Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Internacionalna matematička testiranja učenika i studenata (komparativna analiza)

Master rad

Mentor: Dr Miodrag Mateljević
Student:Kristian Miok

Matematički fakultet
Beograd

Sadržaj

Abstrakt

Praksa testiranja učenika kako na nacionalnom tako i na međunarodnom nivou je nezamenljiv deo evaluacije učenika jednog školskog sistema. Na međunarodnom nivou, postoji čitav niz orudja da se proceni realno stanje znjanja učenika od kojih je testiranje najznačajnije i povrh svega najobjektivnije.

Cilj ovog rada jeste da nas upozna sa testovima koji se koriste danas u najvećem broju zemalja sveta i u našoj zemlji. Kao tri najpopularnija matematička takmičenja kako kod nas tako i u svetu Pisa projekat, Kengur bez granica i Matematička olimpijada bila su istraživana u ovom radu. Opisano je kako su ova takmičenja nastala i kako funkcionišu danas. Date su informacije vezane za način odrzavanja, bodovanja i ciljeva ova tri takmičenja.

Drugi deo ovaga rada bavi se rezultatima naših učenika u odnosu na učenike drugih zemalja. U ovom delu su iznete statistike do kojih je dođeno. Rezultati i statistike svakog od tri takmičenja se posebno ispituju i opisuju.

Poseban akcenat je dat na primere ovih testova i rešavanje težih. U izboru se pokušalo da primeri budu reprezentativni i što bolje prikažu prirodu i namenu testa kome pripadaju.

1 Uvod

Jedno od osnovnih zadataka školskog sistema jeste da oceni učenika, njegovo znanje, rad i zalaganje. Kada se radi o matematici, sigurno je da je test jedan od najpopularnijih, a čini se i najpreciznijih načina da se učenik oceni. Testiranje učenika na medjunarodnom nivou daje im dodatnu motivaciju i ciljeve koje im obično školsko takmičenje nemože ponuduti. Kao što smo rekli tri najpopularnija međunarodna takmičenja koji se praktikuju i u našoj zemlji su: Pisa projekat, Kengur bez granica i Internacionalna Matematička Olimpijada.

Moramo reći da su ovo suštinski različita takmičenja kako nivou težine zadataka tako i po načinu organizovanja i održavanja ali koji imaju isti cilj da pokažu stanje matematičkog obrazovanja odredjene zemlje u odnosu na okruženje. Matematička olimpijada je takmičenje koje je zamišljeno kao testiranje najboljih mladih talenata dok su druga dva takmičenja predviđena za sve učenike.
Ono što je slično kod sva tri takmičenja jeste da:

- pružaju informacije o obrazovnim sistemima i omogućavaju upoređivanje učenika iz velikog broja zemalja
- omogućavaju međunarodno uporedivo merenje dostignuća učenika
- procjenjuju znanja povezana sa realnim životnim situacijama i veštine i spremnost za buduće učestvovanje u društvu odraslih
- ispituje odnos između dostignuća učenika i faktora koji utiču na učenje kao što su karakteristike učenika i škole
- pomaže kreiranju obrazovne politike

1.1 Matematicka olimpijada

Prva internacionalna matematička olimpijada(IMO) je odrzana 1959. godine u Rumuniji. Od tada je bila održavana svake godine osim 1980. kada je otkazana zbog unutrašnjih sukoba u Mongoliji. Na početku je bila osnovana samo za istočno evropske države koje su pripadale Varšavskom paktu, da bi se nedugo zatim uključile i druge države. Iako je takmičenje na pocetu odrzavano samo u istočnoj evropi vremenom je dobilo svetki karakter i samim tim i mesto odrzavaja je počelo da se menja. Danas je ovo jedno od najznačajnijih internacionalnih matematičkih takmičenja na svetu. Popularnost matematičke olimpijade je privuklo pažnju javnosti i sponzore, tako da je 2011. Google dao milion dolara da pomogne mlade talente.

Test je sadržan od šest zadataka od koji svaki vredi sedam bodova, ukupno 42 bodova. Nijedan od zadataka ne podrazumeva računanje. Takmičenje traje dva vezana dana u kojima takmičari imaju po četiri-i-po sata da reše po tri zadatka. Zadaci su iz raznih oblasti srednjoškolske matematike: geometrija, teorija brojeva, algebra i kombinatorika. Oni ne podrazumevaju znanje vise matematike kao što je matematička analiza, nego često kratka i elementarna rešenja. I pored toga, zadaci su predstavljaju problem učenicima zbog načina na koji oni složeni. Ono što je poslednjih godina popularno jesu: algebarske nejednačine, kompleksni brojevi i geometrijski problemi sa konstrukcijom, iako geometrija kao oblast nije toliko popularna kao ranije.

Osim zemlje domaćina sve zemlje mogu da pošalju predlog za zadatke komitetu za izbor zadataka koji sastavlja država koja je domaćin. Profesori koji predvode učesnike stižu na takmičenje par dana pre učenika i od žirija olimpijade izvlace šest pitanja sa predložene liste. Žiri tada raspoređuje zadatke po težini od najlakšeg do najtežeg. Kako predvodnici takmičara znaju rešnja zadataka pre učesnika, oni su strogo praćeni i odvojeni. Ocenjivanje radova za svake od zemalja se odvija u kordinaciji lidera tima odrađene zemlje i koordinatora koga odrađuje zemlja domaćin. U slučaju da se jave nesuglasice koje nemogu biti rešene tada slučaj rešava posebno sastavljen žiri.

Izbor učenika koji će učestvovati na Olimpijadi znatno se razlikuje od države do države. U nekim zemljama, kao na primer u Kini, procedura izbora učenika se sastoji od nekoliko teških testova koji se po težini mogu meriti sa zadacima sa Olimpijade. Dalje se Kineski učesnici treniraju u posebno organizovanim kampovima. U drugim zemljama, kao na primer u USA kandidati prolaze kroz niz testova koji postepeno postaju teži i zahtevniji. Na kraju Američki učenici izlaze na Američku Matematičku Olimpijadu sa koje najbolji ulaze u tim koji će ih predstavljati na međunarodnom takmičenju. Kao i u Kini i u Americi postoji letnji kamp na kome se priprema tim. U bivšim Sovjetskim državam izbor učenika se vrši par godina pre takmičenja, da bi se sa tim učenicima posvetila posebna pažnja i da bi se sa njima radilo s namerom da se što bolje pripreme za ovaj događaj. Ovaj metod su neke zemlje vremenom promenile. Ukrajina, na primer, organizuje četiri takmičenja na nivou države na kojima se biraju predstavnici ne uzimajući u obzir prethodne uspehe učenika. Indijski učenici rade generalni test pod imenom AMTI, da bi najbolji učenici dalje išli na Regionalnu Matematičku Olimpijadu a zatim na Indijsku Nacionalnu Matematičku Olimpijadu sa koje se bira 36 učenika. Sa tim učenicima se radi u kampovima oranizovanih u tu svrhu da bi se tu izabralo 6 učenika koji će predstavljati Indiju na IMO.

Učesnici su rangirani u odnosu na njihov pojedinačni uspeh. Medalje su dodeljene najbolje plasiranim učesnicima svake zemlje tako da oko plovine učesnika dobiju neku od medalja. Za svaku od medalja postoje minimumi bodova koje učenik treba da osvoji da bi dobijo neku od medalja. Učenici koji nedobiju medalju a osvoje 7 bodova na nekom od zadataka dobijaju pohvalnicu. Takođe, specijalne nagrade dobijaju učenici koji na posebno elegantan način reše neki od zadataka. Dešava se da broj učesnika koji dobija medalju nije blizu polovine pa se pravilo da polovina učesnika dobija medalju narušava. Tako se na primer 2010. razmišljalo dal da se 226(43.71%) ili 266 (51.45%) od 517 učenika nagradi. Slično se 2012. razmišljalo dal da se 226(46.35%) ili 277(50.55%) od 548 učenika nagradi medaljom.

1.2 Kengur bez granica

Ranih 80-tih nastavnik matematike iz Sidneja Peter O'Holloran izmislio je novu vrstu igre u Australijskim školama u kojoj učenici biraju jedan od ponuđenih odgovora koji smatraju da je tačan. Ova igra zamisljena kao simulacija na kompjuteru što je omogućilo da hiljade učenika učestvuje u isto vreme. Ovakav pristup je doziveo uspeh u Australijskom Ministarstvu Obrazovanja i ubrzo zatim se usvaja kao poželjan vid ispitivanja. Inspirisani ovim, godine 1991. dva francuska profesora Andre Deledicq i Jean Pierre Boudine odlučuju da osnuju takmičenje u Francuskoj pod imenom "Kengur". U prvom izdanju 120000 učenika nižih razreda je uzelo učešće da bi se nedugo zatim takmičenju pridružilo 21 zemalja osnivajući internacionalno takmičenje za sve uzraste pod imenom "Kengur bez granica". Juna 1993. godine se prvi put u Parizu okupljaju organizatori takmičenja u Evropskim drzavama gde se predstavljaju iznenađujući podaci o posećenosti ovog takmičenja. Po iznetim informacijama broj učesnika tih godina vrtoglavo raste tako da je 1991. ucestvovalo 120000, 1992. 300000 a 1993. 500000 učenika. Nedugo zatim se ovom takmičenju priključuje jos sedam zemalja: Belorusija, Mađarska, Holandija, Poljska Rusija i Španija. Juna 1994 je Evropska komisija u Strasburu onsnovala komisiju za takmičenje "Kengur bez granica" sa sedištem u Parizu koja je počela sa radom 17. Januara 1995.

Kengur bez granica je internacionalno matematičko takmičenje u kojem učestvuju učenici vise od 40 zemalja raspoređeni u dvanaest grupa po uzrastu. Takmičenje se održava jedamput godišnje, treće utorka u Martu i zamišljeno je da testira logičko razmišljane učesnika. Svake godine broj učesnika ovog takmičenja stalno raste tako da je još 2009. učestvovalo 47 država sa preko 5000000 učenika.

Testiranje je sadržano od 30 zadataka tipa zaokruživanja tačnog odgovora, od kojih svaki vredi po 3,4 ili 5 poena. Test se radi 75 minuta i svaki učesnik na početku dobija 30 poena tako minimum koji može da osvoji na kraju zbog negativnih poena je 0. Maksimum koji učenik može da osvoji je 150 poena. Rezultate takmičenja i nagrađivanje najboljih vrši svaka škola poanosob. Takođe, postoje specijalne nagrade za škole čiji učenici pokažu najbolje relultate.

