**UNIVERZITET U BEOGRADU**

**MATEMATIČKI FAKULTET**

**Master rad**

# MATEMATIČKA REZERVA ŽIVOTNIH OSIGURANJA

Mentor:

Prof. dr Slobodanka Janković

Student:

Aleksandra Raičević

Br. indeksa: 1053/2013

Beograd, jul 2015.

# Sadržaj

# Uvod

Ljudi se svakodnevno susreću sa različitim vrstama opasnosti koje mogu ugroziti njihov život, zdravlje, imovinu i tako bitno promeniti planove za budućnost. Kako bi se zaštitili od opasnosti ljudi su još od davnina preduzimali različite mere. Na primer, da bi se zaštitili od gladi jedna od mera su bili obavezni prilozi pojedinca u žitu tokom rodnih godina.
Prvi tragovi osiguranja se javljaju u pomorskom prevozu, pošto je bilo potrebno imati sigurnost da će brodovi sa svojim skupocenim teretom stići na željeno odredište, tj. da će se u protivnom obezbediti naknada za pretrpljenu štetu.

Osiguranje ima za cilj da zaštiti od rizika i nepredvidjenih okolnosti i pruži odredjenu finansijsku sigurnost i bezbednost.
Osnovna podela osiguranja je na osiguranje imovine i osiguranje života. Akcenat u ovom radu će biti na životnom osiguranju. Životno osiguranje obezbedjuje da štedimo za sigurniju budućnost, kao i da obezbedimo svoju ličnu sigurnost i sigurnost svoje porodice.
Tema ovog rada je matematička rezerva životnih osiguranja. Sam rad se sastoji iz sedam celina.
U prvoj glavi se razmatra interes i korist potencijalnog osiguranika ukoliko odluči da se osigura, kao i korist osiguravajuće kompanije ukoliko potencijalnog osiguranika primi u osiguranje.
U drugoj glavi su predstavljeni kratkoročni individualni riziko modeli koji predstavljaju osnovni produkt životnog osiguranja, kao i način na koji se osiguravajuća kompanija štiti od preuzetih rizika koje ne može sama pokriti na osnovu svojih sredstava kojima raspolaže.
Treća celina rada je posvećena računskim osnovama za izradu tarifa životnih osiguranja. Predstavljenje su tablice smrtnosti i uvedeni pojmovi funkcije preživljavanja i inteziteta smrtnosti. U četvrtoj glavi se razmatraju različite vrste životnih osiguranja, dok je peta glava posvećena različitim vrstama životne rente.
Kod životnog osiguranja obračun premije je jedan od glavnih zadataka prilikom izrade novog produkta. Premija predstavlja cenu osiguranja, odnosno novčani iznos koji osiguranik uplaćuje osiguravajućoj kompaniji za uslugu osiguranja. Šesta glava ovog rada je upravo posvećena premiji i različitim dinamikama uplate premije.
Sedma glava je posvećena jednom od ključnih tehničkih zadataka svake osiguravajuće kompanije životnog osiguranja, obračunu matematičke rezerve, što je i tema ovog rada. Kod životnog osiguranja zbog progresivne prirode rizika pored riziko premije postoji i štedna premija koja je osnov za obračun matematičke rezerve. Aktuarska služba svake godine izračunava matematičku rezervu, što predstavlja veoma složen proces. Postoje različite metode obračuna matematičke rezerve, koje bi trebalo da što tačnije ustanove mogućnost pokrića obaveza osiguravajuće kompanije, kao i mogućnost plasiranja raspoloživih sredstava pa samim tim i njihovo uvećanje.

# 1 Osiguranje

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1] i [4].

## 1.1 Uvod

Svako od nas ima svoje planove za budućnost, ali često u životu nije sve onako kako smo mi zamislili. Ponekad su uzroci neostvarenja naših planova neočekivani i iznenadni dogadjaji, dok često glavni uzrok su nerealne pretpostavke na kojima se naši planovi zasnivaju.

Osiguranje služi za zaštitu od ozbiljnih finansijskih preokreta (gubitaka) koji se mogu desiti usled neočekivanih dogadjaja i tako pokvariti planove pojedinca. Veoma je važno znati da osiguranje ne može pružiti svu potrebnu finansijsku zaštitu, odnosno postoje odredjena ograničenja kada je osiguranje u pitanju.

Osiguranje pre svega služi za smanjenje posledica gubitaka koji se mogu izraziti u novčanim jedinicama. Na primer, bol i patnja mogu biti prouzrokovani neočekivanim dogadjajem. Medjutim, jako je teško dizajnirati vrstu osiguranja koja bi odredjenom osiguranom sumom mogla da kompezuje nastalu bol i patnju, odnosno nije moguće izraziti bol i patnju u novčanim jedinicama. Kod finansijskih gubitaka, kao što je na primer oštećenje imovine u požaru, gubitak se može mnogo lakše izmeriti u nočanim jedinicama.
Drugo ograničenje kada je osiguranje u pitanju je da osiguravanjem od nekog slučajnog dogadjaja ne smanjujemo verovatnoću da će se taj dogadjaj desiti. Drugim rečima ukoliko smo se osigurali od štete koju može naneti oluja mi ne smanjujemo verovatnoću nastanka oluje, kao ni njenu razornost već samo sebi obezbedjujemo finansijsku naknadu koja će nam pomoći da se oporavimo od nastalog finansijskog gubitka. Prilikom dizajniranja proizvoda jako je bitno da proizvod bude takav da ne podstiče na namerno stvaranje osiguranog dogadjaja.

Sledeći primeri predstavljaju neke od slučajnih dogadjaja koji mogu dovesti do finansijskih gubitaka:

- Oštećene imovime usled požara ili oluje se smatra slučajnim dogadjajem koji prouzrokuje gubitak koji se može izraziti u novčanim jedinicama;
- Nastanak i trajanje bolesti zbog koje je osobi smanjena radna sposobnost i samim tim dolazi do finansijskog gubitka, pošto osoba nije u mogućnosti da finansijski doprinosi porodici kao ranije;
- Smrt osobe koja ima glavnu ulogu u finansijskom izdržavanju porodice.

Jedna od mnogobrojnih definicija osiguranja je sledeća:

**Definicija 1** *Osiguranje je mehanizam koji služi za smanjenje štetnih finansijskih uticaja prouzrokovanih slučajnim dogadjajima koji mogu ugroziti naše planove i očekivanja u budućnosti.*

Veoma je bitno istaknuti razliku izmedju osiguranja i drugih sličnih sistema.

Osiguranje se najčešće poistovećuje sa bankama. Za razliku od osiguranja bankarske institucije ne vrše isplatu baziranu na veličini finansijskog gubitka koji je prouzrokovan spletom okolnosti na koje mi nismo mogli uticati.

Igre na sreću su takodje sistem koji isplaćuje odredjenu kojičinu novca ukoliko dodje do realizacije slučajnog dogadjaja. Medjutim igre na sreću su u totalnoj suprotnosti sa osiguranjem. Glavna razlika je ta što je osiguranje dizajnirano tako da zaštiti osiguranika od rizika, odnosno od dogadjaja na koje ne možemo uticati, dok kod igara na sreću rizik se stvara dobrovoljnim učestvovanjem.

## 1.2 Teorija koristi

Kada bismo mogli da predvidimo posledice svojih odluka život bi nam bio mnogo jednostavniji ali ujedno i manje zanimljiv. Medjutim, najbolje što možemo učiniti jeste donositi manje neizvesne odluke.
Teorija koristi je jedna od najznačajnijih teorija kada je osiguranje u pitanju. Primenom ove teorije, prilikom donošenja odluke da li da naš novac investiramo u neki projekat ili ne, vrednost projekta sa slučajnim ishodom definišemo preko njegove očekivane vrednosti. Na ovaj način, raspodelu mogućih ishoda zamenjujemo jednom vrednošću, odnosno očekivanom vrednošću slučajnog dogadjaja.

Na osnovu ovog principa donosiocu odluke je svejedno da li će posmatrati slučajan gubitak $X$ ili iznos za isplatu $E[X]$. Slično, donosilac odluke će želeti da uloži novac $E[Y]$ kako bi učestvovao u igri na sreću koja mu može doneti dobitak $Y$.

Mnogi donosioci odluke ne koriste ovaj princip prilikom donošenja odluke pošto posmatraju i mnoge druge faktore koji utiču na njihovu odluku.
Na primeru osiguranja od nezgode ilustrovaćemo neadekvatnost ovog principa za donosioca odluke. Pretpostavimo da je verovatnoća nezgode 0.1, a verovatnoća da se nezgoda neće dogoditi 0.9. U tabeli su prikazana tri različita slučaja u zavisnosti od mogućeg gubitka.

| Br | Mogući gubitak | Očekivani gubitak |
|---|---:|---:|
| 1 | 1 | 0.1 |
| 2 | 1000 | 100 |
| 3 | 100000 | 10000 |

Gubitak koji iznosi 1 nije velika briga za donosioca odluke tako da verovatno neće želeti da se osigura od nezgode. Medjutim, kada je gubitak u iznosu 100.000 u pitanju donosilac odluke će želeti da plati i više od očekivanog gubitka kako bi se zaštitio od katastrofalnog finansijskog gubitka. Želja donosioca odluke da plati više od očekivane vrednosti gubitka nam govori o neadekvatnosti ovog principa.

Sledeći pristup će nam objasniti želju donosioca odluke da plati iznos veći od očekivane vrednosti gubitka. Pretpostavićemo da korist koju donosilac odluke može ostvariti prilikom donošenja odluke vezane za iznos novca $w$ možemo predstaviti u obliku funkcije $u(w)$, takozvane funkcije koristi. Umesto funkcije $u(w)$ možemo posmatrati njenu linearnu transmormaciju,

$$u^*(w) = a\ u(w) + b,\ a > 0.$$

Fiksiraćemo vrednosti funkcije $u$: $u(0) = -1$ i $u(20000) = 0$. Interesuje nas koji je maksimalan iznos $G$ koji bi donosilac odluke platio kako bi se osigurao od gubitka svog novca u iznosu od 20000. Neka je verovatnoća gubitka jednaka verovatnoći da donosilac odluke zadrži svih 20000. Do iznosa $G$ dolazimo rešavanjem jednačine:

$$u(20000 - G) = 0.5\ u(20000) + 0.5\ u(0)$$

Ukoliko donosilac odluke uplati iznos $G$ njegovo bogatstvo će iznositi $20000 - G$. Znak jednakosti nam govori da je donosiocu odluke svejedno da li će uplatiti iznos $G$ ili prihvatiti očekivanu vrednost izraženu sa desne strane jednakosti.

Pretpostavimo da je odgovor $G = 12000$. Pošto je očekivani gubitak 10000, to znači da bi donosilac odluke platio više od očekivanog gubitka.
U opštem slučaju, za svako $w_1$, $w_2$ takvo da je $0 \leq w_1 \leq w_2 \leq 20000$ možemo odrediti dodatnu tačku $[w, u(w)]$ postavljajući sledeće ptanje: Koliko biste najviše platili kako biste se osigurali od gubitka, ukoliko je $p$ verovatnoća gubitka iznosa $w_2$, a verovatnoća $1 - p$ da ostanete na iznosu $w_1$. Matematički zapisano:

$$u(w_2 - G) = (1 - p)\ u(w_1) + p\ u(w_2). \tag{1.2.1}$$

Nakon odredjivanja tačnog oblika funkcije koristi, odnosno nakon odredjivanja parametara $a$ i $b$, donosilac odluke je spreman da uporedi i izabere jedan od dva moguća ishoda $X$ ili $Y$.
Ukoliko donosilac odluke poseduje novac $w$ i mora da izabere jedan od dva slučajna ishoda $X$ ili $Y$, izabraće $X$ ukoliko je:

$$E[u(w + X)] > E[u(w + Y)] \tag{1.2.2}$$

i biće mu svejedno ukoliko je

$$E[u(w + X)] = E[u(w + Y)]. \tag{1.2.3}$$

Pre nego što predstavimo značaj funkcije koristi u osiguranju navešćemo njena svojstava:

- Funkcija koristi bi trebalo da otkrije, a ne da iznenadi;
- Nije jedinstveno odredjena formulom;
- Pretpostavimo da je funkcija koristi linearna

$$u(w) = aw + b,\ a > 0.$$

  Neka je $E[X] = \mu_X$ i $E[Y] = \mu_Y$ onda je

$$E[u(X)] = a\ \mu_X + b > E[u(Y)] = a\ \mu_Y + b$$

  ako i samo ako je $\mu_X > \mu_Y$.

## 1.3 Osiguranje i funkcija koristi

Pretpostavimo da odredjena osoba poseduje imovinu koja može biti oštećena ili uništena u narednom periodu i tako prouzrokovati veliki finansijski gubitak za vlasnika. Finansijski gubitka ćemo predstaviti slučajnom veličinom $X$.
Ukoliko pojedinac želi da se zaštiti od uništenja imovine može sklopiti sa osiguravajućom kompanijom (u daljem tekstu osiguravač) ugovor (polisu) kojim se osiguravač obavezuje da će u slučaju realizacije osiguranog slučaja (u ovom konkretnom primeru uništenja imovine) isplatiti iznos koji je manji ili jednak nastaloj šteti dok se ugovarač (osoba koja želi da se zaštiti od gubitka) obavezuje da će redovno uplaćivati ugovorenu premiju.
Jedan od ključnih faktora koji utiče na ugovarača prilikom donošenja odluke o kupovini osiguranja je premija osiguranja. Jako je bitno da premija bude manja od maksimalnog iznosa koji bi ugovarač osiguranja uplaćivao, a ujedno da bude dovoljno velika kako bi pokrila rizik koji osiguravač preuzima prihvatom u osiguranje. Ukoliko osiguravač koristi princip očekivane vrednosti osnovna cena osiguranja bi trebalo da iznosi $E[X] = \mu$. U ovom slučaju $\mu$ je oznaka za neto premiju za jedinicu osigurane sume za jedan period trajanja osiguranja. Kako bi osiguravač uspeo da pokrije sve troškove sprovodjenja osiguranja, administrativne troškove i ostvario profit potrebno je uvećati neto premiju i tako doći do bruto premije $H$

$$H = \mu(1 + \theta) + c \quad \theta > 0,\ c > 0.$$

Sa $\mu\theta$ su predstavljeni troškovi koji zavise od iznosa očekivanog gubitka, dok $c$ predstavlja konstantne troškove koji ne zavise od iznosa gubitka.

Posmatrajmo funkciju koristi $u(w)$ ugovarača osiguranja, gde $w$ predstavlja vrednost imovine ugovarača koja je izrazena u novčanim jedinicama. Pod uticajem nekog slučajnog dogadjaja može doći do gubitka ili smanjena iznosa $w$.

Pretpostavimo da nam je poznata raspodela slučajnog gubitka $X$. Da bi ugovaraču osiguranja bilo svejedno da li će uplatiti iznos $G$ kako bi se osigurao od gubitka ili će sam snositi sav rizik potrebno je da važi:

$$u(w - G) = E[u(w - X)]. \tag{1.3.1}$$

Desna strana jednakosti (1.3.1) predstavlja očekivanu korist ugovarača ukoliko ne osigura svoju imovinu, dok leva strana je očekivana korist ukoliko se odluči na kupovinu polise osiguranja. Za linearnu rastuću funkciju koristi

$$u(w) = b\ w + d$$

primenom principa očekivane vrednosti jednakost (1.3.1) postaje:

$$u(w - G) = b\ (w - G) + d = E[u(w - X)] = E[b\ (w - X) + d]$$

$$b(w - G) + d = b(w - \mu) + d$$

$$G = \mu.$$

Ugovaraču sa linearnom rastućom funkcijom koristi će biti svejedno da li da kupi polisu osiguranja ili ne ukoliko je premija jednaka očekivanom gubitku.
Da bi osiguravač pokrio svoje troškove i rizik koji snosi prihvatom u osiguranje premija mora biti veća od očekivanog gubitka. To nas dovodi do zaključka da funkcija koristi ugovarača ne može biti linearna.

Normalno je pretpostaviti da je funkcija $u(w)$ rastuća. U nastavku ćemo koristiti funkciju koristi koja je glatka, odnosno ispunjava uslove da je $u'(w) > 0$ i $u''(w) < 0$. Za nastavak ove diskusuje potrebna nam je i Jensenova nejednakost koja glasi: Ako je $u''(w) < 0$ i $X$ slučajna veličina onda je:

$$E[u(X)] \leq u(E[X]). \tag{1.3.2}$$

Pretpostavimo da je funkcija koristi ugovarača takva da je $u'(w) > 0$ i $u''(w) < 0$. Primenom Jensenove nejednakosti na (1.3.1) sledi

$$u(w - G) = E[u(w - X)] \leq u(w - \mu). \tag{1.3.3}$$

Iz pretpostavke da je $u'(w) > 0$ znamo da je $u$ rastuća funkcija, pa sledi da je $w - G \leq w - \mu$ , odnosno $G > \mu$.
U ovom slučaju donosilac odluke će platiti veći iznos od očekivanog gubitka.

Posmatrajmo sada $u_1(w)$ funkciju koristi osiguravača i neka je $w_1$ kapital koji poseduje osiguravač izražen u monetarnim jedinicama. Neka je $H$ iznos minimalne prihvatljive premije za osiguravača kako bi se usudio da preuzme rizik od nastanka slučajnog gubitka $X$, odnosno

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)]. \tag{1.3.4}$$

Leva strana jednakosti (1.3.4) predstavlja korist osiguravača u trenutnoj situaciji, dok desna strana predstavlja očekivanu korist ako primi uplatu premije $H$ i preuzme rizik od nastanka osiguranog slučaja $X$. Drugim rečima osiguravajuća kompanija je ravnodušna da li će ostati u trenutnoj situaciji ili osigurati mogući gubitak $X$ uz koji ide odgovarajuća premija $H$. Ukoliko osiguravač ne želi da rizikuje, odnosno $u'(w_1) > 0$ i $u_1''(w) < 0$, primenom Jensenove nejednakosti na (1.3.4) dobijamo:

$$u_1(w_1) = E[u_1(w_1 + H - X)] \leq u_1(w_1 + H - \mu).$$

Na isti način kao i u (1.3.3) zaključujemo da je $H \geq \mu$. Ako je $G$ takvo da je $G \geq H \geq \mu$ onda je moguće sklopiti polisu koja je pogodna za obe strane, i za ugovarača i za osiguravača.

Postoji više oblika funkcije koristi, a jedan od njih je eksponencijalna funkcija

$$u(w) = -e^{-\alpha w},\ \alpha > 0$$

koja poseduje nekoliko korisnih svojstava, od kojih je prvo

$$u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$$

i

$$u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0.$$

Ovakva funkcija koristi je pogodna za donosioce odluke koji će platiti više od očekivanog gubitka da se ne bi izložili riziku.
Drugo svojstvo je,

$$E[-e^{-\alpha X}] = -E[e^{-\alpha X}] = -M_X(-\alpha),$$

gde je $M_X$ generatorna funkcija momenata slučajne veličine $X$. Još jedna značajna osobina je da premija osiguranja ne zavisi od iznosa kapitala donosioca odluke. Kada je ugovarač u pitanju, dokaz tvrdnje se dobija zamenom eksponencijalne funkcije koristi u jednačinu (1.3.1), odnosno:

$$\begin{aligned} -e^{-\alpha(w-G)} &= E[-e^{-\alpha(w-X)}] \\ e^{\alpha G} &= M_X(\alpha) \\ G &= \frac{\log M_X(\alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Zamenom eksponencijalne funkcije koristi sa parametrom $\alpha_1$ u jednačinu (1.3.4) sledi dokaz i za osiguravača:

$$
\begin{aligned}
-e^{-\alpha_1 w_1} &= E[-e^{-\alpha_1(w_1+H-X)}] \\
-e^{-\alpha_1 w_1} &= -e^{-\alpha_1(w_1+H)} M_X(\alpha_1) \\
H &= \frac{\log M_X(\alpha_1)}{\alpha_1}.
\end{aligned}
$$

Kvadratna funkcija koristi je oblika:

$$u(w) = w - \alpha w^2,\ w < (2\alpha)^{-1},\ \alpha > 0.$$

Pošto je $u'(w) = 1 - 2\alpha w > 0$ kada je $w < (2\alpha)^{-1}$ i $u''(w) = -2\alpha$ i ova familija funkcija koristi je pogodna za donosioce odluka koji ne rizikuju puno.

Sistem osiguranja mora biti organizovan tako da postoje različite klase situacija u kojima se može desiti slučajan gubitak. Slučajnost se odnosi na učestalost, veličinu i vreme gubitka. Ukoliko kontrola na prethodno pomenutim postoji ili je isplata veća od stvarne vrednosti gubitka to podstiče nastanak gubitka. U ovakvim slučajevima pretpostavke na kojima je zasnovan sistem osiguranja nisu validne.

Pretpostavićemo da donosilac odluke poseduje novac u iznosu $w$ i da se suočava sa mogućnostu gubitka novca u narednom periodu. Obeležimo slučajan gubitak sa $X$. Da bi se zaštitio od gubitka, donosilac odluke može kupiti polisu koja garantuje da će osiguravač isplatiti iznos $I(x)$ za gubitak $x$ ukoliko dodje do realizacije osiguranog slučaja i tako nadomestiti finansijski gubitak. Da ne bismo podsticali dešavanje gubitka pretpostavićemo da je $0 \leq I(x) \leq x$, odnosno da je očekivana isplata manja od očekivanog gubitka $E[I(X)] \leq E[X]$.
Pretpostavićemo da donosilac odluke, ugovarač osiguranja, ne želi previše da rizikuje, odnosno da za njegovu funkciju koristi važi $u'(w) > 0$ i $u''(w) < 0$. Ukoliko se ugovarač opredeli da kupi polisu osiguranja čija premija iznosi $P$, predstavićemo rešenje kojim će njegova korist od donete odluke biti najveća.
Definisaćemo klasu polisa:

$$I_d(x) = \begin{cases} 0 & x < d \\ x - d & x \geq d. \end{cases}$$

Kod ove klase polisa nastala šteta se ne isplaćuje ukoliko iznos štete nije jednak ili veći od iznosa $d$. U ovom slučaju premija $P$ je jednaka očekivanom iznosu nastale štete, odnosno

$$P = \int_d^\infty (x-d) f(x) dx$$

ili

$$P = \int_d^\infty [1 - F(x)] dx$$

gde je $F(x)$ funkcija raspodele, a $f(x)$ gustina slučajne veličine $X$. Sledeća teorema će nam dati odgovor na pitanja za koje $d$ ugovaraču se isplati njegova odluka da se osigura od gubitka.

**Teorema 1.1** *Pretpostavimo da donosilac odluke poseduje bogatstvo $w$ i da je njegova funkcija koristi $u(w)$ takva da važi $u'(w) > 0$ i $u''(w) < 0$. Postoji rizik da će se donosilac odluke u narednom periodu suočiti sa slučajnim gubitkom $X$. Kako bi se osigurao od gubitka, donosilac odluke će uplatiti iznos premije $P$, $0 < P \leq E[X] = \mu$, kako bi kupio polisu osiguranja sa osiguranom sumom $I(x)$, $0 < I(x) < x$. Korist donosioca odluke će biti najveća ukoliko se odluči za polisu čija je osigurana suma*

$$I_d^*(x) = \begin{cases} 0 & x < d^* \\ x - d^* & x \geq d^* \end{cases}$$

*gde je $d^*$ rešenje jednačine*

$$P - \int_d^{\infty} (x-d) f(x) dx = 0.$$

Dokaz:

Pre nego što predjemo na dokaz teoreme navešćemo jednu lemu koja će nam puno pomoći pri dokazu.

