Универзитет у Београду
Математички факултет

СТОХАСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ и ЊИХОВА ПРИМЕНА У ФИНАНСИЈСКОЈ МАТЕМАТИЦИ

- Мастер рад -

ментор: проф. др Слободанка Јанковић

студент: Петар Милошевић

Београд, 2015.

Предговор

Циљ овог рада је да се упознамо са основама теорије стохастичких диференцијалних једначина, чија је примена у многим научним гранама постала неизбежна. Напоменимо да је финансијска математика једна од области где је озбиљан рад немогућ без познавања и употребе стохастичких диференцијалних једначина.

Знамо да при моделирању многих природних појава обичне диференцијалне једначине представљају веома добар алат. Разлог употребе диференцијалних једначина лежи у чињеници да промена посматране моделиране појаве у највећем броју случајева зависи од промене неке друге природне величине, а сам извод представља величину промене функције у зависности од њеног параметра.

Код оваквог моделирања, проблем који може настати је да решење обичне диференцијалне једначине почне да поприма неке случајне особине, односно да вредност функције није детерминистички одређена у свакој тачки, већ може узимати случајне вредности, што у ствари значи да је та функција једна случајна променљива. Видимо, дакле, да у постојећи почетни детерминистички проблем морамо убацити и случајну величину, па ће тако добијена једначина у ствари бити стохастичка диференцијална једначина, а њено решење стохастички процес.

Итôви процеси су решења стохастичких диференцијалних једначина код којих је стохастичка компонента базирана на процесу Брауновог кретања. Ови процеси имају многобројне примене у разним областима, а у новије време посебно је доминантна примена у моделирању цена финансијских инструмената (предмета трговине на финансијским тржиштима). Коефицијент којим се множи диференцијал Брауновог кретања у моделу Итôвог процеса у применама се назива волатилност, и интерпретира се као мера неизвесности, односно ризика у контексту примене у финансијама. Ово је основна идеја која ће у раду бити детаљно разрађена.

Садржај

Глава 1

Стохастичке диференцијалне једначине

1.1 Брауново кретање

1.1.1 Дефиниција и својства Брауновог кретања

Случајни (стохастички) процес је општи појам за било коју колекцију случајних променљивих $\{X(t)\}$ које зависе од времена t, које може бити дискретно или непрекидно. Вредност случајне променљиве у тренутку t се означава X_t или $X(t)$. Овим процесима се могу описати кретања цена обвезница, кретања честица у природи и многи други процеси.

Тако је 1828. године ботаничар Браун (R.Brown) описао кретање честица полена потопљених у течност. Он је приметио да се су се честице кретале на насумичан начин. Прва битнија примена Брауновог кретања јавила се почетком 20. века и то од стране двојице научника - Башељеа (L.Bachelier) и Ајнштајна (A.Einstein). Башеље се бавио квантитативним методама у финансијама и желео је да моделира кретање цене акције у својој докторској тези 1900. године, док је Ајнштајн хтео да искористи овај модел у физичком смилу, приликом изучавања кретања честица потопљених у течност. Он је 1905. године овај феномен објаснио сударањем честица са молекулима течности. Ипак математичку основу овог процеса поставио је 1918. године амерички математичар Винер (N.Wiener). Један од његових доприноса је и доказ да Брауново кретање постоји као строго дефинисан математички објекат, не само као физички феномен. Стога се, по њему, Брауново кретање подједнако често назива и Винеров процес.

Дефиниција 1. Непрекидни случајни процес $\{B_t : t \geq 0\}$ дефинисан на простору вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ назива се Брауново кретање ако важи:

- $B_0 = 0$.
- B има независне прираштаје, тј. за сваки коначан скуп времена $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, за $n \in \mathbb{N}$, случајне променљиве $B_0, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ су независне.
- За свако $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ има нормалну расподелу са математичким очекивањем 0 и дисперзијом $t - s$.
- За свако $\omega \in \Omega$, $B_t(\omega)$ је непрекидна функција од t.

Математичку конструкцију објекта који задовољава наведене услове ћемо објаснити касније, а сада ћемо навести својство Брауновог кретања које ће нам бити потребно када будемо уводили појам (не)ограничености варијације у даљем раду.

Теорема 1. *Скоро све трајекторије Брауновог кретања су нигде диференцијабилне.*

Доказ. Нека је t произвољно. Посматрајмо $\frac{B(t+\Delta)-B(t)}{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}Z}{\Delta} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta}}$, где је Z случајна променљива са стандардизованом нормалном расподелом. Из чињенице да $P(|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}| > K) \to 1$, за свако K, када $\Delta \to 0$, закључујемо да израз $\frac{B(t+\Delta)-B(t)}{\Delta}$ тежи $+\infty$ у расподели одакле следи доказ тврђења. $\square$

1.1.2 Брауново кретање као Гаусов процес

Дефиниција 2. Коваријација процеса $X(t)$ дефинисана је са:

$$\begin{aligned} Cov(X(t), X(s)) &= E(X(t) - EX(t))(X(s) - EX(s)) \\ &= E(X(t)X(s)) - EX(t)EX(s) \end{aligned}$$

Дефиниција 3. Нека је V d-димензиони случајни вектор. Кажемо да V има вишедимензиону нормалну расподелу са математичким очекивањем μ и матрицом коваријације Σ ако је густина вектора V дата са:

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}}(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_d \end{bmatrix}, \ \mu = E[V] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix},$$

где је $\sigma_{ij} = E\Big((V_i - \mu_i)(V_j - \mu_j)\Big)$.

Дефиниција 4. Ако је случајни процес $\{X(t) : 0 \leq t < \infty\}$ такав да вектор $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ има вишедимензионалну нормалну расподелу за било који коначни низ времена $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, тада случајни процес $\{X(t)\}$ називамо *Гаусов процес.*

Теорема 2. *Брауново кретање је Гаусов процес са математичким очекивањем једнаким 0 и са коваријацијом* $\min\{t, s\}$. *Важи и обрнуто тврђење, Гаусов процес са математичким очекивањем једнаким 0 и са коваријацијом* $\min\{t, s\}$ *је Брауново кретање.*

Доказ. Како је очекивање Брауновог кретања једнако 0, имамо

$$Cov(B(t), B(s)) = E(B(t), B(s)).$$

Без губитка општости, можемо претпоставити $t < s$ и тада важи следеће

$$B(s) = B(t) + B(s) - B(t).$$

Одатле користећи независност прираштаја Брауновог кретања добијамо,

$$E(B(t), B(s)) = EB^2(t) + E(B(t)(B(s) - B(t))) = EB^2(t) = t.$$

Ако претпоставимо $s < t$, на сличан начин добијамо $E(B(t), B(s)) = s$. Дакле показали смо да важи

$$E(B(t), B(s)) = \min\{s, t\}.$$

Да бисмо показали да важи и супротан смер тврђења, претпоставимо да је t произвољно и $s \geq 0$. $X(t)$ је Гаусов процес, па вектор $(X(t), X(t+s))$ има дводимензиону нормалну расподелу, одакле и вектор $(X(t), X(t+s)-X(t))$ има исту расподелу. Користећи $Cov(X(t), X(t+s)) = \min\{t, s+t\} = t$ добијамо

$$Cov(X(t), X(t+s)-X(t)) = Cov(X(t), X(t+s)) - Cov(X(t), X(t)) = t - t = 0.$$

Одатле, на основу својства нормалне расподеле, важи да су случајне променљиве $X(t)$ и $X(t+s) - X(t)$ независне. Па следи да је прираштај $X(t+s) - X(t)$ независан од $X(t)$ и има $\mathcal{N}(0, s)$ расподелу и стога процес $X(t)$ представља Брауново кретање. $\square$

1.1.3 Конструкција Брауновог кретања

Конструкција математичког објекта који строго задовољава све особине Брауновог кретања није тривијалан посао, стога нећемо наводити њен доказ, већ ћемо увести простор, елементе који су потребни за конструкцију, њихова својства на основу којих ћемо формулисати саму теорему. Почнимо од корисне леме о понашању низа независних случајних променљивих са нормалном расподелом:

Лема 1. *Нека је $\{Z_n\}$ низ независних случајних променљивих са $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом. Тада постоји случајна променљива C таква да је*

$$P(C < \infty) = 1$$

и за коју важи

$$|Z_n| \leq C\sqrt{\log n}\,, \quad \forall n \geq 2.$$

Потпун доказ ове леме може се пронаћи у [3], стр.37.

Подсетимо се сада својстава простора $L^2[0,1]$. Наведени простор чине све функције $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ које испуњавају услов:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

$L^2[0,1]$ је простор функција са скаларним производом који је дат на следећи начин:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx < \infty.$$

Посебно, ако функције из скупа $\{\varphi_n \in L^2[0,1] : 0 \leq n < \infty\}$ испуњавају услове $\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = 1$ за све $n \geq 0$, $\langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$ за све $n \neq m$, и услов да скуп коначних линеарних комбинација од φ_n такође представља скуп

густ у $L^2[0,1]$, тада $\{\varphi_n\}$ називамо комплетном *ортонормираном базом* (у даљем тексту ОНБ).
Користећи својства ОНБ и Парсевалове ($M.A.Parseval$) једнакости која гласи

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\langle g,\varphi_n\rangle$$

ако уместо функција f и g у изразу искористимо функције индикаторе интервала $\mathrm{I}_{[0,s]}$ и $\mathrm{I}_{[0,t]}$ добијамо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s \varphi_n(x)dx \int_0^t \varphi_n(x)dx = \min\{s,t\}.$$

Потпун доказ Парсевалове једнакости може се наћи у [3], стр. 282.

Као последњи корак пред формулацију теореме о конструкцији Брауновог кретања, дефинисаћемо комплетну ОНБ коју ћемо користити. Почећемо са низом H_n који се назива "таласићи". Нека је

$$H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Низ "таласићи" задајемо на следећи начин:

$$H_n(t) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2^{\frac{j}{2}}H(2^j t - k), & n \ge 1, \text{ где је } n = 2^j + k, \text{ за } j \ge 0 \text{ и } 0 \le k \le 2^j \end{cases}$$

Како ће нам у теореми бити потребне вредности које се добијају интеграљењем "таласића", елегантан начин за добијање истих представља увођење функције "троуглића":

$$\int_0^t H(u)du = \frac{1}{2}\triangle(t)$$

где је

$$\triangle(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2(1-t), & \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Даље за $n = 2^j + k$ где су $j \ge 0$ и $0 \le k < 2^j$ дефинишемо,

$$\triangle_n(t) = \triangle(2^j t - k)$$

и

$$\theta_n(t) = \theta_{j,k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{j}{2}+1}}\triangle_{j,k}(t).$$

Пошто смо дефинисали све што нам је потребно за конструкцију Брауновог кретања, сада ћемо формулисати теорему:

Теорема 3. *Нека је $\{H_n\}$ комплетна ОНБ у простору $L^2[0,1]$ и нека је $\theta_n(t) = \int_0^t H_n(x)dx$. Претпоставимо да важи:*

- $\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n(t)|$ *конвергира за свако* $t \in [0,1]$;
- $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log n}\, |\theta_n(t)|$ *униформно конвергира по* $t \in [0,1]$.

Дефинишемо $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n\theta_n(t)$, *где је* Z_n *низ независних случајних промењљивих са расподелом* $\mathcal{N}(0,1)$ *на простору вероватноће* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Тада ред* $B(t)$ *униформно конвергира за свако* $t \in [0,1]$, *и још важи следеће:* $EB(t) = 0$, $Cov(B(s), B(t)) = \min\{s,t\}$ *и* $B(t)$ *је Гаусов процес, односно* (по Теореми 2) *Брауново кретање.*

Сума $B(t)$ која конвергира Брауновом кретању из претходне теореме, може се посматрати и на следећи начин, узимајући у обзир облик $\theta_n(t)$ представљен преко "троуглића":

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n\theta_n(t) = Z_0 t + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{j}{2}+1}} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} Z_{j,k}\triangle_{j,k}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \triangle_n(t)$$

Сада када смо конструисали Брауново кретање на интервалу $[0,1]$, потребно је конструисати исти процес на интервалу $[0,\infty]$. Најинтуитивнија идеја за овако нешто јесте спајање пребројиво много независних већ конструисаних Браунових кретања. У виду формуле, поступак конструкције Брауновог кретања $B(t)$ за било које $0 \le t < \infty$ изгледа овако:

$$B(t) = \sum_{k=1}^{n} B^{(k)}(1) + B^{(n+1)}(t-n), \quad t \in [n, n+1);$$

где за свако $1 \le n < \infty$ процес $B^{(n)}(t)$ представља независно Брауново кретање на интервалу $[0,1]$.

