Математички факултет
Универзитет у Београду

Експоненцијалне и логаритамске функције, једначине и неједначине у средњој школи са освртом на проблемске задатке

Мастер рад

Ментор:
др Милош Арсеновић

Студент:
Милица Дивнић
1006/2013

Београд,
2015.

Садржај

1 Увод

У раду су обрађене четири целине:

1) Историјат је кратак осврт у вези настанка логаритамских и експоненцијалних функција.

2) Градиво друге године средњих школа - Теорија, садржи теоријски део везан за дату тему који би требало да се обрађује у другој години гимназије, природно-математичког смера. Зашто требало!? Обично је у настави теоријски део доста сажет, па се тако у пракси обрађује само један мањи део.

3) Градиво четврте године средњих школа - Теорија, садржи теоријски део везан за дату тему који би требало да се обрађује у четвртој години гимназије, природно-математичког смера.

4) Градиво друге године средњих школа - Задаци, садржи одабране задатке који се раде на редовној настави, али и на додатној настави. Ова целина заузима највећи део рада, јер је њој и највише посвећено времена у настави. Задаци су наведени по наставним јединицама, а унутар наставних јединица су поређани од најлакшег до најтежег. На крају ове целине налази се одељак са задацима за напредне ученике.

5) Градиво четврте године средњих школа - Задаци, садржи одабране задатке који се раде на редовној настави. Ова целина је доста краћа од претходне, јер у четвртој години експоненцијалне и логаритамске функције прожимају наставне јединице унутар области Функције и ради се врло мало задатака везаних за њих.

Задаци су бирани тако да се у њима може видети што више различитих проблематичних ситуација при решавању, као и где су врло честе грешке ученика. Рађени су поступно, са намером да могу послужити и ученицима који немају добро предзнање да би лакше савладали дато градиво, а и да би видели где њихови вршњаци најчешће греше и да они не би понављали исте грешке. То је јако битан моменат у савладавању градива, јер доста наставника изоставља у настави упозорења која су проблематична места у решавању задатака.

2 Историјат

Да би олакшали рад са компликованим тригонометријским таблицама математичари XVI века су се бавили упоређивањем аритметичке и геометријске прогресије. У овој области је се јако истакао лорд Џон Непер.
У свом делу "Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio", Непер уводи природне логаритме, с идејом да се конструишу два низа бројева, таква да док један од њих расте по аритметичкој прогресији, други опада по геометријској прогресији. И не само то, требало је да производ два броја другог низа зависи од збира одговарајућих бројева првог низа. Његов први покушај није био довољно успешан, па је се потом одлучио да настави рад са Хенријем Бригсом. Хенри Бригс, у делу "Arithmetica Logarithmica", уводи логаритме са базом 10, са четрнаест цифара за целе бројеве од 1 до 20000 и од 90000 до 100000. Андријан Влаку попуњава празнину између 20000 и 90000.
Реч логаритам потиче од грчких речи logos, у преводу однос и arithmos, у преводу број.
Експоненцијалне функције се јављају тек крајем XVII века, а број e се први пут појављује у Неперовој књизи "Descriptio".

3 Градиво друге године средњих школа - Теорија

У другој години гимназије се обрађују четири тематске целине: Степеновање и кореновање, Квадратна једначина и квадратна функција, Експоненцијална и логаритамска функција и Тригонометријска функција. Изузимајући часове предвиђене за писмене задатке, од преостала стоседамдесет и три часа определљена за математику на годишњем нивоу у гимназији на природно-математичком смеру, тридесет и два су посвећена наставној теми Експоненцијална и логаритамска функција, и то је тринаест часова предвиђено за обраду, шеснаест за утврђивање и три часа за остале типове часа. Ако се узме у обзир допунска настава, од планираних тридесет и пет часова на годишњем нивоу, дванаест би требало да буде посвећено Експоненцијалној и логаритамској функцији. А ако би се узела у обзир додатна настава, заступљеност исте теме је врло мала. Од предвиђена тридесет и два часа на годишњем нивоу за додатну наставу, само два су определљена за ову тему. Уопштено гледајући удео ове наставне теме у зависности од типа наставе је разнолик.

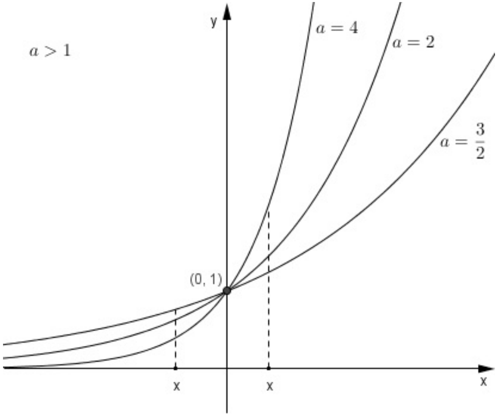
3.1 Експоненцијална функција и њен график

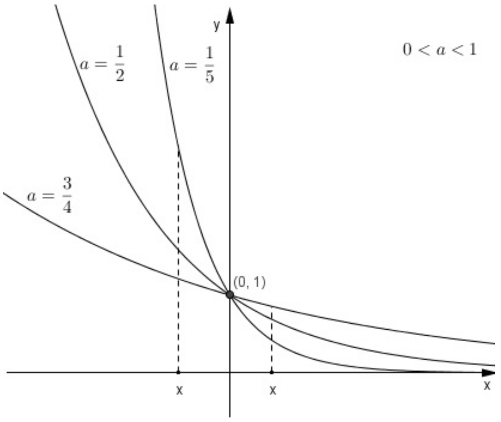
Дефиниција 1. *Нека је $a \neq 1$ позитивна константа, $x \in \mathbb{R}$, функција $y = a^x$ назива се експоненцијална функција са основом a.*

За $a = 1$, важи $a^x = 1^x = 1$, за свако $x \in \mathbb{R}$, па је то константна функција.

Теорема 1. *Ако је $a > 1$, функција $y = a^x$ је позитивна за свако $x \in \mathbb{R}$, растућа је на $\mathbb{R}$, а график те функције садржи тачку $(0, 1)$. Ако је $x > 0$, онда је $a^x > 1$, а ако је $x < 0$, онда је $0 < a^x < 1$.*
Ако је $0 < a < 1$, функција $y = a^x$ је позитивна за свако $x \in \mathbb{R}$, опадајућа је на $\mathbb{R}$, а график те функције садржи такође тачку $(0, 1)$. Ако је $x > 0$, онда је $0 < a^x < 1$, а ако је $x < 0$, онда је $a^x > 1$.

На наредне две слике могу се видети примери експоненцијалне функције. И то, на левој слици примери функција облика $y = a^x$, за $a > 1$, а на десној слици примери функција облика $y = a^x$, за $0 < a < 1$.



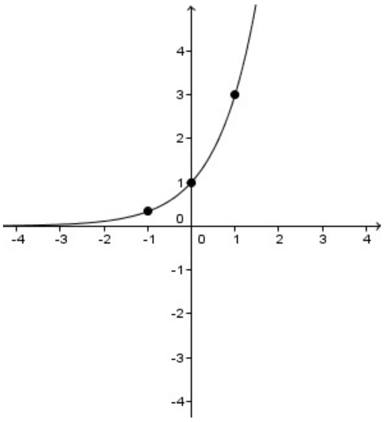


На овим сликама понаособ јако је битно уочити односе графика функција у зависности од вредности параметра a. Тако за $a_1, a_2, a_3, ... > 1$, вредности функција: $y_1 = {a_1}^x$, $y_2 = {a_2}^x$, $y_3 = {a_3}^x$,..., су у истом поретку као и a_1, a_2, a_3,..., за $x > 0$, а за $x < 0$ су у обрнутом поретку. Али зато за $0 < a_1, a_2, a_3, ... < 1$, вредности функција: $y_1 = {a_1}^x$, $y_2 = {a_2}^x$, $y_3 = {a_3}^x$,..., су у обрнутом поретку у односу на поредак вредности a_1, a_2, a_3,..., за $x > 0$, а за $x < 0$ су у истом поретку. Посматрајући обе слике истовремено можемо приметити и да график сваке експоненцијалне функције садржи тачку $(0, 1)$.
Уз претходно наведене особине, графици наредних експоненцијалних функција су скицирани.

Пример 1.
Скицирати график функције: $y = 3^x$.

Решење.

x	-1	0	1
y	$\frac{1}{3}$	1	3

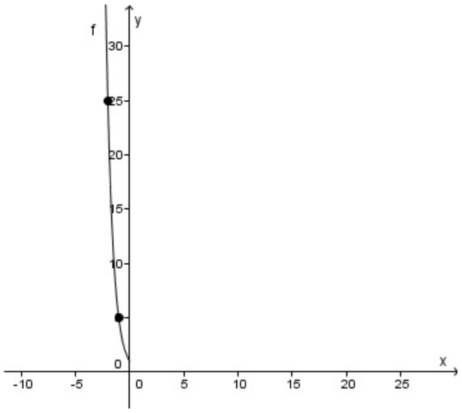


$\triangle$

Пример 2.
Скицирати график функције: $y = (\frac{1}{5})^x$, $-3 \leq x < 0$.

Решење.

x	-2	-1
y	25	5



$\triangle$

Основна својства експоненцијалне функције:

1) За свако $a > 0$ и свако $x \in \mathbb{R}$ је $a^x > 0$.

2) За свако $a > 0$ и свако $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ је $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

3) За свако $a > 0$ и свако $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ је $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

4) За свако $a > 0$, $b > 0$ и свако $x \in \mathbb{R}$ је $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5) I) За свако $a > 1$ и свако x_1 и x_2 из скупа $\mathbb{R}$, такве да је $x_1 < x_2$, важи $a^{x_1} < a^{x_2}$, тј. функција a^x је строго растућа на скупу $\mathbb{R}$.
II) За свако $0 < a < 1$ и свако x_1 и x_2 из скупа $\mathbb{R}$, такве да је $x_1 < x_2$, важи $a^{x_1} > a^{x_2}$, тј. функција a^x је строго опадајућа на скупу $\mathbb{R}$.

Поједини докази:
Напомена: наредни докази су валидни само за $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N}$. Доказ у општем случају се ради на факултету, не и у средњој школи и доста је дужи.

2) $a^x \cdot a^y = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{y} = a^{x+y}$

3) $(a^x)^y = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{y} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x}}_{y \cdot x} = a^{x \cdot y}$

4) $a^x \cdot b^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{x} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{x} = (ab)^x$

Теорема 2. *Функција: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \ni x \to a^x = y \in \mathbb{R}$, за коју је $a > 0$, $a \neq 1$, скуп $\mathbb{R}$ пресликава на скуп $\mathbb{R}^+$ и то пресликавање је ”1-1”и ”на”тј. бијективно.*

3.2 Експоненцијалне једначине

Једначина у којој се непозната налази и у изложиоцу назива се експоненцијална једначина.
При решавању експоненцијалне једначине обично се прво приступа одређивању области дефинисаности. Област дефинисаности је скуп реалних бројева непознате за коју су дефинисане све функције које се појављују у једначини. Ако су D_a, D_f, D_g, области дефинисаности функција: $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, реалан број x из скупа $\{x \in D_a | a(x) > 0\}$ је решење једначине: $[a(x)]^{f(x)} = [a(x)]^{g(x)}$, ако и само ако је решење бар једног од следећа два система:

1) $a(x) = 1, x \in D_f \cap D_g$,

2) $f(x) = g(x), x \in \{x \in D_a | a(x) > 0\}$.

3.3 Експоненцијалне неједначине

Неједначина код које се непозната налази у изложиоцу назива се експоненцијална неједначина.
Поступак је врло сличан решавању експоненцијалних једначина. Прво се одређује област дефинисаности. Затим се неједначина трансформише на неки једноставнији облик, па потом се разликују два случаја:

1) за $a(x) > 1$ важи: $a(x)^{f(x)} \leq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

2) за $0 < a(x) < 1$ важи: $a(x)^{f(x)} \leq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$

Пример 3. *Решити неједначину: $(\frac{1}{2})^{x+2} > (\frac{1}{4})^x$.*

Решење.

$$(\tfrac{1}{2})^{x+2} > (\tfrac{1}{2})^{2x}$$

Па пошто је: $0 < \frac{1}{2} < 1$, важи следеће:

$$\begin{aligned}&x + 2 < 2x\\&-x + 2 < 0\\&x > 2.\end{aligned}$$

△

3.4 Појам инверзне функције

За произвољну бијективну функцију $f : A \to B$, за свако $y \in B$ одређено је тачно једно $x \in A$ такво да је $y = f(x)$, те функцију дефинисану са:

$$f^{-1} : B \to A,$$

тако да важи:

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x),$$

називамо инверзна функција функције f, у ознаци f^{-1}.

Ако са $F(x, y)$ означимо тачке графика функције f, онда ће график функције f^{-1} садржати тачке облика $G(y, x)$. За $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$ тачке $F(x, y)$ и $G(y, x)$ су симетричне у односу на праву $y = x$. Па су график дате функције и њој инверзне функције осно симетрични у односу на праву $y = x$.

За функцију $f : A \to B$ и њој инверзну функцију $f^{-1} : B \to A$ важи следеће:

1) за свако $x \in A$ је $f^{-1}(f(x)) = x$;

2) за свако $y \in B$ је $f(f^{-1}(y)) = y$.

Важно је приметити да је инверзна функција растуће функције такође растућа функција, а инверзна функција опадајуће функције такође опадајућа функција.

Пример 4. *Наћи инверзну функцију функцији $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x-1$ и скицирати график дате функције и њој инверзне.*

Решење. Функција f јесте бијективно пресликавање скупа $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, па има инверзну функцију.
Први корак, место $f(x)$ треба посматрати y:

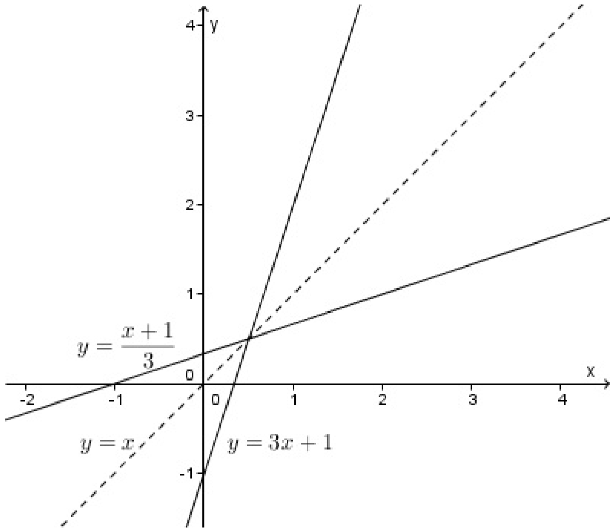
$$y = 3x - 1.$$

Следћи корак је изразити x преко y:

$$x = \frac{y+1}{3}.$$

На крају се добија:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}.$$



На приложеној слици може се приметити да је график дате функције симетричан у односу на праву $y = x$ графику њој инверзне функције, као и да пошто је дата функција растућа онда је и њој инверзна функција такође растућа. △

3.5 Логаритамска функција и њен график

Дефиниција 2. *Логаритамска функција са основом a је инверзна функција* $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *функције* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *дате са* $f(x) = a^x$, *где је* $a > 0$ *и* $a \neq 1$.
$x = \log_a y \iff y = a^x$

Дефиниција 3. *Нека је* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$ *и* $b > 0$. *Логаритам броја b за основу a је реалан број x којим треба степеновати број a да би се добио број број b, тј. за који важи* $a^x = b$. *Тај број означавамо са* $x = \log_a b$, *а читамо "x је логаритам броја b за основу a". Значи, a се зове основа, а b је логаритманд.[5]*

Основна својства логаритама:

1) нека је $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, тада важи: $a^{\log_a b} = b$

2) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, за свако $x > 0$ и свако $y > 0$ важи: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

3) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, $s \in \mathbb{R}$, за свако $x > 0$ важи: $\log_a x^s = s \log_a x$

4) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, за свако $x > 0$ и свако $y > 0$ важи: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

5) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, за свако $x > 0$ важи: $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$

6) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, тада важи: $\log_a 1 = 0$

7) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, тада важи: $\log_a a = 1$

8) нека је $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ тада важи: $\log_b a = \log_{b^n} a^n$

9) нека је $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ тада важи: $\log_b a \cdot \log_a b = 1$, тј.$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

10) нека је $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$ тада важи: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

11) нека је $a > 0$, $a \neq 1$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$ тада важи: $\log_{a^s} x = \frac{1}{s}\log_a x$

Доказ:

1) Прва особина је директна последица дефиниције.

2) Нека је: $\alpha = \log_a x$ и $\beta = \log_a y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, тада је: $x = a^\alpha$ и $y = a^\beta$. На основу датих услова $x \cdot y > 0$, па постоји логаритам $\log_a xy$, а важи и:
$a^{\log_a xy} = xy = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^{\log_a x + \log_a y}$

3) Нека је: $\alpha = \log_a x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. С обзиром да је $x^s > 0$, онда постоји $\log_a x^s$ и важи:
$a^{\log_a x^s} = x^s = (a^{\log_a x})^s = a^{s\log_a x}$

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$, па је ова особина последица особина 2) и 3).

5) $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$, па је ова особина последица особине 3).

6) Ово особина следи из једнакости $a^0 = 1$.

7) Ово особина следи из једнакости $a^1 = a$.

8) Нека је: $\alpha = \log_{b^n} a^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, тада је $(b^n)^\alpha = a^n$. Одавде је очигледно да је: $b^\alpha = a$, одакле следи и $\alpha = \log_b a$.

9) На основу првог својства је: $a^{\log_a b} = b$.
Логаритмовањем за основу b ове једнакости, добија се: $\log_b a^{\log_a b} = \log_b b$, па применом својства 3) на леву страну једнакости и својства 7) на десну страну једнакости добија се $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

10) Логаритмовањем за основу a следеће једнакости $a^{\log_a c} = b^{\log_b c}$, и применом својства 3) добија се: $\log_a c = \log_b c \cdot \log_a b$, одакле је: $\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_b c}$. Сада се применом својства 9) на бројилац и именилац претходног разломка добија: $\log_a b = \frac{\frac{1}{\log_c a}}{\frac{1}{\log_c b}} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

11) На основу својства 9) и 3) важи: $\log_{a^s} x = \frac{1}{\log_x a^s} = \frac{1}{s\log_x a} = \frac{1}{s}\log_a x$.

Без обзира на то што основа логаритма може бити било који позитиван број различит од један, у задацима ће се често појављивати логаритми чија је основа ирационалан број $e = 2,718....$ Логаритми овог типа називају се природни логаритми и често се обележавају са ln. Број e је једна од најзначајнијих математичких константи, позната и као "Ојлеров број"или "Неперова константа".