**Lema 1** *Ako je $u''(y) < 0$ za svako $y$ iz intervala $(z, w)$, onda je*

$$u(w) - u(z) \leq (w - z) u'(z). \tag{1.3.5}$$

Na osnovu prethodne leme važi nejednakost

$$\begin{aligned} &u(w - x + I(x) - P) - u(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]\; u'(w - x + I_{d^*}(x) - P). \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Da bismo dokazali da nejednakost

$$\begin{aligned} &[I(x) - I_{d^*}(x)]\; u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \\ &\leq [I(x) - I_{d^*}(x)]\; u'(w - d^* - P) \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

posmatraćemo tri moguća slučaja.
Prvi slučaja: $I_{d^*}(x) = I(x)$
U ovom slučaju su obe strane nejednakosti (1.3.7) nula tako da je nejednakost tačna.

Drugi slučaj: $I_{d^*}(x) > I(x)$

U ovom slučaju je $I_{d^*}(x) > 0$ i iz definicije $I(x)$ imamo $x - I_{d^*} = d^*$. Obe strane nejednakosti (1.3.7) su jednake $[I(x) - I_{d^*}(x)]\ u'(w - d^* - P)$.

Treći slučaj: $I_{d^*}(x) < I(x)$
U ovom slučaju je $I(x) - I_{d^*}(x) > 0$. Iz definici za $I(x)$ slede nejednakosti $I_{d^*}(x) - x \geq -d^*$ i $I_{d^*}(x) - x - P \geq -d^* - P$.
Pošto je drugi izvod funkcije $u(x)$ negativan, funkcija $u'(x)$ je opadajuća, odatle sledi $u'(w - x + I_{d^*}(x) - P) \leq u'(w - d^* - P)$. Za svaki od mogućih slučajeva dokazali smo da nejednakost (1.3.7) važi.
Kombinovanjem nejednakosti (1.3.6) i (1.3.7) i uzimajući očekivanu vrednost obe strane nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}&E[u(w - X + I(X) - P)] - E[u(w - X + I_{d^*}(X) - P)] \\ &\leq E[I(x) - I_{d^*}(x)]\ u'(w - d^* - P) = (P - P)\ u'(w - d^* - P) = 0.\end{aligned}$$

Sledi

$$E[u(w - X + I(X) - P)] < E[u(w - X + I_{d^*}(X) - P)],$$

odnosno očekivana korist je maksimalna kod polisa sa osiguranom sumom $I_{d^*}$.

# 2 Kratkoročni individualni riziko modeli

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1], [3] i [4].

U prethodnom poglavlju smo govorili o donosiocu odluke koji može iskoristiti osiguranje kako bi smanjio svoj finansijaki gubitak prouzrokovan nekim slučajnim dogadjajem. Donosilac odluke, ugovarač, može biti pojedinac koji želi da osigura svoju imovinu, uštedjevinu ili prohode, a takodje ugovarač osiguranja može biti i neka organizacija. Organizacija koja traži finansijsku zaštitu može biti i sama osiguravajuća kompanija koja želi da osigura rizike koji su iznad njenog samopridržaja. Takva vrsta osiguranja se zove reosiguranje i detaljnije ćemo je upoznati u ovom poglavlju.
Obeležimo sa $S$ slučajni gubitak osiguravajuće kompanije. Kada je u pitanju individualni riziko model slučajna veličina $S$ je definisana sa

$$S = X_1\ +\ X_2\ +\ ...\ +\ X_n \tag{2.1.1}$$

gde je $X_i$ gubitak i-te osigurane jedinice. U najvećem broju slučajeva $X_i$ su nezavisne slučajne veličine. Takodje, ovaj model ne prepoznaje vremensku vrednost novca zato se i koristi za kratkoročne vrste osiguranja. Posmatraćemo samo zatvorena osiguranja, odnosno ona kod kojih je $n$ fiksirano i poznato na samom početku. Ako postoji ulazak ili izlazak iz sistema onda su u pitanju otvoreni modeli.

## 2.1 Model za pojedinačne odštetne zahteve

Posmatraćemo osnovni proizvod životnog osiguranja, riziko osiguranje, odnosno osiguranje za slučaj smrti u trajanju od jedne godine. Kada je ova vrsta osiguranja u pitanju osiguravajuća kompanija se obavezuje da će isplatiti osiguranu sumu u iznosu $b$ ukoliko osiguranik umre u toku trajanja osiguranja, u suprotnom osiguravajuća kompanija nema nikakvu obavezu. Obeležimo verovatnoću smrti osiguranika u toku godine osiguranja sa $q$. Osigurani slučaj ćemo modelirati sa slučajnom veličinom $X$ čija je onda raspodela verovatnoće data sa:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-q & x = 0 \\ q & x = b \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

ili zapis preko funkcije raspodele

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-q & 0 \leq x < b \\ 1 & x \geq b\ . \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Pošto nam je poznata raspodela slučajne veličine $X$ možemo odrediti matematičko očekivanje i disperziju:

$$E[X] = bq \tag{2.2.4}$$

$$E[X^2] = b^2 q$$

i

$$Var[X] = b^2 q(1-q). \tag{2.2.5}$$

Do formula za očekivanje i disperziju možemo doći i ako slučajnu veličinu $X$ predstavimo kao $X = Ib$, gde je $b$ konstanta koja predstavlja iznos koji se isplaćuje u sličaju smrti osiguranika u toku trajanja osiguranja, dok je $I$ slučajna veličina koja uzima vrednost jedan u slučaju smrti i vrednost 0 inače (indikator smrti). Drugim rečima $P(I = 0) = 1 - q$, $P(I = 1) = q$, $E[I] = q$ i $Var(I) = q(1 - q)$. Pošto je $b$ samo konstanta lako dolazimo do već navedenih formula za očekivanje i disperziju slučajne veličine $X$.

Sada ćemo posmatrati opštiji model gde je iznos osigurane sume za slučaj smrti takodje slučajna veličina i više smrtnih slučaja se može dogoditi tokom trajanja osiguranja. Sad je slučajna veličina $X = IB$, gde $B$ predstavlja ukupan iznos osiguranih suma za slučaj smrti koje su isplaćene tokom perioda, a $I$ je indikator dogadjaja da se dogodi barem jedan slučaj smrti. Indikator $I$ može uzimati vrednosti 0 i 1 i to sa verovatnoćom $P(I = 1) = q$.

Odredićemo očekivanje i disperziju slučajne veličine $X$ primenom svojstava uslovnog očekivanja. Znamo da je:

$$E[X] = E[E[X|I]] \tag{2.2.6}$$

i

$$Var[X] = Var[E[X|I]] + E[Var[X|I]]. \tag{2.2.7}$$

Označimo sa:

$$\mu = E[B|I = 1] \tag{2.2.8}$$

$$\sigma^2 = Var[B|I = 1]. \tag{2.2.9}$$

Primenom uvedenih oznaka i formula uslovnog očekivanja:

$$E[X|I = 0] = 0 \tag{2.2.10}$$

i

$$E[X|I = 1] = E[B|I = 1] = \mu. \tag{2.2.11}$$

Formule (2.2.10) i (2.2.11) definišu $E[X|I]$ kao funkciju od $I$ koja se može napisati kao:

$$E[X|I] = \mu I. \tag{2.2.12}$$

Otuda,

$$E[E[X|I]] = \mu E[I] = \mu q \tag{2.2.13}$$

i

$$Var[E[X|I]] = \mu^2 Var[I] = \mu^2 q(1 - q). \tag{2.2.14}$$

Pošto je $X = 0$ za $I = 0$ imamo

$$Var[X|I = 0] = 0. \tag{2.2.15}$$

Za $I = 1$ je $X = B$ i

$$Var[X|I = 1] = Var[B|I = 1] = \sigma^2. \tag{2.2.16}$$

Kombinovanjem formula (2.2.15) i (2.2.16) dolazimo do

$$Var[X|I] = \sigma^2 I. \tag{2.2.17}$$

Onda je

$$E[Var[X|I]] = \sigma^2 E[I] = \sigma^2 q. \tag{2.2.18}$$

Zamenom (2.2.13), (2.2.14) i (2.2.18) u (2.2.6) i (2.2.7) dobijmo

$$E[X] = \mu q \tag{2.2.19}$$

i

$$Var[X] = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q. \tag{2.2.20}$$

Jedna od najbitnijih teorema u aktuarskoj matematici je centralna granična teorema.

**Teorema 2.1** *(Centralna granična teorema Lindberg - Levija) Neka je* $X_1$, $X_2$,...,$X_n$ *niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih veličina, gde je* $E[X_i] = \mu$ *i* $Var[X_i] = \sigma^2$ *, onda je raspodela za standardizovan oblik slučajne veličine* $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *normalna, tj.* $N(0,1)$*:*
$S^* = \frac{S-n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \to N(0,1)$, $n \to \infty$.

Kao posledica centralne granične teoreme sledi da $X_1+X_2+...+X_n : N(n\mu, n\sigma^2)$. Ova aprokcimacija je dobra kada je $n \geq 30$.

Kada je u pitanju osiguranje obično nemamo slučajne veličine koje su jednako raspodeljene u tom slučaju očekivanje slučajne veličine

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

je

$$E[S] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i],$$

dok je disperzija na osnovu pretpostavke o nezavisnosti

$$Var[S] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i].$$

Primer 2.1:
Osiguravajuća kompanija ima portfolio koji se sastoji od 16.000 riziko osiguranja sa trajanjem od godinu dana. Osigurane sume su navedene u sledećoj tabeli.

| osigurana suma $b_k$ | broj osiguranja $n_k$ |
|---|---:|
| 10.000 | 8.000 |
| 20.000 | 3.500 |
| 30.000 | 2.500 |
| 50.000 | 1.500 |
| 100.000 | 500 |

Neka je verovatnoća smrti svakog od 16.000 osiguranih medjusobno nezavisnih života $q_k = 0,02$. Osiguravajuća kompanija želi da odredi svoj samopridržaj [1].

[1] Iznos ugovorom prenetih rizika koji društo za osiguranje uvek zadržava u sopstvenom pokriću i koji može pokriti sopstvenim sredstvima.

Na primer, ukoliko je samopridržaj kompanije 20.000, a osigurana suma za slučaj smrti 30.000 osiguravajuća kuća prenosi 10.000 u reosiguranje. Pretpostavićemo da reosiguravač traži premiju u iznosu od $0,025$ za jedinicu osigurane sume. Osiguravajuća kompanija želi da odredi samopridržaj koji minimizira verovatnoću da troškovi reosiguranja zajedno sa iznosom nastalih šteta u samopridržaju budu veći od 8.250.000.

Rešenje:
Pretpostavimo da je samopridržaj 2 (20.000).
Neka je $S$ ukupan iznos nastalih šteta čije osigurane sume nisu veće od samopridržaja.

| os u samopridržaju $b_k$ | broj osiguranja $n_k$ |
|---|---|
| 1 | 8.000 |
| 2 | 8.000 |

$$E[S] = \sum_{k=1}^{2} n_k b_k q_k = 8.000\ (1)\ (0,02)\ +\ 8.000\ (2)\ (0,02) = 480$$

$$Var[S] = \sum_{k=1}^{2} n_k {b_k}^2\ q_k(1-q_k) = 8.000\ (1)\ (0,02)\ (0,98) + 8.000\ (4)\ (0,02)\ (0,98) = 784$$

Potrebno je da odredimo i premiju reosiguranja.
Ukupan iznos preuzetog rizika je

$$8.000\ (1)\ +\ 3.500\ (2)\ +\ 2.500\ (3)\ +\ 1.500\ (5)\ +\ 500\ (10)\ = 35.000.$$

Iznos preuzetog rizika ispod samopridržaja je

$$8.000\ (1)\ +\ 8.500\ (2)\ = 24.000.$$

Otuda je rizik prenet u reosiguranje $35.000 - 24.000 = 11.000$, dok je premija reosiguranja $11.000\ (0,025)\ =\ 275$.
Primenom centralne granične teoreme odredićemo verovatnoću da $S+275$ predje iznos od 825,

$$\begin{aligned} &P(S+275 > 825) = P(S > 550) \\ &= P(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}} > \frac{550-E[S]}{\sqrt{Var[S]}}) \\ &= P(\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}} > 2.5) = 0.0062. \end{aligned}$$

# 3 Funkcija preživljavanja i tablice smrtnosti

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1], [2], [4] i [6].

U ovom poglavlju ćemo govoriti o modelima osiguranja dizajniranih za upravljanje slučajnošću gubitka, gde je slučajnost povezana sa tim koliko će dugo pojedinac živeti. Akcenat će biti na slučajnoj veličini $T(x)$ koja predstavlja vreme trajanja života. Biće navedene razne ideje o tome kako da se koristi raspodela slučajne veličine $T(x)$ i odgovarajuće slučajne veličine $X$ koja predstavlja godinu u kojoj nastupa smrt. Pokazaćemo kako se raspodela slučajne veličine $X$ može predstaviti u obliku tablica smrtnosti.
Tablice smrtnosti su korisne u mnogim oblastima nauke. Na primer inženjeri koriste tablice smrtnosti za izračunavanje pouzdanosti kompleksnih mehaničkih i elektronskih sistema. Biostatističari ih koriste za uporedjivanje efikasnosti tretmana za lečenje ozbiljnih bolesti, dok ih demografi koriste za projekciju populacije. U osiguranju života tablice smrtnosti se koriste za pravljenje modela koji će pomoći pojedincu da se suoči sa neizvesnoću vremena smrti.

## 3.1 Funkcija preživljavanja

Posmatrajmo novorodjenče čiji ćemo momenat smrti prirodno smatrati slučajnom promenljivom $X$.Obeležimo sa $F(x)$ funkciju raspodele slučajne veličine $X$

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \geq 0 \tag{3.1.1}$$

i

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x),\ x \geq 0. \tag{3.1.2}$$

Iz pretpostavke da je $F(0) = 0$ sledi da je $s(0) = 1$. Funkcija $s(x)$ je takozvana funkcija preživljavanja. Za svako $x \geq 0$, $s(x)$ predstavlja verovatnoću da će novorodjenče doživeti $x$ godina. Raspodela slučajne veličine $X$ je odredjena ili funkcijom $F(x)$ ili funkcijom $s(x)$. U osiguranju života funkcija preživljavanja predstavlja početnu tačku. Zahvaljujućim poznatim svojstvima funkcije raspodele $F(x)$ dolazimo do odgovarajućih svojstava funkcije $s(x)$. Na primer, verovatnoća da će novorodjenče umreti izmedju uzrasta $x$ i $z$ $(x < z)$ predstavljena je formulom:

$$P(x < X \leq z) = F(z) - F(x) = s(x) - s(z).$$

## 3.2 Vreme trajanja života kao slučajna veličina

Ako znamo da je čovek doživeo $x$ godina, verovatnoća da će njegova smrt nastupiti u intervalu $(x, z)$ je uslovna verovatnoća iskazana formulom:

$$P(x < X \leq z | X > x) = \frac{F(z) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)} \tag{3.2.1}$$

Simbol $(x)$ će u nastavku predstavlji osobu starosti $x$, dok ćemo buduće vreme trajanja života osobe stare $x$, koje iznosi $X - x$, označiti sa $T(x)$.
U aktuarstvu često je neophodno napraviti pretpostavke o vremenu trajanja života. Za tu svrhu postoji grupa simbola koji su deo Internacionalne Aktuarske notacije usvojene 1898. godine na Internacionalnom Aktuarskom kongresu.

$$_tq_x = P(T(x) \leq t), t \geq 0 \tag{3.2.2}$$

$$_tp_x = 1 -_t q_x = P(T(x) > t), t \geq 0 \tag{3.2.3}$$

Simbol $_tq_x$ može se interpretirati kao verovatnoća da će osoba čija je starost $x$ umreti u narednih $t$ godina, dok $_tp_x$ interpetiramo kao verovatnoću da će osoba starosti $x$ doživeti starost $x+t$ godinu. Kada je u pitanju novorodjenče, odnosno $T(0) = X$, onda je

$$_xp_0 = s(x), \;\; x \geq 0. \tag{3.2.4}$$

Za $t = 1$, po konvenciji se ne stavlja prefiks u formulama (3.2.2) i (3.2.3), pa ukoliko zamenimo $t = 1$ u izraze (3.2.2) i (3.2.3) dobijamo:

$q_x$=P[osoba starosti $x$ će umreti u toku naredne godine]
$p_x$=P[osoba starosti $x$ će doživeti starost $x + 1$].

Oznaka za verovatnoću smrti u intervalu $(x + t, x + t + u)$ čoveka starosti $x$:

$$_{t|u}q_x = P(t < T(x) \leq t + u) =_{t+u} q_x -_t q_x =_t p_x -_{t+u} p_x. \tag{3.2.7}$$

Možemo zaključiti da imamo dva izraza za verovatnoću da će čovek koji ima $x$ godina umreti u narednih $u$ godina. Za $t = 0$ formula (3.2.7) je jedna od njih, dok je za $z = x + u$ formula (3.2.1) druga. Verovatnoća predstavljena formulom (3.2.1) se interpretira kao uslovna verovatnoća da će osoba koja doživi $x$ godina umreti u intervalu $(x, x + u)$. Jedina informacija koju imamo je da je osoba doživela starost $x$.
Za $t = 0$ formula (3.2.7) predstavlja verovatnoću da će osoba posmatrana u $x$-oj godini života umreti u narednih $u$ godina. U ovom slučaju imamo više informacija o zdravstvenom stanju potencijalnog osiguranika, pa je ova verovatnoća bolja prilikom pravljenja tablica smrtnosti. U nastavku nećemo obraćati pažnju na razliku izmedju ove dve verovatnoće tako da ćemo koristiti sledeće oznake:

$$_tp_x = \frac{_{x+t}p_0}{_xp_0} = \frac{s(x + t)}{s(x)} \tag{3.2.8}$$

$$_tq_x = 1 - \frac{s(x + t)}{s(x)} \tag{3.2.8}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x &= \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x+t)} \\
&=_t p_x \; {}_u q_{x+t}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}
$$

## 3.3 Vreme trajanja života kao diskretna slučajna veličina

Vreme trajanja života kao diskretna slučajna veličina $K(x)$ predstavlja broj godina života čoveka od $x$ godina do godine njegove smrti.

$$
\begin{aligned}
& P(K(x) = k) = P(k \leq T(x) < k+1) \\
& = P(k < T(x) \leq k+1) \\
& =_k p_x -_{k+1} p_x \\
& =_k p_x \; q_{x+k} =_{k|} q_x, \; k = 0, 1, 2, ...
\end{aligned} \tag{3.3.1}
$$

Menjanje nejednakosti u formuli (3.3.1) je dozvoljeno pošto je $T(x)$ neprekidna slučajna veličina, pa samim tim važi $P(T(x) = k) = P(T(x) = k+1) = 0$.
Izraz (3.3.1) je specijalan slučaj izraza (3.2.7) za $u = 1$ i $k$ kao nenegativan ceo broj. Iz izraza (3.3.1) možemo zaključiti da je funkcija raspodele slučajne veličine $K(x)$ stepenasta funkcija:

$$
\sum_{h=0}^{k} {}_{h|}q_x =_{k+1} q_x, \; k = 0, 1, 2...
$$

## 3.4 Intezitet smrtnosti i intezitet kamatne stope

U formuli (3.2.1) preko funkcije raspodele $F(x)$ i preko funkcije preživljavanja $s(x)$ predstavljena je uslovna verovatnoća da osoba koja doživi $x$ godina umre u intervalu $(x, z)$. Ako je $z - x$ konstanta $c$ onda je uslovna verovatnoća funkcija od $x$ i predstavlja verovatnoću smrti u bliskoj budućnosti (od 0 do $c$) za osobu koja doživi starost $x$. Analogno, ukoliko u formuli (3.2.1) zamenimo $z = x + \triangle x$, dobijamo:

$$
P(x < X \leq x + \triangle x | X > x) = \frac{F(x + \triangle x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f(x) \triangle x}{1 - F(x)}. \tag{3.4.1}
$$

Za neprekidnu slučajnu veličinu $X$ koja predstavlja starost osobe u trenutku smrti važi jednakost $F'(x) = f(x)$. Veličina

$$
\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)} \tag{3.4.2}
$$

se naziva intezitet smrtnosti i igra važnu ulogu u aktuarskoj matematici pošto pri malim vrednostima $\triangle x$, $\mu_x$ približno izražava verovatnoću smrti u intervalu $(x, x + \triangle x)$ čoveka starosti $x$.

Na osnovu svojstava $f(x)$ i $F(x)$ sledi $\mu_x \geq 0$. Uz pomoć funkcije preživljavanja možemo iskoristiti intezitet smrtnosti kako bismo odredili raspodelu slučajne veličine $X$. Da bismo došli do željenog rezultata počećemo tako što ćemo u izrazu (3.4.2) $x$ zameniti sa $y$ i napisati u drugom obliku:

$$-\mu_y dy = d \log s(y).$$

Prointegralićemo i levu i desnu stranu jednakosti

$$-\int_x^{x+n} \mu_y dy = \log \frac{s(x+n)}{s(x)} = \log({}_n p_x)$$

$${}_n p_x = \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y dy) \tag{3.4.3}$$

Ukoliko uzmemo smenu $s = y - x$ dobijamo pogodniji zapis:

$${}_n p_x = \exp(-\int_0^n \mu_{x+s} ds). \tag{3.4.4}$$

i za novorodjenog

$${}_x p_0 = s(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds). \tag{3.4.5}$$

Dodatno,

$$F(x) = 1 - s(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \mu_s ds) \tag{3.4.6}$$

$$F'(x) = f(x) = \exp(-\int_0^x \mu_s ds)\mu_x =_x p_0\ \mu_x. \tag{3.4.7}$$

Obeležimo funkciju raspodele i gustinu raspodele slučajne veličine $T(x)$ redom sa $G(t)$ i $g(t)$. Iz izraza (3.2.2) znamo da je $G(t) =_t q_x$.
Onda je,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d}{dt}{}_t q_x \\ &= \frac{d}{dt}[1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}] \\ &= \frac{s(x+t)}{s(x)}[-\frac{s'(x+t)}{s(x+t)}] \\ &=_t p_x\ \mu_{x+t},\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Prema tome ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ je verovatnoća da osoba koja ima $x$ godina umre u intervalu $(t, t+dt)$ i

$$\int_0^\infty {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt = 1.$$

Iz izraza (3.4.8) imamo

$$\frac{d}{dt}(1 -_t p_x) = -\frac{d}{dt}{}_tp_x =_t p_x\mu_{x+t}. \tag{3.4.9}$$

Pošto je

$$\lim_{n\to\infty} {}_np_x = 0$$

možemo zaključiti da je

$$\lim_{n\to\infty}(-\log_n p_x) = \infty$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^{x+n} \mu_y dy = \infty.$$

Neka je $i$ godišnja efektivna kamatna stopa. Definisaćemo $i^{(m)}$, nominalnu kamatnu stopu koja se obračunava $m$ puta godišnje i ekvivalentna je efektivnoj kamatnoj stopi $i$:

$$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m = 1+i$$

ili

$$i^{(m)} = m[(1+i)^{1/m} - 1].$$

Intezitet kamatne stope $i$ je definisan sa:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} i^{(m)}.$$

Intezitet kamatne stope $\delta$ je zapravo vrednost u tački $x = 0$ izvoda funkcije $(1+i)^x$. Otuda važi:

$$\delta = ln(1+i).$$

Kamatna stopa se može pripisivati na početku obračunskog perioda ili na kraju. Ukoliko se pripisuje na početku diskontni faktor je definisan kao:

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

## 3.5 Tablice smrtnosti

Osnove za izradu tarife osiguranja života su tablice smrtnosti i obračunska kamatna stopa.Tablice smrtnosti sadrže niz pokazatelja od kojih je osnovni izravnata verovatnoća smrtnosti na osnovu koje se izračunavaju: verovatnoća preživljavanja, kretanja broja živih i broja umrlih u okviru odredjenog skupa izračunatog na osnovu izravnatih verovatnoća smrti. Pomoću ovako dobijenih vrednosti broja živih i umrlih lica i odgovarajuće kamatne stope, izračunavaju se komutativni brojevi koji služe za obračun neto premija u osiguranju života, a zatim i matematičke rezerve.
Tablice smrtnosti konstruišu se na dva načina: direktnom ili indirektnom metodom. Po direktnoj metodi posmatra se odredjeni broj novorodjenih tokom njihovog života kako bi se utvrdilo koliko lica ostane živo u prvoj godini života, zatim u sledećoj, sve dok poslednje od tih lica ne umre. Ova metoda je praktično neizvodljiva zbog tehničkim poteškoća, pa se zato upotrebljava samo kao dopuna indirekte metode.

