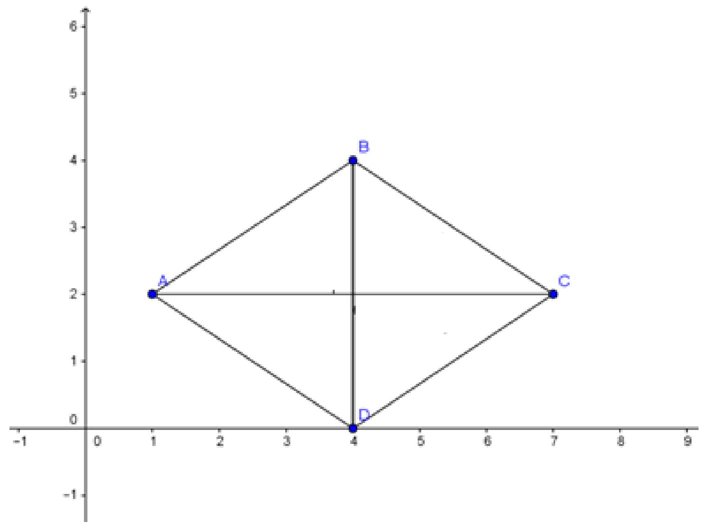
Слика 18

Четвороугао $ABCD$ је делтоид. Суседне странице су му једнаке $AB = BC$ и $AD = DC$, а дијагонале AC и BD су међусобно нормалне:



Слика 19

б)



Слика 20

Четвороугао $ABCD$ је ромб. Све странице су му једнаке, а дијагонале му се полове и секу под правим углом.

Француска

Централна влада има општу одговорност за организацију и структуру образовања у Француској. Скоро сва деца узраста од 3 године су у школи. Обавезно школовање је од 6-16 година: оно се састоји од основне школе(узраста 6-11 година); ниже средње школе(узраста 11-15)и прва година више средње школе(висока школа: друга класа, узраста 15-16). Постоји национални програм који обухвата математику, која важи од предосновне школе до краја вишег средњег образовања(узраст 17). Иако постоји простор за локалне иницијативе у неким годинама, школе су генерално веома ограничене националним наставним планом и програмом. Уџбеници су комерцијално објављени и прате национални наставни програм.

Диференцијација у школама се у великој мери управља понављањем године, што је готово непозната пракса у примарном сектору, али у нижим средњим школама није редак случај ученика да буду две године иза своје званичне генерације. Преко 90% од једне старосне групе прати исти програм на крају треће. У другој старосној групи (узраста 15-16 година) је јасна разлика између две врсте средње школе, једна је посвећена стручним студијама, а друга (са око две трећине ученика вршњака) даје опште и техничко образовање. Одлука о томе у коју врсту средње школе би ученици требало да иду, је у великој мери на одговорности самих ученика и њихових родитеља.

У основној школи је око 20% од укупног наставног плана посвећено математици. Проценат препорученог времена у наставном програму ниже средње школе је приказан у табели 3.

Табела 3. Укупни часови и време математике у нижим средњим школама

Нижа средња школа			
разред (узраст)	шести (11)	пети и четврти (12 и 13)	трећи (14)
часови по недељи (сати)	26	минимум 25,5	28,5-31,5
просечно време математике недељно(сати)	4	3,5-4,5	4

Главне категорије садржаја у програму математике су: алгебра, геометрија и управљање подацима, статистика и функције (која укључује пропорционалност и апликације).

Геометрија у француском наставном програму

Наставни план и програм је спирала са различитим концептима и односима поново преиспитаних у различитим годинама. Идеје облика и симетрије су се прво развиле из цртања и конструкција, са трансформацијама које се појављују редовно кроз цели програм, иако коришћене углавном да се развију једноставни концепти; на пример, увођење ротације брзо доводи до односа углова, посебно у круговима(нпр. истом сегменту, централним угловима и обиму, итд.) транслација је основа појма вектора. Јавља се већи нагласак на геометрију равни него на геометрију простора у Француској у односу на Енглеску, иако постоји доказ истраживања и истраживачког рада, неколико примера представљају математичко објашњење.

У организацији „Трендови у међународној математици и научне студије'' 1995. године недостајала је Француска, која није била међу земљама —великим корисницима рачунара у математичким лекцијама. Године 2001. уџбеници обезбеђују неки број страна који демонстрира коришћење одређеног софтвера као алтернативну методу за решавање одређених вежбања, и наставни план и програм секундарног промовисања могућности технологије у свим областима математике.

Наставни план и програм у Француској такође је фокусиран на дедукцији и доказу у геометрији. Уџбеници у Француској негују приступ који води ка формалном доказу, на пример у одређивању својстава геометријских облика. Оно што је карактеристично јесте нагласак на различитим аспектима Талесове теореме (да дуж паралелна једној страници троугла дели друге две странице троугла у истом односу), која се обрађује у наставном програму од 13 до 14 година. Ти докази имају тенденцију да се ослањају на добро дефинисане особине и теореме.

Да бисмо илустровали како се формални доказ уводи, напомињемо да се ученици од своје петнаесте године више фокусирају на мерење дужина него на дедукцију, мада постоје вежбе које не захтевају закључке.

Организација и теме

Шести разред

Ученици разматрају основне геометријске појмове, продубљују својства основних геометријских елемената(тачке, праве, дужи, равни, вектори, полигони и тела, углови) или трансформације (осна симетрија). Уводе се неколико нових појмова као што су симетрале страница и углова и мерење углова.

Седми разред

Ученици продубљују њихово учење о троугловима: рачунају и сабирају углове у троуглу, изучавају својства висине, симетрала углова и страница. Откривају и уче како да користе својства паралелограма. Упознати су са новим појмовима: централном симетријом, унакрсним угловима, призмом и ваљком.

Осми разред

У осмом разреду јак нагласак је стављен на доказивање кроз исцрпно учење о троуглу: Питагорина теорема, сличност троуглова, Талесова теорема, значајне тачке троугла (центар описане кружнице, центар уписане кружнице, тежиште и ортоцентар). Ученици проучавају појмове као што су: удаљеност тачке од праве, тангенте кружнице, а исто тако купу и пирамиду. Они су такође упознати и са тригонометријом кроз функцију косинус (функције синус и тангенс се изучавају у деветом разреду по француском наставном плану и програму).

Вештине које је потребно изградити током школовања:

- Прављење геометријских фигура коришћењем традиционалних алата и геометријских програма на рачунару.

- Да у говору приликом излагања решења задатака као и у писаној форми користе математички речник.
- Да знају да репродукују сложене цртеже.
- Коришћење дедукције у доказима.
- Тумачење приказа страна геометријских тела и образаца.
- Мерење удаљености, углова и времена.
- Претварање јединица у метричком систему.
- Израчунавање дужине, површине, запремине, брзине, протеклог времена, применом формула и својстава.

Различита тестирања:

- Индувидуални квизови (један по наставној јединици)
- Индивидуални сумативни тестови (на крају сваке наставне теме)
- Групно решавање проблема у сложеним ситуацијама
- Незванично тестирање кроз онлајн интерактивне вежбе
- Незванично тестирање математичког изражавања ученика у разговору на часу, када наставник поставља одређена питања у вези са разним математичким проблемима и приликом предавања.

Трендови и промене у Француској

Један од утицајних извештаја у геометрији(Кахан 2000.) је забележио да: „Складност математичких програма је имплицитно грађена на систему аксиома не тако далеких од Еуклида, али у случају подударности троуглова је замењена коришћењем осне симетрије''. То такође тврди да се тумачењем геометријских проблема код подударности слике могу разложити на мање сложене што омогућава да ученици лакше изводе доказе.

Наставни план и програм математике у Француској установљен од Министарства просвете обновљен је 2008. године. Јак нагласак је стављен на геометријске појмове који се јављају од 6. до 9. разреда. У настави математике у Француској ученици развијају своје индуктивно и дедуктивно закључивање и критичко размишљање док изграђују основе геометријских концепата упознајући их градативно кроз сваки разред. Ученици идентификују и формулишу питања, извлаче и доказују претпоставке, спајају и представљају кораке решења, и налазе везе између појмова.

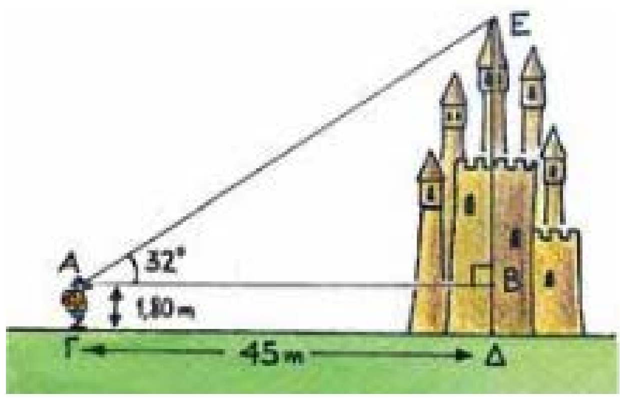
А ево и неколико задатака из наставног плана и програма у Француској:

Задаци:

1. Једну од најпопуларнијих туристичких атракција у Француској представља замак Mont Saint-Michel који се налази близу Нормандије. Сматра се средњовековним чудом због чињенице да је саграђен на врху стене. Mont Saint-Michel оригинално је био опатија и служио је као популарна дестинација међу ходочасницима.

Слика 21

Туриста се налази на удаљености од 45 m од средишта замка и врх замка види под углом од 32°. Он хоће да израчуна колико је замак висок. Како ће то урадити?