Тако на пример,

$$B(3.5) = B^{(1)}(1) + B^{(2)}(1) + B^{(3)}(1) + B^{(4)}(0.5).$$

1.1.4 Браунов мост - дефиниција и својства

У овом делу рада представићемо модификовано Брауново кретање и његове особине које ће нам бити од користи у даљем раду. У нашем облику Брауновог кретања из претходне теореме

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Z_n \triangle_n(t)$$

имамо да су $\triangle_0(1) = 1$ и $\triangle_n(1) = 0, \ \forall n \ge 1$. Тако да ако изоставимо први сабирак из суме $B(t)$ и дефинишемо

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Z_n \triangle_n(t)$$

видимо да $U(t)$ представља непрекидни процес на интервалу $[0,1]$ такав да је $U(0) = 0$ и $U(1) = 0$. Овај процес се назива *Браунов мост.* Овај процес је често веома користан када је потребно моделирати објекат који у будућности мора достићи баш ону вредност која је била у почетном тренутку.

Другим речима, Браунов мост је Брауново кретање условљено повратком на место поласка. Расподела Брауновог моста добија се условљавањем расподеле Брауновог кретања. То је нормална расподела са очекивањем 0 и дисперзијом $t(1-t)$ односно:

$$U(t) \in \mathcal{N}(0, t(1-t)).$$

У општем случају за $s, t \in (0,1)$ имамо и:

$$Cov(U(t), U(s)) = \min\{s,t\} - st.$$

Браунов мост можемо конструисати на разне начине користећи Брауново кретање. Овде ће бити приказан облик који ће нам бити потребан даље у раду. Дакле:

$$U(t) = B(t) - tB(1).$$

Како је $B(t)$ Гаусов процес са очекивањем једнаким 0, очигледно је да је такав горенаведени процес. Потребно је још утврдити вредност функције коваријансе:

$$\begin{aligned} Cov(U(t), U(s)) &= E(U(t), U(s)) = E((B(t) - tB(1))(B(s) - sB(1))) \\ &= E(B(t)B(s) - sB(t)B(1) - tB(s)B(1) + stB^2(1)) \\ &= \min\{s,t\} - s\min\{t,1\} - t\min\{s,1\} + st \\ &= \min\{s,t\} - st \end{aligned}$$

Како процес $U(t) = B(t) - tB(1)$ има непрекидне трајекторије и коначнодимензиону нормалну расподелу са коваријансом $\min\{s,t\} - st$ можемо закључити да представља Браунов мост.

1.1.5 Геометријско Брауново кретање

При моделирању вредносних папира, модел Брауновог кретања има две мане:

- претпоставка да цена вредносног папира има нормалну расподелу допушта да цена буде негативна,
- није оправдана претпоставка да промена у цени вредносног папира на интервалу исте дужине има исту расподелу, без обзира на то колика је цена на почетку интервала.

Да бисмо прешли на модел који нема горенаведене мане када посматрамо цену неког вредносног папира, која се мења током времена дефинисаћемо процес $S(y)$. Садашњи тренутак је 0, а цена вредносног папира после времена y је $S(y)$.

Дефиниција 5. Случајан процес $S(y)$, $0 \leq y < +\infty$, представља *процес геометријског Брауновог кретања* са параметром померају μ и параметром волатилности σ ако за свако $y, t \geq 0$ важи:

- случајна промењлива $\frac{S(y+t)}{S(y)}$ не зависи од цена које су биле до тренутка y,

- $\ln\left(\frac{S(y+t)}{S(y)}\right)$ је случајна промењлива која има расподелу $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

У овом моделу разлика логаритама будуће и садашње цене је процес Брауновог кретања, за разлику од Башељеовог модела у коме је разлика будуће и садашње цене процес Брауновог кретања. Цене нису никад негативне и у овом моделу се посматра количник цена, а не њихова разлика.

Ако се зна почетна цена $S(0)$ и параметри помераја μ и волатилности σ, можемо наћи математичко очекивање и дисперзију за цене вредносних папира у неком будућем тренутку t.

Дефиниција 6. Случајна промењлива Y има *лог-нормалну расподелу* са параметрима μ и σ^2 ако је $Y = e^X$, где X има $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ раподелу.

Математичко очекивање и дисперзија лог-нормалне расподеле су:

$$E(Y) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \text{ и } D(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Као алтернатива се може посматрати следећа:

Дефиниција 7. Ако је случајни процес $(B_t)_{t\geq 0}$ Брауново кретање, тада се процес $(Y_t)_{t\geq 0}$ дефинисан као

$$Y_t = e^{B_t}$$

назива *геометријско Брауново кретање.*

Претпоставимо да процес промена цена вредносног папира током времена $S(t)$, $t \geq 0$, представља процес геометријског Брауновог кретања са параметрима μ и σ^2. Знајући цену вредносног папира у тренутку $t = 0$, $S(0)$, можемо пронаћи математичко очекивање и дисперзију цене у произвољном тренутку t:

$$\begin{aligned} E(S(t)) &= E\left(\frac{S(t)S(0)}{S(0)}\right) = S(0)E\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \\ &= S(0)E\left(e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}\right) = S(0)e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}} = S(0)e^{t(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}, \end{aligned}$$

где смо користили да $e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}$ има лог-нормалну расподелу са параметрима μt и $\sigma^2 t$.

$$\begin{aligned} D(S(t)) &= D\left(\frac{S(t)S(0)}{S(0)}\right) = S^2(0)D\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = S^2(0)D\left(e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}\right) \\ &= S^2(0)e^{2\mu t+\sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1) = S^2(0)e^{t(2\mu+\sigma^2)}(e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned}$$

1.2 Мартингали

1.2.1 Уводни појмови и дефиниција

У овом поглављу представићемо појмове неопходне за даљи рад и дефинисаћемо посебну врсту случајних процеса који се називају мартингали.

Нека је $\{S(t)\}$ случајни процес. Тада се σ-поље генерисано случајним процесом $\{S(t)\}$ обележава $\mathcal{F}(t) = \sigma(S(u), u \leq t)$ и представља најмање σ-поље које садржи све скупове облика $\{a \leq S(u) \leq b\}$ где су $0 \leq u \leq t, a, b \in \mathbb{R}$.

Нека је $\{\mathcal{F}(t) : 0 \leq t < \infty\}$ колекција σ-поља за коју важи $\mathcal{F}(t) \subset \mathcal{F}$ и таквих да $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$ за $s \leq t$. Тада колекцију $\{\mathcal{F}(t)\}$ обележавамо са $\mathbb{F}$ и називамо *филтрација.*

Даље, ако имамо скуп Ω, σ-поље подскупова од $\Omega, \mathcal{F}$, и вероватноћу P дефинисану на елементима од $\mathcal{F}$, тада $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ називамо *филтрирани простор вероватноће.*

Најзад, ако је случајни процес $\{X(t) : 0 \leq t < \infty\}$ такав да је свако $X(t)$ мерљиво у односу на $\{\mathcal{F}(t)\}$, кажемо да је случајни процес $\{X(t)\}$ *адаптиран* на филтрацију $\mathbb{F}$.

Нека је $\mathbb{F} = \sigma\{X(s) : s \leq t\}$ филтрација. Кажемо да су задовољени *уобичајени услови* ако важи следеће:

- $\mathbb{F} = \sigma\{X(s) : s \leq t\} \cup \mathfrak{N}$, где је $\mathfrak{N}$ скуп свих нула скупова,
- филтрација је непрекидна здесна, односно важи $\mathcal{F}(t)_+ = \mathbb{F}$, где је $\mathcal{F}(t)_+ = \bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}(s)$.

Дефиниција 8. Случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ називамо *мартингал* у односу на филтрацију $\mathbb{F}$ ако задовољава следеће услове:

- $\{X(t)\}$ је адаптиран на филтрацију $\mathbb{F}$;
- $E|X(t)| < \infty$;
- $E(X(t)|\mathcal{F}(s)) = X(s) \;\; \forall (s,t)$ за које важи $s \leq t$.

Посебно, ако важи $E(X(t)|\mathcal{F}(s)) \leq X(s)$ односно $E(X(t)|\mathcal{F}(s)) \geq X(s)$, процес називамо *супермартингал* односно *субмартингал.*

1.2.2 Време заустављања

Дефиниција 9. Случајну променљиву $\tau \geq 0$ дефинишемо као *време заустављања* (у односу на филтрацију $\mathbb{F}$) ако за свако t важи:

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t).$$

Теорема 4. *Нека је филтрација $\mathbb{F}$ непрекидна здесна. Тада је τ време заустављања ако и само ако за свако t важи $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$.*

Доказ. Директан смер тврђења важи по дефиницији времена заустављања, док супротан смер следи из:

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau < t + \frac{1}{n}\}.$$

Како $\{\tau < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}(t + \frac{1}{n})$, из чињенице да је $\mathbb{F}$ непрекидна здесна, следи $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)$. □

1.2.3 Примери мартингала

У овом поглављу ћемо представити примере мартингала који су засновани на процесу Брауновог кретања, а затим ћемо показати да задовољавају потребне услове.

Теорема 5. *Нека је $B(t)$ Брауново кретање. Сваки од следећих процеса представља непрекидни мартингал:*

1. $B(t)$;
2. $B^2(t) - t$;
3. $\exp(\alpha B(t) - \frac{\alpha^2 t}{2})$.

Доказ. Доказујемо за сваки процес појединачно примењујући чињеницу да је $B(t+s) - B(s)$ независан од $\mathcal{F}(s)$:

1. (а) Математичко очекивање следи из својства Брауновог кретања:

$$EB(t) = 0$$

   (б) Трансформацијама се ослобађамо услова зависности од $\mathcal{F}(s)$:

$$\begin{aligned} E(B(t)|\mathcal{F}(s)) &= E(B(t) - B(s) + B(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E(B(t) - B(s)|\mathcal{F}(s)) + E(B(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E(B(t) - B(s)) + B(s) \\ &= B(s) \end{aligned}$$

2. (а) Математичко очекивање следи из својства Брауновог кретања:

$$E(B^2(t) - t) = E(B^2(t)) - t = t - t = 0 < \infty$$

   (б) Додавањем и одузимањем $B(s)$ ослобађамо се услова зависности:

$$\begin{aligned} E(B^2(t)|\mathcal{F}(s)) &= E((B(t) - B(s))^2 + 2B(t)B(s) - B^2(s)|\mathcal{F}(s))) \\ &= E((B(t) - B(s))^2) + 2B(s)E(B(t)|\mathcal{F}(s)) \\ &- E(B^2(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= t - s + 2B^2(s) - B^2(s) \\ &= t - s + B^2(s) \end{aligned}$$

   Одатле,

$$E(B^2(t) - t|\mathcal{F}(s)) = B^2(s) - s$$

3. (а) Користећи својства лог-нормалне расподеле и чињеницу да важи $\alpha B(t) = \alpha\sqrt{t}Z$, где $Z \in \mathcal{N}(0,1)$, добијамо:

$$E(\exp(\alpha B(t) - \frac{\alpha^2 t}{2})) = \exp(\frac{\alpha^2 t}{2})\exp(-\frac{\alpha^2 t}{2}) = 1 < \infty$$

(б) И у овом делу доказа користимо претходно поменуте особине лог-нормалне расподеле (очекивање), као и чињеницу да важи $B(t) - B(s) = Z\sqrt{t-s}$, где $Z \in \mathcal{N}(0,1)$:

$$\begin{aligned} E(\exp(\alpha B(t) - \frac{\alpha^2 t}{2})|\mathcal{F}(s)) &= E(\exp(\alpha(B(t) - B(s)) + \alpha B(s) \\ &- \frac{\alpha^2 t}{2})|\mathcal{F}(s)) \\ &= \exp(\alpha B(s) - \frac{\alpha^2 t}{2})E(\exp(\alpha(B(t) \\ &- B(s)))) \\ &= \exp(\alpha B(s) - \frac{\alpha^2 t}{2})\exp(\frac{\alpha^2(t-s)}{2}) \\ &= \exp(\alpha B(s) - \frac{\alpha^2 s}{2}) \end{aligned}$$

□

1.3 Стохастички интеграл и Итôва формула

1.3.1 Варијација и квадратна варијација функција

На почетку овог поглавља ћемо дефинисати појмове варијације функције, квадратне варијације, њихову везу и својства, а затим ћемо навести особине Брауновог кретања које су с тим у вези. То ће нам даље послужити као мотив за увођење стохастичког интеграла.