Po indirektnoj metodi posmatra se istovremeno više generacija, odnosno grupa lica različite starosti, kako bi se utvrdila verovatnoća smrti za pojedine klase starosti. Zatim se pomoću proizvoljno odabranog velikog broja lica, računskim putem odredjuje broj živih za pojedine klase starosti. Dok je tablica smrtnosti dobijena direktnom metodom odraz toka smrtnosti jedne stvarno postojeće generacije, tablice smrtnosti sastavljene po indirektnoj metodi predstavljaju red izumiranja jedne fiktivne, odnosno zamišljene grupe lica.
U nastavku će biti reči o funkcijama koje su od velikog značaja za izradu tablica smrtnosti.

### 3.5.1 Veza izmedju tablica smrtnosti i funkcije preživljavanja

U formuli (3.2.8) smo već definisali uslovnu verovatnoću da će osoba koja doživi $x$ godina umreti u narednih $t$ godina:

$$_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Specijalno za $t = 1$:

$$q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}.$$

Posmatraćemo grupu od $l_0 = 100.000$ novorodjenih. Za svakog člana grupe slučajna veličina koja predstavlja starost u momentu smrti odredjena je funkcijom preživljavanja $s(x)$. Sa $L(x)$ ćemo obeležiti ukupan broj članova grupe koji su doživeli $x$ godina. Indeksiraćemo članove grupe sa $j = 1, 2, ..., l_0$

$$L(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j$$

gde je $I_j$ indikator postojanja života $j$-og lica na kraju godine $x$,

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{ako lice } j \text{ doživi starost } x \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Pošto je $E[I_j] = s(x)$,

$$E[L(x)] = \sum_{j=1}^{l_0} E[I_j] = l_0\ s(x).$$

Obeležićemo $E[L(x)]$ sa $l_x$, tako da $l_x$ predstavlja očekivani broj osoba koji dožive $x$ godina od njih $l_0$, odnosno

$$l_x = l_0 s(x). \tag{3.5.1.1}$$

Iz pretpostavke da su $I_j$ nezavisne slučajne veličine zaključujemo da $L(x)$ ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = l_0$ i $p = s(x)$.

Sada ćemo uvesti još jednu slučajnu veličinu, a to je ${}_nD_x$ koja predstavlja broj umrlih starosti od $x$ do $x+n$ godina (od fiksnog broja novorodjenih). Očekivana vrednost slučajne veličine ${}_nD_x$, tj. prosečan broj predstavnika grupe koji su umrli u uzrastu od $x$ do $x+n$ godina označimo sa ${}_nd_x = E[{}_nD_x]$. Neposredno se dobija

$${}_nd_x = E[{}_nD_x] = l_0(s(x) - s(x+n)) = l_x - l_{x+n}, \tag{3.5.1.2}$$

gde je $s(x) - s(x+n)$ verovatnoća smrti u intervalu $(x, x+n)$.
Za $n = 1$, imaćemo veličinu ${}_1d_x$ koju označavama sa $d_x$. Na osnovu izraza (3.5.1.1) sledi

$$-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx} = -\frac{1}{s(x)}\frac{ds(x)}{dx} = \mu_x \tag{3.5.1.3}$$

i

$$-dl_x = l_x \mu_x dx. \tag{3.5.1.4}$$

Pošto je

$$l_x\ \mu_x = l_0 \mu_x\ {}_xp_0 = l_0\ f(x),$$

faktor $l_x\ \mu_x$ se može interpretirati kao očekivana gustina raspodele smrti u intervalu $(x, x+dx)$. Dalje dolazimo do

$$l_x = l_0 \exp(-\int_0^x \mu_y\ dy) \tag{3.5.1.5}$$

$$l_{x+n} = l_x \exp(-\int_x^{x+n} \mu_y\ dy) \tag{3.5.1.6}$$

$$l_x - l_{x+n} = \int_x^{x+n} l_y\ \mu_y\ dy \tag{3.5.1.7}$$

Kada su u pitanju tablice smrtnosti obično se vrednosti manje od 110 koriste kao maksimalni iznos godina koje čovek može da doživi. Odnosno, pretpostavljamo da postoji godina $w$ takva da je $s(x) > 0$ za $x < w$ i $s(x) = 0$ za $x \geq w$. Takvo $w$ se naživa granica života.

### 3.5.2 Ostale funkcije tablica smrtnosti

Pre nego što dalje nastavimo sa raspodelom slučajne veličine $T(x)$ navešćemo dve teoreme. Jedna se odnosi na neprekidne slučajne veličine, a druga na diskretne.

**Teorema 3.1** *Neka je $T$ neprekidna slučajna veličina sa funkcijom raspodele $G(t)$, $G(0) = 0$ i gustinom $G'(t) = g(t)$. Funkcija $z(t)$ je nenegativna, monotona, diferencijabilna i $E[z(T)]$ postoji. Onda je*

$$E[z(T)] = \int_0^\infty z(t)g(t)dt = z(0) + \int_0^\infty z'(t)[1 - G(t)]dt.$$

Dokaz:

$$\int_0^t z(s)g(s)ds = -\int_0^t z(s)d(1 - G(s))$$
$$= -z(s)(1 - G(s))|_0{}^t + \int_0^t (1 - G(s))z'(s)ds.$$

Teorema važi ukoliko je

$$\lim_{t\to\infty} z(t)(1 - G(t)) = 0$$

tako da posmatramo dva slučaja:
a. Ako je nenegativna funkcija $z(t)$ nerastuća, onda je

$$\lim_{t\to\infty} z(t)(1 - G(t)) = 0.$$

b. Ako je nenegativna funkcija $z(t)$ neopadajuća onda

$$0 \leq z(t)\ (1 - G(t)) = z(t) \int_0^\infty g(s)ds \leq \int_t^\infty z(s)g(s)ds.$$

Ali ukoliko postoji $E[z(T)]$ onda je

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty z(s)g(s)ds = 0$$

pa otuda

$$\lim_{t\to\infty} z(t)[1 - G(t)] = 0.$$

Teorema 3.1 će nam poslužiti da povežemo dve formule za $E[T(x)]$. Uvešćemo novu oznaku $\dot{e}_x = E[T(x)]$ koja predstavlja srednje trajanje života.
Na osnovu definicije sledi

$$\dot{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt. \tag{3.5.2.1}$$

Primenom teoreme 3.1 za $z(t) = t$ i $G(t) = 1 -_t p_x$ imamo

$$\dot{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x \ dt. \tag{3.5.2.2}$$

Srednje trajanje života se obično koristi za poredjene zdravstvenog stanja različitih populacija.
Ukoliko sada primenimo teoremu 3.1 za $z(t) = t^2$ dobićemo $E[T(x)^2]$:

$$E[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2{}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt = 2\int_0^\infty t_tp_x dt.$$

Zahvaljujući prethodnim rezultatima dobijamo formulu za $Var[T(x)]$:

$$Var[T(x)] = E[T(x)^2] - E[T(x)]^2 = 2\int_0^\infty t \ {}_tp_x \ dt - \dot{e}_x^2.$$

Naravno, za postizanje ovog rezultata potrebno nam je postojanje $E[T(x)]$ i $E[T(x)^2]$. Za funkciju preživljavanja oblika $s(x) = \frac{1}{1+x}$ prethodno navedeno ne važi.

Još jedna od karakteristika slučajne veličine $T(x)$ je medijana budućeg vremena života obeležena sa $m(x)$ koja se dobija rešavanjem jednačine:

$$P[T(x) > m(x)] = \frac{1}{2}$$

ili

$$\frac{s[x + m(x)]}{s(x)} = \frac{1}{2}. \tag{3.5.2.3}$$

po $m(x)$. Posebno, $m(0)$ dobijamo rešavanjem $s[m(0)] = \frac{1}{2}$. Moda slučajne veličine $T(x)$ je $t$ za koje ${}_tp_x\mu_{x+t}$ dostiže maksimum.

**Teorema 3.2** *Neka je $K$ nenegativna slučajna veličina koja uzima nenegativne cele brojeve sa funkcijom raspodele $G(k)$ i raspodelom verovatnoće $g(k) = \triangle G(k-1)$. Funkcija $z(k)$ je nenegativna, monotona funkcija takva da $E[z(K)]$ postoji, onda:*

$$E[z(K)] = \sum_{k=0}^\infty z(k)g(k) = z(0) + \sum_{k=0}^\infty (1 - G(k)) \triangle z(k).$$

Dokaz:

$$\sum_{j=0}^{k-1} z(j)g(j) = -\sum_{j=0}^{k-1} z(j) \triangle [1 - G(j-1)]$$

$$= -z(j)[1 - G(j-1)]|_0^k + \sum_{j=0}^{k-1} [1 - G(j)] \triangle z(j).$$

Teorema važi ukoliko je

$$\lim_{k\to\infty} z(k)(1 - G(k-1)) = 0$$

tako da ćemo posmatrati dva slučaja:
a. Ako je funkcija $z(k)$ nerastuća onda je

$$\lim_{k\to\infty} z(k)(1 - G(k-1)) = 0.$$

b. Ako je funkcija $z(k)$ neopadajuća onda je

$$0 \leq z(k)[1 - G(k-1)] = z(k) \sum_{j=k}^{\infty} g(j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} z(j)g(j).$$

Ali, ako postoji $E[z(K)]$ važi da je

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^{\infty} z(j)\ g(j) = 0,$$

otuda

$$\lim_{k\to\infty} z(k)[1 - G(k-1)] = 0.$$

Specijalno, za $K$ diskretnu slučajnu veličinu koja predstavlja vreme trajanja života teorema 3.2 glasi

$$E[z(K)] = z(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \triangle z(k)_{k+1}p_x. \tag{3.5.2.4}$$

Sada ćemo odrediti očekivanje i disperziju slučajne veličine $K$

$$E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k\ {}_kp_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}\ {}_{k+1}p_x. \tag{3.5.2.5}$$

Da bismo došli do $e_x = E[K]$ primenili smo teoremu 3.2 , gde je korišćena funkcija $z(k) = k$. Simbol $e_x$ predstavlja srednje trajanje života za diskretnu slučajnu veličinu $K$. Sada ćemo za $z(k) = k^2$ izračunati $E[K^2]$ kao i kod neprekidne slučajne veličine $T$:

$$E[K^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\ {}_kp_x\ q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)_{k+1}p_x. \tag{3.5.2.6}$$

Onda je

$$Var[K] = E[K^2] - E[K]^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x - e_x^2.$$

Neka je $x$ ceo broj, definisaćemo slučajnu veličinu $S = S(x)$ sa $T = K + S$, gde je $T$ vreme do smrt, $K$ je celobrojno buduće vreme života, dok je $S$ slučajna veličina koja predstavlja deo godine u kojoj se život završava. Onda je

$$P[k < T \leq k + s] = P[(K = k) \cap (S \leq s)] =_{k|s} q_x =_k p_x\ {}_sq_{x+k}.$$

Ukoliko sada iskoristimo i pretpostavku o uniformnoj raspodeli za ${}_sq_{x+k}$ imamo

$$P[(K = k) \cap (S \leq s)] =_k p_x\ {}_sq_{x+k} =_{k|s} q_x = P(K = k)\ P(S \leq s).$$

# 4 Životno osiguranje

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1], [3] i [4].

## 4.1 Osiguranje života sa isplatom osigurane sume u momentu smrti

U ovom poglavlju ćemo govoriti o iznosu i vremenu isplate osigurane sume koja zavisi isključivo od dužine intervala od početka osiguranja do trenutka smrti. Za razvoj ovog modela su nam potrebne funkcije $b_t$ i $v_t$ koje redom predstavljaju osiguranu sumu i diskontni faktor. Oznaka $t$ predstavlja vreme od početka osiguranja do momenta smrti. Kada je u pitanju osiguranje za slučaj preživljavanja onda je $t$ veće ili jednako od trajanja osiguranja.
Definisaćemo

$$z_t = b_t\ v_t$$

sadašnju vrednost osigurane sume za slučaj smrti. Vreme od početka osiguranja pa do smrti osiguranika ćemo modelirati slučajnom veličinom $T = T(x)$ koju smo već definisali. Prema tome sadašnja vrednost osigurane sume za slučaj smrti je slučajna veličina $z_T$. Kako bi nam bilo lakše u nastavku, uvešćemo novu oznaku:

$$Z = b_T\ v_T.$$

Prvi korak kada je u pitanju životno osiguranje jeste da definišemo $b_t$ i $v_t$. Zatim sledeći korak jeste odredjivanje osobina raspodele slučajne veličine $Z$ koje su posledica pretpostavki o slučajnoj veličini $T$.

### 4.1.1 Osiguranje za slučaj smrti

Kod privremenog osiguranja za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina osigurana suma se isplaćuje jedino u slučaju smrti osiguranika u periodu trajanja osiguranja. Za jedinicu osigurane sume $b_t$, $v_t$ i $Z$ su oblika:

$$b_t = \begin{cases} 1 & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^t \ , \ t \ge 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \le n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Prethodne definicije se zasnivaju na dvema pretpostavkama. Prva je da pošto je trajanje vremena života nenegativna slučajna veličina onda su i slučajne veličine $b_t$, $v_t$ i $Z$. Druga, za neke vrednosti $t$, $b_t$ uzima vrednost 0, dok je $v_t$ irelevantno. U životnom osiguranju, očekivana vrednost slučajne veličine $Z$ predstavlja jednokratnu neto premiju. Pored jednokratne premije u životnom osiguranju postoji i mesečna, kvartalna, polugodišnja i godišnja premija, koje su u praksi mnogo češće od jednokratne.
Jednokratna neto premija privremenog osiguranja za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina za jedinicu osigurane sume je $E[Z]$ i obeležava se sa $\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}$.
Posmatranjem slučajne veličine $Z$ kao funkcije od $T$, $E[Z] = E[Z_T]$, dobijamo

$$\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = E[Z] = E[Z_T] = \int_0^\infty z_t \ g(t)dt = \int_0^n v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt. \tag{4.1.1}$$

Naći ćemo $j$-ti momenat raspodele slučajne veličine $Z$:

$$E[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt = \int_0^n e^{-(j\delta)/t} \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt.$$

**Teorema 4.1** *Neka je intezitet kamatne stope u trenutku $t$ $\delta_t$ i neka su $b_t$ i $v_t$ redom osigurama suma i diskontni faktor. Ako je $b_t^j = b_t$ za svako $t$, onda je $E[Z^j]$ izračunato za $\delta_j$ jednako $E[Z]$ za $j\delta_j$ za $j > 0$.*

Dokaz:

$$E[Z^j] = E[(b_T \ v_T)^j] = E[b_T^j \ v_T^j] = E[b_T \ v_T^j].$$

Uopšteno,

$$v_t = \exp(-\int_0^t \delta_s ds). \tag{4.1.2}$$

Ako obe strane jednakosti podignemo na $j$-ti stepen dobijamo

$$v_t^j = \exp(-\int_0^t j \ \delta_s ds)$$

to je upravo $v_t$ za intezitet kamate $j\delta$.

Na osnovu teoreme 4.1 sledi

$$Var[Z] \ = \ {}^2\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\bar{n}|})^2 \tag{4.1.3}$$

gde je ${}^2\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}$ jednokratna neto premija za privremeno osiguranje za slučaj smrti za jedinicu osigurane sume izračunata za intezitet kamate $2\delta$.

Kod doživotnog osiguranja osigurana suma se isplaćuje u slučaju smrti osiguranika u bilo kom momentu od početka osiguranja. Za jedinicu osigurane sume:

$$b_t = 1,\ t \geq 0$$

$$v_t = v^t,\ t \geq 0$$

$$Z = v^T,\ T \geq 0$$

Jednokratna neto premija je:

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt. \tag{4.1.4}$$

### 4.1.2 Osiguranje za slučaj preživljavanja

Kod privremenog osiguranja za slučaj preživljavanja u trajanju od $n$ godina, isplata ugovorene osigurane sume se vrši na kraju $n$-te godine osiguranja ukoliko je osiguranik živ. Za jedinicu osigurane sume:

$$b_t = \begin{cases} 0 & t \leq n \\ 1 & t > n \end{cases}$$

$$v_t = v^n,\ t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

Jedina neizvesnost kada je ovo osiguranje u pitanju jeste da li će doći do isplate ili ne, pošto su i vreme i iznos isplate unapred tačno odredjeni i poznati. Oznaka za jednokratnu neto premiju ove vrste osiguranja je $\bar{A}_{x:\bar{n}|^1}$.
Slučajnu veličinu $Z$ ćemo predstaviti kao $Z = v^n Y$, gde je $Y$ indikator dogadjaja da osiguranik doživi kraj $x+n$ godine.
Neto jednokratna premija je:

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|^1} = E[Z] = v^n\ E[Y] = v^n\ {}_np_x$$

i

$$Var[Z] = v^{2n} Var[Y] = v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x\ =\ {}^2\bar{A}_{x:\bar{n}|^1} - (\bar{A}_{x:\bar{n}|^1})^2. \tag{4.1.2.1}$$

Kod privremenog mešovitog osiguranja u trajanju od $n$ godina isplata osigurane sume se vrši i u slučaju smrti u toku trajanja osiguranja i u slučaju da je osiguranik živ nakon isteka osiguranja.

$$b_t = 1,\ \ t \geq 0$$

$$v_t = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

Jednokratna neto premija je označena sa $\bar{A}_{x:\bar{n}|}$.
Mešovito osiguranje se može interpretirati kao kombinacija privremenog životnog osiguranja za slučaj smrti i privremenog životnog osiguranja za slučaj preživljavanja. Neko su $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ redom slučajne veličine koje predstavljaju sadašnju vrednost jedinice osigurane sume osiguranja za slučaj smrti, osiguranja za slučaj preživljavanja i mešovitog osiguranja. Osigurana suma za slučaj smti se isplaćuje u momentu smrti.

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & T \leq n \\ v^n & T > n \end{cases}$$

Pošto je

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 \tag{4.1.2.2}$$

kada prodjemo sa očekivanjem na levu i desnu stranu jednakosti (4.1.2.2) dobijamo

$$\bar{A}_{x:\bar{n}|} = \bar{A}^1_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|^1}. \tag{4.1.2.3}$$

Primenom teoreme 4.1 i pošto je $b_t = 1$ kod mešovitog osiguranja dobijamo

$$Var[Z_3] =^2 \bar{A}_{x:\bar{n}|} - (\bar{A}_{x:\bar{n}|})^2. \tag{4.1.2.4}$$

Do disperzije slučajne veličine $Z_3$ možemo doći i na sledeći način

$$Var[Z_3] = Var[Z_1] + Var[Z_2] + 2Cov[Z_1, Z_2]. \tag{4.1.2.5}$$

Korišćenjem formule

$$Cov[X, Y] = E[X\ Y] - E[X]E[Y] \tag{4.1.2.6}$$

i

$$Z_1 Z_2 = 0$$

za svako $T$ dobijamo

$$Cov[Z_1, Z_2] = -E[Z_1]\ E[Z_2] = -\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}\ \bar{A}_{x:\bar{n}|^1}. \tag{4.1.2.7}$$

### 4.1.3 Odloženo osiguranje

Kod odloženog osiguranja u periodu od $m$ godina, osiguravajuća kompanija se obavezuje da isplati ugovorenu osiguranu sumu samo ukoliko osiguranik umre posle $m$ godina od momenta početka osiguranja. Posmatraćemo odloženo doživotno osiguranje za jedinicu osigurane sume za slučaj smti

$$b_t = \begin{cases} 1 & t > m \\ 0 & t \leq m \end{cases}$$

$$v_t = v^t,\ t \geq 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T > m \\ 0 & T \leq m \end{cases}$$

Neto jednokratna premija je obeležena sa ${}_{|m}\bar{A}_x$ i jednaka je

$$\int_m^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t} dt. \tag{4.1.3.1}$$

### 4.1.4 Osiguranje života sa promenljivom osiguranom sumom

Pored prethodno navedenih postoje i osiguranja kod kojih osigurana suma za slučaj smrti raste ili opada tokom celog perioda trajanja osiguranja ili samo jedan deo perioda.
Kod doživotnog osiguranja sa rastućom osiguranom sumom ukoliko osiguranik umre u toku prve godine trajanja osiguranja osiguravač isplaćuje jedinicu osigurane sume, ako umre u drugoj godini trajanja osiguranja dve jedinice,...
Funkcije su definisane sa:

$$b_t = [t+1],\ t \geq 0$$

$$v_t = v^t,\ t \geq 0$$

$$Z = [T+1]v^T,\ T \geq 0,$$

gde oznaka "[]" predstavlja ceo deo broja.
Neto jednokratna premija kod ove vrste osiguranja je:

$$(I\bar{A})_x = E[Z] = \int_0^\infty [t+1]\ v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt.$$

Rast osigurane sume se može dešavati i više puta godišnje. Kod doživotnog osiguranja sa rastom osigurane sume $m$ puta godišnje, osigurana suma za slučaj smrti u prvom periodu godine iznosi $1/m$, u drugom $2/m$,... Za ovakvu vrstu osiguranja funkcije su oblika:

$$b_t = \frac{[tm+1]}{m},\ t \geq 0$$

$$v_t = v^t,\ t \geq 0$$

$$Z = \frac{v^T [Tm+1]}{m},\ T \geq 0.$$

Neto jednokratna premija iznosi:

$$(I^{(m)}\bar{A})_x = E[Z].$$

Ukoliko pustimo da $m \to \infty$, dobijamo doživotno osiguranje sa rastućom osiguranom sumom kod koga se korisniku osiguranja isplaćuje iznos $t$ ukoliko je osiguranik umro u trenutku $t$. Funkcije su oblika:

$$b_t = t,\ t \geq 0$$
$$v_t = v^t,\ t \geq 0$$
$$Z = Tv^t,\ T \geq 0.$$

Oznaka za neto jednokratnu premiju u ovom slučaju je $(\bar{I}\bar{A})_x$.
Takodje, postoji i osiguranje za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina sa rastućom osiguranom sumom.
Suprotno osiguranju za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina sa rastućom osiguranom sumom je osiguranje za slučaj smrti sa opadajućom osiguranom sumom u trajanju od $n$ godina.
Ukoliko osiguranik umre u toku prve godine trajanja osiguranja osigurana suma je $n$, u toku druge $n-1$ i tako dalje. Za ovakvu vrstu osiguranja funkcije su oblika:

$$b_t = \begin{cases} n - [t] & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases}$$
$$v_t = v^t,\ t > 0$$
$$Z = \begin{cases} v^T(n - [T]) & T \leq n \\ 0 & T > n \end{cases}$$

