Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад

Сложени Пуасонов процес као модел збира исплаћених одштета

Ментор:
проф. др Павле Младеновић

Студент:
Милица Михајловић

октобар, 2015.

Садржај

Увод

Осигурање представља привредну, услужну делатност која штити човека и његову имовину од последица дешавања бројних опасности.[1]

Први облици осигурања срећу се још у првобитној људској заједници у оквиру племена, а касније и породица. Елементи осигурања јављају се у Вавилону још пре четири миленијума. У случају губитка брода, власнику се надокнађивала штета, а ако брод стигне на дестинацију, власник је био дужан да исплати одређени део добити. Писани трагови о осигурању постоје и у Хамурабијевом закону из 2250. године пре наше ере.

У Римској империји постојала су удружења чији су чланови уплаћивали одређене износе као "чланарину" а удружење је преузимало трошкове сахране у случају смрти. У овим удружењима јављају се и почетни облици осигурања живота. Осигурање на основу уплаћене премије осигурања почело је да се практикује у италијанским градовима још од XIII века наше ере.

Од почетка XX века, при разматрању математичких проблема који се односе како на животно тако и на неживотно осигурање, све више се користе математичке методе које се базирају на теорији вероватноће, математичкој статистици и теорији случајних процеса. У овим методама користи се закон великих бројева, централна гранична теорема, а од случајних процеса пре свега Пуасонов процес. [2]

Лундберг[3] је 1903. године у свом раду искористио Пуасонов процес као модел за процес пребрајања захтева за одштету и поставио темељ

[1]Маровић Б., Жарковић Н., Лексикон осигурања, Нови Сад, 2002.

[2]Siméon Denis Poisson(21. јуна 1781. – 25. априла 1840.) француски математичар и физичар.

[3]Ernst Filip Oskar Lundberg (2. јун 1876. - 31. децембар 1965.) шведски математичар.

теорије ризика. Теорија ризика је синоним за математику неживотног осигурања. Крамер[4] је 30-их година XX века интензивно развијао теорију ризика користећи процес збир исплаћених одштета, при чему је процес који одређује број исплаћених одштета био Пуасонов процес.

У првом поглављу овог рада биће речи о Пуасоновом процесу, који као што је већ поменуто има значајну улогу у математици осигурања, и о граничним теоремама за овај процес.

Друго поглавље посвећено је процесу обнављања, који представља уопштење Пуасоновог процеса, и његовим граничним теоремама.

У трећем поглављу описан је Крамер-Лундбергов модел, најпопуларнији модел у математици неживотног осигурања. Њиме се описује промена капитала током времена. Без обзира на своју једноставност он описује неке главне карактеристике процеса збира исплаћених одштета.

У четвртом поглављу је обрађен збир исплаћених одштета и сложени Пуасонов процес којим се моделира тај збир, као и граничне теореме за збир исплаћених одштета. Осигуравајуће друштво се склапањем уговора о осигурању обавезује да ће надокнадити штете над осигураним предметима, уколико до штете дође. На тај начин осигуравајућа компанија на себе преузима ризик осигураника а као накнаду добија премију. Поставља се питање одређивања висине премије тако да компанија избегне банкрот. Велики број компанија је банкротирао због немогућности да се носе са захтевима за исплату одштете за време великих природних катастрофа. Моделирати број осигураних случајева који ће претрпети штету, као и збир штета, у дугом временском периоду, један је од кључних задатака теорије неживотног осигурања.

У моделима дозвољено је да дисперзија расподеле величине одштете буде бесконачна, што се оправдава емпиријским подацима који се срећу у актуарској математици, па ће у вези са тим, у петом поглављу бити речи о стабилним расподелама.

[4] Harald Cramér (25. септембар 1893. – 5. октобар 1985.) шведски математичар.

1 Пуасонов процес

Пуасонов процес има значајну улогу у математици осигурања али и у многим другим областима. Примери који се могу описати као Пуасонови процеси су посете неком сајту, радиоактивност атома, телефонски позиви итд. Вредност процеса у свакој тачки је случајна величина која има Пуасонову расподелу, па отуда и сам назив процеса.

За обраду овог поглавља, користићемо [1], [2], [3] и [8] са списка литературе.

Дефиниција 1.1 *Случајна величина X има Пуасонову расподелу са параметом $\lambda > 0$, ако је њена расподела дата са:*

$$P\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Неке карактеристике Пуасонове расподеле:

- Карактеристична функција Пуасонове расподеле је:

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Доказ. $\varphi_X(t) = Ee^{itX} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk}P\{X = k\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{itk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$= e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$ ■

- Очекивање и дисперзија случајне величине X:

$$E(X) = \lambda \qquad D(X) = \lambda.$$

Доказ. $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$
$= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$ ■

Аналогно добијамо да је $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$.

$D(X) = E(X^2) - (E(X)^2) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$ ■

- Збир независних случајних величина које имају Пуасонову расподелу је случајна величина која такође има Пуасонову расподелу.

- Пуасонова расподела је бесконачно дељива, јер се за сваки природан број к случајна величина $X \in P(\lambda)$ може представити у облику збира к независних сабирака од којих сваки има $P(\lambda/k)$ расподелу.

  Доказ. За карактеристичну функцију случајне величине X важи

  $$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \left(e^{(\lambda/k)(e^{it}-1)}\right)^k,$$

  при чему је $e^{(\lambda/k)(e^{it}-1)}$ карактеристична функција $P(\lambda/k)$ расподеле.

  ■

Дефиниција 1.2 *Случајни процес $\{N(t), t \geq 0\}$ је Пуасонов процес, ако има следећа својства:*

1. $N(0) = 0$ *с.с.*
2. *Случајни процес N има независне прираштаје, тј. за све природне бројеве n и све реалне бројеве $t_1, t_2, ..., t_n$, где је $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, случајне величине*

   $$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1}),$$

   су независне.
3. *Постоји неопадајућа функција $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, која је непрекидна са десне стране, $\mu(0) = 0$ и таква да за произвољне $0 < s < t$ важи*

   $$N(t) - N(s) \in \mathrm{P}(\mu(t) - \mu(s)),$$

   тј. $N(t) - N(s)$ има Пуасонову расподелу са параметром $\mu(t) - \mu(s)$. Тада се μ зове функција средње вредности Пуасоновог процеса.
4. *Са вероватноћом 1 трајекторије $N(t, \omega), t \geq 0$, случајног процеса N непрекидне су са десне стране за $t \geq 0$ и имају леву граничну вредност за $t > 0$.*

Ако је функција средње вредности апсолутно непрекидна, тј. ако је

$$\mu(s,t] = \int_s^t \lambda(u)du, \; s < t,$$

за неку ненегативну функцију $\lambda(u)$, онда ту функцију $\lambda(u)$ називамо функција интензитета Пуасоновог процеса.

Ако је функција средње вредности Пуасоновог процеса $\{N(t), t \geq 0\}$ $\mu(t) = \lambda t, t \geq 0$, за неко $\lambda > 0$, онда је

$$\mu(s,t] = \lambda(t-s), \; 0 < s < t,$$

и тај Пуасонов процес називамо хомоген Пуасонов процес, а функцију интензитета λ називамо интензитет хомогеног Пуасоновог процеса $\{N(t), t \geq 0\}$.
Ако је $\lambda = 1$, онда се процес назива стандардан хомоген Пуасонов процес.

1.1 Коначно-димензионе расподеле

Пуасонов процес има најпожељније теоријске особине, а једна од њих је и могућност експлицитног извођења коначно-димензионих расподела.

Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес а $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ функција средње вредности овог процеса. Прираштај Пуасоновог процеса на интервалу (s,t], $0 \leq s < t < +\infty$ означићемо са:

$$N(s,t] = N(t) - N(s).$$

За извођење коначно-димензионе расподеле користимо следеће:

$$N(t) \in P(\mu(t)), \quad N(s,t] \in P(\mu(s,t]).$$

Нека је $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < +\infty$. Тада важи

$$\begin{aligned}
N(t_2) &= N(t_1) + N(t_1, t_2], \\
N(t_3) &= N(t_1) + N(t_1, t_2] + N(t_2, t_3], \\
&\vdots \\
N(t_n) &= N(t_1) + N(t_1, t_2] + \ldots + N(t_{n-1}, t_n]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Користећи независност прираштаја Пуасоновог процеса и претходне једнакости добијамо да је за $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < +\infty$ и произвољне ненегативне бројеве $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$:

$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_1 + k_2, \ldots, N(t_n) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\}$

$= P\{N(t_1) = k_1, N(t_1, t_2] = k_2, \ldots, N(t_{n-1}, t_n] = k_n\}$

$= e^{-\mu(t_1)} \frac{(\mu(t_1))^{k_1}}{k_1!} e^{-\mu(t_1,t_2]} \frac{(\mu(t_1,t_2])^{k_2}}{k_2!} \cdots e^{-\mu(t_{n-1},t_n]} \frac{(\mu(t_{n-1},t_n])^{k_n}}{k_n!} =$

$= e^{-\mu(t_n)} \frac{(\mu(t_1))^{k_1}}{k_1!} \frac{(\mu(t_1,t_2])^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{(\mu(t_{n-1},t_n])^{k_n}}{k_n!}.$

Ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес онда је:

$P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_1 + k_2, \ldots, N(t_n) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n\}$

$= e^{-\lambda t_n} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2}}{k_2!} \cdots \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n}}{k_n!}.$

1.2 Егзистенција Пуасоновог процеса

Теорема 1.1 *Нека је $(Y_n)_{n\geq 1}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, $Y_n \in \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Нека је $T_0 = 0, T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ за $n \geq 1$ и*

$$N(t) = \#\{n \geq 1 : T_n \leq t\},\ t \geq 0. \tag{2}$$

Тада је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом λ.[5]

Теорема 1.2 *Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом λ , одређен својствима у дефиницији 2.2. Тада $\{N(t), t \geq 0\}$ има репрезентацију дату са (2).*

[5]Доказ видети у литератури [2] на страни 7.

1.3 Граничне теореме

За доказивање граничних теорема за хомоген Пуасонов процес биће нам потребна следећа лема.

Лема 1.1 *Претпоставимо да су на простору вероватноћа* (Ω, A, P) *дефинисани низ случајних величина* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *и случајни процес* $\{N(t), t \geq 0\}$ *тако да важе следећи услови:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z$ *скоро сигурно;*

б) *За свако* $t \geq 0$ *важи* $N(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *скоро сигурно;*

в) $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = \infty$ *скоро сигурно.*

Тада важи $\lim\limits_{t\to\infty} Z_{N(t)} = Z$ *скоро сигурно.*

Теорема 1.3 *Нека је* $\{N(t), t \geq 0\}$ *хомоген Пуасонов процес са интензитетом* λ. *Тада важи:*

а) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda$ *скоро сигурно;*

б) $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{D} Z \in \mathrm{N}(0,1)$ *кад* $t \to \infty$.

Доказ. (а) На основу (2) Пуасонов процес $\{N(t), t \geq 0\}$ можемо представити на следећи начин: $N(t) = |\{k \geq 1, T_k \leq t\}|\,, t \geq 0$, где је
$T_n = Y_1 + \cdots Y_n$, а $(Y_k)_{k\geq 1}$ низ независних случајних величина са истом експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. $E(Y_k) = \frac{1}{\lambda}$. На основу јаког закона великих бројева следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1}{\lambda}, \text{ скоро сигурно.} \tag{3}$$

па важи и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}, \text{ скоро сигурно.} \tag{4}$$

Користећи чињеницу да је $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, добијамо следеће неједнакости:

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)}. \tag{5}$$

Из претходне неједнакости, користећи (3) - (4), добијамо да је скоро сигурно

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}, \tag{6}$$

а одатле следи и први део теореме.

(б) За доказивање овог дела теореме користићемо карактеристичну функцију. Карактеристична функција случајне величине N(t) једнака је

$$\varphi_{N(t)}(u) = Ee^{iuN(t)} = e^{\lambda t(e^{iu}-1)}.$$

Случајна величина $\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}$ има следећу карактеристичну функцију

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda t}}}(u) &= e^{-iu\sqrt{\lambda t}}\varphi_{N(t)}(\frac{u}{\sqrt{\lambda t}}) = e^{-iu\sqrt{\lambda t}}e^{\lambda t(e^{\frac{iu}{\sqrt{\lambda t}}}-1)} \\
&= e^{-iu\sqrt{\lambda t}}e^{\lambda t\{1+\frac{iu}{\sqrt{\lambda t}}-\frac{u^2}{2\lambda t}-1+o(\frac{1}{t})\}} \\
&= e^{-iu\sqrt{\lambda t}}e^{iu\sqrt{\lambda t}}e^{\lambda t\{-\frac{u^2}{2\lambda t}+o(\frac{1}{t})\}} \\
&\to e^{-\frac{u^2}{2}}, t\to\infty.
\end{aligned}$$

Карактеристична функција нормалне $N(0,1)$ расподеле је управо гранична функција. Овим смо доказали и други део теореме. ■

2 Процес обнављања

Процеси обнављања моделирају догађаје који се јављају на случајан начин у временским тренуцима, где су времена између два догађаја независна и имају исту расподелу. У области неживотног осигурања ови временски тренуци се интерпретирају као времена доспећа захтева за одштету.

Основни мотив за увођење процеса обнављања је то што (хомогени) Пуасонов процес не описује увек доспевање захтева на адекватан начин. Између пристизања захтева могу се јавити велики раскораци. На пример, вероватноћа да захтеви за исплату штете за осигурање од олује пристижу у складу са Пуасоновим процесом јако је мала. Понекад могу проћи и године до пристизања следећег захтева. Много је природније да у овом случају претпоставимо да су времена између пристизања два захтева расподељена тако да омогућавају моделовање ових великих временских интервала.

Ово поглавље биће обрађено уз помоћ [1], [2] и [7] са списка литературе.

Дефиниција 2.1 *Нека је $(Y_n)_{n\geq 1}$ низ независних, позитивних случајних величина са истом функцијом расподеле F, при чему је $F(0)=0$. Нека је*

$$T_0=0,\ T_k=Y_1+Y_2+\cdots Y_k,\ k\geq 1;$$
$$N(t)=\left|\{k\geq 1: T_k\leq t\}\right|,\ t\geq 0. \tag{7}$$

Тада случајни низ $(T_n)_{n\geq 1}$ називамо низ тренутака обнављања, а случајни процес $(N(t))_{t\geq 0}$ називамо процес обнављања.

Можемо приметити да се у дефиницији процеса обнављања не претпоставља да обавезно важи $Y_k\in\mathcal{E}(\lambda)$ за неко $\lambda>0$. Ако то важи, $(N(t))_{t\geq 0}$ је хомоген Пуасонов процес са интензитетом λ. Стога хомоген Пуасонов процес можемо сматрати процесом обнављања.

Процес обнављања представља математичи модел за број реализација догађаја у интервалу [0,t].