Дефиниција 10. Нека је π подела интервала $[a,b]$ таква да је $a = t_0$ и $b = t_n$, и нека је f реална функција дефинисана на интервалу $[a,b]$. Тада је *варијација функције* f једнака:

$$V(f) = \sup_{\pi} \sum_{t_i \in \pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Кажемо да функција има *ограничену варијацију* ако важи $V(f) < \infty$.

Дефиниција 11. Нека је $X(t)$ функција дефинисана на интервалу $[a,b]$ и нека је π подела наведеног интервала тако да важи $a = t_0$ и $b = t_n$. *Квадратну варијацију* $[X]$ *функције* $X(t)$ дефинишемо као lim:

$$[X] = \lim_{n\to\infty} Q_n(X)$$

где је

$$Q_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (X(t_{i+1}) - X(t_i))^2$$

ако лимес постоји.

Ако норму поделе π дефинишемо као $\|\pi\| = \max_i (t_{i+1} - t_i)$ приметимо да важи $n \to \infty \Rightarrow \|\pi_n\| \to 0$.

Претходна дефиниција важи аналогно ако уместо функције посматрамо процес $\{X(t)\}$, уз напомену да се тада посматра lim у вероватноћи.

Следећа теорема пружа нам директну везу између квадратне и обичне варијације:

Теорема 6. *Нека је функција f ограничене варијације и непрекидна. Тада је њена квадратна варијација једнака нули.*

Доказ.

$$\sum_{t_i\in\pi}(f(t_{i+1})-f(t_i))^2 \leq \sup_i |f(t_{i+1})-f(t_i)| \sum_{t_i\in\pi}|f(t_{i+1})-f(t_i)| \to 0, \|\pi\| \to 0,$$

где неједнакост следи из услова да је функција f непрекидна на $[a,b]$, дакле и равномерно непрекидна на интервалу. □

Варијација Брауновог кретања је бесконачна, што закључујемо из Теореме 1 о нигде диференцијабилним трајекторијама Брауновог кретања. Ово својство следи из чињенице да су функције ограничене варијације скоро свуда диференцијабилне (јер их је могуће представити као збир једне растуће и једне опадајуће функције).

О вредности квадратне варијације Брауновог кретања, говори следећа теорема:

Теорема 7. *Квадратна варијација Брауновог кретања на интервалу $[a,b]$ једнака је $b-a$.*

Доказ. Прво ћемо доказати да $Q_n(B)$ тежи ка $b-a$ у средње-квадратном смислу конструишући независне случајне променљиве са очекивањем 0. У том смислу, посматрајмо разлику:

$$Q_n(B)-(b-a) = \sum_{t_i\in\pi_n}\left[(B(t_{i+1})-B(t_i))^2-(t_{i+1}-t_i)\right] = \sum_{t_i\in\pi_n} Y_i$$

Уочимо да су случајне променљиве Y_i међусобно независне, као и да је њихово очекивање једнако нули, због својстава Брауновог кретања. Случајну променљиву Y_i можемо представити и на следећи начин:

$$Y_i = (t_{i+1}-t_i)\left(\frac{(B(t_{i+1})-B(t_i))^2}{(t_{i+1}-t_i)}-1\right) = (t_{i+1}-t_i)(Z^2-1),$$

где случајна променљива $Z \in \mathcal{N}(0,1)$. Пређимо на доказивање средње-квадратне конвергенције из које следи конвергенција у вероватноћи:

$$\begin{aligned} E(Q_n(B)-(b-a))^2 &= E\left(\sum_{t_i\in\pi_n} Y_i^2\right) \\ &= E(Z^2-1)^2 \sum_{t_i\in\pi_n}(t_{i+1}-t_i)^2 \\ &\leq C\|\pi_n\|(b-a) \to 0, n\to\infty, \end{aligned}$$

где прва једнакост следи из особина случајних променљивих Y_i, односно њихове независности и вредности очекивања које је 0, док C представља константу, а последња неједнакост важи јер је $\|\pi_n\|$ највећа могућа вредност израза $(t_{i+1}-t_i)$. Како смо показали да важи

$$Q_n \xrightarrow{S.K.} (b-a)$$

одатле директно следи

$$Q_n \xrightarrow{P} (b-a)$$

чиме је доказано тврђење теореме. □

1.3.2 Стохастички интеграл

Крајњи циљ овог поглавља у раду јесте конструкција Итôвог ($It\hat{o}$) стохастичког интеграла облика:

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t) dB_t.$$

Већ смо показали да Брауново кретање нема ограничену варијацију, стога овај интеграл не може бити представљен као Риманов. Уместо тога, мораћемо да применимо мало финији приступ. У начелу, идеја је да дефинишемо интеграл за класу елементарних функција, а затим да га проширимо на ширу класу функција. Ипак, да бисмо дошли до интеграла који ће задовољити све наше потребе, мораћемо да уложимо доста труда.

Кренимо од увођења нотације која ће нас пратити кроз цео поступак: нека $\mathcal{B}$ обележава најмање σ-поље које садржи све отворене подскупове интервала $[0, T]$, нека је затим $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ филтрација, и нека за свако $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ буде најмање σ-поље које садржи све $A \times B$ такве да $A \in \mathcal{F}_t, B \in \mathcal{B}$. Најзад, функцију $f(\cdot, \cdot)$ зваћемо мерљивом односно адаптираном ако $f(\cdot, \cdot) \in \mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ односно $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \in [0, T]$.

У првом кораку конструкције интеграла, кренућемо од класе функција $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0, T]$ која садржи све мерљиве адаптиране функције које задовољавају неједнакост

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt\right] < \infty.$$

Да бисмо наслутили дефиницију Итôвог интеграла, узмимо у обзир шта тачно очекујемо од интеграла у најједноставнијим случајевима. На пример, ако је функција $f(\omega, t)$ индикатор интервала $(a, b] \subset [0, T]$, тада бисмо желели да важи:

$$I(f)(\omega) = \int_0^T \mathrm{I}_{[a,b]} dB_t = \int_a^b dB_t = B_b - B_a.$$

Како бисмо ово постигли, посматрајмо класу функција $\mathcal{H}_0^2$ која је подскуп од класе $\mathcal{H}^2$ и састоји се од свих функција облика:

$$f(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \mathrm{I}_{(t_i, t_{i+1}]},$$

где је $a_i \subset \mathcal{F}_t, E(a_i^2) < \infty$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$.

Очекивања од интеграла која смо већ установили јасно нам задају сам облик стохастичког интеграла за функције из класе $\mathcal{H}_0^2$:

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t) dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

Следећи корак је ширење домена интеграла I са класе $\mathcal{H}_0^2$ на класу $\mathcal{H}^2$. Да бисмо то постигли, неопходно је да знамо да је пресликавање $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(dP)$ непрекидно. Доказ тога нам пружа следећа важна лема:

Лема 2. (Итôва изометрија на $\mathcal{H}_0^2$) За свако $f \subset \mathcal{H}_0^2$ важи следеће:

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP \times dt)}.$$

Доказ. Доказ је једноставан и своди се на израчунавање израза са обе стране једнакости. Почнимо од десне стране једнакости:

$$f^2(\omega, t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega) \mathrm{I}_{(t_i, t_{i+1}]},$$

одатле

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\right)(t_{i+1} - t_i).$$

Пре израчунавања леве стране једнакости, приметимо да се приликом квадрирања интеграла $I(f)(\omega)$ по дефиницији губе међупроизводи прираштаја Брауновог кретања због својства самог процеса. Тако имамо:

$$\begin{aligned} E\left[I^2(f)\right] &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\right)(t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

чиме је завршен доказ једнакости, а самим тим и леме. □

Како смо показали непрекидност пресликавања $I : \mathcal{H}_0^2 \to L^2(dP)$, имамо потребне услове за формулацију следеће леме:

Лема 3. ($\mathcal{H}_0^2$ је густ у $\mathcal{H}^2$) За сваку функцију $f \in \mathcal{H}^2$, постоји низ функција $\{f_n\}$ из $\mathcal{H}_0^2$ такав да важи:

$$\|f - f_n\|_{L^2(dP \times dt)} \to 0, n \to \infty.$$

Доказ леме се може наћи у [3], стр 282.

Конкретизујмо сада резултат који смо остварили преласком са $\mathcal{H}_0^2$ на $\mathcal{H}^2$ тако што ћемо дефинисати интеграл и Итôву изометрију за све функције из $\mathcal{H}^2$. Стога наводимо следеће две леме:

Лема 4. Нека је f_n апроксимирајући низ функција из $\mathcal{H}_0^2$ за функцију f из $\mathcal{H}^2$. Тада важи:

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} I(f_n),$$

где се мисли на лимес у средње квадратном смислу.

Иако нећемо експлицитно конструисати овај лимес, да бисмо се уверили да је лема ваљано формулисана потребно је доказати да гранична вредност заиста постоји, као и да не зависи од избора низа f_n. У том смислу:

- Разлика $\|f - f_n\|$ конвергира ка нули у простору $L^2(dP \times dt)$ одакле закључујемо да је низ $\{f_n\}$ Кошијев ($A.L.Caushy$) у истом простору. Итôва изометрија преноси својство Кошијевог низа на $\{I(f_n)\}$ у простор $L^2(dP)$. Користећи чињеницу да је тај простор комплетан, закључујемо да низ $I(f_n)$ конвергира, дакле дефинисани лимес постоји.

- Друга провера ваљаности леме се односи на добру дефинисаност I. Довољно је доказати да ако постоје два низа f_n и g_n која теже ка f, разлика $\|I(f_n) - I(g_n)\|$ мора тежити нули. То заиста и важи, користећи Итôву изометрију добијамо:

$$\|I(f_n)-I(g_n)\|_{L^2(dP)} = \|f_n-g_n\|_{L^2(dP\times dt)} \leq \|f_n-f\|+\|f-g_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Лема 5. (Итôва изометрија на $\mathcal{H}^2$) За свако $f \subset \mathcal{H}^2$ важи следеће:

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP\times dt)}.$$

Доказ. Доказ ћемо поделити на три једноставна идентитета из којих следи једнакост из тврђења када $n \to \infty$:

- Нека је f_n из $\mathcal{H}_0^2$ апроксимирајући низ функција за f из $\mathcal{H}^2$. Како је норма непрекидна функција, важи $\|f_n\|_{L^2(dP\times dt)} \to \|f\|_{L^2(dP\times dt)}$.
- Према већ наведеној изометрији, следи $\|I(f_n)\|_{L^2(dP)} \to \|f_n\|_{L^2(dP\times dt)}$.
- Још једном примењујући непрекидност норме на израз $I(f_n) \to I(f)$ у $L^2(dP)$ простору, добијамо $\|I(f_n)\|_{L^2(dP)} \to \|I(f)\|_{L^2(dP)}$.

Из претходне три једнакости, следи тврђење леме чиме је доказ завршен. □

Пре него што наведемо нека од својстава стохастичког интеграла која ћемо формулисати у две теореме, дефинишимо интеграл на произвољном интервалу за све функције из $\mathcal{H}^2$. Дакле:

$$\int_a^b f(\omega,t)dB_t := \int_0^T f(\omega,t)\mathrm{I}_{[a,b]}dB_t.$$

Теорема 8. *Нека су $f, g \in \mathcal{H}^2$, $0 \leq a \leq b \leq T$ и нека су α, β реални бројеви. Тада важи следеће:*

- $\int_a^b f(t)dB_t$ *је $\mathcal{F}_b$-мерљиво,*
- $E\left(\int_a^b f(t)dB_t\right) = 0,$
- $E\left|\int_a^b f(t)dB_t\right|^2 = E\left(\int_a^b |f(t)|^2 dB_t\right),$
- $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dB_t = \alpha\int_a^b f(t)dB_t + \beta\int_a^b g(t)dB_t.$

Теорема 9. *Нека је $f \in \mathcal{H}^2$ и $0 \leq a \leq b \leq T$. Тада важе:*

$$E\left(\int_a^b f(t)dB_t|\mathcal{F}_a\right) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} E\left(\left|\int_a^b f(t)dB_t\right|^2 |\mathcal{F}_a\right) &= E\left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt|\mathcal{F}_a\right) \\ &= \int_a^b E\left(|f(t)|^2\, |\mathcal{F}_a\right) dt. \end{aligned}$$

Потпун доказ може се пронаћи у [1] стр. 22

Теорема 10. *За сваку функцију $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, постоји непрекидни мартингал $\{X_t : t \in [0,T]\}$ у односу на филтрацију $\mathcal{F}_t$ тако да за свако $t \in [0,T]$ важи:*

$$P\{\omega : X_t(\omega) = \int_0^T f(\omega,s)\mathrm{I}_{[0,t]}(s)dB_s\} = 1.$$

Потпун доказ може се пронаћи у [3] стр. 83

1.3.3 Локализација и Itôв интеграл

У досадашњем делу рада, дефинисали смо стохастички интеграл за функције које задовољавају:

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right] < \infty.$$

Нажалост, ова неједнакост не важи чак и за неке прилично једноставне непрекидне функције. Како бисмо дошли до дефиниције стохастичког интеграла која ће бити примењива на све непрекидне функције, искористићемо метод локализације.