1.3 Pisa testovi

Međunarodni program procene obrazovnih postignuca učenika PISA(Programme for International Student Assessment) inicirao je OECD(Organisation for Economic Co-operation and Development) sa osnovnom svrhom da se sistemski prati kvalitet i pravednost obrazovanja u pojedinačnim zemljam učesnicama. Zemlje članice OECD prepoznale su da uspeh, konkuretnost i razvoj neke zemlje u globalnom svetu u većoj meri zavisi od kvaliteta i pravednosti obrazovanja. Pokazalo se da je neophodno uspostaviti sistem stalnog praćenja kvaliteta obrazovanja da bi se na osnovu tako dobijenih podataka razvijale politike koje će obezbediti stalno unapređivanje kvaliteta i pravednosti obrazovanja. U mnogim zemljama rezultati u studiji PISA predmet su ozbiljih javnih i stručnih debata i na osnovu njih se donose strateške odluke u oblasti obrazovne politike. Projekat PISA je, takođe, postao jedan od instrumenata kojim se na nivou EU prati ostvarivanje Lisabonskih ciljeva. Iako postoje odredjene kritike i otvorena pitanja, program PISA danas je jedan od najvećih međunarodnih programa u oblasti obrazovanja i jedan od najvažnijih smernica za obrazovnu politiku.
U okviru studije programa PISA sistematski se prati koji nivo funkcionalne pismenosti dostižu petnestogodišnjaci u oblasti matematike, prirodnih nauka i razumevanja pročitanog. Ova tri domena su izabrana kao najopštiji i najrelevantniji indikatori obrazovnih postignića učenika. Specifičnost studije programa PISA jeste da ona ne ispituje u kojoj meri učenici mogu da reprodukuju ono što su učili u školama, vec u kojoj meri su mladi osposobljeni da razumeju i koriste date informacije prilikom rešavanja relevantnih problema iz svakodnevnog života. Na taj način, studija programa PISA teži da utvrdi u kojoj meri se mladi pripremaju za život u savremenom društvu, a ne koliko su savladali gradivo koje su učili u školi. Pored toga, cilj studije programa PISA jeste da utvrdi u kojem obimu različiti kontekstualni faktori(karakteristike obrazovnog sistema, karakteristike porodičnog okruženja, karakteristike škole i karakteristike učenika) utiču na obrazovna postignuća učenika. Na osnovu odluke Ministarstva prosvete i sporta, Srbija učestvuje u programu PISA od 2001. godine.

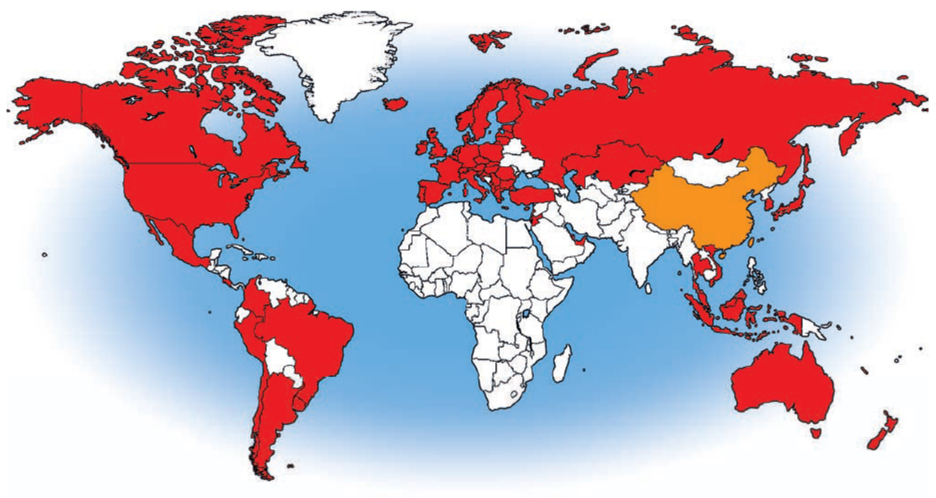


Figure 1: Zastupljenost Pisa test u dražavama sveta

Ideja koja leži u osnovi ove inicijative jeste da se javnosti, a posebno prosvetnoj javnosti približi koncepcija i način ispitivanja koji se primenjuju u ovoj istraživačkoj studiji. Opis nivoa postignuča i primeri zadataka koji su se primenjivali treba da posluže kao orijentir i model u pripremi za buduća testiranja, tako da situacija testiranja za učenike ne bude potpuna nepoznanica, ali i da u svakodnevnoj školskoj praksi olakša nastavničko ocenjivanje.

1.3.1 Skala postignuća

Postignuća učenika u sve tri oblasti koje su ispitivane papir-olovka testovima saopštavaju se na skali koja je konstruisana tako da je aritmetička sredina 500, a standardna devijacija 100. Dodatno, skala postignuća je izdeljena na nivoe (skala čitalačke pismenosti na 7, a matematičke i naučne pismenosti na 6 nivoa), a svaki nivo je opisan preko veština i znanja koja su učeniku potrebna da bi rešio zadatke tog nivoa težine. Jedan nivo postignuća pokriva oko 70 poena na skali, što je relativno visok raspon, tako da učenici koji se nalaze na različitim nivoima pokazuju kvalitativno različite veštine i znanja. Sledećom slikom je ilustrovan princip konstrukcije nivoa postignuća, kao i odnos između težine zadatka i učeničkih postignuća.

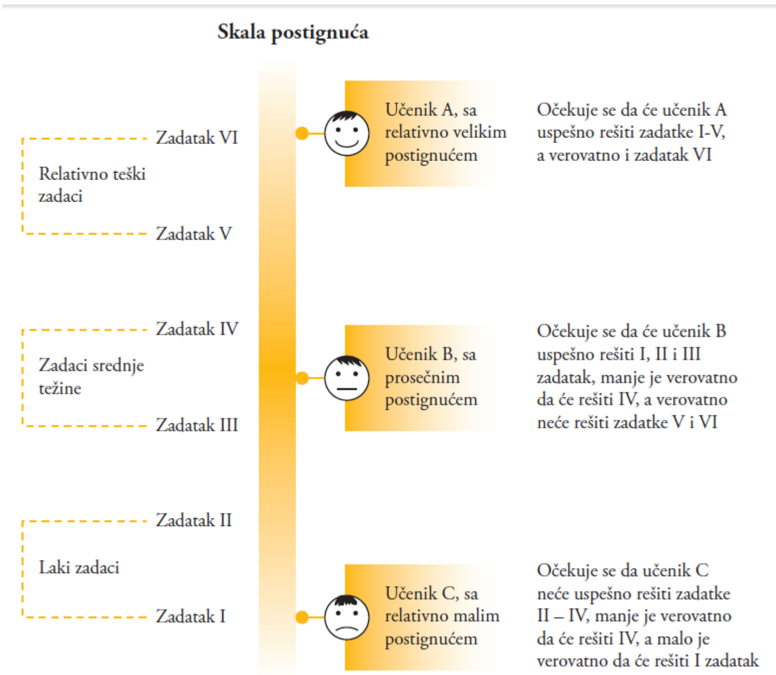


Figure 2: Skala postignuća

Čitanje i analiza podataka o distribuciji postignuća po nivoima ukazuju na važne aspekte kvaliteta obrazovanja i veoma su dragoceni u formulisanju obrazovnih politika. Prvo, važna informacija je koliko učenika ima postignuća koja se na nivou proseka (III nivo) ili viša od toga, jer to ukazuje na sposobnost obrazovnog sistema da generiše znanja koja ne ostaju na nivou reprodukcije i koja imaju višu transfernu vrednost, što je značajno sa stanovišta akademskih aspiracija i nastavka školovanja. Ako uporedimo naša postignuća s prosekom na nivou OECD zemalja, vidimo da mi u ovim kategorijama imamo značajno manji procenat učenika, tek oko jedne trećine učenika iz Srbije ostvaruje postignuća na trećem nivou ili na nivoima višim od trećeg (matematička pismenost: 34,6%, čitalačka pismenost: 36%, naučna pismenost: 32,6%). Drugo, posebno osetljivu grupu čine učenici čija su postignuća ispod drugog nivoa. Niska postignuća u pogledu čitalačke pismenosti koja, po pravilu, idu u kombinaciji sa niskim postignućima i u ostalim oblastima, čine realnim postojanje rizika u pogledu uspešnosti u nastavku školovanja i, posledično, izboru profesije. Rezultati longitudinalnih istraživanja koja se realizuju npr. u Kanadi, Švajcarskoj i Australiji pokazuju da ovako niska postignuća na skali čitalačke pismenosti dramatično umanjuju šanse za nastavak školovanja tako da dve trećine učenika iz ove grupe ne nastavlja školovanje, rano ulaze na trÅ¿žište rada, imaju probleme pri zapošljavanju i češće dobijaju loše plaćene poslove. Takođe, Lisabonska agenda kojom su definisani zajednički ciljevi zemalja članica EU čija se realizacija planira do 2020. godine ukazuju da ova grupa učenika zaslužuje posebnužnju. Naime, ciljevima koji su predloženi za obrazovanje predviđa se da u kategoriji učenika za koje se procenjuje da nisu u dovoljnoj meri funkcionalno pismeni (oni koji su na PISA testovima ispod drugog nivoa) bude najviše 15% učenika.