Пример процеса обнављања је број обнављања (замена) техничких компоненти, на пример сијалица у лампи, па отуда и сам назив процеса.

2.1 Граничне теореме

Видећемо да процес обнављања и хомогени Пуасонов процес имају заједничке асимптотске особине. Први резултат који на то указује је јаки закон великих бројева за процес обнављања.

Теорема 2.1 *Нека је* $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$. *Тада процес обнављања* $\{N(t), t \geq 0\}$ *задовољава јаки закон великих бројева:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda. \tag{8}$$

У случају хомогеног Пуасоновог процеса знамо тачну вредност очекивања процеса обнављања: $EN(t) = \lambda t$. У случају општег процеса обнављања претходна теорема наговештава да је очекивање EN(t) процеса обнављања апроксимација од λt.

Теорема 2.2 *За процес обнављања* $\{N(t), t \geq 0\}$ *код кога је* $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$ *важи следеће:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} = \lambda. \tag{9}$$

Доказ. На основу Фатуове леме и (8) добијамо да је

$$\lambda = E\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right) \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t}. \tag{10}$$

Да би доказали теорему, довољно је још да докажемо да важи и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \lambda. \tag{11}$$

Нека је

$$Y_k^{(c)} = \begin{cases} Y_k, & \text{ako je } Y_k \leq c, \\ c, & \text{ako je } Y_k > c, \end{cases} \tag{12}$$

за c > 0.

$$T_0^{(c)} = 0, T_k^{(c)} = Y_1^{(c)} + Y_2^{(c)} + \cdots Y_k^{(c)}, \ \ k \geq 1. \tag{13}$$

Следи да је $T_k^{(c)} \leq T_k$. Ако означимо

$$N_c(t) = \left| \{k \geq 1 : T_k^{(c)} \leq t\} \right|, \ \ t \geq 0, \tag{14}$$

процес $\{N_c(t), t \geq 0\}$ је процес обнављања за који важи $N(t) \leq N_c(t)$. Можемо закључити на основу дефиниције процеса $\{N_c(t), t \geq 0\}$ да важи

$$T_{N_c(t)}^{(c)} = Y_1^{(c)} + Y_2^{(c)} + \cdots Y_{N_c(t)}^{(c)} \leq t. \tag{15}$$

Такође, можемо закључити да је

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{EN(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{EN_c(t)}{t}. \tag{16}$$

Нека је $F_n = \sigma \left\{ Y_k^{(c)} : k \leq n \right\}$ σ-алгебра генерисана случајним величинама $Y_1^{(c)}, Y_2^{(c)}, \cdots, Y_k^{(c)}$. Тада је (F_n) природна филтрација генерисана низом $Y_k^{(c)}$.[6] Целобројна случајна величина τ је време заустављања у односу на (F_n) ако је $\{\tau = n\} \in (F_n)$. Ако је $E(\tau) < +\infty$ тада Валдов идентитет [7] даје

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau} Y_k^{(c)}\right) = E(\tau) E Y_1^{(c)}. \tag{17}$$

Користећи чињеницу да је $\{N_c(t) = n\} = \left\{ T_n^{(c)} \leq t < T_{n+1}^{(c)} \right\}$ можемо закључити да $N_c(t)$ није време заустављања, а да $N_c(t)+1$ јесте време заустављања. На основу тога важи

$$E T_{N_c(t)+1}^{(c)} = E(N_c(t)+1) E Y_1^{(c)}. \tag{18}$$

[6] Детаљније о овоме може се видети у A. Gut, Stopped random walks, 2 ed., Springer, 1988

[7] Ако су $Y_1, Y_2, \ldots,$ независне, једнако расподељене случајне величине, τ њихово време заустављања, $EY_1 < +\infty$, $T_0 = 0$, $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \geq 1$ и $E(\tau) < +\infty$ тада $E(T_\tau) = E(\tau)E(Y_1)$.

Из (16) и (18) добијамо следеће

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{EN(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{ET^{(c)}_{N_c(t)}}{tEY_1^{(c)}} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{t}{tEY_1^{(c)}}. \tag{19}$$

Кад $c \to +\infty$ онда $Y_1^{(c)} \to Y_1, EY_1 = \frac{1}{\lambda} < \infty$, на основу теореме о монотоној конвергенцији важи $EY_1^{(c)} \to \frac{1}{\lambda}$ кад $c \to +\infty$.
(19) важи за свако $c > 0$, па када $c \to +\infty$ важиће и неједнакост (11). С обзиром да смо доказали и ову неједнакост, доказ теореме је завршен.

$\blacksquare$

Теорема 2.3 *Нека је* $\{N(t), t \ge 0\}$ *процес обнављања код кога је* $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda} \in (0, +\infty)$, *и* $0 < DY_1 < +\infty$. *Тада је*

а)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{DN(t)}{t} = \frac{DY_1}{(EY_1)^3} = \lambda^3 DY_1. \tag{20}$$

б)

$$\frac{N(t)-\lambda t}{\sqrt{\lambda^3 t DY_1}} \xrightarrow{D} Z \in \mathrm{N}(0,1), t \to \infty. \tag{21}$$

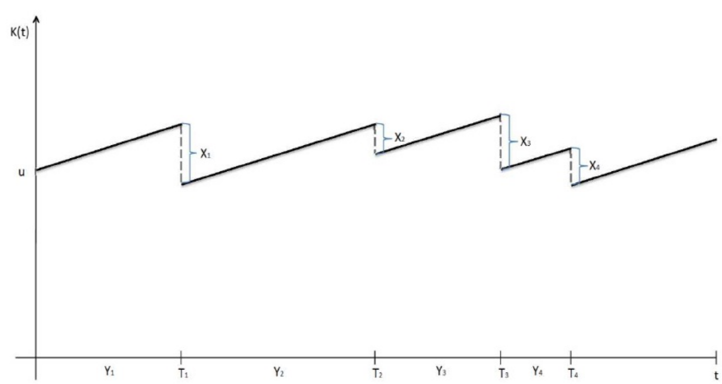
3 Крамер-Лундбергов модел

Темељ модерне теорије ризика поставио је Лундберг 1903. године а касније је развијао Крамер. Један од Лундербергових кључних доприноса је увођење једноставног модела који је способан да опише основну динамику хомогеног портфолија осигурања. Под овим подразумевамо портфолио уговора или полиса за сличне врсте ризика као што је осигурање од крађе у домаћинству или осигурање једне породичне куће од штете проузроковане поплавом, при чему су величине тих штета независне и имају исту расподелу. Тај модел познат је под називом Крамер-Лундбергов модел или класични модел ризика.

Процес ризика се дефинише са:

$$K(t) = u + p(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

u представља почетни капитал, тј. вредност капитала у "нултом" тренутку. K(t) је вредност капитала осигуравајуће компаније у тренутку t. Акумулиране премије су описане непрекидном функцијом p(t), која такође фигурише у изразу за укупан капитал. Обично се p(t) моделира као линеарна функција: p(t)=ct, c је неслучајна величина.



Слика 1: Пример трајекторије процеса ризика

Можемо видети да процес почиње са почетним капиталом u. Вредност капитала се увећава линеарном брзином, тј. брзином акумулирања премије c, до тренутка T_1, када пристиже захтев за одштетом. Тада се капитал умањује за вредност X_1. Затим на интервалу $[T_1, T_2)$ процес поново расте брзином c, до тренутка T_2 када се капитал умањује за вредност X_2, и тако даље. И са графика, али и из израза може се закључити да капитал може узети и негативну вредност. То се дешава уколико постоји велика вредност одштете X_i којом вредност капитала у тренутку доспећа такве одштете пада испод нуле. Тада долази до разарања компаније.