У задацима се често појављују и логаритми чија је основа 10. Логаритми овог типа називају се декадни логаритми и често се обележавају са log без назначене основе или са lg. Треба имати у виду да ови начини обележавања датих логаритама нису увек на снази, то је ствар договора и зависи од литературе. На пример, у енглеској литератури често се користи log без назначене основе за ln.

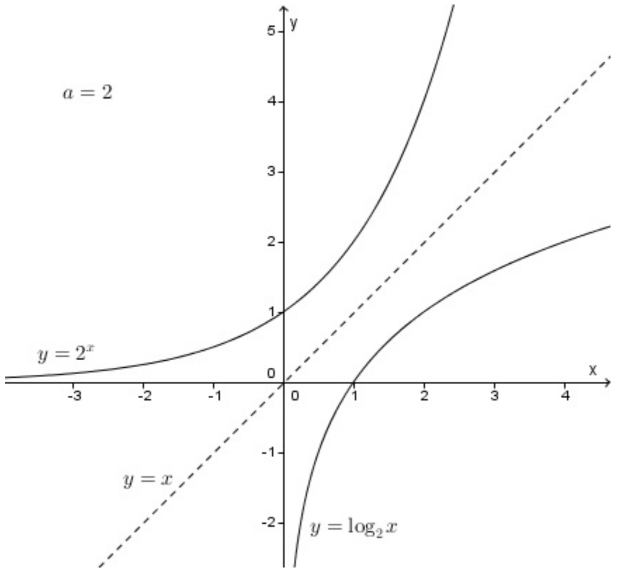
За функцију: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R} \ni x \to f(x) = a^x = y \in \mathbb{R}^+$, њој инверзна функција је:
$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ \ni y \to f^{-1}(y) = \log_a y = x \in \mathbb{R}$.

Па је за функцију $y = a^x$ инверзна функција $x = \log_a y$. С обзиром на то, график функције $y = \log_a x$, за $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$ скицираћемо користећи график функције $y = a^x$.

I случај: $a > 1$

Функција $y = a^x$ у овом случају је растућа на области дефинисаности($\mathbb{R}$), а кодомен јој је $\mathbb{R}^+$, па је и функција $y = \log_a x$ растућа на области дефинисаности($\mathbb{R}^+$), а кодомен јој је $\mathbb{R}$.

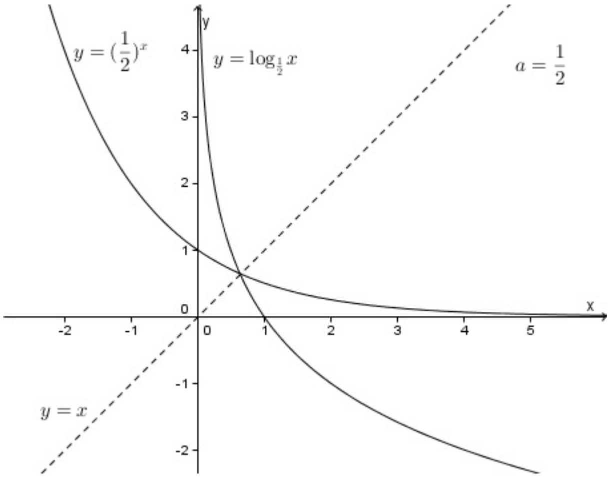
Пример 5. *Размотримо случај када је* $a = 2$.



II случај: $0 < a < 1$

Функција $y = a^x$ у овом случају је опадајућа на области дефинисаности($\mathbb{R}$), а кодомен јој је $\mathbb{R}^+$, па је и функција $y = \log_a x$ опадајућа на области дефинисаности($\mathbb{R}^+$), а кодомен јој је $\mathbb{R}$.

Пример 6. *Размотримо случај када је* $a = \frac{1}{2}$.



3.6 Логаритамске једначине

Једначина у којој се непозната појављује у аргументу или у основи, или у оба назива се логаритамска једначина.
Као и при решавању експоненцијалне једначине прво се приступа одређивању области дефинисаност. Област дефинисаности је скуп реалних бројева непознате за коју су дефинисане све функције које се појављују у једначини. Решавање логаритамске једначине облика: $\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ своди се на решавање система: $a(x) > 0$, $a(x) \neq 1$, $f(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.
Решавање логаритамске једначине облика: $\log_{a(x)} f(x) = g(x)$ своди се не решавање система: $a(x) > 0$, $a(x) \neq 1$, $f(x) > 0$ и $f(x) = a(x)^{g(x)}$.

Решавање логаритамске једначине неког другог сложенијег облика своди се на трансформацију дате једначине коришћењем особина логаритама, на неки од поменутих, простијих видова логаритамске једначине, а затим и решавањем дате простије логаритамске једначине на поменуте начине. Трансформацију одређених типова сложенијих логаритамских једначина можемо извести и свођењем више логаритама са различитим основама, на логаритме са истом основом, или увођењем смене, или логаритмовањем једначине,...

3.7 Логаритамске неједначине

Неједначина у којој се непозната појављује у аргументу или у основи, или у оба назива се логаритамска неједнчина.
Као и при решавању логаритамских једначине прво се приступа одређивању области дефинисаности. Област дефинисаности је скуп реалних бројева непознате за коју су дефинисане све функције које се појављују у неједначини, тј. исто се дефинише као и код логаритамских једначина.
Решење логаритамске неједначине облика $\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x)$ је $x \in \mathbb{R}$ такво да:

1) за $a(x) > 1$ важи: $0 < f(x) < g(x)$
2) за $0 < a(x) < 1$ важи: $f(x) > g(x) > 0$

Сложеније логаритамске неједначине се истим методама које су примењиване код логаритамских једначина трансформишу у простије логаритамске неједначине.

4 Градиво четврте године средњих школа - Теорија

У четвртој години гимназије се обрађује пет тематских целина: Функције, Извод функције, Интеграл, Комбинаторика и Вероватноћа и статистика. Од укупно стодвадесет и осам часова у току године опредељених за математику на годишњем нивоу у гимназији на природно-математичком смеру, двадесет и осам часова је опредељено за област Функције. Дванаест за обраду, тринаест за утврђивање и три за остале типове часа. Од тога је само један мали део посвећен експоненцијалним и логаритамским функцијама.

4.1 Функција - основни појмови

Дефиниција 4. *Нека су* A *и* B *непразни скупови и нека је сваком елементу,* $x \in A$ *додељен по закону* f *тачно један елемент* $y \in B$*. Тада је на скупу* A *задата функција* f *са вредностима у скупу* B*. Ову функцију ћемо означавати са:* f, $f : A \to B$, $y = f(x)$ *или* $f(x)$.

Скуп A називамо област дефинисаности или домен функције f, а скуп B је скуп вредности или кодомен функције f. Променљива x је независно променљива, а променљива y је зависно променљива.
Функција f је "1-1"ако за свака два елемента $x_1, x_2 \in A$ важи следеће:
$x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.
Функција f је "на"ако за свако y у кодомену, постоји x у домену.
Пресликавање $f : A \to B$ је бијекција ако је "1-1"и "на".

Дефиниција 5. *Функција* $f : A \to B$ *је ограничена одоздо ако постоји број* M *такав да је за сваки елемент* $x \in A$, $f(x) \geq M$.
Функција $f : A \to B$ *је ограничена одозго ако постоји број* N *такав да је за сваки елемент* $x \in A$, $f(x) \leq N$.
Функција $f : A \to B$ *је ограничена ако је ограничена и одоздо и одозго, тј. ако постоје бројеви* M *и* N *такви да је за сваки елемент* $x \in A$, $M \leq f(x) \leq N$.

Дефиниција 6. *Функција* $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$ *је парна, ако важи* $f(-x) = f(x)$ *за сваки елемент* $x \in \mathbb{R}$ *и ако је скуп* $\mathbb{R}$ *симетричан у односу на тачку* 0.
Функција $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$ *је непарна, ако важи* $f(-x) = -f(x)$ *за сваки елемент* $x \in A$ *и ако је скуп* A *симетричан у односу на тачку* 0.

Ако је функција f парна, онда је график те функције симетричан у односу на y-осу.
Ако је функција f непарна, онда је график те функције симетричан у односу на координатни почетак.

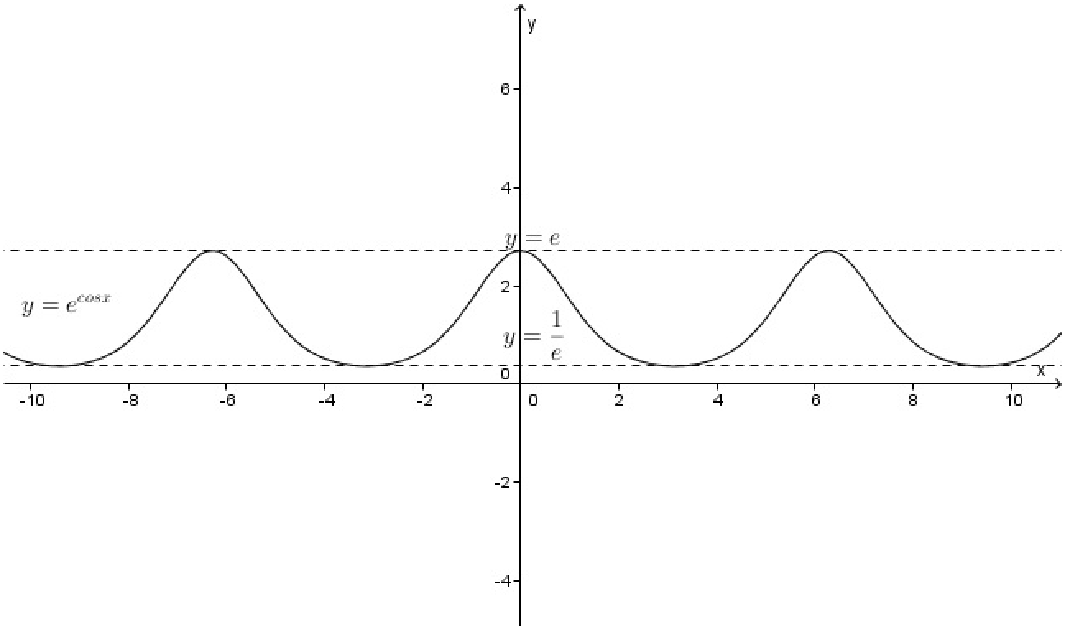
Дефиниција 7. *Функција* f *је периодична ако постоји број* $T \neq 0$ *такав да је* $f(x + T) = f(x)$*, за свако* x *из обалсти дефинисаности. Број* T *је период функције* f.

Пример 7. *Функција* $f(x) = e^{cosx}$, *је:*

1) *ограничена, јер је ограничена и одоздо и одозго:* $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq e$;

2) *периодична са периодом* $T = 2\pi$;

3) *парна, па је график њене функције симетричан у односу на y осу.*



Дефиниција 8. *Функција* $f : A \to B$ *је растућа на скупу* $X \subset A$ *ако за произвољне вредности* $x_1, x_2 \in X$ *такве да је* $x_1 < x_2$ *следи* $f(x_1) < f(x_2)$.
Функција $f : A \to B$ *је опадајућа на скупу* $X \subset A$ *ако за произвољне вредности* $x_1, x_2 \in X$ *такве да је* $x_1 < x_2$ *следи* $f(x_1) > f(x_2)$.
Функција $f : A \to B$ *је неопадајућа на скупу* $X \subset A$ *ако за произвољне вредности* $x_1, x_2 \in X$ *такве да је* $x_1 < x_2$ *следи* $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Функција $f : A \to B$ *је нерастућа на скупу* $X \subset A$ *ако за произвољне вредности* $x_1, x_2 \in X$ *такве да је* $x_1 < x_2$ *следи* $f(x_1) \geq f(x_2)$.

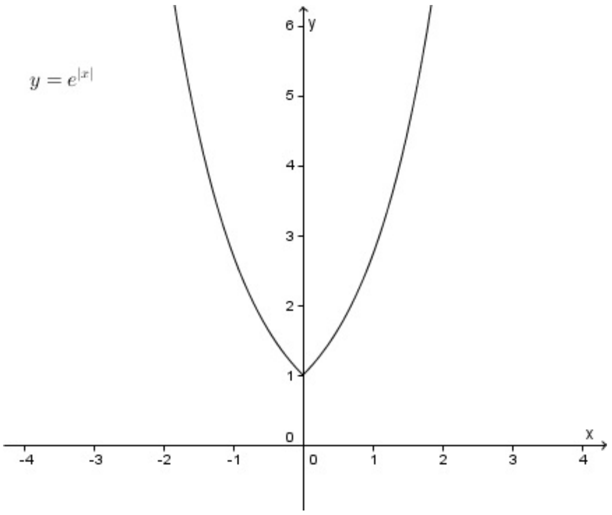
Функције које су растуће или опадајуће или нерастуће или неопадајуће називају се монотоне функције.

Пример 8. *Функција* $f(x) = e^{|x|}$ *је:*

1) *ограничена одоздо:* $1 \leq f(x)$;

2) *опадајућа на интервалу* $(-\infty, 0)$, *а растућа на интервалу* $(0, +\infty)$;

3) *парна, па је график њене функције симетричан у односу на y осу.*



4.2 Сложена функција

Дефиниција 9. *За две функције* $f : A \to B$ *и* $g : B \to C$*, функција* $h : A \to C$ *је сложена функција или суперпозиција функција* f *и* g *ако је* $h(x) = g(f(x))$ *за свако* $x \in A$*. Означаваћемо са* $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$*.*

Суперпозиција је асоцијативна, али не и комутативна операција која се може применити на коначно много функција.

4.3 Инверзна функција

Напомена: градиво везано за ову лекцију се обрађује на исти начина као и у другој години средњих школа, па овде неће бити понављано.

5 Градиво друге године средњих школа - Задаци

5.1 Експоненцијална функција и њен график

Задатак 1. *Скицирати графике функција:*

1) $y = 5^x,\ -1 \leq x \leq 1$

2) $y = -2^x$

3) $y = 3 \cdot 2^{-x},\ x > -1$

4) $y = 3^x - 1$

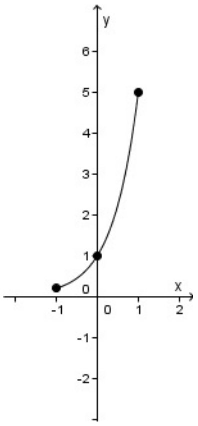
5) $y = (\frac{1}{3})^{|x|}$

6) $y = 3^x \cdot 3^{|x|}$

Решење.

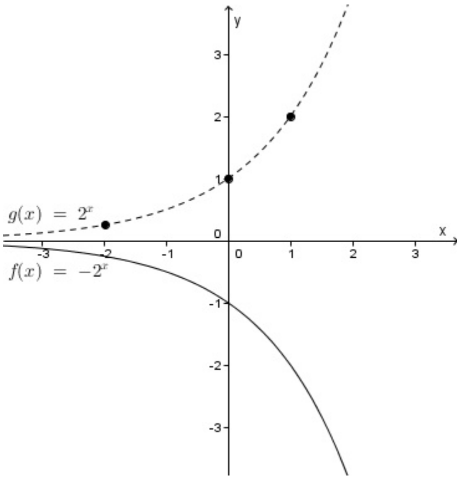
Напомена: у сваком од ових примера осим табеле за цртање графика функције користићемо и својства експоненцијалне функције како би тачке чије смо координате добили помоћу табеле спојили правилно.

1) За скицирање графика ове функције прво правимо одговрајућу табелу. Може се приметити да је $5 > 1$, па је дата функција позитивна за свако x из домена и растућа је. Примери овог типа, у којима постоје појединa ограничења домена су примери где ученици праве грешке, тј. они уопште не разматрају ограничење домена.



x	-1	0	1
y	$\frac{1}{5}$	1	5

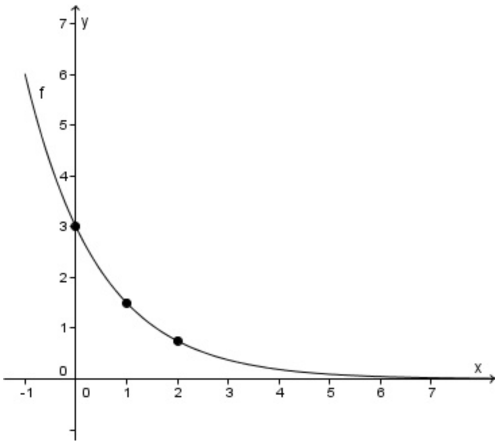
2) График дате функције је симетричан графику функције $y = 2^x$ у односу на x-осу. С обзиром на то, прво се скицира график функције $y = 2^x$ користећи одговарајуће особине експоненцијалних функција. Потом се осном симетријом у односу на x-осу преслика график функције $y = 2^x$ и новодобијени график је график функције $y = -2^x$. Ученици суочени са овим примером обично покушају да одмах скицирају тражени график, формирајући табелу за функцију $y = -2^x$, али због недостатка увежбаности нису сигурни на који начин да повежу тачке добијене том табелом.



x	-2	0	1
y	$\frac{1}{4}$	1	2

3) Дата функција је еквивалентна функцији $y = 3 \cdot (\frac{1}{2})^x$ за $x > -1$. С обзиром да је $0 < \frac{1}{2} < 1$, дата функција је позитивна и опадајућа. Грешке које ученици праве код овог примера, сличне су грешкама које праве и код првог примера.

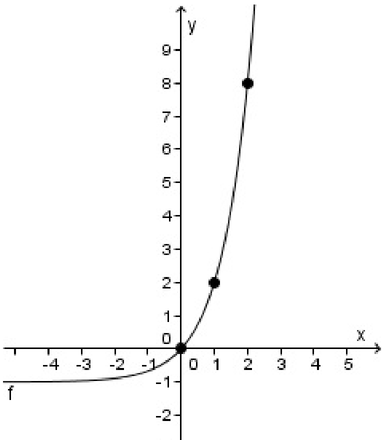
x	0	1	2
y	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$



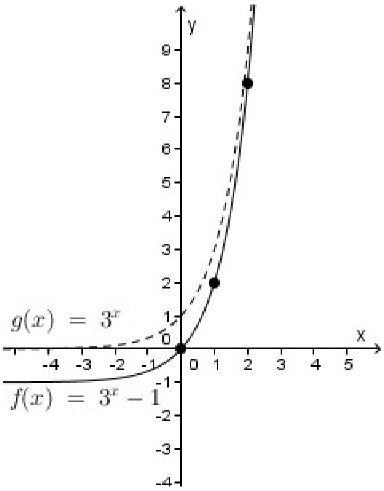
4) Захтевани график је врло лако скицирати помоћу већ поменутих особина експоненцијалних функција, и то је први начин на који је скицирање извршено. Други начин је да се ординате графика функције $y = 3^x$ смање за један. Други начин је занимљив ученицима, али није начин којег ће се сетити већи број ученика када се самостално упусте у скицирање графика слично задатих функција. Слични примери могу бити задати тако да је уместо одузимања дато сабирање, али тада се ордината повећава, а не смањује као у претходном примеру.