Neto jednokratna premija je:

$$(D\bar{A})^1_{x\bar{n}|} = \int_0^n v^t\ (n - [t])\ {}_t\, p_x\ \mu_{x+t}\ dt.$$

## 4.2 Osiguranje sa isplatom osigurane sume na kraju osigurane godine u kojoj se desila smrt

U prethodnim poglavljima bilo je reči o osiguranjima kod kojih se osigurana suma za slučaj smrti isplaćuje u momentu smrti. Ovakva vrsta osiguranja je i najčešća u praksi. Svi ovi modelu su bazirani na slučajnoj veličini $T$, odnosno vremenu života osiguranika. U praksi su često najbolje dostupne informacije o raspodeli slučajne veličine $T$ tablice smrtnosti, odnosno raspodela diskretne slučajne veličine $K$. U nastavku ćemo govoriti o modelima kod kojih iznosi

i vreme isplate osigurane sume zavise isključivo samo od proteklih godina od početka osiguranja do smrti. Ovu grupu osiguranja ćemo nazvati osiguranja sa isplatom osigurane sume za slučaj smrti na kraju godine u kojoj je smrt nastupila.
U modelima ćemo koristiti odgovarajuće funkcije koje idu uz diskretnu slučajnu veličinu $K$. Osigurana suma i diskontni faktor koji odgovaraju vremenu proteklom od početka osiguranja do momenta smrti su redom $b_{k+1}$ i $v_{k+1}$. To je slučaj kada je buduće vreme života osiguranika $k$ godina, odnosno osiguranik umire u toku $k+1$ godine od početka trajanja osiguranja. Sadašnja vrednost osigurane sume je

$$z_{k+1} = b_{k+1}\ v_{k+1}. \tag{4.2.1}$$

Kao i u prethodnom delu za sadašnju vrednost osigurane sume $z_{k+1}$ koristićemo oznaku $Z$.
Kod privremenog osiguranja života za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina za jedinicu osigurane sume, funkcije su oblika:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, ...n-1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Neto jednokratna premija kod ovog osiguranja je:

$$A^1_{x:\bar{n}|} = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}. \tag{4.2.2}$$

I kod ove vrste osiguranja moguće je primeniti teoremu 4.1, naravno sa odgovarajućom notacijom.
Konkretno za ovu vrstu osiguranja važi:

$$Var[Z] =^2 A^1_{x:\bar{n}|} - (A^1_{x:\bar{n}|})^2$$

gde je

$${}^2A^1_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\ {}_kp_x\ q_{x+k}.$$

Za doživotno osiguranje iskoristićemo prethodni model kada $n$ pustimo da teži beskonačnosti.
Neto jednokratna premija je onda

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_kp_x q_{x+k}. \tag{4.2.3}$$

Množenjem obe strane jednačine (4.2.3) sa $l_x$ dobijamo

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ d_{x+k}. \tag{4.2.4}$$

Prethodna jednačina predstavlja bilans izmedju iznosa neto jednokranih premija $l_x$ živih osiguranika od početnih $l_0$ i iznosa osiguranih suma za očekivane smrti. Izraz

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1}\ d_{x+k} \tag{4.2.5}$$

je deo fonda na početku osiguranja koji će zajedno sa pretpostavljenom kamatnom stopom obezbediti iznos za isplatu osiguranih suma za slučaj smrti nakon $r$ godina trajanja osiguranja.

Privremeno mešovito osiguranje u trajanju od $n$ godina za jedinicu osigurane sume na kraju godine smrti predstavlja kombinaciju privremenog osiguranja za slučaj smrti iz ovog poglavlja i osiguranja za slučaj doživljenja koje je opisano u prethodnom poglavlju. Za ovu vrstu osiguranja funkcije su oblika:

$$b_{k+1} = 1,\ k = 0, 1, 2...$$

$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1} & k = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & k = n, n+1, ... \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Formula za neto jednokratnu premiju:

$$A_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_k p_x\ q_{x+k} + v^n\ {}_n p_x. \tag{4.2.6}$$

Doživotno osiguranje života sa rastućom osiguranom sumom kod kojeg se u slučaju smrti u toku $k+1$ godine trajanja osiguranja isplaćuje $k+1$ jedinica osigurane sume ima funkcije oblika:

$$b_{K+1} = K + 1,\ K = 0, 1, 2...$$

$$v_{K+1} = v^{K+1},\ K = 0, 1, 2...$$

$$Z = (K+1)v^{K+1},\ K = 0, 1, 2...$$

Oznaka za neto jednokratnu premiju je $(IA)_x$.
Kod privremenog osiguranja za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina osiguravač se obavezuje da isplati osiguranu sumu na kraju godine u kojoj je nastupila smrt

u iznosu od $n-k$, gde je $k$ broj godina od početka osiguranja do godine u kojoj je nastupila smrt. Funkcije su:

$$b_{k+1} = \begin{cases} n-k & k=0,1,...,n-1 \\ 0 & k=n,n+1,... \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \ k=0,1,2...$$

$$Z = \begin{cases} (n-K)\ v^{K+1} & K=0,1,...,n-1 \\ 0 & K=n,n+1,... \end{cases}$$

Oznaka za neto jednokratnu premiju je $(DA)^1_{x:\bar{n}|}$.

Privremeno osiguranje života sa opadajućom osiguranom sumom se može predstaviti kao kombinacija osiguranja za slučaj smrti i odloženog osiguranja za slučaj smrti. Jednakost izmedju neto jednokratnih premija data je formulom

$$\begin{aligned} (DA)^1_{x:\bar{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k} \qquad (4.2.7) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ (v^k\ {}_kp_x)\ (vq_{x+k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ {}_{k|}A^1_{x:\bar{1}|}. \end{aligned}$$

Ukoliko u (4.2.7) uvedemo smenu:

$$n-k = \sum_{j=0}^{n-k-1}(1)$$

dobijamo

$$(DA)^1_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1}(1)\ v^{k+1}\ {}_kp_x\ q_{x+k}.$$

Zamenom mesta sumama i korišćenjem (4.2.2) dobijamo

$$(DA)^1_{x:\bar{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\overline{n-j}|}.$$

## 4.3 Veza izmedju osiguranja sa isplatom osigurane sume za slučaj smrti u momentu smrti i na kraju godine smrti

Ovaj odeljak ćemo početi sa analizom neto jednokratne premija doživotnog osiguranja za jedinicu osigurane sume za slučaj smrti. Iz (4.1.4) imamo

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt \qquad (4.3.1)\\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt\\
&= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 v^{k+s} \ {}_{k+s}p_x \ \mu_{x+k+s} \ ds\\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \ {}_kp_x \ \int_0^1 v^{s-1} \ {}_sp_{x+k} \ \mu_{x+k+s} \ ds.
\end{aligned}
$$

Iskoristimo pretpostavku o uniformnoj raspodeli verovatnoće smrti:

$$
{}_sp_{x+k} \ \mu_{x+k+s} = q_{x+k}, \ 0 \le s \le 1
$$

i zameniti u (4.3.1).

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} \ \int_0^1 (1+i)^{1-s} \ ds \qquad (4.3.2)\\
&= \sum_{k=0}^\infty v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} \ \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} \ A_x.
\end{aligned}
$$

Pretpostavka o uniformnoj raspodeli je dovela do ekvivalencije izmedju isplate jedinice osigurane sume u momentu smrti i isplate osigurane sume neprekidno kroz godinu u kojoj je nastupila smrt.
Do prethodnog identitet se može doći i preko diskretne slučajne veličine $K$ koja predstavlja buduće vreme života osiguranika i naravno uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli smrti. Predstavićemo slučajnu veličinu $T$ kao kombinaciju slučajnih veličina $K$ i $S$, gde $S$ predstavlja vreme života u godini u kojoj je smrt nastupila.
Na osnovu pretpostavke o uniformnoj raspodeli smrti dolazimo da zaključka da su $K$ i $S$ nezavisne slučajne veličine i da $S$ ima uniformu raspodelu na intervalu dužne jedan. Isto važi i za slučajne veličine $K+1$ i $S-1$.
U identitetu

$$
\bar{A}_x = E[v^T] = E[v^{K+1}(1+i)^{S-1}]
$$

iskoristićemo nezavisnost slučajnih veličina $K+1$ i $S-1$ kako bismo izračunali očekivanje

$$
E[v^{K+1}(1+i)^{1-S}] = E[v^{K+1}] \ E[(1+i)^{1-S}]. \qquad (4.3.3)
$$

Prvi faktor u izrazu sa desne strane nejednakosti je $A_x$. Pošto $S-1$ ima uniformnu raspodelu na intervalu dužine jedan drugi fakor je

$$E[(1+i)^{1-S}] = \int_0^1 (1+i)^t \; 1dt = \frac{i}{\delta}.$$

Tako da opet dobijamo vezu:

$$\bar{A_x} = \frac{i}{\delta} A_x.$$

Sada ćemo se vratiti na privremeno osiguranje za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina sa rastućom osiguranom sumom. Porast osigurane sume je jednom godišnje. Sadašnja vrednost osigurane sume koja se isplaćuje u momentu smrt je

$$Z = \begin{cases} [T+1] \; v^T & T < n \\ 0 & T \geq n. \end{cases}$$

Pošto je $[T+1] = K+1$ iskoristićemo relaciju $T = K+S$ i dobijamo

$$Z = \begin{cases} (K+1) \; v^{K+1} \; v^{S-1} & K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Obeležićemo sa $W$ sadašnju vrednost osigurane sume za slučaj smrti koja se isplaćuje na kraju godine u kojoj je nastala smrt osiguranja sa godišnjim rastom osigurane sume u trajanju od $n$ godina

$$W = \begin{cases} (K+1) v^{K+1} & K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Onda je

$$Z = W(1+i)^{1-S}$$

i

$$E[Z] = E[W(1+i)^{1-S}].$$

Pošto je $W$ funkcija od $K+1$, a slučajne veličine $K+1$ i $1-S$ su nezavisne

$$E[Z] = E[W] E[(1+i)^{1-S}] = (IA)^1_{x:\bar{n}|} \; \frac{i}{\delta}.$$

Uopšteno,

$$Z = b_T v_T \tag{4.3.4}$$

gde je $v_T = v^T$ i $b_T = b^*_{K+1}$ (odnosi se samo na ceo deo slučajne veličine $T$).

$$Z = b^*_{K+1} v^T = b^*_{K+1} v^{K+1} (1+i)^{1-S}$$

i

$$E[Z] = E[b^*_{K+1} v^{K+1} \; (1+i)^{1-S}]. \tag{4.3.5}$$

Na osnovu pretpostavke o uniformnoj raspodeli verovatnoće smrti i nezavisnosti slučajnih veličina $S$ i $K$ dobijamo

$$E[Z] = E[b^*_{K+1}\ v^{K+1}]E[(1+i)^{1-S}] = E[b^*_{K+1}\ v^{K+1}]\ \frac{i}{\delta}. \tag{4.3.6}$$

Posmatrajmo doživotno osiguranje sa neprekidno rastućom osiguranom sumom koja se isplaćuje u momentu smrti. Funkcije su

$$\begin{aligned} b_t &= t,\ t > 0 \\ v_t &= v^t,\ t > 0 \\ z_t &= tv^t,\ t > 0. \end{aligned}$$

Da bismo pronašli $(\bar{I}\bar{A})_x$ iskoristićemo:

$$\begin{aligned} Z &= (K+S)\ v^{K+S} \\ &= (K+1)\ v^{K+S} - (1-S)\ v^{K+1}\ (1+i)^{1-S} \\ &= (K+1)\ v^{K+1}\ (1+i)^{1-S} - v^{K+1}\ (1-S)\ (1+i)^{1-S}. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli verovatnoće smrti očekivanje leve i desne strane jednakosti

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[(K+1\ )v^{K+1}]\ E[(1+i)^{1-S}]\ -\ E[v^{K+1}]\ E[(1-S)\ (1+i)^{1-S}] \\ &= (IA)_x\ \frac{i}{\delta} - A_x\ E[(1-S)\ (1+i)^{1-S}]. \end{aligned}$$

Pošto slučajna veličina $1-S$ ima uniformnu raspodelu poslednji faktor možemo napisati kao

$$E[(1-S)\ (1+i)^{1-S}] = \int_0^1 u\ (1+i)^u\ du = (\bar{D}\bar{s})_{\overline{1}|} = \frac{1+i}{\delta} - \frac{i}{\delta^2}.$$

Otuda,

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\ [(IA)_x - (\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta})A_x].$$

## 4.4 Rekurentne jednačine

Za razvoj rekurentnih jednačina pomoćiće nam prethodno poglavlje. Krenimo od

$$
\begin{aligned}
A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} \\
&= v \ q_x + \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} \ {}_kp_x \ q_{x+k} \\
&= v \ q_x + v \ p_x \sum_{k=1}^{\infty} v^{k} \ {}_{k-1}p_{x+1} \ q_{x+k} \\
&= v \ q_x + v \ p_x \sum_{j=0}^{\infty} v^{j+1} \ {}_jp_{x+1} \ q_{x+1+j} \\
&= vq_x + v \ p_x \ A_{x+1}.
\end{aligned}
$$

Interpretacija ove formule nam govori da na kraju prve godine osiguranja neto jednokratna premija doživotnog osiguranja mora obezbediti isplatu jedinice osigurane sume ukoliko je u toku godine nastupila smrt ili neto jednokratnu premiju za jedinicu osigurane sume doživotnog osiguranja za naredne godine.
Na osnovu definicije

$$A_x = E[Z] = E[v^{K+1}|K \geq 0].$$

$E[Z]$ ćemo izračunati tako što ćemo posmatrati dva slučaja. Prvi slučaj kada osiguranik umre u toku prve godine trajanja osigurana ($K = 0$) i drugi kada preživi prvu godinu osiguranja ($K \geq 1$).

$$E[Z] = E[v^{K+1}|K = 0] \ P(K = 0) + E[v^{K+1}|K \geq 1] \ P(K \geq 1) \qquad (4.4.1)$$

Uvešćemo oznake:

$$
\begin{aligned}
E[v^{K+1}|K = 0] &= v \\
P(K = 0) &= q_x \\
P(K \geq 1) &= p_x.
\end{aligned}
$$

Preostali faktor ćemo napisati kao

$$E[v^{K+1}|K \geq 1] = v \ E[v^{(K-1)+1}|(K-1) \geq 0] = v \ A_{x+1}.$$

Pošto je $K$ buduće vreme života za osiguranika sa pristupnom starošću $x$, onda je $K - 1$ preostalo vreme života za osiguranika sa pristupnom starošću $x + 1$. Zamenom u jednačinu (4.4.1) dobijamo

$$A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x. \qquad (4.4.2)$$

Zamenom $p_x$ sa $1 - q_x$ i množenjem i leve i desne strane sa $(1 + i) \ l_x$ dobijamo

$$l_x(1 + i)A_x = l_xA_{x+1} + d_x(1 - A_{x+1}).$$

Jednačina se može interpretirati za odredjenu grupu osiguranika: zajedno grupa osiguranika nakon jedne godine uz kamatu $i$ $A_x$ će obezbediti iznos $A_{x+1}$ za sve i iznos $1 - A_{x+1}$ za one za koje se očekuje da će umreti tokom godine. Daljim sredjivanjem:

$$A_{x+1} - A_x = iA_x - q_x(1 - A_x). \tag{4.4.3}$$

Jednačina (4.4.3) nam govori da razlika izmedju neto jednokratne premije za osiguranika sa pristupnom starošću $x$ i $x+1$ je kamaćena jednokratna premija minus troškovi za isplatu jedinice osigurane sume za smrti nastale tokom godine. Još jedan izraz za $A_x$ je

$$v^x\ A_{x+1} - v^{x-1}\ A_x = -v^x\ q_x\ (1 - A_{x+1}). \tag{4.4.4}$$

Sumiranjem od $x = y$ do $\infty$ dobijamo

$$-v^{y-1}A_y = -\sum_{x=y}^{\infty} v^x q_x (1 - A_{x+1}).$$

Otuda,

$$A_y = \sum_{x=y}^{\infty} v^{x-y+1}\ q_x\ (1 - A_{x+1}).$$

Prethodni izraz nam govori da je neto jednokratna premija za osiguranika sa pristupnom starošću $y$ zapravo sadašnja vrednost godišnjih troškova osiguranja do kraja osiguranikovog života.
Slična jednačina se može izvesti za osiguranja sa isplatom osigurane sume u momentu smrti. Pokazaćemo na primeru doživotnog osiguranja za osiguranika sa pristupnom starošću $x$.

$$\bar{A}_x = E[v^T] = E[v^t|T \leq h]\ P(T \leq h) + E[v^T|T > h]\ P(T > h) \tag{4.4.5}$$

Uvodimo oznake $P(T \leq h) =_h q_x$ i $P(T > h) =_h p_x$

i uslovnu gustinu

$$f(t|\ T \leq h) = \begin{cases} \frac{f(t)}{F(h)} = \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hq_x} & 0 \leq t \leq h \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Otuda,

$$E[v^T|T \leq h] = \int_0^h v^t\ \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hq_x}\ dt. \tag{4.4.6}$$

Takodje

$$E[v^T|T > h] = v^h\ E[v^{T-h}|(T-h) > 0] = v^h\ \bar{A}_{x+h}. \tag{4.4.7}$$

Zamenom u (4.4.5) dobijamo

$$\bar{A}_x = \int_0^h v^t \ \frac{{}_tp_x \mu_{x+t}}{{}_hq_x} \ dt \ {}_hq_x + v^h \ \bar{A}_{x+h} \ {}_hp_x. \tag{4.4.8}$$

Obe strane jednačine (4.4.9) ćemo pomnožiti sa $-1$, dodati $\bar{A}_{x+h}$ i podeliti sa $h$

$$\frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = -\frac{1}{h} \int_0^h v^t \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt + \bar{A}_{x+h} \frac{1 - v^h \ {}_hp_x}{h}. \tag{4.4.9}$$

Kada $h$ teži beskonačnosti dobijamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \ {}_tp_x \mu_{x+t} dt = \frac{d}{ds} \int_0^s v^t_t p_x \mu_{x+t} dt|_{s=0} = \mu_x$$

i

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - v^h \ {}_hp_x}{h} = -\frac{d}{dt}(v^t \ {}_tp_x)|_{t=0} = \mu_x + \delta.$$

Zamenom u jednačinu (4.4.9) dobijamo

$$\frac{d}{dx} \bar{A}_x = -\mu_x + \bar{A}_x(\mu_x + \delta).$$

## 4.5 Komutativne funkcije

Posmatrajući izraz

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ d_{x+k}$$

vidimo da je gornja suma funkcija od pristupne starosti osiguranika i trajanja osiguranja. Množenjem obe strane se $v^x$ dobijamo da su obe strane jednakosti samo funkcije od $x$

$$v^x l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k+1} \ d_{x+k}$$

što motiviše definisanje komutativnih funkcija:

$$D_x = v^x \ l_x$$

$$C_x = v^{x+1} \ d_x = D_x \ v \ q_x$$

$$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$$

$$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \ C_{x+k}.$$

Na osnovu komutativnih funkcija neto jednokratna premija odloženog osiguranja za slučaj smrti sa isplatom jedinice osigurane sume na kraju godine u kojoj je smrt nastupila, ako osiguranik umre izmedju $y$ i $z$ godine je

$$_{y-x|z-y}A_x = \frac{M_y - M_z}{D_x}.$$

Sada ćemo preko komutativnih funkcija izraziti neto jednokratnu premiju privremenog osiguranja za slučaj smrti sa rastućom osiguranom sumom i isplatom osigurane sume na kraju godine:

$$\begin{aligned}
(IA)^1_{x:\bar{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ v^{k+1}\ {}_{k|}q_x \qquad (4.4.10)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)v^{x+k+1}\ d_{x+k}}{v^x l_x}\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\ C_{x+k}}{D_x}\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(M_{x+k} - M_{x+n})}{D_x}\\
&= \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}$$

Neto jednokratna premija za privremeno osiguranja života za slučaj preživljavanja se može napisati kao

$$A_{x:\bar{n}|^1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \qquad (4.4.11)$$

Neto jednokratna premija mešovitog osiguranja

$$A_{x:\bar{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.$$

Definisaćemo i komutativne funkcije za osiguranja sa isplatom osigurane sume u momentu smrti:

$$\bar{C_x} = \int_0^1 v^{x+t}\ l_{x+t}\ \mu_{x+t}dt = \int_0^1 D_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt$$

$$\bar{M_x} = \sum_{y=x}^{\infty} \bar{C_y} = \int_x^{\infty} D_y\ \mu_y\ dy$$

$$\bar{R_x} = \sum_{y=x}^{\infty} \bar{M_y}.$$

# 5 Životna renta

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1] i [4].

U prethodnim poglavljima govorili smo o isplatama u slučaju smrti i o različitim vrstama životnog osiguranja. Sada ćemo govoriti o isplati u slučaju da osiguranik bude živ nakon isteka trajanja osiguranja i o različitim vrstama rente. Osiguranik može da uplati osiguravajućoj kompaniji jednokratnu premiju ili da plaća u ratama, da bi na osnovu toga sebi obezbedio primanje rente do kraja života ili za neki odredjeni vremenski period.

Renta koju osiguranik prima lično naživa se lična renta. Takodje postoji i renta u korist trećeg lica, kojom osiguranik želi da u slučaju svoje smrti obezbedi članove svoje porodice.

Prema trajanju renta može biti vremenska (privremena) ako plaćanje rente traje odredjeni vremenski period ili doživotna ako njeno plaćanje traje doživotno, odnosno do kraja života osiguranog lica.

Prema početku primanja, renta može biti neposredna ili odložena. Neposredna renta počinje da teče odmah po zaključenju osiguranja, a ako od dana zaključenja osiguranja do početka primanja rente protekne odredjeni period, radi se o odloženoj renti.

Po načinu primanja renta može biti dekurzivna (krajem godine) i anticipativna (početkom godine).

