

Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Filip Kosić

**PRIMENA METODE OPTIMIZACIJE U ANALIZI PROCESA
UPRAVLJANJA CENOVNIM RIZIKOM**

Master rad

Beograd

2015.

Mentor: prof. dr Zorica Stanimirović

**Članovi komisije: prof. dr Vesna Jevremović
prof. dr Boško Jovanović**

(datum odbrane)

Predgovor

U ovom radu definisani su autoregresivni – heteroskedastični modeli kojima se modeluje kretanje prinosa portfolija likvidnijih hartija od vrednosti koje su kotirane na Beogradskoj berzi. Nepoznati parametri modela su ocenjeni maksimizovanjem funkcije uslovne verodostojnosti sa tri metode optimizacije: gradijentnom metodom, genetskim algoritmom i simuliranim kaljenjem. Predložene su konkretne implementacije genetskog algoritma i metode simuliranog kaljenja. U radu je dato poređenje rezultata metoda optimizacije kao i poređenje njihovog uticaja na obračun kapitalnog zahteva za cenovni rizik.

Rad se sastoji od šest poglavlja. U uvodnom poglavlju definisani su tržišni rizici, kao i kapitalni zahtevi odnosno ratio pokazatelja adekvatnosti kapitala (količnik kapitala i kapitalnih zahteva za kreditni, cenovni, devizni i operativni rizik) i njihova veza sa metodama optimizacije. U drugom poglavlju definisan je pojam Value at Risk (VaR) i neto prinosa portfolija. U trećem poglavlju su definisani autoregresivni heteroskedastični modeli vremenskih serija kojima se modeluje VaR, njihova funkcija uslovne verodostojnosti koja će biti predmet naše analize kao i njihovi uslovi stacionarnosti. U četvrtom poglavlju su predstavljene osnovne ideje gradijentne metode, genetskog algoritma i metode simuliranog kaljenja. Navedene metode optimizacije su korišćene za određivanje nepoznatih parametara autoregresivnog heteroskedastičnog modela maksimizujući njegovu funkciju uslovne verodostojnosti uz poštovanje uslova stacionarnosti. Takođe u četvrtom poglavlju su opisani i detalji konkretnih implementacija genetskog algoritma i metode simuliranog kaljenja koji su primenjeni na rešavanje datog problema. U petom poglavlju su analizirani eksperimentalni rezultati ocene nepoznatih parametara modela na portfoliju likvidnih vlasničkih hartija od vrednosti koje pripadaju indeksu Belex 15 i obveznica R. Srbije. Izvršeno je poređenje rezultata ocene nepoznatih parametara modela navedenim metoda optimizacije kao i poređenje njihovog uticaja na obračun kapitalnih zahteva. U šestom poglavlju je dat zaključak rada i navedeni su pravci budućeg rada.

Dugujem veliku zahvalnost svom mentoru prof. dr Zorici Stanimirović na rukovođenju pri izradi ovog rada i iskrenoj podršci. Takođe zahvalio bih se članovima komisije prof. dr Vesni Jevremović i prof. dr Bošku Jovanović na pažljivom čitanju rukopisa i korisnim sugestijama koje su doprinele kvalitetu ovog rada.

Beograd, 2015.

Kandidat

Filip Kosić

1 Uvod

Rizik predstavlja svaku neizvesnu situaciju u poslovanju, odnosno verovatnoću gubitka nastalu kao rezultat neizvesnih događaja u poslovanju. Na savremenim finansijskim tržištima finansijske institucije su izložene brojnim rizicima. Rizici kao što su: cenovni rizik, kreditni rizik, valutni rizik, rizik kamatnih stopa, rizik likvidnosti u većem ili manjem obimu postoje u finansijskom poslovanju. Najpoznatija vrsta rizika koja se vezuje za hartije od vrednosti, odnosno portfolio knjige trgovanja određene finansijske institucije jeste cenovni rizik, koji predstavlja rizik mogućnosti nastanka negativnih efekata na finansijski rezultat i kapital banke (ili finansijske institucije) usled promene tržišne vrednosti hartija od vrednosti i finansijskih derivata.

Upravljanje rizicima je postalo neizostavan deo finansijskog poslovanja. To je proces u kom se identifikuje, meri i kontroliše izloženost riziku. Regulisanje rizika, kao krajnji cilj celog procesa proučavanja rizika, zahteva poznavanje faktora koji određuju visinu i prirodu rizika sa kojim se u svom poslovanju sreću finansijske institucije. Finansijske institucije se u današnje vreme suočavaju sa dva velika izazova: upravljanjem rizicima i maksimizacijom profita. S obzirom da su prihod finansijske institucije i rizik u korelacionoj korespondenciji, regulator (Narodna banka Srbije) je, u cilju obezbeđivanja finansijske stabilnosti tržišta, donela Odluku o adekvatnosti kapitala kojom je propisano da su banke u obavezi da identifikuju i mere rizike odnosno da izdvajaju kapitalne zahteve za sve vrste rizika. Izdvajanje kapitalnih zahteva je neophodno u cilju pokrića potencijalnih gubitaka koje banka može da pretrpi usled navedenih rizika. Preciznije, Odlukom je definisano: "Banka je dužna da u svakom trenutku održava svoj kapital na nivou koji je potreban za pokriće svih rizika kojima je izložena ili može biti izložena u svom poslovanju, a najmanje u visini zbira kapitalnih zahteva za kreditni, cenovni, devizni i operativni rizik....Banka je u obavezi da pokazatelj adekvatnosti kapitala (količnik kapitala i rizikom ponderisane aktive tj. zbira kapitalnih zahteva za kreditni, cenovni, devizni i operativni rizik) održava na nivou koji nije manji od 12% ". Regulator je propisao metodologiju obračuna kapitalnih zahteva, takozvani standardizovan pristup, koji je po pravilu relativno jednostavan za implementaciju, a sa druge strane rigorozan u proceni mogućih gubitaka i koji ne obuhvata sve ključne parametre uticaja na mogući gubitak. Pored toga, Narodna banka Srbije je ostavila bankama i mogućnost da same razviju interne metodologije za određivanje kapitalnih zahteva odnosno za određivanje potencijalnih gubitaka koji su implicirani navedenim rizicima. Interne metodologije moraju da zadovolje propisane kriterijume validnosti, tj. istorijske projekcije mogućeg gubitka ne smeju da budu potcenjene u većem broju slučajeva od definisanog. Zbog navedenog banke se trude, da razviju interne metodologije za obračun mogućih gubitaka koje treba da pomire dva dijametralno suprotna uslova: da se potencijalni gubitak prilikom ocenjivanja ne preceni a da se istovremeno ne potceni.

U slučaju precenjivanja mogućeg gubitka odvajaju se veći kapitalni zahtevi koji dalje vode smanjivanju pokazatelja adekvatnosti kapitala. Sa druge strane potcenjivanje je jako opasno jer dovodi u sumnju validost modela i može da dovede do toga da banka dobije zabranu njegovog korišćenja.

Interni modeli za procenu maksimalnih gubitaka po osnovu cenovnog rizika se baziraju na konceptu ocene parametra vrednosti pri riziku (value at risk pristup-VaR). Value at Risk predstavlja maksimalni gubitak uzrokovan promenom cena hartija od vrednosti i drugih finansijskih derivata, u portfoliju banke tokom određenog perioda i pri definisanom intervalu poverenja (pri definisanoj verovatnoći). Različite statističke tehnike (od metodološki jednostavnih kao što je istorijski model do složenih modela kao što su autoregresivni-heteroskedastični modeli) se koriste prilikom implementacije VaR modela. Zajedničko za sve njih je da se one baziraju na istorijskim opservacijama kretanja cena hartija od vrednosti i drugih finansijskih derivata u datom portfoliju.

Finasijske vremenske serije poseduju jednu bitnu karakteristiku - promenljivost varijabiliteta stopa prinosa finansijskih instrumenata tokom vremena, odnosno vremenski promenljivu devijaciju (volatilnost) kojom se meri rizik promene prinosa finansijskog instrumenta a samim tim i njegove cene. Sa matematičkog gledišta, volatilnost predstavlja standardnu devijaciju prinosa, koja je vremenski uslovljena odnosno koja nije konstantna kroz vreme. Učesnici na berzi reaguju na svaku novu informaciju tako što prodaju postojeće i kupuju nove akcije. To izaziva promene u ceni akcija, a time u odgovarajućim stopama prinosa. Detaljnije sagledavanje nove informacije može dovesti do pada obima transakcija i do smirivanja berze. Dolazak nove vesti utiče na rast varijabiliteta stope prinosa koji se smanjuje tokom vremena. Ponovni rast varijabiliteta će se verovatno javiti sa novom informacijom. To znači da stope prinosa finansijskih instrumenata prolaze kroz faze niskog i visokog varijabiliteta. Pri tome postoji veći stepen korelisanosti između varijabiliteta prinosa nego između nivoa prinosa. Uočeno je da stepen varijabiliteta može zavisi od toga da li investitori novu vest tretiraju kao pozitivnu ili negativnu. Varijabilitet je izraženiji ukoliko vest ima negativan karakter. Sa aspekta terminologije teorije verovatnoće ovde se razmatra uslovna varijansa koja se menja tokom vremena, tako da se često koristi ekonometrijski termin koji označava nestabilnu varijansu slučajne greške - uslovna heteroskedastičnost. Prisustvo heteroskedastičnosti kod finansijskih vremenskih serija uzrokuje da informacije o kretanju cene finansijskog instrumenta iz bliže prošlosti imaju veću informativnu vrednost prilikom predikcije budućeg kretanja od informacija iz dalje prošlosti. Modeli koji jednak značaj daju svim istorijskim opservacijama odnosno koji koriste bezuslovnu volatilnost (vremenski konstantnu devijaciju) su manje zahtevni za implementaciju, ali su, sa druge strane skloni ili precenjivanju ili potcenjivanju mogućeg gubitka.

Osnovni tip modela uslovnog varijabiliteta je parametarski model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti – GARCH model [6]. Kvalitet projekcije maksimalnog mogućeg gubitaka VaR-a, u smislu neprecenjivanja i ne-potcenjivanja stvarnog gubitaka, zavisi od izabranog ekonometrijskog modela. Ukoliko je model parametarskog tipa (a takvi modeli su kvalitetniji od neparametarskih) kvalitet projekcije maksimalnog gubitka zavisi i od kvaliteta određivanja njegovih nepoznatih parametara metodama optimizacije.

U ovom radu biće ocenjen maksimalni mogući gubitak VaR na portfoliju hartija od vrednosti primenom autoregresivnog heteroskedastičnog modela – GARCH modela. Nepoznati parametri modela će biti određeni maksimizacijom njegove fukcije uslovne verodostojnosti, poštujući odgovarajuća ograničenja na parametrima postavljena u cilju obezbeđivanja stacionarnosti modela. Ocenjivanje parametara će biti izvršeno različitim metodama optimizacije: gradijentna metoda, genetski algoritam i simulirano kaljenje. S obzirom da kvalitet projekcije maksimalnog budućeg gubitka zavisi od ocenjenih parametara, nakon ocenjivanja nepoznatih parametara navedenim metodama optimizacije, izvršićemo poređenje rezultata. Takođe biće upoređeni rezultati navedenih metoda optimizacije u smislu njihovog uticaja na kapitalni zahtev.

U programima koji se najčešće koriste za matematičko modelovanje finansijskih vremenskih serija kao što su Matlab i R postoje bibliotečke funkcije koje nepoznate parametre u autoregresivnom heteroskedastičnom modelu GARCH određuju jedino primenom gradijentne metode optimizacije. Imajući u vidu značaj ocene nepoznatih parametara, postoji poseban imperativ da navedeni problem optimizacije rešimo i drugim metodama kao što su genetski algoritam i simulirano kaljenje i uporedimo njihove rezultate.

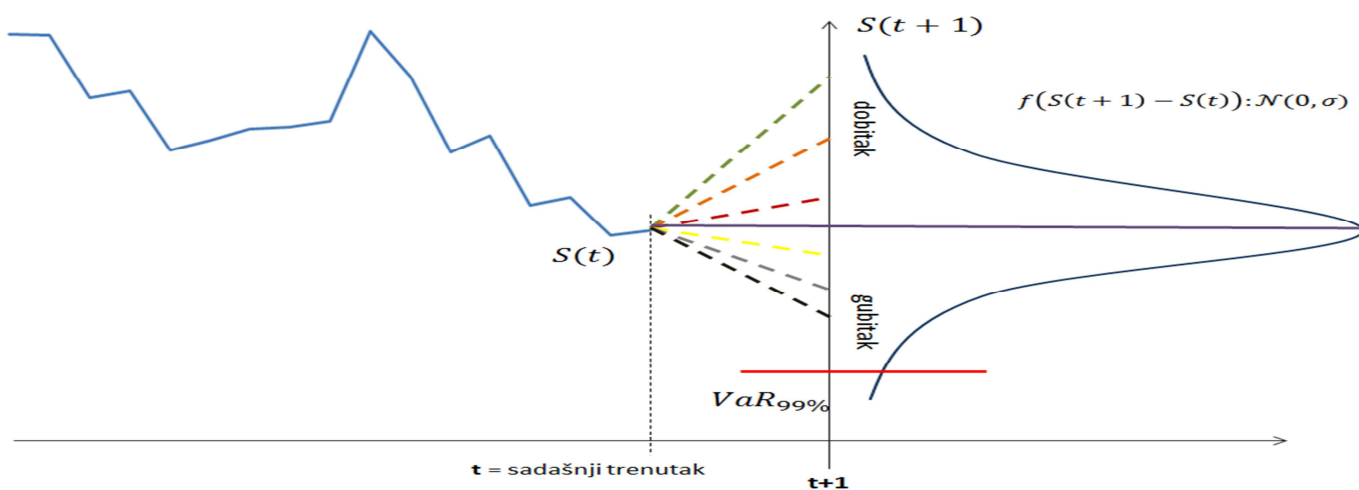
2 Definicija VaR-a (value at risk) i prinosa portfolija

VaR predstavlja maksimalni gubitak koji može da se desi na finansijskoj poziciji ili na ukupnom portfoliju (skupu više različitih finansijskih pozicija) u određenom periodu vremena i za datu verovatnoću [17]. Preciznije, VaR predstavlja broj koji nam govori da sa datom verovatnoćom (npr 99%) možemo tvrditi da gubitak (ako se desi) u zadatom vremenskom periodu (npr između trenutaka t i $t + 1$ odnosno između dva radna dana) neće biti veći od VaR-a.

Matematički zapisano, za datu verovatnoću $p \in (0,1)$, p blisko jedinici ($p = 0,95$ ili $p = 0,99$) i dati vremenski period h važi

$$P(L(h) \leq VaR(h, p)) = p,$$

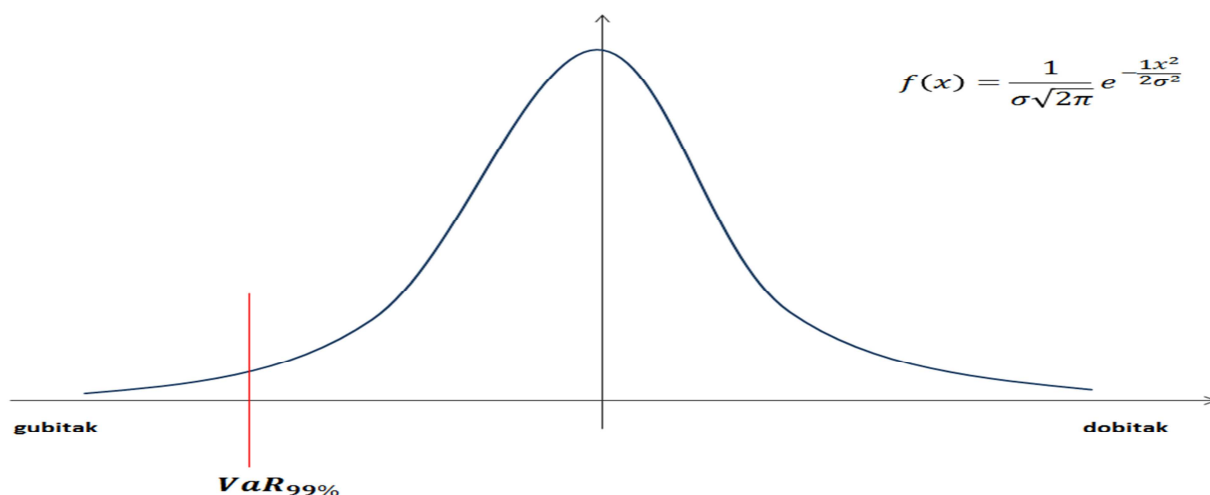
gde je $L(h)$ slučajna veličina gubitka za period h koja se definiše kao $L(h) = -\Delta S(h) = -(S(t+h) - S(t))$, dok $\Delta S(h)$ predstavlja slučajnu veličinu promene vrednosti finansijske pozicije ili portfolija $S(t)$ u posmatranom vremenskom periodu $[t, t+h]$, odnosno ($\Delta S(h) = S(t+h) - S(t)$).



Slika 2.1

Na slici 2.1 je prikazano istorijsko kretanje cene $S(t)$ finansijskog instrumenta do trenutka t , kao i moguće vrednosti $S(t+1)$ koje slučajna promenljiva može da uzme, sa datom verovatnoćom, u budućem trenutku. U slučaju da je $S(t+1) < S(t)$ dolazi do gubitka. Na slici, crvenom linijom, je označena ocena maksimalnog mogućeg gubitka.

Do funkcije raspodele verovatnoće slučajne veličine koja predstavlja buduću promene vrednosti finasijske pozicije ili portfolija dolazi se analizom njihovih istorijskih promena.



Slika 2.2 Prikaz funkcije gustine raspodele verovatnoće slučajne veličine koja predstavlja promenu vrednosti portfolija i ocene maksimalnog mogućeg gubitaka

U cilju određivanja VaR-a na portfoliju (skupu različitih finasijskih instrumenata) između sadašnjeg trenutka T i budućeg trenutka $T + 1$ neophodno je definisati pojam neto prinosa portfolija.

Definicija 2.1 Neka se portfolio sastoji od n finasijskih instrumenata, sa S_t^j se označava cena finasijskog instrumenta $j \in \{1, \dots, n\}$ u nekom istorijskom trenutku $t \in \{T - \text{horizont}, \dots, T\}$ gde se po preporuci uzima da je $\text{horizont} \geq 256$ radnih dana a sa k^j označava se količina - broj hartija finasijske pozicije j u trenutku T .

Definicija 2.2 Neto prinos finasijskog instrumenta j u trenutku t se predstavlja relacijom $y_t^j = \frac{S_t^j - S_{t-1}^j}{S_{t-1}^j}$.

Definicija 2.3 Ponderi odnosno težine (učešće hartije j u trenutku T u portfoliju) se uvode kao $\omega_j = \frac{k^j S_T^j}{\tilde{S}}$ gde je $\tilde{S} = \sum_{i=1}^n |k^i| S_T^i$.

Ponderi ω_j mogu biti pozitivni a mogu biti i negativni (znak pondera je određen činjenicom da li je pozicija duga-hartija je u našem vlasništvu, odnosno kratka – hartija nije u našem vlasništvu ali postoji mogućnost da je prodamo, takozvani short sell).

Definicija 2.4 Neto prinos portfolija u trenutku $t \in \{T - \text{horizont} + 1, \dots, T\}$ predstavlja se kao $y_t = \sum_{j=1}^n \omega_j y_t^j$,

odnosno, u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} y_{T-horizont+1} \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \omega_1 * \begin{bmatrix} y_{T-horizont+1}^1 \\ \vdots \\ y_t^1 \\ \vdots \\ y_T^1 \end{bmatrix} + \dots + \omega_n * \begin{bmatrix} y_{T-horizont+1}^n \\ \vdots \\ y_t^n \\ \vdots \\ y_T^n \end{bmatrix}$$

Cilj ovog rada se sastoji u što verodostojnijem određivanju funkcije raspodele verovatnoće slučajne promenljive y_{T+1} .

$$\text{Kako je } y_{T+1} = \omega_1 y_{T+1}^1 + \dots + \omega_n y_{T+1}^n = \frac{k^1 S_T^1}{\tilde{S}} \frac{S_{T+1}^1 - S_T^1}{S_T^1} + \dots + \frac{k^n S_T^n}{\tilde{S}} \frac{S_{T+1}^n - S_T^n}{S_T^n}$$

sledi da slučajna veličina $\tilde{S} \cdot y_{T+1} = (S_{T+1}^1 - S_T^1) + \dots + (S_{T+1}^n - S_T^n)$ predstavlja promenu vrednosti portfolija između sadašnjeg trenutka T i budućeg trenutka $T + 1$, što dalje implicira da se uz izračunatu raspodelu y_{T+1} može izračunati $VaR(h, p)$, $h = (T + 1) - T = 1$, $p \in (0, 1)$,

$$P(-\tilde{S} \cdot y_{T+1} \leq VaR(1, p)) = p$$

Pored $VaR(1, p)$, takozvanog jednodnevnog VaR-a, veoma često se koristi, pogotovo prilikom obračuna kapitalnih zahteva, i desetodnevni VaR $VaR(10, p)$ - maksimalni gubitak između trenutaka $T + 10$ i T . Za njegovo izračunavanje su nam potrebne raspodele slučajnih veličina $y_{T+10}, \dots, y_{T+1}$. S obzirom da važi da je $y_t^j = \frac{S_t^j - S_{t-1}^j}{S_{t-1}^j} \approx \ln\left(\frac{S_t^j}{S_{t-1}^j}\right)$ sledi da je

$$\frac{S_{T+10}^j - S_T^j}{S_T^j} \approx \ln\left(\frac{S_{T+10}^j}{S_T^j}\right) = \ln\left(\frac{S_{T+10}^j}{S_{T+9}^j} * \frac{S_{T+9}^j}{S_{T+8}^j} * \dots * \frac{S_{T+1}^j}{S_T^j}\right) = \ln\left(\frac{S_{T+10}^j}{S_{T+9}^j}\right) + \ln\left(\frac{S_{T+9}^j}{S_{T+8}^j}\right) + \dots + \ln\left(\frac{S_{T+1}^j}{S_T^j}\right) \approx y_{T+10}^j + \dots + y_{T+1}^j$$

Iz navedene jednakosti, uopštavanjem može se dobiti da je $(S_{T+10}^1 - S_T^1) + \dots + (S_{T+10}^n - S_T^n) \approx \tilde{S}(y_{T+10} + \dots + y_{T+1})$

Ovu relaciju, uz poznavanje raspodela slučajnih veličina $y_{T+10}, \dots, y_{T+1}$, koristitićemo prilikom određivanja desetodnevnog VaR-a $VaR(h, p)$, $h = (T + 10) - T = 10$, $p \in (0, 1)$,

$$P(-\tilde{S} \cdot (y_{T+10} + \dots + y_{T+1}) \leq VaR(10, p)) = p.$$

3 Analiza finansijskih vremenskih serija

U ovoj glavi je predstavljen parametarski autoregresivni-heteroskedastični model vremenskih serija koji će biti korišćen za ocenu maksimalnog gubitka na portfoliju knjige trgovanja. Biće predstavljena definicija, osnovne karakteristike kao i njegova funkcija uslovne verodostojnosti koja će biti predmet minimizacije u cilju, što verodostojnijeg, određivanja nepoznatih parametara modela a kasnije i preciznije projekcije budućeg gubitka.