I начин:

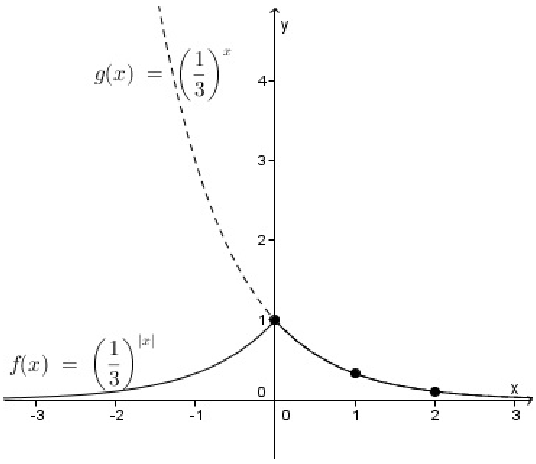
x	0	1	2
y	0	2	8



II начин:

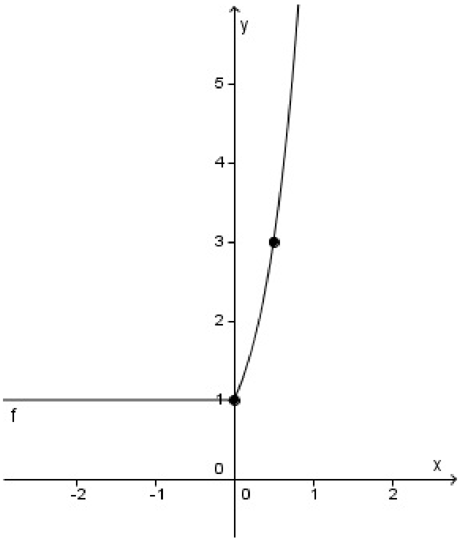


5) У овом као и у наредном примеру велики проблем ученицима стварају апсолутне заграде. Великом броју ученика у сличним ситуацијама је тешко да дати проблем сведу на два случаја, први када је израз између апсолутних заграда већи или једнак нули, и други, када је тај исти израз мањи од нуле. Конкретно, код овог примера, за $x \geq 0$ посматрамо функцију $y = (\frac{1}{3})^x$, а за $x < 0$ посматрамо функцију $y = (\frac{1}{3})^{-x}$. График друге функције добијамо када график прве функције осном симетријом пресликамо у односу на y-осу. У неким случајевима ученици нацртају графике обе функције, $y = (\frac{1}{3})^x$ и $y = (\frac{1}{3})^{-x}$, али нису сигурни шта даље треба урадити, тј. које делове од графика ових функција треба подебљати.



x	0	1	2
y	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

6) За $x \leq 0$ дата функција је једнака функцији $y = 1$, а за $x > 0$ је једнака функцији $y = 3^{2x}$. Са графиком линеарне функције ученици се срећу по први пут у основној школи. У највећем броју случајева наставници у основним школама се фокусирају на график функције облика $y = kx + n$, где је $k \neq 0$, а врло ретко посвете довољно пажње специјалним случајевима $y = a$ и $x = b$, за $a, b \in \mathbb{R}$. Зато овде може бити проблем скицирати график функције $y = 1$. Осим тога, као и у претходном примеру, проблем могу имати и када треба да одлуче који део графика од поменуте две функције треба подебљати.



x	0	$\frac{1}{2}$
y	1	3

□

5.2 Експоненцијалне једначине и неједначине

Најчешће грешке ученика при решавању експоненцијалних и логаритамских једначина и неједначина су:

1) не разматрање области дефинисаности у целости или делимично;

2) не разматрање свих могућих случајева.

С обзиром на претходно наведено, може се закључити да те грешке у највећем броју случајева настају трансформацијом датих израза, а притом не водећи рачуна на који начин те трансформације утичу на област дефинисаности. Стога је препоручљиво примењивати трансформације које не сужавају област дефинисаности.

Највећи проблеми са којима се ученици при решавању експоненцијалних и логаритамских једначина и неједначина сусрећу су:

1) Потреба да се лева и десна страна експоненцијалних једначина, односно експоненцијалних неједначина сведу на изразе са истом основом или експонентом, тј. да се лева и десна страна логаритамских једначина, односно логаритамских неједначина сведу на изразе са истом основом. Управо овде треба применити претходно поменуте трансформације.

2) Лоше познавање квадратних неједачина и једначина. Велики проценат задатака из ове области се своди на решавање квадратних неједачина или квадратних једначина.

3) Проналажење одговарајуће смене.

Задатак 2. *Реши једначине:*

1) $2^x = 8$

2) $(\frac{1}{27})^x = 81$

3) $(\frac{4}{5})^{0,2x} = \frac{125}{64}$

4) $(x^2+1)^{2x-3} = 1$

5) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = (\frac{8}{\sqrt{2}})^x$

6) $2^x \cdot 3^{x+1} = 18$

7) $\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}} = 1,5$

8) $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$

9) $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$

10) $\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot (0,125)^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$

11) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

12) $12 \cdot 9^x - 35 \cdot 6^x + 18 \cdot 4^x = 0$

13) $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$

14) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$

Решење.
Напомена: област дефинисаности за све примере сем десетог и једанаестог је скуп $\mathbb{R}$.

1)

$$2^x = 8$$

Једначине овог облика решавају се тако што се изрази са леве и дене стране знака једнакости своде на степене са истом основом:

$$\begin{aligned} &2^x = 2^3 \\ &x = 3 \end{aligned}$$

2)

$$(\tfrac{1}{27})^x = 81$$

Ова једначина се решава на сличан начин као претходна, јер се и 27 и 81 могу написати као степени броја три.

$$\begin{aligned} &(\tfrac{1}{27})^x = 81 \\ &(\tfrac{1}{3^3})^x = 3^4 \end{aligned}$$

Сада треба искористити два својства експоненцијалних функција: $\frac{1}{a} = a^{-1}$ и $(a^x)^y = a^{xy}$.

$$\begin{aligned} &(3^{-3})^x = 3^4 \\ &3^{-3x} = 3^4 \\ &-3x = 4 \\ &x = -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

3)

$$(\tfrac{4}{5})^{0,2x} = \tfrac{125}{64}$$

За разлику од претходног примера где се ни са леве ни са десне стране не појављује број који не треба трансформисати, у овом примеру је са леве стране дат разломак који не захтева трансформацију, а самим тим и усмерава ученика на који начин треба трансформисати десну страну једнакости, што је олакшавајућа околност. Односно, разломак $\frac{125}{64}$ се може написати као степен разломка $\frac{4}{5}$.

$$(\tfrac{4}{5})^{\frac{1}{5}x} = \tfrac{5^3}{4^3}$$
$$(\tfrac{4}{5})^{\frac{1}{5}x} = (\tfrac{5}{4})^3$$

У наредном кораку треба применити особину експоненцијалних функција:
$\frac{1}{a} = a^{-1}$.

$$(\tfrac{4}{5})^{\frac{1}{5}x} = (\tfrac{4}{5})^{-3}$$
$$\tfrac{1}{5}x = -3$$
$$x = -15$$

4)

$$(x^2 + 1)^{2x-3} = 1$$

За разлику од претходних једначина код ове се поступак решавање разликује. Отежавајућа околност је што се непозната појављује и у основи и у експоненту, што зна да делује збуњујуће на ученике, али је олакшавајућа околност што се са десне стране једнакости налази 1. С обзиром на целу ситуацију разликоваћемо два случаја:

I случај:	II случај:
Када је експонент једнак нули.	Када је основа једнака један.
Јер је $a^0 = 1,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.	Јер је $1^a = 1,\ a \in \mathbb{R}$.
$2x - 3 = 0$	$x^2 + 1 = 1$
$x = \frac{3}{2}$	$x = 0$

Па ова једначина има два решења $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = 0$.

5)

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} = (\tfrac{8}{\sqrt{2}})^x$$

Сваки од чиниоца са леве, као и дељеник и делилац са десне стране ове једначине може се написати као степен броја 2, потом треба искористити основна својства експоненцијалних функција. Није тако лако уочити да се број $0,125$ може записати као степен броја 2, па добро познавање основних својстава експоненцијалних функција није пресудно за поједине ученике да ће доћи до тачног решења.

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8} \cdot (2^2)^{2x-3} = (\tfrac{2^3}{2^{\frac{1}{2}}})^x \\
&2^{-3} \cdot 2^{2\cdot(2x-3)} = (2^{3-\frac{1}{2}})^x \\
&2^{-3+4x-6} = 2^{\frac{5}{2}x} \\
&2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x} \\
&4x - 9 = \tfrac{5}{2}x \\
&4x - \tfrac{5}{2}x = 9 \\
&\tfrac{3}{2}x = 9 \\
&x = 6
\end{aligned}
$$

6) За разлику од претходних примера код овог примера се појављује производ степена различитих основа са леве стране једнакости, који се не могу свести на степене исте основе. С обзиром на то, прво треба покушати свести те степене на степене са истим експонентима.

$$
\begin{aligned}
&2^x \cdot 3^{x+1} = 18 \\
&2^x \cdot 3^x \cdot 3 = 18 \\
&(2 \cdot 3)^x \cdot 3 = 18 \\
&6^x = 6 \\
&x = 1
\end{aligned}
$$

7)

$$\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}} = 1,5$$

Некада се једначина може трансформисати у њој еквивалентну у којој се појављују само степени са истом основом. Овде је то учињено множењем целе једначине са 2, а након тога поступак решавање новодобијене једначине се своди на примену својстава експоненцијалне функције.

$$
\begin{aligned}
&\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}-1}} = \tfrac{3}{2} / \cdot 2 \\
&3^{\sqrt[3]{x^2}-(\sqrt[3]{x}-1)} = 3^1 \\
&\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1 = 1
\end{aligned}
$$

сада се уводи смена: $t = \sqrt[3]{x}$

$$
\begin{aligned}
&t^2 - t = 0 \\
&t = 0 \text{ следи } x = 0 \\
&t = 1 \text{ следи } x = 1
\end{aligned}
$$

И овај пример такође има два решења: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.
Главни проблеми при решавању овог примера су налжење одговарајуће смене, а претходно и долажење на идеју да се цела једначина помножи бројем 2.

8)

$$\frac{2^{2x-1} . 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$$

Добро познавање поменутих својстава експоненцијалних функција је пресудно за решавање овог примера. Прво ће бројеви 4, 8 и 64 бити сведени на степене са оновом 2, потом ће бити примењена основна својства експоненцијалних функција.

$$\frac{2^{2x-1} . 2^{2\cdot(x+1)}}{2^{3\cdot(x-1)}} = 2^6$$
$$\frac{2^{2x-1+2x+2}}{2^{3x-3}} = 2^6$$
$$2^{4x+1-(3x-3)} = 2^6$$
$$4x+1-3x+3=6$$
$$x+4=6$$
$$x=2$$

9)

$$9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$$
$$3^{2|3x-1|} = 3^{8x-2}$$

Сва тежина датог примера се налази у разликовању одговарајућих случајева, које нам намеће апсолутна заграда која се појављује. С обзиром на то, треба разликовати два случаја, први, када је вредност између апсолутних заграда већа или једнака нули; и други, када је поменута вредност мања од нуле.

I случај: $3x-1 \geq 0$, следи $x \geq \frac{1}{3}$.	II случај: $3x-1 < 0$, следи $x < \frac{1}{3}$.
$6x-2=8x-2$	$-6x+2=8x-2$
$2x=0$	$14x=4$
$x=0$	$x=\frac{2}{7}$

С обзиром на услове који важе за дате случајеве, једино решење је: $x=\frac{2}{7}$.

10)

$$\sqrt{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot (0,125)^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Област дефинисаности: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Прво треба бројеве 4 и 0,125 свести на степене са основом 2, а затим као и у претходним примерима применити својства експоненцијалних функција.
Ученици неретко забораве да одреде област дефинисаности, а и овде као и у једном од претходних примера проблем може изазвати могућност да се број $0,125$ сведе на степен са основом 2. Још једна од збуњујућих ситуација је појављивање корена у подкореном изразу.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2^x \cdot (2^{2x} \cdot (\tfrac{1}{8})^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{3}}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\\
&\sqrt{2^x \cdot (2^{2x} \cdot (2^{-3})^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{3}}} = 2^{2+\frac{1}{3}}\\
&(2^x \cdot (2^{2x-\frac{3}{x}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{3}}\\
&(2^{x+\frac{1}{3}\cdot(2x-\frac{3}{x})})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{3}}\\
&\tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{3} \cdot (2x - \tfrac{3}{x})) = \tfrac{7}{3} / \cdot 6\\
&3(x + \tfrac{1}{3} \cdot (2x - \tfrac{3}{x})) = 14\\
&3x + 2x - \tfrac{3}{x} = 14
\end{aligned}
$$

Добијена једначина може бити помножена са x, с обзиром на област дефинисаности, где је x различито од нуле.

$$
\begin{aligned}
&5x - \tfrac{3}{x} = 14 / \cdot x\\
&5x^2 - 14x - 3 = 0
\end{aligned}
$$

Добијена једначина је квадратна једначина, облика: $ax^2 + bx + c = 0$ чија се решења добијају помоћу формуле: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$
\begin{aligned}
&x_{1/2} = \tfrac{14 \pm \sqrt{196+60}}{10}\\
&x_{1/2} = \tfrac{14 \pm 16}{10}\\
&x_1 = 3,\ x_2 = -\tfrac{1}{5}
\end{aligned}
$$

x_1 и x_2 припадају области дефинисаности, па су то решења полазне једначине.

11)

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$$

Проблем овог задатка је трансформисати израз са леве стране једнакости тако да се омогући увођење смене, али и наравно увидети коју смену треба увести. Област дефинисаности: $x^2 - 4 \geq 0$, следи $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

$$
\begin{aligned}
&((2^{\frac{1}{2}})^2)^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{x+\sqrt{x^2-4}-2} - 6 = 0\\
&((2^{\frac{1}{2}})^{x+\sqrt{x^2-4}})^2 - 5 \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{x+\sqrt{x^2-4}} \cdot (2^{\frac{1}{2}})^{-2} - 6 = 0
\end{aligned}
$$

Уводи се смена: $t = (2^{\frac{1}{2}})^{x+\sqrt{x^2-4}}$.
Решавање полазне експоненцијалне једначине је сведено на решавање квадратне једначине.

$$
\begin{aligned}
&t^2 - 5t \cdot 2^{-1} - 6 = 0 / \cdot 2\\
&2t^2 - 5t - 12 = 0\\
&t_{1/2} = \tfrac{5 \pm \sqrt{25+96}}{4}\\
&t_{1/2} = \tfrac{5 \pm 11}{4}\\
&t_1 = 4
\end{aligned}
$$

Враћањем смене у прво решење квадратне једначине добијамо нову експоненцијалну једнчину која има једно решење.

$$
\begin{aligned}
&2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} = 4\\
&\tfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} = 2/\cdot 2\\
&x+\sqrt{x^2-4} = 4\\
&\sqrt{x^2-4} = 4-x/^2\\
&x^2-4 = 16-8x+x^2\\
&8x = 20\\
&x = \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Ово решење припада области дефинисаности, па је и решење полазне једначине. Враћањем смене у друго решење квадратне једначине добијамо нову експоненцијалну једнчину која нема решење.

$$
\begin{aligned}
&t_2 = -\tfrac{3}{2}\\
&2^{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}} = -\tfrac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Када поједини ученици и стигну до претходне једнакости, они наставе са одређивањем непознате, несвесни да та, новодобијена једначина нема решење. У таквим случајевима врло често се појаве и нека нова, само њима позната својства експоненцијалних функција.

12)

$$12\cdot 9^x - 35\cdot 6^x + 18\cdot 4^x = 0$$

Највећи проблем ученици приликом решавања овог и сличних примера имају када треба да примене овакве једнакости: $9^x = 3^{2x}$, $6^x = (2\cdot 3)^x$ и $4^x = 2^{2x}$. А наравно и након тога када добијену једначину треба поделити или са 2^{2x} или са 3^{2x}. Овакав и слични примери се често јављају у настави.

$$
\begin{aligned}
&12\cdot 3^{2x} - 35\cdot 2^x\cdot 3^x + 18\cdot 2^{2x} = 0/:2^{2x}\\
&12\cdot (\tfrac{3}{2})^{2x} - 35\cdot (\tfrac{3}{2})^x + 18 = 0
\end{aligned}
$$

Сада се уводи смена: $t = (\frac{3}{2})^x$. Овом сменом претходна једначина је сведена на квадратну једначину.

$$
\begin{aligned}
&12t^2 - 35t + 18 = 0\\
&t_{1/2} = \tfrac{35\pm\sqrt{1225-864}}{24}\\
&t_{1/2} = \tfrac{35\pm\sqrt{361}}{24}
\end{aligned}
$$

Враћањем смена у добијена решење квадратне једначине добијају се нове експоненцијалне једначине.

$$
\begin{aligned}
&t_1 = \tfrac{9}{4}\\
&(\tfrac{3}{2})^x = \tfrac{9}{4}\\
&x = 2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
&t_2 = \tfrac{2}{3}\\
&(\tfrac{3}{2})^x = \tfrac{2}{3}\\
&x = -1
\end{aligned}
$$

Решења дате једначине су: $x_1 = 2$ и $x_2 = -1$.