Kada je matematička pismenost u pitanju, u ovom trenutku u Srbiji u ovoj kategoriji se nalazi 38,9% učenika, pa njihov napredak u mastematičkim veštinama predstavlja ne samo izazov, već i jasan domaći zadatak za obrazovni sistem. U prethodnom ciklusu, u ovoj kategoriji se nalazilo neznatno više učenika (40,6%), što nam pokazuje da, iako napredak postoji, on nije dovoljno intenzivan. Drugim rečima, ukoliko bismo napredovali ovim tempom, mi ne bismo uspeli da u narednih 7 godina redukujemo procenat učenika u ovoj kategoriji na očekivanih 15%, ne bismo bili ni blizu tog cilja. Ako pogledamo druga dva domena postignuća, situacija je nešto bolja jer je nešto manji procenat učenika koji ne dostižu nivo funkcionalne pismenosti u odnosu na matematiku: njih 33,2% u oblasti čitalačke pismenosti i 35% u oblasti naučne pismenosti imaju postignuća ispod drugog nivoa. U odnos na prethodni ciklus, to je za 0,5% više u oblasti čitalačke pismenosti, a za 0,6 više u oblasti naučne pismenosti. Iako je reč o maloj razlici, ona jasno ukazuje da u proteklom trogodišnjem periodu nije bilo mera na nivou sistema u celini koje su bile usmerene ka podizanju nivoa postignuća onih učenika koji su, u obrazovnom pogledu, u najnepovoljnijoj situaciji. Treće važno pitanje je na kom je nivou najveća koncentracija učeničkih postignuća, jer to govori o samom obrazovnom sistemu, o tome na kom nivou se pretežno odvija nastavni proces. Ako je reč o koncentraciji postignuća na prvom i drugom nivou, što je slučaj sa Srbijom, možemo da kažemo da je sistem orijentisan ka uspostavljanju i vrednovanju znanja na nivou reprodukcije. Drugim rečima, lestvica postignuća koju postavlja sistem, preko zahteva i kriterijuma ocenjivanja, nalazi se na nivoima reproduktivnih znanja. Ukoliko nisu podstaknuti na viša postignuća, ukoliko sistem od njih ne očekuje da pokažu više, teško je očekivati da će veliki procenat učenika samoinicijativno razviti visoke akademske aspiracije, i otuda imamo ovako nepovoljnu distribuciju postignuća na višim nivoima. Učenici čija su postignuća na najvišim nivoima (V i VI) takođe predstavljaju osetljivu kategoriju. To su učenici sa visokim akademskim potencijalima kojima je potrebna posebna pažnja u podsticanju i negovanju obrazovnih postignuća. Ne treba ni posebno naglašavati koliko je za razvoj društva bitno da se omasove postignuća na ovom nivou. Kao i u ranijim ciklusima, za Srbiju je karakteristično da su postignuća na ovim nivoima prava retkost (matematička pismenost: 4,6%, čitalačka pismenost: 2,2%, naučna pismenost: 1,7%).

1.3.2 Matematička pismenost

Svedoci smo da se u par poslednjih decenija priroda školskog učenja značajno menja. To nije iznenađenje, već prirodna i očekivana posledica promena u društvu(globalizacija, socijalne migracije, promenjena priroda profesija) i razvoja tehnologija. Osnovni smisao obrazovanja više nije opismenjavanje u klasičnom značenju te reči, kao što više ni osnovno sredstvo intelektualnog rada nije olovka, već kompjuter. Takođe, smisao obrazovanja više nije u obezbeđivanju informacija, jer su one lako dostupne. Fokus je pomeren na efikasne načine rada sa informacijama âĂŞ kako ih selektovati i organizovati, kako proceniti njihovu relevantnost i pouzdanost, kako ih povezati i primeniti na funkcionalan i konstruktivan načinâĂę Drugim rečima, pod pismenošću se podrazumeva ovladanost strategijama rada s informacijama reprezentovanim u različitim formama i u različitim izvorima. Škola mora da se prilagođava promenjenim zahtevima, i pred njom je velika odgovornost da podrži pozitivan odnos učenika prema učenju, da im pomogne da razviju efikasne strategije učenja i rada s podacima, da ojača njihova interesovanja i pozitivne stavove prema sadržajima školskih predmeta i da kreira atmosferu u kojoj je sve to moguće. Jedan od ciljeva PISA projekta je da informiše obrazovni sistem u kojoj meri je, u ovom trenutku, usklađen s ovim i ovakvim zahtevima. Jedna od ispitivanih, i u ovom ciklusu centralna, oblast postignuća je matematička pismenost. Gotovo da i ne treba objašnjavati zašto matematika. Ona je, u punom smislu reči internacionalni predmet. Ovu disciplinu odlikuju jedinstveni koreni, vezani za Euklidovu teoriju brojeva i geometriju, kao i jedinstveni simbolički jezik. Razvoj primenjene matematike, tehnologije i nauke, koje od matematike u dobroj meri pozajmljuju simbolički jezik i kognitivni alat, u novije vreme dao je novu dimenziju i naglasio značaj matematike u obrazovanju pojedinca. Jednom rečju, izgleda da je lako postići internacionalnu saglasnost oko relevantnosti matematike kao nezaobilazne oblasti postignuća u jednom međunarodnom evaluativnom istraživanju. Odnos matematike, školske matematike i matematičke pismenosti Iako izgleda da je matematika, kao disciplina, jasno strukturirana i da počiva na univerzalnim saznanjima, ipak postoje razlike u određenju matematike kao discipline koja se kreću u rasponu od vrlo restriktivnih do multidisciplinarnih. Restriktivno određenje vidi matematiku kao čisto

teoretsku naučnu disciplinu koja počiva na veoma opštim, apstraktnim pojmovima široke primenljivosti, bez obzira da li je shvaćena kao jedinstvena i strukturalno jasno definisana disciplina ili kao jedinjenje više različitih subdisciplina, kao što su algebra, geometrija, analiza, verovatnoća, itd. Ovakvo određenje matematike kao discipline dominiralo je nacionalnim kurikulumima sve do pred kraj XX veka i u velikoj meri određivalo prirodu matematike kao školskog predmeta (izbor sadržaja, način rada, ciljevi nastave, procena postignuća). Tradicionalna nastava matematike, oslonjena na ovakvo određenje, počiva na selekcionisanom setu diskretnih tematskih celina (sadržaja) među kojima je odnos najčešće linearan ili, ako je hijerarhijski, hijerarhija nije organizovana po tipu intelektualne aktivnosti već po kompleksnosti sadržaja. Matematička pismenost iz OECD-ovih definicija, pa i iz TIMSSove definicije je ne samo mnogo šira, već i kvalitativno različita u odnosu na restriktivno (možemo li ga već sada nazvati tradicionalno?) određenje matematike bilo kao naučne discipline, bilo kao školskog predmeta. Ukratko, moglo bi se reći da je, u odnosu na ovakvo određenje matematike, matematička pismenost manje formalna i više intuitivna, manje apstraktna i više kontekstualna, manje simbolička i više konkretna.
Razumevanje matematike centralno je za spremnost mladih za život u modernom društvu. Shvatanje i rešavanje velikog broja problema i situacija s kojima se ljudi susreću u svakodnevnom životu i u profesionalnom kontekstu zahteva određen nivo poznavanja matematike, matematičkog rezonovanja i korišćsenje matematičkih âĂđalataâĂİ. Zato je važno imati predstavu u kojoj meri škola priprema mlade ljude za primenu matematike u razumevanju i rešavanju značajnih problema. Rezultati procene na uzrastu od 15 godina predstavljaju rani indikator toga kako mladi mogu odgovarati na različite situacije s kojima će se susresti u kasnijem životu, a koje uključuju matematiku. Smisleno je postaviti pitanje Šta je važno da graÄŚani znaju i šta treba da budu sposobni da urade u situacijama koje uključuju matematiku? Konkretno, koja matematička kompetencija je potrebna petnaestogodišnjaku koji izlazi iz škole ili se sprema za dalju akademsku karijeru? Kao i u opštem određenju pismenosti, i ovde važi pravilo da matematička pismenost nije sinonim za minimalni nivo znanja i veština. Naprotiv, ovaj pojam se odnosi na kapacitet osoba da matematički rezonuju i koriste matematičke koncepte, procedure, činjenice i alate kako bi opisali, objasnili i predvideli fenomene. U opisu konstrukta matematičke pismenosti kojim se koristi PISA 2012 naročito je naglašena potrebu za razvojem učeničkih kapaciteta za korišćenje matematike u kontekstu, a za to su važna bogata iskustva s časova matematike. Takođe, matematička pismenost nije karakteristika koju neko ima ili nema, već je dimenzija na kojoj se pojedinci mogu rasporediti. Pri tome je važno imati na umu da se matematička pismenost stiče, podstiče i razvija adekvatnim radom, pre svega u školi, pa je, posledično, napredak na ovoj dimenziji moguć.

Po definiciji OECD-a matematička pismenost je kapacitet pojedinca da indentifikuje i razume ulogu koju matematika igra u savremenom svetu, da izvede dobro zasnovane matematičke procene i da se angažuje u matematici tako da zadovolji svoje sadašnje i buduće potrebe kao konstruktivnog, zainteresovanog i refleksivnog građanina. Ovo je osnovna definicija matematičke pismenosti, ona je dalje opisana preko tri dimenzije: matematički sadržaj ili struktura znanja na koje se oslanjaju pojedini problemi i zadaci; procesi koje je potrebno da učenik aktivira kako bi povezao problemsku situaciju sa matematičkim sadržajem; i situacije ili konteksti u koje su smešteni problemi.

1. Sadrzaj
   Matematički sadržaji smešteni su u četiri široke tematske oblasti koje pokrivaju veliki raspon matematičkih fenomena i koncepata koje se pojavljuju u realnim situacijama, i to u onim situacijama sa kojima se učenici vrlo verovatno sreću izvan škole:

   - Prostor i oblik. Sadržaji ajtema iz ove oblasti odnose se na specijalne geometrijske pojmove i odnose, dakle, bliski su onim što u školi nazivamo geometrijom. Zahteva se uočavanje sličnosti i razlika između figura i elemenata figura, prepoznavanje elemenata figura, prepoznavanje figura u raznim oblicima reprezentacija i različitim dimenzijama, razumevanje svojstva objekata i njihovih relativnih pozicija.
   - Transformacije i relacije. Ova oblast je veoma bliska onome što se u okviru klasičnih školskih programa radi u okviru algebre. Ona uključuje matematičke manifestacije promena, kao i funkcijonalne odnose i odnose zavisnosti među promenljivama. Relacije su predstavljene različitim reprezentavijama kao što su simboličke, računske, grafičke tabelarne i geometrijske.

Prevođenje iz jednog u drugi oblik reprezentacije često je ključni zahtev u ajtemima koji pripadaju ovoj tematskoj celini.

- Brojevi i mere. Traži se razumevanje numeričkih fenomena, kvantitativnih odnosa i obrazaca. U ajtemima se insistira na razumevanju relativne veličine i korišćenje brojeva da bi se predstavile izmerene i merljive karakteristike realnih objekata. Važan aspekt razumevanja brojeva je numeričko rezonovanje koje uključuje osećaj za brojeve, razumevanje odnosa broja i onoga što je njim predstavljeno, razumevanje značenja računskih operacija, izvođenje računskih operacija napamet i procenjivanje. U nastavnom programu ovi ajtemi bi se našli u aritmetici.
- Ova oblast pokriva verovatnoću kao i statističke fenomene i odnose.