Према члану 28. Закона о осигурању[8], новчани део основног (почетног) капитала акционарског друштва за осигурање, приликом оснивања, не може бити мањи од динарске противвредности обрачунате по средњем курсу Народне банке Србије на дан уплате, и то за:

1. животна осигурања:
    - животна осигурања, осим добровољног пензијског осигурања 2 000 000 евра
    - добровољно пензијско осигурање 3 000 000 евра
    - све врсте животних осигурања 4 000 000 евра
2. неживотна осигурања:
    - осигурање од незгоде и добровољно здравствено осигурање 1 000 000 евра
    - осигурање моторних возила-каско, шинских возила-каско и обавезно осигурање од одговорности у саобраћају 2 500 000 евра
    - остала осигурања имовине, остала осигурања од одговорности и друге врсте неживотног осигурања 2 000 000 евра
    - све врсте неживотних осигурања 4 500 000 евра

[8] "Сл. гласник РС", бр. 55/2004, 70/2004 - испр., 61/2005, 61/2005 - др. закон, 85/2005 - др. закон, 101/2007, 63/2009 - одлука УС, 107/2009, 99/2011, 119/2012, 116/2013 и 139/2014 - др. закон

3. реосигурање 4 500 000 евра

У Крамер-Лундберговом моделу процес ризика дефинише се са:

$$K(t) = K(0) + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

при чему је K(0) почетни капитал, а c је брзина акумулације премије уплата.

Три претпоствке Крамер-Лундберговог модела:

- Захтеви за одштетом пристижу у тренуцима T_i за које важи $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ....$
- и-ти захтев за одштету пристиже у тренутку T_i и проузрокује вредност одштете X_i коју исплаћује осигуравајућа компанија. (X_i) је низ ненегативних, једнако расподељених и међусобно независних случајних величина, при чему је $F(0) = 0$, $E(X_1) = m < +\infty$, $D(X_1) = \sigma^2 \leq +\infty$. (F је заједничка функција расподеле вредности одштета, $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$)
- Случајне величине X_i и T_i су међусобно независне.

Претпоставка да су величине одштета X_i и тренуци доспећа захтева за одштету T_i независни је математичка конвенција. Услов $F(0) = 0$ означава да случајне величине X_i узимају ненегативне вредности скоро сигурно. Величина одштете је случајна величина за коју претпостављамо да има коначно математичко очекивања а дозвољавамо могућност да дисперзија буде бесконачна. Ову претпоставку подржава реална анализа података јер се у актуарској математици срећу подаци чија се расподела добро моделира случајним величинама које имају бесконачне дисперзије.

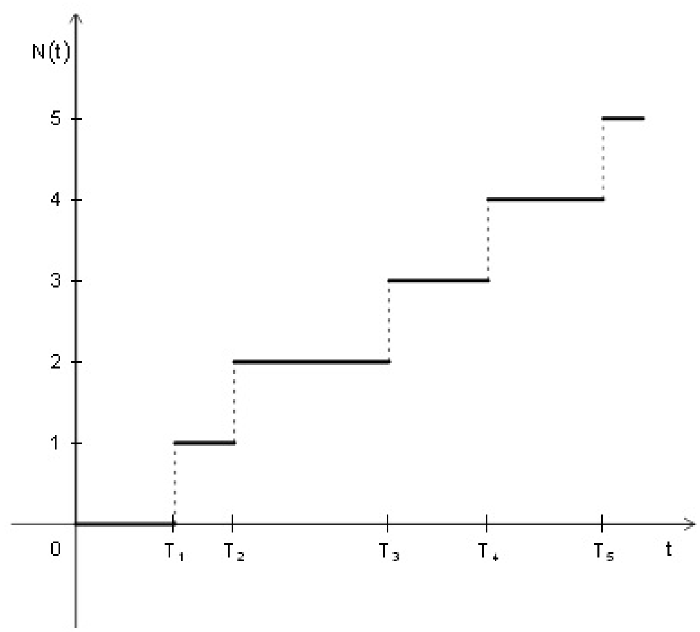
Означимо са $Y_k = T_k - T_{k-1},\ k = 1, 2, ...,\ T_0 = 0$. Претпоставимо да је (Y_k) низ независних случајних величина које имају експоненцијалу расподелу са параметром $\lambda > 0$, тј.

$$P\{Y_k \leq t\} = P\{T_k - T_{k-1} \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Приметимо да је $T_n = Y_1 + ...Y_n,$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Случајни процес који одређује број исплаћених одштета до одређеног тренутка t дефинишемо на следећи начин:

$$N(t) = \#\{n \geq 1 : T_n \leq t\},\ t \geq 0;\ sup\emptyset = 0.$$



Слика 2: Број исплаћених одштета

Можемо закључити да су N(t) и X_i независне.
$(N(t))_{t\geq 0}$ је процес обнављања на $[0, +\infty)$. Као последица претпоставке о експоненцијалној расподели случајних величина Y_k добија се да је процес $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$.

За обраду овог поглавља коришћени су [1], [2] и [3] са списка литературе.

4 Збир исплаћених одштета

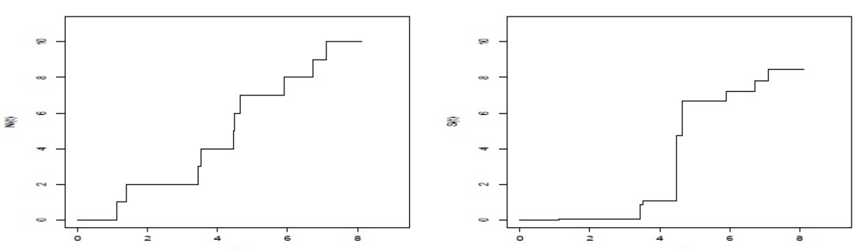
Главни објекат интересовања са становишта осигуравајуће компаније је збир исплаћених одштета:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{[0,t]} T_i, t \geq 0. \tag{22}$$

Случајна величина $I_{[0,t]}$ је индикатор скупа [0,t].

Као што је речено у претходном поглављу, процес обнављања је независан од низа величина одштета (X_i), чији су елементи независни и једнако расподељени са функцијом расподеле F, за коју важи $F(0) = 0$. У зависности од избора процес обнављања добијамо различите моделе за процес $S = (S(t))_{t\geq 0}$.
У Крамер-Лундберговом моделу процес обнављања је хомоген Пуасонов процес, а процес $S = (S(t))_{t\geq 0}$ се назива сложени Пуасонов процес.

На слици 3. можемо видети кретање процеса N(t)(лево) и одговарајућег процеса S(t)(десно). У тренутку T_i видимо скок за 1 процеса N(t), док процес S(t) има скок за X_i.



Слика 3: Кретање процеса N(t) и процеса S(t)

Ако је n фиксиран природан број n, онда је функција расподеле збира $X_1 + X_2 + ... + X_n$ дата са

$$P\{X_1 + ... + X_n \leq x\} = F^{n*}(x),$$

и представља n-ту конволуцију функције расподеле F.

Функцију расподеле збира исплаћених одштета у временском интервалу [0,t] код произвољног процеса обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$ одређујемо коришћењем формуле потпуне вероватноће:

$$\begin{aligned} G_t(x) &= P\{S(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t)=n\} P\{S(t) \leq x \mid N(t)=n\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\{N(t)=n\} F^{n*}(x). \end{aligned}$$

Специјално, у Крамер-Лундберговом моделу, $\{N(t), t \geq 0\}$ је хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ и тада важи:

$$G_t(x) = P\{S(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x).$$

Функција расподеле $G_t(x)$ има важну улогу у свим разматрањима која се односе на вероватноће догађаја да збир исплаћених одштета узме одређене вредности. Било би пожељно знати расподелу од S(t). Међутим, у општем случају ово је превише компликован проблем и зато се у применама користе нумеричке методе или методе симулације да би се приближно одредила расподела од S(t).