13)

$$2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x}$$

Леву и десну страну засебно растављамо на чиниоце.

$$\begin{array}{l} 2^{x} \cdot 2^{4} + 2^{x} \cdot 2^{2} = 5^{x} \cdot 5 + 3 \cdot 5^{x} \\ 2^{x}(2^{4} + 2^{2}) = 5^{x}(5 + 3) \end{array}$$

Затим чиниоци који представљају степене са непознатом у експоненту прелазе на леву страну једнакости, остатак прелази на десну страну једнакости.

$$\begin{array}{l} (\frac{2}{5})^{x} = \frac{8}{20} \\ x = 1 \end{array}$$

14)

$$x^{2} \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^{2} \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$$

На сличан начин као и код једне од претходних једначина у којој је се јављала апсолутна вредност, разликоваћемо два случаја.
I случај: $x - 3 \geq 0$ односно $x \geq 3$.

$$\begin{array}{l} x^{2} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} = x^{2} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \\ x \in [3, +\infty) \end{array}$$

Осим појављивања апсолутне вредности, један од проблема је закључити шта је решење овог случаја, јер се обично ретко у настави јављају слични примери, када се и са леве и са десне стране једнакости налазе еквивалентни изрази. У том случају решење једначине је скуп $\mathbb{R}$, али због услова: $x \in [3, +\infty)$, коначно решење је пресек ова два скупа, односно: $x \in [3, +\infty)$.
II случај: $x < 3$.
Код овог случаја као и код претходног примера највећи је проблем прво раставити на одговарајуће чиниоце, а потом и издвојити заједнички чинилац испред заграде.

$$\begin{array}{l} x^{2} \cdot 2^{x+1} + 2^{-x+5} = x^{2} \cdot 2^{-x+7} + 2^{x-1} \\ 2^{x}(2x^{2} - \frac{1}{2}) = 2^{-x}(2^{7}x^{2} - 2^{5}) \\ 2^{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4x^{2} - 1) = 2^{-x} \cdot 2^{5} \cdot (2^{2}x^{2} - 1) \\ 2^{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4x^{2} - 1) - 2^{-x} \cdot 2^{5} \cdot (4x^{2} - 1) = 0 \\ (4x^{2} - 1) \cdot (2^{x} \cdot \frac{1}{2} - 2^{-x} \cdot 2^{5}) = 0 \end{array}$$

Производ два броја је једнак нули, ако је један од њих једнак нули. Зато овде треба посматрати две једначине. Прва је:

$$\begin{array}{l} (4x^{2} - 1) = 0 \\ x^{2} = \frac{1}{4} \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{array}$$

А друга је:

$$\begin{aligned}&2^x \cdot \tfrac{1}{2} - 2^{-x} \cdot 2^5 = 0\\&2^x - 2^6 \cdot 2^{-x} = 0\\&2^x = 2^6 \cdot 2^{-x}\\&2^{2x} = 2^6\\&x = 3 \text{ ово решење не задовољава услов.}\end{aligned}$$

Решење ове једначине је: $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup [3, +\infty)$.

□

Задатак 3. *Решити неједначине:*

1) $2^{x+2} > (\frac{1}{4})^{\frac{1}{x}}$

2) $(\frac{1}{5})^{\frac{2x+1}{1-x}} > (\frac{1}{5})^{-3}$

3) $10^{2\sqrt{x}} + 25^{\sqrt{x}} \leq 4,25 \cdot 50^{\sqrt{x}}$

4) $\frac{1}{2^{2x}+3} \geq \frac{1}{2^{x+2}-1}$

5) $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$

Решење.

1)

$$2^{x+2} > (\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{x}}$$

Област дефинисаности: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ексоненцијалне неједначине имају сличан поступак решавања као и експоненцијалне једначине. У овом примеру, прво ћемо свести леву и десну страну неједнакости на степене са истом основом.

$$2^{x+2} > 2^{-2 \cdot \frac{1}{x}}$$

С обзиром да је основа већа од један тј. $2 > 1$, добијамо следећу неједнакост:

$$\begin{aligned}&x + 2 > -\tfrac{2}{x}\\&x + 2 + \tfrac{2}{x} > 0 / \cdot x\end{aligned}$$

Када се са x помножи претходна неједначина своди се на квадратну неједачину, па у зависности од x треба разликовати следећа два случаја:
I случај: $x > 0$

$$\begin{aligned}&x^2 + 2x + 2 > 0\\&(x + 1)^2 + 1 > 0\\&x \in (0, +\infty)\end{aligned}$$

С обзиром да је израз: $(x+1)^2+1$, већи од нуле за свако $x \in \mathbb{R}$, одатле и следи закључак да је решење тог случаја $x \in (0,+\infty)$.
II случај: $x<0$

$$x^2+2x+2<0$$

Не постоји такво x.
Коначно решење неједначине је: $x \in (0,+\infty)$.
Ова као и наредна су неке од најједноставнијих експоненцијалних неједначина, међутим слабо познавање правила везаних за решавање квадратних неједначина може довести до проблема при њиховом решавању.

2)

$$\left(\tfrac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-3}$$

Област дефинисаности: $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.
С обзиром да је основа степена који се појављују у овој неједначини мања од један, тј. $\frac{1}{5}<1$ дату експоненцијалну неједначину треба свести на следећу неједначину:

$$\begin{array}{l} \frac{2x+1}{1-x} < -3 \\ \frac{2x+1+3-3x}{1-x} < 0 \\ \frac{4-x}{1-x} < 0 \end{array}$$

I случај:

$$\begin{array}{ll} 4-x<0 & 1-x>0 \\ x>4 & x<1 \end{array}$$

Такво x не постоји.

II случај:

$$\begin{array}{ll} 4-x>0 & 1-x<0 \\ x<4 & x>1 \end{array}$$

Решење последњег случаја, а самим тим и решење задатка је: $x \in (1,4)$.

3)

$$10^{2\sqrt{x}} + 25^{\sqrt{x}} \le 4,25 \cdot 50^{\sqrt{x}}$$

Област дефинисаности је: $[0,+\infty)$.
У наредном кораку примењује се особина експоненцијалних функција:
$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

$$\begin{array}{l} 2^{2\sqrt{x}} \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5^{2\sqrt{x}} \le \frac{17}{4} \cdot 2^{\sqrt{x}} 5^{2\sqrt{x}} / : 5^{2\sqrt{x}} \\ 2^{2\sqrt{x}} + 1 \le \frac{17}{4} \cdot 2^{\sqrt{x}} / \cdot 4 \end{array}$$

Уводи се смена: $t = 2^{\sqrt{x}}$, па је због области дефинисаности: $t \ge 1$. Ученици често након уведене смене не разматрају како област дефинисаности утиче на уведену смену. Конкретно, у овом примеру уопште не узимају у обзир да је $t \ge 1$.

$$4t^2-17t+4\leq 0$$
$$t_{1/2}=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8}$$
$$t_{1/2}=\frac{17\pm15}{8}$$
$$t_1=4$$
$$2^{\sqrt{x}}=4$$
$$\sqrt{x}=2$$
$$x=4$$
$$t_2=\frac{1}{4}$$
$$t\in[1,4]$$

Дешава се да ученици и ако су дошли до закључка да је $t\geq 1$, забораве да то разматрају, па решавају и једначину: $2^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}$. Врло често не врате смену, па решење гласи: $t\in[1,4]$, а решење овог примера је: $x\in[0,4]$.

4)

$$\frac{1}{2^{2x}+3}\geq\frac{1}{2^{x+2}-1}$$

Област дефинисаности: $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$, јер је $2^{x+2}-1\neq 0$ односно $x\neq -2$. Полазну једначину треба помножити са $2^{2x}+3$, овај израз је иначе увек позитиван, па не утиче на знак неједнакости.

$$\frac{2^{2x}+3}{2^{x+2}-1}\leq 1$$
$$\frac{2^{2x}+3-2^{x+2}+1}{2^{x+2}-1}\leq 0$$
$$\frac{2^{2x}-4\cdot 2^x+4}{4\cdot 2^x-1}\leq 0$$

Треба увести смену: $t=2^x$.

$$\frac{t^2-4t+4}{4t-1}\leq 0$$
$$\frac{(t-2)^2}{4t-1}\leq 0$$

Треба посматрати два случаја:

I случај: $(t-2)^2\geq 0$ и $4t-1<0$	II случај: $(t-2)^2\leq 0$ и $4t-1>0$
$t<\frac{1}{4}$	$t=2$ и $t>\frac{1}{4}$
$x<-2$	$x=1$ и $x>-2$
Решење првог случаја је: $x\in(-\infty,-2)$.	Решење другог случаја је: $x=1$.

Решење ове неједначине је: $(-\infty,-2)\cup\{1\}$.
Треба имати у виду да се као и у неким претходним примерима проблем задатка своди на решавање квадратне неједначине. Што врло често зна да представља проблем ученицима због недовољно добре савладаности тог дела градива.

5)

$$(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3$$

Збуњујућа околност код овог задатка је то што се непозната јавља и у основи и у експоненту. Област дефинисаности је: $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.
Код оваквог типа неједначине треба разликовати два случаја у зависности од вредности основе.
I случај: $x^2+x+1 \geq 1$ односно $x^2+x \geq 0$, па је: $x \in (-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$. У неким случајевима ученици забораве да разматрају област дефинисаности и не искључе -2 из овог скупа.
Област дефинисаности за овај случај је: $x \in (-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[0,+\infty)$.

$$\begin{array}{l}\frac{x+5}{x+2} \geq 3\\ \frac{x+5-3x-6}{x+2} \geq 0\\ \frac{-2x-1}{x+2} \geq 0\\ x \in (-2,-1]\cup\{0\}\end{array}$$

II случај: $x^2+x+1<1$
Област дефинисаности за овај случај: $x \in (-1,0)$.

$$\begin{array}{l}\frac{-2x-1}{x+2} \leq 0\\ x \in [-\frac{1}{2},0)\end{array}$$

Коначно решење овог задатка је: $x \in (-2,-1]\cup[-\frac{1}{2},0]$.

□

Задатак 4. *Решити системе једначина:*

1) $3 \cdot 2^x - 3^y = 11$, $2^x + 4 \cdot 3^y = 8$ *2)* $3^{x+1} - 2^y = \frac{17}{2}$, $3^x + 2^{y+1} = 4$ *3)* $3^x - 2^{y^2} = 77$, $3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$

Решење.

Напомена: сваки од наредна три примера се своди на решавање система од две линеарне једначине са две непознате. Због недовољно добре савладаности тог дела градива, то и јесте место у задатку које ученицима зна да прави проблем.

1)

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 2^x - 3^y = 11 \\ 2^x + 4 \cdot 3^y = 8 \\ \hline \end{array}$$

Следећи корак је увођење смене: $a = 2^x, b = 3^y$. Дати систем ће бити сведен на систем са две линеарне једначине са две непознате:

$$\begin{array}{l} 3a - b = 11 \\ a + 4b = 8 \\ \hline 3a - b = 11 \\ 13a = 52 \\ \hline \end{array}$$

Сада треба вратити смену.

$$\begin{array}{l} a = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \\ 3 \cdot 4 - b = 11 \\ b = 1 \Rightarrow 3^y = 1 \Rightarrow y = 0 \end{array}$$

Решење овог примера је: $(2, 0)$.

2)

$$\begin{array}{l} 3^{x+1} - 2^y = \frac{17}{2} \\ 3^x + 2^{y+1} = 4 \\ \hline \end{array}$$

Прву једначину система треба помножити са два како би се изгубио разломак из једначина. А након тога треба увести смену: $a = 2^y, b = 3^x$.

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 3^x - 2^y = \frac{17}{2} / \cdot 2 \\ 3^x + 2 \cdot 2^y = 4,\ a = 2^y, b = 3^x \\ \hline 6b - 2a = 17 \\ b + 2a = 4 \\ \hline 6b - 2a = 17 \\ 7b = 21 \\ \hline \end{array}$$

Треба вратити смену.

$$\begin{array}{l} b = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 18 - 2a = 17 \\ 2a = 1 \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^y = 2^{-1} \Rightarrow y = -1 \end{array}$$

Решење овог примера је: $(1, -1)$.

3)

$$\begin{array}{l} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \\ \hline \end{array}$$

С обзиром да се у ове две једначине датог система појављују степени са истим основама, али различитим експонентима, прво требе свести експоненте прве и друге једначине на сличан запис.

$$\begin{array}{l} (3^{\frac{x}{2}})^2 - (2^{\frac{y^2}{2}})^2 = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \\ \hline (3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}}) \cdot (3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}}) = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \\ \hline (3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}}) = 11 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \\ \hline \end{array}$$

Треба увести смену: $a = 3^{\frac{x}{2}}, b = 2^{\frac{y^2}{2}}$.

$$\begin{array}{l} a + b = 11 \\ a - b = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a = 18 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow x = 4 \\ b = 2 \Rightarrow 2^{\frac{y^2}{2}} = 2^1 \Rightarrow y^2 = 2 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{array}$$

Овај систем има два решења: $(4, \sqrt{2})$ и $(4, -\sqrt{2})$.

$\square$

5.3 Појам и својства логаритма

Задатак 5. *Израчунати:*

1) $\log_5 \sqrt{5}$

2) $\log_{3^{-2}} \sqrt[3]{9}$

3) $\log_8 \log_4 \log_2 16$

4) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$

5) $10^{0,5-\log_{10}(0,375\cdot\sqrt{10})} - \log_2 0,0625$

6) $\frac{(\log_{\sqrt[3]{27}} 3+\log_{\sqrt[49]{5}} 25)\cdot(\log_{\sqrt[4]{81}} 9-\log_{\sqrt[9]{8}} 4)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}}$

Решење. Примери овог типа захтевају добро познавање основних особина логаритамских функција. Добро је познато да ученици имају проблема при савладавању поменутих особина, али су ови примери најбоље решење за тај проблем, јер се кроз њих особине најлакше могу усвојити. У настави се примерима овог типа посвећује доста пажње.

1) Треба искористити из основних својстава логаритамских функција пето својство по реду.

$$\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$

2) Треба искористити из основних својстава једанаесто, а потом и треће по реду својство логаритамских функција.

$$\log_{3^{-2}} \sqrt[3]{9} = -\tfrac{1}{2} \log_3 3^{\frac{2}{3}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}$$

3) Треба искористити из основних својстава треће, а потом и једанаесто по реду својство логаритамских функција.

$$\log_8 \log_4 \log_2 16 = \log_8 \log_4 \log_2 2^4 = \log_8 \log_4 4 = \log_8 1 = 0$$

4) Треба искористити из основних својстава десето, а потом и треће по реду својство логаритамских функција.

$$\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = \tfrac{\log 5}{\log 3} \cdot \tfrac{\log 9}{\log 4} \cdot \tfrac{\log 2}{\log 5} = \tfrac{1}{\log 3} \cdot \tfrac{2\log 3}{2\log 2} \cdot \tfrac{\log 2}{1} = 1$$

5) Код овог примера је јако битно средити изразе који се логаритмују, потом се примењују прва и трећа особина из основних особина логаритамских функција.

$$\begin{aligned}&10^{0,5-\log_{10}(0,375\cdot\sqrt{10})} - \log_2 0,0625 = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\log_{10}\left(\frac{375}{1000}\cdot\sqrt{10}\right)^{-1}} - \log_2 \tfrac{625}{10000} = \\ &= 10^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\tfrac{375}{1000} \cdot \sqrt{10}\right)^{-1} - \log_2 \left(\tfrac{5}{10}\right)^4 = \sqrt{10} \cdot \tfrac{1000}{375} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} - \log_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{8}{3} + 4 = \tfrac{20}{3}\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}&\frac{(\log_{\sqrt[3]{27}} 3+\log_{\sqrt[49]{5}} 25)\cdot(\log_{\sqrt[4]{81}} 9-\log_{\sqrt[9]{8}} 4)}{3+5^{\frac{1}{\log_{16} 25}}\cdot 5^{\log_5 3}} = \frac{(\log_{\sqrt[3]{3^3}} 3+\log_{5^{\frac{1}{49}}} 5^2)\cdot(\log_{\sqrt[4]{3^4}} 9-\log_{\sqrt[9]{2^3}} 4)}{3+5^{\log_{25} 16}\cdot 3} = \\ &= \frac{(\log_3 3+49\cdot 2\cdot\log_5 5)\cdot(\log_3 3^2-\frac{9}{3}\log_2 2^2)}{3+5^{\log_5 16^{\frac{1}{2}}}\cdot 3} = \frac{(1+98)\cdot(2-\frac{18}{3})}{3+4\cdot 3} = \frac{99\cdot(-4)}{15} = -\frac{132}{5}\end{aligned}$$

□

Задатак 6. *Одредити* x *из једначина*$(a, b, c, d > 0,\ m, n \neq 0)$*:*

1) $\log x = \frac{1}{n}(\log a + \frac{1}{m}(\log b - \log c))$

2) $\log x = \frac{1}{2}(\log a - \log b + \frac{1}{3}(\log c + \frac{1}{2}\log d))$

Решење. Решавање датих једначина се углвном своди на трансформацију израза са десне стране знака једнакости коришћењем основних својстава логаритамских функција. Отежавајућа околност је одређивање непознате x, помоћу променљивих a, b, c, d, m, n. Чињеница је да ученици ипак лакше решавају једначине са бројкама.

1)

$$\log x = \frac{1}{n}(\log a + \frac{1}{m}(\log b - \log c))$$

Треће и четврто основно својство логаритамских функција.

$$\log x = \frac{1}{n}(\log a + \log\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{m}})$$

Друго основно својство логаритамских функција.

$$\log x = \frac{1}{n}\log(a(\frac{b}{c})^{\frac{1}{m}})$$

Треће основно својство логаритамских функција.

$$\begin{aligned} &\log x = \log(a(\tfrac{b}{c})^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} \\ &x = (a \cdot (\tfrac{b}{c})^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} \\ &x = \sqrt[n]{a\sqrt[m]{\frac{b}{c}}} \end{aligned}$$

2)

$$\log x = \frac{1}{2}(\log a - \log b + \frac{1}{3}(\log c + \frac{1}{2}\log d))$$

Друго и треће основно својство логаритамских функција.

$$\log x = \frac{1}{2}(\log\frac{a}{b} + \frac{1}{3}(\log\left(c \cdot \sqrt{d}\right)))$$

Пето основно својство логаритамских функција.

$$\log x = \frac{1}{2}(\log\frac{a}{b} + \log\sqrt[3]{c \cdot \sqrt{d}})$$

Друго основно својство логаритамских функција.

$$\log x = \frac{1}{2}(\log(\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{c \cdot \sqrt{d}}))$$

Пето основно својство логаритамских функција.

$$\begin{aligned} &\log x = \log\sqrt{\tfrac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{c \cdot \sqrt{d}}} \\ &x = \sqrt{\tfrac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{c \cdot \sqrt{d}}} \end{aligned}$$

$\square$

Задатак 7. *Доказати:*

1) *ако је* $a^2+b^2=7ab$, *тада је:* $\log_c \frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)$, $a,b,c>0$;

2) *ако је:* $a^2+4b^2=12ab$, $a>0$, $b>0$ *тада је:*
$\lg(a+2b)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$;

3) *ако је:* $a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1, x>0$ *тада је:* $\frac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_{ab}\frac{b}{a}$
Под извесним условима. Којим?

Решење.