Почнимо од дефиниције нове класе функција: $\mathcal{L}^2_{LOC} = \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ коју чине све мерљиве и адаптиране функције $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ такве да важи:

$$P\left(\int_0^T f^2(\omega,t)dt < \infty\right) = 1,$$

уз напомене да ова класа свакако садржи класу функција $\mathcal{H}^2$, као и да за сваку непрекидну функцију $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $f(\omega,t) = g(B_t) \in \mathcal{L}^2_{LOC}$ из чињенице да B_t као мартингал достиже свој min и max, па самим тим и овај интеграл мора бити ограничен. Ипак, права вредност ове класе функција налази се у њеној повезаности са временима заустављања. Како бисмо дошли до ове везе експлицитно, наведимо прво дефиницију:

Дефиниција 12. Растући низ времена заустављања назива се $\mathcal{H}^2[0,T]$ *локализујући низ за* f ако важи:

$$f_n(\omega,t) = f(\omega,t)\mathrm{I}_{(t\leq\nu_n)} \in \mathcal{H}^2[0,T], \forall n,$$

где је

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \nu_n = T\}\right) = 1.$$

Теорема 11. *(Локализација у $\mathcal{L}^2_{LOC}$) За свако $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$, низ дефинисан са:*

$$\tau_n = \inf\left\{s : \int_0^s f^2(\omega,t)dt \geq n \vee s \geq T\right\}$$

јесте локализујући низ за f.

Доказ. Важи једнакост следећих скупова

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \tau_n = T\} = \left\{\omega : \int_0^T f^2(\omega,t)dt < \infty\right\},$$

а за свако $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$, други скуп има вероватноћу 1 по дефиницији, одакле следи да је

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega : \tau_n = T\}\right\} = 1.$$

Даље, ако дефинишемо $f_n(\omega,t) = f(\omega,t)\mathrm{I}_{(t\le\tau_n)}$, имамо

$$\|f_n\|^2_{L^2(dP\times dt)} = E\int_0^T f^2(\omega,t)\mathrm{I}_{(t\le\tau_n)}dt \le n \le \infty,$$

одакле закључујемо да $f_n \in \mathcal{H}$, $\forall n$, чиме је доказ завршен. □

Пређимо сада на конструкцију Итôвог интеграла у $\mathcal{L}^2_{LOC}$. Нека су $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$ и $\{\nu_n\}$ било који локализујући низ за f. Нека је даље, за свако n, $X_{t,n}$ непрекидни мартингал на $[0,T]$ који одговара Итôвом интегралу

$$I\left(\mathrm{I}_{[0,t]}f(\omega,s)\mathrm{I}_{(s\le\nu_n(\omega))}\right).$$

Најзад, дефинишемо Итôв интеграл за функцију $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ као граничну вредност процеса $X_{t,n}$, када $n \to \infty$, односно, постоји јединствени непрекидни процес $\{X_t, 0 \le t \le T\}$ такав да

$$P\left\{X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,n}\right\} = 1, \quad \forall t \in [0,1],$$

и тада дефинишемо Итôв интеграл као:

$$\int_0^t f(\omega,s)dB_s := X_t(\omega), \quad \forall t \in [0,T].$$

Како бисмо показали ваљаност управо описаног поступка, формулисаћемо потребне теореме које доказују конзистентност, конвергенцију и независност од локалног низа. Теореме нећемо доказивати, а доказ се може наћи у [3], стр 97-98.

Теорема 12. *(Конзистентност) Нека је $f(\omega,s) \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$ и $\{\nu_n\}$ било који локализујући низ. Ако је $\{X_{t,n}\}$ непрекидни мартингал који одговара Итôвом интегралу $I\left(\mathrm{I}_{[0,t]}f(\omega,s)\mathrm{I}_{(s\le\nu_n(\omega))}\right)$, тада за све $t \in [0,T]$ и $n \ge m$ важи:*

$$X_{t,n} = X_{t,m}$$

за скоро све $\omega \in \{\omega : t \le \nu_m\}$.

Теорема 13. *(Конвергенција) Постоји непрекидан процес X_t такав да важи*

$$P\left\{X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t,n}\right\} = 1, \quad \forall t \in [0,1].$$

Теорема 14. *(Независност од локализујућег низа) Нека су* ν_n *и* $\hat{\nu}_n$ *локализујући низови за функцију* $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}[0,T]$. *У том случају за мартингале* $X_{t,n}$ *и* $\hat{X}_{t,n}$ *који одговарају интегралима* $I\left(\mathrm{I}_{[0,t]}f(\omega,s)\mathrm{I}_{(s\leq\nu_n(\omega))}\right)$ *и* $I\left(\mathrm{I}_{[0,t]}f(\omega,s)\mathrm{I}_{(s\leq\hat{\nu}_n(\omega))}\right)$ *важи следеће са вероватноћом 1:*

$$\lim_{n\to\infty} X_{t,n} = \lim_{n\to\infty} \hat{X}_{t,n}.$$

Премда нећемо доказивати теореме у овом делу рада, формулисаћемо још једно тврђење које се користи за доказивање Теореме о конзистентности.

Теорема 15. *Нека су* $f, g \in \mathcal{H}^2[0,T]$ *и нека је* μ *време заустављања тако да су* $f(\omega,s) = g(\omega,s)$ *за скоро све* $\omega \in \{\omega : s \leq \mu\}$. *Тада важи:*

$$\int\limits_0^t f(\omega,s)dB_s = \int\limits_0^t g(\omega,s)dB_s,$$

за скоро све $\omega \in \{\omega : t \leq \mu\}$.

За непрекидне функције Брауновог кретања, Итôв интеграл такође има интуитивну репрезентацију као гранична вредност Риманове суме ($B.Riemann$). У том смислу формулишимо теорему, за коју доказ такође нећемо наводити, он се може пронаћи у [3] стр. 100.

Теорема 16. *Нека је* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *било која непрекидна функција, и нека је извршена подела интервала* $[0,T]$ *на следећи начин:* $t_i = iT/n$ *за* $0 \leq i \leq n$. *Тада имамо:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = \int\limits_0^T f\left(B_s\right)dB_s,$$

где $\lim$ *означава конвергенцију у вероватноћи.*

1.3.4 Итôва формула

Теорема 17. *(Итôва формула - најједноставнији случај) За сваку функцију* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *чији је други извод непрекидан, важи:*

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

Нећемо наводити пун доказ наведене теореме, већ ћемо само представити његову скицу. Идеја је да се формула докаже за функције са компактним носачем, а онда да се тврђење прошири на све функције са непрекидним другим изводом. Кренимо од разлике

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^{n}\left(f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})\right),$$

где је $t_k = \dfrac{kt}{n}$ за све $0 \leq k \leq n$. На представљену разлику ћемо применити апроксимацију Тејлоровом ($B.Taylor$) формулом која за функције чији је други извод непрекидан, има следећи облик

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) + r(x,y),$$

где је
$$r(x,y) = \int_x^y (y-u)(f''(u) - f''(x))du.$$
Из израза за $r(x,y)$ и непрекидности f'' закључујемо да важи неједнакост $|r(x,y)| \leq (y-x)^2 h(x,y)$ где је h равномерно непрекидна и ограничена функција са особином $h(x,x) = 0$ за свако x.
Идеја је да применом ове апроксимације на разлику $f(B_t) - f(0)$ добијемо три суме од којих ће две тежити стохастичком односно Римановом интегралу из формулације теореме, док ће трећа сума тежити нули. У том смислу имамо:

$$\begin{aligned}
f(B_t) - f(0) &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{n} r(B_{t_i}, B_{t_{i-1}}) \\
&= A_n + B_n + C_n
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&A_n \xrightarrow{P} \int_0^t f'(B_s)dB_s = A, \\
&B_n \xrightarrow{P} \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds = B, \\
&C_n \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}$$

Из конвергенције у вероватноћи лако прелазимо на скоро сигурну конвергенцију на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&P\left\{|f(B_t) - f(0) - A - B| > \varepsilon\right\} \leq \\
&\leq P\left\{|f(B_t) - f(0) - A_n - B_n - C_n| + |A_n - A| + |B_n - B| + |C_n| > \varepsilon\right\} \to 0,
\end{aligned}$$

када $n \to \infty$, чиме је Итôва формула доказана за функције са компактним носачем.

Да бисмо показали да формула важи за све функције из $C^2(\mathbb{R})$, присетимо се да за сваку $f \in C^2(\mathbb{R})$ постоји $f_M \in C^2(\mathbb{R})$ са компактним носачем, таква да $f(x) = f_M(x)$ за све $|x| \leq M$. Већ смо доказали једнакост

$$f_M(B_t) = f_M(0) + \int_0^t f'_M(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_M(B_s)ds.$$

Ако узмемо $\tau_M = \min\{t : |B_t| \geq M\}$, тада за све $\omega \in \{s \leq \tau_M\}$ имамо да важи $f'(B_s) = f'_M(B_s)$, па по Теореми 15 следи

$$\int_0^t f'(B_s)dB_s = \int_0^t f'_M(B_s)dB_s, \quad \omega \in \{t \leq \tau_M\}.$$

Како за $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$ једнакости $f(B_s) = f_M(B_s)$ и $\int_0^t f''(B_s)ds = \int_0^t f''_M(B_s)ds$, следе тривијално, показали смо да за $\omega \in \{t \leq \tau_M\}$ важи

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

Најзад, приметимо да $\tau_M \to \infty$ са вероватноћом 1, одакле следи да најједноставнији облик Итôве формуле из Теореме 17 важи за све $f \in C^2(\mathbb{R})$. $\square$

У смислу проширења Итôве формуле на непрекидне функције од две промењиве, од којих прва има непрекидан први, а друга непрекидан и други извод, односно $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, формулишемо теорему:

Теорема 18. *За сваку функцију $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, важи:*

$$f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)ds.$$

Како је доказ ове аналоган доказу теореме за најједноставнији облик Итôве формуле, даћемо само скицу доказа са акцентом на разликама у односу скицу доказа претходне теореме. Поступак за функције са компактним носачем се поново састоји од формирања разлике $f(t, B_t) - f(0,0)$ која се представља у облику суме, а затим апроксимације те суме Тејлоровим развојем. Основну разлику представља облик Тејлорове апроксимације у дводимензионалном случају - функција $f(t, y)$ се у околини тачке (s, x) може представити као

$$f(s,x) + (t-s)\frac{\partial f}{\partial t}(s,x) + (y-x)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x) + \frac{1}{2}(y-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,x) + r(s,t,x,y),$$

где је

$$|r(s,t,x,y)| \leq (y-x)^2 h(x,y,s,t) + (t-s)k(x,y,s,t),$$

где функције h и k представљају ограничене, равномерно непрекидне функције које су једнаке 0 у случају $x = y$ и $s = t$. Применом Тејлорове формуле на разлику добијају се четири суме, од којих три конвергирају ка три интеграла из формулације теореме, док четврта тежи 0. Последњи део доказа који представља прелазак са функција са компактним носачем на све функције f које припадају $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ идентичан је као и у случају претходне теореме. $\square$

Једна од основних користи Итôве формуле јесте и веза између теорије мартингала и диференцијалних једначина. Следећа лема нам даје једну такву везу, али пре него што је наведемо, морамо дефинисати појам локалног мартингала:

Дефиниција 13. Процес M_t је *локални мартингал* у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$ ако важи:

- M_t је $\{\mathcal{F}_t\}$-адаптиран
- Постоји неопадајући низ $\{\nu_k\}$ $\{\mathcal{F}_t\}$-времена заустављања такав да је $P\{\nu_k = T\} = 1$ за неко k, или $P\{\lim_{n\to\infty} \nu_k = +\infty\} = 1$, тако да је процес $M_{\min(t,\nu_k)} - M_0 := M_t^{(k)}$ $\{\mathcal{F}_t\}$ мартингал за свако k.