3.1 Uvod u slučajne procese, vremenske serije i uslovno matematičko očekivanje

Pre nego što definišemo pojmove stohastičkog (slučajnog) procesa i vremenske serije, podsetićemo se nekih osnovnih pojmova i definicija iz verovatnoće i stohastike.

Neka je Ω - skup elementarnih događaja, tj. skup svih ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 3.1.1 Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ako važe sledeći uslovi :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

tada je $\mathcal{F}$ σ -polje (σ -algebra) nad Ω

Definicija 3.1.2 Najmanje σ -polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se Borelovo σ -polje nad $\mathbb{R}^n$ i označavamo ga sa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ili $\mathcal{B}^n$.

Definicija 3.1.3 Preslikavanje (funkcija) $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ koje zadovoljava uslove:

1. $P(A) \geq 0$, za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$, $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

naziva se verovatnoća nad $(\Omega, \mathcal{F})$. Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ naziva se prostor verovatnoća.

Definicija 3.1.4 Preslikavanje $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ zove se n -dimenzionalna slučajna promenljiva ako je zadovoljeno da za svako $S \in \mathcal{B}^n$ važi $X(S)^{-1} \in \mathcal{F}$ i tada kažemo da je X $\mathcal{F}$ -merljivo.

Definicija 3.1.5 Funkcija raspodele n -dimenzionalne slučajne promenljive $X = (X_1, \dots, X_n)$ definiše se na sledeći način $F_X = F(x_1, \dots, x_n) = P(\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\})$, $-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$

Ukoliko je poznata funkcija raspodele $F(x_1, \dots, x_n)$ n -dimenzionalne slučajne promenljive $X = (X_1, \dots, X_n)$ pomoću nje možemo odrediti funkciju raspodele svake k -dimenzionalne slučajne promenljive $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$. Neka je $K = \{i_1, \dots, i_k\}$ i K^c skup indeksa koji je komplementaran skupu indeksa K u skupu $\{1, 2, \dots, n\}$. Kako je $\bigcap_{j \in K} \{X_j < x_j\} = \bigcap_{j \in K} \{X_j < x_j\} \cap \bigcap_{l \in K^c} \{X_l < \infty\}$, zaključujemo da se funkcija raspodele $F(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ k -dimenzionalne slučajne promenljive $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ dobija pomoću funkcije raspodele $F(x_1, \dots, x_n)$ ako u ovoj poslednjoj stavimo da svi argumenti sa indeksima iz K^c teže ka $+\infty$

$$F_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \lim_{x_j \rightarrow \infty, \forall j \in K^c} F(x_1, \dots, x_n)$$

Tako dobijena funkcija raspodele se naziva marginalna funkcija raspodele.

Definicija 3.1.6 Slučajna promenljiva $X = (X_1, \dots, X_n)$ je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija $\varphi(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, $-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty$ koja se zove gustina raspodele za slučajnu promenljivu $X = (X_1, \dots, X_n)$ takva da je za svaki Borelov skup $S \in \mathcal{B}^n$

$$P\{X_1, \dots, X_n \in S\} = \iint \dots \int_S \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Definicija 3.1.7 Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive X u odnosu na događaj $\{Y \in S\}$, $S \in \mathcal{B}^n$ pozitivne verovatnoće definiše se kao

$$F_X(x|\{Y \in S\}) = \frac{P(\{X < x\} \cap \{Y \in S\})}{P\{Y \in S\}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Neka je (X, Y) apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$ i neka je u tački y marginalna gustina za Y pozitivna ($\varphi_Y > 0$). Funkcija raspodele uslovne verovatnoće za X pri uslovu $\{y \leq Y < y + h, h > 0\}$ je

$$\begin{aligned} F_X(x|\{y \leq Y < y + h\}) &= \frac{P(\{X < x\} \cap \{y \leq Y < y + h\})}{P\{y \leq Y < y + h\}} = \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+h} \varphi(u, v) du dv}{\int_y^{y+h} \varphi_Y(v) dv} = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\int_y^{y+h} \varphi(u, v) dv}{\int_y^{y+h} \varphi_Y(v) dv} du = \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(u, y + \theta h)}{\varphi_Y(y + \theta_1 h)} du, \quad 0 < \theta, \theta_1 < 1 \end{aligned}$$

Stavljajući da $h \rightarrow 0$ dolazi se do prirodne definicije funkcije uslovne raspodele za X pri uslovu $\{Y = y\}$, $\varphi_Y(y) > 0$:

$$F_X(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(u, y)}{\varphi_Y(y)} du, \quad -\infty < x < \infty, \text{ odakle sledi i definicija uslovne gustine za } X \text{ pri uslovu}$$

$$\{Y = y\}, \varphi_Y(y) > 0 : \text{ za } -\infty < x < \infty \quad \varphi_X(x|y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_Y(y)}$$

Očigledno, kao funkcija od x , $\varphi_X(x|y)$ je gustina jer je $\varphi_X(x|y) \geq 0$ i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x|y) dx = \frac{1}{\varphi_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \frac{1}{\varphi_Y(y)} \varphi_Y(y) = 1$$

Na isti način, dobijamo da je uslovna gustina za Y pri uslovu $\{X = x\}$, $\varphi_X(x) > 0$ jednaka $\varphi_Y(y|x) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi_X(x)}$
 $-\infty < y < \infty$

Za analizu vremenskih serija veoma su bitne numeričke karakteristike funkcije uslovne raspodele za Y pri uslovu $\{X = x\}$ kao što su uslovno matematičko očekivanje i uslovna varijansa.

Definicija 3.1.8 Uslovno matematičko očekivanje za Y pri uslovu $\{X = x\}$ se definiše na sledeći način

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi_Y(y|x) dy = \frac{1}{\varphi_X(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(x, y) dy$$

Na $E(Y|X = x)$ se može gledati kao na realizovanu vrednost slučajne promenljive $E(Y|X)$, odnosno uslovno matematičko očekivanje za Y u odnosu na X , je zapravo funkcija slučajne promenljive X , tj važi $E(Y|X) = f(X)$.

Definicija 3.1.9 Uslovna varijansa se definiše na sledeći način $var(Y|X) = E((Y - E(Y|X))^2|X)$

Osnovne osobine uslovnog matematičkog očekivanja su:

1. Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine tada je $E(Y|X) = E(X)$ sa verovanoćom 1
2. $E(E(Y|X)) = E(Y)$ Navedena jednakost jednostavno sledi iz $E(E(Y|X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X = x) \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi_X(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(x, y) dy \right) \varphi_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(x, y) dx dy = E(Y)$
3. Ako je $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tada se s verovatnoćom 1 može tvrditi da važi $E(h(X) Y|X) = h(X) E(Y|X)$.

U primenama teorije verovatnoće sreće se problem da se slučajna promenljiva Y aproksimira pomoću neke funkcije $R(X)$ od slučajne promenljive X , odnosno potrebno je pronaći funkciju $R(X)$ takvu da je $E((Y - R(X))^2)$ minimum. Na osnovu navedene osobine 2. uslovnog matematičkog očekivanja važi da je

$$(3.1.1) \quad E((Y - R(X))^2) = E\{E((Y - R(X))^2|X = x)\}.$$

Teorema 3.1 Poslednji izraz u (3.1.1) je minimum (u zavisnosti od (X)) ako je $E((Y - R(X))^2|X = x)$ minimum, i pri tome važi da se minimum postiže ukoliko je $R(X) = E(Y|X = x)$ [16].

Ovo tvrđenje se dalje uopštava [19]: najbolja aproksimacije slučajne veličine X_{t+1} funkcijom $f(X_s, s < t + 1)$ slučajnih veličina X_s , $s < t + 1$, gde su X_s poznate istorijske opservacije posmatrane stohastičke veličine dostupne do

sadašnjeg trenutka t (odnosno X_s , $s < t + 1$ je jedna σ -algebra $\mathcal{F}_t$ generisana podacima iz prošlosti) dobija se kada važi sledeća jednakost $f(X_s, s < t + 1) = E(X_{t+1} | \mathcal{F}_t)$.

Definicija 3.1.10 Slučajni (stohastički) proces je familija slučajnih promenljivih $\{X_t(w) : t \in T, w \in \Omega\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je T indeksni skup.

Ako fiksiramo $t \in T$, tada $X_t(\Omega)$ predstavlja slučajnu promenljivu definisanu na skupu elementarnih događaja Ω . Ukoliko, pak, fiksiramo $w \in \Omega$, tada skup vrednosti slučajnih promenljivih $X_t(\Omega)$ postaje funkcija skupa indeksa T .

Postoji više načina da se definiše indeksni skup T . U zavisnosti od toga kako se definiše ovaj skup, dobijaju se različiti slučajni procesi. Naime, ako je $T = \mathbb{R}$ ili $T \subseteq \mathbb{R}$ onda je slučajni proces definisan na realnoj pravoj i naziva se slučajan proces sa neprekidnim parametrom, u oznaci $(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}})$. Sa druge strane, ako je skup T skup celih ili prirodnih brojeva, onda se slučajni proces naziva slučajan proces sa prekidnim (diskretnim) parametrom $(T = \mathbb{Z}, \{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}})$.

Definicija 3.1.11 Neka je dat skup $\zeta = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n, t_1 < t_2 < \dots < t_n, n = 1, 2, \dots\}$. Funkcije $\{F_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : t \in \zeta\}$ definisane sa $F_t(x) = P\{X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n\}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nazivaju se konačno dimenzionalne funkcije raspodele stohastickog procesa.

Definicija 3.1.12 Stohastički proces X_t je gausovski proces, ako je svako njegovo n -dimenzionalno sečenje $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), t_1, \dots, t_n \in T$ Gausovska slučajna veličina.

Neki važni pojmovi stohastičkih procesa su:

1. Srednja vrednost procesa $X_t: E(X_t) = \mu_t, t \in T$
2. Disperzija procesa $X_t: Var(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t)^2 = \sigma_t^2, t \in T$
3. Kovarijansa procesa $X_t: cov(X_t, X_s) = E(X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s)) = \gamma_X(t, s), t, s \in T$
4. Koeficijent korelacije : $\rho_X(t, s) = \frac{E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)}{\sqrt{Var(X_t)Var(X_s)}} t, s \in T$

Definicija 3.1.13 Vremenska serija se definiše kao određeni zasek slučajnog procesa $\{X_t, t \in T\}$, vremenska serija se obično shvata kao niz podataka sa prirodnim redosledom (odnosno vremenskim – hronološkim redosledom).

Rezultati merenja, na primer utvrđivanje cene nekog finansijskog instrumenta kroz vreme, vrlo često se javljaju u vidu vremenskih serija. Jedan od načina za njihovo izračunavanje je izgradnja modela za takve serije. Osnovna motivacija za izgradnju modela je želja da se dobiju adekvatne prognoze budućih članova serije, te da se u skladu sa tim i pripremi strategija budućeg delovanja. Pri analizi vremenske serije važno pitanje je da li se radi o stacionarnoj

seriji, tj. o seriji sa osobinama statističke ravnoteže oko srednje vrednosti i homogenošću ponašanja korelacione zavisnosti u vremenu.

Definicija 3.1.14 Vremenska serija X_t je strogo stacionarna ako za bilo koja dva prirodna broja n i k i bilo koju n -torku prirodnih brojeva $(t_1, \dots, t_n)$ slučajni nizovi $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ i $(X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k})$ imaju istu raspodelu verovatnoća.

Dakle, strogo stacionarna vremenska serija je ona čija se svojstva ne menjaju transliranjem u vremenu.

Definicija 3.1.15 Za vremensku seriju X_t kažemo da je slabo stacionarna ukoliko važe sledeći uslovi:

1. $E(X_t) = \mu = \text{const}, t = 1, 2, \dots$
2. $\text{Var}(X_t) = E(X_t - \mu)^2 < \infty, t = 1, 2, \dots$
3. $\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)E(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k, t = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots$

Iz definicije 3.1.15 zaključujemo da su srednja vrednosti i varijansa slabo stacionarnih serija konačne, a da je kovarijansa invarijantna u odnosu na vreme. Lako je uočiti da iz stroge stacionarnosti sledi slaba stacionarnost, ali obrnuto ne mora da važi. Specijalan slučaj su gausovski procesi kod kojih slaba stacionarnost implicira strogu. Stacionarnost vremenskih serija je ključna pri njihovoj analizi. U nastavku rada posebna pažnja biće posvećena neophodnim i dovoljnim uslovima koje nepoznati parametri vremenske serije (u našem slučaju model uopštene autoregresivne heteroskedastičnosti) treba da zadovolje u cilju obezbeđivanja stacionarnosti.

Pored stacionarnosti prilikom analize vremenskih serija pre svega prilikom određivanja njihovog reda, veoma su značajne autokovarijacione i autokorelacione funkcije.

3.1.1 Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija

Korelacija između slučajne promenljive i njenih prošlih vrednosti je osnova linearne analize vremenskih serija. Za sagledavanje korelacione strukture vremenskih serija koristimo autokovarijacionu i autokorelacionu funkciju.

Za stacionarnu vremensku seriju X_t kovarijansa je

$$\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)E(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k,$$

dok je koeficijent korelacije

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0},$$

gde je $\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_{t-k}) = \gamma_0$

γ_k je funkcija od k i naziva se autokovarijaciona funkcija, a ρ_k je autokorelaciona funkcija.

Najvažnije osobine autokovarijacione i autokorelacione funkcije su:

1. Za $k = 0$ važi da je $\gamma_0 = \text{Var}(X_t)$ a $\rho_0 = 1$

Primitimo da osobina 1 važi jer je: $E((X_t - E(X_t))(X_{t+0} - E(X_{t+0}))) = E(X_t - E(X_t))^2 = \text{Var}(X_t) \geq 0$

$$\rho_0 = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+0})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+0})}} = \frac{\text{Var}(X_t)}{\text{Var}(X_t)} = 1$$

2. Važi hermitska simetrija $\gamma_k = \gamma_{-k}$ i $\rho_k = \rho_{-k}$

Osobina 2 sledi na osnovu stacionarnosti: $\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = \text{cov}(X_{t-k}, X_t) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{-k}$

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+k})}} = \frac{\text{cov}(X_{t-k}, X_{t+k-k})}{\sqrt{\text{Var}(X_{t-k})\text{Var}(X_{t+k-k})}} = \frac{\text{cov}(X_{t-k}, X_t)}{\sqrt{\text{Var}(X_{t-k})\text{Var}(X_t)}} = \rho_{-k}$$

3. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$ i $|\rho_k| \leq 1$

Sledi na osnovu Koši - Švarcove nejednakosti $|\gamma_k| = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) \leq \sqrt{\text{Var}(X_t)}\sqrt{\text{Var}(X_{t+k})} \leq \gamma_0$

$$|\rho_k| = \frac{|\gamma_k|}{\gamma_0} \leq \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

4. Autokovarijaciona matrica Γ_n je pozitivno semidefinitna.

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \dots & \gamma_{n-2} \\ & & \ddots & \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{n-2} \\ & & \ddots & \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Drugim rečima, ova osobina kaže da su determinanta i svi glavni minori autokovarijacione matrice pozitivni ili jednaki nuli.

Pored autokorelacione funkcije u analizi vremenskih serija od interesa je i parcijalna korelacija; tj. kada u skupu od tri slučajne veličine X_t, X_{t-1}, X_{t-2} postoji korelaciona povezanost, može se pojaviti sledeće: slučajna veličina X_{t-1} je korelaciono povezana kako sa slučajnom veličinom X_t tako i sa slučajnom veličinom X_{t-2} , a to može imati uticaja na međusobnu zavisnost između slučajnih veličina X_t i X_{t-2} . Da bi se utvrdilo šta je direktna zavisnost između X_t i X_{t-2} , a

šta njihova indirektna zavisnost prouzrokovana njihovim vezama sa X_{t-1} potrebno je isključiti uticaj veličine X_{t-1} na korelaciju zavisnost između slučajnih veličina X_t i X_{t-2} . To se postiže uvođenjem koeficijenata parcijalne korelacije. Slično važi i u slučajevima sa više od tri slučajne veličine, te prema tome i u vremenskim serijama. Koeficijenti parcijalne korelacije u kombinaciji sa koeficijentima autokorelacije mogu biti vrlo efikasni u prepoznavanju reda modela.

3.2 Definicija modela uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti

Maksimalni gubitak na portfoliju knjige trgovanja ocenjuje se analizom istorijskog kretanja ukupnog prinosa portfolija knjige trgovanja koristeći model vremenskih serija - model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti ($ARMA(m, n)/GARCH(p, q)$)

Model se može predstaviti na sledeći način:

$$(3.2.1) \quad y_t = \mu + \sum_{i=1}^m \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \theta_j e_{t-j} + e_t$$

autoregresivna jednačina;

$$(3.2.2) \quad e_t = \sigma_t u_t$$

gde su u_t i.i.d (independently and identically distributed) nezavisne i jednako raspodeljene slučajne veličine nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse koje imaju normalnu ili Studentovu raspodelu;

$$(3.2.3) \quad \sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

heteroskedastična jednačina

Uz neophodne uslove koji obezbeđuju pozitivnost uslovne volatilnosti

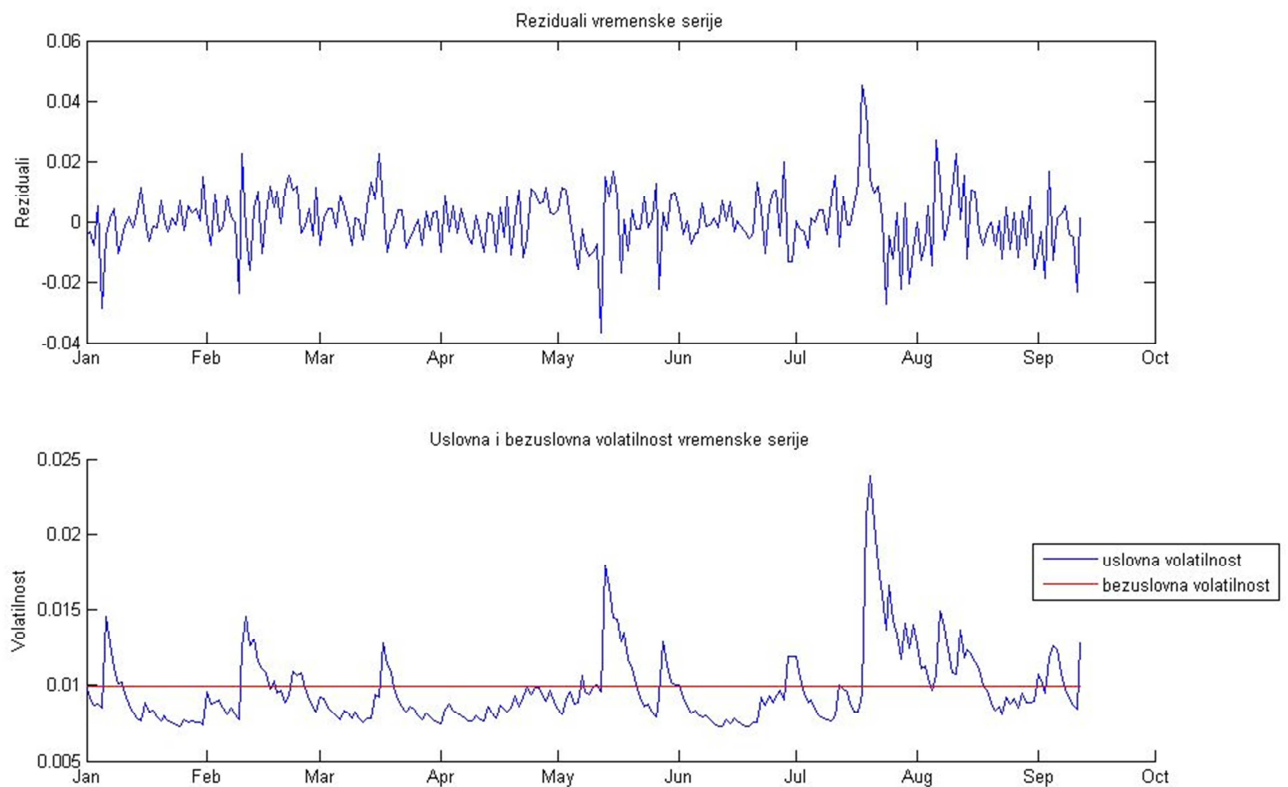
$$\kappa > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

Jednačinom 3.2.1 se opisuje nivo prinosa koji smo označili sa y_t u trenutku t , tj. jednačina predstavlja autoregresivni model pokretnih proseka reda m i n $ARMA(m, n)$.