1)

$$a^2+b^2=7ab$$

Треба применити особине квадрата бинома.

$$\begin{aligned}&(a+b)^2=9ab\\&a+b=3\sqrt{ab}\\&\tfrac{a+b}{3}=\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Претходни израз је могуће логаритмовати са основом c, уз услов $c\neq 1$.

$$\begin{aligned}&\log_c \tfrac{a+b}{3}=\log_c\sqrt{ab}\\&\log_c \tfrac{a+b}{3}=\tfrac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)\end{aligned}$$

2) Овај пример се врло слично ради као и претходни.

$$\begin{aligned}&a^2+4b^2=12ab\\&(a+2b)^2=16ab\\&a+2b=4\sqrt{ab}/lg\\&\lg(a+2b)=\lg 4+\tfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)\\&\lg(a+2b)-\lg 4=\tfrac{1}{2}(\lg a+\lg b)\end{aligned}$$

3) Код овог примера израз са леве стране знака једнакости треба трансформисати применом својстава логаритамских функција. Након више примена различитих својстава биће доказано захтевано.

$$\begin{aligned}&\tfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\log_{ab}\tfrac{b}{a}\\&\tfrac{\log_a x-\log_b x}{\log_a x+\log_b x}=\frac{\frac{1}{\log_x a}-\frac{1}{log_x b}}{\frac{1}{\log_x a}+\frac{1}{\log_x b}}=\frac{\frac{\log_x b-\log_x a}{\log_x a\cdot\log_x b}}{\frac{\log_x b+\log_x a}{\log_x a\cdot\log_x b}}=\frac{\log_x \frac{b}{a}}{\log_x (b\cdot a)}=\log_{ab}\left(\tfrac{b}{a}\right)\\&x\neq 1 \text{ и } a\cdot b\neq 1\end{aligned}$$

□

Велику пажњу треба посветити условима. При одређивању услова, ученици највише греше.

Задатак 8. *Ако је* $\log_k x + \log_n x = 2\log_m x$*, доказати да је* $n^2 = (kn)^{\log_k m}$ $(x, k, m, n > 0, x, m, n, k \neq 1)$.

Решење.
При решавању овог задатка такође је довољно применити основна својства логаритамских функција. Тежина овог и претходног задатка је у форми, односно зато што захтевају доказивање.

$$\begin{aligned}
&\log_k x + \log_n x = 2\log_m x\\
&\tfrac{\log_m x}{\log_m k} + \tfrac{\log_m x}{\log_m n} = 2\log_m x / : \log_m x\\
&\tfrac{\log_m n + \log_m k}{\log_m k \log_m n} = 2\\
&\tfrac{\log_m (nk)}{\log_m k} = 2\log_m n\\
&\log_m (nk) \cdot \log_k m = 2\log_m n\\
&\log_m (nk)^{\log_k m} = \log_m n^2\\
&(nk)^{\log_k m} = n^2
\end{aligned}$$

$\square$

Задатак 9. *Ако је* $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ *и* $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$*, доказати да је* $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

Решење.
Осим што задатак захтева доказивање, израз који ће се појавити у експоненту је доста обиман, па због тога овај задатак и спада у групу тежих.

$$\begin{aligned}
&c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}}} = 8^{\frac{1}{1-\frac{1}{1-\log_8 a}}} = 8^{\frac{1}{\frac{1-\log_8 a-1}{1-\log_8 a}}} = 8^{\frac{\log_8 a-1}{\log_8 a}}\\
&\log_8 c = \tfrac{\log_8 a-1}{\log_8 a}\\
&\log_8 c \log_8 a - \log_8 a = -1\\
&\log_8 a = \tfrac{-1}{\log_8 c-1}\\
&\log_8 a = \tfrac{1}{1-\log_8 c}\\
&a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}
\end{aligned}$$

$\square$

Задатак 10. *Доказати:* $n = -\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n}$.

Решење.
На основу основних својстава логаритамских функција, а посебно трећег и седмог имамо следеће:

$$\begin{aligned}
&-\log_3 \log_3 \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n} = -\log_3 \log_3 (3^{\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{3}}_{n}}) =\\
&= -\log_3 \tfrac{1}{3^n} \log_3 3 = -\log_3 3^{-n} = n
\end{aligned}$$

$\square$

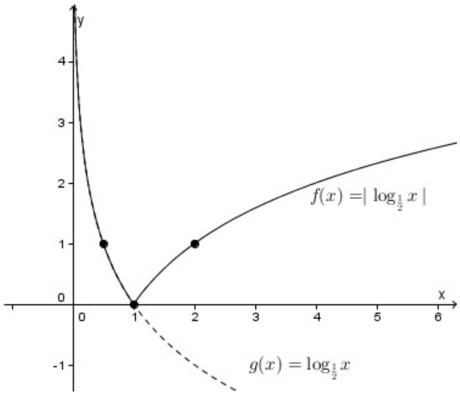
5.4 Логаритамска функција и њен график

Задатак 11. *Скицирати графике датих функција:*
1) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ *2)* $y = a^{\log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$ *3)* $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$

Решење.
Напомена: у сваком од ових примера осим табеле за цртање графика функције користићемо и својства логаритамске функције како би тачке чије смо координате добили помоћу табеле спојили правилно.

1) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$

График дате функције може се нацртати помоћу графика функције $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$, јер се графици ове две функције поклапају за $x \leq 1$, када је y_1 ненегативна, а за $x > 1$, када је y_1 негативна, довољно је пресликати је осном симетријом у односу на x-осу. Најчешће се проблем јавља када ученици нацртају график функције $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, и након тога не знају шта даље, који део графика те функције треба да се "подебља", а који да се преслика, и у односу на коју осу.

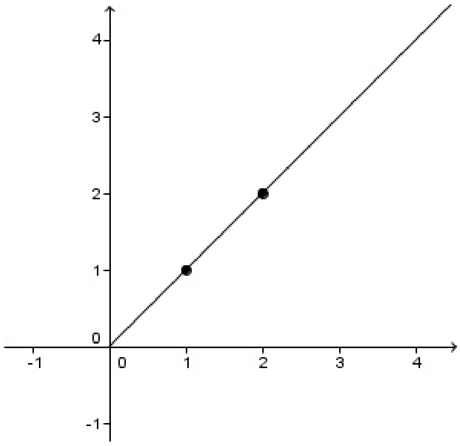


x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	1	0	1

2) $y = a^{\log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$

Коришћењем основних особина логритамских функција, цртање графика дате функције своди се на цртање графика функције који је доста лако нацртати, али се мора посебно обратити пажња на област дефинисаности. Ученици теже долазе на идеју да у задацима овог типа примене особине логаритамских функција, а и у случају да их примене, дешава се да забораве да разматрају област дефинисаности.

$y = a^{\log_a x} = x$, област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.



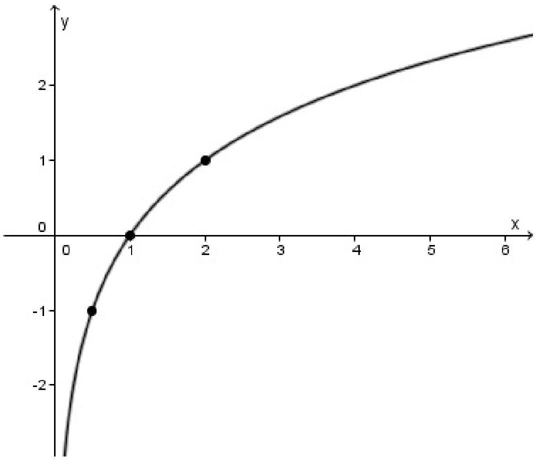
x	1	2	3
y	1	2	3

3) $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$

Као и код претходног примера и код овог је врло корисно покушати основним особинама логаритамских функција, дату функцију трансформисати у функцију којој би се лакше могао скицирати график. Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.

$y = -\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x$

x	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	0	1



□

5.5 Логаритамске једначине и системи једначина

Задатак 12. *Решити једначине:*

1) $\log_2(\log_4(\log_3 x)) = -1$

2) $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))) = \frac{1}{2}$

3) $\log_{\frac{1}{3}} x - 5\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 4 = 0$

4) $\log_{3x}\frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$

5) $\lg 2 + \lg(4^{x-2}+9) = 1 + \lg(2^{x-2}+1)$

6) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \cdots + \log_{\sqrt[n]{3}} x = 36$

7) $64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0$

8) $9^{1+\log_3 x} + 3^{1+\log_3 x} = 210$

9) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Решење.
Дате логаритамске једначине се решавају помоћу основних особина логаритамских функција.

1) Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.

$$\log_2(\log_4(\log_3 x)) = -1$$

Ученицима је најтеже у примерима овог типа, који се често јављају у редовној настави, да одреде којег се логаритма прво ослобађају.
У овој логаритамској једначини треба у три наврата применити дефиницију логаритамске функције.

$$\begin{aligned}&\log_4(\log_3 x) = 2^{-1}\\&\log_3 x = 4^{\frac{1}{2}}\\&x = 3^2\end{aligned}$$

Решење дате једначине је: $x = 9$.

2) При одређивању области дефинисаности јако је битно размотрити све што на њу утиче. Конкретно, у овом примеру, имамо четири ставке које утичу на област дефинисаности, па се ученицима врло лако деси да неку изоставе.

$$\begin{aligned}&I)\ x > 0\\&II)\ 1 + 3\log_3 x > 0\\&\log_3 x > -\tfrac{1}{3}\\&x > 3^{-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

$III)\ 1+\log_2(1+3\log_3 x)>0$
$1+3\log_3 x>2^{-1}$
$\log_3 x>-\frac{1}{6}$
$x>3^{-\frac{1}{6}}$
$IV)\ 2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))>0$
$1+\log_2(1+3\log_3 x)>1$
$1+3\log_3 x>1$
$x>1$

Када све узмемо у обзир, област дефинисаности је: $(1,+\infty)$.

$$\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x)))=\frac{1}{2}$$

И у овом као и у претходном примеру се у више наврата примењује дефиниција логаритамске функције, а могуће је и да се појаве идентичне потешкоће као и у претходном примеру.

$$2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))=4^{\frac{1}{2}}$$
$$\log_3(1+\log_2(1+3\log_3 x))=1$$
$$1+\log_2(1+3\log_3 x)=3$$
$$\log_2(1+3\log_3 x)=2$$
$$1+3\log_3 x=4$$
$$\log_3 x=1$$

Решење дате једначине је: $x=3$.

3)

$$\log_{\frac{1}{3}} x-5\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}+4=0$$

Треба увести смену: $t=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}$, која ће ову логаритамску једначину свести на квадратну једначину.
Област дефинисаности је: $(0,1)$, јер је $x>0$ и $\log_{\frac{1}{3}} x\geq 0$. Дешава се да ученици при одређивању области дефинисаности не разматрају неједнакост $\log_{\frac{1}{3}} x\geq 0$.

$$t^2-5t+4=0$$
$$t_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$
$$t_{1/2}=\frac{5\pm3}{2}$$

$t_1=4$
$\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=4$
$\log_{\frac{1}{3}} x=16$
$x_1=(\frac{1}{3})^{16}$

$t_2=1$
$\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}=1$
$x_2=\frac{1}{3}$

Ова једначина има два решења: $x_1=(\frac{1}{3})^{16}$ и $x_2=\frac{1}{3}$.

4)

$$\log_{3x}\tfrac{3}{x}+\log_3^2 x=1$$

Област дефинисаности је: $(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},+\infty)$.
Ова једначина ће се разним трансформацијама помоћу основних особина логаритамских функција свести на логаритамску једначину у којој се појављују само логаритми са истом основом.

$$\begin{array}{l}
\log_{3x}3-\log_{3x}x+\log_3^2 x=1\\
\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\log_x 3+1}+\log_3^2 x=1\\
\frac{\log_x 3-1}{\log_x 3+1}+\log_3^2 x-1=0,\ x\neq 1\\
\frac{\log_x 3-1}{\log_x 3+1}-\frac{\log_x^2 3-1}{\log_x^2 3}=0\\
\frac{\log_x 3-1}{\log_x 3+1}-\frac{(\log_x 3-1)(\log_x 3+1)}{\log_x^2 3}=0\\
\frac{(\log_x 3-1)\cdot(\log_x^2 3-(\log_x 3+1)^2)}{\log_x^2 3\cdot(\log_x 3+1)}=0\\
\frac{(\log_x 3-1)\cdot(\log_x^2 3-\log_x^2 3-2\log_x 3-1)}{\log_x^2 3\cdot(\log_x 3+1)}=0\\
\frac{(\log_x 3-1)\cdot(-2\log_x 3-1)}{\log_x^2 3\cdot(\log_x 3+1)}=0
\end{array}$$

Разломак је једнак нули када је његов бројилац једнак нули, а именилац различит од нуле. Именилац је сигурно различит од нуле. Због производа који се јавља у бројиоцу, решавање дате једначине се своди на решавање две једначине.

1) $\log_x 3-1=0$
$\log_x 3=1$
$x=3$

2) $-2\log_x 3-1=0$
$\log_x 3=-\frac{1}{2}$
$\log_3 x=-2$
$x=\frac{1}{9}$

Због сужавања области дефинисаности приликом решавања једначине, не сме се заборавити разматрање случаја када је $x=1$:

$$\log_{3\cdot 1}\tfrac{3}{1}+\log_3^2 1=\log_3 3+0=1$$

Дата једначина има три решења: $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=3$, $x_3=1$.
Напомена: наредни примери се раде на сличан начин као и претходни, па ће објашњења бити изостављена.

5) Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l}
\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)\\
\lg(2(4^{x-2}+9))=\lg(10(2^{x-2}+1))\\
2(4^x\cdot\frac{1}{16}+9))=10(2^x\cdot\frac{1}{4}+1)/\cdot 8\\
4^x+144=20\cdot 2^x+80,\ t=2^x\\
t^2-20t+64=0\\
t_{1/2}=\frac{20\pm\sqrt{400-256}}{2}\\
t_{1/2}=\frac{20\pm 12}{2}
\end{array}$$

Дешава се да ученици као решења ове једначине наведу: $t_1 = 16$ и $t_2 = 4$, односно заборave да врате смену. Такође дешава се да не знају да је lg уствари $\log_{10}$.

$$\begin{array}{ll}
t_1 = 16 & t_2 = 4 \\
2^x = 16 & 2^x = 4 \\
2^x = 2^4 & 2^x = 2^2 \\
x = 4 & x = 2
\end{array}$$

Ова једначина има два решења: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$.

6)

$$\log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \cdots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36$$

Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.

$$\begin{array}{l}
2\log_3 x + 4\log_3 x + 6\log_3 x + \cdots + 16\log_3 x = 36 \\
72\log_3 x = 36 \\
\log_3 x = \frac{1}{2} \\
x = \sqrt{3}
\end{array}$$

Ова једначина има само једно решење: $x = \sqrt{3}$.

7)

$$64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0$$

Област дефинисаности је: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\begin{array}{l}
(8^{\frac{1}{x}})^2 - 8^{1+\frac{1}{x}} + 12 = 0, t = 8^{\frac{1}{x}} \\
t^2 - 8t + 12 = 0 \\
t_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} \\
t_{1/2} = \frac{8 \pm 4}{2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
t_1 = 6 & t_2 = 2 \\
2^{\frac{3}{x}} = 6 & 2^{\frac{3}{x}} = 2 \\
\frac{3}{x} = \log_2 6 & \frac{3}{x} = 1 \\
x_1 = 3\log_6 2 & x_2 = 3
\end{array}$$

Ова једначина има два решења: $x_1 = 3\log_6 2$ и $x_2 = 3$.
Проблем се јавља када треба одредити решење једначине: $2^{\frac{3}{x}} = 6$. Проблеми су такви да ученици или не знају да је реше или и када добију решење $x_1 = 3\log_6 2$, нису свесни тога и наставили би даље, јер их збуњује могућност да број може бити представљен у облику логаритма.

8)

$$9^{1+\log_3 x} + 3^{1+\log_3 x} = 210$$

Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned}
&(3^{1+\log_3 x})^2 + 3^{1+\log_3 x} = 210, t = 3^{1+\log_3 x} = 3x\\
&t^2 + t - 210 = 0\\
&t_{1/2} = \tfrac{-1\pm\sqrt{1+840}}{2}\\
&t_{1/2} = \tfrac{-1\pm 29}{2}
\end{aligned}$$

$t_1 = 14$	$t_2 = -15$
$3x = 14$	$3x = -15$
$x = \frac{14}{3}$	$x = -5$

Последње решење не припада области дефинисаности, па ова једначина има само једно решење: $x = \frac{14}{3}$. Најчешћа грешка ученика код овог, а и сличних примера је што не провере да ли добијена решења припадају области дефинисаности. Дату једначину је могуће решити и без увођења смене, јер се она и без увођења смене може свести на квадратну једначину облика: $9x^2 + 3x - 210 = 0$.

9)

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$. Многи ученици наведу да је област дефинисаности $[0, +\infty)$ и ту направе грешку, не узму у обзир да ни лева, а ни десна страна једнакости нису дефинисане за $x = 0$.

$$\begin{aligned}
&x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x / \lg\\
&\sqrt{x}\lg x = \tfrac{x}{2}\lg x / \cdot \tfrac{2}{\lg x}, x \neq 1\\
&2\sqrt{x} = x\\
&x - 2\sqrt{x} = 0\\
&\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0\\
&\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4\\
&x = 0
\end{aligned}$$

Последње решење не припада области дефинисаности. До закључака овог типа ученици ретко долазе, не само због тога што забораве да провере да ли решење припада области дефинисаности већ и због поменуте грешке која се јавља при одређивању области дефинисаности. А честа грешка је и не разматрање случаја када је $x = 1$:

$$1^{\sqrt{1}} = (\sqrt{1})^1$$

Стога ова једначина има два решења: $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$.

□

Задатак 13. *Решити системе једначина:*

1) $2^x \cdot 4^y = 32$
$2\log(x-y) = \log 4$

2) $\log_2{(x+2)^3} + \log_3{(y+1)^2} = 6$
$\log_4{(x+2)^4} + \log_9{\frac{1}{y+1}} = 4$

3) $xy = 40$
$x^{\lg y} = 4$

4) $x^{y+1} = 36^{-1}$
$\log_6 x = y + 4$

5) $\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$
$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$
$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$

6) $yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}$
$\log_4 y \cdot \log_y{(3x-y)} = 1$

Решење.

Напомена: први, други и пети пример се сменама своде на систем линеарних једначина са две, односно са три непознате, па проблем при њиховом решавању може изазвати недовољно добра савладаност тог дела градива. Честа грешка је што и када ученици уведу смене забораве после да је врате, па одреде вредност смене, али не и вредност непознатих.

1)

$$\begin{array}{l} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ 2\log(x-y) = \log 4 \\ \hline \end{array}$$

Област дефинисаности је:
$\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x > y\}$.

$$\begin{array}{l} 2^x \cdot 2^{2y} = 2^5 \\ 2\log(x-y) = 2\log 2 \\ \hline x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \\ \hline 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \\ y = 3 - 2 \Rightarrow y = 1 \end{array}$$

Решење система је: $(3,1)$.