Ajtemi koji pripadaju svakoj od ovih oblasti formiraju posebnu supskalu, a postignuće učenika se iskazuje na svakoj od četiri supskale i na skali matematičke pismenosti u celini.

Procena realizacije nastavnih programa nije u fokusu ovog istraživanja, tačnije, pokrivenost nastavnih programa ajtemima nije bila kriterijum pri kreiranju i izboru ajtema.

Табела 1. Дистрибуција ајтема (у %) по областима које су дефинисане у PISA

PISA	Ајтеми
Простор и облик	27,1%
Трансформације и релације	25,9%
Бројеви и мере	23,5%
Неизвесност	23,5%

Табела 2. Дистрибуција ајтема (у %) по садржајима из наставног програма

Наставни програм	Ајтеми
Алгебра	3,5%
Дискретна математика	5,9%
Функције	10,6%
Бројеви	21,2%
Вероватноћа	5,9%
Статистика	21,2%

2. Procesi

Raznovrsne su kompetencije koje su prepoznate kao relevantne za rešavanje matematičkih zadataka, npr. povezivanje i zaključivanje, argumentovanje, saopštavanje, modelovanje, postavljanje i rešavanje problema, reprezentovanje podataka, korišćenje simboličkog, tehničkog i formalnog jezika, kao i korišćenje operacija. U velikom broju slučajeva ove kompetencije su aktivne istovremeno, a kako u njihovom definisanju postoje izvesna preklapanja, kognitivne aktivnosti koje se zahtevaju u matematičkim ajtemima u okviru PISA projekta, razvrstane su u tri grupe kompetencija:

- Reprodukcija. Ovom grupom obuhvaceni su jednostavni zahtevi smešteni u poznat kontekst i to tako da su sve relevantne informacije eksplicirane. Od učenika se traži poznavanje činjenica i osnovnih načina reprezentacije podataka, prepoznavanje jednakosti i opštih svojstva objekata, primena osnovnih algoritama, formula i procedura, manipulacija izrazima koji sadrže simbole i formule u poznatoj standardnoj formi.
- Integracija. Rešavanje problema koji nisu rutinski, ali su smešteni u relativno poznat kontekst. Zahteva se korišćenje podataka iz različitih izvora, selektovanje i integracija podataka koji su selektovani na različite načine, povezivanje podataka sa situacijama iz realnog života i primena jednostavnih strategija rešavanja problema.
- Refleksivnost. Ove kompetencije se pojavljuju u zadacima u kojima se od učenika traži neki uvid i refleksivnost, kao i kreativnost u indentifikovanju relevantnih matematičkih koncepta ili u povezivanju relevantnih znanja da bi se došlo do rešenja. Takodje se traži razvijanje složenih interpretacija i generalizacija rezultata.

Dakle, reč je o procesima koji su organizovani razvojnim redom, po rastućoj složenosti. Oni čine kontinuum od reprodulcije elemntarnih činjenica i jednostavnih matematičkih operacija preko povezivanje različitih i različito reprezentovanih sadržaja do korišćenja matematičkog rezonovanja i generalizacije. Kompetencije koje pripadaju najvišoj grupi, čine samo srce matematike i matematičke pismenosti.

3. Situacije(konteksti)
   Matematički ajtemi u PISA projektu smešteni su u širok opseg različitih kontektesta, koji su klasifikovani u četiri tipa situacija:

   - Lične situacije- ajtemi iz ove kategorije pozivaju se na svakodnevne aktivnosti koje su tipične za učenike ovog uzrasta.
   - Obrazovne ili profesionalne situacije su one sa kojima se učenik sreće u školi ili će se sretati na radnom mestu.
   - Javne situacije u kojima se od učenika trazi da analiziraju neke aspekte lokalnog ili šireg okruženja.
   - Situacije iz nauke su, po pravilu, apstraktnije i mogu da podrazumevaju razumevanje nekog tehnološkog procesa teoriske situacije ili eksplicitno matematičkog problema. Među ajtemima iz ove kategorije nalaze se i relativno apstraktne matematičke situacije sa kojima se učenici često sreću u učionici, a koje nemaju prezentaciju da se smeste u širi kontekst, već pripadaju intramatematičkom kontekstu.

2 Statistike i rezultati

2.1 Matematička olimpijada

Socijalistička Federativna Republika Jugoslavija se prvi put pojavila na matematičkoj olimpijadi 1963. godine kada se našla na četvrtom mestu od 8 zemalja koju su te godine učestvovale. Kako se vremenom broj zemalja učesnica povećavao tako se i plasman naše zemlje menjao. Od rezultata koje je vredno pomenuti jesu kada je 1970. godine Jugoslavija zauzela 4. mesto, 1974. godine kada je zauzela 5. mesto i 1981. kada je u konkurenciji od 28 zemalja zauzela 8. mesto. Pred pauzu od dve godine(1993.,1994.) naša zemlja se pojavila 1992. godine kada je zauzela zavidno 11. mesto u veoma jakoj konkurenciji. Poslednji put se naša zemlja takmičila pod imenom Jugoslavija 2002. godine, da bi 2003., 2004., i 2005. godinu nastupala pod imenom Srbija i Crna Gora. Republika Srbija se prvi put takmiči pod tim imenom 2006. i od tada je od boljih rezultata imala 2012. godine kada je zauzela 15. mesto.

Sledeća tabela predstavlja broj osvojenih poena naših učenika u savkom od 6 zadataka poslednjih godina:

Godina	**Broj učesnika**									**Ukupno**	**Zauzeto**	**Vođa**
	Svi	**Muškarci**	**Žene**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**Bodova**	**Mesto**	**Grupe**
2014.	6	5	1	39	33	7	42	8	0	129	23	Dušan Djukić
2013.	6	5	1	28	7	9	42	26	0	112	34	Dušan Djukić
2012.	6	6	0	42	21	7	26	26	4	126	15	Djorđe Krtinić
2011.	6	6	0	38	10	10	32	23	3	116	25	Djorđe Krtinić
2010.	6	6	0	39	31	7	42	9	7	135	22	Djorđe Krtinić
2009.	6	6	0	41	40	11	33	28	0	153	22	Djorđe Krtinić
2008.	6	5	1	37	22	15	41	22	2	139	20	Djorđe Krtinić
2007.	6	5	1	22	23	9	34	18	1	107	23	Djorđe Krtinić
2006.	6	4	2	42	6	2	36	2	0	88	38	Djorđe Dugošija

Godine 2012. je naš učenik Teodor von Burg osvoivši zlatnu medalju postao učesnik sa najboljim rezultatima od kada se matematička olimpijada održava. Prvu međunarodnu medalju osvojio je kao učenik 5. razreda osnovne škole na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi i tako postao najmlađi srpski učesnik i osvajač medalje na nekom međunarodnom matematičkom takmičenju. Drugi rekord vezan za ovu olimpijadu (JBMO) postavio je osvojivši na njoj četiri medalje. Kao učenik osnovne škole 2007. i 2008. godine takmičio se iz matematike sa srednjoškolcima i uÅąao u nacionalni tim koji Srbiju predstavlja na Balkanskoj matematičkoj olimpijadi i Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Ovo je prvi i jedinstveni slučaj u Srbiji da se učenik osnovne škole dve godine zaredom takmiči na naučnim olimpijadama za uvenike starosti do 20 godina. Od 1987. godine, od kada ekipa Jugoslavije, i kasnije Srbije, učestvuje na Balkanskoj matematičkoj olimpijadi, prvi put je 2009. godine jedan njen član postigao apsolutno prvo mesto u ukupnom plasmanu. Bio je to Teodor fon Burg sa osvojenih 35 od 40 poena na âĂđBalkanijadiâĂIJ u Kragujevcu. Isti uspeh, apsolutno prvo mesto u ukupnom plasmanu Balkanijade, ponovio je i 2010. u Moldaviji kada je osvojio 38 od 40 poena. Jedini je takmičar iz Srbije i bivše Jugoslavije koji je na ovoj olimpijadi učestvovao šest puta i svaki put osvojio medalju.

2.2 Kengur bez granica

Posle 2005. godine kada se Kengur bez granica prvi put pojavio u Srbiji, ovo takmičenje postaje sve popularnije. Iz sledeceg grafikona možemo videti da se najveći skok dogodijo 2007. godine kada je broj učesnika sa oko 6000 učenika 2006. godine porasto na skoro 16 000 učenika. Najveći broj učenika testirao se 2010. godine kada je u Kenguru bez granica učestvovalo vise od 20000 učenika.

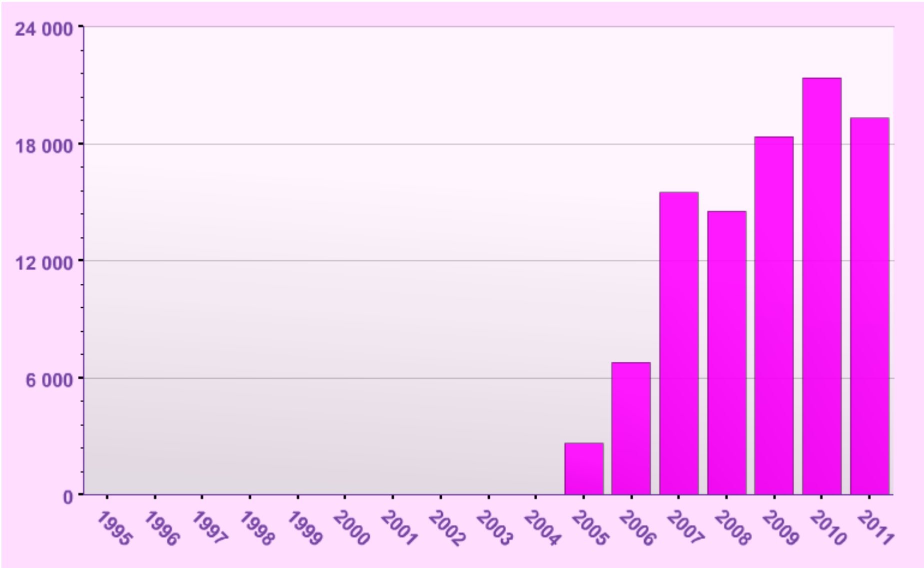


Figure 3: Grafik broja učenika koji su učestvovali u Srbiji

Statistike pokazuju da od svog početka popularnost ovog takmičenja neprestalno raste iz godine u godinu. Iz sledećeg grafika možemo videti taj uspon koji 2011. godine beleži rekordnih 6000000 učesnika koji u isto vreme rade iste zadatke kako je Kengur bez granica i zamišljen.