Slučajni članovi modela e_t , u literaturi se nazivaju i rezidualima, poseduju vremenski promenljivu varijansu i predstavljaju funkciju od nezavisnih i jednako raspodeljenih u_t nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse koje imaju normalnu ili Studentovu raspodelu.

Jednačinom 3.2.3 se modelira uslovna varijansa $\sigma_t^2 = \text{var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E((y_t - E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}))^2 | \mathcal{F}_{t-1})$ prinosa y_t gde je $\mathcal{F}_{t-1}$ raspoloživi skup informacija zaključno sa trenutkom $t - 1$.

Ovako definisana uslovna varijansa se naziva i volatilnost. Preciznije, jednačinom 3.2.3 se opisuje uslovna varijansa prinosa y_t u funkciji od kvadrata slučajnih šokova e_t (tj. grešaka koje se prave autoregresijom u jednačini 3.2.1) u trenucima $t - 1, \dots, t - p$ i uslovnog varijabiliteta σ_t^2 u trenucima $t - 1, \dots, t - q$. Autoregresivni modeli pokretnih proseka mogu nam dobro poslužiti u projekciji nivoa prinosa ali neophodno je tim modelima, pridružiti heteroskedastični deo, preciznije neophodno je disperziju reziduala - slučajne greške e_t tretirati kao vremenski zavisnu, upravo zbog već navedene karakteristike finansijskih vremenskih serija da njihov varijabilitet prolazi kroz faze niskog i visokog varijabiliteta.



Slika 3.2.1 Komparacija kretanja reziduala prinosa finansijske vremenske serije sa uslovnom volatilnošću koja je ocenjena GARCH(1,1) modelom

Na slici 3.2.1 može se primetiti da uslovna volatilnost kvalitetnije opisuje dinamiku kretanja reziduala nego što je to slučaj kod безусловne volatilnosti.

Prisustvo heteroskedastičnosti u vremenskim serijama može se identifikovati koristeći Ljung Box test statistiku primenjujući je na kvadrate reziduala $\hat{e}_t^2$ koji su prethodno izvedeni iz autoregresivnog modela.

Nulta hipoteza: podaci su nezavisni (korelacija u populaciji je nula-uzorak slučajnog karaktera)

Alternativna hipoteza: podaci u uzorku nisu nezavisni (postoji serijska korelacija)

$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\rho_k^2}{n-k}$, gde su ρ_k koeficijenti autokorelacije, h broj lag-ova (istorijskog koraka) na kom se testira prisustvo heteroskedastičnosti, n veličina uzorka. Pri pretpostavci nulte hipoteze statistika Q ima χ_h^2 raspodelu.

U cilju određivanja nepoznatih parametara modela $\mu, \phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n; \kappa, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ vrši se maksimizacija funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti (primenjena na uzorku koji je u našem slučaju istorijsko kretanje prinosa portfolija knjige trgovanja) a pritom vodeći računa da parametri modela zadovoljavaju uslove koji obezbeđuju njegovu slabu stacionarnost.

U narednim podsekcijama biće predstavljeni posebno uslovi stacionarnosti autoregresivnog modela pokretnih proseka $ARMA(m, n)$ a posebno heteroskedastičnog modela $GARCH(p, q)$. Može se dokazati da oni zajedno obezbeđuju stacionarnost modela uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti [10].

3.2.1 Stacionarnost autoregresivnog modela $ARMA(m, n)$

Uopšteni $ARMA(m, n)$ model ima sledeću formu

$$y_t - \sum_{i=1}^m \phi_i y_{t-i} = \mu + e_t - \sum_{j=1}^n \theta_j y_{t-j}$$

Gde e_t beli šum - nezavisne i jednako raspodeljene slučajne veličine nulte srednje vrednosti i konstantne varijanse σ^2 , npr $e_t: \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Bez gubljenja opštosti u cilju određivanja uslova stacionarnosti upoštenog $ARMA(m, n)$ modela prvo ćemo analizirati model $ARMA(1, 1)$

$$(3.2.1.1) \quad y_t - \phi_1 y_{t-1} = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1}, \text{ gde je } e_t \text{ beli šum}$$

Pretpostavlja se da je serija (3.2.1.1) slabo stacionarna i na nju se primenjuje operator matematičkog očekivanja:

$$E(y_t) - \phi_1 E(y_{t-1}) = \mu + E(e_t) - \theta_1 E(e_{t-1})$$

iz pretpostavke slabe stacionarnosti i činjenice da je e_t beli šum sledi da je $E(y_t) = \eta = \frac{\mu}{1-\phi_1}$ odakle sledi da mora važiti $\phi_1 \neq 1$

Zatim, zbog jednostavnosti računa pretpostavimo da je $\mu = 0$, jednačinu (3.2.1.1) pomnožimo sa e_t i primenimo operator matematičkog očekivanja, sledi da je

$$(3.2.1.2) \quad E(y_t e_t) = E(e_t^2) - \theta_1 E(e_t e_{t-1}) = E(e_t^2) = \sigma^2$$

Primenjujući operator disperzije na jednačinu (3.2.1.1) uz pretpostavku da je $\mu = 0$ sledi da je

$$Var(y_t) = \phi_1^2 Var(y_{t-1}) + \sigma^2 + \theta_1^2 \sigma^2 - 2\phi_1 \theta_1 E(y_{t-1} e_{t-1}), \text{ ovde je korišćena činjenica da } y_{t-1} \text{ i } e_t \text{ nisu korelisani.}$$

Dalje važi, koristeći jednačinu (3.2.1.2) da je

$$(3.2.1.3) \quad Var(y_t) - \phi_1^2 Var(y_{t-1}) = (1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \sigma^2.$$

Uz pretpostavku stacionarnosti serije (3.2.1.1) t.j činjenice da je $Var(y_t) = Var(y_{t-1})$ dobija se

$$Var(y_t) = \frac{(1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2) \sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

Kako varijansa mora da bude nenegativna sledi da je uslov stacionarnosti serije $ARMA(1,1)$ $\phi_1^2 < 1$ tj. $|\phi_1| < 1$.

Sličnom analizom može se doći do uopštenja stacionarnosti za proces $ARMA(m, n)$ važi sledeće

Teorema 3.2.1.1 Uopšteni Autoregresivni model pokretnih sredina $ARMA(m, n)$ je slabo stacionaran ukoliko važi da su koeficijenti u autoregresivnom delu po modulu manji od jedan, tj. ukoliko je $|\phi_i| < 1$ za $i = 1, \dots, m$. [25]

3.2.2 Stacionarnost heteroskedastičnog modela GARCH(p, q)

Definicija 3.2.2.1 Neka je e_t vremenski diskretan stohastički proces i $\mathcal{F}_{t-1}$ raspoloživi skup informacija zaključno sa trenutkom $t - 1$; tada je e_t jedan $GARCH(p, q)$ proces ako važi:

$$e_t \parallel \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Gde je $\kappa > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, q$

Teorema 3.2.2.1 $GARCH(p, q)$ proces sa $E(e_t) = 0$, $Var(e_t) = \kappa(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j)^{-1}$ i $cov(e_t, e_s) = 0$ za $t \neq s$ je stacionaran ako i samo ako je $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$

Dokaz: Prikazaćemo dokaz za slučaj $GARCH(1,1)$ koji se, istom idejom, dalje uopštava za slučaj $GARCH(p, q)$

Proces e_t koji je $GARCH(1,1)$ zadovoljava $e_t = \sigma_t Z_t$ gde je Z_t i. i. d $\mathcal{N}(0,1)$, pa koristeći rekurziju možemo zapisati

$$e_t^2 = \kappa + \alpha_1 Z_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = \kappa + \alpha_1 Z_{t-1}^2 (\kappa + \alpha_1 Z_{t-2}^2 \sigma_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) + \beta_1 (\kappa + \alpha_1 Z_{t-2}^2 \sigma_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2}^2) =$$

...

$$= \kappa + \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k) \text{ gde } M(t, k) \text{ uključuje članove oblika } \alpha_1^a \beta_1^b \prod_{l=1}^a Z_{t-S_l}^2, \text{ za } a + b = k, \quad 1 \leq S_1 < \dots < S_a \leq k$$

Kako su Z_t i.i.d, srednja vrednost od $M(t, k)$ ne zavisi od t odnosno važi

$$E(M(t, k)) = E(M(s, k)) \text{ za sve } k, s, t$$

Čak šta više važi

$$M(t, 0) = 1,$$

$$M(t, 1) = \alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1,$$

Ili u opštem zapisu

$$M(t, k+1) = (\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1) M(t-1, k)$$

Što dalje vodi jednačini

$$E(M(t, k+1)) = (\alpha_1 + \beta_1) E(M(t, k)) =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1)^{k+1} E(M(t, 0))$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)^{k+1}$$

Iz datih jednakosti sledi

$$E(e_t^2) = \kappa E\left(\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k)\right) = \kappa \left(E\left(\sum_{k=0}^{\infty} M(t, k)\right)\right) = \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_1 + \beta_1)^{k+1}}$$

Što dalje implicira da je

$$E(e_t^2) = \frac{\kappa}{(1-\alpha_1-\beta_1)} \text{ ako i samo ako je } \alpha_1 + \beta_1 < 1 \text{ i } e_t^2 \text{ konvergira skoro sigurno; pa važi da je } E(e_t) = 0 \text{ i}$$

$$\text{cov}(e_t, e_s) = 0 \text{ za } t \neq s. \quad \blacksquare$$

Na osnovu dokazanih uslova stacionarnosti, posebno za autoregresivni odnosno za heteroskedastični deo modela, može se pokazati da za model uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^m \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \theta_j e_{t-j} + e_t,$$

$$e_t = \sigma_t u_t$$

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Neophodni i dovoljni uslovi njegove stacionarnosti glase:

$$|\phi_i| < 1 \text{ za } i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1,$$

dok su uslovi koji obezbeđuju nenegativost varijanse:

$$\kappa > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

Navedeni uslovi će važiti kao ograničenja prilikom određivanja nepoznatih parametara maksimizujući funkciju uslovne verodostojnosti.

3.2.3 Funkcija uslovne maksimalne verodostojnosti

Iz teorijske statistike je poznato da ako raspodela obeležja (pod obeležjem se podrazumeva neko svojstvo koje se proučava na elementima populacije-uzorka, koje ima karakter slučajnosti) X zavisi od nepoznatih parametara $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ tj. $(f(X, \Theta))$ i ako je $(X_1, \dots, X_n)$ prost slučajan uzorak obeležja X onda se nepoznati parametri određuju maksimizacijom funkcije maksimalne verodostojnosti $\mathcal{L}(\Theta, X_1, \dots, X_n) = f(X_1, \Theta) f(X_2, \Theta) \cdots f(X_n, \Theta)$.

Za posmatrani uzorak $(x_1, \dots, x_n)$ važi da je $\mathcal{L}(\Theta, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \Theta) f(x_2, \Theta) \cdots f(x_n, \Theta)$. Ako bismo, na primer, Θ birali iz skupa dva vektora Θ^1 i Θ^2 , onda je prirodno da se odlučimo za onu vrednost, recimo Θ^1 , za koju funkcija maksimalne verodostojnosti ima veću vrednost. Ova odluka se zasniva na uverenju da se registruje onaj uzorak $(x_1, \dots, x_n)$ koji ima najveću verovatnoću. S obzirom da se radi o nezavisnim slučajnim veličinama sa istim raspodelama verovatnoće u prostom uzorku $(X_1, \dots, X_n)$ to, slobodno govoreći, $f(x_1, \Theta) f(x_2, \Theta) \cdots f(x_n, \Theta)$ predstavlja verovatnoću realizacije uzorka $(x_1, \dots, x_n)$.

Neka $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_T)$ predstavlja istorijske opservacije vremenske serije (u našem slučaju istorijske opservacije prinosa portfolija knjige trgovanja), ako se pokaže da niz $\tilde{y}$ ima svojstvo autokorelisanosti i heteroskedastičnosti onda se $\tilde{y}$ može tretirati kao jedna realizacija analiziranog autoregresivnog – heteroskedastičnog modela.

S obzirom da slučajne veličine y_t iz modela $ARMA(m, n)/GARCH(p, q)$ nisu nezavisne odnosno da uzorak $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_T)$ nije prost slučajan uzorak, onda se nepoznati parametri modela

$\Theta = (\mu, \phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n; \kappa, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ određuju uz pomoć funkcije uslovne verodostojnosti.

Pri konstrukciji funkcije uslovne verodostojnosti biće korišćena relacija koja važi za uslovnu verovatnoću.

Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n, \mathbb{E}$ događaji iz istog prostora ishoda tada važi da je

$$P(A_1 A_2 \dots A_n | \mathbb{E}) = P(A_1 | \mathbb{E}) P(A_2 | A_1 \mathbb{E}) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots \mathbb{E})$$

Primenjujući navedeno na uslovnu funkciju gustine modela $(ARMA(m, n)/GARCH(p, q))$ sledi relacija [13]

$$\begin{aligned} & f(y_T y_{T-1} \dots y_{m+1} | y_m, \dots, y_1, e_m, e_{m-1}, \dots, e_{m-\max(n,p)+1}, \sigma_m^2, \sigma_{m-1}^2, \dots, \sigma_{m-q}^2; \Theta) = \\ & = \prod_{t=m+1}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_{(t-1)-m+1}, e_{t-1}, \dots, e_{(t-1)-\max(n,p)+1}, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{(t-1)-q}^2; \Theta) \end{aligned}$$

U literaturi [10] se preporučuje da se za preopservacije reziduala i uslovne volatilnosti $e_m, e_{m-1}, \dots, e_{m-\max(n,p)+1}, \sigma_m^2, \sigma_{m-1}^2, \dots, \sigma_{m-q}^2$ uzme bezuslovna standardna devijacija reziduala cele serije, tj.

$$e_m = e_{m-1} = \dots = e_{m-\max(n,p)+1} = \sigma_m = \sigma_{m-1} = \dots = \sigma_{m-q} = std(e_t).$$

Uz pretpostavku da slučajne veličine u_t imaju normalnu raspodelu nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse $u_t: \mathcal{N}(0,1)$

Funkcija uslovne verodostojnosti je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta) &= \ln \left(f(y_T y_{T-1} \dots y_{m+1} | y_m, \dots, y_1, e_m, e_{m-1}, \dots, e_{m-\max(n,p)+1}, \sigma_m^2, \sigma_{m-1}^2, \dots, \sigma_{m-q}^2; \Theta) \right) \\ &= \ln \left(\prod_{t=m+1}^T f(y_t | y_{t-1}, \dots, y_{(t-1)-m+1}, e_{t-1}, \dots, e_{(t-1)-\max(n,p)+1}, \sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{(t-1)-q}^2; \Theta) \right) \\ &= \ln \left(\prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{e_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \right) \end{aligned}$$

Nakon primene osobina logaritamske funkcije dobija se da važi

$$\mathcal{L}(\Theta) = -\frac{T-m}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \frac{e_t^2}{\sigma_t^2}$$

Promenljive σ_t^2 i e_t^2 se određuju rekurzijom, koristeći vrednosti u uzorku $\tilde{y}$ i jednačine modela

$$\sigma_t^2 = \kappa + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 + \alpha_1 \left(y_{t-1} - \mu - \phi_1 y_{t-2} - \dots - \phi_m y_{(t-1)-m} - \theta_1 \left(y_{t-2} - \mu - \phi_1 y_{t-3} - \dots - \phi_m y_{(t-2)-m} - \theta_1 \left(y_{t-3} - \mu - \phi_1 y_{t-4} - \dots - \phi_m y_{(t-3)-m} - \theta_1(\dots) \right) \right) - \theta_2 \left(y_{t-2} - \mu - \phi_1 y_{t-3} - \dots - \phi_m y_{(t-2)-m} - \theta_1 \left(y_{t-3} - \mu - \phi_1 y_{t-4} - \dots - \phi_m y_{(t-3)-m} - \theta_1(\dots) \right) \right) \dots - \theta_q(\dots) \right)^2 + \alpha_2 \left(y_{t-2} - \mu - \phi_1 y_{t-3} - \dots - \phi_m y_{(t-2)-m} - \theta_1(\dots) \right)^2 + \dots + \alpha_q \left(y_{t-q} - \mu - \phi_1 y_{t-q} - \dots - \phi_m y_{(t-q)-m} - \theta_1(\dots) \right)^2; \sigma_{t-1}^2 = \kappa + \beta_1 \sigma_{t-2}^2 + \beta_2 \sigma_{t-3}^2 + \dots; \dots; \sigma_m^2.$$

$$e_t = y_t - \mu - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_m y_{t-m} - \theta_1 \left(y_{t-1} - \mu - \phi_1 y_{t-2} - \dots - \phi_m y_{(t-1)-m} - \theta_1 \left(y_{t-2} - \mu - \phi_1 y_{t-3} - \dots - \phi_m y_{(t-2)-m} - \theta_1(\dots) \right) \right) - \theta_2 \left(y_{t-2} - \mu - \phi_1 y_{t-3} - \dots - \phi_m y_{(t-2)-m} - \theta_1 \left(y_{t-3} - \mu - \phi_1 y_{t-4} - \dots - \phi_m y_{(t-3)-m} - \theta_1 \left(y_{t-4} - \mu - \phi_1 y_{t-5} - \dots - \phi_m y_{(t-4)-m} - \theta_1(\dots) \right) \right) \dots - \theta_q(\dots) \right); e_{t-1} = y_{t-1} - \mu - \phi_1 y_{t-2} - \dots; \dots e_m.$$

3.2.4 Prognoza

U najvažnije zadatke pri analizi vremenskih serija spada i zadatak predviđanja – prognoziranja njenih budućih vrednosti (vrednosti koje će vremenski doći posle već poznatih vrednosti serije).

Ukoliko su koeficijenti autoregresivnog heteroskedastičnog modela ocenjeni, moguće je, koristeći opservirane istorijske vrednosti, izvršiti projekciju budućeg kretanja njenog nivoa i uslovnog varijabiliteta. Projekcija se vrši, kako je navedeno u sekciji 3.1, koristeći uslovno matematičko očekivanje. Ako je poznato prvih n opservacija vremenske serije y_t , $t = 1, \dots, t-1$, prognoza za jedan korak unapred njenog nivoa vrši se na sledeći način

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = \\ &= E(\mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_m y_{t-m} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_{t-n} e_{t-n} + e_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) \\ &= \mu + \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_m y_{t-m} + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_{t-n} e_{t-n} \end{aligned}$$

Prognoza nivoa za dva koraka unapred je

$$\begin{aligned} \widehat{y_{t+1}} &= E(y_{t+1} | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_{t+1} | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) \\ &= E(\mu + \phi_1 \hat{y}_t + \dots + \phi_m y_{t+1-m} + \theta_1 e_t + \dots + \theta_{t+1-n} e_{t+1-n} + e_{t+1} | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) \\ &= \mu + \phi_1 \hat{y}_t + \dots + \phi_m y_{t+1-m} + \theta_2 e_{t-1} + \dots + \theta_{t+1-n} e_{t+1-n} \end{aligned}$$

Postupak se dalje nastavlja na isti način i pri tome deo pokretnih proseka MA(n) postepeno isčezava i projekcija se svodi samo na autoregresivni deo

$$\widehat{y_{t+k}} = \mu + \phi_1 \widehat{y_{t+k-1}} + \dots + \phi_m \widehat{y_{t+k-m}}$$

Pored projekcije nivoa $\widehat{y_t}$ vremenske serije, vrši se i projekcija uslovnog varijabiliteta

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_t^2} &= E(k + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2 | \sigma_{t-1}^2, \dots, e_{t-1}^2) \\ &= k + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-p}^2 \end{aligned}$$

Postupak se dalje nastavlja uz postepeno nestajanje reziduala. Može se pokazati da za dovoljno veliko k prognoza uslovnog varijabiliteta $\widehat{\sigma_{t+k}^2}$ postaje jednaka безусловnoj varijansi modela $\frac{k}{1 - (\beta_1 + \dots + \beta_q + \alpha_1 + \dots + \alpha_p)}$.