2)

$$\begin{array}{l} \log_2{(x+2)^3} + \log_3{(y+1)^2} = 6 \\ \log_4{(x+2)^4} + \log_9{\frac{1}{y+1}} = 4 \\ \hline \end{array}$$

Област дефинисаности је:
$\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R},\ x > -2,\ y > -1\}$.

$$\begin{array}{l} 3\log_2{(x+2)} + 2\log_3{(y+1)} = 6 \\ 2\log_2{(x+2)} - \frac{1}{2}\log_3{(y+1)} = 4 \\ \hline \end{array}$$

Уводимо смену: $a = \log_2{(x+2)}$ и $b = \log_3{(y+1)}$.

$$\begin{array}{l} 3a + 2b = 6 \\ 4a - b = 8 \\ \hline 11a = 22 \\ b = 0 \\ \hline \log_2{(x+2)} = 2 \\ \log_3{(y+1)} = 0 \\ \hline x = 2 \\ y = 0 \end{array}$$

Решење система је: $(2,0)$.

3)

$$\begin{array}{l} xy = 40/\lg \\ x^{\lg y} = 4/\lg \\ \hline \end{array}$$

Област дефинисаности је:
$\{(x,y) | x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$.
На основу области дефинисаности и прве једначине важи: $x > 0$, па ће зато логаритмовање бити извршено без услова. До закључака овог типа ученици јако ретко долазе.

$$\begin{array}{l} \lg x + \lg y = 1 + \lg 4 \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \\ \hline \lg x + \lg y = 1 + \lg x \cdot \lg y \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \\ \hline \lg x (1 - \lg y) = 1 - \lg y \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \\ \hline (1 - \lg y) \cdot (\lg x - 1) = 0 \\ \lg x \cdot \lg y = \lg 4 \\ \hline \lg x = 1 \Rightarrow x_1 = 10, y_1 = 4 \\ \lg y = 1 \Rightarrow y_2 = 10, x_2 = 4 \end{array}$$

Решење система је: $(10, 4)$ и $(4, 10)$.

4)

$$\begin{array}{l} x^{y+1} = 36^{-1}/\log_6 \\ \log_6 x = y + 4 \\ \hline \end{array}$$

Област дефинисаности је:
$\{(x,y) | x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}$.

$$\begin{array}{l} (y+1)\log_6 x = \log_6 6^{-2} \\ \log_6 x = y + 4 \\ \hline (y+1) \cdot (y+4) = -2 \\ \log_6 x = y + 4 \\ \hline y^2 + 5y + 6 = 0 \\ y_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ y_{1/2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \\ y_1 = -3, x_1 = 6 \\ y_2 = -2, x_2 = 36 \end{array}$$

Решење система је: $(6, -3)$ и $(36, -2)$.

5)

$$\begin{array}{l}
\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2\\
\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2\\
\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2\\
\hline
2\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 4\\
\log_2 x + \log_2 y + 2\log_2 z = 8\\
\log_3 x + 2\log_3 y + \log_3 z = 4\\
\hline
\end{array}$$

Треба увести смену: $\log_2 x = a$ тј. $x = 2^a$, $\log_2 y = b$ тј. $y = 2^b$, и $\log_2 z = c$ тј. $z = 2^c$. Област дефинисаности је: $\{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R},\ x,y,z > 0\}$.

$$\begin{array}{l}
2a + b + c = 4\\
a + b + 2c = 8\\
a + 2b + c = 4\log_2 3\\
\hline
2a + b + c = 4\\
-3a - b = 0\\
-a + b = 4\log_2 3 - 4\\
\hline
2a + b + c = 4\\
-3a - b = 0\\
-4a = 4\log_2 3 - 4\\
\hline
a = 1 - \log_2 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}\\
b = 3\log_2 3 - 3 \Rightarrow y = \frac{27}{8}\\
c = 4 - 2 + 2\log_2 3 - 3\log_2 3 + 3\\
c = 5 - \log_2 3 \Rightarrow z = \frac{32}{3}
\end{array}$$

Решење система је: $(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3})$.

6)

$$\begin{array}{l}
yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} / \log_y\\
\log_4 y \cdot \log_y (3x - y) = 1\\
\hline
\end{array}$$

Област дефинисаности је: $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{R},\ y > 0,\ y \neq 1,\ x > 0,\ 3x - y > 0\}$.

$$\begin{array}{l}
1 + \log_y^2 x = \log_y x^{\frac{5}{2}},\ \log_y x = t\\
\log_y (3x - y) = \log_y 4\\
\hline
t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0\\
3x - y = 4\\
\hline
t_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\\
3x - y = 4\\
\hline
t_{1/2} = \frac{5\pm3}{4}\\
3x - y = 4\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
t_1 = \frac{1}{2}\\
\log_y x = \frac{1}{2}\\
x = \sqrt{y}\\
3\sqrt{y} - y - 4 = 0\\
m = \sqrt{y}\\
-m^2 + 3m - 4 = 0
\end{array}$$

Ова квадратна једначина нема решење.

$$\begin{array}{l}
t_2 = 2 \Rightarrow \log_y x = 2\\
x = y^2\\
3y^2 - y - 4 = 0\\
y_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}\\
y_{1/2} = \frac{1\pm7}{6}\\
y_1 = \frac{4}{3}, x_1 = \frac{16}{9}\\
y_2 = -1
\end{array}$$

Једино решење овог система је: $(x,y) = (\frac{16}{9}, \frac{4}{3})$. $y_2 = -1$ не разматрамо због области дефинисаности. □

5.6 Логаритамске неједначине

Задатак 14. *Решити неједначине:*

1) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{4x+6}{x} \geq 0$

2) $\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4} < 0$

3) $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{9}}(2|x|-1)$

4) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$

5) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 16x > 1$

6) $\log_x |x-1| \leq 1,\ x > 0, x \neq 1$

7) $\log_{x-3}(x^2-4x+3) < 0$

Решење.

1)

$$\log_{\frac{1}{5}}\frac{4x+6}{x} \geq 0$$

Област дефинисаности је: $(-\infty,-\frac{3}{2}) \cup (0,+\infty)$, јер је $\frac{4x+6}{x} > 0$.
Пошто је $0 < \frac{1}{5} < 1$, онда се решавање дате логаритамске неједначине своди на решавање неједначине: $\frac{4x+6}{x} \leq 1$.

$$\frac{4x+6-x}{x} \leq 0$$
$$\frac{3x+6}{x} \leq 0$$

I случај:	II случај:
$3x+6 \leq 0$ и $x > 0$	$3x+6 \geq 0$ и $x < 0$
Не постоји такво x.	$x \in [-2,-\frac{3}{12})$

Коначно решење је пресек области дефинисаности и скупа који је решење другог случаја, тј. $[-2,-\frac{3}{2})$. Као и у неким од претходних примера, тако и овде, најчешћа грешка је не узимање у обзир приликом одређивања решења, област дефинисаности.

2)

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4} < 0$$

Област дефинисаности је: $(-4,-1) \cup (0,+\infty)$, јер је $\frac{x^2+x}{x+4} > 0$.

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4} < \log_{0,3} 1$$

Пошто је: $0 < 0,3 < 1$, онда се претходна логаритамска неједначина своди на следећу неједначину:

$$\log_6\frac{x^2+x}{x+4} > 1$$
$$\log_6\frac{x^2+x}{x+4} > \log_6 6$$

Пошто је: $1 < 6$, онда се претходна логаритамска неједначина своди на следећу логаритамску неједначину:

$$\begin{array}{l}
\frac{x^2+x}{x+4} > 6\\
\frac{x^2+x-6x-24}{x+4} > 0\\
\frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0\\
x^2-5x-24=0\\
x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25+96}}{2}\\
x_{1/2}=\frac{5\pm11}{2}\\
x_1=8,\ x_2=-3\\
x\in(-4,-3)\cup(8,+\infty)
\end{array}$$

Коначно решење је: $x \in (-4,-3)\cup(8,+\infty)$.

3)

$$\log_{\frac{1}{9}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{9}}(2|x|-1)$$

Област дефинисаности је: $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, јер је $x^2-4>0$, а при том и важи: $2|x|-1>0$. Због апсолутне вредности, требало би посматрати два случаја: $x>0$ и $x<0$, али узећемо у обзир и област дефинисаности, па ћемо посматрати следеће случајеве:

I случај: $x>2$

$$\begin{array}{l}
x^2-4\leq 2x-1\\
x^2-2x-3\leq 0\\
x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}\\
x_{1/2}=\frac{2\pm4}{2}\\
x_1=3,\ x_2=-1\\
x\in(2,3]
\end{array}$$

II случај: $x<-2$

$$\begin{array}{l}
x^2-4\leq -2x-1\\
x^2+2x-3\leq 0\\
x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}\\
x_{1/2}=\frac{-2\pm4}{2}\\
x_1=1,\ x_2=-3\\
x\in[-3,-2)
\end{array}$$

Коначно решење је: $x\in[-3,-2)\cup(2,3]$. Неки ученици имају проблем када треба да обједине решења добијена у различитим случајевима, нису сигурни да ли треба посматрати унију или пресек датих скупова.

4)

$$\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6$$

Област дефинисаности је: $(0,+\infty)$.

$$\begin{array}{l}
\log_3 x+2\log_3 x-\log_3 x<6\\
\log_3 x<3\\
\log_3 x<\log_3 3^3\\
0<x<27
\end{array}$$

Решење ове неједначине је: $x\in(0,27)$.

5)

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 16x > 1$$

Област дефинисаности је: $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.
Приликом наредних трансформација јако је битно приметити да оне не доводе до појављивања нових услова, па самим тим смањују вероватноћу да се при решавању дате неједначине направи грешка.

$$\begin{array}{l}
\frac{\log_2 16x}{\log_2 x \cdot \log_2 2x} > 1 \\
\frac{\log_2 16 + \log_2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 1 \\
\frac{4+\log_2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)} - 1 > 0 \\
\frac{4+\log_2 x - \log_2 x(1+\log_2 x)}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 0 \\
\frac{4-\log_2^2 x}{\log_2 x(1+\log_2 x)} > 0,\ t = \log_2 x \\
\frac{4-t^2}{t(1+t)} > 0 \\
t \in (-2, -1) \cup (0, 2)
\end{array}$$

I случај:

$$\begin{array}{l}
-2 < t < -1 \\
\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}
\end{array}$$

II случај:

$$\begin{array}{l}
0 < t < 2 \\
1 < x < 4
\end{array}$$

Решење је унија два скупа: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (1, 4)$.

6)

$$\log_x |\ x - 1\ | \leq 1$$

Област дефинисаности је: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.
Збуњујуће може изгледати то што се непозната јавља и у основи и у логаритманду, а при том се јавља и апсолутна вредност, па потешкоће може изазвати растављање на случајеве.

$$\log_x |\ x - 1\ | \leq \log_x x$$

I случај: $x > 1$
$x - 1 \leq x$
Важи за свако $x \in (1, +\infty)$.

II случај: $0 < x < 1$
$-x + 1 \geq x$
$2x \leq 1$
$x \leq \frac{1}{2}$
$0 < x \leq \frac{1}{2}$

Коначно решење је: $x \in (0, \frac{1}{2}] \cup (1, +\infty)$.

7) $\log_{x-3}(x^2-4x+3)<0$
Област дефинисаности:

$$\begin{array}{lll} x-3>0 & x-3\neq 1 & x^2-4x+3>0 \\ x\in(3,+\infty) & x\in\mathbb{R}\backslash\{4\} & x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty) \end{array}$$

Област дефинисаности је: $(3,4)\cup(4,+\infty)$. За разлику од ситуације када одређујемо решење на основу више посматраних случајева, па тада посматрамо унију одређених скупова, овде треба узети у обзир пресек претходно добијених скупова.

I случај: $x\in(3,4)$

$$\begin{array}{l} \log_{x-3}(x^2-4x+3)<\log_{x-3}1 \\ x^2-4x+3>1 \\ x^2-4x+2>0 \\ x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} \\ x_1=2+\sqrt{2} \text{ и } x_2=2-\sqrt{2} \\ x\in(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty) \end{array}$$

Решење овог случаја је: $x\in(2+\sqrt{2},4)$.

II случај: $x\in(4,\infty)$

$$\begin{array}{l} \log_{x-3}(x^2-4x+3)<\log_{x-3}1 \\ x^2-4x+3<1 \\ x^2-4x+2<0 \\ x\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}) \end{array}$$

Овај случај нема решење које задовољава услов.

Коначно решење овог задатка је: $x\in(2+\sqrt{2},4)$. □

5.7 Задаци за напредне ученике

Задатак 15. *Решити једначине:*

1) $(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 10$

2) $(3+2\sqrt{2})^{2(x^2-x-1)} + 1 = 6(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}$

3) $\mid x \mid^{x^2-2x} = 1$

4) $\mid 2^x - 1 \mid + \mid 2^x - 2 \mid = 1$

5) $81^x - 16^x - 2 \cdot 9^x(9^x - 4^x) + 36^x = 0$

6) $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_5 x \cdot \log_3 x$

7) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$

8) $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$*, у зависности од реалног параметра а.*

9) $\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10 \cdot (\log_{10}(10a) - \mid \log_{10}(\frac{x}{a}) \mid)$

10) $\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} - \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}}(2x) = 0$

Решење.

1) Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.
Бројеви $5+\sqrt{24}$ и $5-\sqrt{24}$ су један другом реципрочни, и поменута повезаност ова два броја даје тежину овом примеру. На основу ове повезаности уводимо смену: $t = (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x$. Овом сменом се дата експоненцијална једначина своди на квадратну једначину.

$$(\sqrt{5+\sqrt{24}})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 10 / \cdot (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x$$
$$(\sqrt{25-24})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^{2x} = 10 \cdot (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x$$

$$t^2 - 10t + 1 = 0$$
$$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-4}}{2}$$
$$t_{1/2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{24}}{2}$$

$t_1 = 5 + \sqrt{24}$
$(\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 5 + \sqrt{24}$
$5 + \sqrt{24} = (5 - \sqrt{24})^{-1}$
$x_1 = -2$

$t_2 = 5 - \sqrt{24}$
$(\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 5 - \sqrt{24}$
$x_2 = 2$

2)

$$(3+2\sqrt{2})^{2(x^2-x-1)}+1=6(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.
Треба увести смену: $t=(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}$. Као и у претходном примеру сменом се дата експоненцијална једначина своди на квадратну једначину. А тежини овог примера доприноси и то што су бројеви $3+2\sqrt{2}$ и $3-2\sqrt{2}$ један другом реципрочни.

$$t^2-6t+1=0$$
$$t_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}$$
$$t_{1/2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$$

$$t_1=3+2\sqrt{2}$$
$$(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}=3+2\sqrt{2}$$
$$x^2-x-1=1$$
$$x^2-x-2=0$$
$$x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$x_1=2,\ x_2=-1$$

$$t_2=3-2\sqrt{2}$$
$$(3+2\sqrt{2})^{x^2-x-1}=3-2\sqrt{2}$$
$$3-2\sqrt{2}=\frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=(3+2\sqrt{2})^{-1}$$
$$x^2-x-1=-1$$
$$x^2-x=0$$
$$x_3=0,\ x_4=1$$

Тако да ова једначина има четири решења: $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1$.

3)

$$\mid x\mid^{x^2-2x}=1$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, зато што би за $x=0$ са леве стране једнакости имали 0^0 што је недефинисано. Осим одређивања области дефинисаности проблематичан може бити изглед једначине. Односно, на ученике збуњујуће може деловати то што се непозната јавља и у основи и у степену, а при том се јавља и апсолутна вредност.

I случај: $x>0$

$$x^{x^2-2x}=1/\log_x,\ x\neq1$$
$$\log_x x^{x^2-2x}=\log_x 1$$
$$x^2-2x=0$$
$$x_1=2$$
$$x_2=0$$

II случај: $x<0$

$$(-x)^{x^2-2x}=1/\log_{-x},\ x\neq-1$$
$$x^2-2x=0$$

Не постоји решење ове једначине које задовољава услов.

Последње решење не задовољава услов.

Али решења дате једначине су и $x_2=1$ и $x_3=-1$. То се може проверити и заменом x у једначини са датим вредностима. Најчешћа грешка ученика у овом задатку је изостављање ова два решења.

4)

$$|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.
I случај: $2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ и $2^x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, па је коначан услов за овај случај $x \geq 1$.

$$2^x - 1 + 2^x - 2 = 1$$
$$2 \cdot 2^x - 3 = 1$$
$$2 \cdot 2^x = 4$$
$$2^x = 2$$
$$x = 1$$

II случај: $2^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ и $2^x - 2 < 0 \Rightarrow x < 1$, па је коначан услов за овај случај $x \in [0, 1)$.

$$2^x - 1 - 2^x + 2 = 1$$
$$1 = 1$$
$$x \in [0, 1)$$

III случај: $2^x - 1 < 0 \Rightarrow x < 0$ и $2^x - 2 < 0 \Rightarrow x < 1$, па је коначан услов за овај случај $x < 0$.

$$-2^x + 1 - 2^x + 2 = 1$$
$$-2 \cdot 2^x = -2$$
$$2^x = 1$$

Не постоји овакво x које задовољава дати услов.
Коначано решење дате једначине је унија свих решења, тј. $x \in [0, 1]$.
Код примера у којима се јавља апсолутна вредност неког израза, а посебно ако се јавља на више места, проблем се јавља у разматрању одговарајућих случајева.

5)

$$81^x - 16^x - 2 \cdot 9^x(9^x - 4^x) + 36^x = 0$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.

$$3^{4x} - 2^{4x} - 2 \cdot 3^{4x} + 2 \cdot 36^x + 36^x = 0$$
$$-3^{4x} - 2^{4x} + 3 \cdot 36^x = 0 / : (-3^{4x})$$
$$1 + (\tfrac{2}{3})^{4x} - 3(\tfrac{2}{3})^{2x} = 0$$

Треба увести смену: $(\frac{2}{3})^{2x} = t$.

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$
$$t_{1/2} = \tfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$\begin{array}{l} t_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ (\frac{2}{3})^{2x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} / \log_{\frac{4}{9}} \\ x_1 = \log_{\frac{4}{9}} \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \log_{\frac{4}{9}} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Места на којима ученици могу имати проблем када решавају ову једначину је када треба трансформисану једначину поделити са -3^{4x}, као и када треба решити једначину: $(\frac{2}{3})^{2x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, о чему је већ писано у раду.

6)

$$\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = \log_3 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_5 x + \log_5 x \cdot \log_3 x$$

Област дефинисаности је: $(0, +\infty)$.

Тежина овог примера се огледа у тежини проналажења начина да се сведе на неки једноставнији облик. То се може постићи када се једначина подели са: $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x$. Наравно, не треба заборавити да у том случају треба размотрити и решења једначине: $\log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = 0$, што ученици неретко забораве, и самим тим изоставе једно решење.

$$\begin{array}{l} 1 = \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} \\ 1 = \log_x 5 + \log_x 3 + \log_x 4 \\ 1 = \log_x (5 \cdot 4 \cdot 3) \\ 1 = \log_x 60 \\ x_1 = 60 \\ \log_3 x \cdot \log_4 x \cdot \log_5 x = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

Ова једначина има два решења: $x_1 = 60$ и $x_2 = 1$.