Слика 22

Решење:

На слици уочавамо правоугли троугао ABE са правим углом у темену B и углом од $32°$ у темену A. Дакле,

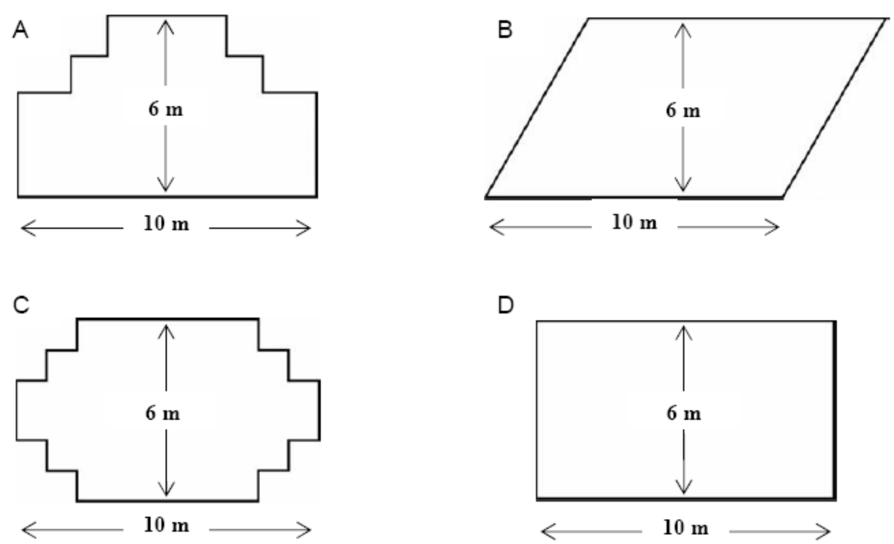
$$tg32° = \frac{BE}{AB}, \qquad tg32° = \frac{EB}{45}$$

$$0{,}625 = \frac{EB}{45}, \qquad EB = 45 \cdot 0{,}625$$

$$EB = 28{,}125\ m$$

Висина замка је $28{,}125\ m$.

2. Столар има 32 метра дрвета и жели да направи ограду око баште. Он разматра следеће пројекте за башту:



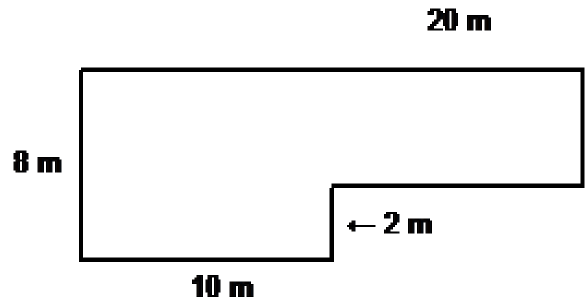
Слика 23

Да ли сваки од ових пројеката може послужити за ограђивање баште?

Решење:

Сваки од пројеката представља неку геометријску фигуру чији је обим заправо ограда око баште. На основу датих мера од ученика се очекује да закључе да је код сваке од датих фигура обим баш 32 метра осим паралелограма који је дат на пројекту B. Код њега је очигледно обим већи, па он отпада као варијанта за ограђивање.

3. Базен облика као на слици, оивичен је плочицама чија је цена 23 евра по метру дужине. Израчунати колико ће новца бити потребно да би се базен оивичио плочицама.



Слика 24

Решење: Да бисмо то израчунали, треба нам обим базена.

$$O = 20\,m + 8\,m + 10\,m + 2\,m + 10\,m + 6\,m$$

$$O = 56\,m$$

$$56 \cdot 23 \text{ евра} = 1288 \text{ евра}$$

Да би се базен оивичио плочицама, потребно је 1288 евра.

Холандија

У Холандији обавезно редовно образовање траје од 5. до 16. године(мада је ванредно даље образовање обавезно у узрасту од 16 до 18 година). Средње образовање од 12. године је обезбеђено и у државним и у приватним школама. Средњошколци прате заједничко основно образовање кроз три године након чега су смештени у један од четири типа курсева: предстручни(ВБО), општи млађи(МАВО), општи виши(ХАВО) и предуниверзитетски(ВВО). Наставници одлучују о курсу који би ученик требало да похађа према процени ученичких постигнућа и резултата на стандардизованом тесту обављеном на крају основне школе.

Године 1998. око 30% старосне групе је уписано у сваки од курсева ВБО и МАВО и око 18% у сваки од ХАВО и ВВО. У једном тренутку сваки од курсева је био доступан у одвојеним школама, али однедавно веће свеобухватне школе настоје да обезбеде све четири врсте курсева у току наставе. Тамо где је омогућена мешовита настава, ученици похађају ХАВО или ВВО образовање и имају додатне часове како би обогатили лекције.

Постоји око шест врста уџбеника који су на располагању, и сви су израђени од стране тимова стручњака из области математичког образовања, углавном професора и наставника предавача, и дистрибуирани од образовних издавача. Пошто су само циљеви студије утврђени у законском програму, уџбеници играју главну улогу у Холандији.

Према организацији „Трендови у међународној математици и научне студије'' 1999. холандски математички програм обухвата 10% укупног наставног програма смештеног у 8. разред. После три разреда основног образовања, када су математички курсеви постали факултативни у ХАВО и ВВО, постоје две врсте доступне математике, А и Б, са циљем да буду различите, али једнаког статуса. Тип А има општи циљ разумевања и решавање реалних проблема и припрему ученика за више студије у којима математика не игра главну улогу(не садржи ниједну геометрију). Тип Б је више формалан и апстрактан, и припрема ученике за научне и техничке студије иако много више потиче из реалних ситуација. Нема ни трага од формалног доказивања у геометрији у холандском образовном систему осим једне групе ученика са највећим способностима курса ВВО. Међутим, неформални аргументи, као што су „објашњење цртежом или рачунањем'' су често потребни.

Геометрија у холандском наставном програму

У шездесетим годинама двадесетог века модерна математика утиче на учење у Холандији. Једна од последица је да је геометрија укинута као посебна грана математике и била замењена типом трансформације геометрије, која је сама припремала пут за аритметизовање геометрије помоћу вектора. Током седамдесетих година под утицајем Фредундтала, који се супротставио модерној математици, темељ онога ,што је познато као „реална математика'' , постављен је и развијен нови наставни план и програм за основне школе. Геометрија је постала истакнути елемент правца реалне математике са нагласком на „посматрање, извођење, размишљање и гледање'' и активностима утемељеним у стварном свету. Наставни план и програм обухвата практичне активности које захтевају мерење и мобилисање знања геометријских цртежа и објеката за решавање реалних задатака.

Наставни план геометрије у Холандији је, као и у већини земаља, сврстан по нивоима ,па су главне теме следеће:

- основни геометријски појмови: тачка, права, раван, угао, дуж, мерење угла и дужи
- кружница и круг, периферијски и централни угао
- раванске фигуре, тела и просторне фигуре и сналажење у простору

- обим и површина круга и примена

- површине фигура и тела, запремина полиедара
- Питагорина и Талесова теорема и примена

- сличност троуглова и примена
- тригонометријске функције, примена

- конструкције многоуглова
- изометријске трансформације

- аналитичка геометрија

Од ученика се очекује следеће:

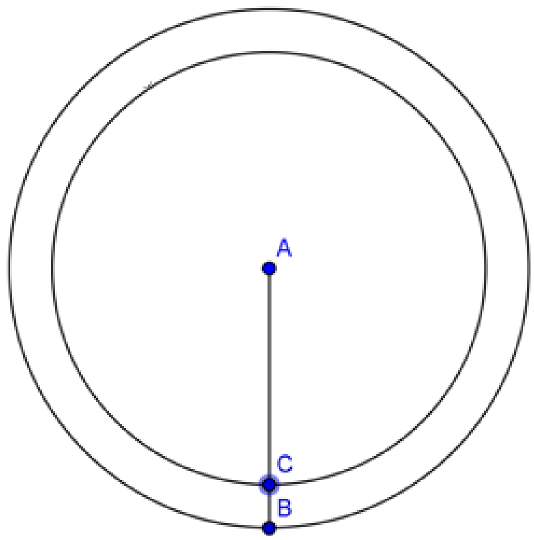
- да овладају основним концептима са којима могу да се снађу у простору на геометријски начин
- да резонују геометријски користећи одређене материјале као што су: планови, мапе, слике и подци о позиционирању, смер, удаљеност и разне скале за мерење
- да могу да објасне одређене слике, да их упрошћавају и да могу да осмисле и идентификују делове неких фигура

Повезаност наставног програма математике према томе лежи у контекстима као и у садржају математике. Истиче се и тражи од ученика да знају да тумаче ситуације у дводимензионалној и тродимензионалној геометрији и рачунању дужине, површине и запремине у мерама. Дводимензионалне вежбе су обично виђене као део простора: на пример, подела земљишта, израчунавање висине зграда који представљају варијације висине у области земљишта са изохипсама. „Институт за креативне технологије'' се не појављује у значајној улози у плану и програму геометрије, али постоје неке назнаке промене у овом погледу.

Ево и неколико задтака из геометрије у Холандским школама:

Задаци:

1. Око екватора је затегнут конопац. Обим Земље је 40000000 метара. Позвани су сви људи да држе конопац тачно један метар изнад тла. Колико метара конопца ће још бити потребно да би се то урадило?