Na primer za model $GARCH(1,1)$ $\sigma_t^2 = k + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 e_{t-1}^2$, $e_t = \sigma_t u_t$ kod kojeg su poznate opservacije zaključno sa trenutkom $t-1$, prognoza za jedan korak unapred je $\widehat{\sigma_t^2} = k + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 e_{t-1}^2$, dok je prognoza za dva koraka unapred $\widehat{\sigma_{t+1}^2} = E(\sigma_{t+1}^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = k + (\beta_1 + \alpha_1) \widehat{\sigma_t^2} + \alpha_1 E(u_t^2 - 1 | \mathcal{F}_{t-1}) \sigma_t^2 = k + (\beta_1 + \alpha_1) \widehat{\sigma_t^2}$

imajući u vidu da je $E(u_t^2 - 1 | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Nastavljanjem istog postupka sledi da je $\widehat{\sigma_{t+k}^2} = k \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \widehat{\sigma_t^2}$, a kako je iz uslova stacionarnosti $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ prognozirani varijabilitet teži безусловnoj varijansi $\frac{k}{1 - (\beta_1 + \alpha_1)}$.

Kada je određena prognoza nivoa serije $\widehat{y_t}$ i njenog uslovnog varijabiliteta $\widehat{\sigma_t^2}$ i ako je $u_t : N(0,1)$ tada je uslovna raspodela slučajne promenljive y_t normalna raspodela sa parametrima $\widehat{y_t}$ i $\widehat{\sigma_t}$ tj. $y_t : N(\widehat{y_t}, \widehat{\sigma_t})$

Pošto je raspodela budućeg prinosa y_t ocenjena, može se oceniti i maksimalni gubitak VaR.

4 Metod optimizacije

U cilju određivanja optimalnih vrednosti parametara uopštenog autoregresivnog modela uslovne heteroskedastičnosti, koji na najbolji način opisuju kretanje slučajnih veličina u uzorku $\tilde{y}$, rešavamo sledeći problem tipa minimizacije

$$(4.1) \quad \min (-\mathcal{L}(\theta)) \text{ , gde je } \mathcal{L}(\theta) = -\frac{T-m}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^T \frac{e_t^2}{\sigma_t^2}$$

pri ograničenima:

$$(4.1.a) \quad |\phi_i| < 1, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

$$(4.1.b) \quad \kappa > 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, q$$

Ograničenja (4.1.a) obezbeđuju stacionarnost procesa, ukoliko ne bi bile zadovoljene stroge nejednakosti proces bi karakterisao neograničeni rast uslovnog varijabiliteta.

Ograničenja (4.1.b) obezbeđuju nenegativnost uslovnog varijabiliteta.

Podsetimo se da su e_t, σ_t dati rekurzijom kao što je definisano u delu 3.2.3.

Optimalne vrednosti parametara (promenljivih) za koje funkcija uslovne maksimalne verodostojnosti $\mathcal{L}(\theta)$ dostiže maksimum biće određene pomoću različitih metoda optimizacije: gradijentnom metodom, genetskim algoritmom i simuliranim kaljenjem.

Problem $\min(-\mathcal{L}(\theta))$ može se posmatrati kao problem $\max \mathcal{L}(\theta)$.

U ostatku sekcije biće date osnovne karakteristike svake od navedenih metoda, a zatim i detalji konkretnih implementacija koje su korišćene za rešavanje posmatranog problema.

4.1 Genetski algoritam

Prve ideje o genetskim algoritmima izložene su 1975. godine u radu J.Holland-a [14], i javile su se u okviru tzv. teorije adaptivnih sistema, koja proučava modele efikasnog adaptivnog ponašanja nekih bioloških, specijalno genetskih, sistema. Genetski algoritam (Genetic Algorithm, GA) predstavlja metaheuristiku koja koristi veći broj rešenja (populaciju) i bazirana je na principima prirodne evolucije. To je proces koji treba da simulira reprodukciju živih organizama u prirodi. Rešenja, koja su članovi neke populacije, mešaju se i proizvode potomke koji bi trebalo da zadržavaju dobre osobine svojih predaka. Osnovna ideja metode (po ugledu na prirodnu evoluciju) je da se izabere inicijalna populacija i da se zatim kroz niz generacija evoluiranja te populacije vrši popravka trenutno najboljeg rešenja primenom takozvanih operatora tj. transformacijom polaznih rešenja i generisanjem potomaka. Genetski algoritam se primenjuje na konačnom skupu jedinki koji se naziva populacija. Svaka jedinka u populaciji je predstavljena nizom karaktera (genetskim kodom) i odgovara nekom rešenju u pretraživačkom prostoru. Kodiranje može biti binarno ili nad nekom drugom azbukom veće kardinalnosti. Kodiranje rešenja je važan korak GA jer neadekvatan izbor koda može dovesti do loših rezultata bez obzira na ostalu strukturu algoritma.

Početna populacija se obično generiše na slučajan način, što obezbeđuje raznovrsnost genetskog materijala. Moguće je korišćenje neke heuristike za generisanje početne populacije, ili jednog njenog dela, uz uslov da se programi zasnovani na toj heuristici relativno brzo izvršavaju i da se značajno ne smanjuje raznovrsnost genetskog materijala. Svakoј jedinki u populaciji (u praksi ih je najviše do nekoliko stotina) se na određen način dodeljuje funkcija prilagođenosti koja je merilo kvaliteta jedinke (odnosno odgovarajućeg rešenja).

Standardni pristup konceptu GA [14, 11, 24] smatra da je cilj algoritma da se iz generacije u generaciju poboljšava prilagođenost svake jedinke u populaciji, kao i srednja prilagođenost cele populacije uzastopnom primenom genetskih operatora: selekcije, ukrštanja i mutacije.

Genetski operator selekcije vrši izbor jedinki iz populacije koje učestvuju u stvaranju nove generacije. Selekcija se primenjuje u skladu sa vrednostima funkcije prilagođenosti. Standardni pristup smatra da će bolje prilagođene jedinke preneti dobar genetski materijal na svoje potomke, pa smanjuje šansu prolaska loših jedinki u narednu generaciju, tako da one postepeno nestaju iz populacije.

Operator ukrštanja predstavlja postupak razmene delova genetskog koda dve (ili više) jedinke-roditelja i tako se dobijaju kodovi novih (jedne ili više) jedinki-potomaka. Ovim operatorom se daje mogućnost da, razmenom genetskog materijala, dobro prilagođene jedinke generišu još bolje prilagođene jedinke. Takođe, relativno slabije

prilagođene jedinke sa dobrim genima dobijaju svoju šansu da rekombinacijom dobrih gena proizvedu dobro prilagođene jedinke. Ukrštanje se vrši sa unapred zadatom vrednošću verovatnoće ukrštanja. Ova vrednost određuje koliko jedinki učestvuje u ukrštanju proizvodeći nove jedinke, ali i koliko se jedinki prenosi u sledeću generaciju bez modifikacija.

Primena isključivo operatora selekcije i ukrštanja po pravilu dovodi do preuranjene konvergencije ka lošem lokalnom ekstremumu. Do toga dolazi drastičnim i uzastopnim gubljenjem genetskog materijala, zbog čega sve veći regioni pretraživačkog prostora postaju nedostupni. Da bi se ovo izbeglo uvodi se i operator mutacije.

Uloga mutacije je da obezbedi diversifikaciju prilikom pretraživanja prostora rešenja. Nasuprot ukrštanju koje teži zadržavanju osobina dobrih jedinki, rezultat mutacije treba da bude "promena" genetskog materijala koja će usmeriti pretragu ka još uvek neistraženim regionima. Mutacijom se vrši promena koda jedinke zamenom pojedinih simbola koda nekim drugim simbolima azbuke kodiranja. Svaki gen genetskog koda može mutirati sa datom malom verovatnoćom p_{mut} ((obično reda 10^{-3}).

Nakon završetka svih operacija nad jedinkama tekuće populacije dobija se novih N_p jedinki koje, zajedno sa jedinkama tekuće populacije, konkurišu za ulazak u sledeću generaciju. Operatori genetskog algoritma se uzastopno primenjuju do zadovoljenja nekog od kriterijuma zaustavljanja: maksimalan broj generacija, dostignut optimum, nepromenjen kvalitet rešenja posle unapred zadatog broja generacija itd.

Na osnovu prethodnih obrazloženja, pseudokod GA bi imao sledeći oblik [22] :

```

Unošenje_Ulaznih_Podataka();
Generisanje_Početne_Populacije();
while not Kriterijum_Zaustavljanja_GA() do
  for i=1 to  $N_{pop}$  do
    obj[i] = Funkcija_Cilja(i);
  endfor
  Funkcija_Prilagođenosti();
  Selekcija();
  Ukrštanje();
  Mutacija();
endwhile
Štampanje_Izlaznih_Podataka();

```

GA uključuju različite vrste kodiranja i funkcija prilagođenosti, a razvijen je i čitav spektar genetskih operatora selekcije, ukrštanja i mutacije koji se koriste u zavisnosti od karakteristika rešavanog problema.

U nastavku je dat, za svaki od genetskih operatora, pregled njihovih tipova/alternativa koji se najčešće koriste.

4.1.1 Kodiranje i funkcija prilagođenosti

Kodiranje i funkcija cilja su značajniji faktori za uspešnu primenu genetskog algoritma pri rešavanju nekog problema. Oni direktno zavise od prirode problema koji se rešava, tako da se često događa da metode koje daju dobre rezultate u nekim primenama mogu dati vrlo loše rezultate kada se primene na druge probleme.

Rešenje optimizacijskog problema uvek se može prikazati na više načina. Najčešće se koriste: binarno kodiranje koje svakom rešenju dodeljuje kod unapred zadate dužine nad azbukom $\{0,1\}$, kodiranje nad azbukama veće kardinalnosti (na primer, celim ili realnim brojevima), kao i prikazi permutacijama i matricama. Neki matematičari u teorijskim razmatranjima favorizuju binarno kodiranje [11], dok drugi daju prednost nebinarnim reprezentacijama [1, 4].

Prikaz rešenja nizom bitova (engl. bit-string) spada u najjednostavnije prikaze. Svako rešenje je predstavljeno kao niz nula i jedinica. Kodiranje prirodnim binarnim kodom sa sobom donosi nezgodan problem: minimalna promena na nivou binarnog prikaza može uzrokovati drastičnu promenu u funkciji prilagođenosti odnosno funkciji cilja. Moguće rešenje uočenog problema je napuštanje prirodnog binarnog koda i upotreba binarnih kodova s minimalnom promenom: npr Grayevog koda. Važna karakteristika Grayevog koda je svojstvo da se svake dve susedne binarne reči razlikuju u tačno jednom bitu.

Što se tiče funkcija prilagođenosti, postoje različiti načini računanja: direktno preuzimanje, linearno skaliranje, skaliranje u jedinični interval, sigma odsecanje, funkcija rangiranja prilagođenosti jedinki u populaciji, kao i takozvani top scaling [21]. GA ne zahteva neprekidnost i glatkost funkcije prilagođenosti, on se može primeniti i u slučajevima kada nisu ispunjeni uslovi za primenu klasičnih metoda. Najjednostavniji način računanja funkcije prilagođenosti je direktno preuzimanje kod kojeg se za vrednost funkcije prilagođenosti neke jedinke uzima vrednost njene funkcije cilja. Međutim, ovaj pristup u praksi često daje slabe rezultate.

Kada je linearno skaliranje u pitanju, prilagođenost neke jedinke se računa kao linearna funkcija vrednosti funkcije cilja te jedinke $\tilde{f}(x) = a + bx$

Koeficijenti a i b se mogu odrediti iz sledećih relacija:

$$\gamma = \max - \bar{x}, a = (C - 1)\bar{x}/\gamma, b = \bar{x}(\max - C\bar{x})/\gamma;$$

$$\gamma = \bar{x} - \min, a = \frac{\bar{x}}{\gamma}, b = -\min * \bar{x}/\gamma,$$

gde su $\min, \max$ i $\bar{x}$ redom minimalna, maksimalna i srednja vrednost funkcije cilja jedinki u populaciji, dok je C proizvoljno i bira se iz intervala $[1, 3]$.

Skaliranje u jedinični interval podrazumeva da funkcija prilagođenosti uzima vrednosti iz intervala $[0, 1]$. Najbolja jedinka ima prilagođenost čija je vrednost gornja granica intervala - tj. jedan, dok najslabije prilagođena jedinka ima prilagođenost čija je vrednost nula. Funkcija se definiše na sledeći način:

$$\tilde{f}(x) = \frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}}, \text{ gde su } x, x_{\min}, x_{\max} \text{ redom tekuća, minimalna i maksimalna vrednost jedinki u populaciji.}$$

Funkcija prilagođenosti kod sigma odsecanja se određuje na sledeći način:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & x < \bar{x} - C\sigma \\ x - (\bar{x} - C\sigma), & x > \bar{x} - C\sigma \end{cases}$$

gde je $\bar{x}$ srednja vrednost funkcije cilja jedinki u populaciji, dok je σ standardna devijacija u populaciji.

Funkcija rangiranja prilagođenosti jedinki u populaciji se konstruiše na osnovu ranga jedinke do kog se dolazi na taj način što se jedinke u populaciji sortiraju u skladu sa vrednostima funkcije cilja (jedinka sa najboljim rezultatom ima rang jedan tj. $r = 1$ dok najlošija jedinka ima rang koji je jednak obimu populacije). Funkcija rangiranja prilagođenosti u populaciji se zatim definiše kao $f = \frac{1}{\sqrt{r}}$.

4.1.2 Selekcija

Zadatak operatora selekcije je da odabere jedinke koje će učestvovati u postupku stvaranja nove generacije. Operator selekcije treba da osigura mehanizam koji će boljim rešenjima dati priliku da učestvuju u stvaranju novih rešenja, time će se proces pretraživanja prostora rešenja voditi u područja koja više obećavaju. Najčešće korišćeni operatori selekcije su:

Proporcionalna selekcija

Proporcionalna selekcija [14] svakom rešenju u populaciji pridružuje verovatnoću izbora koja je proporcionalna vrednosti funkcije prilagođenosti. Selekcija je poznata pod nazivom "izbor pomoću ruleta" (engl. roulette-wheel selection).

Verovatnoća izbora i -te jedinke definiše se izrazom:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{f_i}{n\bar{f}}$$

gde je f_i vrednost funkcije prilagođenosti i -tog rešenja.

Sa datim verovatnoćama jedinke učestvuju na ruletu i u skladu sa njima (ne)prolaze u proces stvaranja nove generacije. Nedostatak proste rulet selekcije je mogućnost preuranjene konvergencije usled postepenog preovlađivanja visoko prilagođenih jedinki u populaciji koje ne odgovaraju globalnom optimumu.

Relativna proporcionalna selekcija

Umesto da se verovatnoća odabira rešenja temelji direktno na vrednosti funkcije prilagođenosti f_i , uvodi se za svako rešenje relativna prilagođenost $g_i = f_i - f_{min}$, gde je f_{min} vrednost funkcije prilagođenosti najlošijeg rešenja u populaciji. U ovom slučaju verovatnoće se definišu na sledeći način:

$$p_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^n g_i} = \frac{f_i - f_{min}}{\sum_{i=1}^n f_i - f_{min}} = \frac{f_i - f_{min}}{n(\bar{f} - f_{min})}$$

Boltzmanova selekcija

Boltzmannova selekcija (engl. Boltzmann selection) [18] je selekcija kod koje je verovatnoća izbora rešenja eksponencijalno proporcionalna kvalitetu rešenja - vrednosti funkcije prilagođenosti. Verovatnoća odabira rešenja definiše se izrazom

$$p_i = \frac{e^{\beta f_i}}{\sum_{i=1}^n e^{\beta f_i}}$$

gde je β slobodan parametar koji utiče na verovatnoću izbora.

Stohastičko univerzalno uzorkovanje

Proporcionalna selekcija, relativna proporcionalna selekcija i Boltzmanova selekcija definišu način dodele verovatnoće rešenjima u populaciji. Ako treba da odaberemo k jedinki, postupak izvlačenja ćemo ponavljati k puta što računski može biti vrlo zahtevno.

Ideja stohastičkog univerzalnog uzorkovanja (engl. Stochastic universal sampling) jeste da odjednom iz populacije izvučemo svih potrebnih k jedinki; implementacijski, to bi značilo da se koristi samo jedan poziv generatora slučajnih brojeva za izvlačenje svih k jedinki [3].

Ova selekcija izvodi se na sledeći način. Neka je n broj rešenja u populaciji, f_i vrednost funkcije prilagođenosti i -tog rešenja (funkcije prilagođenosti moraju biti nenegativne) i neka je $F = \sum_{i=1}^n f_i$ ukupna prilagođenost. Generiše se slučajan broj r iz intervala $\left[0, \frac{F}{k}\right]$ gde je k broj rešenja koje želimo da izvučemo.

Na brojnu osu se slažu rešenja na način da se krene od nule, i prvom rešenju se dodeli interval na brojnoj osi od nule pa do f_1 , nastavlja se sa sledećim rešenjem koje zauzima interval brojne ose od f_1 do f_2 , opisani postupak se nastavlja. Ukupna dužina svih zauzetih intervala je upravo F . Na datoj brojnoj osi se uočavaju sledeće tačke

$$\{r_0, \dots, r_{k-1}\} = \left\{r, r + 1 \cdot \frac{F}{k}, r + 2 \cdot \frac{F}{k}, \dots, r + (k-1) \cdot \frac{F}{k}\right\}$$

Svaka tačka r_i pripada intervalu nekog od rešenja - to rešenje se selektuje i postaje kandidat za prelazak u sledeću generaciju.

Selekcija linearnim rangiranjem

Kod selekcije linearnim rangiranjem (engl. linear ranking selection) [2] rešenja u populaciji se sortiraju prema rastućim vrednostima funkcije prilagođenosti i potom im se dodeljuje verovatnoća izbora koja je linearno proporcionalna rangu (poziciji) rešenja. Rang 1 pripada najgorem rešenju a rang n najboljem rešenju. Da bi se do kraja definisala dodela verovatnoće potrebno je definisati dva parametra:

n^+ – koliko se kopija najboljeg rešenja očekuje u novoj populaciji

n^- – koliko se kopija najgoreg rešenja očekuje u novoj populaciji.

Tada se verovatnoća odabira jedinke ranga i računa prema sledećem izrazu:

$$p_i = \frac{n^- + \frac{(n^+ - n^-)(i-1)}{n-1}}{n}$$

Pri tome suma $n^+ + n^-$ mora biti jednaka 2 kako bi važilo da je $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Selekcija eksponencijalnim rangiranjem

Kod selekcije eksponencijalnim rangiranjem (engl. exponential ranking selection) [2] rešenja u populaciji se sortiraju prema rastućim vrednostima funkcije prilagođenosti i potom im se dodeljuje verovatnoća izbora koja je eksponencijalno proporcionalna rangu (poziciji) rešenja. Rang 1 pripada najgorem rešenju a rang n najboljem. Verovatnoća izbora jedinke ranga i računa se prema sledećem izrazu:

$$p_i = \frac{c^{n-i}}{\sum_{j=1}^n c^{n-j}} = \frac{c-1}{c^n-1} c^{n-i}$$

Gde je $c \in [0,1]$ parametar koji utiče na verovatnoću izbora. Za vrednosti parametra c koje su bliske 1, dobijeni intezitet selekcije je vrlo mali. Kada je $c = 1$, sva rešenja će imati jednaku verovatnoću izbora $\frac{1}{n}$ čime će intezitet selekcije biti minimalan ali će se čuvati raznovrsnost populacije. Smanjivanjem vrednosti c intezitet selekcije vrlo brzo raste a raznovrsnost populacije opada čime ovaj operator postaje bolji od linearnog rangiranja. Međutim, kako smanjivanjem vrednosti parametra c raznovrsnost opada, ovu selekciju nije moguće koristiti ako se u algoritam ne uključe drugi operatori čija bi namena bila povećavanje raznovrsnosti kako bi se dobila ravnoteža. U praksi se ovaj operator koristi sa vrednostima c koje su bliske 1.

Turnirska selekcija

Turnirska selekcija [12] je zasnovana na principu turnira. Turniri su mala takmičenja između jedinki populacije, koji se nadmeću radi preživljavanja i učešća u sledećoj generaciji. Broj jedinki koje učestvuju na turniru je veličina turnira (u oznaci N), koja predstavlja parametar turnirske selekcije (koji se najčešće unapred zadaje). Turnirska selekcija se realizuje tako što se najpre na slučajan način generišu podskupovi od po N jedinki, a zatim se u svakom podskupu bira najbolja jedinka koja učestvuje u stvaranju nove generacije. Obično je problem izabrati veličinu turnira N tako da se smanje nepovoljni stohastički efekti, kako bi što bolji i raznovrsniji genetski materijal prošao u sledeću generaciju.

Turnirska selekcija koja iz populacije od N rešenja izvlači slučajni uzorak od s rešenja naziva se s -turnirska selekcija. U praksi postoje dve varijante s -turnirskih selekcija:

- varijanta kod koje se s puta ponavlja biranje rešenja iz čitave populacije; kod ovog pristupa je moguće da isto rešenje bude više puta odabrano (odnosno da uzorak od s rešenja sadrži duplikate)
- varijanta kod koje se biranje ponavlja s puta ali na način da se nakon svakog odabira dalje bira iz podskupa populacije iz kojeg su uklonjena do tada odabrana rešenja (pa uzorak od s rešenja neće imati duplikata ako originalna populacija nije imala duplikata).