Напомена: Ако је X_t задат са $X_t = \int_0^T f(\omega, s) I_{[0,t]}(s) dB_s = \int_0^t f(\omega, s) dB_s$, тада за $f \in \mathcal{L}^2_{LOC}$, X_t није у општем случају мартингал, али јесте локални мартингал.

Лема 6. *Нека је* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. *Ако важи*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

тада процес $X_t = f(t, B_t)$ *представља локални мартингал. Ако даље важи*

$$E\left[\int_0^T \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\right\}^2 (t, B_t) dt\right] < \infty,$$

тада је X_t *мартингал на* $0 \le t \le T$.

1.3.5 Функције процеса, општа Итôва формула

Нека је процес X_t задат у диференцијалном облику на следећи начин

$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dB_t.$$

Тада је природно да важи:

$$\int_0^t f(\omega, s) dX_s = \int_0^t f(\omega, s) a(\omega, s) ds + \int_0^t f(\omega, s) b(\omega, s) dB_s,$$

где важи да је функција $f(\omega, t)$ адаптирана и да испуњава услове:

- $f(\omega, s)a(\omega, s) \in \mathrm{L}^1(dt)$ за све ω из скупа вероватноће 1,
- $f(\omega, s)b(\omega, s) \in \mathcal{L}^2_{LOC}$.

Питање које се интуитивно поставља: ако се процес X_t може написати у горенаведеном облику и ако је функција $g(t, y)$ глатка, да ли тада процес $Y_t = g(t, X_t)$ можемо написати као dX_t интеграл? Користећи Итôву формулу показаћемо на примерима да је могуће ако је X_t процес Брауновог кретања, а онда ћемо формулисати и теорему која даје одговор на ово питање у општем случају.

Пре примера, наведимо правило рачунања на скупу линеарних комбинација симбола dt и dB_t, које се обично назива *BoxAlgebra* таблица множења, где је са $\cdot$ означено множење симбола dt и dB_t:

$\cdot$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Тако, на пример, за процес који је дат са $dZ_t = a\ dt + b\ dB_t$ имамо да важи:

$$\begin{aligned} dZ_t \cdot dZ_t &= (a\ dt + b\ dB_t) \cdot (a\ dt + b\ dB_t) \\ &= a^2\ dt \cdot dt + 2ab\ dt \cdot dB_t + b^2\ dB_t \cdot dB_t \\ &= b^2\ dt. \end{aligned}$$

Пример 1: Нека је X_t процес Брауновог кретања са уобичајеним померајем μ и дисперзијом σ. Тада га можемо записати као стохастички интеграл или као функцију Брауновог кретања:

$$dX_t = \mu dt + \sigma dB_t, X_0 = 0 \text{ или } X_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Такође, процес $Y_t = f(t, X_t)$ можемо записати и као $Y_t = g(t, B_t)$ где је функција g дефинисана са $g(t,x) = f(t, \mu t + \sigma x)$. Примењујући Итôву формулу на $Y_t = g(t, B_t)$ добијамо:

$$dY_t = g_t(t, B_t)dt + g_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t, B_t)dt$$

Из дефиниције функције g имамо $g_t(t,x) = f_t(t, \mu t+\sigma x) + f_x(t, \mu t+\sigma x)\mu$, $g_x(t,x) = f_x(t, \mu t+\sigma x)\sigma$, $g_{xx}(t,x) = f_{xx}(t, \mu t+\sigma x)\sigma^2$, тако да dY_t у функцији од f има облик:

$$\begin{aligned} dY_t &= \{f_t(t, X_t) + \mu f_x(t, X_t)\}dt + \sigma f_x(t, X_t)dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(t, X_t)dt \\ &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(t, X_t)dt \end{aligned}$$

Ако применимо правила множења из таблице, добијамо:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t \cdot dX_t.$$

Пример 2: Нека је X_t процес геометријског Брауновог кретања, дат са $X_t = \exp(\alpha t + \sigma B_t)$. Како је X_t функција Брауновог кретања и времена, уобичајеном применом Итôве формуле дате Теоремом 18, налазимо да X_t задовољава следећи облик:

$$dX_t = \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Посматрајмо процес Y_t дефинисан изразом $Y_t = f(t, X_t)$. Као и у претходном примеру, записаћемо овај процес у облику $Y_t = g(t, B_t)$, где је $g(t,x) = f(t, \exp(\alpha t + \sigma x))$. Понављајући процес из претходног примера, добијамо:

$$g_t(t,x) = f_t(t, \exp(\alpha t + \sigma x)) + f_x(t, \exp(\alpha t + \sigma x)) \exp(\alpha t + \sigma x)\alpha,$$

$$g_x(t,x) = f_x(t, \exp(\alpha t + \sigma x)) \exp(\alpha t + \sigma x)\sigma,$$

$$g_{xx}(t,x) = \sigma^2 \exp(\alpha t+\sigma x)\{f_x(t, \exp(\alpha t+\sigma x)) + f_{xx}(t, \exp(\alpha t+\sigma x)) \exp(\alpha t+\sigma x)\}.$$

Примењујући ове једнакости и Итôву формулу за дводимензиони случај, видимо да важи:

$$\begin{aligned} dY_t &= g_t(t, B_t)dt + g_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t, B_t)dt \\ &= \{f_t(t, X_t) + \alpha X_t f_x(t, X_t)\}dt + \sigma X_t f_x(t, X_t)dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\sigma^2 X_t f_x(t, X_t) + \sigma^2 X_t^2 f_{xx}(t, X_t)\}dt \\ &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\sigma^2 X_t^2 dt \end{aligned}$$

Примењујући даље правила множења из *Box algebra* таблице множења имамо:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dX_t \cdot dX_t.$$

Уочивши резултате оба примера, видимо да решење има исти облик. То ипак није случајност, већ опште правило које важи за много ширу класу процеса од Брауновог кретања. У том смислу наводимо дефиницију и теорему:

Дефиниција 14. Процес $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ називамо *стандардни процес* ако се $\{X_t\}$ може представити преко интеграла на следећи начин:

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где су $a(\cdot,\cdot)$ и $b(\cdot,\cdot)$ мерљиви и адаптирани процеси који задовољавају следеће услове:

$$P\left(\int_0^T |a(\omega, s)|ds < \infty\right) = 1, \;\; P\left(\int_0^T |b(\omega, s)|^2 ds < \infty\right) = 1.$$

Напомена: ако применимо глатку функцију на стандардни процес, поново добијамо стандардни процес, који се може представити у облику стохастичког интеграла.

Теорема 19. *(Итôва формула за стандардни процес) Нека је дата функција $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ и нека је $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ стандардни процес који има следећи интегрални облик*

$$X_t = \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)b^2(\omega, s)ds. \end{aligned}$$

Ако бисмо на резултат теореме применили правила таблице множења, и резултат написали у облику стохастичких диференцијала, добили бисмо:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dX_t \cdot dX_t,$$

што је био и резултат оба примера.

Доказ ове теореме прати исти поступак као и доказ Итôве формуле за најједноставнију класу функција, стога га нећемо изводити.

Намеће се потреба за дефинисањем функције више процеса, односно за још општијим обликом Итôве формуле. Да бисмо могли да наведемо теорему које дефинише тај облик, морамо прво проширити нашу *BoxAlgebra* таблицу множења:

$\cdot$	dt	dB_t^1	dB_t^2
dt	0	0	0
dB_t^1	0	dt	0
dB_t^2	0	0	dt

Теорема 20. *(Итôва формула за два стандардна процеса) Нека је дата функција $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ и нека су $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ и $\{Y_t : 0 \leq t \leq T\}$ два стандардна процеса следећих интегралних облика*

$$X_t = \int_0^t a(\omega, s)ds + \int_0^t b(\omega, s)dB_s,$$
$$Y_t = \int_0^t \alpha(\omega, s)ds + \int_0^t \beta(\omega, s)dB_s.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = f(0,0) &+ \int_0^t f_x(X_s, Y_s)dX_s + \int_0^t f_y(X_s, Y_s)dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(X_s, Y_s)b^2(\omega, s)ds \\ &+ \int_0^t f_{xy}(X_s, Y_s)b(\omega, s)\beta(\omega, s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t f_{yy}(X_s, Y_s)\beta^2(\omega, s)ds. \end{aligned}$$

Резултат теореме записан у облику стохастичких диференцијала изгледа овако:

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) &= f_x(X_t, Y_t)dX_t + f_y(X_t, Y_t)dY_t \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(X_t, Y_t)dX_t \cdot dX_t + f_{xy}(X_t, Y_t)dX_t \cdot dY_t + \frac{1}{2}f_{yy}(X_t, Y_t)dY_t \cdot dY_t. \end{aligned}$$

1.4 Стохастичке диференцијалне једначине

1.4.1 Увод и примери

Скоро сви непрекидни стохастички процеси који се могу применити у реалном животу имају следећи облик:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Такве *стохастичке диференцијалне једначине (СДЈ)* пружају веома погодно окружење за конструкцију и анализу стохастичких модела. Како се коефицијенти једначине μ и σ могу посматрати као мере краткорочног раста и промењљивости, моделовање већ има спреман поступак за конструкције процеса који одражавају понашања у реалном животу. СДЈ нам такође пружају везу између теорије вероватноће и обичних и парцијалних дифе-ренцијалних једначина.

У даљем раду ће прво бити представљене три специфичне СДЈ које имају велику практичну примену и биће приказано налажење експлицитних решења ових једначина, а затим ћемо навести основну теорему о постојању и јединствености решења посматране СДЈ.

Пример 1: Геометријско Брауново кретање

Једна од најприроднијих и најважнијих СДЈ дата је у следећем облику:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,$$

где је $X_0 = x_0 > 0$, а коефицијенти су константе за које важи $-\infty < \mu < \infty$ и $\sigma > 0$. Интуиција којом се долази до ове једначине налаже да X_t представља понашање краткорочног раста и неодређености, тако да се управо ова СДЈ често користи у примени на финансијске моделе. Како нам је овај израз од раније познат као Геометријско Брауново кретање, могли бисмо ту чињеницу искористити за његово решавање, али ћемо, ипак, до решења доћи помоћу систематичнијег приступа. Пошто је Итôва формула алат који бисмо могли да применимо, очигледно је да ћемо тражити решење једначине у облику $X_t = f(t, B_t)$. Применом поменуте формуле, имамо:

$$dX_t = \left\{ f_t(t, B_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, B_t) \right\} dt + f_x(t, B_t) dB_t,$$

Сада се решавање СДЈ своди на тражење функције $f(t, x)$ која задовољава следеће две једначине добијене изједначавањем коефицијената полазне СДЈ и претходног израза:

$$\mu f(t, x) = f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x), \quad \sigma f(t, x) = f_x(t, x).$$

Друга једначина се може записати у облику $\dfrac{f_x}{f} = \sigma$, а решење ове ДЈ је дато са $f(t, x) = \exp(\sigma x + \varphi(t))$, где је $\varphi(\cdot)$ произвољна функција. Када ово решење уврстимо у прву једначину, видимо да функција φ мора да задовољава услов $\varphi'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$. Интеграљењем тог израза и узимајући у обзир почетни услов $X_0 = x_0$, добијамо решење једначине у следећем облику:

$$X_t = x_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \right).$$

У овом тренутку, не можемо искључити могућност да је могуће још неко решење овде СДЈ, али ћемо ускоро доказати да је наведени резултат јединствен. Такође, ово решење представља Геометријско Брауново кретање и представља најшире примењивани процес у финансијској математици и економији.