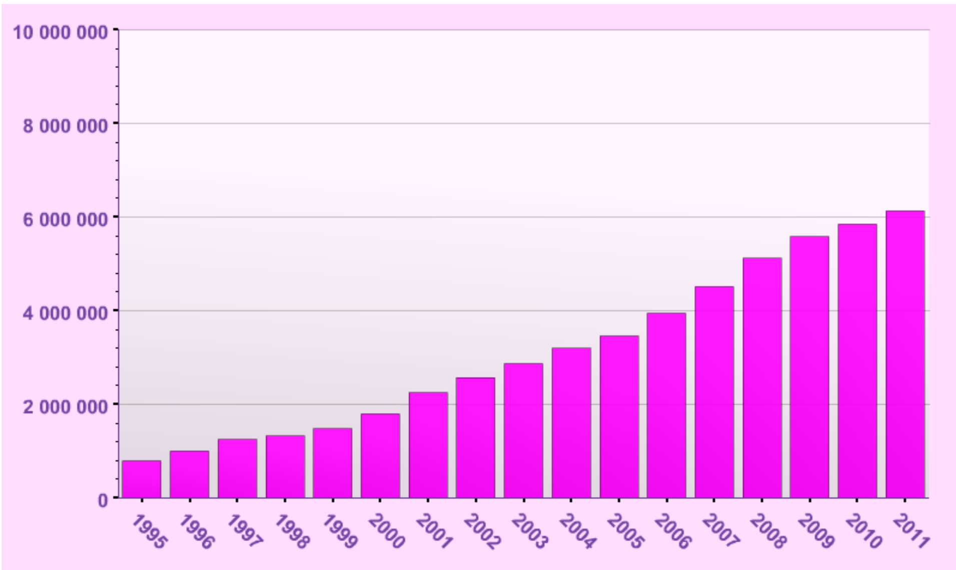


Figure 4: Grafik broja učenika u svetu

2.3 Pisa testovi

U svakodnevnom životu, na radnom mestu, kada se obrazujemo ili usavršavamo, matematička pismenost predstavlja jednu od ključnih kompetencija za uspešno suočavanje sa različitim izazovima. Matematička pismenost se odnosi na korišćenje matematičkih znanja, formula i procedura, kako bi se opisao i objasnio neki fenomen ili da bi se predvideli budući događaji. Osobe koje su matematički pismene mogu da prepoznaju kako se neki fenomen ili događaj može prevesti u matematičku formu koja bi omogućila da se on bolje razume i da se donesu kvalitetnije odluke.

Do koje mere je matematička pismenost razvijena kod mladih petnaestogodišnjaka iz različitih zemalja? Sledeća slika prikazuje prosečna postignuća učenika iz različitih zemalja na PISA skali matematičke pismenosti, kao i razlike koje postoje među učenicima unutar jedne zemlje u pogledu razvijenosti ove kompetencije. Razlike koje postoje među učenicima su opisane preko postignuća ispod kojeg se nalazi 10%, odnosno 25% učenika sa najnižim rezultatima, kao i postignuća iznad kojeg se nalazi 25%, odnosno 10% učenika sa najvišim rezultatima.
Najviši nivo matematičke pismenosti su ubedljivo pokazali mladi petanestogodišnjaci iz Šangaja (Kina) čije je prosečno postignuće (600 poena na PISA skali) više za oko 100 poena od OECD proseka, što predstavlja veliku razliku. Značajno iza mladih iz Šangaja nalaze se mladi iz Singapura (562) i Hong Konga (555) koji imaju za oko 40- 50 poena niže prosečno postignuće od učenika iz Šangaja. I mladi iz Koreje, Kineskog Tajpeja, Finske, Lihtenštajna, Švajcarske, Japana, Kanade, Holandije, Makao (Kina), Novog Zelanda, Belgije, Australije, Nemačke, Estonije, Islanda, Danske i Slovenije imaju, takođe, prosečna postignuća koja su viša od OECD proseka.

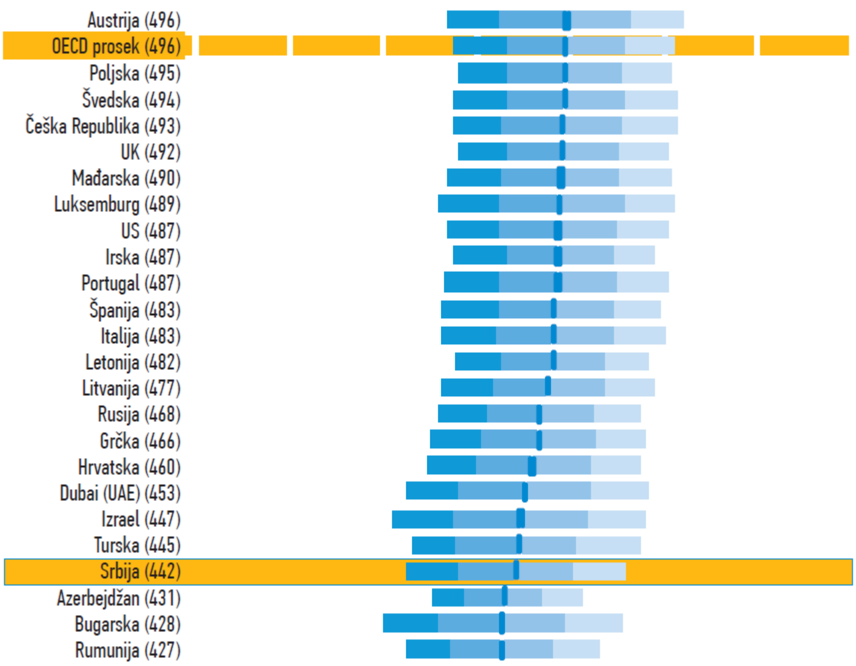


Figure 5: Postigniće učenika u Srbiji u odnosu na druge zemlje

Prosečni nivo matematičke pismenosti mladih petanestogodišnjaka iz Srbije na PISA 2009 skali iznosi 442 poena. Ipak, mladi u Srbiji se značajno razlikuju po svojoj matematičkoj pismenosti âĂŞ četvrtina učenika u Srbiji, koja ima najniži nivo matematičke pismenosti, nalazi se ispod 380 poena, što spada u veoma niska postignuća, dok se četvrtina najuspešnijih učenika nalazi iznad 504 poena. Razlike koje postoje među učenicima u Srbiji u pogledu razvijenosti matematičke pismenosti su slične onima koje postoje na nivou OECD zemalja. Od evropskih zemalja razlike među učenicima su najmanje u Letoniji, Estoniji i Finskoj, dok su najveće u Belgiji, Francuskoj, Nemačkoj, Švajcarskoj i Bugarskoj.

Sa prosečnim postignućem od 442 poena, učenici iz Srbije su ostvarili izvestan napredak od nekih 7 poena u odnosu na dva prethodna testiranja (tabela 8). U prvom testiranju u kojem su učestvovali, 2003. godine, učenici iz Srbije su u domenu matematičke pismenosti u proseku ostvarili 437 poena. U narednom ciklusu, 2006. godine, prosečni nivo matematičke pismenosti je bio sličan âĂŞ 435 poena. Prosečno postignuće učenika iz Srbije 2009. godine je dostiglo 442 poena. U Bugarskoj i Rumuniji matematička pismenost je za 15, odnosno 12 poena viÅąa 2009. godine, a u Crnoj Gori za 4 poena, dok je u Sloveniji i Hrvatskoj prosečno postignuće neÅąto niÅ¿e (za 3, odnosno 7 poena).

U odnosu na OECD prosek, prosečan nivo matematičke pismenosti je niži za 54 poena. Imajući u vidu da jedna godina Åąkolovanja u OECD zemljama doprinosi porastu od oko 40 poena na PISA skali, može se reći da bi učenicima u Srbiji trebalo obezbediti oko 1.5 godinu dodatnog Åąkolovanja i to u OECD zemljama da bi dostigli svoje vršnjake iz OECD zemalja.

U poređenju sa učenicima iz drugih zemalja u regionu, prosečno postignuće učenika iz Srbije u domenu matematičke pismenosti je više u odnosu na prosečno postignuće učenika iz Bugarske (428), Rumunije (427), Crne Gore (403) i Albanije (377), dok je niže u odnosu na učenike iz Hrvatske (460) i Slovenije (501). U odnosu na učenike iz Hrvatske učenici u Srbiji imaju za oko 20 poena niže postignuće, što je jednako efektu od pola godine školovanja, dok ta razlika u odnosu na Sloveniju iznosi oko 60 poena, što je jednako školovanju u OECD zemljama u trajanju od jedne i po godine.

	2003	2006	2009	Razlika 2009. i 2006.
Srbija	437	435	442	+7
Hrvatska	--	467	460	-7
Slovenija	--	504	501	-3
Crna Gora	--	399	403	+4
Bugarska	--	413	428	+15
Rumunija	--	415	427	+12
Albanija	--	--	377	--

2.3.1 Različiti nivoi matematičke pismenosti

U narednoj tabeli prikazani su podaci o procentu učenika koji se nalazi ispod nivoa 2 i na svakom narednom nivou postignuća u domenu matematičke pismenosti. U zemljama u kojima su učenici imali najviša prosečna postignuća, kao što su Šangaj (Kina), Finska, Koreja, Hong Kong (Kina) i Lihtenštajn, manje od 10% učenika se nalazi ispod nivoa 2 na skali matematičke pismenosti. S druge strane, u zemljama sa najnižim prosečnim postignućima (Kolumbija, Peru, Tunis, Katar, Indonezija, Panama i Kirgistan) čak preko 70% učenika se može okarakterisati kao funkcionalno nepismeni.

U jednom broju evropskih zemalja izmeĂŚu 10 i 20% učenika se nalazi ispod nivoa 2 (Estonija, Holandija, Švajcarska, Island, Danska, Norveška, Nemačka i Belgija). Ove zemlje su, dakle, već sad blizu ostvarenja cilja koji je EU postavila za 2020. godinu: manje od 15% učenika koji nisu funkcionalno pismeni u domenu matematičke pismenosti. Većina drugih zemalja iz Evrope ima između 20 i 30% učenika koji nisu dostigli minimalni nivo funkcionalne matematičke pismenosti (Velika Britanija, Slovenija, Poljska, Irska, Slovačka Republika, Švedska, Mađarska, Češka Republika, Francuska, Letonija, Austrija, Portugal, Španija, Luksemburg, Italija, Litvanija i Rusija).