Turnirska selekcija sa ponavljanjima

Neka je data populacija od N rešenja koja je sortirana po rastućem poretku (rešenje čija je prilagođenost najlošija je na prvom mestu odnosno ima rang 1, a rešenje čija je prilagođenost najbolja je na poslednjem mestu, odnosno ima rang n). Nasumično se izvlači jedno rešenje prema uniformnoj distribuciji. Verovatnoća da je izvučeno najgore rešenje, najbolje rešenje ili bilo koje između je ista: $\frac{1}{n}$. Verovatnoća da je izvučeno rešenje koje je na mestu 1 ili na mestu 2 je $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$. Može se zaključiti da je verovatnoća da je izvučeno rešenje koje je na bilo kojem od mesta $1, 2, \dots, i$ jednaka $\sum_{j=1}^i \frac{1}{n}$. Ako se izvlačenje ponavlja s puta, verovatnoća da je u svih s izvlačenja odabrano rešenje koje je na prvim i pozicija jednaka je proizvodu verovatnoća da je u svakom izvlačenju izvučeno takvo rešenje $\left(\frac{i}{n}\right)^s$. Rešenje na poziciji i će pobediti:

1. ako je svaki put u s izvlačenja izvučeno neko od prvih i rešenja
2. ako je rešenje i zaista izvučeno, što znači da se nije dogodio slučaj da je u svih s izvlačenja izvučeno neko od prvih $i-1$ rešenja.

Prvi uslov je važan jer osigurava da nije izvučeno ni jedno rešenje koje je na poziciji većoj od i , populacija je sortirana po rastućim vrednostima prilagođenosti, što znači da se na kasnijoj poziciji nalazi bolje rešenje. Stoga, da bi rešenje i bilo pobednik turnira, u svih s izvlačenja smeju biti izabrana samo rešenja na poziciji i ili manjoj. Drugi uslov osigurava da je rešenje i barem jednom izvučeno - inače ne može biti pobednik.

Tražena verovatnoća je prema tome jednaka verovatnoći da je u s izvlačenja izvučeno rešenje koje je na poziciji $1, 2, \dots, i$ što je $\left(\frac{i}{n}\right)^s$ minus verovatnoća da smo u svih s izvlačenja izvukli rešenje koje je na poziciji $1, 2, \dots, i-1$ koja iznosi $\left(\frac{i-1}{n}\right)^s$. Sledi da je tražena verovatnoća jednaka $p_i = \left(\frac{i}{n}\right)^s - \left(\frac{i-1}{n}\right)^s$.

4.1.3 Ukrštanje

Operatorom ukrštanja izvršava se razmena genetskog materijala jedinki koje su operatorom selekcije odbabrane da budu roditelji novim jedinkama (potomcima). Ukrštanje se najčešće postiže jednopozicionim, dvopozicionim, višepozicionim ili uniformnim ukrštanjem, ali postoje i složenije varijante ovog genetskog operatora [20].

Kod jednopolozicionog ukrštanja se na slučajan način biraju parovi jedinki-roditelja iz populacije i broj $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ koji predstavlja tačku ukrštanja (n je dužina genetskog koda). Svi geni počevši od pozicije $k + 1$ do poslednje pozicije $n - 1$ u genetskim kodovima jedinki-roditelja uzajamno menjaju mesta, stvarajući pri tom dve nove jedinke-potomka. Kod dvopolozicionog ukrštanja slučajno se biraju dve tačke ukrštanja k_1 i k_2 razmenjuju se delovi genetskih kodova roditelja, od gena na poziciji $k_1 + 1$ do gena na poziciji k_2 . Kod uniformnog ukrštanja se za svaki roditeljski par na slučajan način generiše "maska", odnosno binarni niz iste dužine kao genetski kod. Roditelji zatim razmenjuju gene na svim pozicijama na kojima maska ima vrednost 0, dok na mestima gde maska uzima vrednost 1 roditelji zadržavaju svoje gene. Pored navedenih u upotrebi su i sledeće tehnike:

Aritmetičko ukrštanje (engl. arithmetical crossover)

Ovo ukrštanje stvara dva deteta.

Neka su odabrana dva roditelja $C_1 = (c_1^1, \dots, c_n^1)$ i $C_2 = (c_1^2, \dots, c_n^2)$ i neka je $\lambda \in [0, 1]$. Tada se deca

$H_1 = (h_1^1, \dots, h_n^1)$ i $H_2 = (h_1^2, \dots, h_n^2)$, definišu kao linearna kombinacija svojih roditelja

$$h_i^1 = \lambda c_i^1 + (1 - \lambda) c_i^2 \text{ i } h_i^2 = \lambda c_i^2 + (1 - \lambda) c_i^1.$$

BLX- α ukrštanje (BLX- α crossover)[9]

Stvara jedno dete. Označimo najpre $c_{i,min} = \min(c_i^1, c_i^2)$ i $c_{i,max} = \max(c_i^1, c_i^2)$ $I_i = c_{i,max} - c_{i,min}$

Dete $H = (h_1, \dots, h_n)$ se gradi tako što se h_i izabere uniformno iz intervala $[c_{i,min} - I_i\alpha, c_{i,max} + I_i\alpha]$.

Prošireno linijsko ukrštanje

Stvara jedno dete $H = (h_1, \dots, h_n)$ gde je $h_i = c_i^2 + r(c_i^1 - c_i^2)$, r može se ili fiksirati ili se bira slučajno uniformno iz intervala $[-0,25; 1,25]$.

4.1.4 Mutacija

Najpoznatije varijante operatora mutacije su: prosta mutacija, mutacija pomoću binomne raspodele i mutacija pomoću normalne raspodele.

Ako genetski algoritam koristi binarno kodiranje i populacija nema nekorektnih jedinki, obično se implementira operator proste mutacije koji na slučajan način (sa unapred zadatom verovatnoćom p_{mut}) bira neke bitove

jedinke i mutira ih. Prosta mutacija se ponekad primenjuje preko binarnog niza – maske, koja se slučajno generiše za svaku jedinku i nosi informaciju o tome na kojoj poziciji u genetskom kodu dolazi do promene gena.

Pri primeni mutacije pomoću binomne raspodele određuje se X_{mut} - broj mutiranih gena jedinke. X_{mut} je slučajna veličina koja ima binomnu raspodelu $B(N, p_{mut})$ gde je N dužina genetskog koda, a p_{mut} je nivo mutacije. Neka je F njena funkcija raspodele. Zatim, bismo slučajan broj $s \in [0,1]$ i pronalazimo X_{mut} tako da važi $F(X_{mut}) \leq F(s) < F(X_{mut} + 1)$. Na kraju se na slučajan način bira pozicija u genetskom kodu na kome se vrši mutacija.

Ako genetski algoritam koristi kodiranje celim ili realnim brojevima (sa pokretnim zarezom) razvijeni su drugi koncepti mutacije: zamena gena slučajno izabranim brojem (random replacement), dodavanje ili oduzimanje male vrednosti (creep), množenje brojem bliskim jedinici (geometric creep) itd. Za oba pomenuta operatora mutacije potrebne vrednosti (creep values) su slučajne i mogu imati uniformnu, eksponencijalnu, Gausovu ili binomnu raspodelu (videti [4, 5]).

Operator uniformne mutacije može se opisati sledećim koracima:

U datoj jedinci $x = (x_1, \dots, x_n)$ za slučajno izabrane $x_j, j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ vrši se transformacija $x_j \rightarrow x'_j$

$$\text{gde je } x'_j = \begin{cases} x_j + rx_j, & l_d \leq x_j + rx_j \leq l_g \\ l_d, & l_d > x_j + rx_j \\ l_g, & x_j + rx_j > l_g \end{cases}, \quad r : U(-1,1), \quad l_d \text{ i } l_g \text{ predstavljaju donju odnosno gornju dopustivu}$$

granicu.

Takođe slučajnu promenljivu r moguće je birati i iz drugih raspodela eksponencijalne, Gausove...

4.1.5 Kriterijum zaustavljanja

Izvršavanje genetskog algoritma, koji u osnovi predstavlja stohastičku metodu pretrage, može trajati beskonačno dugo, zbog toga je neophodno nametnuti kriterijume zaustavljanja. Postoji nekoliko kriterijuma završetka genetskog algoritma: maksimalni broj generacija, sličnost jedinki u populaciji, najbolja jedinka je ponovljena maksimalni broj puta, algoritam je dostigao optimalno rešenje (ukoliko je ono unapred poznato), dokazana optimalnost najbolje jedinke (ukoliko je to moguće), ograničeno vreme izvršavanja GA, prekid od strane korisnika, itd.

4.1.6 Ostali aspekti genetskog algoritma

Jedan od važnijih aspekata genetskog algoritma je politika zamene generacija. Najčešće se primenjuju sledeće strategije: a. Generacijska (generational) b. Stacionarna (steady-state) c. Elitistička strategija (elitist strategy). Generacijski genetski algoritam u svakoj generaciji vrši zamenu čitave populacije novim jedinkama (potomcima). Stacionarni genetski algoritam generiše samo deo populacije u svakoj generaciji, a preostale jedinke se prenose iz prethodne generacije. Elitistička strategija zamene generacija omogućava da jedna ili više najboljih (elitnih) jedinki prođe direktno u narednu generaciju, bez primene genetskih operatora selekcije, ukrštanja i mutacije i bez računanja funkcije prilagođenosti. Ova strategija je bolja od prethodne dve, mada je moguće i njihovo kombinovanje.

4.2 Predloženi genetski algoritam

Za optimalno određivanje nepoznatih parametara (promenljivih) uopštenog autoregresivnog modela uslovne heteroskedastičnosti genetskim algoritmom, korišćeno je istorijsko kretanje neto prinosa portfolija likvidnih vlasničkih odnosno dužničkih hartija od vrednosti koje su kotirane na Beogradskoj berzi. U analizi su korišćene funkcije programskog paketa Matlab R2008b koje pripadaju toolboxu Genetic algorithm and direct search.

Strategijom koja se bazira na kombinovanju različitih alternativa operatora genetskog algoritma pronađen je najoptimalniji genetski koncept koji se razlikuje od postojećih [15, 28, 27].

Opisaćemo osnovne karakteristike predloženog genetskog algoritma.

4.2.1 Reprezentacija i funkcija prilagođenosti

Kako problem optimizacije nije diskretnog tipa za reprezentaciju jedinki u ovoj GA implementaciji primenjeno je ne-binarno kodiranje, odnosno jedinke u populaciji se prikazuju realnim brojevima. Početna populacija se bira slučajno kako bi se obezbedila raznovrsnost genetskog materijala, populacija se uzorkuje iz dopustivog skupa rešenja. Broj jedinki u populaciji je 200.

Funkcija prilagođenosti se definiše kao funkcija rangiranja prilagođenosti jedinki u populaciji (jedinke u populaciji se sortiraju u skladu sa vrednostima funkcije cilja (jedinke sa najboljim rezultatom ima rang jedan tj. $r = 1$ dok najlošija jedinka ima rang koji je jednak obimu populacije) zatim se sama funkcija ranga definiše kao $f = \frac{1}{\sqrt{r}}$).

4.2.2 Selekcija

Predloženi koncept GA koristi stohastičko univerzalno uzorkovanje. Iz populacije se bira k jedinki na taj način što se slučajno izabere broj r iz intervala $\left[0, \frac{F}{k}\right]$, gde je $F = \sum_{i=1}^n f_i$ funkcija ukupne prilagođenosti, a $f_i, i = 1, \dots, n$ funkcija prilagođenosti i -te jedinke u populaciji. Formira se skup tačaka

$$\{r_0, \dots, r_{k-1}\} = \left\{r, r + 1 \cdot \frac{F}{k}, r + 2 \cdot \frac{F}{k}, \dots, r + (k-1) \cdot \frac{F}{k}\right\}$$

Svaka tačka r_i pripada intervalu nekog od rešenja - to rešenje se zatim selektuje. Broj jedinki koje se biraju iz populacije je za 78% veći od ukupnog obima populacije.

4.2.3 Ukrštanje

Posle selekcije parova jedinki-roditelja na njih se primenjuje operator ukrštanja stvarajući jednu jedinku-potomka. Operator ukrštanja koji se koristi u predloženoj GA implementaciji je takozvani heuristički operator ukrštanja koji stvara jedinku na sledeći način:

Iz niza $r = (r_1, \dots, r_k)$ koji predstavlja roditelje (koji su izabrani operatorom selekcije), biraju se redom, ne na slučajan način, po dva roditelja $r_i, r_{i+1}, i = 1, \dots, k-1$.

Zatim, ukoliko je $f_i > f_{i+1}$ (tj ukoliko je i -ti roditelj "kvalitetniji" od $i+1$) nova jedinka se dobija po formuli

$$d = r_{i+1} + \eta(r_i - r_{i+1})$$

u suprotnom, ukoliko je $f_i \leq f_{i+1}$ novi potomak se računa

$$d = r_i + \eta(r_{i+1} - r_i).$$

Koeficijent η uzima vrednost 1.5

Ako novodobijena jedinka nije korektna vrši se popravka

$d = \alpha r_i + (1 - \alpha)r_{i+1}$, gde je α slučajan broj koji se bira iz uniformne raspodele $U(0,1)$ sve dok jedinka ne postane korektna.

4.2.4 Mutacija

Jedinke-potomci generisane operatorom ukrštanja podležu operatoru mutacije. Operator mutacije se realizuje na taj način što se jedinci d dodaje slučajno izabrana vrednost iz Gausove raspodele

$$d_{mut} = d + p, \text{ gde je } p \text{ slučajno izabran broj iz } N(0, \sigma_j)$$

σ_j je standardna devijacija koja se menja kroz generacije

$$\sigma_j = \sigma_{j-1} \left(1 - \frac{j}{s}\right), \quad j = 2, \dots, s, \text{ } s \text{ predstavlja ukupan broj generacija, dok je standardna devijacija u prvoj generaciji}$$

$$\sigma_1 = 1$$

Ukoliko mutirana jedinka nije korektna vrši se popravka $d_{mut} = d + p$ gde se p slučajno bira iz standardizovane normalne raspodele sve dok d_{mut} ne zadovolji postavljena ograničenja.

4.2.5 Politika zamene generacija

Politika zamene generacija se bazira na elitističkoj strategiji zamene generacija, gde se dve najbolje jedinke prenose u sledeću generaciju. S obzirom da se nakon primene operatora selekcije, ukrštanja i mutacije dobija veći broj jedinki-kandidata, nego što je obim populacije, kriterijum za prelazak, ostalih jedinki, u narednu generaciju je veća vrednost funkcije prilagođenosti.

Za kriterijum zaustavljanja se koristi dostizanje maksimalnog broja generacija, koji u predloženoj GA implementaciji iznosi 300 generacija.

4.3 Simulirano kaljenje

Inspiracija za razvoj algoritma simuliranog kaljenja je postupak kaljenja metala koji se koristi u metalurgiji i kojim se postižu bolja mehanička svojstva metala (poput promene tvrdoće metala i elastičnosti). Prilikom postupka kaljenja, metal se zagreva preko kritične temperature, dostignuta temperatura se neko vreme održava, nakon čega se metal postupno hladi. Prilikom ovog postupka materijal se prvo dovodi do tačke vrlo visoke energije koja omogućava veliku pokretljivost atoma u metalu, zatim se energija postupno spušta. Zahvaljujući ovom postupku hlađenja i povećanoj pokretljivosti atoma, u metalu će se postupno stvoriti pravilne kristalne strukture koje nemaju deformacija i koje metal dovode do stanja minimalne energije.

Ako bi se metal hladio prebrzo, nastale bi nepravilne kristalne strukture, pojavile bi se deformacije i naprezanje; kristalna rešetka metala bi ostala u višem energetske stanju - u tom stanju metal bi imao svojstva veće tvrdoće i manje elastičnosti što bi lakše dovelo do kidanja odnosno oštećenja materijala. Dobro izveden postupak kaljenja povećava elastičnost metala, smanjuje mu tvrdoću i unutrašnja naprezanja i stvara pravilnu kristalnu strukturu.

Prilikom hlađenja, metal neprestano prelazi iz jednog energetske stanja u drugo. Pri tome su ti prelazi vođeni zakonima termodinamike koji kažu da je pri temperaturi t verovatnoća prelaska iz energetske stanja E_1 u više energetske stanje E_2 , $\Delta E = E_2 - E_1 > 0$ data sa $P(\Delta E) = \exp(-\frac{\Delta E}{kt})$ gde je k Boltzmanova konstanta.

Iz datog izraza vidi se da temperatura direktno utiče na verovatnoću prelaska u više energetske stanje. Posmatrajmo dva ekstremna slučaja $t \rightarrow \infty$ i $t \rightarrow 0$ za ograničenu promenu $\Delta E > 0$ važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(\frac{\Delta E}{kt})} = \frac{1}{\exp(\frac{\Delta E}{\infty})} = \frac{1}{\exp(0)} = 1,$$

$$\text{odnosno } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(\frac{\Delta E}{kt})} = \frac{1}{\exp(\frac{\Delta E}{0})} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Dakle, uz beskonačno visoku temperaturu kristalna rešetka metala će sa verovatnoćom 1 prelaziti iz bilo kojeg stanja u bilo koje drugo više energetske stanje (nezavisno od inkrementa energije, uz pretpostavku da je on konačan). Pri temperaturi koja je jednaka apsolutnoj nuli situacija je skroz obrnuta: kristalna rešetka metala će sa verovatnoćom 0 prelaziti u viša energetska stanja. Na temperaturi koja je jednaka apsolutnoj nuli kristalna rešetka je zamrznuta - jedini mogući prelazi su prelazi u niža energetska stanja; verovatnoća prelaska u više energetske stanje ma koliko malog inkrementa energije je 0.

U praksi, kaljenje metala nikada ne postiže temperature ∞ međutim to nije ni potrebno; za svaki metal postoji kritična temperatura koja je dovoljno velika da dopusti i one najveće promene energetske stanja koje se u metalu mogu dogoditi. Od te tačke temperatura se postupno spušta čime verovatnoća većih promena počinje da opada - metal se polako stabilizuje, spušta energiju i radi sve manje i manje promene energetske stanja. Pri niskim temperaturama verovatnoća svih promena osim onih s vrlo malim inkrementom energije je praktično zanemarljiva. Konačno, spuštanjem temperature na nulu verovatnoća bilo kakvog inkrementa pada na nulu. I opet, u praksi se temperatura ne spušta na nulu jer za time nema potrebe - beskonačno male promene u energetskim promenama nisu moguće i u jednom trenutku će sve promene stati, čak i uz $t > 0$.

Primena na probleme optimizacije

Opisani postupak kaljenja metala moguće je po analogiji preneti i na probleme optimizacije [8]. Definišu se sledeći relacije:

Kaljenje metala	Problem optimizacije
Moguća stanja kristalne rešetke metala	Prihvatljiva rešenja
Energija kristalne rešetke metala	Kaznena funkcija
Promena stanja kristalne rešetke metala	Prelazak u susedno rešenje
Temperatura	Parametar koji simulira temperaturu
Zamrznuto stanje	Optimum (lokalni ili globalni minimum)

U tablici kao ekvivalent energiji kristalne rešetke metala nalazi se funkcija kazne, a ne funkcija prilagođenosti. Naime, kako je u prirodi proces kaljenja proces koji prevodi sastav iz stanja viših energija u stanja nižih energija, njegov pandan u optimizacijskim procesima ne može biti funkcija prilagođenosti (jer želimo da postignemo što veću prilagođenost). Zbog toga se kao alternativa koristi kaznena funkcija - funkcija suprotna funkciji prilagođenosti koja govori koliko je neko rešenje loše - što je iznos kaznene funkcije veći, rešenje je lošije. Ovo je neophodno jer je proces kaljenja, kako se događa u prirodi, minimizacijski proces. Ovo je moguće vrlo jednostavno zaobići na način ako se definiše da oznaka ΔE označava meru pogoršanja rešenja, odnosno da pozitivan iznos ΔE govori koliko je novo stanje/rešenje lošije od postojećeg. U tom slučaju ako se radi minimizacija ΔE računamo kao $\Delta E = E_2 - E_1$ ako je to pozitivno znači da je $E_2 > E_1$ što je pogoršanje.

Algoritam simuliranog kaljenja započinje sa slučajno generisanim rešenjem $\omega \in \Omega$, potom se iz okoline rešenja ω u oznaci $N(\omega)$ odabere jedno rešenje $\omega' \in N(\omega)$ koje postaje novi kandidat za trenutno rešenje. Taj kandidat se prihvata u skladu sa sledećim pravilom

$$P(\text{prihvati } \omega' \text{ kao novo rešenje}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{f(\omega') - f(\omega)}{t_k}\right), & \text{ako je } f(\omega') - f(\omega) > 0 \\ 1, & \text{ako je } f(\omega') - f(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

gde t_k označava "temperaturu" u koraku k .

Kako bi algoritam imao garanciju konvergencije ka globalnom optimumu, pretpostavlja se da važi $t_k > 0, \forall k$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$.