Слика 25

Решење: Нека је полупречник екватора $r = AC$, и нека је $r_1 = AB = AC + 1\ m$.

$$O = 2r\pi,\ O = 40000000\ m$$

$$40000000 = 2r\pi$$

$$r\pi = 20000000$$

$$r = \frac{20000000}{\pi} = \frac{20000000}{3{,}14} = 6369426{,}75\ m$$

Па је $r_1 = 6369426{,}8\ m + 1\ m = 6369427{,}75\ m$

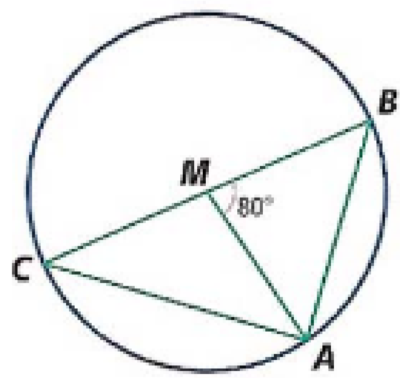
$$O_1 = 2r_1\pi = 2 \cdot 6369427{,}75 \cdot 3{,}14$$

$$O_1 = 40000006{,}27\ m$$

$$O_1 - O = 40000006{,}27 - 40000000 = 6{,}27\ m$$

Дакле, још ће бити потребно 6,27 m конопца ако се он држи на висини 1 m од тла.

2. Дата је слика на којој је централни угао, $\measuredangle AMB = 80°$. Израчунати периферијске углове ABC, ACB и CAB.



Слика 26

Решење: $\measuredangle ACB$ је периферијски угао над тетивом AB.

Пошто је централни угао над истом тетивом 80°, онда закључујемо да је $\measuredangle ACB = 40°$.

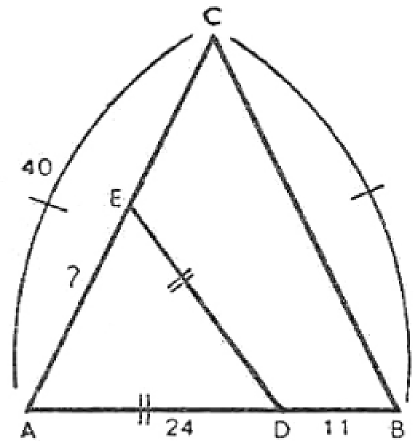
$\measuredangle CAB$ се налази над пречником ,па је он прав тј. износи 90°.

ΔAMB је једнакокраки јер је $MA = MB = r$, па важи да је $\measuredangle MAB = \measuredangle ABM$.

$$\measuredangle MAB = \frac{180° - 80°}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$$

Онда је и $\measuredangle ABM = 50°$ тј. $\measuredangle ABC = 50°$

3. Дата је слика:



Слика 27

Израчунати дужину странице AE.

Решење: Можемо уочити два слична једнакокрака троугла, а то су ΔABC и ΔEAD.

Онда важи да је: $AC : AD = AB : AE$, тј. $40 : 24 = (24 + 11) : AE$

$$40 : 24 = 35 : AE$$

$$40 \cdot AE = 24 \cdot 35$$

$$40 \cdot AE = 840$$

$$AE = \frac{840}{40} = 21$$

Баден-Виртемберг

Свака од 16 немачких покрајина је одговорна за образовање у својој области. Деца обично улазе у обавезну основну фазу у узрасту од 6 година. Основна фаза траје 4 године у већини покрајина, укључујући и Баден-Виртемберг, са вишом средњом фазом се почиње 5. разредом (узраст 10 и више година). Већина покрајина, укључујући и Баден-Виртемберг, су усвојиле селективни троструки систем. Генерално ученици могу да заврше редовно образовање које траје 9 разреда иако они морају да наставе са три године средње школе барем са непуним радним временом. Око 80% немачких ученика у обавезном средњем образовању узима стручне курсеве.

За већину ученика у Баден-Виртембергу ниже средње образовање одвија се у главној школи(основна средња школа), реалки(општа средња школа) или гимназији. Наставни план и програм главне школе и реалке има практично-стручну орјентацију, док је наставни план и програм у гимназији више теоријско-академски. Ученици напуштају главну школу на крају 9. или 10. разреда, реалку после 10. разреда, док у гимназији ученици обично остају док не положе велику матуру (која обезбеђује улаз на универзитет), на крају 12. или 13. године школовања. Школа ,коју ученик похађа, зависи од препоруке основне школе, у консултацији са родитељима. Ученици похађају три врсте школе у отприлике једнаком броју. У већини немачких покрајина разреди се утврђују на основу сталне процене које су спроведене од стране предметног наставника са мало, ако је уопште и има, стандардизације између школа и покрајина. Баден-Виртемберг је необичан по захтевању ученика да се широм покрајине организују завршни испити за стицање сертификата. У Баден-Виртембергу ниже средње школе имају 4(мада у неким годинама 5 или 3) часа математике сваке недеље. Часови трају 45 минута и распоређени су у 5 или 6 дана.

За ученике у сваком од три типа школа, математика је виђена као корисна за неке њихове друге школске предмете, за њихов каснији радни век тако да дају смисао свом свету. Истовремено од ученика се очекује да стекну неко разумевање природе и границе математике, и да од тога потекне задовољство да је уче за сопствену корист. Математика је такође виђена у смислу развијања општих способности као што су логичко размишљање и истрајност(главна школа), решавање проблема вештина и карактеристика као што су прецизност, поузданост, темељност и истрајност(реалка), као и висок ниво одлучности, истрајности и маште(гимназија). Однос између наставних програма три типа Баден-Виртембершких школа није једноставно један хијерархијски. Иако ће та тема вероватно бити третирана и продубљенија и на још више математички начин у гимназији, та тема ће можда бити уведена у ранијој фази реалке или главне школе. Можда је у главној школи и реалки најјачи контраст геометријског наставног програма, поредећи наставни план и програм у Баден-Виртембергу са енглеским националним наставним планом. Дакле, док наставни план и програм у овим школама изгледа прилично узак, чини се да високи когнитивни захтеви са којима се ученици сусрећу, терају на очекивање да се ученици баве проблемима који се састоје из више корака, што ће вероватно поразити многе енглеске кандидате вишег ранга. Наставни план и програм је планиран као дело са фиксним циљевима и крајњим тачкама. Насупрот томе, план и програм за изједначавање ученика у енглеским школама је мање фокусиран за бављење ученичким разматрањима о деловима општег плана и програма који им се допадају.

Геометрија у наставном плану и програму Баден-Виртемберга

Постоје изгледи да има знатног преклапања између садржаја геометрије у енглеском националном плану и програму ,и геометрије наставног плана и програма сваке од три главне врсте нижих средњих школа у Баден-Виртембергу. Ту изгледа и постоји нека сличност у приступу, са тенденцијом да се уведу идеје у емпиријском, практичном начину уместо да се користи више концептуални или дедуктивни приступ. У оба региона трансформација геометрије изгледа мало повезана са другим темама.

Такође постоје разлике. Тако, док се енглески програм обично организује као спирала, са темама организованим у мале јединице које су прилично често пута прегледане, у Баден-Виртембергу наставни план и програм се организује у већим наствним јединицама, које су ређе прегледане, осим у главној школи.

Изгледа да постоји већи нагласак на геометријске конструкције у Баден-Виртембергу, и раду у просторној геометрији иако се то чини пре свега да би се укључило мерење више него визуелизација сама по себи. Могуће је, такође, да је приступ у Баден-Виртембергу генерално више формални и процедурални, са већом употребом формалних математичких термина(као што су дуж и крак), и са већом тенденцијом да именује(и објави) одређене математичке процедуре и резултате(нпр. индивидуални метод Талесове теореме). Уџбеници који се користе пружају богат извор математичких идеја, посебно у односу на класичну еуклидску геометрију, али она има старомодан осећај у свом приступу, као и њен садржај. Иако је нешто од изложеног интересантно, вежбе су прилично рутинске са мало покушаја да се развије увид или визуелна машта.

Трендови и промене у Баден-Виртембергу

Баден-Виртемберг је увео нови наставни план и програм за ниже средње школе 2005. године. Један од утицаја, бар на националном нивоу, вероватно је организација „Трендови у међународној математици и научне студије''. Озбиљна забринутост је изражена због релативно ниског учинка немачких ученика у студији „Трендови у међународној математици и научне студије'' 1995. године, посебно концептуално у вези са захтевнијим задацима. Резултат тога је да су покрајине одлучиле да учествују на домаћој(СИНУС) студији поређења, која је идентификовала велики број проблематичних области у настави и учењу математике као науке, укључујући и слабе вертикалне везе у програму, доминацији индукције у наставним приступима и фокусирању на једну методу решења, и на једноставно рутинско учење.

Задаци карактеристични за геометрију наставног плана и програма покрајне Баден-Виртемберг у Немачкој:

Задаци:

1. На једном дугачком рту који се простире на реци Елби у Хамбургу направљена је најнеобичнија пословна зграда по имену „Dockland''. Зграда је направљена од челика и стакла и њена дужина је 92 m, а од тла њена висина је 23 m. Један њен део изгледом подсећа на прамац брода и он се протеже изнад реке дужином од 40 m ка западу. Конструктори су планирали да речна струја, која утиче на „Dockland'', носи контејнере са пошиљком даље ка истоку до једног џиновског брода на ком се налазе контејнери.

Слика 28

а) Израчунати површину стакла које се налази на бочним странама зграде.

б) Израчунати цену застакљивања бочних страна зграде ако је цена квадрата укључујући и монтажу 90 евра по квадратном метру.