7)

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2-\sqrt{3})} / \cdot (2-\sqrt{3})$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = \frac{101}{10} \\ (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = \frac{101}{10} \end{array}$$

Осим што треба уочити да су бројеви $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ један другом реципрочни, проблем може бити и то што се у коефицијентима квадратне једначине јавља логаритам.

Треба увести смену: $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = t$.

$$\begin{array}{l}
t + \frac{1}{t} - \frac{101}{10} = 0 \\
10t^2 - 101t + 10 = 0 \\
t_{1/2} = \frac{101 \pm \sqrt{10201 - 400}}{20} \\
t_{1/2} = \frac{101 \pm 99}{20} \\
t_1 = 10 \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = 10 / \lg \\
(x^2 - 2x) \lg(2+\sqrt{3}) = 1 \\
x^2 - 2x - \frac{1}{\lg(2+\sqrt{3})} = 0 \\
x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{\lg(2+\sqrt{3})}}}{2} \\
x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\lg(2+\sqrt{3})}} \\
t_2 = -\frac{1}{10} \\
(2+\sqrt{3})^{x^2-2x} = -\frac{1}{10} \text{ овакво } x \text{ не постоји.}
\end{array}$$

Ова једначина има само два решења: $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{\lg(2+\sqrt{3})}}$.

8)

$$\begin{array}{l}
9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0 \\
(3^{-|x-2|})^2 - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0
\end{array}$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.
Треба увести смену: $t = 3^{-|x-2|}$.

$$\begin{array}{l}
t^2 - 4t - a = 0 \\
t_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4a}}{2} \\
t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+a}
\end{array}$$

Услов: $a \geq -4$.
I случај: $x - 2 \geq 0$ тј. $x \geq 2$

$$\begin{array}{l}
3^{-x+2} = 2 \pm \sqrt{4+a} \\
3^{-x} = \frac{2 \pm \sqrt{4+a}}{9} / \log_3,
\end{array}$$

уз услов: $\frac{2 \pm \sqrt{4+a}}{9} > 0$, тј. $a < 0$

$$x_{1/2} = -\log_3 \frac{2 \pm \sqrt{4+a}}{9}$$

Треба проверити за које a ова решење задовољавају услов:

$$\begin{array}{l}
-\log_3 \frac{2 \pm \sqrt{4+a}}{9} \geq 2 \\
\frac{2 \pm \sqrt{4+a}}{9} \leq \frac{1}{9} \\
2 \pm \sqrt{4+a} \leq 1
\end{array}$$

За $2+\sqrt{4+a}\leq 1 \Rightarrow \sqrt{4+a}\leq -1$, што је немогуће.
За $2-\sqrt{4+a}\leq 1 \Rightarrow -\sqrt{4+a}\leq -1 \Rightarrow \sqrt{4+a}\geq 1 \Rightarrow a\geq -3$.
Једино решење овог случаја је: $x_1 = 2-\log_3{(2-\sqrt{4+a})}$, $a\in[-3,0)$.
II случај: $x-2<0$ тј. $x<2$

$$\begin{aligned}&3^{x-2} = 2\pm\sqrt{4+a}\\&3^{x} = 9\cdot(2\pm\sqrt{4+a})\\&x_{1/2} = \log_3(9\cdot(2\pm\sqrt{4+a})),\end{aligned}$$

уз услов: $2\pm\sqrt{4+a}>0$, тј. $a<0$.
$x_{1/2} = 2+\log_3{(2\pm\sqrt{4+a})}$
Проверава се за које a ова решења задовољавају услов:

$$\begin{aligned}&2+\log_3{(2\pm\sqrt{4+a})}<2\\&\log_3{(2\pm\sqrt{4+a})}<0\\&2\pm\sqrt{4+a}<1\\&\pm\sqrt{4+a}<-1\\&\sqrt{4+a}<-1, \text{ ово је немогуће.}\\&-\sqrt{4+a}<-1\\&\sqrt{4+a}>1\\&a>-3\end{aligned}$$

Једино решење овог случаја је: $x_2 = 2+\log_3{(2-\sqrt{4+a})}$, $a\in(-3,0)$.
Највећи проблем ученици код овог задатка имају када треба да узму у обзир све услове, обично поједине изоставе или чак одустану од решавања овог типа задатка због појаве параметра који поприлично компликује ситуацију.

9) Тежина примера се огледа у појави параметра a у логаритманду, а касније и у појави бројева изражених у облику логаритма у коефицијентима квадратне једначине.

$$\log_{100}x^2 = \log_{\sqrt{x}}10\cdot(\log_{10}{(10a)}-\mid\log_{10}{(\tfrac{x}{a})}\mid)$$

Област дефинисаности је: $(0,1)\cup(1,+\infty)$, али због $\log_{10}{(\frac{x}{a})}$, мора бити и $a>0$.
I случај: $0<\frac{x}{a}<1$ тј. $0<x<a$

$$\begin{aligned}&2\cdot\tfrac{1}{2}\log_{10}x = 2\tfrac{1}{\log_{10}x}(1+\log_{10}a+\log_{10}x-\log_{10}a)/\cdot\lg x\\&\lg^2 x = 2+2\lg x,\ t=\lg x\\&t^2-2t-2=0\\&t_{1/2}=\tfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}\\&t_1=\tfrac{2\pm2\sqrt{3}}{2}\\&t_1=1\pm\sqrt{3}\\&x_1=10^{1+\sqrt{3}}\\&x_2=10^{1-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

II случај: $\frac{x}{a} > 1$ тј. $x > a$

$$\begin{aligned}
&2 \cdot \tfrac{1}{2}\log_{10} x = 2\tfrac{1}{\log_{10} x}(1 + \log_{10} a - \log_{10} x + \log_{10} a)\\
&\log_{10} x = \tfrac{2}{\log_{10} x}(1 + 2\log_{10} a - \log_{10} x)/ \cdot \lg x\\
&t^2 + 2t - 2 - 4\lg a = 0\\
&t_{1/2} = \tfrac{-2\pm\sqrt{4+8+16\lg a}}{2}\\
&t_{1/2} = \tfrac{-2\pm\sqrt{4(3+4\lg a)}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t_1 = -1 + \sqrt{3 + 4\lg a}\\
&\lg x = -1 + \sqrt{3 + 4\lg a}\\
&x_3 = 10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t_2 = -1 - \sqrt{3 + 4\lg a}\\
&x_4 = 10^{-1-\sqrt{3+4\lg a}}
\end{aligned}$$

10) За разлику од претходног примера где се променљива јавља само у логаритманду, овде се јавља и у основи. Осим тога проблем може се може појавити приликом одређивања области дефинисаности.

$$\frac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \cdot \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$$

Област дефинисаности је: $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Услови су: $a > 0$, $a \neq 1$, $ax \neq 1$.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\log_a 2x}{\log_a a^2\sqrt{x}} - \tfrac{\log_a 2x}{\log_a ax} = 0\\
&\log_a 2x\left(\tfrac{1}{2+\frac{1}{2}\log_a x} - \tfrac{1}{1+\log_a x}\right) = 0\\
&\log_a 2x = 0\\
&2x = 1
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}$, ово решење не припада области дефинисаности.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2}{4+\log_a x} - \tfrac{1}{1+\log_a x} = 0\\
&\tfrac{2+2\log_a x-4-\log_a x}{(4+\log_a x)(1+\log_a x)} = 0\\
&\log_a x - 2 = 0\\
&x = a^2
\end{aligned}$$

Ова једначина има једно решење: $x = a^2$, уз услове: $a > 0$, $a \neq 1$ и $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

□

Задатак 16. *Решити неједначине:*

1) $49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} \leq -7$

2) $3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-8} - 3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-9} \geq 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-17}{3}+2x} + 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14}{3}+2x}$

3) $\log_{\frac{x+4}{2}} (\log_2 \frac{2x-1}{3+x}) < 0$

4) $\log_{\log_2 0,5x} (x^2 - 10x + 22) > 0$

Решење.

1)

$$49^{1+\sqrt{x-2}} - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} \leq -7$$

Област дефинисаности је: $x \in [2, +\infty)$.

$$49 \cdot (7^{\sqrt{x-2}})^2 - 344 \cdot 7^{\sqrt{x-2}} + 7 \leq 0$$

Треба увести смену: $t = 7^{\sqrt{x-2}}$. Овом сменом се дата неједначина своди на квадратну неједначину, зато је битно колико је добро предзнање учнеика о овом типу неједначина.

$$\begin{array}{l} 49t^2 - 344t + 7 \leq 0 \\ t_{1/2} = \frac{344 \pm \sqrt{118336-1372}}{98} \\ t_{1/2} = \frac{344 \pm \sqrt{116964}}{98} \\ t_{1/2} = \frac{344 \pm 342}{98} \\ t_1 = \frac{1}{49},\ t_2 = 7 \\ t \in (\frac{1}{49}, 7) \\ 7^{\sqrt{x-2}} = 7^{-2} \Rightarrow \sqrt{x-2} = -2 \\ 7^{\sqrt{x-2}} = 7^1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x \in [2, 3] \end{array}$$

Најчешће се грешке јављају када ученици одређују решење једначине $\sqrt{x-2} = -2$, и добију да је решење те једначине $x = 6$, а потом се нађу у дилеми који скуп је коначно решење полазне неједначине.

2) Тежина овог примера се огледа у трансформисању дате експоненцијалне неједначине у експоненцијалну неједначину у којој ћемо са обе стране неједнакости имати експоненцијалне функције са истом основом.

$$3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-8} - 3^{\frac{\sqrt{x^2-5}}{2}+3x-9} \geq 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-17}{3}+2x} + 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14}{3}+2x}$$

Област дефинисаности је: $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$.

$$3^{\frac{\sqrt{x^2-5}+6x-16}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{\sqrt{x^2-5}+6x-16}{2}} \geq \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14+6x}{3}} + 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14+6x}{3}}$$
$$\frac{2}{3}\cdot 3^{\frac{\sqrt{x^2-5}+6x-16}{2}} \geq \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14+6x}{3}}$$
$$\frac{2}{9}\cdot 3^{\frac{\sqrt{x^2-5}+6x-14}{2}} \geq \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{\sqrt{x^2-5}-14+6x}{3}}$$
$$\frac{2}{9}\cdot \sqrt{3}^{\sqrt{x^2-5}+6x-14} \geq \frac{3}{2}\cdot \sqrt[3]{2}^{\sqrt{x^2-5}-14+6x} / :(\frac{2}{9}\cdot \sqrt[3]{2}^{\sqrt{x^2-5}-14+6x})$$
$$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})^{\sqrt{x^2-5}-14+6x} \geq \frac{3^3}{2^2}$$
$$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})^{\sqrt{x^2-5}-14+6x} \geq (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}})^6$$

Пошто је: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} > 1$, онда је: $\sqrt{x^2-5} - 14 + 6x \geq 6$.

$$\sqrt{x^2-5} \geq 20 - 6x /^2$$

I случај: $20 - 6x \geq 0$, тј. $x \leq 3\frac{1}{3}$

$$x^2 - 5 \geq 400 - 240x + 36x^2$$
$$35x^2 - 240x + 405 \leq 0/:5$$
$$7x^2 - 48x + 81 \leq 0$$
$$x_{1/2} = \frac{48 \pm \sqrt{2304-2268}}{14}$$
$$x_{1/2} = \frac{48 \pm \sqrt{36}}{14}$$
$$x_1 = \frac{27}{7},\ x_2 = 3,\ x \in [3, \frac{27}{7}].$$

Али због услова решење овог случаја је: $x \in [3, 3\frac{1}{3}]$.
II случај: $20 - 6x < 0$, тј. $x > 3\frac{1}{3}$
Код овог случаја треба разматрати решења неједначине $x^2 - 5 \geq 0$. С обзиром да је та неједначина узета у обзир при одређивању области дефинисаности решење овог случаја је свако x из скупа $(3\frac{1}{3}, +\infty)$.
Коначно решење је: $x \in [3, +\infty)$.

3)

$$\log_{\frac{x+4}{2}}(\log_2 \frac{2x-1}{3+x}) < 0$$

Проблематичност овог задатка се огледа у одређивању области дефинисаности, као и у издвајању могућих случајева. То су уједно и места где ученици највише греше.
Област дефинисаности:

1) $\frac{x+4}{2} \neq 1$
   $x \neq -2$
2) $\frac{x+4}{2} > 0$
   $x > -4$

3) $\log_2 \frac{2x-1}{3+x} > 0$
$\frac{2x-1}{3+x} > 1$, због овога не треба испитивати услов: $\frac{2x-1}{3+x} > 0$
$\frac{x-4}{3+x} > 0$
$x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

Област дефинисаности је: $x \in (-4, -3) \cup (4, +\infty)$.

I случај: $\frac{x+4}{2} > 1$, тј. $x > -2$

$\log_2 \frac{2x-1}{3+x} < 1$
$\frac{2x-1}{3+x} < 2$
$\frac{2x-1-6-2x}{3+x} < 0$
$\frac{-7}{3+x} < 0 \Rightarrow x > -3$

Решење овог случаја је: $x > 4$.

II случај: $0 < \frac{x+4}{2} < 1$, тј. $-4 < x < -2$

$\log_2 \frac{2x-1}{3+x} > 1$
$\frac{2x-1}{3+x} > 2$
$\frac{2x-1-6x-2}{3+x} > 0$
$\frac{-7}{3+x} > 0$

Решење овог случаја је: $-4 < x < -3$.

Коначно решење је: $x \in (-4, -3) \cup (4, +\infty)$.

4)

$$\log_{\log_2 (0,5x)} (x^2 - 10x + 22) > 0$$

Област дефинисаности:

1) $\log_2 (0,5x) \neq 1$
$0,5x \neq 2$
$x \neq 4$

2) $\log_2 (0,5x) > 0$
$0,5x > 1$
$x > 2$

3) $x^2 - 10x + 22 > 0$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-88}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{3}}{2}$
$x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{3}$
$x \in (-\infty, 5-\sqrt{3}) \cup (5+\sqrt{3}, +\infty)$

Област дефинисаности је: $x \in (2, 5-\sqrt{3}) \cup (5+\sqrt{3}, +\infty)$.

I случај: $\log_2 (0,5x) > 1$, тј. $x > 4$

$x^2 - 10x + 22 > 1$
$x^2 - 10x + 21 > 0$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm 4}{2}$
$x_1 = 3$ и $x_2 = 7$

Решење овог случаја је: $x \in (7, +\infty)$.

II случај: $\log_2 (0,5x) < 1$, тј. $x < 4$

$x^2 - 10x + 22 < 1$
$x^2 - 10x + 21 < 0$
$x_1 = 3$ и $x_2 = 7$

Решење овог случаја је: $3 < x < 5 - \sqrt{3}$.

Коначно решење ове неједначине је: $x \in (3, 5 - \sqrt{3}) \cup (7, +\infty)$.
Ученици углавном праве грешке не узимајући у обзир и област дефинисаности и услов за конкретан случај, што доводи до грешке при одређивању решења за тај случај, а самим тим и за крајње решење. А врло често не знају да треба посматрати два случаја, него претпоставе да је основа већа од 1 и посматрају само један случај. Као и у претходном примеру потешкоће се могу јавити када треба одредити област дефинисаности.

☐

Тежина наредних задатака огледа се у њиховој форми. Одбојност коју изазивају код ученика задаци који захтевају доказивање је код појединих задатак и била пресудна да се нађу у овој групи иако њихово решавање није претерано захтевно.

Задатак 17. *Доказати да је:*

$$\tfrac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \tfrac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \tfrac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \tfrac{n-1}{n}(\log_x 2)^{-2}$$

уз услов: $x > 0$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Сам изглед претходне једнакости упућује ученике да логаритме који се појављују са леве стране знака једнакости треба трансформисати у логаритме чији су логаритманди једнаки 2.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\log_x 2 \cdot 2 \log_x 2} + \tfrac{1}{2 \log_x 2 \cdot 3 \log_x 2} + \ldots + \tfrac{1}{(n-1) \log_x 2 \cdot n \log_x 2} = \\
&= \tfrac{1}{2(\log_x 2)^2} + \tfrac{1}{6(\log_x 2)^2} + \ldots + \tfrac{1}{n(n-1)(\log_x 2)^2} = \tfrac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\tfrac{1}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \tfrac{1}{(n-1) \cdot n}\right) = \\
&= \tfrac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n-1} - \tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

☐

Задатак 18. *Доказати неједнакост:*

$$\log_2(a+b) > 1 + \tfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b), \; a > 0, \; b > 0, \; a \neq b.$$

Решење.

$$1 + \tfrac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b) = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{ab} = \log_2 2\sqrt{ab}$$

При претходно изведеним трансформацијама треба бити опрезан да ли је новодобијен логаритам дефинисан, али због претходно наведених услова јесте, па не постоје разлози за бригу. Проблем се своди на доказивање следеће неједнакости: $a + b > 2\sqrt{ab} /^2$.
Ова неједнакост се доказује помоћу квадрата бинома, што није ретка ситуацију у редовној настави.

$$\begin{gathered}
a^2 + 2ab + b^2 > 4ab \\
a^2 - 2ab + b^2 > 0
\end{gathered}$$

А ово важи, зато што је уз поменуте услове увек: $(a-b)^2 > 0$. ☐

Задатак 19. *Доказати да једначина*

$$\log_{2x}\left(\tfrac{2}{x}\right)\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$$

има само један корен, који задовољава услов $x > 1$.