Pseudokod simuliranog kaljenja [26]

Generiši početno rešenje $\omega \in \Omega$

Postavi brojač za promenu temperature na $k = 0$

Odaberi plan hlađenja t_k

Odaberi početnu temperaturu $t_0 \geq 0$

Odredi plan za M_k - broj ponavljanja petlje pri temperaturi t_k

Ponavljaj dok nije zadovoljen uslov zaustavljanja

Ponavljaj za m od 1 do M_k

Generiši susedno rešenje $\omega' \in N(\omega)$

Izračunaj $\Delta_{\omega, \omega'} = f(\omega') - f(\omega)$

Ako je $\Delta_{\omega, \omega'} \leq 0$ prihvati ω' kao rešenje $\omega \leftarrow \omega'$

Inače ako je $\Delta_{\omega, \omega'} > 0$ postavi $\omega \leftarrow \omega'$ sa verovatnoćom $\exp\left(-\frac{f(\omega') - f(\omega)}{t_k}\right)$

Kraj ponavljanja

Kraj ponavljanja

3.1 Planovi hlađenja

Kod algoritma simuliranog kaljenja temperatura se menja od početne visoke pa sve do, u limesu, vrednosti 0. Loš plan hlađenja može rezultirati lošim pronađenim rešenjem. Što se temperatura drastičnije smanjuje, algoritam će pre stići do niskih temperatura a time i stagnacije; pozitivni aspekt jeste kratko vreme izvršavanja algoritma a negativan potencijalno loša pronađena rešenja. Što je hlađenje sporije, algoritam će se duže izvoditi; međutim, pronađena rešenja će biti bolja. U praksi se koristi nekoliko različitih planova hlađenja.

Linearni plan hlađenja

Kod linearnog plana hlađenja temperatura se u svakom koraku smanjuje za fiksiran iznos: $T \leftarrow T - \beta$, pa je temperatura u koraku k data formulom $T_k = T_0 - k\beta$ gde je T_0 početna temperatura a k brojač koji kreće od nule. Smanjivanje nema smisla nakon što temperatura dostigne vrednost 0. Ako je unapred poznato da će se obaviti K iteracija spoljašnje petlje i da temperatura treba da krene od vrednosti T_0 i završi na vrednosti $T_K < T_0$, onda se kao

β može uzeti vrednost: $\beta = \frac{T_0 - T_K}{K-1}$.

Geometrijski plan hlađenja

Kod geometrijskog plana hlađenja temperatura se u svakom koraku smanjuje za fiksiran iznos: $T \leftarrow T\alpha$. Temperatura u koraku k se definiše kao $T_k = \alpha^k T_0$, gde je T_0 početna temperatura, k brojač koji kreće od nule, i $\alpha \in (0,1)$ faktor smanjenja trenutne temperature. Ako je unapred poznato da će se obaviti k iteracija spoljašnje petlje te da temperatura treba da krene od vrednosti T_0 i završi na vrednosti $T_k < T_0$, onda se kao α može uzeti vrednost:

$$\alpha = \sqrt[k]{\frac{T_k}{T_0}}$$

Logaritamski plan hlađenja

Kod logaritamskog plana hlađenja temperatura se u koraku k računa prema izrazu: $T_k = \frac{T_0}{\log(k)}$, gde je T_0 početna temperatura. Ovo je jedan od planova hlađenja kod kojih je smanjivanje temperature veoma sporo.

4.4 Predloženi algoritam simuliranog kaljenja

Najoptimalniji algoritam za metodu simuliranog hlađenja pronašli smo, slično kao u slučaju GA, kombinovanjem različitih alternativnih inputa kao što su početna temperatura, plan hlađenja i maksimalan broj iteracija.

Početna temperatura se postavlja na 1000 stepeni.

Inicijalna tačka $\mu, \phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n, \kappa, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ se određuje na sledeći način.

Promenljive $\mu, \phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n$ koje predstavljaju koeficijente u autoregresivnom delu modela (jednačina 3.2.1) se određuju linearnom regresijom koja se primenjuje na uzorak $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ koji predstavlja istorijske opservacije neto prinosa portfolija hartija od vrednosti.

Za promenljive $\kappa, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ koje predstavljaju koeficijente u heteroskedastičnom delu modela (jednačina 3.2.3) uzimaju se vrednost $\beta_1 = \dots = \beta_q = \frac{0.85}{n}$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \frac{0.05}{n}$, $k = \sigma(1 - (\sum_{i=1}^q \beta_i + \sum_{j=1}^p \alpha_j))$ gde je n obim uzorka, σ bezuslovna standardna devijacija uzorka $\tilde{y}$.

Predložena inicijalizacija početne tačke daje optimalnije rezultate nego u slučaju kada se početna tačka bira Yuke-Walker ovim jednačinama kao što je predloženo u [7].

Za plan hlađenja koristimo geometrijski plan hlađenja. Temperatura u koraku k se definiše kao $T_\alpha = \alpha^k T_0$, gde je T_0 početna temperatura a k brojač koji kreće od nule, za α faktor umanjenja trenutne temperature se uzima vrednost 0,95.

Maksimalan broj iteracija unutrašnje petlje je $500 \cdot \text{broj promenljivih}$, dok je broj iteracija spoljašnje petlje $3000 \cdot \text{broj promenljivih}$.

4.5 Gradijentna metoda

U ovom odeljku prikazana je osnovna ideja gradijentne metode sa uslovima tipa nejednakosti.

Razmatra se sledeći problem minimizacije

$$\min_{x \in S} f(X), \quad S \subseteq R^n$$

pri uslovima $h_i(X) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}; \quad g_j(X) \leq 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}$

gde je $f: R^n \rightarrow R$ data funkcija cilja, a $h_i: R^n \rightarrow R$ zadate funkcije koje definišu uslove i pri tome je $k, m \leq n$.

Dopustiv skup S je $S = \{X \in R^n | h(X) = 0, g(X) \leq 0\}$, gde su

$$h(X) = [h_1(X), \dots, h_m(X)]^T, \quad h: R^n \rightarrow R^m$$

$g(X) = [g_1(X), \dots, g_k(X)]^T, \quad g: R^n \rightarrow R^k$ vektorske funkcije. U daljoj analizi pretpostavlja se da su funkcije dva puta neprekidno diferencijabilne.

Metode optimizacije za rešavanje problema uslovne optimizacije sa uslovima tipa nejednakosti su zasnovane na definisanju iterativnog niza koji se konstruiše kao u slučaju metoda bezuslovne optimizacije, s tim što se u svakom koraku proverava da li novodobijena tačka iterativnog niza pripada dopustivom skupu.

S obzirom da se rešenje problema bazira na rešavanju problema bezuslovne optimizacije u nastavku se daje prikaz ideje gradijentne metode kao jedne od najpoznatijih klasa metoda bezuslovne optimizacije.

Neka je $f: R^n \rightarrow R$ tada se sa :

$$\nabla f(X) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right]^T \text{ označava gradijent funkcije } f \text{ u tački } X,$$

$\nabla^2 f(X)$ - Hesijan funkcije f u tački X ,

$\frac{\partial f}{\partial d}(X) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(X+\alpha d) - f(X)}{\alpha}$ - izvod funkcije f u pravcu vektora d u tački X .

Za $\|d\| = 1$ sa $\langle \nabla f(X), d \rangle$ se označava stopa rasta funkcije f u tački X u pravcu vektora d , gde je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni proizvod na R^n

Koristeći Koši - Švarcovu nejednakost kako je $\|d\| = 1$ važi da je $\langle \nabla f(X), d \rangle \leq \|\nabla f(X)\|$. Ako se uzme da je $d = \frac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|}$ dobija se da je $\langle \nabla f(X), \frac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|} \rangle = \|\nabla f(X)\|$. Odavde sledi da je $\nabla f(X)$ pravac maksimalnog rasta funkcije f u tački X . Slično $-\nabla f(X)$ je pravac maksimalnog opadanja funkcije f u tački X . Dakle, u cilju pronalaska minimuma funkcije f dobra ideja je da se traži u pravcu maksimalnog opadanja funkcije tj. u pravcu negativnog gradijenta.

Ideja gradijentne metode se sastoji u sledećem. Uoči se početna tačka $X^{(0)}$. Posmatra se zatim tačka $X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(0)})$ gde je $\alpha_0 \in R, \alpha_0 > 0$. Iz Tejlorovog razvoja sledi relacija

$$f(X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(0)})) = f(X^{(0)}) - \alpha_0 \|\nabla f(X^{(0)})\|^2 + o(\alpha_0).$$

Ukoliko je $\nabla f(X^{(0)}) \neq 0$, za dovoljno male vrednosti $\alpha_0 > 0$ dobija se

$f(X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(0)})) < f(X^{(0)})$, što znači da tačka $X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(0)})$ predstavlja poboljšanje u odnosu na polaznu tačku $X^{(0)}$, jer se traži minimum funkcije. Zatim se ponavlja postupak za $X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha_0 \nabla f(X^{(0)})$ i dobija se poboljšanje $X^{(2)} = X^{(1)} - \alpha_1 \nabla f(X^{(1)})$ gde je $\alpha_1 > 0$. Postupak se može uopštiti preko formule za iterativni niz gradijentne metode

$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k \nabla f(X^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ $\alpha_k > 0$ pozitivan skalar koji predstavlja veličinu koraka. Veličina koraka α_k se može određivati, na primer, metodom najbržeg spusta na način da se u svakom koraku (iteraciji) metode postiže maksimalno opadanje vrednosti funkcije cilja $f(X)$. Preciznije za α_k se uzima rešenje problema minimizacije funkcije $g_k(\alpha)$ za $\alpha \geq 0$ gde je $g_k(\alpha) : R_0^+ \rightarrow R$ definisana sa $g_k(\alpha) = f(X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)}))$. Označimo sa α_k minimum funkcije $g_k(\alpha)$ za $\alpha \geq 0$. Za nađeni minimum α_k , naredna tačka iterativnog niza $X^{(k+1)}$ se dobija na sledeći način:

$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k \nabla f(X^{(k)})$. Drugim rečima, algoritam počinje od zadate tačke $X^{(0)}$ a zatim se u svakom koraku, polazeći od tačke $X^{(k)}$ vrši pretraga duž pravca $-\nabla f(X^{(k)})$, dok se ne nađe minimum $X^{(k+1)}$.

Kod problema optimizacije sa uslovima tipa nejednakosti proveravanje da li novodobijena tačka iterativnog niza pripada dopustivom skupu može se vršiti metodom projekcije na dopustivi skup Ω . Preciznije, početna tačka $X^{(0)}$ bira se iz skupa Ω . U svakoj iteraciji računa se $X^{(k)} + \alpha_k d_k$ pri čemu se α_k i d_k određuju u skladu sa pravilima metode bezuslovne optimizacije koja se modifikuje. Ukoliko tačka $X^{(k)} + \alpha_k d_k$ pripada skupu Ω tada je $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k d_k$. U suprotnom za narednu tačku iterativnog niza $X^{(k+1)}$ uzima se projekcija tačke $X^{(k)} + \alpha_k d_k$ na skup Ω , odnosno $X^{(k+1)} = \Pi(X^{(k)} + \alpha_k d_k)$, gde je $\Pi : R^n \rightarrow \Omega \subset R^n$ operator projekcije. Jedan od načina za određivanje operatora projekcije je određivanje tačke $Y \in \Omega$ koja je najbliža tački X , preciznije $\Pi(X) = Y$,

gde je $\|Y - X\| = \min_{Z \in \Omega} \|Z - X\|$.

Pored navedenog problem optimizacije sa uslovima tipa nejednakosti $\min f(X)$, pri uslovima $g_j(X) \leq 0, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ može se rešavati i metodom kaznenih funkcija. Ideja se sastoji u tome da problem uslovne optimizacije aproksimiramo problemom bezuslovne optimizacije oblika

$$\min f(X) + \gamma P(X), X \in R^n,$$

gde je $\gamma > 0$ pozitivna realna konstanta i $P : R^n \rightarrow R$ zadana funkcija.

Zatim se na ovaj novodobijeni problem primenjuju adekvatne metode bezuslovne optimizacije. Dobijeno rešenje predstavlja aproksimaciju rešenja polaznog problema. Konstanta $\gamma > 0$ naziva se kaznenim parametrom a funkcija $P : R^n \rightarrow R$ kaznena funkcija. Kazneni parametar i kaznena funkcija treba da budu izabrani tako da problem $\min f(X) + \gamma P(X), X \in R^n$ predstavlja što bolju aproksimaciju polaznog rešenja. Kaznena funkcija $P : R^n \rightarrow R$ bira se tako da zadovoljava uslove: 1) P je neprekidna funkcija na R^n , 2) $P(X) \geq 0$ za svako $X \in R^n$, 3) $P(X) = 0$ ako i samo ako je X dopustiva tačka, odnosno $g_j(X) \leq 0, j = 1, 2, \dots, k$

Cilj kaznene funkcije je da negativno deluje na tačke koje se nalaze van dopustivog skupa $S = \{X \in R^n \mid g_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, k\}$. Iz tog razloga kaznena funkcija se izražava preko uslova $g_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, k$ koji definišu dopustivi skup S , vodeći računa da problem bezuslovne optimizacije, sa tako odabranom kaznenom funkcijom, dobro aproksimira polazni problem.

Jedan od načina da se adekvatno definiše kaznena funkcija P je $P(X) = \sum_{j=1}^k g_j^+(X)$ gde je

$$g_j^+(X) = \max(0, g_j(X)) = \begin{cases} 0, & g_j(X) \leq 0 \\ g_j(X), & g_j(X) > 0 \end{cases}$$

Kaznena funkcija P definisana na ovaj način može se predstaviti u obliku $P(X) = \sum_{j: g_j(X) > 0} |g_j(X)|$, pri čemu se sumira po svim indeksima $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ u kojima je uslov $g_j(X) \leq 0$ narušen u tački X .

Pored kaznene funkcije, element koji utiče na kvalitet aproksimacije polaznog problema uslovne optimizacije problemom bezuslovne optimizacije je kazneni parametar $\gamma > 0$. Za veće vrednosti kaznenog parametra γ rešenje aproksimacije će biti bliže rešenju polaznog problema, jer se u tom slučaju tačke koje narušavaju uslove strože kažnjavaju. U graničnom slučaju, kada $\gamma \rightarrow \infty$, metoda kaznenih funkcija bi trebalo da vodi ka rešenju polaznog problema uslovne optimizacije. Metoda kaznenih funkcija je iterativnog tipa, i za svako $\gamma_k > 0, k \geq 1$ definišu se funkcije $q_k(\gamma_k, \cdot) : R^n \rightarrow R$ na sledeći način $q_k(\gamma_k, X) = f(X) + \gamma_k P(X)$. Tada se za svako k može formulisati problem bezuslovne optimizacije koji aproksimira polazni problem $\min q(\gamma_k, X), X \in R^n$. Ako je $X^{(k)}$ minimum funkcije $q_k(\gamma_k, X)$ i ako je niz γ_k realnih i pozitivnih konstanti takav da je $\gamma_k \leq \gamma_{k+1}$ za svako $k \geq 1$ tada važe sledeće osobine: 1) $q(\gamma_{k+1}, X^{(k+1)}) \geq q(\gamma_k, X^{(k)})$, 2) $P(X^{(k+1)}) \leq P(X^{(k)})$, 3) $f(X^{(k+1)}) \geq f(X^{(k)})$, 4) $f(X^*) \leq q(\gamma_k, X^{(k)}) \leq f(X^{(k)})$ gde je X^* globalni minimum problema.

Pored navedenog važi i sledeća teorema

Teorema 4.5.1 Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna i da $\gamma_k \rightarrow \infty$ kada $k \rightarrow \infty$. Tada je granična vrednost bilo kog konvergentnog podniza niza $\{X^{(k)}\}$ rešenje polaznog problema uslovne optimizacije. Dokaz se može naći u [23]

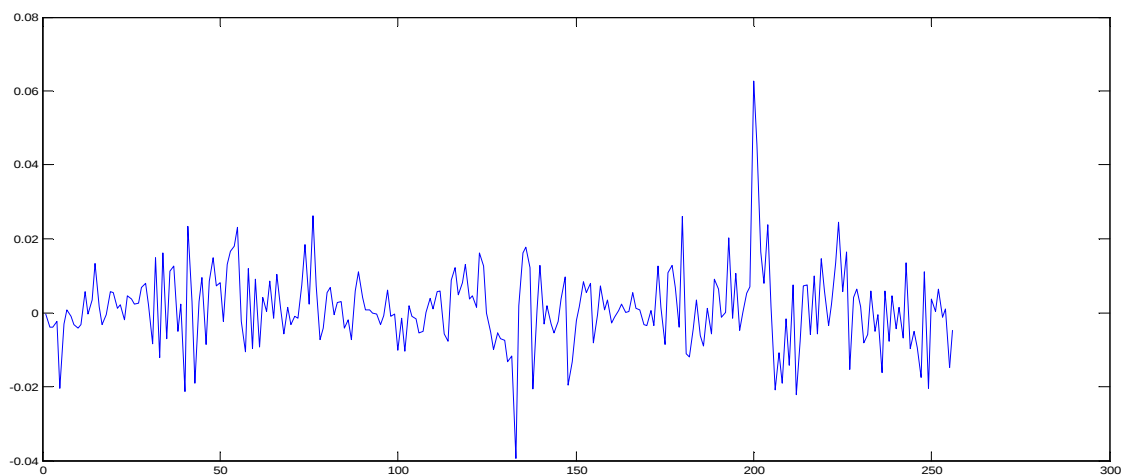
Drugim rečima, navedena teorema kaže da pri uslovu $\gamma_k \rightarrow \infty$ kada $k \rightarrow \infty$ granična vrednost proizvoljnog konvergentnog podniza niza $\{X^{(k)}\}$ predstavlja rešenje polaznog problema uslovne optimizacije.

5 Eksperimentalni rezultati

U ovoj sekcije predstavljeni su rezultati maksimizacije funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti, u cilju određivanja nepoznatih parametara modela uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti kojim se modeluje kretanje neto prinosa portfolija koji se sastoji od skupa hartija od vrednosti koje su kotirane na Beogradskoj berzi. Pored toga prikazani su i impakti rezultata optimizacije na obračun kapitalnih zahteva za cenovni rizik na datom portfoliju.

Portfolio koji je predmet analize sastoji se od likvidnih akcija sledećih kompanija: NIS a.d. Novi Sad, Aerodrom Nikola Tesla a.d. Beograd, Energoprojekt holding a.d. Beograd, Sojaprotein a.d. Bečej kao i obveznica Republike Srbije serije A2016. Navedene akcije predstavljaju deo korpe indeksa Belex15.

Neto prinos $y = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-256})$ portfolija se određuje u skladu sa formulama koje su definisane u poglavlju 2, pri određivanju neto prinosa korišćeno je istorijsko kretanje cena hartija od vrednosti u periodu od 30.6.2015 pa godinu dana u nazad, kako je i propisano Odlukom o adekvatnost kapitala banke(t.j “...da se VaR parametar računa na osnovu perioda posmatranja ne kraćeg od jedne godine...”), pored toga kako se kapitalni zahtev računa u domicilnoj valuti, a cena obveznica Republike Srbije serije A2016 izražena u valuti EUR, neophodno je pre određivanja neto prinosa portfolija seriju cena obveznice prekursirati u skladu sa korespondirajućim paritetima valuta EUR i RSD. Takođe pretpostavlja se da u portfolio svaka hartija ulazi u jediničnoj količini (tj. ne favorizujemo ni jednu hartiju).



Slika 5.1 Grafik neto prinosa portfolija

Na osnovu grafičkog prikaza može se zaključiti da serija neto prinosa ima oblik stacionarne serije

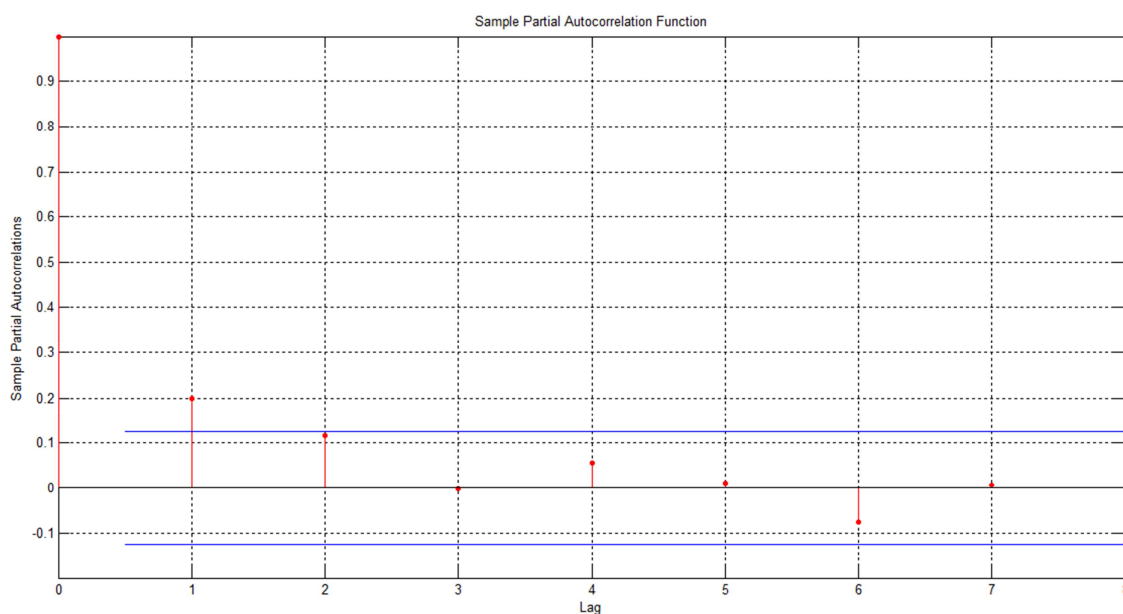
Sledeći korak se sastoji u statističkoj analizi neto prinosa portfolija $y = (y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-256}), t = 30.6.2015, t-1 = 29.6.2015, \dots, t-256$ pre svega u dokazivanju prisustva autoregresivnosti i heteroskedastičnosti, odnosno određivanja reda modela (3.2.1) i (3.2.3), preciznije parametara m, n, p i q .