Теорема 4.1 *Нека је* $\{N(t), t \geq 0\}$ *произвољан процес обнављања и* $p_n(t) = P\{N(t) = n\}$, *за* $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. *Нека је* $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, *где је* $(X_i)_{i \geq 1}$ *низ независних случајних величина са истом расподелом, независан од процеса* $\{N(t), t \geq 0\}$ *и карактеристичном функцијом* $\varphi_{X_1}(u) = Ee^{iuX_1}$. *Карактеристична функција случајне величине S(t) дата је са*

$$\varphi_{S(t)}(u) = Ee^{iuS(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) (\varphi_{X_1}(u))^n.$$

Специјално, ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ *хомоген Пуасонов процес са интензитетом* $\lambda > 0$, *онда је*

$$\varphi_{S(t)}(u) = Ee^{iuS(t)} = e^{\lambda t(\varphi_{X_1}(u) - 1)}.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
\varphi_{S(t)}(u) &= Ee^{iuS(t)} = Ee^{iu\sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Ee^{iu\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)(\varphi_{X_1}(u))^n.
\end{aligned}$$

Последња једнакост важи због тога што су X_i међусобно независне и једнако расподељене па следи да је:

$$Ee^{iu\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \prod_{i=1}^{n} Ee^{iuX_i} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_1}(u) = \varphi_{X_1}(u))^n.$$

Ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$, онда је $p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$, па добијамо да је

$$\begin{aligned}
\varphi_{S(t)}(u) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{X_1}(u))^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t\varphi_{X_1}(u))^n}{n!} = e^{-\lambda t}e^{\lambda t\varphi_{X_1}(u)} \\
&= e^{\lambda t(\varphi_{X_1}(u)-1)}.\blacksquare
\end{aligned}$$

4.1 Математичко очекивање и дисперзија збира исплаћених одштета

Теорема 4.2 *Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ произвољан процес обнављања, $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0$, а $(X_i)_{j\geq 1}$ низ независних случајних величина са истом расподелом и $E(X_i) = m$, $D(X_i) = \sigma^2 < +\infty$. Тада важе једнакости:*

$$E(S(t)) = mE(N(t)), \tag{23}$$

$$D(S(t)) = \sigma^2 E(N(t)) + m^2 D(N(t)). \tag{24}$$

Доказ.

$$
\begin{aligned}
E(S(t)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} E(S(t) \mid N(t)=k) P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)=k\right) P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} kmP\{N(t)=k\} = mE(N(t)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(S(t))^2 &= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right)^2 \mid N(t)=k\right) P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2 P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} E(X_i)\right)^2\right) P\{N(t)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (k\sigma^2 + k^2 m^2) P\{N(t)=k\} \\
&= \sigma^2 E(N(t)) + m^2 E(N(t))^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(S(t)) &= E(S(t))^2 - (E(S(t)))^2 = \sigma^2 E(N(t)) + m^2 E(N(t))^2 - m^2 (E(N(t)))^2 \\
&= \sigma^2 E(N(t)) + m^2 (E(N(t))^2 - (E(N(t)))^2) \\
&= \sigma^2 E(N(t)) + m^2 D(N(t)). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Последица 4.1 *У Крамер-Лундберговом моделу, где за независне одштете важи* $E(X_i) = m$ *и* $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$*, а времена између узастопних приспећа захтева за одштетом имају експоненцијалну расподелу* $\varepsilon(\lambda)$, $\lambda > 0$*, важи* $E(N(t)) = D(N(t)) = \lambda t$ *и*

$$E(S(t)) = \lambda t E(X_1) = \lambda t m,$$
$$D(S(t)) = \lambda t(\sigma^2 + m^2) = \lambda t E(X_1)^2.$$

Теорема 4.3 *Нека је* $\{N(t), t \geq 0\}$ *произвољан процес обнављања,* $(Y_i)_{i\geq 1}$ *низ независних случајних величина са истом расподелом које представљају времена између узастопних приспећа захтева за одштетом и* $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0$*, где је* $(X_i)_{i\geq 0}$ *низ независних случајних величина са истом расподелом.*

а) *Нека су математичка очекивања* $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$ *и* $E(X_1) = m$ *коначна. Тада важи*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(S(t))}{t} = \lambda m.$$

б) *Нека су дисперзије* $D(Y_1)$ *и* $D(X_1)$ *коначне и нека је* $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$ *и* $E(X_1) = m$*. Тада важи једнакост:*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(S(t))}{t} = \lambda\left(\sigma^2 + m^2\lambda^2 D(Y_1)\right).$$

Доказ. а) На основу (23) и (9) следи

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{E(S(t))}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{mE(N(t))}{t}\\ &= m\lim_{t\to\infty}\frac{E(N(t))}{t}\\ &= \lambda m\end{aligned}$$

б) На основу (24) и (20) следи

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{E(D(t))}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2 E(N(t)) + m^2 D(N(t))}{t}\\ &= \sigma^2\lambda + m^2\lambda^3 DY_1\\ &= \lambda(\sigma^2 + m^2\lambda^2 DY_1).\blacksquare\end{aligned}$$

4.2 Граничне теореме

Јаки закон великих бројева за збир исплаћених одштета је један од важнијих резултата за осигуравајућу компанију. Валидност јаког закона великих бројева нам даје уверење да у просеку велики и мали захтеви током времена конвергирају ка њиховим теоретским средњим вредностима.

Теорема 4.4 *Ако су математичка очекивања $E(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$ и $E(X_1) = m$ коначна, онда са вероватноћом 1 важи*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{E(X_1)}{E(Y_1)} = \lambda m.$$

Следећа теорема је централна гранична теорема за збир исплаћених одштета.

Теорема 4.5 *Ако случајне величине X_1 и Y_1 имају коначне дисперзије, онда важи*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| P\left\{ \frac{S(t) - E(S(t))}{\sqrt{D(S(t))}} \leq x \right\} - \Phi(x) \right| = 0, \tag{25}$$

где је $\Phi(x)$ стандардна нормална функција расподеле.