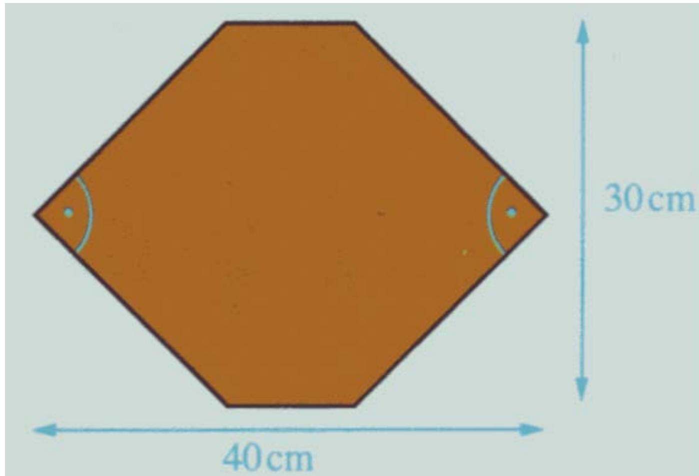
Решење: а) Лако се може закључити да бочна страна зграде има облик паралелограма чија је страница дужине 92 m, а висина 23 m. Па је површина тог паралелограма:

$$P = a \cdot h_a = 92\,m \cdot 23\,m = 2116\,m^2$$

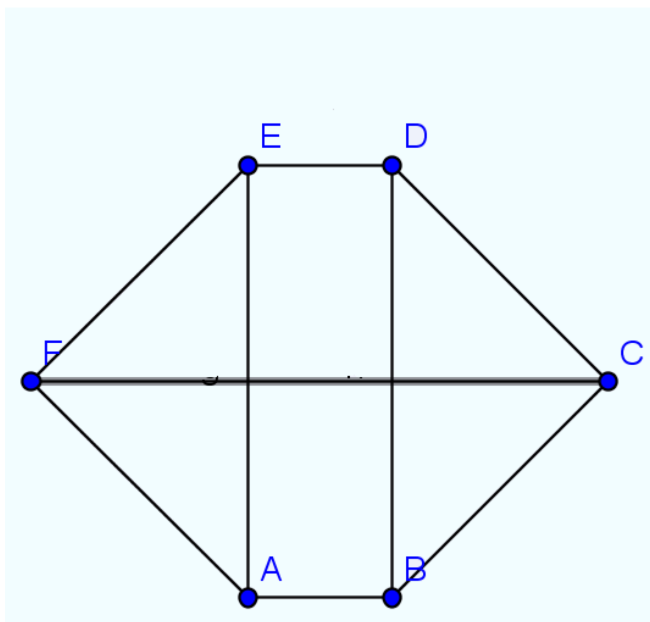
б) $P = 2 \cdot 2116\,m^2 = 4232\,m^2$

цена застакљивања: $4232 \cdot 90$ евра $= 380880$ евра

2. Породица Шулц жели да на под њихове кухиње залепи шестоугаоне плочице које имају на два угла праве углове($\measuredangle AFE = 90°$ и $\measuredangle BCD = 90°$).



Слика 29



Слика 30

а) Израчунати површину једне такве плочице ако је њена највећа дужина $20\ cm$ $(FC = 20\ cm)$, а њена највећа ширина $30\ cm$ $(AE = AD = 30\ cm)$.

б) Израчунати површину кухиње ако је породици Шулц потребно 10 пакета и зна се да сваки пакет садржи 20 плочица.

Решење:

а) Ако саставимо ΔFAE и ΔBCD тако да се странице AE и BD поклапају, добићемо квадрат. Дијагонала тог квадрата је 30 cm. Затим ћемо израчунати страницу тог квадрата:

$$d = a\sqrt{2}$$
$$30 = a\sqrt{2}$$
$$a = \frac{30}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}\ cm$$

Сада можемо израчунати површине правоуглих троуглова.

$$P_{\Delta AEF} = \frac{15\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}}{2} = \frac{225 \cdot 2}{2} = 225\ cm^2$$

Онда је и $P_{\Delta BCD} = 225\ cm^2$. Да бисмо израчунали површину плочице, остаје да још израчунамо површину правоугаоника $ABDE$. Знамо да је $AE = AD = 30\ cm$. Израчунајмо висине ΔAEF и ΔBCD:

$$\frac{30 \cdot h}{2} = 225\ cm^2$$

$$30 \cdot h = 450$$
$$h = \frac{450}{30} = 15\ cm$$
$$AB = ED = 40 - 2 \cdot 15 = 40 - 30 = 10\ cm$$
$$P_{ABDE} = 30 \cdot 10 = 300\ cm^2$$

Дакле, површина једне такве плочице је:

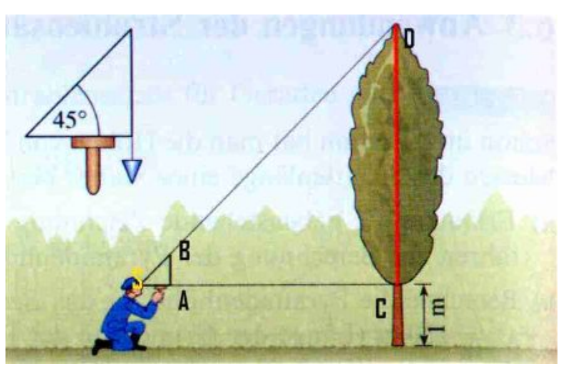
$$2 \cdot 225\ cm^2 + 300\ cm^2 = 450 + 300 = 750\ cm^2$$

б) Површина кухиње је: $750\ cm^2 \cdot 20 \cdot 10 = 150000\ cm^2 = 15\ m^2$

3. Шумар помоћу троугла одређује висину дрвета.

а) Објасните функцију шумарског троугла. Зашто је направљен са углом од 45° ?

б) Шумар је удаљен од стабла 21 m. Колика је приближна висина дрвета?



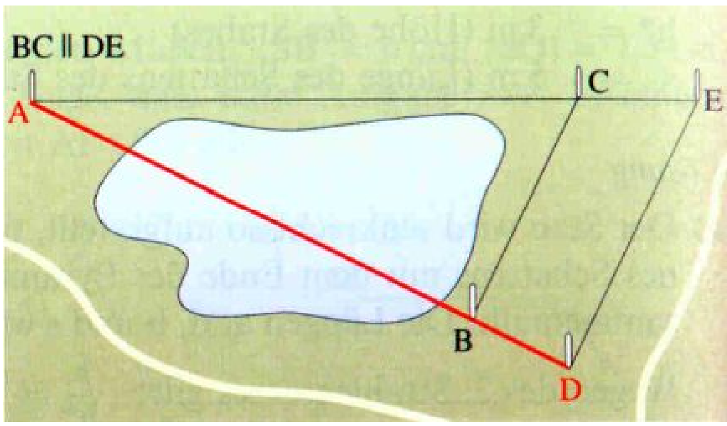
Слика 31

Решење:

а) Са слике можемо видети да је реч о правоуглом троуглу. Ако је један оштар угао правоглог троугла $45°$, онда је и други угао $45°$, па је троугао једнакокраки. Онда су катете тог троугла једнаке, па важи да је удаљеност шумара од стабла приближно једнака висини дрвета. А на ту удаљеност која је изражена у метрима треба још само додати висину на којој је постављен троугао од тла.

б) Приближна висина дрвета је $21 + 1 = 22\ m$.

4. Треба утврдити растојање између тачака A и D, али између њих се налази језеро.



Слика 32

Измерено је следеће: $AC = 63\ m, CE = 14\ m, BD = 10\ m$ и још знамо да је $BC \parallel DE$. Одредити удаљеност од тачке A до тачке D.

Решење:

За решавање задатка користићемо Талесову теорему.

$$AC : AE = AB : AD$$
$$63 : (63 + 14) = AB : (AB + 10)$$
$$63 : 77 = AB : (AB + 10)$$
$$77 \cdot AB = 63 \cdot (AB + 10)$$
$$77 \cdot AB = 63 \cdot AB + 630$$
$$77AB - 63AB = 630$$
$$14AB = 630$$
$$AB = \frac{630}{14} = 45\ m$$
$$AD = AB + BD$$
$$AD = 45 + 10$$
$$AD = 55\ m$$

5. На слици је приказан грб фудбалског клуба Вердера из Бремена.

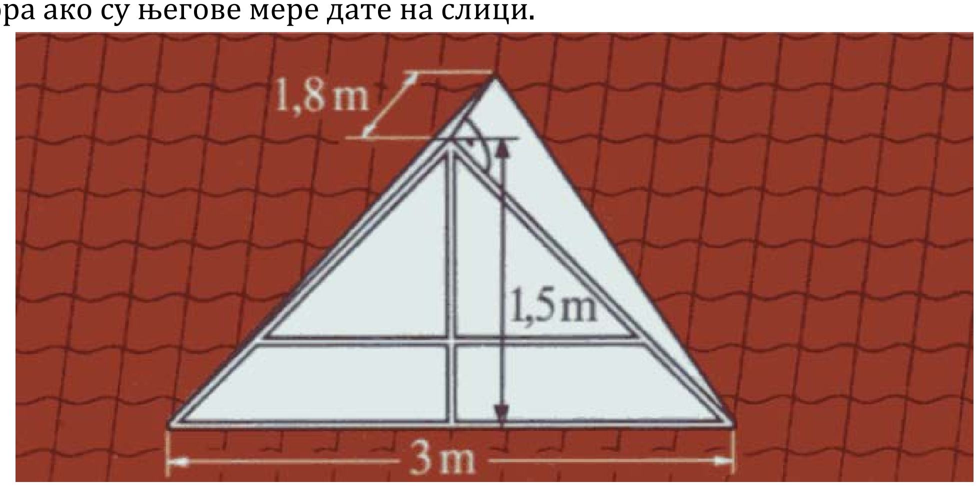
Слика 33

Израчунати површину грба ако је његова ширина 22 cm, а дужина 14 cm.