U Srbiji oko 40% učenika nije dostiglo nivo 2, što znači da spadaju u one koji nisu funkcionalno pismeni u domenu matematičke pismenosti. U odnosu na 2006. godinu, procenat učenika koji se nalaze ispod nivoa 2 se neznatno smanjio za 2-3%. Ovi učenici mogu da koriste matematičko znanje i veštine samo u

	Ispod nivoa 2 %	Nivo 2 %	Nivo 3 %	Nivo 4 %	Nivo 5 %	Nivo 6 %
Šangaj-Kina	4.9	8.7	15.2	20.8	23.8	26.6
Finska	7.8	15.6	27.1	27.8	16.7	4.9
Koreja	8.1	15.6	24.4	26.3	17.7	7.8
Hong Kong-Kina	8.8	13.2	21.9	25.4	19.9	10.8
Lihtenštajn	9.5	15.0	26.2	31.2	13.0	5.0
Singapur	9.8	13.1	18.7	22.8	20.0	15.6
Makao-Kina	11.0	19.6	27.8	24.5	12.8	4.3
Kanada	11.5	18.8	26.5	25.0	13.9	4.4
Japan	12.5	17.4	25.7	23.5	14.7	6.2
Estonija	12.6	22.7	29.9	22.7	9.8	2.2
Kineski Tajpej	12.8	15.5	20.9	22.2	17.2	11.3
Holandija	13.4	19.0	23.9	23.9	15.4	4.4
Švajcarska	13.5	15.9	23.0	23.5	16.3	7.8
Novi Zeland	15.4	19.1	24.4	22.2	13.6	5.3
Australija	15.9	20.3	25.8	21.7	11.9	4.5
Island	17.0	21.3	27.3	20.9	10.5	3.1
Danska	17.1	23.0	27.4	21.0	9.1	2.5
Norveška	18.2	24.3	27.5	19.7	8.4	1.8
Nemačka	18.6	18.8	23.1	21.7	13.2	4.6

poznatom kontekstu u kojem su sve relevantne informacije eksplicitno date. Oni mogu da identifikuju relevantne informacije u takvom poznatom kontekstu i da primene rutinske procedure. Svaka situacija koja bi bila složenija od rešavanja baznih i relativno poznatih matematičkih zadataka za ove učenike bi predstavljala značajan problem. Sa takvim, veoma ograničenim kompetencijama u domenu matematičke pismenosti, ovi učenici će, ako se ništa ne promeni, imati značajne teškoće u budućem obrazovanju i u profesionalnoj karijeri koja podrazumeva iole složeniji nivo matematičke pismenosti.

S druge strane, kada se analizira procenat učenika koji su dostigli najviše nivoe matematičke pismenosti (nivoi 5 i 6) vidi se da se svaki drugi učenik u Šangaju (Kina) nalazi na ova dva nivoa. Pored toga, u Singapuru i Hong Kongu (Kina) nešto više od 30% učenika se nalazi na ovim najvišim nivoima matematičke pismenosti. Od evropskih zemalja, najuspešnije su Švajcarska, Finska, Belgija i Holandija u kojima je svaki četvrti, odnosno peti učenik dostigao dva najviša nivoa matematičke pismenosti. U proseku, evropske zemlje imaju oko 10-11% učenika na najvišim nivoima matematičke pismenosti. U Srbiji to je slučaj sa oko 3.5% učenika, što je tri puta manje od proseka za evropske zemlje. Drugim rečima, ako zamislimo školu sa 1000 učenika, u evropskim zemljama u njoj će biti izmeÄŚu 100 i 110 učenika na najvišim nivoima matematičke pismenosti, dok bi se u Srbiji taj broj bio oko 35 učenika.

	Ispod nivoa 2 %	Nivo 2 %	Nivo 3 %	Nivo 4 %	Nivo 5 %	Nivo 6 %
Belgija	19.1	17.5	21.8	21.3	14.6	5.8
UK	20.2	24.9	27.2	17.9	8.1	1.8
Slovenija	20.3	22.5	23.9	19.0	10.3	3.9
Poljska	20.5	24.0	26.1	19.0	8.2	2.2
Irska	20.8	24.5	28.6	19.4	5.8	0.9
Slovačka Republika	21.0	23.2	25.0	18.1	9.1	3.6
Švedska	21.1	23.4	25.2	19.0	8.9	2.5
Madjarska	22.3	23.2	26.0	18.4	8.1	2.0
Češka Republika	22.3	24.2	24.4	17.4	8.5	3.2
Francuska	22.5	19.9	23.8	20.1	10.4	3.3
Letonija	22.6	27.2	28.2	16.4	5.1	0.6
Austrija	23.2	21.2	23.0	19.6	9.9	3.0
US	23.4	24.4	25.2	17.1	8.0	1.9
Portugal	23.7	23.9	25.0	17.7	7.7	1.9
Španija	23.7	23.9	26.6	17.7	6.7	1.3
Luksemburg	23.9	22.7	23.1	19.0	9.0	2.3
Italija	24.9	24.2	24.6	17.3	7.4	1.6
Litvanija	26.3	26.1	25.3	15.4	5.7	1.3
Rusija	28.6	28.5	25.0	12.7	4.3	1.0
Grčka	30.3	26.4	24.0	13.6	4.9	0.8
Hrvatska	33.2	26.7	22.7	12.5	4.3	0.6
Dubai (UAE)	38.8	23.0	19.6	12.1	5.3	1.2
Izrael	39.5	22.5	20.1	12.0	4.7	1.2
Srbija	40.6	26.5	19.9	9.5	2.9	0.6

3 Primeri

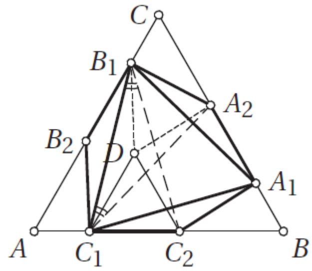
U sledećem poglavlju su dati primeri zadataka sa ova tri takmičenja. Budući da su testovi često trivijalni, zadaci Pisa testova i testa Kengur bez granica nisu rešavani dok se za zadatke sa Matematičke Olimpijade dalo rešenje.

3.1 Matematička olimpijada

Primer 1: *Zadatak sa Internacionalne matematičke olimpijade održane u Meksiku 14. Jula 2005.*

Na stranicama jednakostraničnog trougla ABC izabrano je šest tačaka: A_1, A_2 na BC; B_1, B_2 na CA i C_1, C_2 na AB. Ove tačke su temena konveksnog šestougla $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ čije stranice imaju jednake dužine. Dokazati da se prave A_1B_2, B_1C_2 i C_1A_2 seku u jednoj tački. *(Rumunija)*

Rešenje:
Posmatrajmo tačku D unutar trougla ABC takvu da je trougao C_1C_2D jednakostraničan.



Tada je DC_1 jednako i paralelno sa B_1B_2, pa je $B_1B_2C_1D$ romb i odatle $DB_1 = B_1B_2 = A_2B_1$ jednakostraničan. Dakle, tačke A_2, B_1, C_1, C_2 leže na krugu sa centrom u D, pa imamo:

$$\sphericalangle B_1C_1A_2 = \sphericalangle C_1B_1C_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle C_1DC_2 = \frac{\pi}{6}$$

Slično je:

$$\sphericalangle C_1A_1B_2 = \sphericalangle A_1C_1A_2 = \sphericalangle A_1B_1C_2 = \sphericalangle B_1A_1B_2 = \frac{\pi}{6}$$

. Zaključujemo da je trougao $A_1B_1C_1$ jednakostraničan i da se prave A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 seku u njegovom centru.

Primer 2:
Zadatak sa Internacionalne matematičke olimpijade održane u Sloveniji 13. Jula 2006.

Naći sve prirodne parove (x, y) celih brojeva takve da je:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

(SAD)

Rešenje:
Imamo da je:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Broj y je neparan i možemo zaključiti da važi $2^x|(y+1)(y-1)$. Kako nisu oba činioca deljiva sa 4, odatle sledi da je jedan od njih deljiv sa 2^{x-1} tj. $y = 2^{x-1}z \pm 1$. Sa druge strane, očigledno je da važi: $2^x + 1 < y < 2^{x+1} - 1$ za $x \geq 2$ pa je $z = 3$. Ako označimo $t = 2^{x-1}$, polazna jednačina postaje

$$8t^2 + 2t + 1 = (3t \pm 1)^2$$

čije je jedino prirodno rešenje $t = 8$. Tada je $x = 4$, što i jeste rešenje:

$$1 + 2^4 + 2^9 = 23^2$$

.

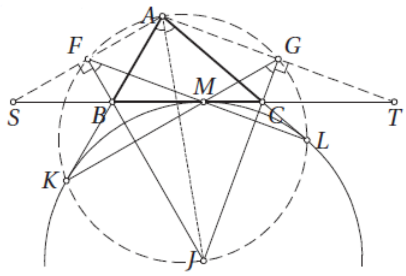
Primer 3:
Zadatak sa Internacionalne matematičke olimpijade održane u Argentini 10. Jula 2012.

U trouglu ABC tačka J je centar spolja pripisanog kruga naspram temena A. Ovaj krug dodiruje stranicu BC u M, a produžetke stranica AB i AC u K i L, redom. Prave LM i BJ se seku u F, a prave KM i CJ se seku u G. Neka je S presečna tačka pravih AF i BC, a T presečna tačka pravih AG i BC. Dokazati da je M središte duži ST. *(Grčka)*

Rešenje:
Kako je:

$$\sphericalangle JFL = \sphericalangle JBC - \sphericalangle LMC = (\frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle ABC}{2}) - \frac{\sphericalangle ACB}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle JAL$$

.