## 5.1 Jednokratna isplata osigurane sume za slučaj preživljavanja

Posmatramo osiguranje života za slučaj preživljavanja sa isplatom jedinice osigurane sume ukoliko osiguranik doživi istek trajanje osiguranja koji iznosi $n$ godina. U poglavlju 4 smo ovu vrstu osiguranja nazivali osiguranje za slučaj preživljavanja i koristili smo $A_{x:\bar{n}|^1}$ kao oznaku za neto jednokratnu premiju. Kada su u pitanju rente koristi se druga notacija, odnosno oznaka za neto jednokratnu premiju ove vrste osiguranja je ${}_nE_x$

$$ {}_nE_x = A_{x:\bar{n}|^1} = v^n \ {}_np_x. \tag{5.1.1} $$

Formulu (5.1.1) možemo napisati kao

$$ l_x \ {}_nE_x \ (1+i)^n = l_{x+n}. \tag{5.1.2} $$

Formula (5.1.2) nam govori da ukoliko posmatramo grupu osiguranika koja ima $l_x$ članova i ukoliko svaki od članova uloži ${}_nE_x$ novca pod kamatnom stopom $i$ za $n$ godina će se akumulirati dovoljno novca da se svakom od $l_{x+n}$ preostalih živih osiguranika isplati jedinica osigurane sume. Jedna od glavnih pretpostavki jeste da će broj članova grupe opadati. Definisaćemo akumuliranu vrednost $S$ koja predstavja akumulirani iznos novca nakon $n$ godina koji ima sadašnju vrednost 1. Otuda važi da je $S_n E_x = 1$ ili

$$S = \frac{1}{{}_nE_x} = \frac{1}{v^n \ {}_np_x} = (1+i)^n \frac{l_x}{l_{x+n}}. \tag{5.1.3}$$

Formulu možemo interpretirati kao kombinaciju akumulirane kamate $(1+i)^n$ i faktora $\frac{1}{{}_np_x} = \frac{l_x}{l_{x+n}}$.

Sada ćemo videti kako se ${}_nE_x$ ponaša u zavisnosti od promene pristupne starosti i od promene trajanja osiguranja.
Pretpostavićemo da je trajanje $n$ fiksirano i posmatraćemo promenu ${}_nE_x$ u zavisnosti od promene $x$.

$$\frac{\partial}{\partial x}{}_nE_x = v^n \frac{\partial}{\partial x} \ {}_np_x = v^n \ {}_np_x \ (\mu_x - \mu_{x+n}) =_n E_x \ (\mu_x - \mu_{x+n})$$

Ako je $\mu'_y > 0$, $x \leq y \leq x+n$, odnosno ako je $\mu_y$ rastuća funkcija onda je $\partial_n E_x/\partial x < 0$ i ${}_nE_x$ opada sa porastom $x$. Ukoliko je $\mu_y = c$, $x \leq y \leq x+n$, onda je ${}_nE_x = 0$, odnosno ${}_nE_x$ se ne menja sa promenom $x$. Preostali slučaj je kada je $\mu'_y < 0$, $x \leq y \leq x+n$, odnosno ako je $\mu_y$ opadajuća funkcija onda je $\partial_n E_x/\partial x > 0$ i ${}_nE_x$ raste sa porastom $x$.
Pretpostavićemo da je pristupna starost $x$ fiksirana, a posmatraćemo promenu ${}_nE_x$ sa promenom trajanja $n$.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial n} \ {}_nE_x = \frac{\partial}{\partial n} \exp[\int_x^{x+n} (\mu_y + \delta) \ dy] \\ &=_n E_x \ \frac{\partial}{\partial n}[-\int_x^{x+n} (\mu_y + \delta) \ dy] \\ &= -{}_nE_x \ (\mu_{x+n} + \delta) \end{aligned}$$

Dolazimo do zaključka da je $\partial_n E_x < 0$, odnosno da je funkcija ${}_nE_x$ opadajuća funkcija od $n$.

## 5.2 Neprekidna životna renta

Za definisanje sadašnje vrednosti rente možemo koristiti jednu od dve tehnike agregatnu (aggregate payment technique) ili trenutnu (current payment technique) tehniku.
Ove dve tehnike ćemo predstaviti na primeru neprekidne doživotne rente sa godišnjom isplatom jedinice rente. Oznaka za aktuarsku sadašnju vrednost doživotne neprekidne godišnje rente je $\bar{a}_x$.
Slučajna veličina $T$ predstavlja preostalo vreme života osiguranika koji ima $x$ godina. Sadašnja vrednost godišnje rente do momenta smrti je $Y = \bar{a}_{\overline{T}|}$. Koriš ćenjem agregatne tehnike dobijamo

$$\bar{a}_x = E[Y] = E[\bar{a}_{\overline{T}|}]. \tag{5.2.1}$$

Pošto je ${}_tp_x\ \mu_{x+t}$ gustina raspodele slučajne veličine $T$ sledi

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{t}|}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt. \tag{5.2.2}$$

Sa druge strane, trenutna tehnika nam daje formulu

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ dt. \tag{5.2.3}$$

Primenom teoreme 3.1 za $z(t) = \bar{a}_{\bar{t}|}$ i $g(t) =_t p_x\ \mu_{x+t}$ izraz (5.2.2) postaje (5.2.3) što pokazuje ekvivalenciju izmedju (5.2.1) i (5.2.3).

Dalje, primenom teoreme 3.1 za $z(t) = v^t$ i $g(t) =_t p_x\ \mu_{x+t}$ na

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

dobijamo

$$\bar{A}_x = 1 + \int_0^\infty {}_tp_x\ dv^t = 1 - \delta\bar{a_x} \tag{5.2.4}$$

ili

$$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x. \tag{5.2.5}$$

Formula (5.2.5) je analogna relaciji

$$1 = \delta\bar{a}_{\bar{t}|} + v^t$$

što znači da će jedinica investirana sada proizvesti godišnju kamatu $\delta$ koja se isplaćuje neprekidno do smrti uz jedinicu rente.
Veza izmedju $\bar{a}_x$ i $\bar{A}_x$ je prikazana sledećom relacijom

$$Y = \bar{a}_{\bar{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1 - Z}{\delta} \tag{5.2.6}$$

gde je $Z = v^T$.
Zamenom u (5.2.1) dobijamo

$$\bar{a}_x = E[\frac{1 - Z}{\delta}] = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \tag{5.2.7}$$

što je ekvivalento sa izrazima (5.2.4) i (5.2.5). Prethodnu formulu možemo napisati i kao

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{\bar{\infty}|} - \bar{a}_{\bar{\infty}|}\bar{A}_x. \tag{5.2.8}$$

Takodje ćemo odrediti i $Var[\bar{a}_{\bar{T}|}]$

$$Var[\bar{a}_{\bar{T}|}] = Var[\frac{1 - v^T}{\delta}] = \frac{1}{\delta^2}Var[v^T] = \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2]. \tag{5.2.9}$$

Iz identiteta

$$\delta\bar{a}_{\bar{T}|} + v^T = 1 \tag{5.2.10}$$

sledi

$$E[\delta \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T] = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$$

i

$$Var[\delta \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T] = 0.$$

Sada ćemo govoriti o privremenim i odloženim rentama. Oznaka za aktuarsku sadašnju vrednost jedinice godišnje privremene neposredne rente u trajanju od $n$ godina je $\bar{a}_{x:\bar{n}|}$. Na osnovu takozvane trenutne tehnike imamo:

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_t p_x \ dt. \tag{5.2.11}$$

Parcijalnom integracijom

$$\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_t p_x \ \mu_{x+t} dt = \int_0^n \ v^t \ (-d_t p_x)$$

imamo

$$\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = 1 - v^n \ {}_n p_x - \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|}$$

ili

$$1 = \delta \bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|}. \tag{5.2.12}$$

Agregatna tehnika se zasniva na sadašnjoj vrednosti slučajne veličine $Y$ koja je definisana sa

$$Y = \begin{cases} \bar{a}_{\bar{T}} & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\bar{n}} & T \geq n \end{cases} \tag{5.2.13}$$

i

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E[Y] = \int_0^n \bar{a}_{\bar{t}|} \ {}_t p_x \mu_{x+t} \ dt + \bar{a}_{\bar{n}|} \ {}_n p_x.$$

Nakon integracije dobijamo baš (5.2.11). Zamenom $\bar{a}_{\bar{T}|}$ sa $(1 - v^T)/\delta$ i $\bar{a}_{\bar{n}|}$ sa $(1 - v^n)/\delta$ u (5.2.13) dobijamo $Y = (1 - Z)/\delta$, gde je

$$Z = \begin{cases} v^T & 0 \leq T < n \\ v^n & T \geq n \end{cases}$$

sadašnja vrednost osigurane sume mešovotog osiguranja u trajanju od $n$ godina. Onda je,

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = E[Y] = \frac{1}{\delta}(1 - E[Z]) = \frac{1}{\delta}[1 - \bar{A}_{x:\bar{n}|}] \tag{5.2.14}$$

i ekvivalento je sa (5.2.12).
Za računanje disperzije iskoristićemo relaciju $Y = (1 - Z)/\delta$ i (4.1.2.4) da bismo dobili izraz

$$Var[Y] = \frac{1}{\delta^2} Var[Z] = \frac{1}{\delta^2}[{}^2\bar{A}_{x:\bar{n}|} - \bar{A}^2_{x:\bar{n}|}]. \tag{5.2.15}$$

Odnosno, u notaciji koja odgovara životnoj renti

$$Var[Y] = \frac{1}{\delta^2}[1 - 2\delta^2 \bar{a}_{x:\bar{n}|} - \delta(1 - \bar{a}_{x:\bar{n}|})^2] = \frac{2}{\delta}[\bar{a}_{x:\bar{n}|} -^2 \bar{a}_{x:\bar{n}|}] - \bar{a}^2_{x:\bar{n}|}. \quad (5.2.16)$$

Oznaka za aktuarsku sadašnju vrednost za jedinicu godišnje odložene doživotne rente koja počinje sa isplatom nakon osiguranikove $x+n$ godine života je ${}_{n|}\bar{a}_x$. Na osnovu trenutne tehnike imamo

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_n^\infty v^t \ {}_tp_x \ dt \quad (5.2.17)$$

i relaciju

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \ dt - \int_0^n v^t \ {}_tp_x \ dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\bar{n}|} - \bar{A}_x}{\delta}. \quad (5.2.18)$$

Agregatna tehnika se zasniva na sadašnjoj vrednosti slučajne veličine $Y$ definisane sa:

$$Y = \begin{cases} 0 = \bar{a}_{\bar{T}} - \bar{a}_{\bar{T}} & 0 \leq T < n \\ v^n \ \bar{a}_{\overline{T-n}|} = \bar{a}_{\bar{T}} - \bar{a}_{\bar{n}} & T \geq n \end{cases}$$

Onda je

$$\begin{aligned} {}_{n|}\bar{a}_x = E[Y] &= \int_n^\infty v^n \ \bar{a}_{\overline{t-n}|} \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt \\ &= \int_0^\infty v^n \ \bar{a}_{\bar{s}|} \ {}_{n+s}p_x \ \mu_{x+n+s} \ ds \\ &= v^n \ {}_np_x \ \int_0^\infty \bar{a}_{\bar{s}|} \ {}_sp_{x+n} \ \mu_{x+n+s} \ ds \end{aligned}$$

što pokazuje da je

$$_{n|}\bar{a}_x =_n E_x \ \bar{a}_{x+n}. \quad (5.2.19)$$

Jedan od načina za računanje disperzije slučajne veličine $Y$ je sledeći

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \int_n^\infty v^{2n} \ \bar{a}^2_{\overline{t-n}|} \ {}_tp_x \ \mu_{x+t} \ dt - ({}_{n|}\bar{a}_a)^2 \\ &= v^{2n} \ {}_np_x \ \int_0^\infty \bar{a}^2_{\bar{s}|} \ {}_sp_{x+n} \ \mu_{x+n+s} \ ds - ({}_{n|}\bar{a}_a)^2. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 3.1 sledi

$$\begin{aligned} Var[Y] &= v^{2n} \ {}_np_x \ \int_0^\infty 2\bar{a}_{\bar{s}|} v^s \ {}_sp_{x+n} \ ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 \\ &= \frac{2}{\delta} \ v^{2n} \ {}_np_x \ \int_0^\infty (v^s - v^{2s}) \ {}_sp_{x+n} \ ds - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2 \\ &= \frac{2}{\delta} v^{2n} \ {}_np_x \ [\bar{a}_{x+n} -^2 \bar{a}_{x+n}] - ({}_{n|}\bar{a}_x)^2. \end{aligned}$$

Oznaka za aktuarsku sadašnju vrednost za jedinicu godišnje odložene privremene rente koja počinje sa isplatom ukoliko je osiguranik živ nakon svoje $x+m$ godine i traje do njegove $x+m+n$ godine života, je ${}_{m|n}\bar{a}_x$. Onda je

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}\bar{a}_x &= \int_m^{m+n} v^t \ {}_tp_x \ dt && (5.2.20)\\
&= \bar{a}_{x:\overline{m+n}|} - \bar{a}_{x:\bar{m}|} && (5.2.21)\\
&= \frac{\bar{A}_{x:\bar{m}|} - \bar{A}_{x:\bar{m}|}}{\delta} && (5.2.22)\\
&=_m E_x \ \bar{a}_{x+m:\bar{n}|}. && (5.2.23)
\end{aligned}
$$

Analogno sa

$$\bar{s}_{\bar{n}|} = \int_0^n (1+i)^{n-t} \ dt$$

kada je u pitanju renta imamo

$$\bar{s}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \int_0^n \frac{{}_tE_x}{{}_nE_x} \ dt = \int_0^n \frac{1}{{}_{n-t}E_{x+t}} \ dt \qquad (5.2.24)$$

što predstavlja akumuliranu vrednost nakon $n$ godina privremene godišnje rente koja se isplaćuje najviše $n$ godina ukoliko je osiguranik živ.

Posmatrajmo

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar{a}_x}{dx} = \int_0^\infty v^t (\frac{\partial}{\partial x}{}_tp_x)dt = \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x \ (\mu_x - \mu_{x+t}) \ dt\\
&= \mu_x \ \bar{a}_x - \bar{A}_x\\
&= \mu_x \ \bar{a}_x - (1 - \delta\bar{a}_x)\\
&= (\mu_x + \delta) \ \bar{a}_x - 1.
\end{aligned}
$$

Ovaj izraz nam govori da se aktuarska sadašnja vrednost menja kao kombinacija promene kamatne stope prihoda $\delta\bar{a}_x$, $\mu_x\bar{a}_x$ i iznosa isplate.

## 5.3 Diskretna životna renta

Teorija diskretnih životnih renti je jako slična teoriji neprekidnih renti, a jedna od razlika je to što se kod diskretnih renti umesto integrala javljaju sume. Kod neprekidne rente nije bilo razlike izmedju toga da li se isplata rente vrši na početku ili na kraju intervala isplate. To je veoma značajno kod diskretnih renti. Počećemo sa diskretnom rentom čija se isplata vrši na početku intervala isplate, takozvana anticipativna renta.
Krenimo od $\ddot{a}_x$, aktuarske sadašnje vrednošti doživotne neposredne rente kod koje se isplata jedinicice rente vrši na početku svake godine dok je osiguranik živ. Sadašnja vrednost isplata na početku godine $k$ je

$${}_kE_x = v^k \ {}_kp_x.$$

Na osnovnu trenutne tehnike imamo

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_k p_x \tag{5.3.1}$$

ili u drugim oznakama

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ l_{x+k}. \tag{5.3.2}$$

$\ddot{a}_x$ se interpretira kao iznos koji je potrebno da uplati svaki od $l_x$ osiguranika u fond kako bi osiguravajuća kompanija u $x+k$-oj godini imala dovoljno akumuliranih sredstava da svakom od $l_{x+k}$ živih osiguranika isplati jedinicu rente.

Primenom agregatne tehnike, posmatramo slučajnu veličinu $Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}}$. I dalje govorimo o godišnjoj renti, a slučajna veličina $K$ i dalje predstavlja buduće godine zivota osiguranika sa pristupnom starošću $x$. Onda je

$$\ddot{a}_x = E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1|}} \ {}_{k|}q_x, \tag{5.3.3}$$

pošto je $P[K=k] =_{k|} q_x$.
Na osnovu teoreme 3.2 i relacije

$$\Delta \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = v^{k+1}$$

izraz (5.3.3) postaje

$$\ddot{a}_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \ {}_{k+1}p_x$$

što je ekvivalentno sa (5.3.1).
Iz (5.3.3) sledi

$$\ddot{a}_x = E[\frac{1-v^{K+1}}{d}] = \frac{1}{d} \ [1 - A_x] \tag{5.3.4}$$

i

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{\overline{\infty|}} - \ddot{a}_{\overline{\infty|}} \ A_x \tag{5.3.5}$$

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x. \tag{5.3.6}$$

Formula (5.3.6) nam govori da će jedna jedinica koja je sada investirana proizvesti kamatu $d$ svake godine dok je osiguranik živ i isplatu jedinice na kraju godine smrti osiguranika.
Formula za disprerziju je:

$$Var[\ddot{a}_{\overline{K+1|}}] = Var[\frac{1-v^{K+1}}{d}] = \frac{1}{d^2} Var[v^{K+1}] = \frac{1}{d^2}[{}^2A_x - A_x^2]. \tag{5.3.7}$$

Oznaka $\ddot{a}_{x:\bar{n}|}$ predstavlja sadašnju vrednost privremene neposredne rente kod koje se jedinica isplaćuje na početku svake od $n$ godina dok je osiguranik živ. Trenutna tehnika nam daje formulu

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_kp_x. \tag{5.3.8}$$

Dok agregatna tehnika ima sledeći pristup

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\bar{n}|} & K \geq n \end{cases} \tag{5.3.9}$$

pa je

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = E[Y].$$

Pošto je $Y = (1 - Z)/d$ gde je

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & 0 \leq K < n \\ v^n & K \geq n \end{cases}$$

sadašnja vrednost osigurane sume mešovitog osiguranja kod kog se jedinica osigurane sume isplaćuje na kraju godine smrti osiguranika ili u ukoliko je osiguranik živ nakon isteka osiguranja, pa je

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{d}(1 - E[Z]) = \frac{1}{d}\ (1 - A_{x:\bar{n}|}). \tag{5.3.10}$$

Izraz (5.3.10) se može napisati i kao

$$1 = d\ddot{a}_{x:\bar{n}|} + A_{x:\bar{n}|}. \tag{5.3.11}$$

Formula za disperziju je

$$Var[Y] = \frac{1}{d^2} Var[Z] = \frac{1}{d^2}\ [{}^2A_{x:\bar{n}|} - A^2_{x:\bar{n}|}]. \tag{5.3.12}$$

Oznaka za aktuarsku sadašnju vrednost odložene doživotne rente kod koje se jedinica isplaćuje na početku svake godine u kojoj je osiguranik živ počevši od $x + n$ godine pa na dalje je ${}_{n|}\ddot{a}_x$.

$$\begin{align} {}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=n}^{\infty} v^k \ {}_kp_x \tag{5.3.13} \\ &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\bar{n}|} \tag{5.3.14} \\ &= \frac{A_{x:\bar{n}|} - A_x}{d} \tag{5.3.15} \\ &=_n E_x \ \ddot{a}_{x+n} \tag{5.3.16} \end{align}$$

Oznaka za akumuliranu vrednost nakon $n$ godina privremene anticipativne rente kod koje se isplaćuje jedinica svake godine dok je osiguranik živ i dok traje period isplate je $\ddot{s}_{x:\bar{n}|}$. Formula je sledeća

$$\ddot{s}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{{}_nE_x}\ \ddot{a}_{x:\bar{n}|} \tag{5.3.17}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}_kE_x}{{}_0E_x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{{}_{n-k}E_{x+k}}. \tag{5.3.18}$$

Kod rente kod koje se isplata vrši na kraju intervala isplate umesto oznaka $\ddot{a}$ i $\ddot{s}$ koriste se redom $a$ i $s$.
Sledeća formula predstavlja vezu izmedju anticipativne i dekurzivne rente:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \tag{5.3.19}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\ {}_kp_x. \tag{5.3.20}$$

Alternativno,

$$a_x = E[a_{\bar{K}|}] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\bar{k}|}\ {}_{k|}q_x. \tag{5.3.21}$$

Iz formule (5.3.21) sledi

$$a_x = E[\frac{1-v^K}{i}]$$

$$= E[\frac{1-(1+i)v^{K+1}}{i}]$$

$$= \frac{1}{i}[1-(1+i)A_x]$$

a još se može napisati i kao

$$a_x = a_{\bar{\infty}|} - \ddot{a}_{\bar{\infty}|}\ A_x \tag{5.3.22}$$

ili

$$1 = i\ a_x + (1+i)\ A_x. \tag{5.3.23}$$

Aktuarska sadašnja vrednost privremene rente kod koje se jedinica isplaćuje na kraju svake godine dok je osiguranik živ sve do $x+n$ godine je označena sa $a_{x:\bar{n}|}$ i možemo je predstaviti kao

$$a_{x:\bar{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k\ {}_kp_x \tag{5.3.24}$$

ili

$$a_{x:\bar{n}|} = \ddot{a}_{x:\bar{n}|} - 1 +_n E_x. \tag{5.3.25}$$

Oznaka za odloženu rentu kod koje se jedinica isplaćuje na kraju svake godine ukoliko je osiguranik živ sve od kraja $x+n$ godine je ${}_{n|}a_x$ i imamo formulu

$$_{n|}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k \ {}_kp_x = a_x - a_{x:\bar{n}|} =_n E_x \ a_{x+n}. \tag{5.3.26}$$

Takodje je bitna i sledeća relacija

$$A_x = E[v^{K+1}] = E[a_{\overline{K+1}|} - a_{\bar{K}|}] = E[v \ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - a_{\bar{K}|}] = v \ \ddot{a}_x - a_x. \tag{5.3.27}$$

Formula (5.3.27) se može interpretirati na sledeći način: Isplatu $v$ na početku svake godine ukoliko je osiguranik živ obezbedjuje faktor $v\ddot{a}_x$, a neutrališe ekvivalenta isplata jedinice na kraju svake godine obezbedjena sa $a_x$ osim u godini u kojoj je nastupila smrt. Onda je desna strana jednačine jednaka jedinici na kraju godine smrti, a to je $A_x$.
Za osiguranje za slučaj smrti u trajanju od $n$ godina odgovarajuća jednačina je

$$A^1_{x:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\bar{n}|}. \tag{5.3.28}$$

Takodje, kod mešovitog osiguranja života u trajanju od $n$ godina važi sledeća jednačina

$$A_{x:\bar{n}|} = A^1_{x:\bar{n}|} +_n E_x$$

Korišćenjem relacije (5.3.28) i relacije

$$a_{x:\bar{n}|} = a_{x:\overline{n-1}|} +_n E_x$$

dolazimo do

$$A_{x:\bar{n}|} = v\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - a_{x:\overline{n-1}|}. \tag{5.3.29}$$

## 5.4 Životne renta sa isplatom $m$ puta godišnje

U praksi obično postoje mesečne, kvartalne, polugodišnje i godišnje rente.
Analogno svemu prethodno pomenutom, oznaka za rentu čija se jedinica isplaćuje u $m$ jednakih rata godišnje na početku svakog od $1/m$ perioda dok je osiguranik živ je $\ddot{a}_x^{(m)}$.
Na osnovu trenutne tehnike sledi

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} \ {}_{h/m}p_x. \tag{5.4.1}$$

Možemo nastaviti i sa relacijom (5.4.1), koja je napisana u mnogo pogodnijem obliku

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} \tag{5.4.2}$$

koji proizilazi iz činjenice da uložena jedinica proizvodi kamatu na početku svakog perioda i isplatu jedinice na kraju perioda ukoliko se dogodila smrt. Dalje iz (5.4.2) dobijamo

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{d}{d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}[A_x^{(m)} - A_x] \\ &= \ddot{a}_{\bar{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \ddot{a}_{\bar{\infty}|}^{(m)}[A_x^{(m)} - A_x].\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Ova relacija se interpretira na sledeći način: Renta koja se isplaćuje $m$ puta godišnje je jednaka seriji jednogodišnjih renti na početku svake godine sa prekidom u godini u kojoj je nastupila smrt nakon završetka $m$-og perioda u kome se desila smrt. Prekid se postiže $m$-tom isplatom na kraju $m$-og perioda u kome se desila smrt minus isplata na početku godine u kojoj je nastupila smrt.
Alternativno, relacija (5.4.2) se može napisati i kao

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \ddot{a}_{\bar{\infty}|}^{(m)} - \ddot{a}_{\bar{\infty}|}^{(m)}\ A_x^{(m)}. \tag{5.4.4}$$

Sada ćemo pretpostaviti da verovatnoća smrti ima uniformnu raspodelu tokom godine. Ta pretpostavka nas dovodi do jednakosti

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}A_x = s_{\bar{1}|}^{(m)}\ A_x.$$

Onda (5.4.3) postaje

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\bar{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{s_{\bar{1}|}^{(m)}}{d^{(m)}}A_x. \tag{5.4.5}$$

Zamenom $A_x$ sa $1 - d\ddot{a}_x$ i uvodjenjem notacije $d^{(m)}a_{\bar{1}|}^{(m)} = d$ dobijamo formulu koja zavisi samo od funkcija rente

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - s_{\bar{1}|}^{(m)}(1 - d\ddot{a}_x)}{d^{(m)}} = s_{\bar{1}|}^{(m)}a_{\bar{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \frac{1 - s_{\bar{1}|}^{(m)}}{d^{(m)}} \tag{5.4.6}$$

U praksi se najčešće koristi aproksimacija

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x\frac{m-1}{2m} \tag{5.4.8}$$

koja dovodi do relacije

$$D_{x+h/m} = v^{x+h/m}l_{x+h/m}$$

koja je linearna funkcija

$$D_x - \frac{h}{m}[D_x - D_{x+1}]$$

za svaku godinu $x$.
Potrebno je naglasiti da linearnost funkcije $D_{x+h/m}$ u svakoj godini života nije isto što i linearnost $l_{x+h/m}$ u svakoj godini života što je posledica pretpostavke

o uniformnoj raspodeli verovatnoće smrti.
Pretpostavka o uniformnoj raspodeli smrti nam daje relaciju

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}.$$

Relacija (5.4.8) za visoke kamatne stope i niske stope mortaliteta može dati iskrivljenu sliku kada su rente u pitanju, odnosno $\ddot{a}_{x:\overline{1}|}^{(12)} > \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(12)}$. Iz prethodno navedenog razloga umesto pomenute aproksimacije (5.4.5) koristimo relacije (5.4.6) i (5.4.8).