Решење.

$$\begin{aligned}
&\log_{2x}\tfrac{2}{x} = \log_{2x}2 - \log_{2x}x = \tfrac{1}{1+\log_2 x} - \tfrac{1}{1+\log_x 2} = \tfrac{1}{1+\log_2 x} - \tfrac{\log_2 x}{\log_2 x+1} = \tfrac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x}\\
&(\tfrac{1-\log_2 x}{1+\log_2 x})\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1/\cdot(1+\log_2 x)\\
&\log_2^2 x - \log_2^3 x + \log_2^4 x + \log_2^5 x = 1 + \log_2 x\\
&\log_2^5 x + \log_2^4 x - \log_2^3 x + \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0\\
&(\log_2 x - 1)(1 + 2\log_2 x + \log_2^2 x + 2\log_2^3 x + \log_2^4 x) = 0\\
&\log_2 x - 1 = 0\\
&x = 2\\
&1 + 2\log_2 x + \log_2 x^2 + 2\mathrm{log}_2 x^3 + \log_2 x^4 = 0
\end{aligned}$$

За $x > 1$ сви сабирци претходно наведене једначине су већи од 0, па збир не може бити једнак 0, те ова једначина не може имати решење.
Ученици јако тешко долазе до закључака овог типа, а можда им је још теже раставити израз: $\log_2^5 x + \log_2^4 x - \log_2^3 x + \log_2^2 x - \log_2 x - 1$ на чиниоце, олакшавајуће може бити увођење смене $t = \log_2 x$ и растављање на чиниоце израза: $t^5 + t^4 - t^3 + t^2 - t - 1$. Ретки су они који не проверају да ли је $1 + \log_2 x \neq 0$, а за тим нема потребе јер је то остварено за $x > 1$. ☐

Задатак 20. *Доказати да је:*

1) $\log_{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$,
$a_1, a_2, \ldots, a_n, x > 0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n, x \neq 1,\ a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n \neq 1;$

2) $\log_a N\cdot\log_b N + \log_b N\cdot\log_c N + \log_c N\cdot\log_a N = \frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}$,
$N, a, b, c > 0,\ N, a, b, c \neq 1,\ abc \neq 1;$

3) $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c = \log_d a,\ a, b, c, d > 0,\ b, c, d \neq 1.$

Решење. Ова три примера се своде на примену основних својстава логаритамских функција, али треба бити опрезан да при тим трансформацијама не буду уведни неки нове логаритми који нису дефинисани под поменутим условима.

1)

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}} = \frac{1}{\log_x a_1 + \log_x a_2 + \ldots + \log_x a_n} = \frac{1}{\log_x(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)} = \log_{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} x$$

2)

$$\begin{aligned}
&\log_a N\cdot\log_b N + \log_b N\cdot\log_c N + \log_c N\cdot\log_a N =\\
&= \log_a N\log_b N\log_c N(\tfrac{1}{\log_c N} + \tfrac{1}{\log_a N} + \tfrac{1}{\log_b N}) =\\
&= \log_a N\log_b N\log_c N(\log_N c + \log_N a + \log_N c) = \tfrac{\log_a N\log_b N\log_c N}{\log_{abc} N}
\end{aligned}$$

3)

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_b a \cdot \log_c b \cdot \tfrac{1}{\log_c d} = \log_b a \cdot \log_d b = \log_d a$$

☐

Задатак 21. *Доказати да су највеће вредности израза* $(\log_5 6)^{\sin x}$ *и* $(\log_6 5)^{\cos x}$ *једнаке.*

Решење. $\log_5 6 > 1$, па је $(\log_5 6)^{\sin x}$ највеће за највеће $\sin x$.
Највећа вредност функције $\sin x$ је 1, па је maxмаш$((\log_5 6)^{\sin x}) = \log_5 6$.
$0 < \log_6 5 < 1$, па је $(\log_6 5)^{\cos x}$ највеће за најмање $\cos x$.
Најмања вредност функције $\cos x$ је -1, па је $\max((\log_6 5)^{\cos x}) = \log_5 6$. ☐

6 Градиво четврте године средњих школа - Задаци

6.1 Функције - Основна својства

Напомена: на почетку ове области јављају се слични примери као и у другој години везани за скицирање логаритамских и експоненцијалних функција, сада неће бити понављања, могу се погледати на странама: 14, 15, 16, 36 и 37.

Задатак 22. *Одредити област дефинисаности функција:*

1) $y = 2^{\sqrt{3x-x^2}}$

2) $y = \lg(2x^2 - x - 6)$

3) $y = \log_2 \sqrt[3]{x^3 - 8}$

4) $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(3x-5)}$

5) $y = \lg \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$

6) $y = \frac{2+\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$

7) $y = \lg \mid 4 - x^2 \mid$

8) $y = \log_2 \sin x - \cos x$

Решење.

1) $y = 2^{\sqrt{3x-x^2}}$
Област дефинисаности садржи све елементе x такве да је:

$$\begin{aligned}&3x - x^2 \geq 0 \text{ тј.}\\ &D_f = [0, 3]\end{aligned}$$

2) $y = \lg(2x^2 - x - 6)$
За област дефинисаности мора се решити неједначина: $2x^2 - x - 6 > 0$.

$$\begin{aligned}&x_{1/2} = \tfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \tfrac{1\pm 7}{4}\\ &x_1 = 2,\ x_2 = -\tfrac{3}{2}\\ &D_f = (-\infty, -\tfrac{3}{2}) \cup (2, +\infty)\end{aligned}$$

Задатак овог типа припада основном нивоу, међутим могу се појавити грешке типа $D_f = (-\frac{3}{2}, 2)$, које су резултат лоше савладаности квадратних неједначина.

3) $y = \log_2 \sqrt[3]{x^3 - 8}$

$$\begin{aligned}&x^3 - 8 > 0\\ &x^3 > 8\\ &x > 2\\ &D_f = (2, +\infty)\end{aligned}$$

Битно је приметити да се две неједнакости: $x^3 - 8 > 0$ и $x^3 - 8 \geq 0$, могу свести у једну: $x^3 - 8 > 0$. Некада ученици имају механички приступ решавању оваквих примера, па се дешава да решавају обе неједначине.

4) $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(3x-5)}$

$$\begin{array}{l} 3x-5>0 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \\ 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-3,3) \\ \lg(3x-5) \neq 0 \\ 3x-5 \neq 1 \\ x \neq 2 \end{array}$$

Услов који се најчешће изостави је: $\lg(3x-5) \neq 0$.
Коначно решење је: $D_f = (\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3]$.

5)

$$\begin{array}{l} y = \lg \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8} \\ \frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8} > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \\ x_{1/2} = \frac{4 \pm 2}{2} \\ x_1 = 3, \ x_2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2-6x+8=0 \\ x_{3/4} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \\ x_{3/4} = \frac{6 \pm 2}{2} \\ x_3 = 4, \ x_4 = 2 \end{array}$$

Коначно решење је: $D_f = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$.

6)

$$\begin{array}{l} y = \frac{2+\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)} \\ 2-x>0 \Rightarrow x<2 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \ln(2-x) \neq 0 \\ 2-x \neq 1 \\ x \neq 1 \end{array}$$

Коначно решење је: $D_f = (1, 2)$.

7)

$$\begin{array}{l} y = \lg |4-x^2| \\ 4-x^2 \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{array}$$

Коначно решење је: $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

8)

$$\begin{array}{l} y = \log_2 (\sin x - \cos x) \\ \sin x - \cos x > 0 \\ \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in Z \end{array}$$

Коначно решење је: $D_f = (1, 2)$. За овај пример је неопходно добро познавање тригонометрисјких функција.

□

Задатак 23. *Да ли су једнаке функције:*

1) $f(x) = \log x^2$ *и* $g(x) = 2\log x$

2) $f(x) = e^{\ln x}$ *и* $g(x) = x$

Решење. Код овог типа задатка, ученици често греше, не посматрају и не упоређују области дефинисаности датих функција, већ само покажу да одређеним трансформацијама две фукције могу да се сведу на исти облик.

1) $f(x) = \log x^2$ и $g(x) = 2\log x$
Нису, јер немају исту област дефинисаности.
$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, а $D_g = (0, +\infty)$.

2) $f(x) = e^{\ln x}$ и $g(x) = x$
Нису, јер немају исту област дефинисаности.
$D_f = (0, +\infty)$, а $D_g = \mathbb{R}$.

□

Задатак 24. *Испитати нуле и знак датих функција:*

1) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

2) $y = \log_3(x^2 - 5x + 7)$

Решење.

1) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$
Област дефинисаности:

$$\begin{aligned} &x > 0 \\ &1 + \ln x \neq 0 \\ &\ln x \neq -1 \\ &x \neq e^{-1} \end{aligned}$$

Област дефинисаности је:
$(0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$.
Нуле:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \\ &1 - \ln x = 0 \\ &\ln x = 1 \\ &x = e \end{aligned}$$

Знак:

$$\begin{aligned} &1 + \ln x = 0 \\ &\ln x = -1 \\ &x = e^{-1} \end{aligned}$$

За $x \in (e^{-1}, e]$ $f(x) \geq 0$.
За $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$ $f(x) < 0$.

2) $y = \log_3(x^2 - 5x + 7)$
Област дефинисаности:

$$\begin{aligned} &x^2 - 5x + 7 > 0 \\ &x_{1/2} = \tfrac{5\pm\sqrt{25-28}}{2} \end{aligned}$$

Област дефинисаности је: $\mathbb{R}$.
Нуле:

$$\begin{aligned} &\log_3(x^2 - 5x + 7) = 0 \\ &x^2 - 5x + 7 = 1 \\ &x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &x_{1/2} = \tfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \\ &x_1 = 3,\ x_2 = 2 \end{aligned}$$

Знак:
За $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ $f(x) \geq 0$.
За $x \in (2, 3)$ $f(x) < 0$.

Напомена: јако је битно у примерима ове врсте прво одредити област дефинисаности и то узети у обзир при одређивању захтеваног. То је иначе ситуација у којој се јавља највећи број грешака ученика. Ученици почну са решавањем задатка без претходно одређене области дефинисаности, што утиче на крајњи исход. ☐

Задатак 25. *Испитати парност, односно непарност следећих функција:*

1) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$

2) $y = \log_2 (x + \sqrt{1 + x^2})$

Решење.
Област дефинисаности за оба примера је скуп $\mathbb{R}$. Код овог типа задатка ученици обично заборава да разматрају област дефинисаност, што им у појединим случајевима може доста скратити процес решавања задатка. Нпр. ако област дефинисаности неке функције није симетричан скуп у односу на 0, онда та функција није ни парна ни непарна.

1) $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$

$$f(-x) = \frac{a^{-x} - a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^{-x} - a^{x}}{2} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2} = -f(x)$$

Функција је непарна.

2) $y = \log_2 (x + \sqrt{1 + x^2})$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_2 (-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \log_2 (-x + \sqrt{1 + x^2} \cdot \tfrac{x + \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}) = \\ &= \log_2 \tfrac{-x^2 + 1 + x^2}{x + \sqrt{1+x^2}} = \log_2 (x + \sqrt{1 + x^2})^{-1} = -\log_2 (x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

Функција је непарна.

☐

Задатак 26. *Испитати монотоност функције:* $y = 3^{(x^2-1)^3+1}$.

Решење.

$$(x^2 - 1)^3 + 1 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 + 1 = x^2(x^4 - 3x^2 + 3) = x^2((x^2 - \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{3}{4})$$

Минимум функције је за $x = 0$, тада је $y = 1$, па за $x \in (-\infty, 0)$ функција је опадајућа, а за $x \in (0, +\infty)$ функција је растућа. ☐

Задатак 27. *Одредити највећу вредност функције:*

$$y = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \tfrac{8}{x},\ \textit{за}\ 1 \leq x \leq 64$$

.

Решење.

$$\begin{aligned}y &= \log_2^4 x + 12\log_2^2 x\cdot(\log_2 2^3 - \log_2 x) = \log_2^4 x + 36\log_2^2 x - 12\log_2^3 x = \\ &= \log_2^2 x(\log_2^2 x - 12\log_2 x + 36) = \log_2^2 x(\log_2 x - 6)^2\end{aligned}$$

Ако уведемо смену $t = \log_2 x$, $t \in (0,6)$, имамо: $y = t^2(t-6)^2$. Ова функција има највећу вредност за $t = 3$ и тада је највећа вредност функције $y = 81$. ☐

Задатак 28. *За следеће функције одредити област дефинисаности, испитати парност, одредити нуле и знак:*

1) $f(x) = \log_2 \frac{x^2-5x+6}{x}$
2) $f(x) = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$

Решење.

1) $f(x) = \log_2 \frac{x^2-5x+6}{x}$

Област дефинисаности:

$$\begin{aligned}&x \neq 0\\ &x_{1/2} = \tfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}\\ &x_{1/2} = \tfrac{5\pm1}{2}\\ &x_1 = 3 \text{ и } x_2 = 2\\ &x \in (0,2)\cup(3,+\infty)\end{aligned}$$

Парност: није ни парна ни непарна, то можемо закључити на основу области дефинисаности. Обично ученици не разматрају област дефинисаности, него трансформацијама проверавају како се понаша $f(-x)$.

Нуле:

$$\begin{aligned}&f(x) = 0\\ &\tfrac{x^2-5x+6}{x} = 1\\ &x^2 - 6x + 6 = 0\\ &x_{3/4} = \tfrac{6\pm\sqrt{36-24}}{2}\\ &x_{3/4} = \tfrac{6\pm2\sqrt{3}}{2}\\ &x_{3/4} = 3\pm\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Нуле дате функције су: $x_{3/4} = 3\pm\sqrt{3}$.

Знак:

$$\begin{aligned}&f(x) > 0\\ &\log_2 \tfrac{x^2-5x+6}{x} > 0\\ &\tfrac{x^2-5x+6}{x} > 1\\ &x^2 - 6x + 6 > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&f(x) < 0\\ &\log_2 \tfrac{x^2-5x+6}{x} < 0\\ &\tfrac{x^2-5x+6}{x} < 1\\ &x^2 - 6x + 6 < 0\end{aligned}$$

За $x \in (0, 3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3},+\infty)$ За $x \in (3-\sqrt{3},2)\cup(3,3+\sqrt{3})$.

Честе грешке су што ученици при одређивању знака не узму у обзир област дефинисаности.

2) $f(x) = \log_2 \frac{1-x}{1+x}$
Област дефинисаности:

$$1 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$
$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

Парност:

$$f(-x) = \log_2 \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \log_2 \frac{1+x}{1-x} = \log_2 (\frac{1-x}{1+x})^{-1} = -f(x)$$

Непарна.
Нуле:

$$f(x) = 0$$
$$\log_2 \frac{1-x}{1+x} = 0$$
$$\frac{1-x}{1+x} = 1 \Rightarrow \frac{-2x}{1+x} = 0$$
$$x = 0$$

Знак:

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 0)$$
$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

□

6.2 Функције - Сложена функција. Инверзна функција

Задатак 29. *Наћи инверзне функције следећих функција:*

1) $f(x) = 2^{-x}$

2) $f(x) = \log_2 (\frac{x-2}{x})$

3) $f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1},\ x > 0$

Решење. Као и у претходним задацима тако и у овом се често изостави одређивање области дефинисаности, а и сам поступак решавања задатка је ученицима збуњујућ. Апстрактни су им појмови ”1-1”и ”на”, и често не знају да провере да ли је функција ”1-1”и ”на”.

1) $f(x) = 2^{-x}$
Функција је ”1-1”и ”на”, па је функција бијекција, па има одговарајућу инверзну функцију.
Прво место $f(x)$ треба ставити y.

$$y = 2^{-x} / \log_2$$

Сада треба изразити x преко y.

$$\begin{aligned} &\log_2 y = -x \\ &x = -\log_2 y \end{aligned}$$

Последњи корак, уместо x ставити $f^{-1}(x)$, а уместо y ставити x.

$$f^{-1}(x) = -\log_2 x,\ \ x > 0$$

2) $f(x) = \log_2 (\frac{x-2}{x})$
Област дефинисаности функције f је: $\frac{x-2}{x} > 0$, тј. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
Дата функција је бијективна на скупу $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, па на том скупу постоји инверзна функција.
Прво место $f(x)$ треба ставити y.

$$y = \log_2 (\tfrac{x-2}{x})$$

Сада треба изразити x преко y.

$$\begin{aligned} &\tfrac{x-2}{x} = 2^y \\ &1 - \tfrac{2}{x} = 2^y \\ &\tfrac{2}{x} = 1 - 2^y \\ &x = \tfrac{2}{1-2^y}, \end{aligned}$$

Последњи корак, уместо x ставити $f^{-1}(x)$, а уместо y ставити x.

$$f^{-1}(x) = \tfrac{2}{1-2^x}$$

3) $f(x) = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1}$, $x > 0$
Дата функција је бијективна за $x > 0$, па за $x > 0$ постоји инверзна функција дате функције f.
Овај пример се ради на сличан начин као и претходни.

$$
\begin{array}{l}
y = \ln \frac{e^x-1}{e^x+1} \\
e^y = \frac{e^x+1-2}{e^x+1} \\
e^y = 1 - \frac{2}{e^x+1} \\
1 - e^y = \frac{2}{e^x+1} \\
e^x + 1 = \frac{2}{1-e^y} \\
e^x = \frac{2-1+e^y}{1-e^y} \\
e^x = \frac{1+e^y}{1-e^y} \\
x = \ln \frac{1+e^y}{1-e^y} \\
f^{-1}(x) = \ln \frac{1+e^x}{1-e^x}
\end{array}
$$

$\square$

7 Закључак

При изради рада, у раду са ученицима долази се до закључка да се проблематичност при обради дате области у настави највише огледа у несаваладаности квадратних једначина и неједначина чије је добро познавање неопходно. Наравно проблеми се јављају исто тако често и због тога што је велики број основних особина експоненцијалних и логаритамских функција тежак за учење, па ако их ученици и науче, често се дешава да их погрешно науче. Зато је неопходно у настави, при обради ове области, јако често враћање на већ обрађено градиво, квадратне једначине и неједначине, као и обнављање основних особина поменутих функција. Битно је упутити ученике која су места у задацима где се често јављају грешке и ког типа су те грешке, како не би они понављали исте.

У раду је уложен посебан труд да задаци, који су унутар наставних јединица поређани по тежини, буду поступно решени и да места где се грешке често јављају буду истакнута, као и да буде наведено ког типа се грешке најчешће могу појавити. С обзиром на то, првенствено се надам да ће рад користити ученицима како би савладали потешкоће при обради дате теме, али и да ће појединим професорима олакшати рад.

Литература

[1] В. Мићић, С. Огњановић, Ж. Ивановић, Математика за други разред средње школе за природно-математички смер и за природно-математичко подручје рада, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2006.

[2] М. Обрадовић, Д. Георгијевић, Математика са збирком задатака за четврти разред средње школе гимназија (природно-математички и општи тип) и за подручје рада: електротехника; природно-математичко; геодезија и грађевинарство, Завод за уџбенике, Београд , 2011.

[3] Ж. Ивановић, С. Огњановић, Збирка решних задатак и тестова за други разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2010.

[4] Ж. Ивановић, С. Огњановић, Збирка задатак и тестова за други разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2010.

[5] З. Каделбург, В. Мићић, Срђан Огњановић, Анализа са алгебром 2 уџбеник са збирком задатака за други разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1997.

[6] Д. Ђорић, Ђ. Јованов, Р. Лазовић, Математика за пријемни испит на техничким и природно математичким факултетима, Факултет организационих наука, Београд, 2007.

[7] Настава математике, Друштво математичара Србије, Београд, 2000.

[8] Д. Аднађевић, З. Каделбург, Математичка анализа I, Математички факултет, Београд, 2008.