Решење: Можемо закључити да грб представља модел ромба. Дијагонале ромба су у ствари $d_1 = 22\ cm$ и $d_2 = 14\ cm$. Површину грба можемо израчунати на следећи начин:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$
$$P = \frac{22 \cdot 14}{2} = \frac{308}{2}$$
$$P = 154\ cm^2$$

6. Породица Мајер жели да прошири прозор на соби у поткровљу своје куће. Они су одлучили да уграде троугласти прозор. Израчунати површину тог прозора ако су његове мере дате на слици.

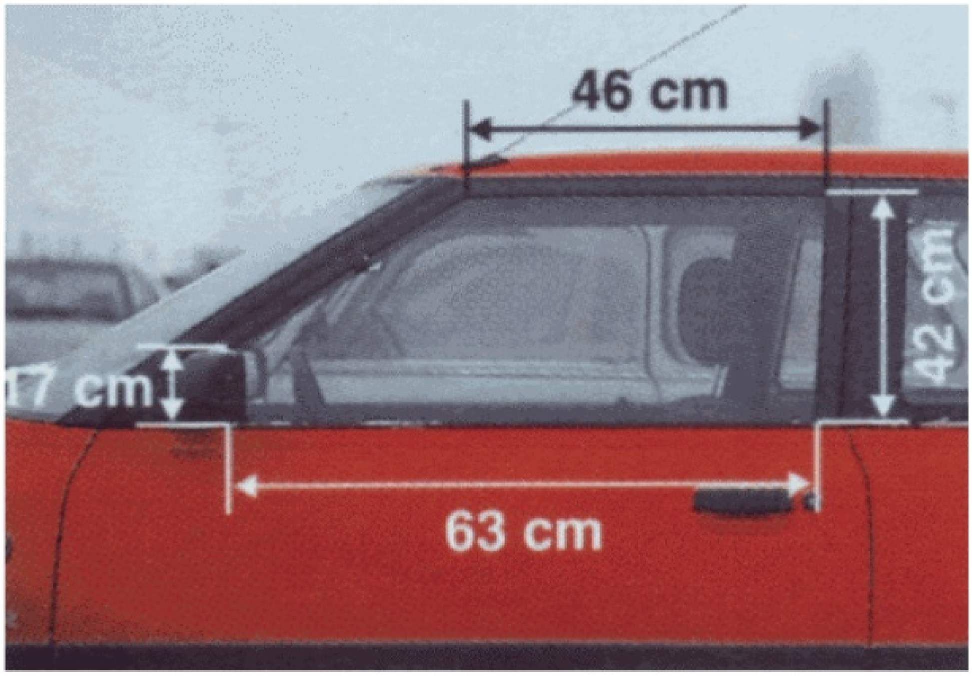


Слика 34

Решење: Висина тог прозора је 1,5 m, а дужина 3 m.

$$P = \frac{3 \cdot 1{,}5}{2} = \frac{4{,}5}{2}$$
$$P = 2{,}25\ m^2$$

7. На слици су приказане димензије бочног прозора аутомобила.



Слика 35

Израчунати површину тог прозора.

Решење: Овај прозор је петоугао који се може разложити на правоугаоник са страницама 63 cm и 17 cm, и трапез са основицама 63 cm и 46 cm чија је висина $h = 42 - 17 = 25\ cm$. Дакле, $P_{prozora} = P_{pravougaonika} + P_{trapeza}$.

$$P_{pravougaonika} = 63 \cdot 17 = 1071\ cm^2$$

$$P_{trapeza} = \frac{63 + 46}{2} \cdot 25 = \frac{109}{2} \cdot 25$$

$$P_{trapeza} = 54{,}5 \cdot 25 = 1362{,}5\ cm^2$$

$$P_{prozora} = 1071 + 1362{,}5$$

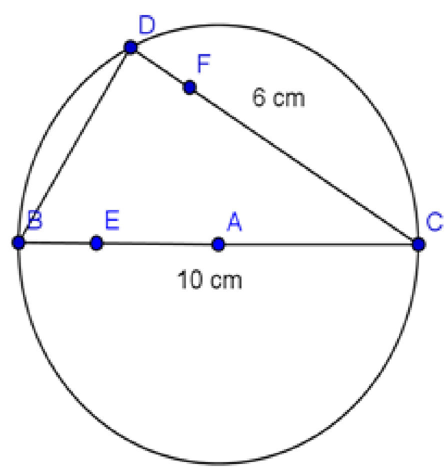
$$P_{prozora} = 2433{,}5\ cm^2$$

Опис часа и активности у школи

Да би анализа наставних планова и програма била употпуњена, укључени су и ученици у нашим школама и у оквиру једног школског часа смо задали ученицима неколико задатака. Задаци са којима су се ученици суочили, су у ствари они, које решавају њихови вршњаци у другим земљама.

У оквиру часа ученици су добили два задатка за решавање:

1. **задатак**:
   Дат је круг са центром у тачки A чији је пречник BC дужине 10 cm. Тетива CD је дужине 6 cm.
   а) Нацртајте слику са датим димензијама.
   б) Објасните зашто је троугао BCD правоугли са правим углом у тачки D.
   в) Показати да је дужина тетиве $BD = 8\ cm$.
   Нека је F тачка на CD, и E тачка на BC. Нека је $CF = 5{,}4\ cm$ и $CE = 9\ cm$.
   д) Да ли су дужи BD и EF паралелне?



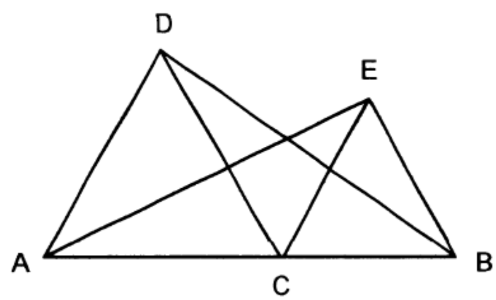
Слика 36

Овакав тип задатка је саставни део наставног плана и програма геометрије у Француској. За његово решавање неопходно је познавање најважнијих теорема, Питагорине и Талесове, као и својства углова на кружници, периферијског и централног. Он представља веома добар тест за ученике и можемо рећи да је меродаван да покаже како се ученици сналазе када се од њих тражи да повежу стечено знање из геометрије.

Задатак је предвиђен за узраст од 16 година што одговара ученицима код којих је час одржан. Сваки од ученика је самостално радио задатак и испоставило се да је већина ученика успела да га реши, осим питања под д), које је уједно представљало и најтежи део задатка. Заправо, у питању се тражила примена Талесове теореме тј. примена сличности на троугао. Ту је тек понеки ученик успео да се снађе и да тачно одговори, и исто тако образложи одговор.

2. задатак

Тачка C је на дужи AB. ACD и BEC су једнакостранични троуглови са исте стране AB. Доказати да је $AE = DB$.



Слика 37

Овај задатак представља пример из јапанских уџбеника који се користе у настави геометрије. Од ученика се очекује да докажу задато на сликама у равни и простору.

Да би урадили задатак, ученици морају да користе подударност троуглова тј. ставове о подударности. Дакле, да би се дато тврђење доказало, потребно је доказати да су два одговарајућа троугла подударна. Од ученика се тражи да сами уоче тражене троуглове и закључе применом ког става се може доказати њихова подударност.

Мали број ученика је успео да реши тражени проблем и нађе прави начин за решавање и доказивање. То нам говори да је потпуно друга ситуација код ученичких способности када треба нешто доказати, у односу на питање када се тражи да се нешто израчуна применом формуле без икаквог доказа. Ученик се суочава са проблемом не знајући који је прави корак ка решавању и шта треба да примени да би доказао тражено. Испоставило се да овакве задатке могу да реше само највештији ученици који у сваком тренутку умеју да баратају са теоремама и ставовима, повежу градиво и сво стечено знање логичким закључивањем.

Час је протекао у пријатној атмосфери. Ученици су сарађивали и трудили се да се покажу у најбољем издању колико је то било у њиховој могућности. Пре почетка рада задатака су добили кратке инструкције и објашњења уколико нису разумели шта се од њих тражи. По истеку времена предвиђеног за решавање задатака детаљно смо прошли кроз проблеме и ученицима је објашњено оно што нису успели да реше. Такође, ученици су усмерени на који начин и којим приступом треба кренути у решавање задатака како не би скренули са правог пута, који ће их сигурно одвести до решења.

Закључак је да овај час доприноси развијању специфичних способности код ученика у виду развијања вештина бољег запажања, повезивања детаља, упоређивања различитих техника у решавању задатака. Овакав начин решавања задатака подстиче потенцијале ученика који ће путем акумулираног знања и размишљања истраживачки приступати проблемима у математици.

Школа у којој је одржан час и спроведена следећа анкета је

Машинско-електротехничка школа „Гоша" у Смедеревској Паланци.