Tačka F leži na krugu kroz tačke A, J i L, tj. na krugu nad prečnikom AJ, pa je $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AFJ = \frac{\pi}{2}$. Iz $\sphericalangle SBF = \sphericalangle ABF$ sledi da su trouglovi SBF i ABF podudarni i $SB = AB$. Sada je $SM = SB + BM = AB + BK = AK$; analogno je $TM = AL = AK$, pa je

$$SM = TM.$$

Primer 4: *Zadatak sa Internacionalne matematičke olimpijade održane u Kolumbiji 23. Jula 2013.*
Dokazati da za svaka dva prirodna broja k i n postoji k prirodnih brojeva m_1, m_2, ...,m_k(ne obavezno različitih) takvih da je:

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = (1 + \frac{1}{m_1})(1 + \frac{1}{m_2}) \cdots (1 + \frac{1}{m_k}).$$

(Japan)

Rešenje:
Počnimo od primera: za $k = 2$ imamo $\frac{7}{4} = \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{4} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2}$ i $\frac{8}{5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{6} = \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3}$.
Tvrđenje zadatka dokazujemo indukcijom po k. Baza $k = 1$ je trivijalna.
Predpostavimo da tvrdženje važi za $k = r - 1$(i svako n). Neka je $k = r$ i neka je n prirodan broj. Razlikujemo dva slučaja:

- $2|n = 2n_1$. Tada je:

$$1 + \frac{2^r - 1}{n} = \frac{n + 2^r - 1}{n + 2^r - 2} \cdot \frac{n + 2^r - 2}{n} = (1 + \frac{1}{n + 2^r - 2})(1 + \frac{2^{r-1} - 1}{n_1}).$$

  Po induktivnoj predpostavci postoje m_1, m_2,..., $m_{r-1} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$1 + \frac{2^{r-1} - 1}{n_1} = (1 + \frac{1}{m_1})(1 + \frac{1}{m_2}) \cdots (1 + \frac{1}{m_{r-1}})$$

  pa je dovoljno uzeti $m_r = n + 2^r - 2$.

- $2 \nmid n = 2n_1 - 1$. Tada je:

$$1 + \frac{2^r - 1}{n} = \frac{n + 2^r - 1}{n + 1} \cdot \frac{n + 1}{n} = (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2^{r-1} - 1}{n_1}).$$

I u ovom slučaju važi:

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})\cdots(1+\frac{1}{m_{r-1}})$$

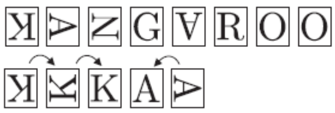
za neke m_1, m_2,..., $m_{r-1}\in\mathbb{N}$ pa je dovoljno uzeti $m_r=n$.

3.2 Kengur bez granica

Izabrani zadaci testa matematičkog takmičenja "Kengur bez granica" održanog 2014. godine za 5. i 6. razred osnovne škole

Zadaci koji vrede 3 poena

1. Aleksa je napisao reč *KANGAROO* pomoću kartica koje pokazuju po jedno slovo. Nažalost neka slova su okrenuta pritiskom na karticu(vidi sliku). Pritiskajući dva puta Aleksa može da ispravi slovo K, a pritiskajući jednom može da ispravi slovo A.



Koliko puta Aleksa treba da pritisne kartice da bi slova bila pravilno okrenuta?
A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

2. Torta je teška 900g. Petra je isekla tortu na 4 dela. Najveći deo je težak koliko sva tri ostala dela zajedno.
Koliko je težak najveći deo?

A)250g B)300g C)400g D)450g E)600g

3. U sabiranju tri broja prikazanom na slici neke cifre su zamenjene zvazdama. Koliki je zbir cifara koje nedostaju?

$$\begin{array}{c} 1 \star 2 \\ 1 \star 3 \\ 1 \star 4 \\ 3\ 0\ 9 \end{array}$$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)10

4. Kolika je razlika između najmanjeg petocifrenog i najvećeg četvorocifrenog broja?

A)1 B)10 C)1111 D)9000 E)9900

5. Katarina ima 38 palidrvaca od kojih pravi trougao i kvadrat. Svaka stranica trougla sastoji se od 6 palidrvaca. Koliko palidrvaca ima svaka stranica kvadrata?

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

6. Ogrlica na slici napravljena je od belih i sivih perli.

Vukašin hoće da skine 5 sivih perli. On može da skida perle sa bilo koje strane ogrlice, pa mora da skine, takođe i neke bele perle.

Koji je najmanji broj belih perli koje Vukašin mora da skine?

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

7. Marko je učestvovao u trci koja se sastojala iz 5 krugova. Vremena kada je Marko prošao kroz startnu tačku data su u tabeli. Koji krug je Marko prošao za najkraće vreme?

	Vreme
Start	09.55
Nakon 1. kruga	10.26
Nakon 2. kruga	10.54
Nakon 3. kruga	11.28
Nakon 4. kruga	12.03
Nakon 5. kruga	12.32

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

Zadaci koji vrede 4 poena

8. Kosta i Vuk su krenuli da hodaju iz iste tačke. Kosta je išao 1km na sever, 2km na zapad, 4km na jug i na kraju 1km na zapad. Vuk je išao 1km na istok, 4km na jug i 4km na zapad. Koja od sledećih mogućnosti mora biti poslednji deo Vukovog puta da bi došao u istu tačku u kojoj je Kosta?

A)već su u istoj tački B)1km na sever C)1km na severo-zapad D)više od 1km na severo-zapad E)1km na zapad

9. U letnjem kampu 7 učenika jede sladoled savkog dana, a 9 učenika jede sladoled svakog drugog dana, dok ostali učenici uopšte ne jedu sladoled. Juče je 13 učenika jelo sladoled. Koliko učenika jede sladoled danas?

A)7 B)8 C)9 D)10 E)nemoguće je odrediti

10. Kenguri A, B, C, D, E sede tim redom u smeru kretanja kazaljke na satu oko okruglog stola. Tačno kada se čije zvono, svi kenguri sem jednog zamene mesto sa svojim susedom. Nakon toga, raspored kengura počev od kengura A, u smeru kretanja kazaljke na satu je A, E, B, D, C.
Koji kengur se nije pomerio?

A)A B)B C)C D)D E)E

Zadaci koji vrede 5 poena

11. Na disku ima 5 pesama: pesma A traje 3 min, pesma B 2min30s, pesma C 2min, pesma D 1min30s i pesma E 4min. Ovih 5 pesama su snimljene u redosledu A, B, C, D, E i emituju se u petlji bez prekida. Kada je Adam izašao iz kuće emitovana je pesma C. On se vratio kući posle tačno jednog sata.
Koja pesma je emitovana kada se Adam vratio kući?

A)A B)B C)C D)D E)E

12. Dejan je upisao brojeve od 1 do 9 u polja tabele 3×3. Počeo je sa brojevima 1, 2, 3 i 4 kao na slici. Ispostavlja se da za polje sa brojem 5 važi da je zbir brojeva u susednim poljima (susedna polja su ona koja imaju zajedničku stranicu) jednak 9. Koliki je zbir brojeva u poljima susednim polju sa brojem 6?

1		3
2		4

A)14 B)15 C)17 D)28 E)29

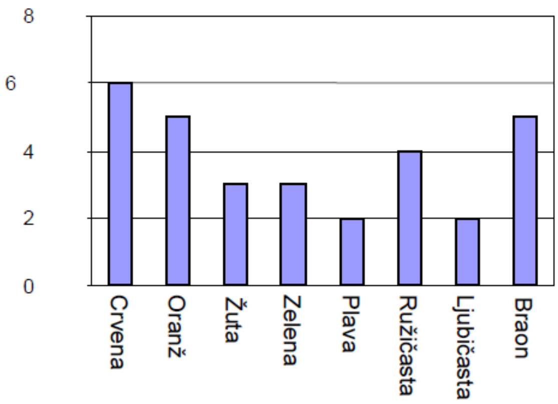
13. S jedne strane Park avenije je 60 stabala. Svako drugo drvo je javor, a svako treće ili lipa ili javor. Sva ostala stabla su breze.
Koliko ima breza?

A)10 B)15 C)20 D)24 E)30

3.3 Pisa testovi

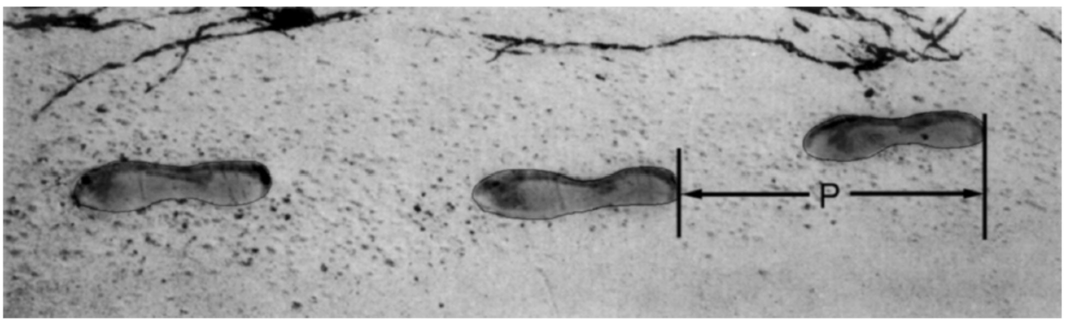
RAZNOBOJNE BOMBONE

Pitanje 1: Raznobojne bombone
Majka je dozvolila Saši da uzme bombonu iz kese. Saša ne vidi bombone. Sledeći grafikon prikazuje broj bombona razvrstanih po bojama:



Kolika je verovatnoća da Saša izvuče crvenu bombonu?
A 10%
B 20%
C 25%
D 50%

HOD



Slika pokazuje otiske stopala čoveka koji hoda. Dužina koraka P je rastojanje između dva uzastopna otiska peta.

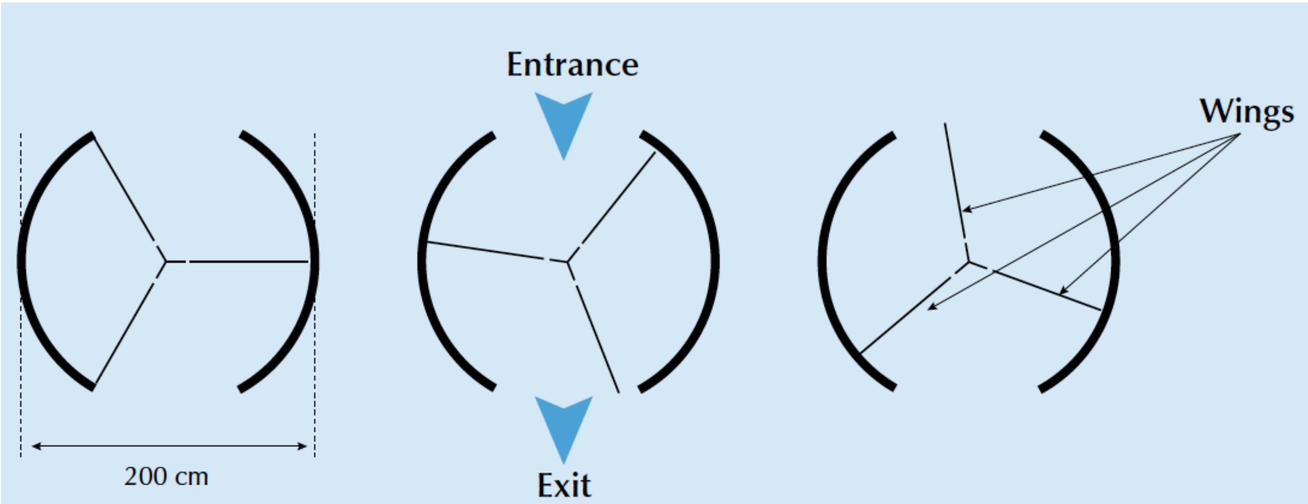
Za muškarce, formula $\frac{n}{P} = 140$ daje približan odnos između n i P, gde je:

$n=$ broj koraka u minuti
$P=$dužina koraka u metrima

Pitanje 1: Hod
Ukoliko se formula primeni na Dušanov hod i Dušan napravi 70 koraka u minuti, kolika je njegova dužina koraka? Pokaži postupak.