Пример 2: Орнштајн-Уленбеков процес $(Ornstein - Uhlenbeck)$

Изједначавање коефицијената примењено у претходном примеру је често веома корисно, али може бити и потпуно неупотребљиво чак и за једноставне случајеве СДЈ. Овај пример то и илуструје, али показује и алтернативан начин за решавање. СДЈ коју ћемо решавати у овом примеру има облик:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t,$$

где је $X_0 = x_0$, и где су α и σ позитивне константе. Фактор помераја $-\alpha X_t dt$ у овој једначини је негативан када је $X_t > 0$ односно позитиван за

$X_t < 0$, стога иако ће процес увек осциловати на случајан начин, можемо очекивати да ће се X_t увек враћати ка нули. Даље, како је параметар уз dB_t константа (за разлику од геометријског Брауновог кретања), очекујемо да X_t осцилира интезивно, чак и када је близу нуле. Као последица овога, такође очекујемо да X_t често мења знак, за разлику од геометријског Брауновог кретања, које никада не прелази нулу. Овај модел је постао познат 1931. године када су двојица физичара - Орнстајн и Уленбек проучавали понашање гасова односно брзину појединачних молекула гаса. Што се тиче примене у финансијској математици, овај процес је користио Васичек ($O.Vasicek$) у једном од првих стохастичких модела за кретање каматних стопа. У тој примени, требало је да одражава одступање каматне стопе у односу на дату фиксирану стопу. Нама је модел занимљив јер иако има једноставно решење, оно није облика $f(t, B_t)$. Ако покушамо да применимо метод изједначавања коефицијената, нећемо успети да то урадимо. Ипак, постоји начин да овај приступ ипак учинимо корисним - једноставно нам је потребна шира класа процеса у којој желимо да вршимо изједначавање. Ако посматрамо једначину У-О процеса, можемо посумњати да се ради о Гаусовом процесу и водећи се ранијим сазнањима можемо потражити решење једначине као Итôв интеграл неслучајне функције. Ово неће бити потпуно успешно, али нас размишљање у том смеру може довести до решења. У смислу тражења облика решења О-У једначине, посматрајмо процесе који су производ Гаусовог и неслучајног процеса, дакле и даље Гаусов процес који има облик:

$$X_t = a(t)\left\{x_0 + \int_0^t b(s)dB_s\right\},$$

где су $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ диференцијабилне функције. Диференцирањем овог израза добија се:

$$dX_t = a'(t)\left\{x_0 + \int_0^t b(s)dB_s\right\}dt + a(t)b(t)dB_t.$$

Ако претпоставимо да је $a(0) = 1$ и $a(t) > 0$ за свако $t \geq 0$, онда је Гаусов процес X_t решење следеће СДЈ:

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)}X_t dt + a(t)b(t)dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Однос између два облика за dX_t Гаусовог процеса даје нам начин за решавање скоро сваке СДЈ чији је коефицијент померaја линеарна комбинација од X_t и чији коефицијент уз dB_t зависи само од t. Овај начин ћемо применити у овом и у следећем примеру Брауновог моста.

Пређимо сада на решавање изједначавањем коефицијената дате СДЈ и претходне једначине. Добијамо две једноставне ДЈ:

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha, \quad a(t)b(t) = \sigma.$$

Јединствено решење прве једначине са $a(0) = 1$ је $a(t) = \exp(-\alpha t)$, тако да из друге добијамо $b(t) = \sigma \exp(\alpha t)$. Следи да је решење:

$$X_t = e^{-\alpha t}\left\{x_0 + \sigma\int_0^t e^{\alpha s}dB_s\right\} = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dB_s.$$

Ако посматрамо решење које смо добили, можемо закључити неколико ствари. Прво, видимо да када $t \to \infty$, тада утицај почетне вредности x_0 експоненцијално опада. Затим, како је $E(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$, видимо да и $E(X_t)$ брзо тежи нули, са порастом t. Најзад, користећи Итôву изометрију да израчунамо диперзију од X_t добијамо:

$$Var(X_t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left\{1 - e^{-2\alpha t}\right\} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Како је dB_t интеграл неслучајне функције Гаусов процес, закључујемо да О-У процес експоненцијално тежи ка нормалној расподели са очекивањем 0 и дисперзијом $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$.

Пример 3: Браунов мост

После конструкције и испитивања неких особина Брауновог моста у поглављу 1.1.4, закључили смо да је то Гаусов процес $\{X_t\}$ дефинисан на интервалу $[0,1]$ такав да $Cov(X_s, X_t) = s(1-t)$ за $0 \le s \le t$. Такође смо видели да се може представити у облику $X_t = B_t - tB_1$ за $0 \le t \le 1$ и да се може посматрати као процес Брауновог кретања који се враћа у 0 у време $t = 1$. Сада ћемо се уверити да нам Итôва интеграција даје начин представљања Брауновог моста који нам помаже да разумемо природу процеса и разлог због ког се враћа у нулу. Нека је $t \in (0,1)$ и нека је X_t вредност процеса у тренутку t. Поставља се питање - какав би померај овај процес требало да има тако да буде присиљен да се врати у 0 у време 1? Да би то било испуњено, процес мора из X_t до 0 доћи за преостало време $1-t$, тако да померај задајемо на природан начин у облику $-X_t/(1-t)$, па ако то запишемо у облику СДЈ, имамо:

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Доказаћемо да постоји јединствено решење ове једначине као и да оно представља процес Брауновог моста. Применимо метод поменут у претходном примеру:

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = -\frac{1}{1-t}, \quad a(t)b(t) = 1,$$

одакле налазимо да је $a(t) = 1 - t$ и $b(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Дакле, добијамо решење облика:

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s, \quad \forall t \in [0,1).$$

Како смо добили интеграл од неслучајне функције, имамо да је процес Гаусов, а видимо и да важи $E(X_t) = 0$ за $t \in [0,1)$. Да бисмо се уверили да овај процес представља процес Брауновог моста, потребно је још одредити вредност коваријације. Нека је $0 \le s \le t$, тада имамо:

$$Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) = (1-s)(1-t)E\left[\int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u \int_0^t \frac{1}{1-v} dB_v\right].$$

Ако други интеграл представимо као збир два интеграла $\int_0^s$ и $\int_s^t$, тада из независности интеграла имамо:

$$E\left[\int_0^s \frac{1}{1-u}dB_u \int_s^t \frac{1}{1-v}dB_v\right] = 0,$$

а применом Итôве изометрије добијамо:

$$E\left[\left(\int_0^s \frac{1}{1-u}dB_u\right)^2\right] = \int_0^s \frac{1}{(1-u)^2}du = \frac{s}{1-s}.$$

Видимо да смо дошли до очекиваног резултата:

$$Cov(X_s, X_t) = s(1-t).$$

1.4.2 Теорема о постојању и јединствености решења

Теорема 21. (Постојање и јединственост решења) *Нека коефицијенти стохастичке диференцијалне једначине*

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0, \ 0 \leq t \leq T,$$

задовољавају Липшицов (R.Lipschitz) услов

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2, \quad K > 0,$$

и услов рестрикције раста:

$$|\mu(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2), \quad K > 0.$$

Тада постоји непрекидно адаптирано решење X_t дате стохастичке диференцијалне једначине, које је равномерно ограничено у $L^2(dP)$:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left(X_t^2\right) < \infty.$$

Даље, ако су X_t и Y_t оба непрекидна и L^2-ограничена решења дате СДЈ, важи:

$$P\left(X_t = Y_t, \ \forall t \in [0,T]\right) = 1.$$

Доказ се може пронаћи у [3] стр 142.-148.

1.4.3 Системи СДЈ

Да је теорија ДЈ остала ограничена на једну димензију, не бисмо имали авионе, радио, телевизију, навођење ракета, итд. На срећу, она се проширила на системе једначина, а исто тврђење природно важи и за стохастичке ДЈ. Како би обележавање остало приближно исто оном из једне димензије, системе СДЈ често записујемо у облику:

$$d\vec{X}_t = \vec{\mu}(t, \vec{X}_t)dt + \sigma(t, \vec{X}_t)d\vec{B}_t, \quad \vec{X}_0 = \vec{x}_0,$$

где су

$$\vec{\mu}(t,\vec{X}_t)=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_d\end{bmatrix},\quad d\vec{B}_t=\begin{bmatrix}d\vec{B}_t^1\\ d\vec{B}_t^2\\ \vdots\\ d\vec{B}_t^d\end{bmatrix},\quad \sigma(t,\vec{X}_t)=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1d}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2d}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{d1} & \sigma_{d2} & \dots & \sigma_{dd}\end{bmatrix},$$

где због скраћеног записа користимо $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(t,\vec{X}_t)$ и $\mu_i=\mu_i(t,X(t))$.

Основна теорема о јединствености и постојању решења СДЈ проширује се и на систем СДЈ без битнијих промена.

Пример: Брауново кретање по кружници

Нека су $X_t=\cos(B_t)$ и $Y_t=\sin(B_t)$. Тада је дводимензионални процес (X_t,Y_t) познат као Брауново кретање по кружници. Систем СДЈ који се односи на овај процес, дат је са:

$$dX_t=-\sin(B_t)dB_t-\frac{1}{2}\cos(B_t)dt=-Y_tdB_t-\frac{1}{2}X_tdt$$
$$dY_t=\cos(B_t)dB_t-\frac{1}{2}\sin(B_t)dt=X_tdB_t-\frac{1}{2}Y_tdt,$$

или у матричном облику:

$$d\begin{bmatrix}X_t\\ Y_y\end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}X_t\\ Y_y\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}-Y_t & 0\\ X_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dB_t^1\\ dB_t^2\end{bmatrix}.$$

Видимо да у овом примеру друго Брауново кретање нема велику улогу у процесу. Разлог је то што је Брауново кретање по кругу практично једнодимензиони процес који се одвија у $\mathbb{R}^2$.

Глава 2

Примена СДЈ у финансијској математици

2.1 Финансијски деривати - опције

2.1.1 Дефиниција, елементи и врсте опција

У овом поглављу ћемо навести основне појмове из финансијске математике на које ћемо применити досадашња тврђења из области случајних процеса. Објаснићемо и њихове особине које ће нам бити од користи у даљем раду.

Портфолио је колекција вредносних папира које неко поседује. Није исправно рећи да је портфолио скуп вредносних папира, јер неко може да поседује више истих вредносних папира. Вредност портфолија је линеарна комбинација вредности појединачних вредносних папира. Финансијски деривати су вредносни папири чија вредност зависи од вредности неких других вредносних папира које ћемо звати подлога (на енглеском *underlying asset*). Најпознатија врста финансијских деривата су опције, а најзаступљенија подлога су акције. Акценат наше примене СДЈ биће на одређивању модела који се односи на вредност опција, па ћемо у том смислу навести основне врсте опција и њихове особине.

Дефиниција 15. *Опција* је финансијски уговор којим се стиче право, али не и обавеза да се купи или прода подлога (акција), под договореним условима.

Услови на којима се заснива уговор су:

- уговорена цена (цена по истеку или на доспећу) вредносног папира на који се опције односе,
- уговорено време до истека опције.

У односу на то да ли се опција односи на куповину или продају вредносног папира, разликујемо две врсте опција:

- кол опција (*call option*) - даје право али не и обавезу куповине вредносног папира по унапред договореној цени K,

- пут опција (*put option*) - даје право али не и обавезу продаје вредносног папира по унапред договореној цени K.

У односу на могуће време извршења опције, такође постоји основна подела на две врсте:

- европске - могу се активирати само у уговорено време T,
- америчке - могу се активирати у било ком тренутку до уговореног времена T, као и у само време T,

Опције које нису класичне пут и кол називају се егзотичне опције. Особа која продаје опцију се на енглеском назива "*the writter*" и за њу се каже да је у краткој позицији (*short position*), док се особа која купује опцију назива "*the holder*" и за њу се каже да је у дугој позицији (*long position*). Ризици при склапању уговора су различити у зависности од позиције - купац (*holder*) ризикује само оно што је платио за опцију, док продавац (*writter*) може имати много већи губитак (јер је принуђен да купи или прода акцију на основу уговора, без обзира на њену тренутну вредност). За опције које доносе добитак ако се активирају кажемо да су "у новцу" (*in the money*), а за оне које нису исплативе кажемо да су "ван новца" (*out of money*). Ако је опција на граници исплативости, онда је "на новцу" (*on the money*).

Наведимо сада уобичајене ознаке поменутих и неких нових појмова које ћемо користити даље у раду када је реч о опцијама:

- S_0 - садашња цена акције
- K - уговорена цена акције (*strike price*, *exercise price*)
- T - време до истека опције (*time to maturity*, *strike time*, *exercise time*)
- S_T - цена акције на истеку опције
- S_t - цена акције у тренутку t, $0 \leq t \leq T$
- $r > 0$ - каматна стопа која се непрекидно обрачунава
- c - вредност једне европске кол опције
- p - вредност једне европске пут опције
- C - вредност једне америчке кол опције
- P - вредност једне америчке пут опције
- D - дивиденда
- σ - волатилност акције (вредносног папира)

Такође, напоменимо да у преосталом делу рада подразумевамо следеће:

- Не постоје трошкови новчаних трансакција;
- Све подлеже истој каматној стопи;
- Позајмице и улози у банку имају исту каматну стопу, и увек можемо да купимо или продамо акцију или опцију коју желимо по тржишној цени;
- Не постоји арбитража, тј. прављење сигурног профита без ризика.