Pristupa se testiranju Ljung Box test statistike na originalnoj seriji y , u cilju dokazivanja postojanja autoregresivnog dela u modelu

Nulta hipoteza: podaci su nezavisni (korelacija u populaciji je nula-uzorak slučajnog karaktera)

Alternativna hipoteza: podaci u uzorku nisu nezavisni (postoji serijska korelacija)

Na osnovu rezultata statistike odbacuje se nulta hipoteza i prihvata alternativa (tj. da postoji serijska korelacija).

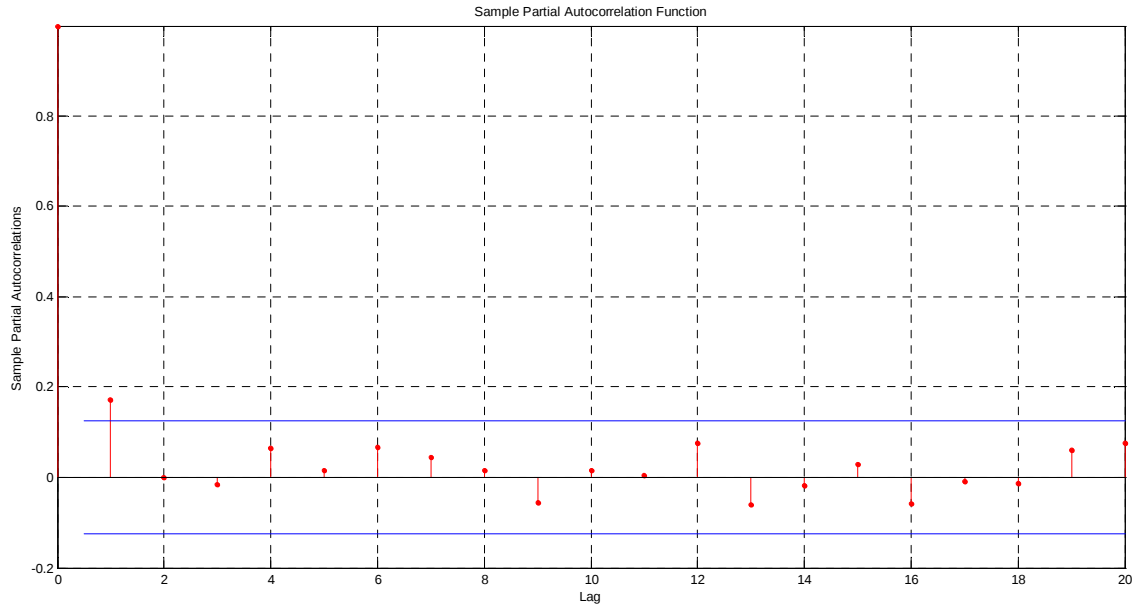


Slika 5.2 Korelogram koeficijenata parcijalne korelacije neto prinosa

Na korelogramu koeficijenata parcijalne korelacije može se videti da koeficijenti korelacije opadaju po modulu približno eksponencionalnom brzinom i pri tome koeficijent korelacije na lagu 1 je iznad praga $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$ gde je n dužina vremenske serije što opet ide u prilog tvrdnji da postoji serijska korelacija u vremenskoj seriji neto prinosa portfolija koja je naznačajnija na prvom koraku kašnjenja.

Na osnovu Ljung Box-ove statistike i korelograma koeficijenata parcijalne korelacije autoregresivni deo modelujemo modelom $AR(1)$. Nakon određivanja reda autoregresivnog dela iz modela se izdvajaju reziduali e_t , regresivnom tehnikom, u cilju dokazivanja heteroskedastičnosti i određivanja reda heteroskedastičnog modela.

Prisustvo heteroskedastičnosti dokazuje se primenjujući Ljung Box test statistiku na kvadratima reziduala e_t^2 . Rezultati pokazuju prisustvo heteroskedastičnosti i pri tome je p vrednost statistike veća od 0,05.



Slika 5.3 Korelogram koeficijenata parcijalne korelacije kvadrata reiduala

Korelogram parcijalne korelacije na uzorku kvadrata reziduala pokazuje da je na prvom lagu koeficijent korelacije iznad definisane granice $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$ dok su ostali po modulu manji od definisanog praga, što dalje govori da jedino na prvom lagu postoji značajnije prisustvo heteroskedastičnosti, pa se za heteroskedastični model bira $GARCH(1,1)$

Model autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti se svodi na $AR(1)/GARCH(1,1)$

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + e_t,$$

$e_t = \sigma_t u_t$, u_t međusobno nezavisni i imaju standartizovanu normalnu raspodelu $u_t: N(0,1)$

$$\sigma_t^2 = \kappa + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

uz uslove

$$\kappa > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1, |\phi_1| < 1.$$

Po određivanju reda modela sledeći korak se sastoji u određivanju nepoznatih parametara modela $AR(1)/GARCH(1,1)$ minimizujući funkciju $-\mathcal{L}(\theta)$, gde je $\mathcal{L}(\theta)$ funkcija uslovne maksimalne verodostojnosti, uz poštovanje ograničenja nad koeficijentima modela radi obezbeđivanja stacionarnosti vremenske serije.

Optimizacija je sprovedena sa tri metode: gradijentnom metodom, genetskim algoritmom i simuliranim kaljenjem, kako bi bilo provereno koja od metoda najbolje rešava dati problem, a sve u cilju što kvalitetnijeg određivanja nepoznatih parametara koji imaju značajnu ulogu u određivanju maksimalnog mogućeg gubitka VaR-a, a samim tim i kapitalog zahteva.

Problem modelujemo u programskom paketu Matlab R2008b u kome postoji biblioteka funkcija garchfit.m koja određuje nepoznate parametre modela isključivo gradijentnom metodom koja se u slučaju problema optimizacije sa uslovima tipa nejednakosti, kao što je posmatrani problem, bazira na metodi kaznenih funkcija. Funkcija garchfit.m određuje inicijalnu tačku optimizacije koja se kod $AR(1)/GARCH(1,1)$ definiše na sledeći način: μ i ϕ_1 se određuju iz linearne regresije primenjene na seriju y , dok se za koeficijente u heteroskedastičnom delu uzimaju empirijski rezultati $k = var(e_t) * (1 - 0,85 - 0,05)$; $\beta_1 = 0,85$; $\alpha_1 = 0,05$. Parametri genetskog algoritma korišćeni u optimizaciji su definisani u delu 4.2, dok su parametri metode simuliranog kaljenja definisani u delu 4.4

Tabela 5.1 Rezultati metoda optimizacije:

	Gradijentna metoda	Genetski algoritam	Simulirano kaljenje
LLF	815,0316303176	815,0316862573	813,9648164030
VaR(10)	-249,1366987679	-249,1274622043	-271,6653603844

LLF je maksimalna postignuta vrednost funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti $\mathcal{L}(\theta)$

VaR(10) je desetodnevni VaR – projekcija desetodnevnog gubitka

Na osnovu rezultata u Tabeli 5.1 može se videti da u trenutku $t = 30.6.2015$ genetski algoritam daje najbolji rezultat (u smislu maksimizacije vrednosti funkcije cilja), za nijansu bolji rezultat u odnosu na gradijentnu metodu (poboljšanje u vrednosti funkcije cilja imamo tek na petom decimalnom mestu), dok rezultat dobijen metodom simuliranog kaljenja značajno je lošiji od prethodna dva.

Projektovani desetodnevni gubitak je najmanji prilikom ocene nepoznatih koeficijenata autoregresivnog modela uslovne heteroskedastičnosti genetskim algoritmom, što svakako ima uticaja na smanjenje kapitalnih zahteva.

Tabela 5.2 Ocenjeni koeficijenti modela

	μ	ϕ_1	k	β_1	α_1
Gradijentna metoda	0,000955	0,146151	1,18E-05	0,782478	0,117051
Genetski algoritam	0,000952	0,14631	1,19E-05	0,781765	0,117047
Simulirano kaljenje	0,000407	0,124628	3,27E-05	0,526518	0,184151

Po određivanju nepoznatih parametara moguće je, u skladu sa formulama koje su definisane u delu 3.2.4, izvršiti projekciju budućih nivoa prinosa $\widehat{y_{t+1}}, \dots, \widehat{y_{t+10}}$ kao i budućih uslovnih varijabiliteta $\widehat{\sigma_{t+1}^2}, \dots, \widehat{\sigma_{t+10}^2}$ koji se koriste u izračunavanju desetodnevnog VaR-a kao jedne od najznačajnijih varijabli u kalkulaciji kapitalnog zahteva. Desetodnevni VaR sa intervalom poverenja od 99% se računa u skladu sa pojašnjenima u poglavlju 2 po formuli

$$VaR(10) = S * (x * \sqrt{\widehat{\sigma_{t+1}^2} + \dots + \widehat{\sigma_{t+10}^2}} + (\widehat{y_{t+1}} + \dots + \widehat{y_{t+10}}))$$

gde je x jednogprocentni kvantil standardizovane normalne raspodele, odnosno

$$x = F^{-1}(p|\mu, \sigma) = \{x|F(x|\mu, \sigma) = p\}, \quad p = F(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2} dt \quad (\mu = 0, \sigma = 1, p = 0,01)$$

a S vrednost portfolija u trenutku $t = 30.6.2015$.

Da bi se videli impakti predloženih metoda optimizacije na kapitalne zahteve za datum 30.6.2015 na datom portfoliju, nije dovoljno imati informaciju o desetodnevnom VaR parametru na datum 30.6.2015, već je neophodno opisani postupak ponoviti za 250 istorijskih datuma ($t - 1 = 29.6.2015, t - 2 = 28.6.2015 \dots$). Preciznije, postupak određivanja nepoznatih parametra trima metodama, uz prethodnu identifikaciju modela, ponavlja se na serijama $y^j = (y_{t-j}, \dots, y_{t-j-256})$ gde $j \in \{1, 2, \dots, 250\}$. Na ovaj način tj. kroz istorijsko ocenjivanje parametra (engl. backtesting) se, 250 puta ponavlja optimizacija navedenim metodama gde u svakom koraku dolazi do promene funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti $\mathcal{L}^j(\theta)$ (funkcije cilja) jer se i menja sam uzorak y^j . Na taj način se dobija kvalitena slika komparacije predloženih metoda optimizacije. Preciznije, lakše se izводи zaključak koja od metoda najbolje rešava problem maksimizacije funkcija uslovne maksimalne verodostojnosti na datom portfoliju.

Na osnovu opisane statističke analize, kretanje neto prinosa y^j se modeluje ili modelom $AR(1)/GARCH(1,1)$ ili $AR(0,0)/GARCH(1,1)$ -modelom koji u autoregresivnom delu ima samo promenljivu μ .

Primećeno je da su parametri genetskog algoritma odnosno metode simuliranog kaljenja koji postižu najoptimalnije rezultate prilikom modelovanja $AR(1)/GARCH(1,1)$ procesa, isti kroz ceo backtesting, kao oni koje smo definisali u početnom koraku $t = 30.6.2015$. Ukoliko se neto prinos y^j modeluje $AR(0,0)/GARCH(1,1)$ procesom u slučaju genetskog algoritma dolazi do promene u odnosu na predloženu GA implementaciju u sledećim parametrima: broj generacija je 400 i politika zamene generacije je takva da se u svakoj generaciji vrši promena čitave populacije novim jedinkama (potomcima), svi ostali parametri zadržavaju iste karakteristike. Kod simuliranog kaljenja nema promene u definiciji parametara u odnosu na proces $AR(1)/GARCH(1,1)$. Takođe i kod procesa $AR(0,0)/GARCH(1,1)$ definisani parametri kod genetskog algoritma odnosno simuliranog kaljenja se pokazuju kao najoptimalnija parametrizacija kroz čitav backtesting.

Tabela 5.3 Rezultati metoda optimizacije kroz istorijsko ocenjivanje parametara modela (backtesting)

redni broj	datum	model	LLF gradijentna metoda	LLF genetski algoritam	LLF simulirano kaljenje
1	30.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	815,0316303	815,0316863	813,9648164
2	29.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	814,6109792	814,6111258	813,3126916
3	26.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	816,6777047	816,6779047	815,6635304
4	25.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	817,196927	817,1971588	815,6345183
5	24.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	817,6917868	817,6919145	816,0601053
6	23.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	817,6466616	817,6468541	816,024785
7	22.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	817,3181028	817,3181319	816,5110933
8	19.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	817,2171854	817,2172916	815,1124694
9	18.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	819,2097584	819,2094225	817,8896785
10	17.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	819,8623903	819,8624821	818,1329977
11	16.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	821,7410732	821,7410675	819,7737617
12	15.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,266851	820,2670245	818,5845781
13	12.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,0921712	820,0923032	818,3240743
14	11.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,8681473	820,8682876	819,0948201
15	10.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	822,8756473	822,875787	822,1863554
16	9.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	823,5887287	823,5888188	821,7096634
17	8.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	823,0064011	823,0065497	822,2160953
18	5.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	821,5792711	821,5792473	820,4392911
19	4.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,1065467	820,106709	818,1954859
20	3.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	819,7885472	819,7885813	817,7564616
21	2.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	819,9843018	819,9856821	819,2370839
22	1.6.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,0353093	820,0354383	818,0190573
23	29.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,4189912	820,4191526	818,4907839
24	28.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,2722805	820,2723438	818,3791653
25	27.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,9952027	820,9953067	819,6037299
26	26.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,6723332	820,6724769	818,6881041
27	22.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	821,2634381	821,2635739	819,1984504

Nastavak Tabele 5.3

28	21.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,6768761	820,6756323	818,5554087
29	20.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	821,1592596	821,1592648	819,5278911
30	19.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,019474	820,0193891	817,7267485
31	18.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	820,9846269	820,9846458	818,913713
32	15.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	822,5942083	822,5942897	820,4419994
33	14.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	821,7426329	821,7427983	821,3989349
34	13.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	825,2142902	825,2144056	822,9763773
35	12.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	827,0954973	827,0955542	824,7789504
36	11.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	828,3325265	828,3326442	827,5352234
37	8.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	827,6861855	827,6862534	825,4075245
38	7.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	827,5568728	827,5569895	826,5531671
39	6.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	828,5213067	828,5213442	826,8325547
40	5.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	828,1089474	828,1091159	827,0761137
41	4.5.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	828,9601911	828,9601996	826,4869954
42	30.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	829,4238463	829,424021	827,6204041
43	29.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	831,0117121	831,0118499	828,3380288
44	28.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	832,2061386	832,2063217	830,5628058
45	27.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	833,7986737	833,7988402	830,6431053
46	24.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	835,1805114	835,1806834	832,3884739
47	23.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	836,3027902	836,3027327	833,2209698
48	22.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	837,1162989	837,1164648	833,7330982
49	21.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	837,4356792	837,435818	834,4494459
50	20.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	836,8714908	836,8716461	833,7139387
51	17.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	836,8670401	836,8671754	834,5126047
52	16.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	836,9251624	836,9252633	835,0457711
53	15.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	835,9715709	835,9712867	833,6718142
54	14.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	838,1638381	838,1639918	836,8725972
55	9.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	839,3697249	839,3697687	838,068857
56	8.4.2015	AR(1)/GARCH(1,1)	840,8274989	840,8275921	839,6197454
57	7.4.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	839,6191617	839,6193694	837,7680451
58	2.4.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	870,9319869	870,9320118	870,5875073
59	1.4.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	871,0674429	871,0675008	870,9815677
60	31.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	870,9324671	870,9325408	870,145698
61	30.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	871,3471043	871,347178	871,0749666
62	27.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	871,6252326	871,6252376	871,1692331
63	26.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,0741623	873,0741983	872,9959729
64	25.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,136791	873,1368324	872,8598054
65	24.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,6309631	875,6309979	875,5950988
66	23.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,7827641	874,7828016	873,7886669
67	20.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,3403442	873,3403694	873,1384163
68	19.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	872,7879492	872,7879758	872,68271
69	18.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,5802977	873,5803289	873,4012565
70	17.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,2167905	873,2167955	872,8848083
71	16.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,2825604	873,2825833	873,0772506
72	13.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,5852767	874,5852815	874,433305
73	12.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,2504886	875,2505166	874,5600293
74	11.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,8900698	875,8900793	874,6270921
75	10.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	876,518974	876,5190111	876,2355134
76	9.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,3390132	878,3390522	875,7775213
77	6.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,8535561	878,8535864	876,3757913
78	5.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	881,7587707	881,7587804	881,4191504
79	4.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	880,3898309	880,3898603	879,7575199
80	3.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	879,7617851	879,761802	879,5821581
81	2.3.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	880,8526716	880,8526975	879,9599293

Nastavak Tabele 5.3

82	27.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	881,6761741	881,6761987	881,3156583
83	26.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	883,0277582	883,0277806	882,0263136
84	25.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	882,4418791	882,4419053	881,3369768
85	24.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	883,4044082	883,4044354	882,7917763
86	23.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	884,0788737	884,0788997	883,6647332
87	20.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	884,6643864	884,6644102	884,3647471
88	19.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	884,6678615	884,6678847	884,3978903
89	18.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	884,5454271	884,5454385	884,1596638
90	13.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	881,4132503	881,4132704	881,1457578
91	12.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	881,1665724	881,1665767	880,4946951
92	11.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	880,5761739	880,5761927	879,3625235
93	10.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	879,745298	879,7453095	878,1058995
94	9.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,9161982	873,9162177	871,8170469
95	6.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	871,0767293	871,0767466	871,0640564
96	5.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	870,5017268	870,501741	869,909764
97	4.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	869,5135838	869,513607	869,3708291
98	3.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,229715	868,2297366	868,03059
99	2.2.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	867,7537769	867,7538019	867,7257405
100	30.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	867,7453442	867,7453566	865,820467
101	29.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	869,0346866	869,0346896	868,3619524
102	28.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,7630337	868,7630514	868,5590417
103	27.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,8573205	868,8573374	868,8374659
104	26.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,9759348	868,9759488	868,6535728
105	23.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	869,6969603	869,6969727	869,143625
106	22.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,0686223	868,0686238	866,2840613
107	21.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	867,9849567	867,9849681	867,1968758
108	20.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	868,4384932	868,4385075	867,9246334
109	19.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	869,059499	869,0595167	866,4165067
110	16.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	872,5501575	872,5501672	871,4286191
111	15.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,1834143	874,1834378	870,100452
112	14.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,1014112	875,101433	873,8106423
113	13.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,3219529	875,3219643	875,1216514
114	12.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,3538334	875,3538526	873,5517351
115	9.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,5649171	874,5649377	873,6205196
116	8.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,2123566	874,2123636	873,9142429
117	6.1.2015	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,3522105	874,3522304	873,5582263
118	30.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,6029284	873,6029614	873,4885843
119	29.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	873,4416573	873,4416784	872,548547
120	23.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	874,5083873	874,5084079	873,5556825
121	22.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	875,0646986	875,0647158	873,8549446
122	19.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,4646385	878,4646596	878,0556882
123	18.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,3688642	878,3688825	877,7677202
124	17.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,2846078	878,284626	876,8647182
125	16.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	883,1163423	883,1163679	882,8956908
126	15.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	883,9941292	883,9941383	883,649156
127	12.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,5013433	886,5013777	886,0490216
128	11.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,957188	887,9572086	887,5347155
129	10.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,4637546	889,4637646	889,291872
130	9.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,9840876	886,984122	886,7209901
131	8.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,1641736	887,1642101	886,7985657
132	5.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,4674949	886,4675253	886,2777312
133	4.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,1868754	886,1868992	885,5752794
134	3.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,9726953	887,9727145	887,6361946
135	2.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,0784064	886,0784349	885,9946271