Pitanje 2: Hod
Bojan zna da mu je dužina koraka 0.8 metara.
Na osnovu formule, izračunaj brzinu Bojanovog hoda u metrima u minuti i u kilometrima na čas. Pokaži postupak.

ROTIRAJUĆA VRATA

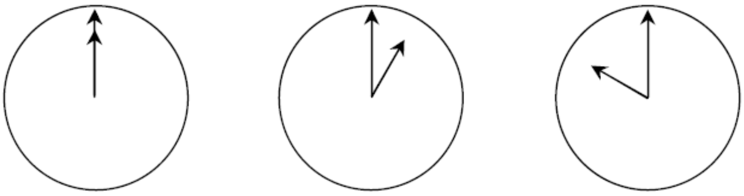


U rotirajućim vratima nalaze se tri krila koja se okreću unutar okruglog prostora. Njegov je unutrašnji prečnik dva metra(200 centimetara). Tri krila vrata dele prostor u tri jednaka odeljka.

Pitanje 1: Rotirajuća vrata
Dva otvora na vratima (lukovi prikazani isprekidanom crtom) iste su veličine. Ako su oni preširoki, krila koja se pokreću ne dodiruju ih, ne omogućavaju zatvoren prostor i vazduh slobodno može da prolazi između ulaza i izlaza, uzrokujući neželjeno gubljenje topline. Koja je maksimalna dužina lukova(u centimetrima), a da vazduh ne prolazi slobodno izmeĂŚu ulaza i izlaza?

RAZGOVOR PREKO INTERNETA

Mark iz Sidneja u Australiji i Hans iz Berlina u Nemačkoj često međusobno komuniciraju koristeći "chat" na Internetu. Da bi mogli da razgovaraju moraju da se priključe na Internet u istom trenutku. Tražeći odgovarajuće vreme za "chat", Mark je konsultovao kartu časovnih zona i našao je sledeće:



Pitanje 1: Razgovor preko interneta
Kada je 19h00 u Sidneju, koje je vreme u Berlinu?

Pitanje 2: Razgovor preko interneta
Mark i Hans ne mogu da razgovaraju između 9h00 i 16h30 po njihovim lokalnim vremenima, zato što moraju da idu u školu. Isto tako, neće moći da razgovaraju između 23h00 i 7h00 zato što će tada da spavaju.
Kada Mark i Hans mogu da razgovaraju? Upiši lokalno vreme u tabelu.

Mesto	Vreme
Sidnej	
Berlin	

IZBOR

Pitanje 1: Izbor

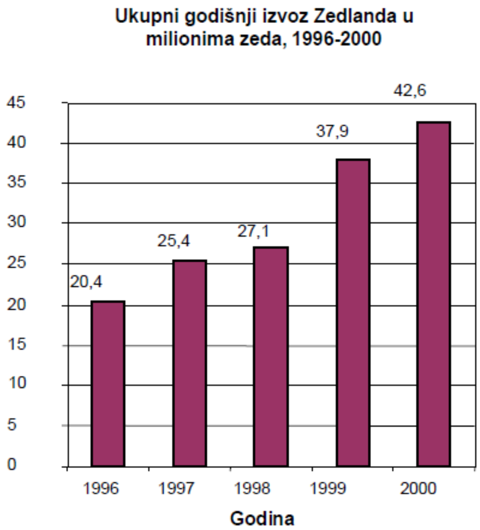
U jednoj piceriji serviraju picu od sira i paradajza. Uz to, možete sastaviti sopstvenu picu sa dodatnim prilozima. Na raspolaganju su vam četiri različita dodatna priloga: masline, šunka, pečurke i salama.

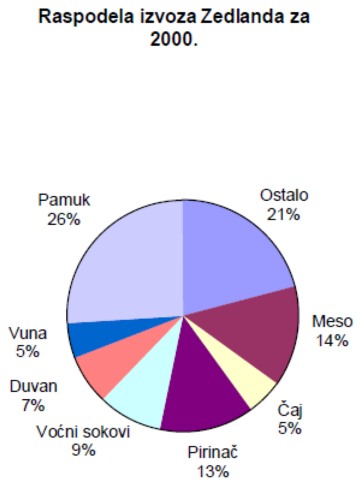
Ranko želi da poruči picu sa dva različita dodatna priloga.

Koliko različitih kombinacija Ranko ima na raspolaganju?

IZVOZ

Donji grafikon pokazuje podatke o izvozu koji je ostvario Zedland, zemlja čija je valuta zed.





Pitanje 1: Izvoz

Kolika je ukupna vrednost(u milionima zeda) izvoza ZADlanda 1998. godine?

Pitanje 2: Izvoz

Koliki je prihod Zedland ostvario od izvoza voćnih sokova u 2000. godini?

A 1.8 miliona zeda.
B 2.3 miliona zeda.
C 2.4 miliona zeda.
D 3.4 miliona zeda.
E 3.8 miliona zeda.

KURSNA LISTA

Gospođica Mei-Ling, iz Singapura, boraviće tri meseca u Južnoj Africi u okviru studentske razmene. Treba da zameni singapurske dolare(SGD) u juÅ¿noafričke rande(ZAR).

Pitanje 1: Kursna lista
Mei-Ling je saznala da je odnos između singapurskog dolara i južnoafrižkog randa sledeći: 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling je zamenila 3 000 singapurskih dolara u južnoafričke rande po tom kursu.
Koliko je južnoafričkih randa dobila Mei-Ling?

Pitanje 2: Kursna lista
Kada se Mei-Ling vratila u Singapur posle tri meseca, ostalo joj je 3 900 ZAR-a. Ona ih menja u singapurske dolare, konstatujući da se kurs promenio i da je sada: 1 SGD = 4,0 ZAR.
Koliko je singapurskih dolara dobila Mei-Ling?

Pitanje 3: Kursna Lista
Tokom ta tri meseca kurs se promenio i pao je sa 4,2 na 4,0 ZAR za jedan SGD. Da li je za Mei-Ling

povoljniji kurs od 4,0 ZAR umesto 4,2 ZAR kada menja svoje južnoafričke rande u singapurske dolare? Obrazloži svoj odgovor.

ZEMLJOTRES

U dokumentarnoj emisiji o zemljotresima i njihovoj učestalosti raspravljalo se i o mogućnosti predviđanja zemljotresa. Jedan geolog je tvrdio: "U toku narednih dvadeset godina, verovatnoća da će Zedgrad pogoditi zemljotres je dva prema tri."
Koja od sledećih rečenica najbolje izraÅ¿ava to što je geolog hteo da kaže?

A Pošto je $\frac{2}{3} \times 20 = 13.3$, dakle, za 13, odnosno 14 godina dogodiće se zemljotres u Zedgradu.
B $\frac{2}{3}$ je viÅąe od $\frac{1}{2}$, tako da možemo biti sigurni da će Zedgrad pogoditi zemljotres u narednih 20 godina.
C Veća je verovatnoća da će Zedgrad pogoditi zemljotres u narednih 20 godina nego da ga neće pogoditi.
D Ne možemo reći šta će se dogoditi, jer niko ne može biti siguran kada će se dogoditi zemljotres.

4 Zaključak

Kako smo videli iz statistika Pisa projekta Srbija je ispod proseka po snalaženju učenika u matematičkim problemima kada poredimo sa ostalim Evropskim državama. Sa druge strane, uspeh naših učenika na matematičkoj olimpijadi je uočljiv, pogotovo ako uzmemo u obzir naše briljantne pojedince koji ulaze u sam vrh ovog takmičenja. Iz prethodnog možemo zaključiti da matematičko obrazovanje u Srbiji ima brojne kvalitete i što je jos uočljivije brojne potencijale ali koji se neusmeravaju prema ciljevima koje promovišu razvijene zemlje. Rezulati pokazuju da naši učenici poseduju znanja o mnogim teoriskim pojmovima ali koje često nisu u stanju da primene u najjednostavnijim životnim situacijama. Ovi projekti govore da matematičko obrazovanje u Srbiji previše pažnje poklanja pripremanju najboljih učenika, budućih naučnih radnika dok je veći deo učenika i njihova potreba da razumeju matematiku kao primenjenu nauku zanemarena. Ovo je po njihovim mišljenu čemu se treba posvetiti pažnja u budućnosti.

5 Literatura

1. PISA Srbija (2013) Podrži me, Inspiriši me. Dostupno sa: $http://www.pisaserbia.org/images/stories/pdf/PISA_2$
[Pristupljeno: 20.04.2014.]

2. Dostupno na: $http://marijajakovljev.files.wordpress.com/2013/01/kengur-bez-granica-2010-test-za-2-razred1.pdf$. [Pristupljeno: 12.05.2014.]

3. Dostupno na: $http://www.dms.rs/DMS/html/kengur/zadaci.html$ [Pristupljeno: 11.06.2014.]

4. Dostupno na: $http://srb.imomath.com/$ [Pristupljeno: 21.07.2014.]

5. International Mathematical Olympiad. Dostupno sa: $http://www.imo-official.org/$ [Pristupljeno: 19.05.2014.]

6. Dostupno na: $http://www.iccg.co.me/1/dok/medjunarodno/mat_pismenost.pdf$ [Pristupljeno: 23.07.2014.]

7. Dostupno na: $http://www.businessinsider.com/pisa-revolving-door-question-2013-12$ [Pristupljeno: 20.08.2014.]