2.1.2 Особине и вредност опција

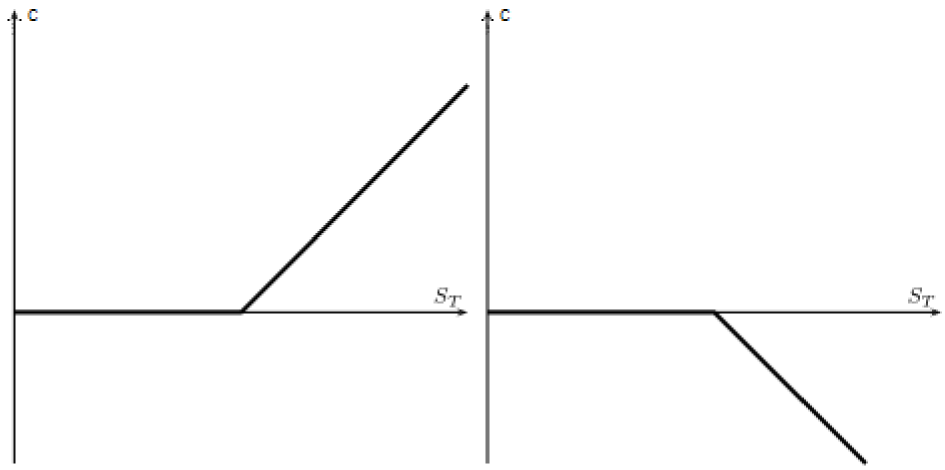
У овом поглављу ћемо се бавити појмом вредности опција у тренутку истека опције, факторима који утичу на цену опција као и границама за цене опција, у случају без или са дивидендама. Почећемо од вредности европских опција. Ако важе уведена нотација и претпоставке, одредимо:

Вредност европске кол опције у тренутку истека T

У тренутку T разликујемо два могућа случаја. Ако је $S_T < K$, вредност опције је нула, јер није исплативо купити опцију за договорену цену K ако је тржишна цена S_T нижа и тада је купац опције ван новца. Ако, пак, важи обрнуто, $K < S_T$, тада се исплати купити опцију по договореној цени, јер је онда можемо продати по тржишној цени која је виша и тиме остварити добит од $S_T - K$, односно купац је у новцу. Одавде следи да је вредност европске кол опције c у тренутку истека T дата следећим изразом:

$$c = \max\{S_T - K, 0\}.$$

На следећим графицима приказане су дуга и кратка позиција за европску кол опцију:

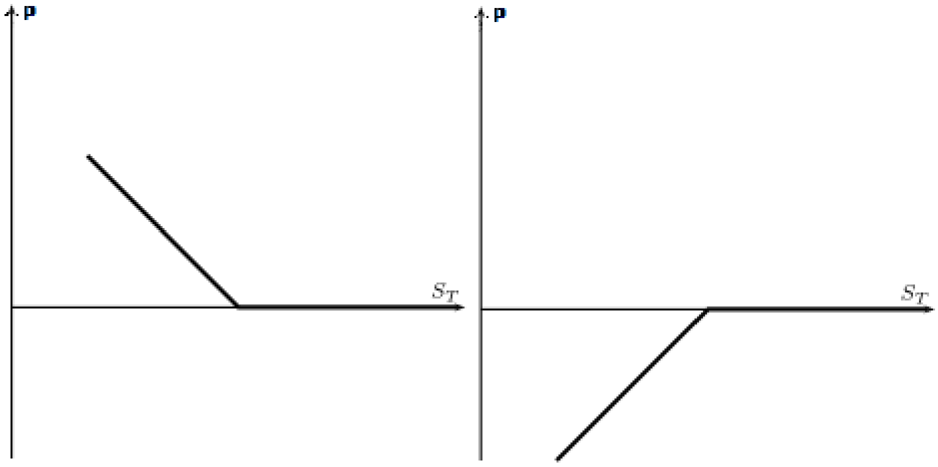


Вредност европске пут опције у тренутку истека T

У случају пут опције, такође имамо два случаја у тренутку T, али вредност се рачуна на супротан начин. Наиме, ако је $S_T > K$, није исплативо продавати акцију по уговореној цени K јер је тржишна вредност већа од уговорене, па је и вредност пут опције једнака нули, односно ван новца смо. У случају када је $K > S_T$, исплативо је продати акцију по уговореној цени K, која је већа од тржишне, дакле вредност пут опције једнака је добити која може бити остварена $K - S_T$, тј. у новцу смо. Стога имамо:

$$p = \max\{K - S_T, 0\}.$$

Исти резултат приказан графиком у односу на дугу и кратку позицију:



Са датих графика се може закључити да је за онога ко је продао кол опцију потенцијални губитак неограничен, док је за онога ко прода пут опцију, потенцијални губитак ограничен.

Фактори који утичу на вредност опција

У следећој табели су представљени фактори који утичу на вредност опција:

Фактор	Европска кол	Европска пут	Америчка кол	Америчка пут
Почетна цена акције	+	-	+	-
Уговорена цена	-	+	-	+
Време до истека опције	?	?	+	+
Волатилност	+	+	+	+
Каматна стопа	+	-	+	-
Дивиденде	-	+	-	+

Прва два фактора смо већ објаснили, а сада ћемо дати кратко објашњење и за преостала четири:

- *Време до истека опције* - Код америчких и пут и кол опција, власник опције која има дужи рок трајања има све бенефиције као и власник опције која ће истећи раније, с тим што има и додатно време у ком може активирати опцију, одакле следи да вредност опције расте са порастом времена. Код европских опција, то није увек случај.

- *Волатилност акције* - Овај фактор представља меру неодређености у будућем кретању вредности акција, стога је логично да како расте волатилност, расте и вредност опције, јер се повећава могућност да се вредност акције промени.

- *Каматна стопа* - Овде ћемо посматрати изоловано дејство каматне стопе на вредност опције, односно да остали праметри остају непромењени док се каматна стопа мења, иако је у реалности та ситуација немогућа. Када каматне стопе расту, очекивана добит од акције такође расте. Међутим, опада садашња вредност било ког будућег тока новца који ће власник опције добити. Комбиновани утицај ова два ефекта утиче на смањење вредности пут опција и повећање вредности кол опција.

- *Дивиденде* - оне утичу на смањење цене акције, стога утичу и на пораст вредности пут опција, односно пад вредности кол опција.

Пут-кол паритет

Пут-кол паритет је веза између вредности европских пут и кол опција које имају исту уговорену цену, време до доспећа и подлогу (акцију). Из те везе следи да ако су познати горенаведени параметри, каматна стопа, почетна и уговорена цена акције, знајући вредност једне од опција, можемо израчунати и вредност друге. У том смислу ћемо навести две теореме, у зависности од тога да ли је реч о опцијама са дивидендама или не.

Теорема 22. (Пут-кол паритет за европске опције без дивиденди) *За европске пут и кол опције без дивиденди, које имају исту уговорену цену, односе се на исту акцију, имају исту каматну стопу и време до доспећа, важи пут-кол паритет:*

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

Доказ. Посматраћемо два портфолиа А и Б:

- Портфолио А: 1 кол опција и кеш у износу од Ke^{-rT},

- Портфолио Б: 1 пут опција и 1 акција на коју се та опција односи.

Прво ћемо израчунати вредност портфолиа А - износ Ke^{-rT} уложен у банку током интервала дужине T порасте до K. Такође, ако на истеку интервала важи $S_T \geq K$, активираће се опција да се купи акција по цени K, а акција вреди S_T, дакле цео портфолио вреди S_T у тренутку T. Ако је пак на истеку опције $S_T < K$, кол опција је безвредна и не активира се, па цео портфолио вреди K. Дакле, у тренутку T, портфолио A вреди $\max(S_T, K)$. Што се тиче вредности портфолиа Б - ако је на истеку интервала $S_T < K$, активира се пут опција из портфолиа Б и продаје се једна акција по цени од K. У том случају, вредност портфолиа је K. А ако је $S_T > K$, пут опција је безвредна, па је вредност портфолиа у том случају једнака S_T. Стога, и портфолио Б у тренутку T вреди $\max(S_T, K)$. Из чињенице да у тренутку T оба портфолиа имају једнаке вредности и из задате претпоставке да не постоји могућност арбитраже, закључујемо да два портфолиа А и Б имају исте вредности и у почетном тренутку, чиме је доказ теореме завршен. □

Теорема 23. (Пут-кол паритет за европске опције са дивидендом) *За европске пут и кол опције са дивидендом, које имају исту уговорену цену, односе се на исту акцију, имају исту камату и време доспећа, важи пут-кол паритет:*

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

Доказ. Размотрићемо два портфолиа као и у доказу претходне теореме:

- Портфолио А: 1 кол опција и кеш у износу од $D + Ke^{-rT}$,

- Портфолио Б: 1 пут опција и 1 акција на коју се та опција односи.

Ако тренутку T важи $S_T \geq K$ вредност портфолиа A једнака је $S_T - K + (D + Ke^{-rT})e^{rT} = S_T + De^{rt}$. А ако је $S_T < K$, вредност портфолиа A је

$(D + Ke^{-rT})e^{rT} = K + De^{rt}$. Што се тиче портфолиа Б, ако је $S_T \geq K$, пут опција је безвредна, па је вредност портфолиа Б једнака $S_T + De^{rt}$. А ако је $S_T < K$, вредност портфолиа је $K - S_T + S_T + De^{rt} = K + De^{rt}$. Видимо да у тренутку доспећа, оба портфолиа имају исту вредност, па одатле следи да имају исту вредност и у почетном тренутку. □

Границе за вредности опција

Сада ћемо без доказа навести нека битна тврђења у вези са вредностима европских и америчких опција (са и без дивиденди). Докази датих неједнакости се могу наћи у [4].

- Ни америчка, ни европска кол опција не могу да вреде више него одговарајућа акција, односно $C \leq S_0, \;\; c \leq S_0$;
- Ни америчка, ни европска пут опција не могу да вреде више од уговорене цене K, тј. $P \leq K, \;\; p \leq K$;
- За европске кол опције без дивиденди, доња граница је дата изразом
$$c \geq S_0 - Ke^{-rT};$$
- За европске пут опције без дивиденди, доња граница је дата изразом
$$p \geq Ke^{-rT} - S_0;$$
- За европске кол опције са дивидендом, доња граница је дата изразом
$$c \geq S_0 - D - Ke^{-rT};$$
- За европске пут опције са дивидендом, доња граница је дата изразом
$$p \geq D + Ke^{-rT} - S_0;$$
- Кол опцију америчког типа без дивиденди, никада не треба активирати пре времена истека;
- Важе следеће неједнакости за америчке опције без дивиденди:
$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT};$$
- Важе следеће неједнакости за америчке опција са дивидендом:
$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$

Мотив

Кључно питање које следи из свих наведених особина опција јесте - колико купац опције треба да плати за опцију? Другим речима, како прецизно израчунати фер цену вредности опције? Одговор на ово питање у случају европских пут и кол опција ће дати управо теорија стохастичких диференцијалних једначина и то помоћу познатог Блек-Шолц ($Black - Scholes$) модела.

2.2 Примена Блек-Шолцовог модела на израчунавање вредности европских опција

2.2.1 Блек-Шолцова ПДЈ

Пре него што пређемо на тврђење којим ћемо доћи до експлицитног израза за цену европских пут и кол опција, у овом поглављу ћемо навести потребне претпоставке и доћи до облика парцијалне диференцијалне једначине чије је експлицитно решење одговор на наше питање. Неке од претпоставки смо већ наводили, али ћемо их ипак поновити. Дакле, претпоставимо да важи следеће:

- Кретање цене акције прати геометријско Брауново кретање дато изразом
$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t); \tag{2.1}$$
- Безризична каматна стопа r и мера неодређености (волатилност) акције σ су константе познате током целог трајања опције;
- Не постоје трошкови новчаних трансакција;
- Не постоје дивиденде на дату акцију током целог трајања опције;
- Арбитража није могућа;
- Куповина или продаја акција је увек могућа;
- 'Кратко продавање' (*short selling*) је могуће и опције су дељиве.