Последица 4.2 *На основу израза за математичко очекивање и дисперзију збира исплаћених одштета датих са (23) и (24) добијамо да при услову $t \to \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ важи*

$$P\left\{ \frac{S(t) - E(N(t))E(X_1)}{\sqrt{E(N(t))D(X_1) + D(N(t))(E(X_1))^2}} \leq x \right\} \to \Phi(x). \tag{26}$$

Код Крамер-Лундберговог модела важи $N(t) \in P(\lambda t)$,
$E(Y_1) = \frac{1}{\lambda}$ *и* $E(N(t)) = \lambda t$, *где је* $\lambda > 0$. *Ако је* $E(X_1) = m$ *и* $D(X_1) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$, *онда користећи (26) добијамо да при услову* $t \to \infty$ *равномерно по* $x \in \mathbb{R}$ *важи*

$$P\left\{\frac{S(t) - \lambda t m}{\sqrt{\lambda t(\sigma^2 + m^2)}} \leq x\right\} \to \Phi(x).$$

Нормална апроксимација.
Из формуле (25) добијамо следећу апроксимацију за функцију расподеле збира исплаћених одштета

$$P\left\{\frac{S(t) - E(S(t))}{\sqrt{D(S(t))}} \leq x\right\} \approx \Phi(x), \tag{27}$$

$$G_t(x) = P\{S(t) \leq x\} \approx \Phi\left(\frac{x - E(S(t))}{\sqrt{D(S(t))}}\right). \tag{28}$$

Грешка у апроксимацији у формули (27) условљена је степеном асиметрије функције расподеле $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, из које следи и асиметрија расподеле $S(t)$.
Корекција формуле о апроксимацији дата је Еџвортовом апроксимацијом

$$P\left\{\frac{S(t) - E(S(t))}{\sqrt{D(S(t))}} \leq x\right\} \approx \Phi(x) - \frac{1}{6}\gamma_1(S(t))\Phi^3(x), \tag{29}$$

где је $\gamma_1(S(t))$ коефицијент асиметрије случајне величине $S(t)$.
Детаљније о Еџвортовој апроксимацији може се наћи у књизи Kendal and Stuart (1977).
Коришћење нормалне апроксимације за функцију расподеле збира исплаћених одштета треба избећи када нас занима вероватноћа ретких догађаја.
Детаљнија прича о апроксимацијама нормалном расподелом и о грешкама апроксимације у централној граничној теореми може наћи у књизи Баџтачарија и Ранга Рао (1982).

4.3 Збир исплаћених одштета у субекспоненцијалном случају

Претпоставимо да заједничка расподела $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, чланова низа $(X_j)_{j\geq 1}$ припада класи субекспоненцијалних расподела. Ако означимо $S_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$, онда из претпоставке да F припада класи субекспоненцијалних расподела следи да за сваки природан број $n \geq 2$ важи асимптотска релација

$$P\{S_n > x\} \sim nP\{X_1 > x\}, \ \ x \to \infty. \tag{30}$$

У субекспоненцијалном случају, важиће слична асимптотска релација и ако уместо S_n, који је збир неслучајног броја сабирака, посматрамо збир који има случајан број сабирака тј. S(t).

Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ и S(t) збир дат са (22), где је заједничка функција расподеле сабирака субекспоненцијална.
Из претпоставке да $N(t) \in P(\lambda t)$, следи да је:

$$\begin{aligned} \frac{P\{S(t) > x\}}{P\{X_1 > x\}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P\{S(t) > x | N(t) = n\} P\{N(t) = n\}}{P\{X_1 > x\}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{P\{S_n > x\}}{P\{X_1 > x\}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Користимо следећу теорему.

Теорема 4.6 *Ако $F \in S$ (класа субекспоненцијалних расподела) онда за свако $\varepsilon > 0$, постоји $C \in (0 + \infty)$, тако да за сваки природан број $n \geq 2$ и свако $x \geq 0$ важи*

$$\frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} \leq C(1 + \varepsilon)^n. \tag{32}$$

Нека је $\varepsilon > 0$. На основу (32) закључујемо да постоји константа $C \in (0 + \infty)$, таква да за сваки природан број n и свако $x \geq 0$ важи

$$\frac{P\{S_n > x\}}{P\{X_1 > x\}} \leq C(1+\varepsilon)^n. \tag{33}$$

Такође, можемо приметити да

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} C(1+\varepsilon)^n < +\infty. \tag{34}$$

На основу (33) и (34) добијамо следеће:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot \frac{P\{S_n > x\}}{P\{X_1 > x\}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \lim_{x\to\infty} \frac{P\{S_n > x\}}{P\{X_1 > x\}}. \tag{35}$$

На основу (31) и (35) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{P\{S(t) > x\}}{P\{X_1 > x\}} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \lim_{x\to\infty} \frac{P\{S_n > x\}}{P\{X_1 > x\}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot n && (36) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n P\{N(t) = n\} && (37) \\
&= E(N(t)) && (38) \\
&= \lambda t. && (39)
\end{aligned}$$

Закључујемо да, за свако $t > 0$ важи $P\{S(t) > x\} \sim \lambda t P\{X_1 > x\}$, кад $x \to \infty$.

Ако је број исплаћених одштета произвољан процес обнављања онда важи следећа теорема.

Теорема 4.7 *Нека је* $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0,$ *где је* $\{N(t), t \geq 0\}$ *процес обнављања, а* $(X_j)_{j\geq 1}$ *низ независних случајних величина са истом функцијом расподеле* F. *Означимо* $p_n(t) = P\{N(t) = n\},\ n \in \mathbb{N}_0$. *Претпоставимо да важи следеће:*

а) $F \in S$;

б) $EN(t) < +\infty$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^n p_n(t) < +\infty,$ *за неко* $\varepsilon > 0$.

Тада за функцију расподеле $G_t(x) = P\{S(t) \leq x\}$ *случајне величине S(t) важи* $G_t \in S$ *и*

$$1 - G_t(x) \sim EN(t) \cdot (1 - F(x)),\ x \to \infty.$$

Ово поглавље обрађено је уз помоћ [1], [2], [3], [9] и [10] са списка литературе.

5 Стабилне расподеле

У претходном поглављу било је речи о збиру исплаћених одштета уз претпоставку да расподела вероватноћа појединачне одштете има коначну дисперзију. У моделу који смо разматрали, као и у многим другим моделима, допуштамо могућност да дисперзија одштете буде бесконачна. У вези са тим ћемо у овом поглављу говорити о стабилним расподелама, а користићемо [1], [4], [5], [6], [11], [12] и [13] са списка литературе.

Стабилне расподеле апроксимирају расподелу нормализоване суме независних, једнако расподељених случајних величина.
Теорију једнодимензионалних стабилних расподела развили су 20-их и 30-их година 20. века Lévy и Khintchine. Детаљније су је обрадили Gnedenko и Kolmogorov (1954) и Feller(1971).

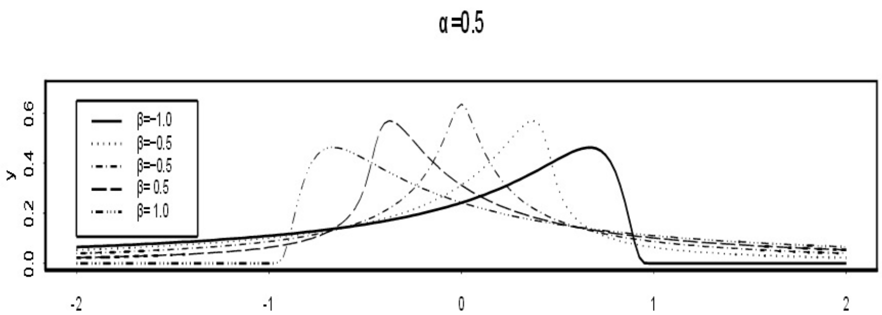
Примена стабилних расподела у моделирању финансијских података потиче из чињенице да стабилне расподеле дозвољавају асиметрију и тешке репове, које често срећемо код расподела финансијских података. Корисни су модел за податке који покривају екстремне догађаје као што су природне катастрофе. Такође се користе и за моделирање разних феномена као што су гравитационо поље звезда, напон у кристалној решетки, годишње количине падавина итд.

Стабилна расподела је одређена следећим параметрима:
индексом стабилности $\alpha \in (0, 2]$, параметром размере $\sigma \geq 0$, параметром положаја $\mu \in \mathbb{R}$ и параметром асиметрије $\beta \in [-1, 1]$. Ако није наглашено другачије, узима се да је вредност параметра положаја $\mu = 0$. Стандардна стабилна расподела је она стабилна расподела за коју важи $\sigma = 1$ и $\mu = 0$.