Анкета: Улога и значај геометрије у математици

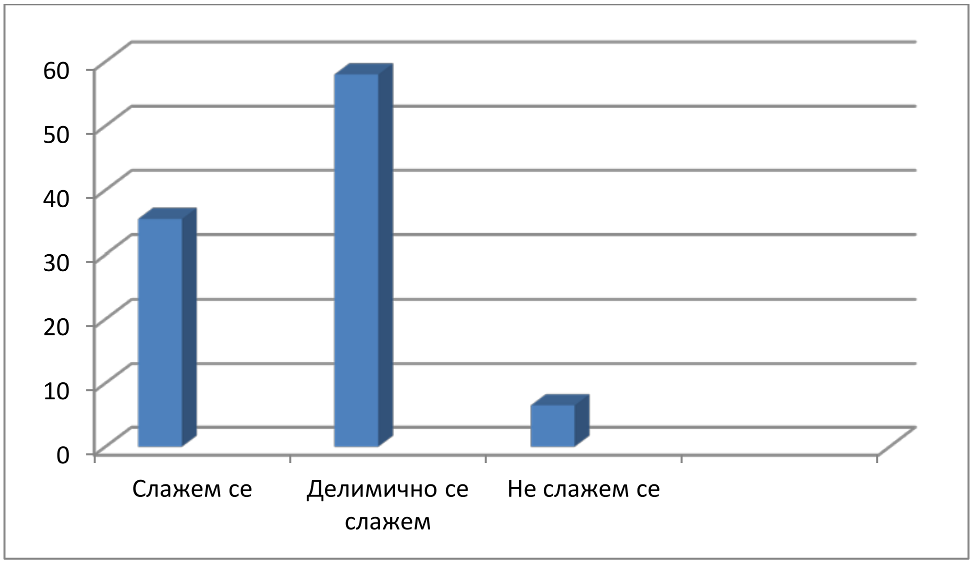
Још су древни Грци приметили да се природа може схватити применом математике тј. да геометрија може да послужи за откривање, а не само описивање. Талес из Милета, рођен у 7. веку пре нове ере, био је први који је изнео опште закључке везане за математичке предмете. Он је предузео прве кораке у правцу систематизације геометрије, и први је доказао математичке теореме оне врсте какве ће Еуклид сакупити у Елементима вековима касније.

Јасно је да је просторна интуиција веома битна, а геометрија нам пружа јасне везе између математике и света чулности. Отуда би геометрија требало да буде једна од најлакших грана математике. Како то у пракси није случај, ова анкета је урађена како бисмо покушали да схватимо на који начин ученици доживљавају часове геометрије.

Анкета која је дата ученицима да попуне садржи само неке од основних фактора који би требало да утичу на наставу геометрије. Испитали смо око 250 ученика, и сада ћемо продискутовати одговоре које су дали. Одговори су на стубичним дијаграмима представљени у процентима.

Прво питање: ***Да ли се слажеш да је геометрија једна од најзанимљививијих грана математике?***

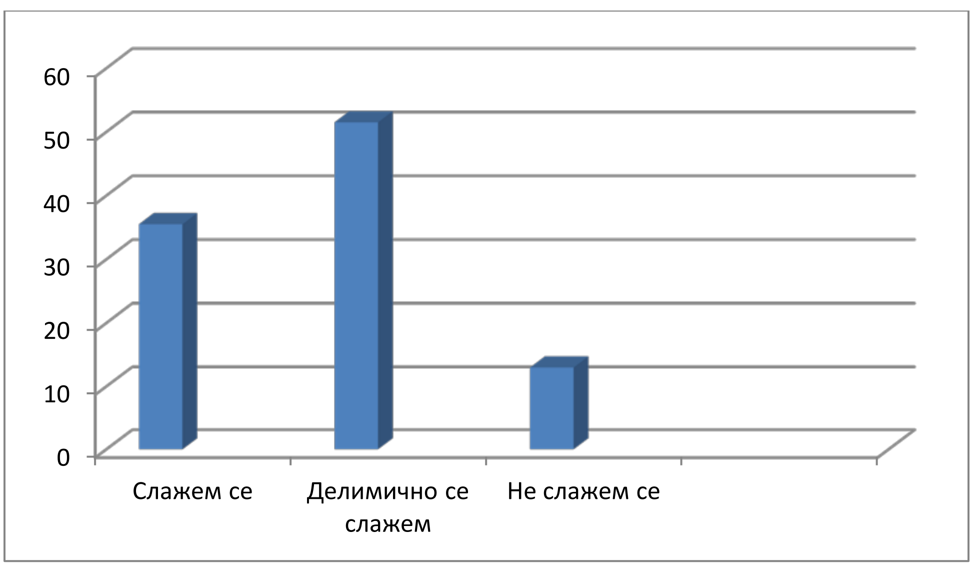
Њихове одговоре можемо видети на следећем стубичном дијаграму:



Као што видимо, велика већина ученика сматра да геометрија може бити веома занимљива. У чему је онда проблем? Погледајмо и остале одговоре.

Друго питање: ***Да ли сматраш да је геометрија једна од најважнијих грана математике?***

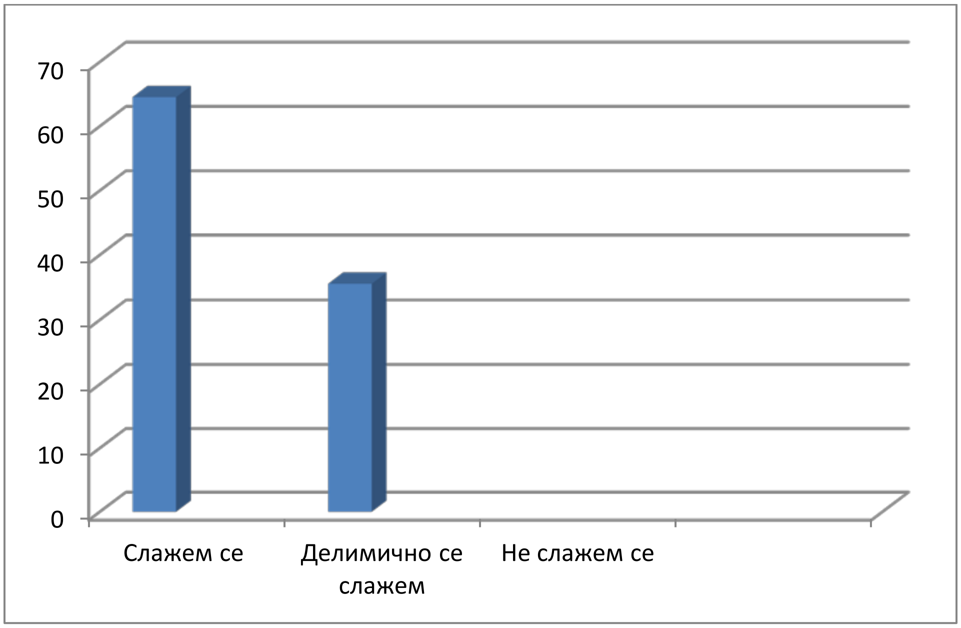
Одговори које су дали распоређени су овако:



Дакле, ученици су углавном свесни значаја геометрије.

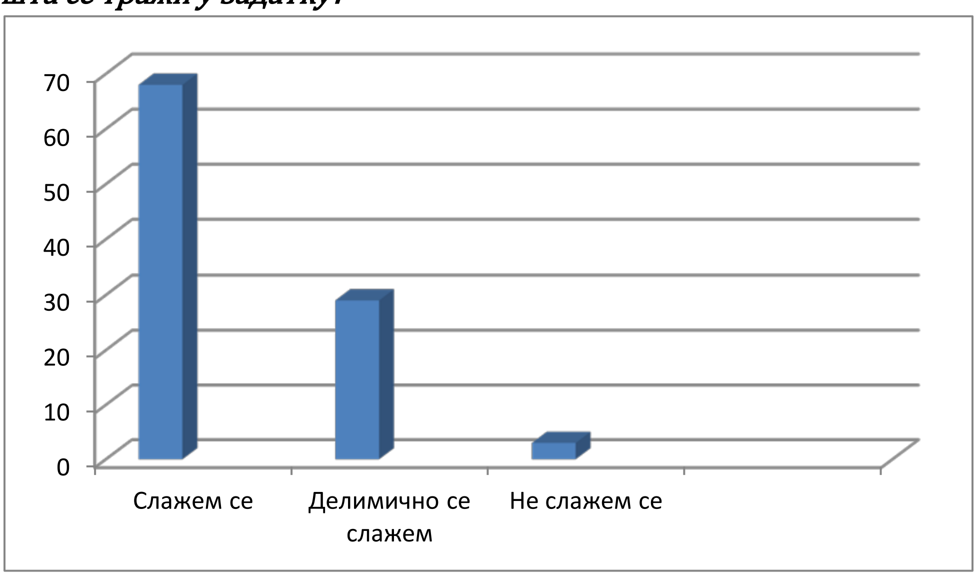
Треће питање: ***Да ли се слажеш да је важан начин на који се излаже градиво из геометрије?***

Однос одговора је више него занимљив. Погледајмо:



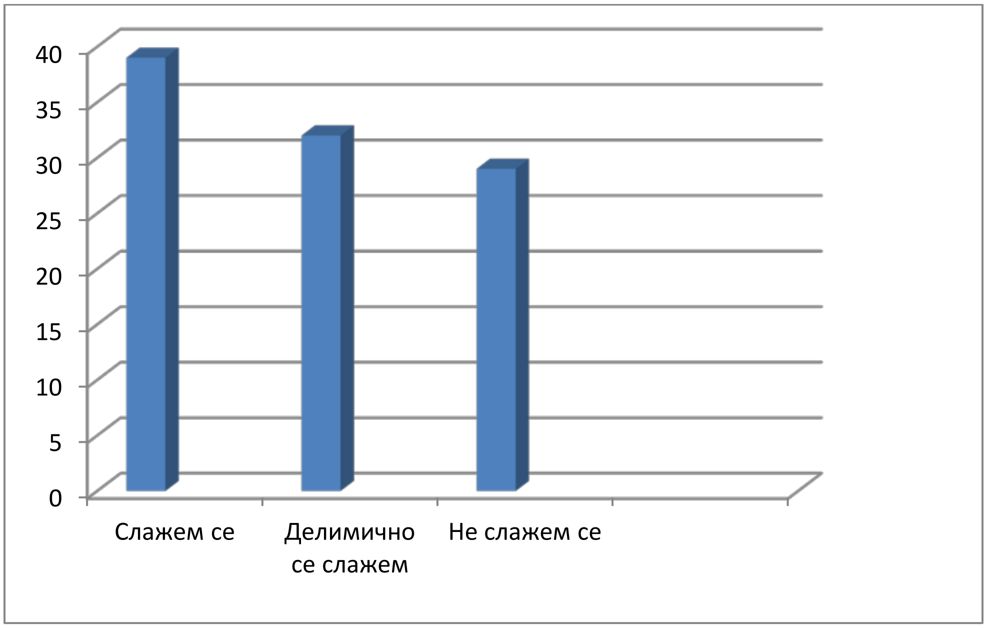
Видимо да сви ученици сматрају да је начин излагања битан.