Претпоставимо сада да имамо кол или пут опцију чија вредност $V(S,t)$ зависи само од $S(t) = S$ и t. Примењујући Итôву формулу, добијамо:

$$dV(S,t) = \left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V(S,t)}{\partial S}dB(t). \tag{2.2}$$

Добијени израз представља СДЈ за вредност опције V. Приметимо да је неопходна претпоставка да V има непрекидан други извод по S и први по t.
Конструишимо сада портфолио који ће се састојати од једне опције и од $-\Delta$ акција које ће бити подлога за ту опцију. Δ представља број, који за сада није одређен. Вредност портфолиа дата је следећим изразом:

$$\Pi(S,t) = V(S,t) - \Delta S. \tag{2.3}$$

Промена вредности овог портфолиа у једној јединици времена износи:

$$d\Pi(S,t) = dV(S,t) - \Delta dS.$$

Примећујемо да је овде Δ фиксирано, јер да није тако, израз $d\Pi$ би садржао и компоненту $d\Delta$. Обједињавајући изразе (2.1), (2.2) и (2.3) у један, налазимо да је Π Итôв процес, облика следећег стохастичког диференцијала:

$$\begin{aligned} d\Pi(S,t) = &\left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} - \mu\Delta S\right)dt \\ &+ \sigma S\left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} - \Delta\right)dB(t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Како бисмо уклонили случајан фактор $B(t)$ из добијене једнакости, дефинисаћемо:

$$\Delta = \frac{\partial V(S,t)}{\partial S}, \tag{2.5}$$

добијајући тиме портфолио чија је промена у времену потпуно неслучајна, односно одређена изразом:

$$d\Pi(S,t) = \left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} \right) dt. \tag{2.6}$$

Искористићемо сада претпоставке из финансијске математике о непостојању арбитраже и закону понуде и потражње, са претпоставком да трошкови трансакција не постоје. Када бисмо своту Π уложили у безризичне вредносне папире, сума би за време dt порасла за $r\Pi dt$. Ако би десна страна једнакости (2.6) била већа од овог износа, могао би се остварити безризични профит позајмљивањем суме Π и улагањем у овај портфолио. Добит портфолиа би била већа од трошка позајмљивања. Обрнуто, ако би десна страна израза (2.6) била мања него $r\Pi dt$, тада би се могло из портфолиа узети износ Π и уложити у банку, опет остварујући безризичан профит. Стога можемо закључити да је у смислу избегавање арбитраже и остваривања безризичног профита, неопходно да важи:

$$r\Pi(S,t)dt = \left(\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} \right) dt. \tag{2.7}$$

Заменом једнакости (2.3) и (2.5) у (2.7) и дељењем целог израза са dt, добијамо:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} - rV(S,t) = 0. \tag{2.8}$$

Израз (2.8) представља *парцијалну диференцијалну једначину (ПДЈ) Блек-Шолца*. Пре него што наставимо даље, приметимо да израз (2.8) не садржи параметар раста μ. Једини праметар из израза за цену акције (2.1) који утиче на цену опције јесте волатилност σ. Последица овога је да се процене за μ двеју особа могу разликовати, а да се оне опак могу сложити око цене опције.

Парцијална диференцијална једначина Блек-Шолца неће имати јединствено решење ако не узмемо у обзир последњи услов. Ако је реч о европским кол опцијама, чија је вредност обележена са $c(S,t)$ уместо $V(S,t)$, са уговореном ценом K и временом истека T, последњи услов за ПДЈ јесте израз који смо већ доказали:

$$c(S,T) = \max(S-K, 0). \tag{2.9}$$

У случају европске пут опције уз обележавање вредности опције са $p(S,t)$ уместо $V(S,t)$, овај последњи услов има облик:

$$p(S,T) = \max(K-S, 0). \tag{2.10}$$

2.2.2 Формула Блек-Шолца

У претходном поглављу смо показали да ако кретање цене акције прати геометријско Брауново кретање (2.1), тада вредност европске кол опције $c(S,t)$ на акције S у времену t задовољава ПДЈ Блек-Шолца (2.8) за $S>0$ и $t \in [0,T]$, где је r безризична каматна стопа, а σ представља неодређеност односно волатилност. Даље, вредност у времену истека T представља последњи услов. Да бисмо дошли до експлицитног израза вредности европске кол опције, потребно је да решимо ПДЈ (2.8) са условом (2.9).

Теорема 24. (Формула Блек-Шолца за европске кол опције) *Експлицитно решење ПДЈ (2.8) дато је са*

$$c(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{2.11}$$

где је N функција густине стандардне нормалне расподеле

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

а коефицијенти d_1 и d_2 су дати са

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

и

$$d_2 = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Доказ. Нека су дати $S>0$ и $t \in [0,T]$. Задајмо СДЈ на следећи начин:

$$dx(u) = rx(u)du + \sigma x(u)dB(u), \quad t \le u \le T, \tag{2.12}$$

са почетном вредности $x(t) = S$ за $u = t$. У поглављу 1.4 смо већ наводили овај облик СДЈ, показујући тада да он има експлицитно решење, и да је оно облика:

$$x(T) = S\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(B(T) - B(t))\right]. \tag{2.13}$$

Дефинишимо сада $C^{2,1}$-функцију

$$V(x,u) = c(x,u)e^{r(T-u)}, \quad (x,u) \in (0,\infty) \times [t,T],$$

где функција $c(x,u)$ задовољава ПДЈ Блек-Шолца (2.8):

$$\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + rx\frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0. \tag{2.14}$$

Израчунајмо

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \left(\frac{\partial c}{\partial u} - rc\right)e^{r(T-u)}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial x}e^{r(T-u)}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}e^{r(T-u)}.$$

Користећи Итôву формулу, добијамо:

$$\begin{aligned} dV(x(u),u) &= \left[\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial u} + \frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x} rx(u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(x(u),u)}{\partial x^2}\sigma^2 x^2(u)\right] du \\ &+ \frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u) dB(u) \\ &= e^{r(T-u)}[\frac{\partial c(x(u),u)}{\partial u} - rc(x(u),u) + rx(u)\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 x^2(u)\frac{\partial^2 V(x(u),u)}{\partial x^2}]du \\ &+ \sigma x(u) e^{r(T-u)\frac{\partial c(x(u),u)}{\partial x}} dB(u). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Примењујући једнакост (2.14), видимо да важи

$$dV(x(u),u) = \frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u) dB(u).$$

Интеграљењем обе стране у границама од t до T, налазимо:

$$V(x(T),T) - V(x(t),t) = \int_t^T \frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u) dB(u).$$

Примењујући математичко очекивање на леву и десну страну и користећи својства Итôвог интеграла, добијамо:

$$EV(x(T),T) - EV(x(t),t) = 0.$$

Приметимо да важи:

$$V(x(T),T) = c(x(T),T) = \max\{x(T) - K, 0\},$$

и

$$V(x(t),t) = c(x(t),t)e^{r(T-t)} = c(S,t)e^{r(T-t)}.$$

Одатле,

$$E\left[\max(x(T) - K, 0)\right] - c(S,t)e^{r(T-t)} = 0,$$

односно,

$$c(S,t) = e^{-r(T-t)}E\left[\max\{x(T) - K, 0\}\right].$$

Из резултата у претходном делу рада, односно из једнакости (2.13) имамо:

$$\log(x(T)) = \log S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(B(T) - B(t)) \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2),$$

где је

$$\hat{\mu} = \log(S) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \quad \hat{\sigma} = \sigma\sqrt{T-t}.$$

Стога,

$$Z := \frac{\log(x(T)) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

одакле је

$$x(T) = e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z}.$$

Даље, ако је $x(T) - K \geq 0$, тада $e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z} \geq K$, односно

$$Z \geq \frac{\log(K) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}.$$

Тада

$$\begin{aligned} E\left[\max\{x(T)-K,0\}\right] &= E\left[\max\{e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z}-K,0\}\right] \\ &= \int_{\frac{\log(K)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}}^{\infty} \left(e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z}-K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz. \end{aligned}$$

Рачунајући добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\log(K)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} &= \frac{\log(K)-\log(S)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{\log(S/K)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -d_2. \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} E\left[\max\{x(T)-K,0\}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}\left(e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z}-K\right)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z-\frac{1}{2}z^2}dz - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Али,

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = N(d_2), \tag{2.17}$$

док је

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z-\frac{1}{2}z^2}dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2-\frac{1}{2}(z-\hat{\sigma})^2}dz \\ &= \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(z-\hat{\sigma})^2}dz = \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(d_2+\hat{\sigma})}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2+\hat{\sigma}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}N(d_2+\hat{\sigma}) \\ &= \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}N(d_1), \end{aligned} \tag{2.18}$$

јер је $d_2 + \hat{\sigma} = d_1$. Када ставимо (2.17) и (2.18) у (2.16) добијамо:

$$E\left[\max\{x(T)-K,0\}\right] = \frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}N(d_1) - KN(d_2).$$

Заменом у (2.15) имамо:

$$\begin{aligned} c(S,t) &= e^{-r(T-t)}\left(e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}N(d_1)-KN(d_2)\right) \\ &= N(d_1)\exp\left[-r(T-t)+\log(S)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right] \\ &- Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2). \end{aligned}$$

□

Сада када имамо формулу за израчунавање вредности европске кол опције, лако можемо добити одговарајућу формулу за цену европске пут опције. Нека је $p(S,t)$ вредност европске пут опције која се односи на акцију S у времену t. Вредност ове опције у време истека дато је формулом $p(S,t) = \max(K - S, 0)$. Ако применимо пут-кол паритет, добијамо следећи израз:

$$p(S,t) = Ke^{-r(T-t)} + c(S,t) - S.$$

Када ставимо тај израз у (2.11) добијамо:

$$\begin{aligned} p(S,t) &= Ke^{-r(T-t)} + SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S \\ &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned}$$

Исти закључак формулисан је у виду следеће теореме:

Теорема 25. (Формула Блек-Шолца за европске пут опције) *Вредност европске пут опције која се односи на акцију S у време t дата је следећим изразом:*

$$p(S,t) = KN(-d_2)e^{-r(T-t)} - SN(-d_1),$$

где коефицијенти d_1 и d_2 имају исти облик као и пре.

Пример примене Блек-Шолц модела на реалне податке:
(алат коришћен за рачунање - Microsoft Excel)

Блек-Шолц модел

Променљиве	***Вредности***
Садашња цена акције S0	3.44
Уговорена цена акције K	3.5
Време до истека опције T (у годинама)	2
Каматна стопа r	3.66%
Стандардна девијација сигма	62.00%

Израчунате вредности	
Садашња вредност уговорене цене K (PV)	3.2530
σ*t^.5	0.8768
Коефицијент d1	0.5022
Коефицијент d2	-0.3746
N(d1) функција стандардне нормалне расподеле	0.6922
N(d2)*PV	1.1514

Вредност европске кол опције	**1.2298**
Вредност европске пут опције	**1.0428**

Подаци преузети са: www.econ.yale.edu/~shiller/data/ie_data.xls

Закључак

Циљ овог рада био је увођење стохастичких диференцијалних једначина уз дефинисање свих потребних елемената и извођење модела Блек-Шолца кроз примену њихових својстава.

Предмет обраде рада био је подељен у две целине.

Први и већи део рада чинили су елементи потребни за конструкцију стохастичких диференцијалних једначина. На почетку смо навели навели дефиницију Брауновог кретања, његове облике, као и особине које смо касније користили, а затим смо увели и објаснили појам мартингала. Користећи те елементе, дефинисали смо стохастички интеграл, а потом извели и Итôву формулу, прво за најједноставнији, а затим и за сложеније случајеве. Тада смо имали све што је потребно за дефинисање стохастичких диференцијалних једначина. Њихово представљање постигли смо кроз примере који су највише у вези са оним на шта смо желели да их применимо у овом раду.

У другом делу рада уведени су појмови из финансијске математике на које смо применили стохастичке диференцијалне једначине. Потом смо објаснили шта су опције, које врсте опција постоје, који су елементи опција и од чега зависе, како се одређује њихова вредност у зависности од различитих параметара, а затим је представљена Блек-Шолцова парцијална диференцијална једначина, помоћу које смо извели формулу Блек-Шолца за одређивање вредности европских опција. Поменуту формулу смо и доказали, уз примену својстава стохастичких диференцијалних једначина.

Библиографија

[1] MAO XUERONG, *Stochastic Differential Equations And Applications*, Department of statistics and modelling science, University of Strathclyde, Glasgow, 2007.

[2] FIMA C. KLEBANER, *Introduction To Stochastic Calculus With Applications*, Imperial College Press, 2005.

[3] J. MICHAEL. STEELE, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer – Verlag, New York, 2001.

[4] СЛОБОДАНКА ЈАНКОВИЋ, *Елементи финансијске математике*, Скрипта са предавања, Београд, 2014.

[5] JOHN C. HULL, *Options, futures and other derivatives*, 5*th Edition*, Prentice Hall, New Yearsey, 2003.

[6] PAUL WILMOTT, JEFF DEWYNNE, SAM HOWISON, *Option pricing*, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.