Nastavak Tabele 5.3

136	1.12.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,1086989	886,1087305	885,0428904
137	28.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	886,4710101	886,4710272	885,870999
138	27.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,0374747	887,0374866	886,9518
139	26.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,5848114	888,5848387	888,2954601
140	25.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,3088253	888,3088429	887,9696206
141	24.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,4373847	887,4374121	886,3392755
142	21.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,7608744	888,7609025	888,1794809
143	20.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,564474	889,5644826	889,4680487
144	19.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,1100228	891,1100513	889,1487886
145	18.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,5565677	891,556595	891,3446058
146	17.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,7981201	891,7981454	891,7067037
147	14.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,4860467	892,4860735	892,1387674
148	13.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,5209687	892,5209749	892,033786
149	12.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,2139365	892,2139636	891,8243761
150	10.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,3040973	893,3041237	892,6433733
151	7.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,4261089	893,4261342	893,1517252
152	6.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,7986807	893,7986992	892,6590151
153	5.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,1614658	894,1614745	893,479537
154	4.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,2951228	894,2951532	892,8716845
155	3.11.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,8468256	894,8468522	894,5644016
156	31.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	895,5209197	895,5209476	894,4046442
157	30.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	895,6007123	895,600726	893,3662008
158	29.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	897,2339331	897,2339557	896,5867507
159	28.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	896,9622621	896,9622829	895,3038336
160	27.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	896,5906901	896,5907079	896,1705599
161	24.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,4142575	894,4142826	893,3456271
162	23.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,9484721	893,9484948	892,717299
163	22.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,1905046	893,1905311	892,7050284
164	21.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,3236707	892,3236924	890,6239629
165	20.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,5598922	892,5599062	890,9909882
166	17.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,085171	891,0851943	890,4957165
167	16.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,0540043	891,054028	890,7982306
168	15.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,2270156	891,2270223	890,7862861
169	14.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,8242667	892,8242929	892,769489
170	13.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,3340844	893,3341103	893,2180995
171	10.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,4187416	893,4187658	892,9556574
172	9.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,0792454	893,0792646	892,9170756
173	8.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,5906852	892,5907101	891,6449578
174	7.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,492155	892,492175	892,3970312
175	6.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,6085902	892,6086209	891,6625584
176	2.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,3636133	892,3636412	889,8913229
177	1.10.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,6329084	892,6329325	892,499684
178	30.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,8922882	891,8923158	891,1225553
179	29.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,1709321	891,1709587	891,1041998
180	26.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,4105622	888,4105877	888,1377202
181	25.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,6938455	888,6938672	887,5476321
182	24.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,0847671	891,0847888	889,7485407
183	23.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,7413219	890,7413338	890,0918919
184	22.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,6308181	892,6308385	889,7427624
185	19.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,5436842	892,5437055	892,4862986
186	18.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,9065351	890,9065576	889,9960318
187	17.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,3264951	890,3265072	890,1068921
188	16.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,1586451	889,1586663	887,499616
189	15.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,3979614	890,3979661	890,351567

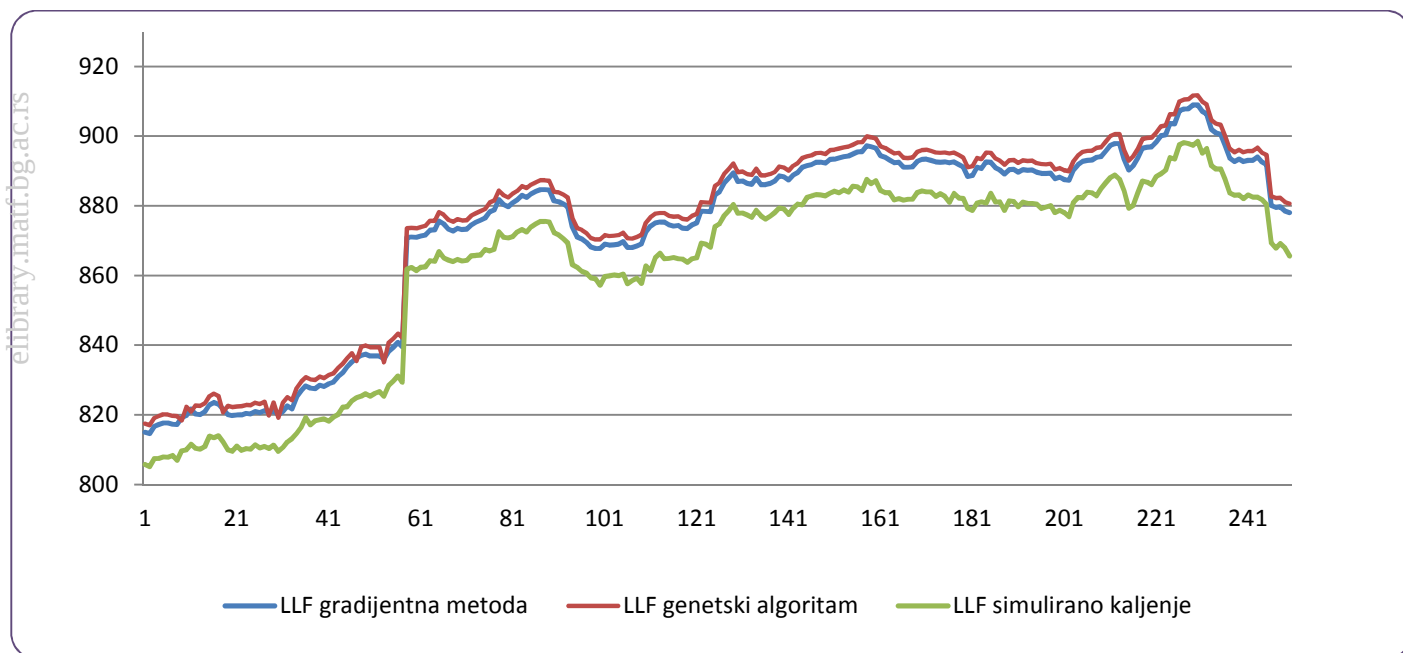
Nastavak Tabele 5.3

190	12.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,4432278	890,4432478	890,138407
191	11.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,6610904	889,6610938	888,6275252
192	10.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,4158813	890,4158961	889,9729427
193	9.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,1875953	890,1876059	889,6281467
194	8.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,3148693	890,3148875	889,6609468
195	5.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,6218261	889,6218442	889,4148955
196	4.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,3508885	889,3509049	888,1115922
197	3.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,2711725	889,2711852	888,5793834
198	2.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	889,3844043	889,38442	889,0307594
199	1.9.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,7615748	887,7615914	886,9382419
200	29.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	888,1979926	888,198005	887,658371
201	28.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,526942	887,5269586	886,9255347
202	27.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	887,3025074	887,3025228	885,7274839
203	26.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,1578548	890,1578695	889,8872972
204	25.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,8418123	891,8418314	891,3044755
205	22.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,7832457	892,7832623	891,2598839
206	21.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,093856	893,0938755	892,8923314
207	20.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,1488264	893,1488438	892,684285
208	19.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,9155869	893,9156044	891,7937439
209	18.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,1131955	894,1132136	893,9063771
210	15.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	895,7330373	895,7330575	895,6059154
211	14.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	897,3647884	897,3648075	897,1443027
212	13.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	897,893544	897,8935576	897,8211453
213	12.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	897,8571149	897,8571341	896,6931942
214	11.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,4278264	893,4278443	893,2249983
215	8.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	890,295351	890,2953669	888,163637
216	7.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,5664469	891,5664598	889,03076
217	6.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,695926	893,6959428	892,646869
218	5.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	896,5131227	896,5131319	896,0861777
219	4.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	896,8532285	896,8532426	895,8007536
220	1.8.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	896,9357816	896,9357884	895,0027756
221	31.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	898,355725	898,3557402	897,3498991
222	30.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	900,1516456	900,1516604	898,1971627
223	29.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	900,3741053	900,3741134	899,1613696
224	28.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	903,6042681	903,6042737	902,8959035
225	25.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	903,5576743	903,5576896	902,4552041
226	24.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	907,2401498	907,240167	906,5695406
227	23.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	907,8205603	907,8205765	907,2087068
228	22.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	907,8247351	907,8247501	906,9618341
229	21.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	908,9353065	908,9353219	906,4604602
230	18.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	909,0232898	909,0233061	907,6194138
231	17.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	907,127564	907,1275771	904,1222584
232	16.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	906,3851319	906,3851505	905,5204858
233	15.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	901,8767793	901,8767916	900,5068375
234	14.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	900,9551903	900,9552043	899,5136906
235	11.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	900,5297173	900,5297286	899,5138168
236	10.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	897,360136	897,3601666	896,6394911
237	9.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,6718789	893,6718853	892,615517
238	8.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,7287364	892,7287487	892,0090668
239	7.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,4237893	893,423805	892,0763141
240	4.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,7414129	892,7414246	890,9930118
241	3.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,0688725	893,0688852	892,0998213
242	2.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	893,0769685	893,0769798	891,3843596
243	1.7.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	894,0225548	894,0225673	891,4052342

Nastavak Tabele 5.3

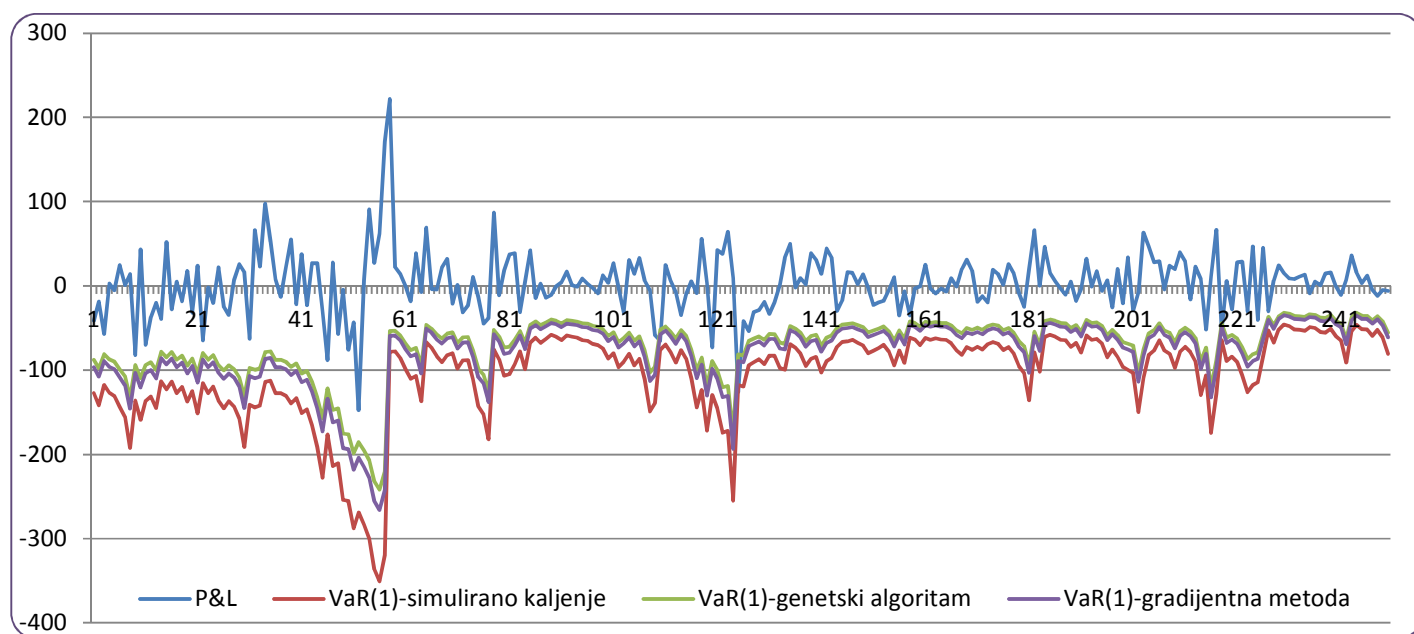
244	30.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	892,5848501	892,5848532	890,7359451
245	27.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	891,9323038	891,932317	889,3909992
246	26.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	880,0600793	880,0600835	878,2394705
247	25.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	879,6041267	879,6041378	876,6028561
248	24.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	879,7030508	879,7030611	877,9749481
249	23.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,4866702	878,4866794	876,7450416
250	20.6.2014	AR(0,0)/GARCH(1,1)	878,0377621	878,0377727	874,3924718

Na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti da je genetski algoritam postigao bolje rezultate maksimizacije funkcije maksimalne verodostojnosti od preostale dve metode (gradijentna i simulirano kaljenje) u 97,2% slučajeva od analiziranih 250 istorijskih trenutaka. Metoda simuliranog kaljenja je postigla u svim opserviranim trenucima lošiji rezultat u odnosu na gradijentnu metodu i genetski algoritam. Poboljšanje vrednosti funkcije cilja u slučaju genetskog algoritma u odnosu na gradijentnu metodu je vrlo blago, preciznije poboljšanje je na četvrtoj odnosno petoj decimali vrednosti funkcije cilja.



Slika 5.4 Komparacija maksimalne postignute vrednosti funkcije cilja metodama optimizacije

Blago poboljšanje u maksimizaciji funkcije cilja u slučaju kada se parametri autoregresivnog heteroskedastičnog modela ocenjuju genetskim algoritmom u odnosu na slučaj kada se ti isti parametri ocenjuju gradijentnom metodom vodi smanjenju kapitalnih zahteva za cenovni rizik za aproksimativno 0,2%. Kapitalni zahtevi se obračunavaju formulom koja je propisana Odlukom o adekvatnosti kapitala i u kojoj se kao najznačajnije varijable koriste istorijske desetodnevne i jednodnevne VaR vrednosti.



Slika 5.5 Backtesting promene vrednosti portfolija i projektovanog gubitka

Na slici 5.5 je prikazana komparacija 250 istorijskih promena vrednosti portfolija (u oznaci P&L) sa projektovanim mogućim gubitkom VaR(1). Može se primetiti da kada se VaR ocenjuje genetskim algoritmom da je projekcija mogućeg gubitka preciznija, projektovani gubitak je bliži opserviranim negativnim vrednostima portfolija što dalje implicira smanjivanje kapitalnih zahteva.

Iako je smanjenje kapitalnih zahteva u procentualnom obliku malo budući da je svakoj finasijskoj instituciji u interesu smanjenje kapitalnih zahteva kako bi pokazatelj adekvatnosti kapitala bio veći, za dati portfolio predloženi genetski algoritam bi skoro sigurno bio favorit u odnosu na već gotova softverska rešenja koja se baziraju na gradijentnim metodama.

6 Zaključak

U ovom radu definisani su autoregresivni – heteroskedastični modeli kojima se modeluje kretanje prinosa portfolija likvidnijih hartija od vrednosti koje su kotirane na Beogradskoj berzi, preciznije portfolija koji se sastoji od vlasničkih hartija od vrednosti koje pripadaju indeksu Belex15 i obveznica R.Srbije. Nepoznati parametri modela su ocenjeni maksimizovanjem funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti sa tri metode optimizacije: gradijentnom metodom, genetskim algoritmom i simuliranim kaljenjem. Za optimizaciju gradijentnom metodom korišćena je funkcija garchfit.m koja je definisana u programskom paketu Matlab, dok su za genetski algoritam i simulirano kaljenje definisani parametri za koje ove dve metode postižu najoptimalnije rezultate. Rezultati backtestinga tj. proveravanje rezultata optimizacije na datom portfoliju u različitim 250 istorijskih trenutaka su pokazali da genetski algoritam sa predloženim parametrima u 97,2% daje najbolje rezultate u smislu maksimizacije funkcije uslovne maksimalne verodostojnosti, za njim sledi gradijentna metoda, dok je metoda simuliranog kaljenja postigla najlošiji rezultat u svih 250 istorijskih opservacija. Poboljšanje u maksimizaciji vrednosti funkcije cilja u slučaju genetskog algoritma u odnosu na gradijentnu metodu je na četvrtom odnosno petom decimalnom mestu u vrednosti funkcije cilja, međutim iako je poboljšanje blago ocenjivanje nepoznatih parametara modela genetskim algoritmom vodi smanjivanju kapitalnih zahteva za cenovni rizik, na datom portfoliju u odnosu na kapitalne zahteve kada se parametri istog modela ocenjuju gradijentnom metodom.

Dalje proširenje i unapređivanje datih rezultata može se izvršiti u nekoliko pravaca:

- u delu proveravanja kvaliteta predložene GA implementacije na drugim portfolijima koji se sastoje od hartija od vrednosti koje se kotiraju na inostranim berzama
- modifikacija opisanog GA za rešavanje sličnih problema.

LITERATURA

- [1] **Antonisse J.**, "A New Interpretation of Schema That Overturns the Binary Encoding Constraint", in: *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Mateo, California, pp. 86-91 (1989).
- [2] **Baker, J.E.** „Adaptive selection methods for genetic algorithms.” In J. Grefenstette, editor, *Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and Their Application*, pp 101-111, Hillsdale, NJ, USA, 1985. Lawrence Erlbaum Associates.
- [3] **Baker, J. E.** "Reducing Bias and Inefficiency in the Selection Algorithm", *Proceedings of the Second, International Conference on Genetic Algorithms on Genetic algorithms and their application*, Hillsdale, NJ, USA pp 14-21, (1987)
- [4] **Beasley D., Bull D.R., Martin R.R.**, "An Overview of Genetic Algorithms, Part 1, Fundamentals", *University Computing*, Vol. 15, No. 2, pp.58-69 (1993) ftp://ralph.cs.cf.ac.uk/pub/papers/GAs/ga_overview1.ps
- [5] **Beasley D., Bull D.R., Martin R.R.**, "An Overview of Genetic Algorithms, Part 2, Research Topics", *University Computing*, Vol. 15, No. 4, pp. 170-181 (1993).
- [6] **Bollerslev, T.** "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31, 34-105. (1986)
- [7] **Chao L.**, "On Estimation of GARCH Models with an Application to Nordea Stock Prices", *U.U.D.M. Project Report 2007:6*, Department of Mathematics, Uppsala University, (2007)
- [8] **Dowsland, K.** „Simulated annealing. In C. Reeves", editor, *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, McGraw-Hill, pp 41-49, USA, (1995)
- [9] **Eshelman L. J. , Schaffer J. D.**, „Real-coded genetic algorithms and interval-schemata" In L. D. Whitley, editor, *Foundations of Genetic Algorithms 2*, pp 187-202, San Mateo, Morgan Kaufmann (1993).
- [10] **Francq C., Zakoian J.M.**, "GARCH Models, Structure, Statistical Inference and Financial Application", Wiley (2010).

- [11] **Goldberg D.E.**, "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass., 412 pp (1989).
- [12] **Goldberg D.E., K. Deb.** „A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms” *In Foundations of genetic algorithms (FOGA 1)*, volume 1, pp 69-93, San Francisco, CA, USA, Morgan Kaufmann (1991).
- [13] **Hamilton D. J.**, “Time Series Analysis”, Princeton University Press. (1994)
- [14] **Holland J.H.**, "Adaptation in Natural and Artificial Systems", The University of Michigan Press, Ann Arbor (1975).
- [15] **Hung J.**, “A fuzzy GARCH model applied to stock market scenario using a genetic algorithm.” *Expert Systems with Applications*, 36, 11710–11717, (2009).
- [16] **Ivković Z.**, „Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom“, Prirodno matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. (1974)
- [17] **Jorion P.** “Value at Risk”, *The McGraw-Hill Companies, Inc.*, (1997).
- [18] **Maza M. D. L, Tidor B.** , “An analysis of selection procedures with particular attention paid to proportional and boltzmann selection”. In S. Forrest, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pp 124-131, San Mateo, CA, USA, Morgan Kaufmann (1993)
- [19] **Mališić J., Jevremović V.**, “Slučajni procesi i vremenske serije”, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. (2008)
- [20] **Mühlenbein H.**, "Genetic Algorithms", *Local Search in Combinatorial Optimization*, eds. Aarts E.H.L., Lenstra J.K., John Wiley & Sons Ltd., pp. 137-172 (1997).
- [21] **Kratica J.**, "Paralelizacija genetskih algoritama za rešavanje nekih NPkompletnih problema", Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd (2000).
- [22] **Stanimirović Z.**, “Genetski algoritmi za rešavanje nekih NP-teških hab lokacijskih problema“, Doktorska disertacija Matematički fakultet, Beograd (2007).
- [23] **Stanimirović Z.**, “Nelinearno programiranje”, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, (2013)

- [24] **Tošić D., Mladenović N., Kratica J., Filipović V.**, "Genetski algoritmi", Matematički institut SANU, Beograd (2004).
- [25] **Tsay R. S.**, "Analysis of Financial Time Series", Wiley. (2005)
- [26] **Vidal R. V. V.** „Applied Simulated Annealing”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 396, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993)
- [27] **Wang C.**, "Improving the Estimation of VaR –GARCH Using genetics algorithm" , *Journal of Systems Science and Systems Engineering* , Vol. 10, No. 3, pp 281-290 (2001)
- [28] **Zheng Y., Zheng T., Zixia Y.**, "GSA-based maximum likelihood estimation for threshold vector error correction model", *Computational Statistics & Data Analysis*, 52 pp 109 – 120 ,(2007)

Sadržaj

1	Uvod.....	6
2	Definicija VaR-a(value at risk) i prinosa portfolija	9
3	Analiza finansijskih vremenskih serija.....	12
3.1	Uvod u slučajne procese, vremenske serije i uslovno matematičko očekivanje.....	12
3.1.1	Autokovarijaciona i autokorelaciona funkcija	16
3.2	Definicija modela uopštene autoregresivne uslovne heteroskedastičnosti	18
3.2.1	Stacionarnost autoregresivnog modela ARMA(m, n)	20
3.2.2	Stacionarnost heteroskedastičnog modela GARCH(p, q)	21
3.2.3	Funkcija uslovne maksimalne verodostojnosti.....	23
3.2.4	Prognoza.....	25
4	Metodi optimizacije.....	27
4.1	Genetski algoritam.....	28
4.1.1	Kodiranje i funkcija prilagođenosti	30
4.1.2	Selekcija.....	31
4.1.3	Ukrštanje	35
4.1.4	Mutacija.....	36
4.1.5	Kriterijum zaustavljanja.....	37
4.1.6	Ostali aspekti genetskog algoritma.....	38
4.2	Predloženi genetski algoritam	38
4.2.1	Reprezentacija i funkcija prilagođenosti	38
4.2.2	Selekcija	39
4.2.3	Ukrštanje	39
4.2.4	Mutacija.....	40
4.2.5	Politika zamene generacija	40
4.3	Simulirano kaljenje.....	40
4.3.1	Planovi hlađenja.....	43
4.4	Predloženi algoritam simuliranog kaljenja	44
4.5	Gradijentna metoda.....	45
5	Praktični rezultati	49

6 Zaključak	61
LITERATURA	62