Четврто питање: ***Да ли наставник црта скице тако да ти је увек јасно о чему се ради, и шта се тражи у задатку?***



Пето питање је гласило: ***Да ли је атмосфера на часовима геометрије радна и опуштена?***

Одговори су распоређени на следећи начин:



Као што видимо, већина се слаже, али је потребно још рада како би се атмосфера поправила, јер постоји и одређен проценат ученика који нису задовољни.

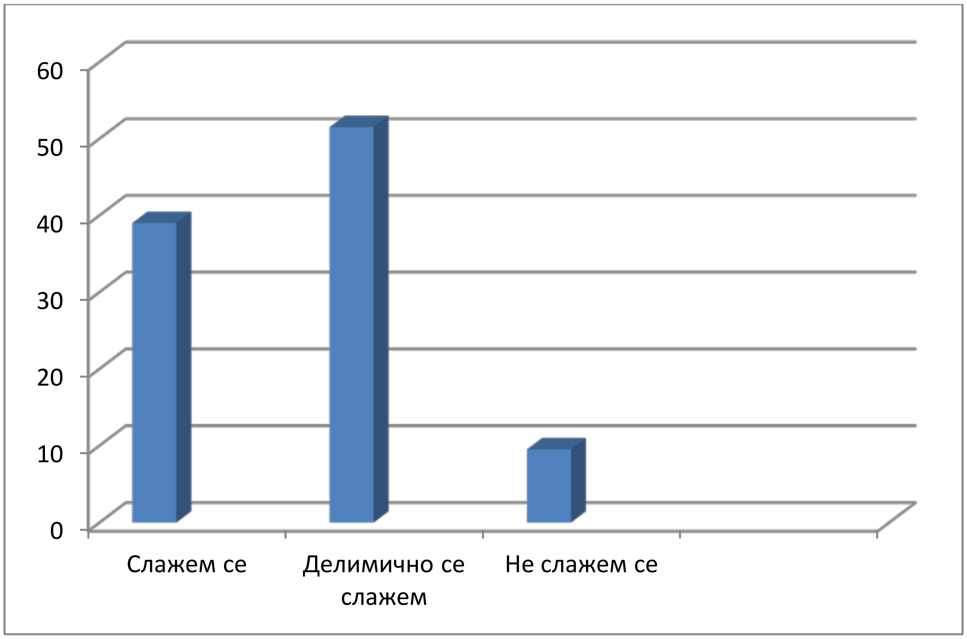
Шесто питање: ***Да ли се слажеш да је дисциплина на часу битна?***

Одговори:

На основу њихових одговора можемо да закључимо да је дисциплина један од кључних фактора за успешно одржан час.

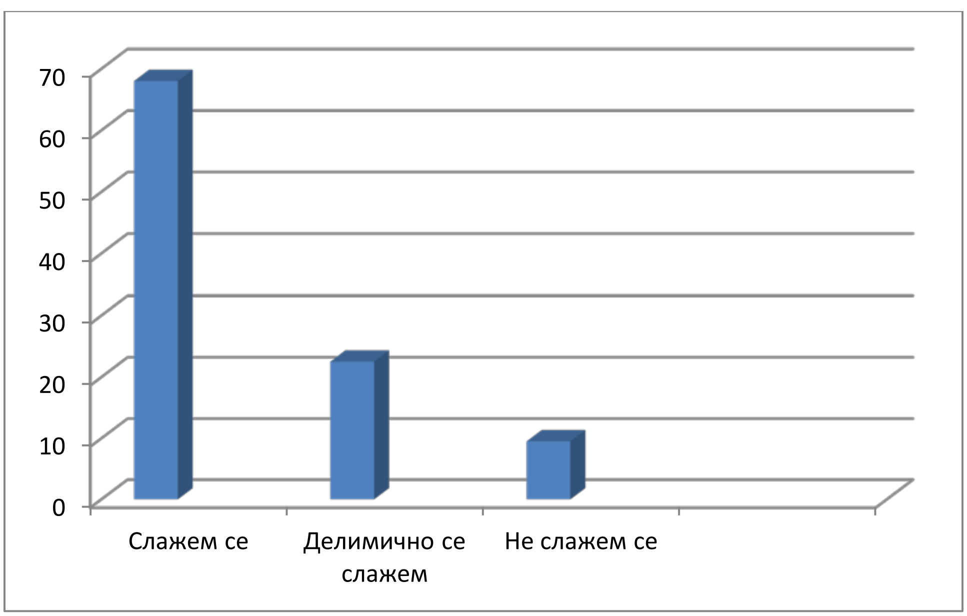
Седмо питање: ***Да ли су часови на којима се ради геометрија динамични и добро распоређени?***

Одговори:



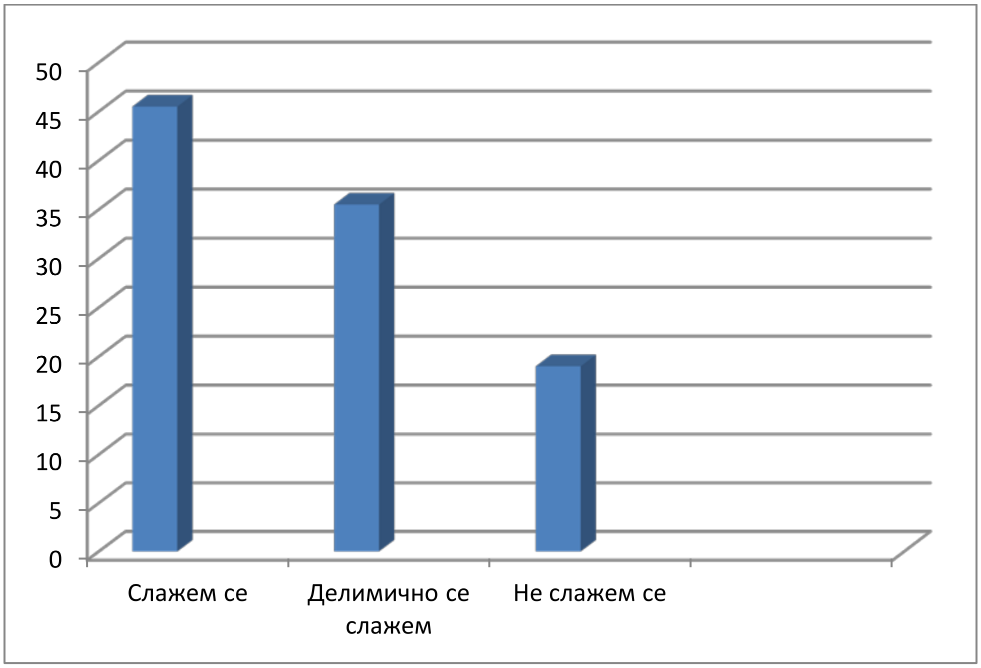
Осмо питање: ***Да ли професор излаже градиво довољно јасно и разумљиво?***

Одговори су распоређени овако:



Девето питање: ***Да ли сматраш да ће ти геометријска знања бити потребна у току даљег школовања?***

Ученици су дали своје мишљење на следећи начин:



Закључак:

Као што се може приметити, ученици углавном имају позитивне ставове према геометрији. Штавише, воле је, и добар део је чак сматра најзанимљивијом граном математике. Шта је онда проблем?

Кроз разговоре са ученицима и посматрајући резултате анкете долази се до закључка да би ученицима лакше било да савладају геометријско градиво, када би имали увид у то у којим конкретним животним ситуацијама то знање може да им користи. Преовладава став да предавач увек у току предавања мора да настоји да бира примере из живота.

Видимо да ученици цене када професор има стрпљења, када лепо организује час, и када зна да објасни градиво на прави начин. Такође, добре скице су од великог значаја у геометрији. Компликовани цртежи не могу увек да буду јасни свима подједнако, и ученици не могу да их схвате баш увек онако како то може наставник који их црта, па стога мислимо да би било добро користити неке од програма, као што је Геогебра. Ово је програм, који између осталог, омогућава брзо и једоставно цртање, и није тешко савладати га. Скице би биле јасније, а време уштеђено.

Настава геометрије у школама у Србији

Разумевање и давање смисла свету који нас окружује је веома важан део наше еволуције. Просторна интуиција је веома моћан алат и због тога је геометрија тако примењива грана математике. За разлику од алгебре, која уме да буде поприлично апстрактна, геометрија нам пружа јасне везе између математике и света чулности.

У Енглеској наставни програм за узраст од 11 до 16 година углавном је усмерен на рад у две димензије, што је слично ономе што изучавају и ученици након 16 година. Године 2000. оформљена је група математичара, међу којима су били бројни професори и научници, на чијем је челу био професор Адриан Олдноу. Ова група се од фебруара 2000. до маја 2001. године састала четрнаест пута како би покушали да артикулишу визију за стварање једног стимулативног и квалитетног наставног програма, у коме ће геометрија бити презентована на начин који ће задобити интересовање ученика и спремити их за њено даље изучавање. Они указују на то како је битно обезбедити ширину геометријских искустава у две и три димензије да би се развила просторна интуиција и способност визуализације, као и способност примене геометрије на решавање проблема из свакодневног живота.