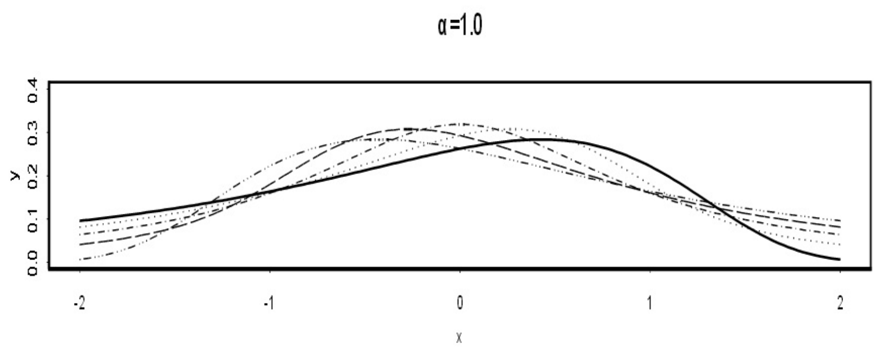
Параметри α и β одређују облик расподеле.[9] Када је вредност параметра α мала, асиметрија је значајна, а како се α близи вредности 2 (за $\alpha = 2$ имаћемо Гаусову расподелу), асиметрија је све мање значајна. Ако је параметар $\beta > 0$ расподела је асиметрична удесно, а ако је $\beta < 0$ онда је расподела асиметрична улево, што је већа вредност параметра β

[9] http://academic2.american.edu/ jpnolan/stable/stable.html
Овде се могу видети различити облици расподела у зависности од параметара α и β.

то је већа асиметрија. Ако је $\beta = 0$ расподела је симетрична. Функција густине расподеле $S_\alpha(\sigma, -\beta, \mu)$ је рефлексија функције густине расподеле $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ у односу на параметар μ.



Слика 4: Густине стандардних стабилних расподела за различите вредности параметра β и за $\alpha = 0.5$



Слика 5: Густине стандардних стабилних расподела за различите вредности параметра β и за $\alpha = 1$

У наставку следе еквивалентне дефиниције стабилних расподела.

Дефиниција 5.1 *Случајна величина X (њена расподела) је стабилна, ако за две независне копије $X_1 \overset{d}{=} X$ и $X_2 \overset{d}{=} X$ и произвољне бројеве $A \geq 0$ и $B \geq 0$ постоје реални бројеви $C \geq 0$ и $D \in \mathbb{R}$, такви да важи*

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D. \tag{40}$$

Дегенерисана случајна величина, односно константа је увек стабилна. Овај дегенерисани случај није од велике важности и претпостављамо да је X недегенерисана случајна величина, осим ако није изричито другачије речено.
Расподела је строго стабилна, ако једнакост (40) важи за $D = 0$.

Дефиниција 5.2 *Случајна величина X (њена расподела) је стабилна, ако за сваки природни број $n \geq 2$ постоје константе $C_n \geq 0$ и $D_n \in \mathbb{R}$, такве да важи једнакост*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \tag{41}$$

где су $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независне копије случајне величине X.

Теорема 5.1 а) *За сваку стабилну случајну величину X постоји број $\alpha \in (0, 2]$, тако да за константе C, A и B из (40)важи*

$$C^{\alpha} = A^{\alpha} + B^{\alpha}. \tag{42}$$

б) *Константа C_n из једнакости (41) дата је са $C_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, где је $\alpha \in (0, 2]$ онај експонент за који важи (42).*

Број $\alpha \in (0, 2]$ из једнакости (42) назива се индекс стабилности или карактеристични експонент случајне величине и њене расподеле. α је најважнији параметар, од њега зависи који моменти расподеле су коначни а који бесконачни. Стабилна случајна величина (и њена расподела) са индексом α зове се α-стабилна случајна величина
(α-стабилна расподела).

Пример 5.1 *Нормална расподела је стабилна.*
Претпоставимо да $X \in \mathrm{N}(m, \sigma^2)$. Нека су X_1 и X_2 независне копије случајне величине X.
За $A \geq 0$ и $B \geq 0$ важи

$$AX_1 + BX_2 \in \mathrm{N}((A + B)m, (A^2 + B^2)\sigma^2),$$

тј. једнакост (40) важи за $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $D = (A + B - C)m$. $\triangle$

Из овог примера можемо закључити да је ндекс стабилности нормалне расподеле 2.

Пример 5.2 *Пуасонова расподела није стабилна.*
Нека је $X \in \mathrm{P}(\lambda), \lambda > 0$. *Карактеристична функција случајне величине је* $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
Претпоставимо да постоје константе $C > 0$ *и* $D \in \mathbb{R}$, *такве да (40) важи за* $A = B = 1$. *Тада је* $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{CX+D}(t)$.

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\lambda(e^{it}-1)} = (e^{\lambda(e^{it}-1)})^2 = e^{2\lambda(e^{it}-1)}.$$

$$\varphi_{CX+D}(t) = e^{itD}\varphi_X(Ct) = e^{itD}e^{\lambda(e^{itC}-1)} = e^{\lambda(e^{itC}-1)+itD}.$$

На основу претходног можемо закључити да је

$$2\lambda(e^{it}-1) = itD + \lambda(e^{itC}-1).$$

Даље добијамо да је

$$2\lambda\left(it - \frac{t^2}{2} + \frac{i^3t^3}{6} + \cdots\right) = itD + \lambda\left(itC - \frac{C^2t^2}{2} + \frac{i^3C^3t^3}{6}\cdots\right) \qquad (43)$$

Ако изједначимо коефицијенте уз t^2 *на левој и на десној страни једнакости (43), онда добијамо да је* $C^2 = 2$. *Ако изједначимо коефицијенте уз* t^3 *, онда добијамо да је* $C^3 = 2$. *Тиме смо добили контрадикцију.*

$\triangle$

Теорема 5.2 *Класа стабилних недегенерисаних расподела поклапа се са класом свих могућих недегенерисаних граничних расподела за линеарно нормализоване парцијалне суме чланова низа независних случајних величина са истом расподелом.*

5.1 Карактеристичне функције стабилних расподела

Теорема 5.3 *Стабилна случајна величина X и њена расподела имају карактеристичну функцију следећег облика*

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta (sgn\, t) tg \frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu t\right\}, & ako\ je\ \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (sgn\, t) \ln |t| + i\mu t\right\}, & ako\ je\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{44}$$

где је $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, \alpha \in (0,2], \beta \in [-1,1]$ *и*

$$sgn\, t = \begin{cases} 1, & ако\ је\ t > 0 \\ 0, & ако\ је\ t = 0 \\ -1, & ако\ је\ t < 0. \end{cases} \tag{45}$$

Доказ ове теореме може се наћи у књизи Gnedenko и Kolmogorov (1954), поглавље 34.

За случајну величину X чија је карактеристична функција дата са (44) користимо ознаку $X \in S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Када је $\beta = \mu = 0$ добијамо стабилну расподелу $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, која је симетрична у односу на нулу и чија је карактеристична функција изузетно једноставног облика

$$\varphi(t) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha},$$

па су ове расподеле посебно погодне за коришћење у математичким моделима. Користићемо и ознаку $X \sim S\alpha S$, када случајна величина X има симетричну (у односу на нулу) α-стабилну расподелу.

5.2 Густине стабилних расподела

Густине расподела α-стабилних недегенерисаних случајних величина су апсолутно непрекидне. Интегралне формуле ових густина дате су у књизи Zolotarev (1986). Постоји неколико примера стабилних расподела код којих се густина расподеле може записати помоћу елементарних функција.