Pogodno je $\ddot{a}_x^{(m)}$ izraziti u formi

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \tag{5.4.9}$$

gde je

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}} \tag{5.4.10}$$

i

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}. \tag{5.4.11}$$

Primećujemo da $\alpha(m)$ i $\beta(m)$ zavise samo od $m$ i od kamatne stope, a ne zavise od godina. Za $m = 1$ važi $\alpha(1) = 1$ i $\beta(1) = 0$.
Relacija (5.4.5) se može napisati i kao

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x. \tag{5.4.12}$$

Sada kada smo ustanovili formule za doživotnu rentu koja se isplaćuje $m$ puta godišnje lako dolazimo do formula za privremene i odložene rente. Iz relacije (5.4.12) sledi

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} -_n E_x \; \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x -_n E_x[\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)A_{x+n}] \\ &= \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - \beta(m)A^1_{x:\bar{n}|}. \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Slično,

$$_{|n}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}{}_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)_{n|}A_x \tag{5.4.14}$$

i iz (5.4.9)

$$\ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\bar{n}|} - \beta(m)[1 -_n E_x] \tag{5.4.15}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)_{n|}\ddot{a}_x - \beta(m)_n E_x. \tag{5.4.16}$$

Formule za dekurzivnu rentu koja se isplaćuje $m$ puta godišnje se mogu izvesti takodje lako

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$$

$$a_{x:\bar{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\bar{n}|}^{(m)} - \frac{1}{m}(1 -_n E_x).$$

## 5.5 Komutativne funkcije životne rente

Funkciju $D_x = v^x\, l_x$ smo upoznali u prethodnim poglavljima.
Već smo $A_{x:\bar{n}|}^{1} =_n E_x$ izrazili u funkciji od $D_{x+n}/D_x$.
Otuda,

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{v^x l_x}{v^{x+n} l_{x+n}} = \frac{D_x}{D_{x+n}} \tag{5.5.1}$$

U opštem slučaju, vrednost u godini $x$ iznosa $b$ koji se isplaćuje u godini $y$ je

$$\frac{bD_y}{D_x}. \tag{5.5.2}$$

Prethodna formula u slučaju da je $x < y$ predstavlja sadašnju vrednost dok za $x > y$ predstavlja akumuliranu.
Na osnovu (5.5.2) vrednost rente u godini $x$ koja će biti isplaćena u godinama $y, y+1, ..., z-1$ je

$$\frac{b}{D_x}\sum_{u=y}^{z-1} D_u.$$

Za upoznavanje funkcije

$$N_x = \sum_{u=x}^{\infty} D_u$$

potrebna nam je vrednost rente izražena kao

$$\frac{b}{D_x}(N_y - N_x). \tag{5.5.3}$$

U prethodnoj formuli $x$ predstavlja pristupnu starost, $y$ prvu godinu u kojoj se vrši isplata rente $b$ i $z$ godinu nakon isplata poslednje rente u iznosu $b$. Bitno je naglasiti da $x$, $b$ i $z$ mogu biti u bilo kojoj relaciji.
Kod rente koja se isplaćuje $m$ puta godišnje izraz (5.4.1) možemo napisati i kao

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{mD_x}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m} \tag{5.5.4}$$

što nas dovodi do funkcije

$$N_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h/m}. \tag{5.5.5}$$

Onda je

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x}.$$

Uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli verovatnoće smrti u toku godine formule su sledeće

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) = \frac{\alpha(m)N_x - \beta(m)D_x}{D_x}$$

odnosno,

$$N_x^{(m)} = \alpha(m)N_x - \beta(m)D_x. \tag{5.5.6}$$

# 6 Neto premija

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1], [4] i [6].

## 6.1 Uvod

Kada je životno osiguranje u pitanju jedan od načina uplate premije jeste jednokratna uplata premije sa kojom smo se već upoznali. Sa aspekta ugovarača osiguranja jednokratna uplata premije je nepraktična pošto ugovarač obično ne raspolaže tako velikim sredstvima. U praksi obično je izbor ugovarača osiguranja da uplatu premije raspodeli na više godina u jednakim iznosima.
U ovom poglavlju govorićemo o neto godišnjoj premiji.Da bismo generalizovali celu priču definisaćemo gubitak osiguravača kao slučajnu veličinu $L$ koja predstavlja razliku izmedju sadašnje vrednosti osigurane sume i sadašnje vrednosti godišnjih premija. Ovo je takozvani princip ekvivalencije koji zahteva ispunjenje uslova

$$E[L] = 0. \tag{6.1.1}$$

U nastavku ćemo govoriti o neto premijama koje zadovoljavaju princip ekvivalencije.

## 6.2 Apsolutno neprekidna premija

Osnovni koncept neto godišnjih premija koje koriste princip ekvivalencije ilustrovaćemo prvo na primeru apsolutno neprekidne neto godišnje premije za jedinicu osigurane sume doživotnog osiguranja koje se isplaćuje u momentu smrti. Za svaku ovakvu premiju $\bar{P}$ posmatramo

$$l(t) = v^t - \bar{P}\bar{a}_{\overline{t|}} \tag{6.2.1}$$

sadašnja vrednost gubitka osiguravača ukoliko se smrt dogodi u trenutku $t$.
Primećujemo da je $l(t)$ opadajuća funkcija po $t$ i važi $l(0) = 1$ i kada $t \to \infty$,

$l(t)$ možemo aproksimirati sa $-\bar{P}/\delta$.
Posmatrajmo gubitak osiguravača koji je modeliran slučajnom veličinom,

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\bar{a}_{\bar{T}|}. \tag{6.2.2}$$

Ukoliko osiguravajuća kompanija koristi princip ekvivalencije premija obeležena sa $\bar{P}(\bar{A}_x)$ je takva da važi

$$E[L] = 0. \tag{6.2.3}$$

Na osnovu (4.1.4) i (5.2.2) dolazimo do

$$\bar{A}_x - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x = 0$$

ili

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}. \tag{6.2.4}$$

Disperzija slučajne veličine $L$ može se koristiti kao mera za promenljivost gubitka za pojedinačno doživotno osiguranje. Pošto je $E[L] = 0$,

$$Var[L] = E[L^2]. \tag{6.2.5}$$

Za gubitak definisan sa (6.2.2) imamo,

$$\begin{aligned} Var[v^T - \bar{P}\bar{a}_{\bar{T}|}] &= Var[v^T - \frac{\bar{P}(1-v^T)}{\delta}] \qquad (6.2.6) \\ &= Var[v^T(1+\frac{\bar{P}}{\delta}) - \frac{\bar{P}}{\delta}] \\ &= Var[v^T(1+\frac{\bar{P}}{\delta})] \\ &= Var[v^T](1+\frac{\bar{P}}{\delta})^2 \\ &= ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)(1+\frac{\bar{P}}{\delta})^2. \end{aligned}$$

Za premiju odredjenu principom ekvivalencije iskoristićemo (6.2.4) i $\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$ kako bismo (6.2.6) napisali kao

$$Var[L] = \frac{({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2)}{(\delta\bar{a}_x)^2}. \tag{6.2.7}$$

Uz pretpostavku da je intezitet smrtnosti konstantan dobijamo,

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}$$

i

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta}.$$

Onda je

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\mu(\mu+\delta)^{-1}}{(\mu+\delta)^{-1}} = \mu$$

koja ne zavisi od kamatne stope i vremena nastanka osiguranog dogadjaja.
Koristeći princip ekvivalencije možemo definisati formule za neto godišnje premije razližitih životnih osiguranja.
Uopšteno, gubitak je definisan sa

$$b_T\ v_T - \bar{P}\ Y = Z - \bar{P}\ Y \tag{6.2.8}$$

gde su:

- $b_t$ i $v_t$ redom osigurana suma i diskontni faktor;
- $\bar{P}$ je simbol za apsolutno neprekidnu neto godišnju premiju;
- $Y$ je slučajna veličina definisana u (5.2.13);
- $Z$ je slučajna veličina definisana sa $Z = v_T\ b_T$.

Na osnovu principa ekvivalencije imamo

$$E[b_T\ v_T - \bar{P}\ Y] = 0$$

ili

$$\bar{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[Y]}.$$

Kod odložene (period odloženosti je $n$ godina ) doživotne neprekidne rente $b_T\ v_T = 0$ za $T \leq n$ i $b_T\ v_T = \bar{a}_{\overline{T-n|}}\ v^n$ za $T > n$.
Onda je,

$$E[b_T\ v_T] =_n p_x\ E[\bar{a}_{\overline{T-n|}}\ v^n | T > n] = v^n\ {}_np_x\ \bar{a}_{x+n} = A_{x:\bar{n}|^1}\ \bar{a}_{x+n}.$$

Izrazićemo disperziju slučajne veličine $L$ kod mešovitog osiguranja u trajanju od $n$ godina u oznakama neto jednokratne premije.
Na osnovu (4.1.2.2) imamo

$$Var[L] = Var[Z_3(1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})}{\delta}) - \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})}{\delta}].$$

Onda ćemo iskoristiti (4.1.2.4) da bismo dobili

$$Var[L] = (1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})}{\delta})^2[{}^2\bar{A}_{x:\bar{n}|} - \bar{A}^2_{x:\bar{n}|}]$$

Formula (5.2.12) se može napisati i kao

$$(\delta\bar{a}_{x:\bar{n}|})^{-1} = 1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})}{\delta}$$

što nam daje

$$Var[L] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\bar{n}|} - \bar{A}^2_{x:\bar{n}|}}{(\delta\bar{a}_{x:\bar{n}|})^2}.$$

Indentiteti (5.2.5) i (5.2.12) se mogu iskoristiti za izvodjenje formule za apsolutno neprekidnu neto premiju.
Krenimo od identiteta (5.2.5)

$$\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$$

$$\delta + \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta = \frac{1-\delta\bar{a}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} \tag{6.2.9}$$

Krenimo od identiteta (5.2.12)

$$\delta\bar{a}_{x:\bar{n}|} + \bar{A}_{x:\bar{n}|} = 1$$

$$\delta + \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\bar{n}|}}$$

$$\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \frac{1}{\bar{a}_{x:\bar{n}|}} - \delta = \frac{1-\delta\bar{a}_{x:\bar{n}|}}{\bar{a}_{x:\bar{n}|}} = \frac{\delta\bar{A}_{x:\bar{n}|}}{1-\bar{A}_{x:\bar{n}|}} \tag{6.2.10}$$

U tabeli ispod nalaze se formule za neto godišnju premiju i ostalih vrsta životnih osiguranja.

Table 1: Aposolutno neprekidne neto godišnje premije

| Vrsta osiguranja | $\bar{P} = \frac{E[b_T \ v_T]}{E[Y]}$ | $b_t \ v_T$ | $\bar{P} \ Y$ gde je $Y$ |
|---|---|---|---|
| Doživotno osiguranje | $\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$ | $1 \ v^T$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}$ |
| Osiguranje za slučaj smrti | $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ | $1 \ v^T$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \ T \leq n$ |
| | | $0$ | $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \ T > n$ |
| Mešovito osiguranje | $\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ | $1 \ v^T$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \ T \leq n$ |
| | | $1 \ v^n$ | $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \ T > n$ |
| Doživotno osiguranje sa h uplatom | ${}_h\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$ | $1 \ v^T$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \ T \leq h$ |
| | | $1 \ v^T$ | $\bar{a}_{\overline{h}\rvert}, \ T > h$ |
| Osiguranje za slučaj preživljavanja | $\bar{P}(\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ | $0$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \ T \leq n$ |
| | | $1 \ v^n$ | $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \ T > n$ |
| Odložena doživotna renta | $\bar{P}({}_{n\rvert}\bar{a}_x) = \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert} \ \bar{a}_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$ | $0$ | $\bar{a}_{\overline{T}\rvert}, \ T \leq n$ |
| | | $\bar{a}_{\overline{T-n}\rvert} \ v^n$ | $\bar{a}_{\overline{n}\rvert}, \ T > n$ |

## 6.3 Apsolutno diskretne premije

U prethodnom odeljku smo govorili o apsolutno neprekidnim neto godišnjim premijama. Sada ćemo posmatrati osiguranje kod koga se isplata osigurane sume vrši na kraju godine osiguranja u kojoj se dogodila smrt i prva premija se uplaćuje na početku osiguranja. Ostale premije se uplaćuju na godišnjicu polise sve dok je osiguranik živ i dok traje osiguranje. Ova vrsta osiguranja je jako bitna i od istorijskog značaja za razvoj aktuarske matematike.
Ukoliko pod prethodno navedenim pretpostavkama posmatramo neto godišnju premiju doživotnog osiguranja koristimo oznaku $P_x$, dok nam odsustvo simbola $(\bar{A}_x)$ govori da je u pitanju osiguranje kod kojeg se isplata osigurane sume za slučaj smrti vrši na kraju godine osiguranja u kojoj se dogodila smrt.
Gubitak $L$ kod ove vrste osiguranja je definisan kao

$$L = v^{K+1} - P_x \ \ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}, \ K = 0, 1, 2, ... \tag{6.3.1}$$

Na osnovu principa ekvivalencije imamo $E[L] = 0$, odnosno,

$$E[v^{K+1}] - P_x \ E[\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}] = 0$$

što nas dovodi do formule za neto godišnju premiju

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.3.2}$$

Analogno izvodenju kod apsolutno neprekidne premije dolazimo do formule za disperziju slučajne veličine $L$

$$Var[L] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ddot{a}_x)^2}. \tag{6.3.3}$$

U nastavku razvićemo formulu za diskretnu premiju životnog osiguranja i kod ostalih vrsta osiguranja. U opštem slučaju, gubitak ćemo definisati kao

$$b_{K+1}\, v_{K+1} - PY$$

gde su:

- $b_{K+1}$ i $v_{K+1}$ su redom osigurana suma i diskontni faktor;
- $P$ je oznaka za godišnju premiju koja se plaća na početku godine osiguranja sve dok traje period uplate premije i dok je osiguranik živ;
- $Y$ je diskretna slučajna veličina definisana u (5.3.9).

Primenom principa ekvivalencije dobijamo

$$E[b_{K+1}v_{K+1} - PY] = 0$$

ili

$$P = \frac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[Y]}.$$

Sada ćemo disperziju slučajne veličine $L$ izraziti u funkciji mešovotog osiguranja u trajanju od $n$ godina u oznakama jednokratne neto premije.
Definisaćemo

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & K = 0,1,2,...,n-1 \\ v^n & K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Onda slučajnu veličinu $L$ možemo napisati kao:

$$L = Z = P_{x:\bar{n}|}\frac{1-Z}{d}$$

Onda je,

$$Var[L] = Var[Z(1 + \frac{P_{x:\bar{n}|}}{d}) - \frac{P_{x:\bar{n}|}}{d}].$$

Primenom teoreme 4.1 dobijamo formulu za disperziju

$$Var[L] = (1 + \frac{P_{x:\bar{n}|}}{d})^2({}^2A_{x:\bar{n}|} - A_{x:\bar{n}|}^2).$$

Da bismo došli do traženog oblika za disperziju iskoristićemo identitete:

$$d\ddot{a}_{x:\bar{n}|} + A_{x:\bar{n}|} = 1$$

$$1 + \frac{P_{x:\bar{n}|}}{d} = \frac{1}{d\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}.$$

Sledi da je disperzija $Var[L]$

$$Var[L] = \frac{{}^2A_{x:\bar{n}|} - A^2_{x:\bar{n}|}}{(d\ddot{a}_{x:\bar{n}|})^2}. \tag{6.3.4}$$

Iskoristićemo identitete (5.3.6) i (5.3.11) kako bismo došli do jednačine koja predstavlja vezu izmedju formula za godišnje premije životnih osiguranja:

$$d\ddot{a}_x + A_x = 1$$

$$d + P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x}$$

$$P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d = \frac{1 - d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{dA_x}{1 - A_x} \tag{6.3.5}$$

Na sličan način dolazimo do godišnje premije mešovitog diskretnog osiguranja:

$$d\ddot{a}_{x:\bar{n}|} + A_{x:\bar{n}|} = 1$$

$$d + P_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}$$

$$P_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}} - d = \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}|}} = \frac{dA_{x:\bar{n}|}}{1 - A_{x:\bar{n}|}} \tag{6.3.6}$$

U praksi, isplata osigurane sume za slučaj smrti je obično odmah nakon smrti osiguranika, a ne na kraju godine osiguranja u kojoj je smrt nastupila zato imamo potrebu za definicijom deo po deo neprekidnih godišnjih premija. Oznake za takvu premiju su redom: $P(A_x)$, $P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|})$, $P(\bar{A}_{x:\bar{n}|})$, ${}_hP(\bar{A}_{x:\bar{n}|})$. Nema potrebe za definisanjem deo po deo neprekidne godišnje premije osiguranja za slučaj preživljavanja pošto ono ne sadrži osiguranu sumu za slučaj smrti. Primenom principa ekvivalencije dolažimo do formula koje smo već izveli samo što je simbol $A$ zamenjen sa $\bar{A}$. Na primer,

$$P(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}. \tag{6.3.7}$$

Uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli smrti tokom godine dolazimo i do sledećih identiteta.

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_x) &= \frac{i}{\delta}\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\delta}P_x \\ P(\bar{A}^1{}_{x:\bar{n}|}) &= \frac{i}{\delta}P^1_{x:\bar{n}|} \\ P(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) &= \frac{i}{\delta}P^1_{x:\bar{n}|} + P_{x:\bar{n}|}{}^{1} \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Table 2: Diskretne neto godišnje premije

| Vrsta osiguranja | $\bar{P} = \frac{E[b_{K+1}\ v_{K+1}]}{E[Y]}$ | $b_{K+1}\ v_{K+1}$ | $P\ Y$ gde je $Y$ |
|---|---|---|---|
| Doživotno osiguranje | $P(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ | $1\ v^{K+1}$ | $\ddot{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, 2...$ |
| Osiguranje za slučaj smrti | $P(A^1_{x:\bar{n}\|}) = \frac{A^1_{x:\bar{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}\|}}$ | $1\ v^{K+1}$ | $\ddot{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, ...n-1$ |
| | | $0$ | $\ddot{a}_{\bar{n}\|},\ K = n, n+1, ...$ |
| Mešovito osiguranje | $P(\bar{A}_{x:\bar{n}\|}) = \frac{A_{x:\bar{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}\|}}$ | $1\ v^{K+1}$ | $\ddot{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, ...n-1$ |
| | | $1\ v^n$ | $\ddot{a}_{\bar{n}\|},\ K = n, n+1$ |
| Doživotno osiguranje sa h uplatom | ${}_hP(A_x) = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\bar{h}\|}}$ | $1\ v^{K+1}$ | $\ddot{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, 2, ...h-1$ |
| | | $1\ v^{K+1}$ | $\ddot{a}_{\bar{h}\|},\ K = h, h+1, ...$ |
| Osiguranje za slučaj preživljavanja | $P(A^1_{x:\bar{n}\|}) = \frac{A^1_{x:\bar{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}\|}}$ | $0$ | $\bar{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, ...n-1$ |
| | | $1\ v^n$ | $\ddot{a}_{\bar{n}\|},\ K = n, n+1, ...$ |
| Odložena doživotna renta | $P({}_{n\|}\ddot{a}_x) = \frac{A^1_{x:\bar{n}\|}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\bar{n}\|}}$ | $0$ | $\bar{a}_{\overline{K+1}\|},\ K = 0, 1, ...n-1$ |
| | | $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}\|}\ v^n$ | $\ddot{a}_{\bar{n}\|},\ K = n, n+1, ...$ |

## 6.4 Ispodgodišnja uplata premije

U praksi, premija se obično plaća u ratama $m$ puta godišnje. Oznaka $P_x^{(m)}$ predstavlja neto godišnju premiju koja se plaća u ratama $m$ puta u toku godine za jedinicu osigurane sume doživotnog osiguranja kod kog se isplata osigurane sume vrši na kraju godine osiguranja u kojoj je nastupila smrt. Istu interpretaciju ima i simbol $P^{(m)}(\bar{A}_x)$ samo što je u pitanju isplata osigurane sume neposredno nakon smrti osiguranika. Obično je uplata premije u mesečnim, kvartalnim i polugodišnjim ratama.
Korisno je premiju koja se plaća $m$ puta godišnje izraziti preko godišnje premije. To ćemo ilustrovati na primeru premije ${}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}$. Rezultat se može primeniti i na ostale vrste osiguranja. Imamo da je

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|} = \frac{A_{x:\bar{n}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\bar{h}|}}. \tag{6.4.1}$$

Pošto je

$$A_{x:\bar{n}|} ={}_h P_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}^{(m)}_{x:\bar{h}|}$$

formula (6.4.1) postaje

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|} = \frac{{}_hP_{x:\bar{n}|}\ddot{a}_{x:\bar{h}|}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\bar{h}|}}. \tag{6.4.2}$$

Formula (6.4.2) je godišnja premija koja se plaća u ratama $m$ puta godišnje izražena kao proizvod godišnje premije i odgovarajućeg rentnog količnika. Rentni količnik može biti izražen na više različitih načina.