Што се тиче наставног програма за узраст од 16 до 19 година, научни тим професора Адриана Олдноуа дошао је до закључка како треба више истицати значај геометрије. Предлажу организовање добровољних часова математике за ученике који желе да науче више. Такође предлажу да у дотадашњем наставном програму назив области „Примена броја” буде преименован у „Примена математике”, и да уз то и домет математике буде проширен како би ученици активније наставили и изучавање геометрије. Наглашавају да је посебно важно истаћи улогу аналитичке геометрије, као везе између алгебре, графика и функција, и рачуна.

Закључују да би овоме могло да допринесе коришћење информационо-комуникационих технологија. Указују и на потребу развијања позитивног става према математици што раније, дакле нарочито у периоду од 11 до 16 година, као и на развој свести о историјском и културном наслеђу геометрије у друштву, а исто тако и о савременој примени геометрије. Овај тим научника сматра да математички наставни програм треба да се развије тако да буде стављен акценат на важан положај теорема и доказа у математици, као и на коришћење геометријског знања у подстицању развоја логичког мишљења које одговара годинама и могућностима ученика. Предлажу да геометрија заузима од 25 до 30% наставног времена утрошеног на математику у наставном програму за узраст од 11 до 16 година.

У Србији програм наставе за ученике узраста 11 година (пети разред основне школе) обухвата основне геометријске објекте и круг. Ово је веома битан период у стицању знања из области геометрије. До овог нивоа знања ученици би већ требало да се упознају са појмом тачке, праве и равни. Углавном у том препознавању знања греше у томе што када нацртају модел праве, не схватају да у ствари цртају само њен један део, слично важи и за полуправу, угао, раван и полураван. Круг је углавном занимљив ученицима петог разреда и лепо га савладају, због тога је битно да добро савладају појмове као што су кружни лук, пречник, полупречник, центар, тетива и тангента. Угао је појам који понекад повезују са примерима из окружења, али када се задаци раде, забораве на постојање тих примера и немају осећај за одређивање места угла у окружењу, а самим тим и у равни тј. на папиру, што је веома лоша пракса.

Програм геометрије за ученике шестог разреда основне школе у Србији обухвата: троугао, четвороугао, површине троугла и четвороугла. Код троугла је од изузетне важности да се врсте троуглова и њихов изглед трајно науче. У суштини они би то већ требало да знају од раније, али шести разред је период када ученици коначно усвајају појмове као што су унутрашњи и спољашњи угао. Четвороугао је ученицима шестог разреда занимљива област, а изузетно је битна за даље проучавање математике. То би требало да се стално наглашава ученицима да би савладали све основне појмове. Под основним појмовима подразумевају се врсте четвороуглова тј. њихово распознавање и познавање њихових особина, као и збир углова у четвоуруглу. Висок проценат ученика у осмом разреду често греши у одређивању врсте четвороугла. При крају наставног плана и програма шестог разреда уче се површине фигура. У овој области се може лепо видети целокупно знање које је ученик стекао током досадашњег школовања, не само из геометрије већ и из алгебре.

План и програм наставе геометрије у седмом разреду основне школе обухвата: Питагорину теорему, круг, многоугао, график функције, сличност. Питагорина теорема је веома згодна и за упознавање ученика са историјом математике, односно сама прича о Питагори и његовом постојању би могла бити од важности да што лакше прихвате теорему. Изучавање круга у седмом разреду ставља акценат на Талесову теорему, појмове централног и периферијског угла као и на својство периферијског угла над пречником односно чињеницу да је он прав. Многоугао је ученицима занимљива област јер је повезана са применом у грађевинарству, што је за њих познато окружење, а то је на пример постављање паркета у соби или учионици, затим постављање плочица у купатилу, и то посебно ако се поставља у неки необичан положај. Сличност је за ученике веома конфузна област коју тешко савладају, а и када је савладају, веома брзо је забораве, па из тог разлога им треба давати што више познатих примера да што боље упамте особине сличности. Код графика функције и код координатних система мотивацију је могуће пронаћи у занимљивим историјским причама везаним за ову тему. Рецимо сам Рене Декарт је 1623. године живео у Новом Саду, односно Петроварадину. Своје дело, „Књигу о музици“ завршио је на територији данашње Србије, што се у предговору те књиге помиње.

Програм геометрије за ученике осмог разреда основне школе у обухвата: тачку, праву и раван, призму, пирамиду, ваљак, купу и лопту. Тачка, права и раван су појмови већ познати ђацима у петом разреду. Приступ овој теми се своди у већини ситуација на уочавање међусобних веза између ових појмова. Посебну пажњу треба посветити објашњавању појма диедра, а и подсећањем на појам нормалности. Призма, а посебно пирамида су области које су ученицима блиске из свакодневног живота и самим тиме лако разумљиве. Код ваљка је добро напоменути да се ваљак добија ротацијом правоугаоника око једне своје странице. То је занимљиво за демонстрацију и не само то, него је и ученицима прихватљивија таква дефиниција но помињање цилидричне површи. Слично и код купе, треба посматрати моделе и доћи до закључка да је основа купе круг, а омотач део круга. У седмом разреду ученици су научили како се рачуна површина кружног исечка па то не би требало да им буде проблем.

Наставни план и програм геометрије у првом разреду средње школе је следећи: увод у геометрију(где се основни појмови: тачка, права и раван и релације презентују на озбиљнији начин увођењем свих група аксиома и ставова), угао, диедар, подударност троуглова, осна и раванска рефлексија, круг, троугао, четвороугао, директне изометрије, сличност, конструктивни задаци и тригонометрија правоуглог троугла.

У другом разреду средње школе геометрија се индиректно дотиче кроз часове на којима се ради тригонометрија. У трећем разреду обрађују следеће наставне теме:полиедри(површине и запремине полиедара), обртна тела(запремине и површине обртних тела), узајамни положај лопте и других тела, а велики део часова је посвећен аналитичкој геометрији у равни. Програмом наставе математике за четврти разред средње школе није предвиђен садржај из геометрије.

Закључак

Ако упоредимо наш план и програм геометрије са планом и програмом других земаља, можемо закључити да је у Србији велики број часова математике посвећен геометрији. Наши ученици стичу велико знање из геометрије које можда и превазилази обиме наставног плана неких других држава, али проблем настаје када стечено знање треба применити. Већ годинама уназад Србија се не може похвалити са неким завидним резултатом на PISA(Programme for International Student Assessment) тестирањима, којима се процењују образовна постигнућа ученика. Очигледно је да ученици страних земаља боље решавају дате задатке и проблеме јер више вежбају сналажење у разним животним ситуацијама где могу да примене оно што су научили из геометрије. Свака од земаља, попут Енглеске, Јапана, Француске, Холандије и Немачке, као што смо могли и видети, још од нижих разреда форсира задатке из реалности чиме се ученици од раног школовања обучавају да решавају проблеме са којима се једног дана заиста могу суочити. Важно је поставити и јасне циљеве тј. шта је оно чиме би сваки од ученика до одређеног нивоа постигнућа морао да зна и примени, и којим вештинама би јасно могао да влада.

Наравно, увек постоје начини да се настава још унапреди, и подигне на виши ниво. Поготово у настави геометрије има простора за ово: употреба информатичких технологија, јасне скице, задаци из живота, очигледност примене стеченог знања, прављење макета, разни експерименти и слично. Изузетно је важно да у циљевима и задацима наставе геометрије доминира развој логичког мишљења. Наиме, прво треба да се изучава оно што је очигледно, а затим практична примена. Након тога треба то лепо систематизовати и на крају би ученици били спремни за изучавање аксиоматске геометрије, и имали комплетно и добро познавање целе области ове гране математике.

Литература

[1] Огледи из историје античке геометрије, др Зоран Лучић, *Службени гласник,* Београд 2009.

[2] Геометрија за 3. разред усмереног образовања математичко-техничке струке, др Драгомир Лопандић, друго издање, *Научна књига*, Београд, 1981.

[3] Department for Education, National curriculum in England: mathematics programmes of study

[4] Beaton, A. E. at al. 1996 *Mathematics Achievement in the Middle School Years*, Boston College, Boston.

[5] Hoyles, C., Foxman, D. and Kuchemann, D. 2002 *A Comparative Study of Geometry Curricula*, The Qualifications and Curriculum Authority.

[6] Howson, G. 1995 *Mathematics Textbooks: A Comperative Study of Grade 8*: TIMSS Monograph No. 3 Pacific Educational Press, Vancouver. Kahane, J.-P 2000 *Interim Report on Geometry and its Teaching*. Royal Society/Joint Mathematical Council 2001 *Teaching and learning Geometry 11-19,* Holbrooks Printers Ltd, Portsmouth.

[7] Celia Hoyles, Dietmar Kuchemann and Derek Foxman, Institute of Education, University of London, London.

[8] Fujita, T. and Jones, K. (2003), *Interpretations of National Curricula: the case of geometry in Japan and the UK*. Paper presented at the *British Educational Research Association Annual Conference*, Heriot-Watt University, 10-13 September, 2003.

[9] Collaborative Group for Research in Mathematics Education University of Southampton, UK

[10]Ecole Bilingue de Berkeley, Math in French Curriculum

[11] Center for innovation in mathematics teaching, School curriculum materials

[12] Meetkunde, *Vanouds tot op de dag van vandaag*, Anne van Streun en Nellie Verhoef