Пример 5.3 *Нормална расподела има* $S_2(\sigma, 0, \mu) = \mathrm{N}(\mu, 2\sigma^2)$ *густину дату са*

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right\}, x \in \mathbb{R} \tag{46}$$

Приметимо да параметар σ *у параметризацији* $S_2(\sigma, 0, \mu)$ *није стандардно одступање, јер је дисперзија нормалне расподеле чија је густина дата са (46) једнака* $2\sigma^2$. $\triangle$

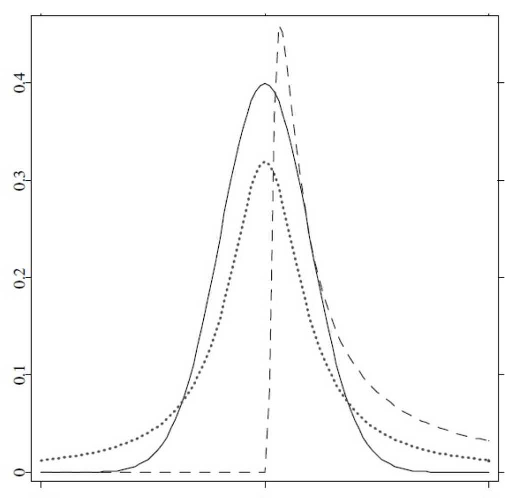
Пример 5.4 *Кошијева расподела* $S_1(\sigma, 0, \mu)$ *има густину дату са*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \; x \in \mathbb{R} \; (\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}) \triangle \tag{47}$$

Пример 5.5 *Левијеве расподела* $S_1(\sigma, 1, \mu)$ *има густину*

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\}, \; x > \mu, \tag{48}$$

и $f(x) = 0$ *за* $x \leq \mu$ *при чему је* $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. $\triangle$



Слика 6: Густине нормалне, Кошијеве и Левијеве расподеле

На слици 5. нормална расподела приказана је непрекидном линијом, Левијева испрекиданом линијом - - - - - а Кошијева $\cdots\cdots\cdots$.

5.3 Особине стабилних расподела

Користан алат за проучавање α-стабилних расподела је карактеристична функција дата са (44). Користићемо је за извођење неких основних особина стабилних случајних величина и за добијање интерпретације параметара. Од свих параметара, најмањи значај има параметар μ зато што он једино утиче на положај.

Теорема 5.4 *Нека су X_1 и X_2 независне случајне величине такве да $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Тада $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, где су*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Ово неће важити уколико су вредности α различите.
Доказ. За $\alpha \neq 1$, на основу независности,

$$\begin{aligned}
\ln\varphi_{X_1+X_2}(t) &= \ln(\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)) = \ln\varphi_{X_1}(t) + \ln\varphi_{X_2}(t) \\
&= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha + i|t|^\alpha(sgn\,t)tg\frac{\pi\alpha}{2}(\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha) + it(\mu_1 + \mu_2) \\
&= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|t|^\alpha\left[1 - i\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}(sgn\,t)tg\frac{\pi\alpha}{2}\right] + it(\mu_1 + \mu_2)
\end{aligned}$$

За $\alpha = 1$, доказ је сличан. ■
Параметар μ је параметар положаја због следеће теореме.

Теорема 5.5 *Нека је $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ и нека је a реална константа. Тада је $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.*

Доказ. Следи директно из форме карактеристичне функције.

$$\begin{aligned}
\varphi_{X+a}(t) &= \exp\{ita\}\,\varphi_X(t) \\
&= \begin{cases} \exp\left\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha(1 - i\beta(sgn\,t)tg\frac{\pi\alpha}{2}) + it(\mu + a)\right\}, & \text{ako je } \alpha \neq 1 \\ \exp\left\{-\sigma|t|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sgn\,t)\ln|t| + it(\mu + a)\right\}, & \text{ako je } \alpha = 1. \end{cases} \blacksquare
\end{aligned}$$

Теорема 5.6 *Нека је* $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ *и нека је а реална константа. Тада*

$$aX \sim S_\alpha(|a|\sigma,(sgn\,a)\beta,a\mu), \quad \text{ако је } \alpha \neq 1$$
$$aX \sim S_1(|a|\sigma,(sgn\,a)\beta,a\mu-\frac{2}{\pi}(\ln|a|\sigma\beta)), \quad \text{ако је } \alpha = 1. \tag{49}$$

Доказ. За $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}\varphi_{aX}(t) &= \exp\left\{-\sigma^\alpha|at|^\alpha(1-i\beta(sgn\,at)tg\frac{\pi\alpha}{2})+i\mu(at)\right\}\\ &= \exp\left\{-(\sigma|a|)^\alpha|t|^\alpha(1-i\beta(sgn\,a)(sgn\,t)tg\frac{\pi\alpha}{2})+i(\mu a)t\right\}\end{aligned}$$

За $\alpha = 1$, доказ је сличан. ■

Теорема 5.7 $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ *је симетрична ако и само ако је* $\beta = 0$ *и* $\mu = 0$. *Симетрична је у односу на* μ *ако и само ако је* $\beta = 0$.

Сви моменти дегенерисаних расподела су коначни, а недегенерисане α-стабилне расподеле код којих је $0 < \alpha < 2$ имају бесконачне друге моменте. Када је $\alpha \leq 1$ не постоји први моменат.
Уопштено, $E\,|X|^p = \int |x|^p dx$ постоји само ако је $p < \alpha$.

Закључак

У овом раду описан је Пуасонов процес који се користити у осигуравајућим компанијама за моделирање броја одштета као и сложени Пуасонов процес који се користи за моделирање збира исплаћених одштета. Проценили смо збир исплаћених одштета на основу одређивања математичког очекивања и дисперзије и на основу примене јаког закона великих бројева и централне граничне теореме. То је један од кључних задатака осигуравајуће компаније јер продајући полисе осигурања за неке ризичне догађаје, прибављају средства потребна за покривање трошкова при наступању неког од ризичних догађаја. Стога, да би пословале успешно, осигуравајуће компаније морају добро проценити колика може бити укупна штета при наступању сваког од ризичних догађаја, као и колико често одређени тип ризичних догађаја наступа и потом одредити висину премије.

Литература

[1] П. Младеновић (2014): Елементи актуарске математике, Београд

[2] T. Mikosch (2009): Non-life Insurance Mathematics, Springer

[3] S. Ramasubramanian (2006): On a Stochastic Model in Insurance, Springer India

[4] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu (1994): Stable non-Gaussian random processes. Stohastic models with infinite variance. Chapman & Hall, New York-London

[5] P. Nolan (2005): Modeling financial data with stable distributions

[6] S. Borak, Härdle W., Weron R. (2004): Stable distributions, Springer

[7] A. Gut (1988): Stopped random walks, 2ed., Springer

[8] Б. Маровић, Н. Жарковић (2002): Лексикон осигурања, Нови Сад

[9] M. Kendall, A. Stuart (1977): Advanced Theory od Statistics, Griffin, London

[10] Р.Н. Бхатачария, Р.Ранга Рао (1982): Аппроксимацця нормальным распределением и асимптотические раэложения, Наука, Москва.

[11] W, Feller (1971): An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2nd Edition, Wiley, New York

[12] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогороб (1949): Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва-Ленинград.

[13] V.M. Zolotarev (1986): One-dimensional Stable Distributions, Vol. 65 of "Translations od Mathematical Monographs", American Mathematical Society. Translation from the original 1983 Russian edition.

13