## 6.5 Komutativne funkcije

Videli smo da se neto godišnja premija može izraziti preko neto jednokratne premije i sadašnje vrednosti rente. Koristeći već uvedene komutativne funkcije sada ćemo i neto godišnju premiju izraziti preko komutativnih funkcija.

Apsolutno neprekidnu neto godišnju premiju mešovotog osiguranja u trajanju od $n$ godina kod koga je period uplate premije $h$ godina možemo izračunati pomoću formule

$$ {}_hP(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \tag{6.5.1} $$

Specijalno za $n = w - x$ formula (6.5.1) postaje

$$ {}_hP(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}, \tag{6.5.2} $$

a za $n = h = w - x$ postaje

$$ \bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{M}_x}{\bar{N}_x}. \tag{6.5.3} $$

Kod osiguranja za slučaj smrti formule su sledeće:

$$ \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\bar{n}|}) = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}} \tag{6.5.4} $$

i

$$ {}_h\bar{P}(D\bar{A})^1_{x:\bar{n}|} = \frac{n\bar{M}_x - \bar{R}_{x+1} + \bar{R}_{x+n+1}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+h}}. \tag{6.5.5} $$

Kod osiguranja kod kojih se isplaćuje osigurana suma za slučaj smrti na kraju godine u kojoj je smrt nastupila odgovarajuće formule su sledeće:

$$ {}_hP_{x:\bar{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.5.6} $$

$$ {}_hP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+h}} \tag{6.5.7} $$

$$ P^1_{x:\bar{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{6.5.8} $$

Ukoliko je dinamika uplate premije $m$ puta godišnje

$$ {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N^{(m)}_x - N^{(m)}_{x+h}}. \tag{6.5.9} $$

# 7 Matematička rezerva

Za pisanja ove glave rada korišćenji su sledeći izvori: [1], [3],[4], [5] i [7].

U prethodnom poglavlju smo se upoznali sa principom ekvivalencije. Osiguranik uplaćuje rate neto premije koje su skupa ekvivalentne iznosu osigurane sume koju će osiguravač isplatiti prilikom nastanka osiguranog slučaja bilo to u pitanju slučaj smrti ili slučaj doživljenja. Nakon nekog preioda neće više postojati ekvivalencija izmedju finansijskih obaveza ugovornih strana. Može se desiti da osiguranik i dalje uplaćuje premiju, dok je osiguravač u obavezi da isplati iznos osigurane sume prilikom nastanka osiguranog slučaja. Na primeru odloženih renti, imamo slučaj da je osiguranik završio svoju obavezu, odnosno uplatio sve premije, dok obaveza osiguravača i dalje traje.

Životno osiguranje je uzajamna garancija velikog broja ljudi iste ugroženosti, gde je ugroženost slučajna i može se meriti i proceniti. Garancija se ogleda u stvaranju novčenog fonda koji se formira od uplata ugroženih lica i kojim činom uplatioci postaju članovi zajednice rizika životnog osiguranja. Ova uplaćena sredstva se koriste isključivo za isplatu ugovorenog iznosa članu zajednice kada se ostvari osigurani dogadjaj. Finansijska sredstva fonda jednim delom čini matematička rezerva koj služi za pokriće budućih rizika.

U svrhu izračunavanja matematičke rezerve potrebno je sve uplate osiguranika (obaveze osiguranika) i sve isplate osiguravajućeg društva (buduće obaveza osiguravajućeg društva) svesti na isti vremenski rok, odnosno trenutak.
Osnovnu ocenu matematičke rezerve čine komutativni brojevi izračunati na osnovu tablica smrtnosti.

Da bi se shvatio pojam matematičke rezerve, neophodno je napraviti razliku izmedju prirodne premije, riziko premije, štedne premije i riziko-osigurane sume. Osiguranje života sa prirodnom premijom zapravo predstavlja osiguranje na jednu godinu, koje se zaključuje svake godine i to uvek sa drugom premijom koja se izračunava na osnovu starosti osiguranika. To znači da osiguranik uvek plaća premiju čija visina zavisi od njegovih godina starosti, pa je rizik smrti uvek osiguran na jednu godinu. Iz tog razloga se i kaže da je prirodna premija zapravo riziko premija za jednu godinu. Prirodna premija raste sa brojem godina starosti, pa je značajna razlika u visini ove premije na početka i na kraju perioda plaćanja.

Iako je primena prirodne premije matematički opravdana, smatra se da je nepraktična, pa se u praksi izračunava prosečna premija koja je ista za celo trajanje osiguranja. Prosečna premija je uvek izražena za čitav niz godina u jednom, obično stalnom iznosu, bilo sa doživotnim ili privremenim plaćanjem. Za razliku od prirodne premije koja je u prvim godinama osiguranja značajno niža u odnosu na kasnije godine osiguranja, prosečna premija je viša u prvim, a niža u kasnijim godinama trajanja osiguranja.

Pošto se zbog prosečne premije uvek u prvim godinama osiguranja naplaćuje viša premija, sledi da se neto premija sastoji iz riziko premije i štedne premije. Štedna premija je onaj deo premije koji se izdvaja iz godine u godinu iz naplaćenje premije u vidu fonda koji služi za pokriće budućih obaveza osiguravača. Obrazovanjem štedne premije osiguravač ne snosi više rizik na celu osiguranu sumu, već samo na razliku izmedju osigurane sume i štedne premije.
Riziko premija je razlika izmedju ukupne neto premije i štedne premije. Riziko premija je prirodna premija za riziko osigurani kapital.
Osiguravajuća kompanija od naplaćene neto premije koristi samo riziko premiju za pokriće rizika, a štednu premiju odvaja na štednju uz kamatu. Stoga se može reći da je matematička rezerva u odredjenom trenutku zapravo zbir do tog momenta ukamaćenih dospelih štednih premija.
Razlikujemo grupne i individualne ocene matematičkih rezervi. Postoje dve varijante kada su u pitanju individualne metode, a to su bruto i neto metode. Neto metode ne podrazumevaju uključenje troškova poslovanja osiguravajućeg društva, dok bruto metode pored tablica smrtnosti i kamatne stope uvažavaju i troškove. U nastavku ćemo se baviti neto metodama.
Pretpostavićemo da tablice smrtnosti i kamatna stopa koje se koriste za obračun neto premije koriste se i za obračun neto matematičke rezerve.

## 7.1 Matematička rezerva osiguranja sa apsolutno neprekidnom neto premijom

Odredićemo matematičku rezervu za jedinicu doživotnog osiguranja sa neprekidnom neto godišnjom premijom $\bar{P}(\bar{A}_x)$. Oznaka za matematičku rezervu nakon $t$ godina trajanja osiguranja je ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$. Da bismo došli do ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ na osnovu principa ekvivalencije uvešćemo slučajnu veličinu $U$, koja predstavlja vreme do smrti osiguranika starosti $x+t$ godina, sa gustinom raspodele:

$$ {}_u p_{x+t}\ \mu_{x+t+u},\ \ u \geq 0. $$

Definisaćemo prospektivni gubitak u trenutku $t$ sa

$$ {}_tL = v^U - \bar{P}(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{U}|}. \tag{7.1.1} $$

Matematička rezerva je definisana kao očekivana vrednost prospektivnog gubitka, pa sledi

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = E[v^U] - \bar{P}(\bar{A}_x)\ E[\bar{a}_{\overline{U}|}] = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+t}. \tag{7.1.2} $$

Prema prospektivnom metodu, matematička rezerva u odredjenom momentu bi trebalo da bude jednaka razlici vrednosti svih budućih isplata i svih budućih uplata premija u tom momentu. Drugim rečima, očekivana sadašnja vrednost budućih rashoda umanjena za očekivanu sadašnju vrednost budućih prihoda daje prospektivnu vrednost polise osiguranja. Ova metoda daje matematičku rezervu pomoću podataka iz budućnosti.

Za $t = 0$ formula (7.1.2) postaje ${}_0V(A_x) = 0$. To je posledica primene principa ekvivalencije prilikom izvodjenja formule za neto premiju. Raspodela slučajne veličine $U$ je zapravo uslovna raspodela za $T - t$ ukoliko je $T > t$. Onda je funkcija raspodele za U

$$1 - \frac{{}_{t+u}p_x}{{}_tp_x} ={}_u q_{x+t}$$

i gustina

$$\frac{{}_{t+u}p_x \ \mu_{x+t+u}}{{}_tp_x} ={}_u p_{x+t} \ \mu_{x+t+u}.$$

Analogno koracima koji su korišćenji za izvodjenje formule (6.2.6) dolazimo do

$${}_tL = v^U \ [1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}] - \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}. \tag{7.1.3}$$

Onda je,

$$Var[{}_tL] = Var[v^U] \ [1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2 = [1 + \frac{\bar{P}(\bar{A}_x)}{\delta}]^2 \ ({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}^2_{x+t}). \tag{7.1.4}$$

Uopšteno, prospektivni gubitak kod osiguranja sa apsolutno neprekidnom premijom možemo definisati kao

$${}_tL = b_{t+U} \ v^U - \int_0^U \pi_{t+s} \ v^s \ ds$$

gde je $b_{t+U}$ osigurana suma koja se isplaćuje ukoliko je osiguranik umro u trenutku $t + U$ i $\pi_{t+s}$ godišnja rata neto apsolutno neprekidne premije u momentu $t + s$. Onda je matematička rezerva ${}_t\bar{V}$ definisana sa

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V} = E[{}_tL] &= \int_0^\infty (b_{t+u} \ v^u - \int_0^u \pi_{t+s} \ v^s \ ds) \ {}_up_{x+t}\mu_{x+t+u} \ du \\ &= \int_0^\infty b_{t+u} \ v^u \ {}_up_{x+t} \ \mu_{x+t+u} \ du - \int_0^\infty \pi_{x+s} \ v^s \ {}_sp_{x+t} \ ds. \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

U tabeli iznad prikazene su formule za matematiču rezervu na osnovu prospektivne metode za različite vrste životnih osiguranja.

Table 3: Matematička rezerva prospektivna metoda

| Vrsta osiguranja | Matematička rezerva | Prospektivna formula |
|---|---|---|
| Doživotno osiguranje | ${}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ | $\bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{\overline{x+t}}$ |
| Osiguranje za slučaj smrti | ${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\bar{n}\rvert})$ | $\bar{A}_{\overline{x+t}^1:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}(\bar{A}^1_{x:\bar{n}\rvert})\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}\ t < n$<br>$0,\ t = n$ |
| Mešovito osiguranje | ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert})$ | $\bar{A}_{\overline{x+t}:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert})\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}\ t < n$<br>$1,\ t = n$ |
| Doživotno osiguranje sa h uplatom | ${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x)$ | $\bar{A}_{\overline{x+t}} -_h \bar{P}(\bar{A}_x)\ \bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rvert}\ t < h$<br>$\bar{A}_{x+t},\ t \geq h$ |
| Osiguranje za slučaj preživljavanja | ${}_t\bar{V}(\bar{A}^1_{x:\bar{n}\rvert})$ | $\bar{A}_{\overline{x+t}:\overline{n-t}\rvert^1} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert^1})\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}\ t < n$<br>$1,\ t = n$ |
| Odložena doživotna renta | ${}_t\bar{V}({}_{n\rvert}\bar{a}_x)$ | $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert^1}\ \bar{a}_{x+n} - \bar{P}({}_{\rvert n}\bar{a}_x)\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}\ t < n$<br>$\bar{a}_{x+t},\ t \geq n$ |

Pored prospektivnog metoda, postoji i takozvani knjigovodstveni metod kod koga matematička rezerva predstavlja razliku izmedju osiguranikovih uplata i osiguračevih isplata, pod pretpostavkom da su sve dospele uplate u obračunskoj godini naplaćene i da su sve osiguranikove isplate izvršene onako kako je to predvidjeno tablicama smrtnosti. Na primeru mešovitog osiguranja u trajanju od $n$ godina ilustrovaćemo formulu za matematičku rezervu na osnovu ove metode

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert}) &= [\frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}}{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert})]\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} \\ &= [\bar{P}(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}\rvert})]\ \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

Za razliku od prethodna dva, kod retrospektivnog metoda matematička rezerva se definiše kao razlika svih dosadašnjih osiguranikovih uplata i svih dosadašnjih isplata osiguravajućeg društva, svedeno na trenutak u kome tražimo matematičku rezervu. Ova metoda daje matematičku rezervu pomoću podataka za proteklo vreme od dana osiguranja do dana traženja matematičke rezerve.
Iz (5.2.20) za $t < n - s$ znamo da važi:

$$\bar{A}_{x+s:\overline{n-s}\rvert} = \bar{A}_{\overline{x+s}^1:\bar{t}\rvert} +_t E_{x+s}\ \bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}\rvert}$$

$$\bar{a}_{x+s:\overline{n-s}\rvert} = \bar{a}_{x+s:\bar{t}\rvert} +_t E_{x+s}\ \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}\rvert}.$$

Zamenom ovih izraza u formulu za prospektivnu metodu za ${}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
{}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) &= \bar{A}_{\overline{x+s}^1:\bar{t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\bar{t}|} \\
&+_t E_{x+s}\ [\bar{A}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|} - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{a}_{x+s+t:\overline{n-s-t}|}] \\
&= \bar{A}_{\overline{x+s}^1:\bar{t}|} +_t E_{x+s}\ {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) - \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\overline{-t}|}.
\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Formulu (7.1.7) možemo napisati i kao

$${}_s\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) + \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{a}_{x+s:\bar{t}|} = \bar{A}_{\overline{x+s}^1:\bar{t}|} +_t E_{x+s}\ {}_{s+t}\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) \tag{7.1.8}$$

što nam govori da je aktuarska sadašnja vrednost sredstava osiguranika jednaka sadašnjoj vrednosti zahteva.
Retrospektivna formula sledi iz formule (7.1.8) zamenom $s = 0$ i rešavanjem jednačine ${}_0\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = 0$ po ${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})$. Onda je,

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \frac{1}{{}_tE_x}\ [\bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{a}_{x:\bar{t}|} - \bar{A}^1_{x:\bar{t}|}].$$

Dalje, pošto je $\bar{s}_{x:\bar{t}|} = \bar{a}_{x:\bar{t}|}/\ {}_tE_x$ prethodna formula se redukuje na

$${}_t\bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \bar{P}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \bar{s}_{x:\bar{t}|} -_t \bar{k}_x \tag{7.1.9}$$

Formula

$${}_t\bar{k}_x = \frac{\bar{A}^1_{x:\bar{t}|}}{{}_tE_x} \tag{7.1.10}$$

je akumulirana cena osiguranja.

Relacija

$$\begin{aligned}
{}_t\bar{k}_x &= \int_0^t \frac{v^s\ {}_sp_x\ \mu_{x+s}}{v^t\ {}_tp_x}\ ds \\
&= \frac{\int_0^t (1+i)^{t-s}\ l_{x+s}\ \mu_{x+s}\ ds}{l_{x+t}}
\end{aligned} \tag{7.1.11}$$

nas dovodi do interpretacije matematičke rezerve kao razlike izmedju akumulirane neto premije pri odredjenoj kamatnoj stopi koja se deli medju osiguranicima u momentu $x + t$ i akumuliranih troškova osiguranja.

I prospektivna i retrospektivna metoda imaju svoje i prednosti i mane. Prospektivna metoda je pogodnija za obračun matematičke rezerve u periodu nakon završetka perioda uplate premije. U tom slučaju rezerva postaje sadašnja vrednost budućih osiguranih suma, odnosno za $T \geq h$, ${}^h_t\bar{V}(\bar{A}_x) = \bar{A}_{x+t}$.

Za razliku od prospektivne, retrospektivna metoda je pogodna za obračun rezerve tokom perioda odloženosti (period kada nema isplate osigurane sume). U tom slučaju matematička rezerva je akumulirana vrednost neto premija, odnosno za $t < n$, ${}_t\bar{V}({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)}) = \bar{P}({}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)})\bar{s}_{x:\bar{t}|}$.

Sada ćemo izvesti formulu za matematičku rezervu doživotnog osiguranja. Na osnovu (6.1.1) znamo da je $\bar{P}(\bar{A}_x) = (1/\bar{a}_x) - \delta$. Onda je,

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \delta\ \bar{a}_{x+t} - (\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta)\ \bar{a}_{x+t} = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}. \tag{7.1.11} $$

Dalje, koristeći (7.1.6) dobijamo

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = [\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)]\ \bar{a}_{x+t} = \frac{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) - \bar{P}(\bar{A}_x)}{\bar{P}(\bar{A}_{x+t}) + \delta}. \tag{7.1.12} $$

U izraz (7.1.11) ćemo uvesti smenu $\bar{A}_{x+t} = 1 - \delta\ \bar{a}_{x+t}$ da bismo dobili

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}_x) = 1 - \frac{1 - \bar{A}_{x+t}}{1 - \bar{A}_x} = \frac{\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}. \tag{7.1.13} $$

## 7.2 Matematička rezerva za osiguranja sa diskretnom neto premijom

Posmatraćemo osiguranja sa godišnjom uplatom premije i isplatom osigurane sume za slučaj smrti na kraju godine u kojoj je smrt nastupila. Krenućemo od doživotnom osiguranja kod koga je $P_x$ neto premija za jedinicu osigurane sume. U ovom slučaju oznaka za matematičku rezervu nakon $k$ godina je ${}_kV_x$. Definisaćemo slučajnu veličinu $J$ kao buduće vreme života osiguranika od $x+k$ godina sa raspodelom verovatnoće ${}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j}$, $j = 0, 1, 2, ...$ Prospektivni gubitak je onda definisan kao

$$ {}_kL = v^{J+1} - P_x\ \ddot{a}_{\overline{J+1}|}. \tag{7.2.1} $$

Iz definicije ${}_kV_x = E[{}_kL]$ sledi i formula za matematičku rezervu

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ \ddot{a}_{x+k}. \tag{7.2.2} $$

Slučajnu veličinu $J$ možemo definisati i kao $J = K - k$, pa je

$$ {}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j} = \frac{{}_{k+j}p_x\ q_{x+k+j}}{{}_kp_x}. $$

Analogno sa (7.1.4) sledi

$$ Var[{}_kL] = Var[v^{J+1}\ (1 + \frac{P_x}{d})] = [1 + \frac{P_x}{d}]^2\ Var[v^{J+1}]. \tag{7.2.3} $$

Definisaćemo matematičku rezervu za osiguranja sa diskretnom neto premijom za koja važi:

- Osigurana suma za slučaj smrti se isplaćuju na kraju godine osiguranja u kojoj se desila smrt;

- Premija se uplaćuje godišnje, na početku godine osiguranja;
- Oznaka za osiguranu sumu za slučaj smrti ukoliko je smrt nastupila u toku $j$ godine trajanja osiguranja je $b_j,\ j = 1, 2...$;
- Oznaka za premiju za $j$ godini trajanja osiguranja je $\pi_j,\ j = 1, 2, ...$

Prospektivan gubitak na kraju $k$-te godine trajanja osiguranja je

$$ {}_kL = b_{k+J+1}\ v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}\ v^h. \tag{7.2.4} $$

Neto matematička rezerva je označena sa ${}_kV$ i definisana sa

$$ \begin{aligned} {}_kV &= \sum_{j=0}^{\infty} [b_{k+j+1}\ v^{j+1} - \sum_{h=0}^{j} \pi_{k+h}\ v^h]\ {}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_{k+j+1}\ v^{j+1}\ {}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j} - \sum_{h=0}^{\infty} \pi_{x+h}\ v^h\ {}_hp_{x+k}. \end{aligned} \tag{7.2.5} $$

Kao i kod osiguranja sa apsolutno neprekidnom premijom u tabeli ispod se nalaze formule za matematičku rezervu i ostalih vrsta osiguranja.

Table 4: Matematička rezerva prospektivna metoda

| Vrsta osiguranja | Matematička rezerva | Prospektivna formula |
|---|---|---|
| Doživotno osiguranje | ${}_kV$ | $A_{x+k} - P_x\ \ddot{a}_{x+k}$ |
| Osiguranje za slučaj smrti | ${}_kV^1_{x:\bar{n}\rvert}$ | $\bar{A}_{\overline{x+k}^1:\overline{n-k}\rvert} - P(\bar{A}^1_{x:\bar{n}\rvert})\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}\ k < n$<br>$0,\ k = n$ |
| Mešovito osiguranje | ${}_tV_{x:\bar{n}\rvert}$ | $A_{\overline{x+k}:\overline{n-k}\rvert} - P_{x:\bar{n}\rvert}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}\ k < n$<br>$1,\ k = n$ |
| Doživotno osiguranje sa h uplatom | ${}^h_kV_x$ | $A_{x+k} -_h P_x\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert}\ k < h$<br>$\bar{A}_{x+k},\ k \geq h$ |
| Osiguranje za slučaj preživljavanja | ${}_kV^1_{x:\bar{n}\rvert}$ | $A_{\overline{x+k}:\overline{n-k}\rvert^1} - P^1_{x:\bar{n}\rvert}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}\ k < n$<br>$1,\ k = n$ |
| Odložena doživotna renta | ${}_kV({}_{n\rvert}\ddot{a}_x)$ | $A_{x+k:\overline{n-k}\rvert^1}\ \ddot{a}_{x+n} - P_x)\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert}\ k < n$<br>$\ddot{a}_{x+k},\ k \geq n$ |

Slično kao i kod osiguranja sa neprekidnom premijom i kod osiguranja sa diskretnom premijom matematičku rezervu je moguće obračunati i pomoću retrospektivne metode.

Kada je u pitanju retrospektivna metoda prvo ćemo ustanovi formulu analognu sa (7.1.7) za $h < n - j$

$$ {}_jV_{x:\bar{n}|} = A_{\overline{x+j}^1:\bar{h}|} - P_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}_{x+j:\bar{h}|} +_h E_{x+j}\ {}_{j+h}V_{x:\bar{n}|}. \tag{7.2.6} $$

Onda za $j = 0$ rešavanjem jednačine ${}_0V_{x:\bar{n}|} = 0$ dobijamo

$$ {}_hV_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{{}_hE_x}\ [P_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}_{x:\bar{h}|} - A_{\bar{x}^1:\bar{h}|}] = P_{x:\bar{n}|}\ \ddot{s}_{x:\bar{h}|} -_h k_x. \tag{7.2.7} $$

U ovom slučaju akumulirani troškovi su dati sa ${}_hk_x = A_{x^1:\bar{h}|}/{}_hE_x$.
Posmatraćemo dve različite polise osiguranja osiguranika sa pristupnom starošću od $x$ godina, svaka za jedinicu osigurane sume u prvih $h$ godina. Neka je $h$ manje ili jednako od kraćeg perioda uplate ove dve polise. Retrospektivne formule za rezerve su:

$$ {}_hV_1 = P_1\ \ddot{s}_{x:\bar{h}|} -_h k_x $$

i

$$ {}_hV_2 = P_2\ \ddot{s}_{x:\bar{h}|} -_h k_x. $$

Sledi da je

$$ {}_hV_1 -_h V_2 = (P_1 - P_2)\ \ddot{s}_{x:\bar{h}|} \tag{7.2.8} $$

što nam pokazuje da je razlika izmedju dve matematičke rezerve jednaka akumuliranoj vrednosti razlike neto premija $P_1 - P_2$.
Pošto je

$$ \frac{1}{\ddot{s}_{x:\bar{h}|}} = \frac{{}_hE_x}{\ddot{a}_{x:\bar{h}|}} = P_{x:\bar{h}|^1} $$

formula (7.2.8) se može napisati i kao

$$ P_1 - P_2 = P_{x:\bar{h}|^1}\ ({}_hV_1 -_h V_2). \tag{7.2.9} $$

Sada je razlika neto premija predstavljenja kao proizvod neto premije osiguranja za slučaj preživljavanja u trajanju od $h$ godina i razlike matematičkih rezervi na kraju godine $h$. Kao i kod neprekidnih premija i kod diskretnih premija postoje posebne formule za matematičku rezervu doživotnog i mešovitog osiguranja. Paralelno sa formulama (7.1.11)-(7.1.13) i primenom relacija $A_y = 1 - d\ \ddot{a}_y$ i $1/\ddot{a}_y = P_y + d$ imamo

$$ {}_kV_x = 1 - d\ \ddot{a}_{x+k} - (\frac{1}{\ddot{a}_x} - d)\ \ddot{a}_{x+k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \tag{7.2.10} $$

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{1 - A_{x+k}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \tag{7.2.11} $$

i

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x+k} + d} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}. \tag{7.2.12} $$

## 7.3 Matematička rezerva osiguranja sa deo po deo neprekidnom premijom

Već smo pomenuli da se u praksi javljaju i osiguranja sa deo po deo neprekidnom neto premijom sa isplatom osigurane sume za slučaj smrti u momentu smrti. Da bismo došli do formula za matematičku rezervu potrebno je da u tabeli 4 oznaku $A$ zamenimo sa $\bar{A}$, oznaku $P$ sa $P(\bar{A})$. Onda je na primer matematička rezerva mešovitog osiguranja sa trajanjem od $n$ godina i periodom uplate premije $h$ godina

$$ {}_k^hV(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \begin{cases} \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} & k < h \\ \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} & h \leq k < n. \end{cases} \tag{7.3.1} $$

Uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli i na osnovu (4.3.2) i (6.3.8) sledi

$$ {}_k^hV(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \frac{i}{\delta}\ {}_k^hV^1_{x:\bar{n}|} + {}_k^hV_{x:\bar{n}|^1}. \tag{7.3.2} $$

## 7.4 Matematička rezerva za osiguranja sa uplatom premije $m$ puta godišnje

Na osnovu prospektivne metode formula za matematičku rezervu ${}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|}$ je oblika

$$ {}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|} = A_{x+k:\overline{n-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|},\ k < h. \tag{7.4.1} $$

Vidićemo razliku izmedju ${}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|}$ i ${}_k^hV_{x:\bar{n}|}$ na primeru mešovitog osiguranja sa ograničenim periodom uplate premije. Za $k < h$ imamo,

$$ \begin{aligned} {}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|} - {}_k^hV_{x:\bar{n}|} &= {}_hP_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|} \\ &= {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}\ \frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\bar{h}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{h}|}}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}. \end{aligned} \tag{7.4.2} $$

Uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli smrti (7.4.2) postaje

$$ \begin{aligned} {}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|} - {}_k^hV_{x:\bar{n}|} &= {}_hP_{x:\bar{n}|}\ [\frac{\ddot{a}^{(m)}_{\bar{1}|}\ \ddot{a}_{x:\bar{h}|} - \beta(m)\ A^1_{x:\bar{h}|}}{\ddot{a}_{x:\bar{h}|}}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} \\ &- [\ddot{a}^{(m)}_{\bar{1}|}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|} - \beta(m)\ A_{\overline{x+k}^1:\overline{h-k}}]]. \end{aligned} $$

Eliminisanjem $\ddot{a}^{(m)}_{\bar{1}|}$ iz prethodnog izraza

$$ \begin{aligned} {}_k^hV^{(m)}_{x:\bar{n}|} - {}_k^hV_{x:\bar{n}|} &= \beta(m)\ {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}[A_{\overline{x+h}^1:\overline{h-k}|} - P^1_{x:\bar{h}|}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}|}] \\ &= \beta(m)\ {}_hP^{(m)}_{x:\bar{n}|}\ {}_kV^1_{x:\bar{h}|}. \end{aligned} \tag{7.4.3} $$

Slično, formula za matematičku rezervu osiguranja sa deo po deo neprekidnom premijom uz pretpostavku o uniformnoj raspodeli i primenu prospektivne metode za $k < h$ sledi

$$ {}^h_k V^{(m)}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} -_h P^{(m)}(\bar{A}_{x:\bar{n}|})\ \ddot{a}^{(m)}_{x+k:\overline{h-k}|}. \tag{7.4.4}$$

Analogno sa (7.4.1) i (7.4.3) primenićemo iste korake kako bismo došli do

$$ {}^h_k V^{(m)}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) ={}^h_k V(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) + \beta(m)\ {}_h P^{(m)}(A_{x:\bar{n}|})\ {}_k V^1_{x:\bar{h}|}. \tag{7.4.5}$$

Dalje, puštanjem da $m$ teži beskonačnosti dobijamo

$$ {}^h_k \bar{V}(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) ={}^h_k V(\bar{A}_{x:\bar{n}|}) + \beta(\infty)\ {}_h P^{(}A_{x:\bar{n}|})\ {}_k V^1_{x:\bar{h}|} \tag{7.4.6}$$

## 7.5 Rekurentne formule matematičke rezerve osiguranja sa diskretnom premijom

Posmatraćemo životno osiguranje za osiguranika sa pristupnom staroću $x$ i sa osiguranom sumom za slučaj smrti $b_{j+1}$ na kraju godine $j+1$. U tom slučaju osiguranik uplaćuje neto godišnju premiju $\pi_j$, $j = 0, 1, 2...$, gde $\pi_j$ označava iznos premije na početku $j+1$ godine. Matematička rezerva ${}_{h-1}V$ na kraju $h-1$ godine trajanja osiguranja je na osnovu (7.2.5) data sa

$$ {}_{h-1}V = \sum_{j=0}^{\infty} b_{h+j}\ v^{j+1}\ {}_j p_{x+h-1}\ q_{x+h-1+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j-1}\ v^j\ {}_j p_{x+h-1}. \tag{7.5.1}$$

Kada sabirke pregrupišemo dobijamo

$$ {}_{h-1}V = b_h\ v\ q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v\ p_{x+h-1}\ [\sum_{j=1}^{\infty} b_{h+j}\ v^{j+1}\ {}_j p_{x+h-1}\ q_{x+h-1+j}$$

$$ - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{h+j-1}\ v^{j-1}\ {}_{j-1}p_{x+h}].$$

Izraz u zagradama je zapravo ${}_hV$ pa je otuda

$$ {}_{h-1}V = b_h\ v\ q_{x+h-1} - \pi_{h-1} + v\ p_{x+h-1}\ {}_hV$$

ili

$$ {}_{h-1}V + \pi_{h-1} = b_h\ v\ q_{x+h-1} + v\ p_{x+h-1}\ {}_hV. \tag{7.5.2}$$

Drugim rečima, sredstva potrebna na početku godine osiguranja $h$ su jednaka sadašnjoj vrednosti zahtevanih sredstava na kraju godine.
Formula (7.5.2) se može napisati tako da predstavlja formulu za $\pi_{h-1}$

$$ \pi_{h-1} = b_h\ v\ q_{x+h-1} + (v\ p_{x+h-1}\ {}_hV -_{h-1} V). \tag{7.5.3}$$

Prva komponenta sa desne strane jednakosi (7.5.3) predstavlja neto premiju osiguranja za slučaj smrti u trajanju od jedne godine sa osiguranom sumom $b_h$. Druga komponenta $v\ p_{x+h-1}\ {}_hV -_{h-1} V$, predstavlja sumu koja ako se doda iznosu ${}_{h-1}V$ na početku godine osiguranja, akumuliraće do iznosa ${}_hV$ na kraju godine.
Kako bismo uporedili formule sa odgovarajućim formulama kod neprekidnog slučaja, pomnožićemo obe strane jednakosti (7.5.3) sa $1+i$ i formulu napisati u obliku

$$\pi_{h-1} + ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})\ i +_h V\ q_{x+h-1} = b_h\ q_{x+h-1} + \Delta({}_{h-1}V). \qquad (7.5.4)$$

Matematičke rezerve ${}_{h-1}V$ i ${}_hV$ predstavljaju rezerve na kraju godina osiguranja $h-1$ i $h$. Suma ${}_{h-1}V + \pi_{h-1}$ je zapravo inicijalna rezerva za godinu osiguranja $h$. Leva strana jednakosti (7.5.4) predstavlja početni izvor za godinu $h$, odnosno premiju, ukamaćenu inicijalnu rezervu i očekivano smanjenje rezerve na kraju godine zbog nastanka osiguranog slučaja. Desna strana se sastoji od iznosa očekivanih isplata osiguranih suma za slučaj smrti i povećanja matematičke rezerve ${}_hV -_{h-1} V$.
Ukoliko je ${}_hV$ matematička rezerva na kraju godine $h$ i $b_h$ osigurana suma za slučaj smrti koja se isplaćuje na kraju godine $h$ ukoliko je smrt nastupila u toku te godine, onda je neto suma pod rizikom koju je potrebno obezbediti $b_h -_h V$. Za ovu analizu zamenićemo u izrazu (7.5.2) $p_{x+h-1}$ sa $1-q_{x+h-1}$ i levu i desnu stanu jednakosti pomnožićemo sa $1+i$,

$${}_hV = ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})\ (1+i) - (b_h -_h V)\ q_{x+h-1}. \qquad (7.5.5)$$

Kao i u (7.5.3) dobijamo

$$\pi_{h-1} = (b_h -_h V)\ v\ q_{x+h-1} + v\ {}_hV -_{h-1} V. \qquad (7.5.6)$$

Prva komponenta sa desne strane jednakosti je neto premija osiguranja za slučaj smrti za neto sumu pod rizikom. Druga komponenta, $v\ {}_hV -_{h-1} V$ predstavlja sumu koja ukoliko se na početku godine osiguranja doda iznosu ${}_{h-1}V$ zajedno sa kamatnom stopom do kraja godine akumuliraće do iznosa ${}_hV$. U ovom slučaju ${}_hV$ se koristi da pokrije deo osigurane sume $b_h$ ukoliko se dogodi smrt. Prema tome, dolazimo do zaključka da rezerva raste na isti načina kao i svaki štedni fond što nam i pokazuje formula

$$\pi_{h-1} + ({}_{h-1}V + \pi_{h-1})\ i = (b_h -_h V)\ q_{x+h-1} + \Delta({}_{h-1}V). \qquad (7.5.7)$$

Možemo primetiti da u formuli (7.5.3) matematička rezerva se ne koristi za pokriće jednog dela osigurane sume za slučaj smrti, to znači da rezerva raste na osnovu kamatne stope i broje živih osiguranika. Obe komponente sa desne strane (7.5.3) sadrže verovatnoću smrti dok u formuli (7.5.6) samo prva komponenta.

## 7.6 Rapodela gubitka tokom godine osiguranja

U relaciji (7.5.6) videli smo da za svaku polisu neto godišnja premija se može podeliti na neto godišnju premiju za pokriće neto sume pod rizikom za jednu

godinu i depozit koji ide u štedni fond i na osnovu koga se formira matematička rezerva. Rizik smrti nije sastavni deo štednog dela.
Generalno za osiguranja sa diskretnom premijom koja samo opisalu delu 7.2 gubitak $L =_0 L$ na osnovu (7.2.4) je definisan sa

$$L = b_{K+1}\ v^{K+1} - \sum_{h=0}^{K} \pi_h\ v^h \tag{7.6.1}$$

gde je $K$ buduće vreme života osiguranika sa pristupnom starošću $x$ godina. U ovom slučaju $L$ predstavlja sadašnju vrednost finansijskog rezultata ukoliko smrt nastupi u $K+1$ godini osiguranja. Sada ćemo ovu sumu raspodeliti na svaku od $K+1$ godina. Polazište za ovu raspodelu jeste razmatranje u prethodnom poglavlju gde je matematička rezerva spoj štednog dela i rizika smrti za odgovarajuću godinu za neto sumu pod rizikom. U ovu svrhu uvešćemo gubitak u godini $h$ koji isključivo zavisi od slučajne veličine $K$

$$\Lambda_h = \begin{cases} 0 & K \leq h \\ v\ b_{h+1} - ({}_hV + \pi_h) & K = h \\ v\ {}_{h+1}V - ({}_hV + \pi_h) & K \geq h+1 \end{cases} \tag{7.6.2}$$

za $h = 0, 1, 2, \ldots.$ Prvi slučaj se odnosi na osiguranika do godine $h+1$, drugi slučaj ukoliko smrt nastupi u godini $h+1$ i treći ukoliko osiguranik bude živ na kraju $h+1$ godine. Iz (7.5.2) zamenom $h$ sa $h+1$ možemo $\Lambda_h$ definisati i kao

$$\begin{aligned} &\Lambda_h = 0,\ K \leq h-1 \\ &\Lambda_h = (b_{h+1} -_{h-1} V)\ vp_{x+h} \\ &= (b_{h+1} -_{h+1} V)\ v - (b_{h+1} -_{h+1} V)\ v\ q_{x+h},\ K = h \\ &\Lambda_h = -(b_{h+1} -_{h-1} V)\ v\ q_{x+h} \\ &= 0 - (b_{h-1} -_{h+1} V)\ v\ q_{x+h},\ K \geq h+1. \end{aligned} \tag{7.6.3}$$

Pošto je $(b_{h+1} -_{h+1} V)\ v\ q_{x+h}$ premija za neto sumu pod rizikom u godini $h+1$ dolazimo da zaključka da $\Lambda_h$ predstavlja gubitak u datoj godini definisan kao razlika uzmedju sadašnje vrednosti osiguranih suma u momentu $h$ i neto jednokratne premije.
Iz (7.6.3)

$$E[\Lambda_h] = v\ (b_{h+1} -_{h+1} V)\ [p_{x+h}\ {}_hp_x\ q_{x+h} + (-1)\ q_{x+h}\ {}_hp_x\ p_{x+h}] = 0. \tag{7.6.4}$$

Onda,

$$\begin{aligned} &Var[\Lambda_h] = E[{\Lambda_h}^2] = v^2\ (b_{h+1} -_{h+1} V)^2 \\ &[p_{x+h}^2\ {}_hp_x\ q_{x+h} + (-1)^2\ q_{x+h}^2\ {}_hp_x\ p_{x+h}] \\ &= v^2\ (b_{h+1} -_h +1V)^2\ {}_hp_x\ p_{x+h}\ q_{x+h}. \end{aligned} \tag{7.6.5}$$

Sadašanja vrednost ukupnog gubitaka se može predstaviti kao suma sadašnjih vrednosti gubitaka raspodeljenih tokom godina trajanja osiguranja,

$$L = \sum_{h=0}^{\infty} v^h\ \Lambda_h. \tag{7.6.6}$$

Odnosno

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \ \Lambda_h = \sum_{h=0}^{K-1} v^h \ \Lambda_h + v^K \ \Lambda_K + \sum_{h=K+1}^{\infty} v^h \ \Lambda_h.$$

U prvoj sumi $K \geq h+1$ , a u drugoj $K \leq h-1$ pa na osnovu (7.6.2) imamo

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \ \Lambda_h = \sum_{h=0}^{\infty} (v^{h+1} \ {}_{h+1}V - v^h \ {}_hV - v^h \ \pi_h)$$
$$+ v^{K+1} \ b_{K+1} - v^K \ {}_KV - v^K \ \pi_K + 0.$$

Svaki član koji sadrži $v^j \ {}_jV, \ j = 1, 2, ...$ se anulira i ${}_0V = 0$, što nam daje redukciju prethodnog izraza

$$\sum_{h=0}^{\infty} v^h \ \Lambda_h = v^{K+1} \ b_{K+1} - \sum_{h=0}^{K} v^h \ \pi_h = L.$$

Stavljanjem da suma počinje od $h = k$ dolazimo do

$$\sum_{h=k}^{\infty} v^h \ \Lambda_h = v^k \ {}_kL - v^k \ {}_kV, \ k = 0, 1, 2, ...$$

Rešavanjem jednačine po ${}_kL$

$$ {}_kL = \sum_{h=0}^{\infty} v^h \ \Lambda_h +_k V, \ k = 0, 1, 2... \tag{7.6.7}$$

Odnosno

$$ {}_kL = \sum_{h=0}^{j-1} v^h \ \Lambda_{k+h} + v^j \ {}_{k+j}L \tag{7.6.8}$$
$$+ ({}_kV - v^j \ \_k + jV), \ k = 0, 1, ... \ , \ j = 0, 1, ...$$

Na osnovu (7.6.4) i (7.6.6) smo već pokazali da je $E[L] = 0$. Veoma značajno je pokazati da se disperzija slučajnog gubitka $L$ može raspodeliti na pojedinačne godine trajanja osiguranja.
Prvo ćemo pokazati da je

$$Cov[\Lambda_h, \ \lambda_j] = 0, \ h \neq j.$$

Zatim ćemo izvesti formulu za disperziju koja glasi

$$Var[L] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h} \ Var[\Lambda_h].$$

Iz (7.6.4) znamo da je $E[\lambda_h] = 0$, pa je onda $Cov[\Lambda_h, \ \Lambda_j] = E[\Lambda_h \ \Lambda_j]$. Bez gubitka opštosti pretpostavićemo da je $j < h$. Onda, za svako $\Lambda_h \neq 0$ važi $K \geq h \geq j+1$ i $\Lambda_j = v \ {}_{j+1}V - ({}_jV + \pi_j)$. Otuda

$$E[\Lambda_h \ \Lambda_j] = [v \ {}_{j+1}V - ({}_jV + \pi_j)] \ E[\Lambda_h].$$

Ali, na osnovu (7.6.4) desna strana jednakosti je 0.
Iz (7.6.6) i toga što smo pokazali da je kovarijacija nula sledi da je disperzija slučajne veličine $L$ suma disperzija veličina $v^h\ \Lambda_h$ što nas dovodi do navedene formule.
Slučajne veličine $\Lambda_h,\ h=0,1,...$ su zavisne ali nekorelisane slučajne veličine, što nam dozvoljava da disperziju slučajne veličine $L$ raspodelimo na godine trajanja osiguranja.
Sada ćemo izračunati disperziju slučajne veličine $L_k,\ k=1,2,....$ U tu svrhu posmatraćemo osiguranje od godine $x+k$ sa inicijalnom premijom $\pi'_0 = {}_kV + \pi_k$, dok su sledeće premije $\pi'_h = \pi_{x+h}$, osigurane sume $b'_h = b_{h+k}$, matematička rezerva ${}_hV' =_{k+h} V$ za $h=1,2,...$ i gubitak $L'$ i $\Lambda_h$ za $h=0,1,2....$ Onda na osnovu (7.2.4) sledi

$$\begin{aligned}{}_kL &= b_{k+J+1}\ v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi_{k+h}\ v^h \\ &= b'_{J+1}\ v^{J+1} - \sum_{h=0}^{J} \pi'_h\ v^h +_k V = L' +_k V.\end{aligned}$$

Pošto se ${}_kL$ i $L'$ razlikuju za faktor ${}_kV$, na osnovu (7.6.5) sledi

$$\begin{aligned}Var[{}_kL] &= Var[L'] = \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\ Var[\Lambda'_h] \qquad (7.6.9)\\ &= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\ v^2\ (b'_{h+1} -_{h+1} V')^2\ {}_hp_{x+k}\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\ [v^2\ (b_{k+h+1} -_{k+h+1} V)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}].\end{aligned}$$

Veza izmedju $Var[{}_kL]$ i $Var[{}_{k+j}L]$ za $j=0,1,...$ može se prokazati ukoliko za početak (7.6.9) napišemo kao

$$\begin{aligned}Var[{}_kL] &= \sum_{h=0}^{j-1} v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\ [v^2\ (b_{k+h+1} -_{k+h+1} V)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}] \\ &+ \sum_{h=j}^{\infty} v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\ [v^2\ (b_{k+h+1} -_{k+h+1} V)^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}].\end{aligned}$$

Zamenom $h$ sa $l+j$ u drugu sumu dolazimo do transformacije

$$v^{2j}\ {}_jp_{x+k}\ \sum_{l=0}^{\infty} v^{2l}\ {}_hp_{x+k}\ [v^2\ (b_{k+j+l+1} -_{k+j+l+1} V)^2\ p_{x+k+j+l}\ q_{x+k+j+l}].$$

U poredjenju sa (7.6.9) vidimo da je zapravo u pitanju $Var[{}_{k+j}L]$ pa imamo

$$Var[{}_kL] = \sum_{h=0}^{j-1} v^{2h}\ {}_hp_{x+k}\ [v^2\ (b_{k+h+1} - {}_{k+h+1})^2\ p_{x+k+h}\ q_{x+k+h}] \tag{7.6.10}$$
$$+\, v^{2j}\ {}_jp_{x+k}\ Var[{}_{k+j}L].$$

# 8 Zaključak

Osiguranje života u savremenom društvu ima jako bitnu ulogu. Osiguranje ima za cilj da zaštiti od rizika i nepredvidjenih okolnosti kao i da pruži odredjenu finansijsku sigurnost i bezbednost.
U ovom radu su opisane razičite vrste životnih osiguranja, kao i pokrića koja oni nude. Takodje predstavljen je i veliki značaj tablica smrtnosti kada je u pitanju osiguranje života.
Prilikom izrade novog proizvoda životnog osiguranja jako je bitno da polazne pretpostavke budu dobro utemeljene, odnosno da imaju svoje pokriće, pa samim tim proizvod životnog osiguranja će doneti željenu korist i osiguraniku i osiguravajućoj kompaniji.
Jedan od ključnih tehničkih zadataka aktuarske službe svake kompanije životnog osiguranja je obračun matematičke rezerve. Postoji više metoda za obračun matematičke rezerve. Pretpostavke koje se koriste prilikom obračuna rezerve kao što su tablice smrtnost i kamatna stopa imaju veliki uticaj na rezultate obračuna, tako da je potrebno pažljivo ih birati.
Različite metode obračuna matematičke rezerve, bi trebalo da što tačnije ustanove mogućnost pokrića obaveza osiguravajuće kompanije, kao i mogućnost plasiranja raspoloživih sredstava pa samim tim i njihovo uvećanje.

## 9 Literatura

[1] Hans U. Gerber, *Life Insurance Mathematics*,Springer, Third Edition 1997.

[2] S. Janković, *Elementi finansijske matematike*, Beograd, 2014.

[3] David B. Atkinson, James W. Dallas, *Life insurance Products and Finance*, The Society of Acturies, Schaumburg, Illinois, 2000

[4] Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Hesbitt, *Acturial Mathematics*, The Society of Acturies, Itasca, Illinois, 1986

[5] Louis J. Lombardi, *Valuation of Life Insurance Liabilities*, ACTEX Publications, Incc., Winsted, Connecticut

[6] Eric V. Slud, *Acturial Mathematics and Life-Table Statistics*, Mathematics Department University of Maryland, College Park, 2006

[7] Nataša Papić Blagojević, Vesna Kočić Vugdelija, *Matematičke rezerve - Ispitni deo za predmet Aktuarstvo*, Visoka poslovna škola strukovnih studija u Novom Sadu, 2014